КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №3 2013

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №3, 2013
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНИТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.,
заступник головного редактора, відповідальний за видання;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Данилов Вадим Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Левитський Сергій Михайлович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Маципура Володимир Тимофійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Oliynyk B.V. The normal structure of the diagonal limit of hyperoctahedral groups with doubling embeddings 7
Ponomarenko O.I. Discrete representations of random functions in normed spaces 10
Sergiienko M.P. How to test the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process 15

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

(до 150-річчя кафедри теоретичної та прикладної механіки)

Горошко О. О., Пучко Н. П. Кафедра теоретичної та прикладної механіки: 150 років науково-педагогічної роботи 21
Грінченко В. Т. Комп'ютер і механіка 30
Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Ильин Д. Н. Параметрический резонанс в задаче Ишлинского о скачкообразном продольном нагружении стержня 34
Фрейдин А. Б., Морозов Н. Ф., Вильчевская Е. Н. Моделирование фронтов химических реакций в деформируемых телах 38
Кушнір Р. М., Попович В. С. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання 42
Котельнікова А. С., Нікішов В. І. Вплив підводних перешкод на процес поширення поверхневих поодиноких хвиль 48
Галазюк В. А., Кіт Г. С. Температурне поле у просторі за теплового потоку у круглому отворі теплонепроникного екрану 52
Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Рябоконь С. А. Применение проекционно-итерационных схем МКЭ к решению задач упругопластического деформирования оболочек с отверстиями 55
Острик В. І., Улітко А. Ф., Щокотова О. М. Контакт з відривом штампа і пружного клина 59
Андрущенко В. О., Бендюг В. В., Борисейко О. В., Кононіченко М. В., Улітко І. А. Ефективність перетворення енергії у п'єзоелементах з розрізними електродами 63
Андрущенко В. О., Борисейко О. В., Улітко І. А., Яцків С. Ю. Спектр резонансних частот біморфних п'єзоелементів 66
Асташкін В. І., Гачкевич О. Р., Козакевич Т. В., Равська-Скотнічни А. Оптимізація залишкового напруженого стану сталевих пластин при дії рухомих джерел тепла за врахування структурних перетворень 69
Бай О. В., Бай Ю. П., Сторожев В. І. Ефекти високочастотної короткохвилевої локалізації електропружних хвиль в низькосиметричному п'єзокристалічному шарі 73
Бандура Л. А., Вовк І. В., Маципура В. Т. Розсіювання хвиль на куточку 77
Белова О. В., Дзюба А. П. Экспериментальное исследование влияния повреждений контура отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии 81
Богданов В. Р. Моделювання накопичення пластичних деформацій на основі числового розв'язування плоскої задачі із урахуванням процесу розвантаження матеріалу 85
Вайсфельд Н. Д., Мойсєєнок О. П. Антиплоска деформація клиношаруватого середовища 89
Вайсфельд Н. Д., Реут А. В. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для полого дважды усеченного конуса 93
Вовк І. В., Коновалюк Т. П. Особливості динаміки звукового поля при взаємодії точкових вихорів 98
Вовк І. В., Малюга В. С. Обтікання сфери в'язкою нестисливою рідиною 102
Гарт Э. Л. Сравнительный анализ двух моделей упругопластического деформирования пористых сред при использовании проекционно-итерационных схем МКЭ 106
Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Комп'ютерне моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах за електромагнітних навантажень 110
Георгиевский Д. В. Об «ортогональных эффектах» напряжённо-деформированного состояния в механике сплошной среды 114
Говоруха В. Б., Ходанен Т. В., Лобода В. В. Об электрических и магнитных граничных условиях на берегах трещины в пьезоэлектромагнитном материале 117
Горошко О. О., Лебедєва І. В. Параметричні коливання гіроскопічного маятника 121
Гуржій О. А., Шалденко О. В. Інтенсивні режими адвекції виділеної рідини в течії Діна 124
Дзюба П. А. Алгоритм кусково-поліноміальної апроксимації даних експериментальних випробувань 128
Дідківська О. М. Коливання резервуару з рідиною для від'ємних довжин маятникового підвісу 131
Жук Я. О. Методика оцінки залишкової міцності тонкостінного сталевого елемента конструкції при імпульсному тепловому опроміненні 134
Зражевський Г. М. Визначення оптимальних параметрів збудження форми коливань балки 138
Карнаухов В. Г. Термомеханіка зв'язаних полів в непружних матеріалах та елементах конструкцій при гармонічному навантаженні 142
Кирилова О. І. Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з жорсткими включеннями при коливаннях повздовжнього зсуву 146
Киричок І. Ф., Карнаухова Т. В. Осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів 150
Константінов О. В. Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного амортизатора 154
Краснопольська Т. С., Приходько Д. Ф., Гуржій О. А. Нелінійні моделі коливань консольного стрижня з малою жорсткістю на згин 158
Кривий О. Ф. Особливості поля напружень біля тунельної тріщини, яка виходить в площину 162

з'єднання двох різних анізотропних півпросторів
Кундрат М. М., Мельник Ю. В. Контактна взаємодія півплощини з навантаженою по верхній границі пружною накладкою 166
Лимарченко В. О. Поведінка трубопроводу на рухомій основі при імпульсному збуренні коливань 169
Лимарченко О. С., Тімохін О. П. Поведінка трубопроводу при закритичних швидкостях течії рідини 173
Лібов Д. Ю. Крайовий резонанс при неосесиметричній деформації пружного циліндра скінченної довжини 176
Лобода В. В., Шевельова А. Є., Тулін К. О. Дугова тріщина з зонами контакту між включенням і матрицею 180
Мартиненко М. А. Перша основна задача теорії пружності для тіла з циліндричною тріщиною 184
Мартиненко М. А. Аналітичний аналіз напружено-деформованого стану в тілі з циліндричною тріщиною 188
Маципура В. Т., Вовк І. В., Трунов О. О. Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі 192
Мольченко Л. В., Лоос І. І., Федорченко Л. М. Магнітопружність ортотропної гнучкої конічної оболонки з врахуванням ортотропної електропровідності 196
Петрищев О. Н., Михеева А. Н. Об одном способе решения задачи Лэмба 199
Петрищев О. Н., Романюк М. И. Возбуждение пространственно развитых волн Рэлея 202
Попов В. Г. Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву 205
П'ятецька О. В. Дисипативний розігрів та ефективність роботи сенсора при резонансних коливаннях пластини 209
Реут В. В., Роговский С. Т. Неразрезная полосовидная пластинка, ослабленная трещиной 213
Сенченков І. К., Оксенчук Н. Д. Оцінка ефектів термоструктурно механічної зв'язаності при імпульсному навантаженні півпростору 217
Середницька Х. І., Чумак К. А., Мартиняк Р. М. Термопружна трансформація міжфазних щілин з теплопроникним заповнювачем, періодично розташованих у біматеріальних структурах 220
Сидорчук О. А., Черняков Ю. А., Шнейдер В. П. Вплив текстури на пластичне деформування 224
Сулим Г. Т., Онишкевич В. М. Взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором при теплоутворенні на ділянці контакту 228
Сулим Г. Т., Турчин І. М., Колодій В. О. Динамічна плоска задача теорії пружності для радіально-шаруватого циліндра 232
Токовий Ю. В. Осесиметричні температурні напруження у пружному скінченному циліндрі за нагріву частини бічної поверхні 236
Флячок В. М. Термопружний аналіз шаруватих циліндричних оболонок з теплообміном 240
Шворак М. А. Термонапружений стан товстостінного циліндра скінченної довжини у випадку гладкого контакту 244

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Kolianova T.V. Influence of delay on character of stability of stationary points for mathematical model of purchased immunity. 249
Vergunova I.M. H-functions for the analysis of models of agritechnologies 252
Власюк А.П., Федорчук Н.А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта в процесі тепло-масоперенесення 256
Жирицький В.П. Структура та реалізація тестового завдання «Область на малюнку» у системі дистанційного навчання «VITAVA» 263
Кудін В.І. Метод базисних матриць та матрична гра у змішаних стратегіях 270
Мартинюк П.М. Порівняння чисельних розв'язків двовимірних задач сітковими та безсітковими методами 274
Марченко О.О. Застосування алгоритму ієрархічної кластеризації слів у неевклідовому семантичному лексичному просторі для автоматизації побудови ієрархічних структур онтології 280
Рутицька В.В. Про гарантовану множинну оцінку параметрів математичної моделі 284
Сільвейструк Л.М., Шишацька О.В. Обмеження атрибутів в моделях даних 288
Тодоріко Б.Д. Аналіз матричної гри у змішаних стратегіях як прямої задачі лінійного програмування методом базисних матриць 292
Шкільняк С.С. Семантичні властивості логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями 297

РАДІОФІЗИКА

Ivaniuta O.M. Features cells based on modifying carbon nanotubes 305
Данько В.П., Поданчук Д.В., Піденко С.С. Визначення аберацій короткофокусних лінз сенсором Шека-Хартмана 309
Колєнов С.О. Про складові фази диференційно-фазового фотоелектричного відгуку при скануванні площини перерізу p-n переходу в поперечному напрямку 313

СУЧАСНА ФІЗИКА

Барабаш О.В. Класичний аналог спіну в релятивістській теорії 321
Гоменюк О.В., Неділько С.Г., Бойко В.В., Шелудько В.І. , Вірко С.В. Механізми дисипації енергії збудження Cr^{3+} - центрів люмінесценції в кристалах подвійного фосфату калію-алюмінію 325
Захарченко І.В., Крилов О.В., Неділько С.Г., Робур Л.И. Модельний розрахунок спектра повздовжніх мод лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка 331
Мороз К.О. Вплив тиску на калоричні властивості *н*-парафінів та ароматичних вуглеводнів 337
Семенько М.П., Захаренко М.І., Калниш Т.В. Метод синтезу нанокомпозиційних матеріалів ТРГ-перехідний метал 339
Стащук В.С., Бондар В.М., Полянська О.П., Кудін В.Г., Філіпов Я.В., Чернуха Є.О. Оптичні та електронні властивості багатих на нікель сплавів системи Ni-Al-B-C 343
Храпатий С.В. Вивчення властивостей фулеренових плівок на кремнієвій підкладці 347

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.54

Б. В. Олійник[1], *к.ф.-м.н.*

Нормальна структура діагональної границі гіпероктаедральних груп з зануреннями дублювання

Розглянуто групу, що є діагональною границею гіпероктаедральних груп з зануреннями дублювання. Ця група реалізується також як скрізь щільна підгрупа групи ізометрій 2^∞-періодичного простору Хемінга. Охарактеризовано її нормальну структуру.

Ключові слова: гіпероктаедральна група, простір Хемінга, діагональна границя, вінцевий добуток, нормальний дільник.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, e-mail: bogdana.oliynyk@gmail.com.

B. V. Oliynyk[1], *PhD*

The normal structure of the diagonal limit of hyperoctahedral groups with doubling embeddings

The diagonal limit of hyperoctahedral groups with respect to doubling embeddings is considered. This group arises as an everywhere dense subgroup of the isometry group of the 2^∞-periodic Hamming space. We characterize its normal structure.

Key Words: hyperoctahedral group, Hamming space, diagonal limit, wreath product, normal subgroup.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, vul.Volodymyrska, 64, e-mail: bogdana.oliynyk@gmail.com.

Communicated by Prof. V. V. Kirichenko.

1. Consider the n-dimension Hamming space H_n, i.e. the space of all n-tuples $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, with the distance d_{H_n}. The distance d_{H_n} between points $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ is defined by the rule:

$$d_{H_n}(\bar{x}, \bar{y}) = |\{k : x_k \neq y_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}|.$$

It easy to see that the isometry group $IsomH_n$ of the n-dimension Hamming space H_n can be realized as the group of orthogonal matrices over the ring of integers $\mathbb{Z}$. Moreover, it is isomorphic to the wreath product $W_n = Z_2 \wr S_n$, where Z_2 is the cyclic group of order 2 and S_n is the symmetric group of degree n. In other words, the isometry group $IsomH_n$ decomposes into the semidirect product of its subgroup S_n and its normal subgroup

$$K_n = \underbrace{Z_2 \times \ldots \times Z_2}_{n}.$$

In this case S_n acts on K_n by permutations of coordinates of vectors. We can write every element $u \in W_n$ as a so-called table $u = [\sigma; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, where $\sigma \in S_n$, $a_i \in Z_2$, $1 \leqslant i \leqslant n$. The group operation in W_n is defined by the rule:

$$[\sigma; a_1, a_2, \ldots, a_n][\eta; b_1, b_2, \ldots, b_n] = [\sigma\eta; a_1 + b_{1^\sigma}, \ldots, a_n + b_{n^\sigma}], \quad (1)$$

where the symbol + denotes addition in Z_2. The table

$$[\sigma^{-1}; a_{1^{\sigma^{-1}}}, \ldots, a_{n^{\sigma^{-1}}}]. \quad (2)$$

is the inverse element to the element $[\sigma; a_1, \ldots, a_n]$. An element $u = [\sigma; a_1, \ldots, a_n]$ acts on a vector $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in Z_2^n$ by the rule:

$$t^u = (t_{1^\sigma} + a_1, \ldots, t_{n^\sigma} + a_n). \quad (3)$$

The isometry group $(IsomH_n, H_n)$ of Hamming space H_n is isomorphic as a permutation group to the group (W_n, Z_2^n) defined by (1)-(3).

Let K_n^0 be the set of all sequences $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K_n$ such that $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Denote by W_n' the commutator subgroup of the group W_n. We will need the following

Lema 1. *[1],[2] The commutator W_n' of the group W_n consists of all tables $[\sigma; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ such that $\sigma \in A_n$ and $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K_n^0$.*

2. The infinite sequence of positive integers $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ is said to be *periodic* if there exists a natural number k (*a period* of the sequence $\mathbf{a}$) such that the equality $a_i = a_{i+k}$ holds for all $i \in \mathbb{N}$. A periodic sequence $\mathbf{a}$ is called 2^∞*-periodic*

© B. V. Oliynyk, 2013

if there exists a nonnegative integer l such that the minimal period of $\mathbf{a}$ equals 2^l.

Define a metric $d_{H_{2^\infty}}$ on the set H_{2^∞} of all 2^∞-periodic sequences by the rule:

$$d_{H_{2^\infty}}((x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots)) = \\ = \frac{1}{k} d_{H_k}((x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_k)),$$

where k is a common period of sequences $(x_1,x_2,\ldots)$ and $(y_1,y_2,\ldots)$ from H_{2^∞}. The metric space $(H_{2^\infty}, d_{H_{2^\infty}})$ is said to be 2^∞-*periodic Hamming space*. This space was studied in [3] as a generalization of finite Hamming spaces to the infinite dimensional case.

The metric space H_{2^∞} admits another description using diagonal limits. A mapping

$$f_k : \frac{1}{k} H_k \to \frac{1}{2k} H_{2k}$$

is said to be *doubling* if it is determined as

$$f_k(x_1,\ldots,x_k) = (x_1,x_1,\ldots,x_k,x_k). \qquad (4)$$

The direct spectrum $\Phi = \langle \frac{1}{2^n} H_{2^n}, f_{2^n} \rangle$ of scaled Hamming spaces $\frac{1}{2^n} H_{2^n}$ is isometric to the space H_{2^∞}.

Recall that an embedding θ of a permutation group (G,X) into a permutation group (H,Y) is said to be strictly diagonal, if the restriction $\theta(G)$ on any orbit on the set Y is isomorphic to the group (G,X) (see [4]). The doubling defined by (4) induces a diagonal embedding φ_k of the isometry group $IsomH_{2^n}$ into the group $IsomH_{2^{n+1}}$. Then we obtain an embedding of $Z_2 \wr S_{2^n}$ into $Z_2 \wr S_{2^{n+1}}$ where K_{2^n} embeds into $K_{2^{n+1}}$ as we defined in (4) and S_{2^n} embeds into $S_{2^{n+1}}$ diagonally in sense of [4]. Denote by W_{2^∞} the diagonal limit of W_n. Note that

$$W_{2^\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_n. \qquad (5)$$

The group W_{2^∞} is an everywhere dense subgroup of the isometry group $IsomH_{2^\infty}$ of the 2^∞-periodic Hamming space (see [5]).

The subgroup W_{2^∞} admits a natural description using wreath products of group.

Denote by $S(\mathbb{N})$ be the symmetric group on the set positive integers. Let r be a positive integer. A permutation $\pi \in S(\mathbb{N})$ is said to be r-periodic if π acts on a positive integer n by the rule:

$$n^\pi = t^\pi + qr,$$

where $n = q \cdot r + t$, $0 \leqslant t < r$. All r-periodic permutations form a subgroup $S(r)$ of the group $S(\mathbb{N})$. This subgroup is isomorphic to the symmetric group S_r. The set of all 2^∞-periodic permutations form a subgroup S_{2^∞} in $S(\mathbb{N})$. This subgroup decomposes as a union of the increasing chain of subgroups $S(2) \subset S(4) \subset \ldots$, i.e.

$$S_{2^\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} S(2^i).$$

Similarly define the subgroup A_{2^∞}. Let $A(r)$ be the subgroup of the group $S(r)$ isomorphic to the alternating group A_r. Then A_{2^∞} is a union of the increasing chain of subgroups $A(2) \subset A(4) \subset \ldots$, in other words

$$A_{2^\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A(2^i).$$

Sequences of the form

$$[\pi, a_1, a_2, \ldots],\ \pi \in S_{2^\infty},\ a_i \in Z_2,\ (i \geqslant 1)$$

are elements of the wreath product $W = Z_2 \wr S_{2^\infty}$ of the permutation group $(S_{2^\infty}, \mathbb{N})$ with the cyclic group of order 2. The operations of multiplication and taking inverses are defined analogously to (1) and (2). An element $u \in W$ acts on a sequence $\bar{t} = (t_1, t_2 \ldots) \in Z_2^\infty$ in a similar to (1) way.

Now consider the set $\widehat{W}$ of all elements $[\pi, a_1, a_2, \ldots] \in Z_2 \wr S_{2^\infty}$ such that $(a_1, a_2, \ldots)$ is a 2^∞-periodic sequence. The set $\widehat{W}$ is a subgroup of the wreath product $Z_2 \wr S_{2^\infty}$. We call the group $\widehat{W}$ the 2^∞-*wreath product* of groups S_{2^∞} and Z_2.

It is not difficult to verify

Proposition 1. *The groups W_{2^∞} and $\widehat{W}$ are isomorphic.*

3. The set H_{2^∞} of all 2^∞-periodic sequences with coordinate-wise addition form a group. Denote it by K_{2^∞}. This group is isomorphic to a subgroup of 2^∞-wreath product of groups S_{2^∞} and Z_2. Denote by C the subgroup of K_{2^∞} containing only sequences $(0,0,\ldots)$ and $(1,1,\ldots)$.

Theorem 1. *The normal structure of the 2^∞-wreath product of group S_{2^∞} and Z_2 has the form*

$$E \lhd C \lhd K_{2^\infty} \lhd W'_{2^\infty} \lhd W_{2^\infty},$$

where W'_{2^∞} is the commutator subgroup of the group W_{2^∞}.

Proof. The proof of the theorem is divided into four parts.

1. We shall show that the equality

$$W'_{2^\infty} = A_{2^\infty} \cdot K_{2^\infty}$$

holds. Indeed, hyperoctahedral group W_n is a semidirect product of K_n and S_n. It follows from Lemma 1 that $W'_n = A_n \cdot K_n^0$. Using (5) we get that the equalities

$$W'_{2^\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W'_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \cdot K_n^0 = \\ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \cdot \bigcup_{i=1}^{\infty} K_n^0 \quad (6)$$

hold. But $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_n^0 = K_{2^\infty}$. Hence, from (6) we have

$$W'_n = A_{2^\infty} \cdot K_{2^\infty}.$$

2. Let $v = [e; b_1, b_2, \ldots]$ be an element of W_{2^∞} such that $(b_1, b_2, \ldots) \neq (0, 0, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots) \neq (1, 1, \ldots)$. We shall show that the normal closure L of the element v contains the subgroup K_{2^∞}. Note, that elements $[\eta; 0, 0, \ldots]$, $\eta \in S_{2^\infty}$ act on v as permutations of coordinates of the sequence $(b_1, b_2, \ldots)$. Assume that 2^l is the minimal period of $(b_1, b_2, \ldots)$. As $(b_1, b_2, \ldots) \neq (0, 0, \ldots)$ and $(b_1, b_2, \ldots) \neq (1, 1, \ldots)$, there exist b_i and b_j such that $b_i \neq b_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 2^l$. Denote by $(c_1, c_2, \ldots)$ the sequence obtained from the sequence $(b_1, b_2, \ldots)$ using the 2^l-periodic permutation, which permutes ith and jth coordinates inside the minimal period. Define an element $w = [\eta; 0, 0, \ldots]$ such that

$$w^{-1}vw = [\tau; c_1, c_2, \ldots).$$

Then the sequence $v + w^{-1}vw$ has only two units inside the minimal period. But elements of these type generate K_{2^∞}. Therefore, $K_{2^\infty} \subseteq L$.

3. Let $u = [\sigma; a_1, a_2, \ldots]$ be an element of W_{2^∞} such that $\sigma \neq e$. We shall show that the normal closure M of the element u contains the subgroup W'_{2^∞}. Indeed, define an element $v = [e; b_1, b_2, \ldots] \in W_{2^\infty}$ such that $(u, v) \neq [e; 0, 0, \ldots]$. Then $(u, v) = [e; c_1, c_2, \ldots]$. So, from the second part of the proof it follows that $K_{2^\infty} \subseteq M$.

Now define a table $w = [\nu; 0, 0, \ldots] \in W_{2^\infty}$ such that $(u, w) \neq [e; 0, 0, \ldots]$. Then $(u, w) = [\eta; q_1, q_2, \ldots]$, where $\eta \in A_{2^\infty}$ and $(q_1, q_2, \ldots) \in K_{2^\infty}$. As $K_{2^\infty} \subseteq M$, we have $A_{2^\infty} \subseteq M$. Hence $A_{2^\infty} \cdot K_{2^\infty} \subseteq M$ and from the first part of the proof we get $W'_{2^\infty} \subseteq M$.

4. The abelianization $W_{2^\infty}/W'_{2^\infty}$ of the group W_{2^∞} is a cyclic group of order 2. Hence W'_{2^∞} is a maximal subgroup of the group W_{2^∞}. From the second and third parts of the proof it follows that other nontrivial normal subgroup of W_{2^∞} are C and K_{2^∞} only. □

References

1. *Holmes C. V.* Commutator groups of monomial groups // Pacific J. Math. — 1960. — V. 10, № 4. — P. 1313-1318.

2. *Ore O.* Theory of monomial groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1942. — V. 51. — P. 15-64.

3. *Cameron P. J., Tarzi S.* Limits of cubes // Topology and its Applications. — 2008. — V. 155. — P. 1454–1461.

4. *Kroshko N.V., Sushchansky V.I.* Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings // Arch. Math. — 1998. — V. 71, № 3. — P. 173–182.

5. *Oliynyk B.V. , Sushchanskii V.I.* The isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences // Siberian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 54, № 1. — P. 124-136.

Received: 01.12.2013

УДК 519.21

О.І. Пономаренко[1], доцент

Дискретні зображення випадкових функцій в нормованих просторах

Розглядаються зображення випадкових функцій із значеннями в нормованих просторах у вигляді функціональних рядів з випадковими коефіцієнтами при широких припущеннях відносно їхніх аргументів та властивостей

Ключові слова: узагальнена випадкова функція другого порядку в нормованому просторі, зображення типу Карунена-Лоева, зображення базисного типу.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

E-mail: [1]*dmponoma@mts.com.ua*

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

O. I. Ponomarenko[1], Associate Professor

Discrete representations of random functions in normed spaces

The representations of random functions with values in normed spaces in the form of functional series with random coefficients are considered under wide assumptions with respect of their arguments and properties

Key words: generalized random function of second order in normed space, Karunen-Loéve type representation, basis type representation.

[1]National Taras Shevchenko University of Kuiv, 01033, Kyiv, 64, Volodymyrska str.

1. Introduction

In the theory of stochastic processes and random fields of second order the important role plays different discrete representations of such objects in the form of finite and infinite sums of functional members with random coefficients.

The most known such representations of Karhunen-Loéve type for scalar processes on segments of real line ([1]) and spectral expansions of scalar homogeneous random fields on compact homogeneous spaces ([2]).

The aim of this paper is investigation of discrete representations of random functions in more general assumptions about their domains and values. As sets of arguments of considered random functions we use different compact topological spaces, measurable spaces with positive finite measures and arbitrary sets. We also consider generalized random functions with values in arbitrary normed space X. The case when X is Hilbert space was studied in [3].

Now we give some facts and notations which are necessary in further.

Denote by $L_2(\Omega)$ Hilbert space of all complex second order random variables defined on some probability space (Ω, F, P) endowed by strong topology. Let X be a complex normed space and X^* be its topological dual space endowed by strong topology.

The generalized random element Ξ on Ω in X is continuous linear operator $\Xi : X^* \to L_2(\Omega)$. Every such element is generated by some usual random element ξ on Ω with values in some extension of space X (see[4]). The space of such random elements in X with denoted by $L(X^*, L_2(\Omega))$.

Let $\overline{L}(X^*, X^{**})$ be a space of all antilinear (or conjugate linear) continuous operators from $X*$ into X^{**} (second dual space for X). Define the expectation $\mathrm{E}\Xi \in X^{**}$ for $\Xi \in L(X^*, L_2(\Omega))$ by the equality $(\mathrm{E}\Xi)(x^*) = \mathrm{E}(\Xi x^*), x^* \in X^*$ and covariance operator $[\Xi, \Psi] \in \overline{L}(X^*, X^{**})$ of elements $\Xi, \Psi \in L(X^*, L_2(\Omega))$ by the equality

$$\mathrm{E}(\Xi x^*)(\Psi y^*) = ([\Xi, \Psi] y^*)(x^*), x^*, y^* \in X^*$$

The generalized random function of second order Ξ_t on set T is a mapping of T into $L(X^*, L_2(\Omega))$. Denote by m_t its mean function $m_t = \mathrm{E}\Xi_t, t \in T$ and by $R(t,s) = [\Xi_t, \Xi_s], t, s \in T$ its covariance function. If function Ξ_t is continuous on topological space T in strong topology of

© О.І. Пономаренко, 2013

$L(X^*, L_2(\Omega))$ the $R(t,s)$ is continuous on $T\times T$ in weak topology of $\overline{L}(X^*, X^{**})$ and vise versa.

Note that the class of covariance functions of the set of all second order random functions in X coinsides with the set of all positive definite $\overline{L}(X^*, X^{**})$ — valued operator kernel $R(t,s)$ on T (i.e. for all $n\in N, x_i^*\in X^*, t_i\in T, i=1,...,n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(R(t_i,t_j)x_j^*)(x_i^*)\geq 0).$$

2. Representations of Karhunen-Loéve type

Let T be a compact topological space, B be a σ-algebra of Borel sets in T and μ be a σ-additive finite measure on B such that $\mu(V)>0$ for every open set $V\in B$. Denote by $k(t,s)$ continuous complex-valued positive definite kernel on T and by $\{\varphi_j(t), j\in J\}$ complete orthonormal system of eigenfunctions corresponding to system of eigenvalues $\{\lambda_j, j\in J\}$, $\lambda_j>0$ of integral operator K,

$$K\varphi(t)=\int_T k(t,s)\varphi(s)\mu(ds), \varphi\in L_2(T,B,\mu), \tag{1}$$

$$K\varphi_j(t)=\lambda_j\varphi_j(t), j\in J,$$

$$\int_T \varphi_j(t)\overline{\varphi_i(t)}\mu(dt)=\delta_{ji}=\begin{cases}0, & j\neq i,\\ 1, & j=i.\end{cases}$$

Consider the generalized random function $\Xi_t, t\in T$ in X with covariance function of the form

$$R(t,s)=k(t,s)A, t,s\in T,$$

where A is positive operator from $\overline{L}(X^*, X^{**}), (Ax^*)(x^*)>0$ for all $x^*\neq 0$.

Theorem 1. *Under forgoing assumptions the random function Ξ_t is continuous in uniform topology of $L(X^*, L_2(\Omega))$ and admits representation*

$$\Xi_t=\sum_{j\in J}\sqrt{\lambda_j}\varphi_j(t)\Phi_j, t\in T, \tag{2}$$

where Φ_j are random elements from $L(X^*, L_2(\Omega))$ such that $\left[\Phi_j,\Phi_i\right]=\delta_{ji}A$, $j,i\in J$. The sery (2) is uniformly convergent on T in uniform topology of $L(X^*, L_2(\Omega))$. The covariance function of Ξ_t admits the representation

$$R(t,s)=\sum_{j\in J}\lambda_j\varphi_j(t)\overline{\varphi_i(s)}A, \tag{3}$$

where the sery (3) is uniformly convergent on $T\times T$ in uniform topology of $\overline{L}(X^*, X^{**})$.

For the proof note that the representation (2) follows from theorem 2.1 in [3]. Now we apply to the representation (2) the theorem about representations of generalized random functions in vector topological spaces (theorem 2, [5]). Then we have the representation (2). The indicated convergence of the sery (2) in consequence of type of convergence of sery (3).

Example 1. In the case, when

$$R(t,s)=e^{-\alpha|t-s|}A, \alpha>0, t,s\in[-\ell,\ell], \ell>0,$$

Ξ_t is generalized Orstein-Uhlenbeck process in X and

$$\Xi_t=\sum_{j=0}^{\infty}(B_j\cos a_j t\Phi_j^{(1)}+C_j\sin b_j t\Phi_j^{(2)}),$$

where B_j and C_j are some normalization constants, a_j and $b_j, j=1,2,3...$ are roots of equations $a_j(\ell a_j)=\alpha$, $b_j(\ell b_j)=\alpha$ and elements $\Phi_j^{(i)}\in L(X^*, L_2(\Omega))$ are such that $\left[\Phi_j^{(p)},\Phi_i^{(q)}\right]=\delta_{pq}\delta_{ji}A$.

In more general situation Ξ_t is generalized weakly stationary process in X with continuous time and covariance function of the form

$$R(t,s)=k(t-s)A,$$

where k is real continuous positive definite function. Then in accordance with theorem 1 process Ξ_t, $t\in[-\pi,\pi]$ admits random Fourier expansion with random orthogonal coefficients $\Phi_0, \Phi_k^r, r=1,2$ of the form

$$\Xi_t = \sqrt{\frac{a_0}{2}}\Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}(\Phi_n^1\cos nt + \Phi_n^2\sin nt)$$

because operator K with kernel $k(t-s)$ has eigenvalues $\lambda_n = \pi a_n$, where

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t)\cos ntdt\,, n = 0,1,2,...$$

and two eigenfunctions $\cos nt$ and $\sin nt$ correspond for the case $n \geq 1$ to every λ_n and eigenfunction $\varphi_0(t) \equiv 1$ corresponds to λ_0.

In particular, when $k(t) = \cos^2 t$ the operator K has nonzero eigenvalues $\lambda_0 = \pi$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{2}$ with corresponding eigenfunctions $\varphi_0(t) \equiv 1$, $\varphi_2^{(1)}(t) = \cos 2t$, $\varphi_2^{(2)}(t) = \sin 2t$ and process Ξ_t is finite sum with three members.

Example 2. Let $\Xi_t, t \in M_\ell^n = \times_{i=1}^n [0, \ell_i]$, $\ell = (\ell_1,...,\ell_n), n \geq 1$ be a random function in X with covariance

$$R(t,s) = \left(\prod_{i=1}^{n} min(t_i, s_i)\right)A,\ t = (t_1,...,t_n),$$
$$s = (s_1,...,s_n).$$

This function is generalized Chentsov-Wiener field on $M_\ell^n, n > 1$ with orthogonal n-dimensional increments and in case $n = 1$, when Ξ_t is Gaussian, is generalized Brownian motion in space X. Ξ_t has the representation

$$\Xi_t = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^n\sqrt{\ell_1...\ell_n}}{\pi^n}\times$$
$$\times\sum_{j\in Z_+^n}\left(\prod_{r=1}^{n}\frac{\sin(2j_r+1)\pi t_r/2\ell_r}{(2j_r+1)}\right)\Phi_j,$$
$$t \in M_\ell^n, \Phi_j \in L(X^*, L_2(\Omega)), \left[\Phi_j, \Phi_i\right] = \delta_{ij}A.$$

Example 3. Let $\Xi_t, t \in M_\ell^n$ be random function in X with covariance

$$R(t,s) = \left(\prod_{r=1}^{n}\ell_r^{-1}[\ell_r \min(t_r, s_r) - t_r s_r]\right)A.$$

Then Ξ_t admits the representation

$$\Xi_t = \frac{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\ell_1...\ell_n}}{\pi^n}\sum_{j\in N^n}\left(\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{j_r}\sin\frac{j_r\pi t_r}{\ell\partial_r}\right)\Phi_j,$$

$t \in M_l^n, \Phi_j \in L(X^*, L_2(\Omega)), \left[\Phi_j, \Phi_i\right] = \delta_{ij}A,$
$\mathrm{N} = \{1,2,...\}$.

When $n = 1, \Xi_t$ is "stochastic bridge" on $[0, \ell]$ and Brownian bridge if Ξ_t is Gaussian, when $n = 2$ Ξ_t is "stochastic sheet" on $[0, \ell]^2$ and Brownian sheet in X if Ξ_t is Gaussian.

3. Discrete representations of basic type

The discrete representation of basis type for generalized random function $\Xi_t, t \in T$ (T is nonempty set) in space X is expansion of the form

$$\Xi_t = \sum_{j\in J}\alpha_j(t)\Phi_j, t \in T,$$

where $\{\Phi_j, j \in J\}$ is system of elements from $L(X^*, L_2(\Omega))$ and $\{\alpha_j(t), j \in J\}$ is corresponding set of numerical functions, and expansion is unique (i.e. for given Φ_j functions $\alpha_j(t)$ are defined by unique way or for given $\alpha_j(t)$ elements Φ_j are defined by unique way).

Example 4. Let $\Xi_q, q \in Q$ be a continuous (in strong topology of $L(X^*, L_2(\Omega))$) homogeneous random function in X on compact homogeneous space Q with compact transformation group G, i.e. $\mathrm{E}\Xi_q = const$ and for all $g \in G, p, q \in Q$ $R(gp, gq) = R(p, q)$. Then Ξ_q admits expansion with respect to system of spherical functions $\{\psi_{ij}^{(\lambda)}(q), i = 1,..., d_\lambda, j = 1,..., r_\lambda, \lambda = 1,2,...\}$ on Q:

$$\Xi_q = \sum_{\lambda}\sum_{i=1}^{d_\lambda}\sum_{j=1}^{r_\lambda}\psi_{ij}^{(\lambda)}(q)\Phi_{ji}^{(\lambda)}, q \in Q, \qquad (4)$$

$$\Phi_{ij}^{(\lambda)} = \left(\int_Q |\psi_{ij}^{\lambda}(q)|^2 dq \right)^{-1} \int_Q \overline{\psi_{ij}^{(\lambda)}(q)} \Xi_q dq \in L(X^*, L_2(\Omega)),$$

where dq is G-invariant measure on Q and last integral is interpreted in strong sense. Representation (4) has many realization for different types of compact homogeneous spaces and compact groups (see [3], [6]).

In particular, when Q is sphere S_2 in R^3 with center in 0 with spherical coordinates of the points (θ, φ) and G in rotation group $SO(3)$ the homogeneous random field $\Xi_{\theta,\varphi}$ on S_2 has the expansion

$$\Xi_{\theta,\varphi} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^{m}(\theta, \varphi) \Phi_m^{\ell},$$

where $\{Y_m^{\ell}(\theta, \varphi), m = -\ell, ..., \ell; \ell = 0,1,... \}$ is the system of spherical harmonics on S_2 and

$$\Phi_m^{\ell} \in L(X, L_2(\Omega)),$$

$$[\Phi_m^{\ell}, \Phi_j^k] = \delta_{mj} \delta_{\ell k} F_m, F_m \in \overline{L}(X^*, X^* *),$$

$$(F_m(x^*))(x^*) \geq 0, x^* \in X^*.$$

In the case of homogeneous field Ξ_t on sphere S_{n-1} in R^n with center in 0 with respect to rotation group $SO(n)$ Ξ_t has representation in the form of sery with members which are products of hyperspherical harmonics

$$Y_{\ell, m_1, ..., m_{n-3}, \pm m_{n-2}}(\theta_1, ..., \theta_{n-2}, \varphi)$$

$$\ell = 0,1,2,..., 0 \leq m_{n-2} \leq m_{n-3} \leq ... \leq m_1 \leq \ell$$

and random elements

$$\Phi_{\ell, m_1, ..., m_{n-3}, \pm m_{n-2}} \in L(X, L_2(\Omega))$$

with covariance operators which are depends only on ℓ (there $(\theta_1, ..., \theta_{n-2}, \varphi)$ are spherical coordinates of point from S_{n-1}).

Now suppose that set T is endowed by σ-algebra of subsets A with finite measure μ on A. Let $\Xi_t, t \in T$ be a random function in X with covariance $R(t,s) = k(t,s) A, t, s \in T$, where positive definite kernel

$$k(t,s) \in L_2(T \times T, A \times A, \mu \times \mu). \quad (5)$$

If $\{\varphi_j(t), j \in J\}$ and $\{\lambda_j, j \in J\}, \lambda_j > 0$ are orthonormal system of eigenfunctions and system of corresponding eigenvalues for integral operator K of the form (1) in $L_2(T, A, \mu)$, then

$$k(t,s) = \sum_{j \in J} \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}, \quad (6)$$

where sery is convergent in $L_2(T \times T, A \times A, \mu \times \mu)$.

Suppose that elements of the set J is numerated in order of decreasing of λ_j with taking in account of corresponding multiplicity. Consider elements

$$\Phi_j = \int_T \overline{\varphi_j(s)} \Xi_s \mu(ds) \in L(X^*, L_2(\Omega)),$$

It is easy to see that

$$\left[\Phi_j, \Phi_i \right] = \delta_{ji} \lambda_j A, \left[\Xi_t, \Phi_j \right] = \lambda_j \varphi_j(t) A. \quad (7)$$

Now consider the approximation of Ξ_t by the sums $\Xi_t^n = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \Phi_j$. For every $x^* \in X^*$ we have

$$\mathrm{E} | \Xi_t x^* - \Xi_t^n x^* |^2 =$$

$$= \left[k(t,t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\varphi_j(t)|^2 \right] \left(A x^* \right)(x^*).$$

Then using (6) we obtain that

$$\int_T \mathrm{E} | \Xi_t x^* - \Xi_t^n x^* |^2 \mu(dt) \to 0 \text{ when } n \to \infty \quad (8)$$

(for comparison, see [3]). Hence the following result is true.

Theorem 2. *Let $\Xi_t, t \in T$ be a random function in X for which the assumption (5) take place. Then Ξ_t admits the representation*

$$\Xi_t = \sum_{j \in J} \varphi_j(t) \Phi_j, t \in T,$$

where $\Phi_j \in L(X^*, L_2(\Omega))$ satisfy the relations (7) and sery is convergent in the sense of relation (8).

Let T be a nonempty set and $k(t,s)$ be a complex-valued positive definite kernel on T.

Theorem 3. *Let* $\Xi_t, t \in T$ *be a random function in* X *with covariance* $R(t,s) = k(t,s)A$. *Then there exists such system of complex-valued* ω*-independent (in Krein's sense, see [7]) functions* $\{\alpha_j(t), j \in J\}$ *on* T, *which defined up to unitary transformation, that*

$$R(t,s) = \sum_{j \in J} \alpha_j(t)\overline{\alpha_j(s)}A, t, s \in T, \qquad (9)$$

$$\Xi_t = \sum_{j \in J} \alpha_j(t)\Phi_j, \Phi_j \in L(X^*, L_2(\Omega)), \quad (10)$$

where non more than countable summands are nonzero and $\left[\Phi_i, \Phi_j\right] = \delta_{ij}A$. *The sery (9) us convergent in uniform topology of* $\overline{L}(X*, X**)$ *under every* $t, s \in T$ *and sery (10) is convergent in uniform topology of* $L(X^*, L_2(\Omega))$ *under every* $t \in T$.

For the proof we first of all note that expansion (9) is consequence of Krein expansion for kernel $k(t,s)$ (see [7],[3]). Then expansion (10) may be obtained by application of theorem 2 from [5] to expansion (9). Indicated convergence of sery (10) follows from type of convergence of sery (9).

Example 5. Let kernel $k(t,s)$ admits the Karhunen factorization

$$k(t,s) = \int_\Lambda f(t,\lambda), \overline{f(s,\lambda)}\mu(d\lambda), \qquad (11)$$

where $f(t,\cdot) \in L_2(\Lambda, A, \mu)$ (there μ is positive measure on measurable space (Λ, A)). Denote by $\{g_j(\lambda), j \in J\}$ an orthonormal base in $L_2(\Lambda, A, \mu)$. Then we have representations (9),(10) with the functions

$$\alpha_j(t) = \int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\mu(d\lambda). \qquad (12)$$

In particular, for random field $\Xi_t, t \in M^n = [0, 2\pi]^n$ in X of example 2, using the representation $k(t,s)$ with help of indicator function $1_t(\lambda), \lambda \in M^n$ of parallelepiped $\times_{r=1}^n [0, t_r]$, $t = (t_1, ..., t_n) \in M^n$ of the form $k(t,s) = (1_t, 1_s)_{L_2(M^n)}$, we have that

$$\Xi_t = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j \in Z^n} \prod_{r=1}^n \frac{(1 - e^{ij_r t_r})}{ij_r}\Phi_j, t \in M^n.$$

Example 6. When in representation (11)

$$f(t,\lambda) = \left(\frac{2h\Gamma(\frac{3}{2} - h)}{\Gamma(h + \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2h)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(\frac{1}{\lambda})^{h-\frac{1}{2}} (t - \lambda)^{h-\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. -(h - \frac{1}{2})\lambda^{\frac{1}{2}-h} \int_\lambda^t u^{h-\frac{3}{2}} (u - \lambda)^{h-\frac{1}{2}} du \right], h \in (0,1),$$

the mean $\mathrm{E}\Xi_t \equiv 0$ and

$$R(t,s) = \left(\int_0^{\min(t,s)} f(t,\lambda) f(s,\lambda) d\lambda \right) A,$$

then process Ξ_t is generalized fractional Brownian motion in X with Hurst index h if it is Gaussian. For process Ξ_t the representation (10) is true with

$$\alpha_j(t) = \int_0^t f(t,\lambda) g_j(\lambda) d\lambda, \; j \in J, t \in [0, \ell],$$

where $\{g_j(\lambda)\}$ is orthonormal base in $L_2[0, \ell]$.

Список використаних джерел

1. *Boulinski A.V. Shiriaev A.N. Theory of stochastic processes.* - M.: Fizmatgiz, 2003. — 399 p.
2. *Yaglom A.M.* Second-order homogeneous random fields. // Proc. Fourth Berkely Symp.on Math. Stat. and Probab., Vol.II, Univ. Calif. Press, 1961, p. 583-622.
3. *Ponomarenko O.I.* Discrete representations of random functions of second order I.// Theory Probab. and Math. Stat. 86, 2012, p.164-173.
4. *Ponomarenko O.I.* Random linear functionals of second order I. // Theory Probab. and Math. Stat., 54,1997, p. 145-158.
5. *Ponomarenko O.I.* Integralni zobrazhennia vypadkovyh funktsij zi znachenniamy v lokalno-opuklyh prostorah. // Теорія ймовір. та матем. статист. V.46, 1992, p.132-141.
6. *Ponomarenko O., Perun Y.* Multivariate random fields on some homogeneous spaces. Theory of Stoch. Processes, vol. 14(30), no.3-4, 2008, p.104-113.
7. *Krein M.G.* Ermitovo polozhitelnye yadra na odnorodnyh prostranstvah. I. // Ukr. Math, Journ.,V .1,4,1949, p.64-98.

Received 22.12.2012

УДК 519.2

М.П. Сергієнко[1], аспірант

Критерій перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції Гауссового стохастичного процесу

Метод мажоруючих мір застосовується для побудови критерію перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції Гауссового стохастичного процесу.

Ключові слова: метод мажоруючих мір, простір Орлича, коваріаційна функція.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

M.P. Sergiienko, Postgraduate

How to test the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process

Method of majorizing measures is applied for constructing the criterion for testing the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process.

Key Words: method of majorizing measures, Orlicz spase, covariance function.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

E-mail: [1]koljasergienko@gmail.com

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

Introduction

In this paper we propose some inequalities of the distribution of supremum of some correlogram form of the stochastic processes. These estimates are applying for constructing the criterion of hypothesis testing on covariance functions of these processes.

1 Definitions and properties of some elements from the Orlicz space

Definition 1. *A function* $U(x),\ x \in \mathbf{R}$ *is called an Orlicz N-function if it is continuous, even, convex and*

1) $U(0) = 0,\ U(x) > 0$ *при* $x \neq 0$,

2) $\lim_{x\to 0} \frac{U(x)}{x} = 0$,

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{U(x)}{x} = \infty$.

Let $(\mathbf{T}, \rho)$ be a compact metric space and let $\mathcal{A}$ be a Borel $\sigma-$algebra on $(\mathbf{T}, \rho)$. Let $\mu(\cdot)$ be a finite measure on $(\mathbf{T}, \mathcal{A})$. Let $X = \{X(t),\ t \in \mathbf{T}\}$ be a separable stochastic process such that the sample path of X are measurable with respect to $\mathcal{A}$ and $X \in L_U(\Omega)$, where $U(x)$ -N-function.

Let there exist functions $\sigma_t = \{\sigma_t(h), h > 0\}, t \in \mathbf{T}$ such that:

1) $\sigma_t(h) \geqslant 0;\ \sigma_t(h)$ increases as $h > 0$;

2) $\sigma_t(h) \to 0;\ \sigma_t(h)$ is continuous from the right;

3) $\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} \|X(t) - X(s)\|_U \leqslant \sigma_t(h)$.

Note that these properties has the function

$$\sigma_t(h) = \sup_{\rho(t,s)\leqslant h} \|X(t) - X(s)\|_U,$$

if the process $X(t)$ is continuous in the norm $\|\cdot\|_U$.

Denote by $\sigma_t^{(-1)}(v)$ the generalized inverse to $\sigma_t(h)$, that is

$$\sigma_t^{(-1)}(v) = \sup\{h :\ \sigma_t(h) \leqslant v\}.$$

Let

$$d(u, v) = \|X(u) - X(v)\|_U$$

and let $\mathbf{S}$ be a set from $\mathcal{A}$ such that

$$(\mu \times \mu)\{(u, v) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S},\ \rho(u, v) \neq 0\} > 0.$$

Let $\varepsilon_k(t) > 0,\ k = 1, 2, \ldots$ be a sequence such that $\varepsilon_k(t) > \varepsilon_{k+1}(t), \varepsilon_k(t) \to 0$ as $k \to \infty$, i $\varepsilon_1(t) = \sup_{s\in\mathbf{S}} \rho(t, s)$. Let

$$B_t(U) = \{s : \rho(t, s) \leqslant u\},$$

$$B_t^k = B_t(\varepsilon_k(t)),\ \mu_k(t) = \mu_k(t, \mathbf{S}) = \mu(B_t^k \cap \mathbf{S}).$$

Definition 2. *N-function* $U(x)$ *belongs the class* Δ^2 *if there exists constants* $Q \geqslant 1$ *and* $y_0 \geqslant 0$ *such that* $U^2(x) \leqslant U(Qx)$, *while* $x \geqslant y_0$.

© М.П. Сергієнко, 2013

Definition 3. *A stochastic process* $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ *belongs the class* Δ^2 *if* $X \in L_U(\Omega)$, *where* $U \in \Delta^2$. *In this case we will write* $X \in \Delta^2$.

Lemma 1. *[1] Let* $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ *be a separable stochastic process from the class* Δ^2 *and* $\gamma(v)$ *be an increasing function. Let the next condition be satisfied*

$$\sup_{t\in\mathbf{S}} \int_0^{\delta_1(t)} U^{(-1)}\left((\nu_t(u))^{-1}\right) du < \infty, \quad (1)$$

where

$$\delta_1(t) = z\big(2\sigma_t(\sup_{t\in\mathbf{S}} \rho(t,s))\big),$$

$$\nu_t(u) = \mu\left(B\left(t, \sigma_t^{(-1)}\left(z^{(-1)}(u)/2\right)\right) \cap \mathbf{S}\right).$$

Then for any $0 < p < 1$ *the next inequality holds true with probability one*

$$\sup_{t\in\mathbf{S}} \left|X(t) - \int_{\mathbf{S}} X(u)\frac{d\mu(u)}{\mu(\mathbf{S})}\right| \leqslant \frac{\eta}{p(1-p)} \times$$

$$\times \sup_{t\in\mathbf{S}} \left[Q\int_0^{\min\{\delta_1(t)p, r_0\}} U^{(-1)}\left((\nu_t(u))^{-1}\right) du + \right.$$

$$\left. + Z(t)\right] = \eta a_p, \quad (2)$$

where

$$\eta = \left\| \frac{(X(u) - X(v))\gamma(d(u,v))}{d(u,v)} \right\|_{U,\mu\times\mu}^{S\times S},$$

r_0 *is a number such that* $(\nu_t(u))^{(-1)} \geqslant U(r_0)$, *if* $u \leqslant r_0$;
$Z(t) = 0$ *if* $\delta_1(t)p \leqslant r_0$ *and*

$$Z(t) = \int_{\min\{\delta_1(t)p, r_0\}}^{\delta_1(t)p} U^{(-1)}\left((\nu_t(u))^{-2}\right) du,$$

if $\delta_1(t)p \geqslant r_0$.

Consider now applications of this lemma for processes from the space $L_U(\Omega)$ with N-function $U(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$. This N-function $U(x)$ belongs to class Δ^2 with $Q = 2,\ y_0 = 0$.

Theorem 1. *Let all assumptions of Lemma 1 be satisfied for the* N*-function* $U(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$. *Then for all* $x \geqslant \hat{\gamma}$ *the following inequality holds true*

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant 2\exp\left\{-\ln(1 + \frac{1}{A(\mathbf{S})})\frac{x}{\hat{\gamma}}\right\}, \quad (3)$$

where $\hat{\gamma} = \sup_{u,v\in\mathbf{S}} \gamma(d(u,v))$,

$$\eta = \left\| \frac{(X(u) - X(v))\gamma(d(u,v))}{d(u,v)} \right\|_{U,\mu\times\mu}^{S\times S},$$

$$A(S) = \int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}} d(\mu(u)\times\mu(v)).$$

Proof. Lets put $d(\mu(u)\times\mu(v)) = d\mu$. It is easy to see that

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \left(\exp\left\{\frac{\eta}{x}\right\} - \frac{\eta}{x} - 1\right) d\mu > 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \left(\exp\left\{\frac{\eta}{x}\right\} - 1\right) d\mu > 1\right\}. \quad (4)$$

Since

$$\exp\left\{\frac{|(X(u) - X(v))\gamma(d(u,v))|}{x}\right\} - 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}}\left(\exp\left\{\frac{|(X(u) - X(v))\hat{\gamma}|}{x}\right\} - 1\right),$$

then for all $q > 1$ the next relations hold

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant$$

$$\mathbf{P}\left\{\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}} \exp\left\{\frac{|(X(u) - X(v))\hat{\gamma}|}{d(u,v)x}\right\} d\mu \right.$$

$$\left. > 1 + A(\mathbf{S})\right\} \leqslant \mathbf{E}\left(\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}} \times \right.$$

$$\left. \exp\left\{\frac{|(X(u) - X(v))\hat{\gamma}|}{d(u,v)x}\right\} d\mu\right)^q (1 + A(\mathbf{S}))^{-q} \leqslant$$

$$\left(\frac{A(\mathbf{S})}{1 + A(\mathbf{S})}\right)^q \mathbf{E}\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{q|(X(u) - X(v))\hat{\gamma}|}{d(u,v)x}\right\} \frac{d\mu}{A(\mathbf{S})}. \quad (5)$$

If we take $q = \frac{x}{\hat{\gamma}}$, then for $x \geqslant \hat{\gamma}$ we will obtain

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant \left(\frac{A(\mathbf{S})}{1 + A(\mathbf{S})}\right)^{\frac{x}{\hat{\gamma}}} \times$$

$$\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}} \mathbf{E}\exp\left\{\frac{|(X(u) - X(v))|}{d(u,v)}\right\} \frac{d\mu}{A(\mathbf{S})}$$

$$\leqslant 2\left(\frac{A(\mathbf{S})}{1 + A(\mathbf{S})}\right)^{\frac{x}{\hat{\gamma}}} = 2\exp\left\{-\ln(1 + \frac{1}{A(\mathbf{S})})\frac{x}{\hat{\gamma}}\right\}.$$

The Theorem 1 is proved.

2 How to test the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process

Assume that $Y = \{Y(t), t \in \mathbf{T}\}$ is a separable real-valued stationary Gaussian process with $\mathbf{E}Y(t) = 0$ and continuous correlation function

$$B(\tau) = \mathbf{E}Y(t+\tau)Y(t).$$

Lets consider the sample correlation function (correlogram)

$$\widehat{B}_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t+\tau)Y(t)dt, \quad 0 \leqslant T \leqslant \infty.$$

Theorem 2. *The next inequality holds true for correlogram $\widehat{B}_T(\tau)$ of correlation function $B(\tau)$*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant\tau\leqslant S}|B(\tau) - \widehat{B}_T(\tau) - \frac{1}{S}\int_0^S B(u)du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}_T(u)du| > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\{-\ln(1+\frac{1}{A(S)})\frac{x}{\hat{\gamma}|a_p|}\},$$

where $x \geqslant 1$.

Proof. This theorem is a consequence of Lemma 1 and Theorem 1 for $X(t) = B(t) - \widehat{B}_T(t)$, where $\mathbf{S} = [0, S]$. Here $X(t) = B(t) - \widehat{B}_T(t)$ is square Gaussian stochastic process and

$$\|\eta\| \leqslant \sqrt{\frac{C}{\ln 2}}\left(\mathbf{E}\eta^2\right)^{1/2},$$

where

$$C = \inf_{r\in(0,1)} r^{-2}|\ln(1-r)| - r^{-1}.$$

The Theorem 2 is proved.

Let H be a hypothesis which for $0 \leqslant \tau \leqslant T$ lie down that correlation function of Gaussian stochastic process is equals to $B(\tau)$. We take $\widehat{B}_T(\tau)$ as an estimate of $B(\tau)$. Let consider next test.

Criterion 1. *Let find x_α for fixed α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ that*

$$f(x_\alpha) = \alpha,$$

where $f(x) = 2\exp\left\{-\ln(1+\frac{1}{A(S)})\frac{x}{\hat{\gamma}|a_p|}\right\}$.

Hypothesis that the covariance function of the process $X(t)$ is $B(\tau)$ for $0 \leqslant \tau \leqslant T$ is accepted if

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant S}\left|B(\tau) - \widehat{B}_T(\tau) - \frac{1}{S}\int_0^S B(u)du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}_T(u)du\right| < x_\alpha$$

and is rejected otherwise.

Example 1. *Let consider next function $B(f) = \exp\{-f^2\}$. Let put $Z_T(f) = \widehat{B}_T(f) - B(f), \quad f \geqslant 0$. Using the formula (6.1.3) from [2, p.168] we will obtain*

$$\mathbf{E}\left(Z_T(u) - Z_T(v)\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)[(B(t-u) - B(t-v)) \cdot$$

$$\cdot (B(t+u) - B(t+v)) +$$

$$B(t)\left(2B(t) - B(t+u-v) - B(t-(u-v))\right)]\,dt$$

Let put $h = u - v \geqslant 0$ and estimate

$$|2B(t) - B(t+u-v) - B(t-(u-v))| \leqslant$$

$$2|\exp\{-t^2\} - \exp\{-(t+h)^2\}| +$$

$$|\exp\{-(t+h)^2\} - \exp\{-(t-h)^2\}| =$$

$$= 2A + B.$$

$$A = \exp\{-t^2\}|1 - \exp\{t^2 - (t+h)^2\}| \leqslant$$

$$\leqslant 2th + h^2$$

$$B = \exp\{-(t-h)^2\}\times$$

$$\times|\exp\{(t-h)^2 - (t+h)^2\} - 1| \leqslant 4th.$$

$$|B(t-u) - B(t-v)| \leqslant 2.$$

$$|B(t+u) - B(t+v)| = \exp\{-(t+v)^2\}\times$$

$$\times|\exp\{(t+v)^2 - (t+u)^2\} - 1| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-(t+v)^2\}(2th + 2Sh).$$

$$\left|1 - \frac{t}{T}\right| \leqslant 1, \quad t \in [0, T].$$

So,

$$|\mathbf{E}\left(Z_T(u) - Z_T(v)\right)^2| \leqslant$$

$$\frac{4}{T}\int_0^T \exp\{-(t+v)^2\}(2th + 2Sh)dt +$$

$$+\frac{2}{T}\int_0^T \exp\{-t^2\}(4th + 2h^2 + 4th)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{12h}{T} + \frac{6hS\sqrt{\pi}}{T} = h\frac{12 + 6S\sqrt{\pi}}{T}.$$

This estimate gives us $\sigma_t(h)$:

$$\sigma_t(h) = \sqrt{hC_{ST}}, \quad C_{ST} = \frac{12 + 6S\sqrt{\pi}}{T}\frac{C}{\ln 2}.$$

Then

$$\sigma_t(h)^{(-1)} = \frac{h^2}{C_{ST}}.$$

Functions $\delta_1(t)$ *and* $\nu_t(u)$ *will be next:*

$$\delta_1(t) = z(2\sqrt{tC_{ST}}),$$

$$\nu_t(u) = \mu\left(B(t, \frac{u^2}{C_{ST}}) \cap [0, S]\right).$$

Here we will obtain $\nu_t(u) \geqslant \frac{u^2}{C_{ST}}$. *Let put* $\gamma(y) = 1$. *Then*

$$z(y) = y, \quad z^{(-1)}(y) = y, \quad \hat{\gamma(y)} = 1, \quad A(S) = S^2.$$

Hence

$$a_p \leqslant \frac{1}{p(1-p)} \sup_{0\leqslant t\leqslant S}\left(2\int_0^{2\sqrt{tC_{ST}}p} \ln\left(2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2C_{ST}}{u^2}\right) du\right) = \frac{1}{p(1-p)} \times$$

$$\left(2\int_0^{2\sqrt{SC_{ST}}p} \ln\left(2 + \frac{2C_{ST}}{u^2}\right) du\right) =$$

$$= \frac{4}{p(1-p)}\left(\sqrt{12 + 6S\sqrt{\pi}}p \ln\left(2 + \frac{1}{2T}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{12 + 6S\sqrt{\pi}}{T} \arctan(2\sqrt{T}p)\right).$$

So, the next estimate holds true, while $x > 1$

$$\mathbf{P}\Big\{ \sup_{0\leqslant\tau\leqslant S} |B(\tau) - \widehat{B}_T(\tau) - \frac{1}{S}\int_0^S B(u)du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}_T(u)du| > x\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\ln(1 + \frac{1}{S^2})x \times \right.$$

$$\times \left[\frac{4}{p(1-p)}\left(\sqrt{12 + 6S\sqrt{\pi}}p \ln\left(2 + \frac{1}{2T}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{12 + 6S\sqrt{\pi}}{T} \arctan(2\sqrt{T}p)\right)\right]^{-1}\Bigg\}.$$

for separable square-Gaussian process $X(t), t \in [0, T]$ *when it is true that*

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} (\mathbf{E}(X(t) - X(s))^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sigma(h) = \sqrt{hC_{ST}}$$

Hence, let find x_α *for fixed level* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *that*

$$f(x_\alpha) = \alpha,$$

where

$$f(x) = 2\exp\left\{-\ln(1 + \frac{1}{S^2})x \times \right.$$

$$\times \left[\frac{4}{p(1-p)}\left(\sqrt{12 + 6S\sqrt{\pi}}p \ln\left(2 + \frac{1}{2T}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{12 + 6S\sqrt{\pi}}{T} \arctan(2\sqrt{T}p)\right)\right]^{-1}\Bigg\}.$$

Hypothesis that the covariance function of the process $X(t)$ *is* $B(\tau)$ *for* $0 \leqslant \tau \leqslant T$ *is accepted if*

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant S}\left|B(\tau) - \widehat{B}_T(\tau) - \frac{1}{S}\int_0^S B(u)du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}_T(u)du\right| < x_\alpha$$

and is rejected otherwise.

3 Conclusions

In paper the criterion of hypothesis testing on covariance functions of the stochastic processes is obtained. As an example was considered continuous correlation function $B(\tau) = \exp\{-\tau^2\}$.

References

1. *Kozachenko Yu. V., Moklyachuk O.* Large deviation probabilities in terms of majorizing measures// ROSE, Vol. 11, №1 pp. 1–20 (2003).

2. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, volume 188, 2000.

3. *Fedoryanich T.* Estimator of covariance function for Gaussian stationary stochastic process and Gaussian random field // Theory of Stochstic Processes. – 9(25), №3-4. – 2003. – P. 20-26.

Received: 22.11.2012

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

До цього розділу увійшли статті провідних вчених-механіків України та зарубіжжя, присвячені 150-річчю кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Статті представив член редколегії д. ф.-м. н., проф. В. Т. Маципура.
Наукова редакція д. ф.-м. н., доц. В. І. Острика.

УДК 378.4

Горошко О. О.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Пучко Н. П.[1], пров. інж.

Кафедра теоретичної та прикладної механіки: 150 років науково-педагогічної роботи

У статті викладені основні дані про створення та розвиток кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Ключові слова: історія механіки, школа механіки, кафедра механіки.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: a.goroshko@gmail.com,
p_natalia@univ.kiev.ua

O. O. Goroshko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
N. P. Puchko[1], Principal Engineer

Department of Theoretical and Applied Mechanics: 150 Years of Study and Research

The paper presents basic information about the creation and development of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Kiev National Taras Shevchenko University.

Key Words: history of mechanics, school of mechanics, department of mechanics.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: a.goroshko@gmail.com,
p_natalia@univ.kiev.ua

Викладання механіки у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка почалося з лекцій, прочитаних в Імператорському Університеті св. Володимира в курсі лекцій з фізики (1834) та прикладної математики (1836). До програми курсу фізики увійшли лекції про закони рівноваги сил, прикладених до тіл. Курс прикладної математики включав основи статики твердого тіла, основи гідростатики і гідродинаміки. З 1838 р. по 1848 р. в університеті працював проф. А. Тихомандрицький, який читав курс динаміки. До цього курсу входили лекції про вільний рух матеріальної точки в середовищі з опором по кривій лінії по поверхні, рух планет та комет, рух незмінної системи довкола нерухомої лінії, точки та вільний її рух, моменти інерції, співудар тіл, рух рідин нестисливих та пружних. У 1842 р. кафедра чистої та прикладної математики розділяється на кафедру чистої математики та кафедру прикладної математики, завдяки чому збільшується кількість академгодин, відведених на викладання основ механіки. У 1853 р. на посаду ад'юнкта, а потім професора прикладної математики прийшов вихованець Московського університету Іван Іванович Рахманінов (1826–1897). Наукові інтереси І. І. Рахманінова стосувалися руху систем матеріальних точок з нестаціонарними неутримуючими в'язями (докторська дисертація «Основания теории относительного движения и некоторые её приложения как примеры», 1857 р.; монографія «Общая теория относительного движения», 1861 р.). Ці дослідження були викликані чисто практичною задачею – необхідністю розрахунку гідравлічних машин, як найбільш дешевих водяних двигунів. З часом прикладне спрямування теоретичних досліджень стає характерною особливістю школи механіки Київського університету.

З метою знайомства майбутніх спеціалістів з будовою нових для того часу машин та для супроводу курсу практичної механіки, який читався в університеті з 1838 р., І. І. Рахманінов створює кабінет механіки, де збирає чудову колекцію добре виконаних моделей простих механізмів і пристроїв. Це теж стало доброю традицією кафедри. Протягом всього часу діяльності кафедри її завідувачі оновлювали ці кабінети, які пізніше переросли в навчальні та науково-дослідні лабораторії, згідно вимог сучасного їм стану розвитку науки та техніки.

Поглиблення і поширення індустріалізації Російської імперії вимагало більшої кількості високоосвічених спеціалістів, що зумовило реформування університетів. За новим статутом Університетів Російської імперії у 1863 році на основі кафедри прикладної математики була створена кафедра механіки. Першим завідувачем кафедри механіки став проф. І. І. Рахманінов і керував її роботою до 1896 р. Викладацьку і наукову роботу І. І. Рахманінов вдало поєднував з адміністративною роботою. У 1868–1875 р. р. та 1880–1881 р. р. він був деканом фізико-математичного факультету, у 1875–1879 р. р. – проректором, а у 1881–1883 р. р. – ректором університету.

© О. О. Горошко, Н. П. Пучко, 2013



І. І. Рахманінов

І. І. Рахманінов завжди знаходив можливість пропагувати серед студентів факультету дослідження з проблем механіки. В 1884 р. з нагоди 50-річчя Університету св. Володимира пожертвував 5000 рублів для встановлення іменної студентської премії (золота медаль та 300 рублів) для присудження раз у 2 роки за кращу працю у галузі фізико-математичних наук. У 1889 р. був серед засновників фізико-математичного товариства при Київському університеті св. Володимира і зробив 5 доповідей (по 70 хвилин кожна) на його засіданнях. Ці зусилля дали визначні результати.

Одним з найбільш обдарованих учнів І. І. Рахманінова був член-кореспондент Петербургської АН Василь Петрович Єрмаков (1845–1922). У своїй першій науковій праці він виклав досить повний огляд зарубіжної літератури з теорії пружності, а також розглянув у загальній постановці задачу про рівновагу і коливання пружного циліндра. За роботу "Интегрирование дифференциальных уравнений механики" (в якій викладена повна теорія інтегрування канонічних рівнянь) йому було присуджено ступінь доктора чистої математики.

Високоерудований математик В. П. Єрмаков досить просто і глибоко викладав спеціальні питання механіки, чим значно розширив програми спеціальних курсів. Зокрема, він тривалий час читав спеціальний курс з інтегрування рівнянь динаміки, який був надрукований в "*Университетских известиях*" у 80-х роках XIX ст. Саме Єрмаков модернізує навчальний процес і вводить в кінці 80-их років семінарську форму навчання, яка давала можливість живого спілкування викладача і студента і стала дуже популярною.

Значний вклад у формування наукових напрямків механіки в університеті належить відомому вченому Гаврилу Костянтиновичу Суслову (1857–1935), вихованцю Петербурзького університету, який працював на кафедрі механіки понад 30 років – з 1888 по 1920 р., а з 1896 по 1919 був її завідувачем. Наукові інтереси Г. К. Суслова надзвичайно різноманітні. Його праці охоплюють проблеми аналітичної механіки, динаміки твердого тіла, інтегрування рівнянь динаміки.

У перші роки роботи в Київському університеті Г. К. Суслов розглядає питання про знаходження силової функції, що припускає певні окремі інтеграли рівнянь руху системи з двома ступенями вільності, тобто розв'язує одну з обернених задач механіки. Одержані результати Суслов узагальнив для системи з довільним числом ступенів вільності. Ці результати стали основою його докторської дисертації "О силовой функции, допускающей данные частные интегралы", яку він захистив у 1890 р. у Московському університеті.

Спираючись на ці дослідження, Г. К. Суслов написав ряд праць, близьких по духу до праць Гельмгольца. Він створює кінетичну геометрію, в якій геометричні образи пов'язує з властивостями силової функції. Це дозволяє йому дати реальне тлумачення фізичної суті тривимірних просторів з постійною кривизною, відмінною від нуля, особливо просторів з постійною від'ємною кривизною, або просторів Лобачевського.



Г. К. Суслов

Г. К. Суслов дав також реальне тлумачення основних положень неевклідової геометрії трьох вимірів і показав, що евклідова геометрія є окремим випадком кінетогеометрії при силовій функції, що дорівнює нулю. Ці праці і в наш час становлять інтерес для механіки. З 1892 року Г. К. Суслов займається поставленою ще Д. К. Бобильовим задачею про кочення без ковзання однієї поверхні по іншій. В подальшому ця задача послужила початком розвитку у Київському університеті нового розділу механіки – *динаміки неголономних систем*. Визначні досягнення у формуванні цього розділу механіки належать Г. К. Суслову та його учневі П. В. Воронцю. Від дослідження цього окремого випадку руху системи матеріальних точок, на яку накладені неінтегровні в'язі, Г. К. Суслов пізніше переходить до створення теорії цього розділу механіки. У 1902 р. він здійснив узагальнення принципу Остроградського на випадок руху неголономних систем.

Значну увагу Г. К. Суслов приділяв основним принципам механіки. Так, у 1891 р. у праці "*К вопросу о начале наименьшего действия методом, близким к методу Дарбу*" він показав, що для дійсного руху системи матеріальних точок інтеграл, що виражає собою дію, має мінімум.

Великий за обсягом та складний за методами дослідження цикл праць Г. К. Суслова, присвячений питанням динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. В цих працях дано розвиток актуальних в той час геометричних методів дослід-

ження руху тіла з нерухомою точкою, розв'язання конкретних задач, а також широка пропаганда одержаних на той час результатів.

Поряд з розвитком загальних теоретичних питань динаміки твердого тіла з нерухомою точкою Г. К. Суслов під впливом праць Д. К. Бобильова та М. Є. Жуковського вже на початку 90-х років розглядає конкретні приклади гіроскопічних тіл. В статті "*Примеры на движение гироскопических тел*" він дослідив актуальну для того часу задачу про рух гіроскопічного маятника.

Г. К. Суслов читав загальний курс механіки, спеціальні курси з динаміки твердого тіла, теорії коливань, окремих питань аналітичної механіки, а також курс гідромеханіки та теорії потенціалу, який був ним надрукований в 1904 р.

Г. К. Суслов був чудовим лектором, власною захопленістю наукою він зумів заразити багатьох студентів, серед них П. В. Воронець, О. Ю. Шмідт, М. Г. Чеботарьов, Л. П. Пшеборський та ін.

Виявивши інтерес до питань динаміки твердого тіла, Петро Васильович Воронець (1871–1923), ще будучи студентом, у 1896 р. написав серйозну роботу по динаміці твердого тіла з нерухомою точкою: "*Геометрическая интерпретация вращения твердого тела вокруг неподвижной точки*". В цьому творі він з усією повнотою виклав геометричну картину для випадку ейлерового руху тіла навколо нерухомої точки, а також дослідив геометричні властивості полодії та герполодії.

Ця робота дістала високу оцінку Г. К. Суслова і була надрукована в "*Университетских известиях*". Далі П. В. Воронець вивчав задачу про рух без ковзання твердого тіла по нерухомій площині. В той час ця задача становила особливий інтерес, бо на рух тіла у цьому випадку накладено специфічні умови і тіло перебуває під дією неголономних в'язей, а динаміка неголономних систем в цей період лише починала формуватися.



П. В. Воронець

Як показав С. О. Чаплигін, розв'язки окремих випадків цієї задачі, що з'явилися до того часу в роботах Ліндельофа та інших авторів, мали істотні помилки.

Виходячи з цієї окремої задачі, П. В. Воронець одним з перших у 1901 р. отримує рівняння руху неголономних механічних систем, що не містять в собі множників Лагранжа. Рівняння П. В. Воронця є більш загальні, ніж рівняння С. О. Чаплигіна.

Виходячи з інтегрального принципу Остроградського, П. В. Воронець вивів рівняння руху неголономних систем, на основі яких успішно розв'язав задачу про рух без ковзання твердого тіла по нерухомій площині, по сферичній поверхні, та розробив метод розв'язання задачі про кочення без ковзання довільного тіла по довільній поверхні.

Свою наукову діяльність П. В. Воронець сполучав з творчою педагогічною роботою: крім загального курсу механіки, він читав спеціальні курси динаміки твердого тіла, інтегрування рівнянь динаміки, теорії відносного руху та інші, які тісно пов'язувалися з його науковими інтересами.

Разом з Г. К. Сусловим П. В. Воронець приділяв велику увагу залученню до наукової роботи студентів старших курсів та випускників університету. Так, одна з перших праць відомого вченого І. Я. Штаєрмана була написана під впливом наукових інтересів П. В. Воронця. Близькими до тематики П. В. Воронця є деякі праці А. Д. Білімовича, присвячені динаміці твердого тіла, дослідженням руху консервативних систем з лінійними інтегралами, а також праці І. І. Бєлянкіна та інших випускників університету. А. Д. Білімович після закінчення навчання в Київському університеті з 1903 по 1912 р. р. працював на кафедрі механіки понадштатним асистентом до поїздки на стажування в Геттінген, після революції і громадянської війни він виїхав до Сербії, де був обраним до Академії наук.

З 1914 р. в університеті починає викладати О. П. Котельніков.

Отже, у дореволюційний період механіка в університеті отримала самостійне значення як наука і широко розвивалася. Під керівництвом провідних вчених І. І. Рахманінова, В. П. Єрмакова, М. М. Шіллера, Г. К. Суслова, П. В. Воронця при університеті сформувалася школа механіків з певними науковими інтересами та методами дослідження. Характерною особливістю школи механіків Київського університету є інтерес до аналітичного напряму досліджень. Такі питання, як дослідження руху консервативної механічної системи, створення методів інтегрування рівнянь динаміки, основні принципи механіки, є загальними для всієї школи. Вони з різних точок зору висвітлені в роботах механіків університету і привели до важливих наукових результатів, таких, як методи інтегрування рівнянь динаміки, створені В. П. Єрмаковим, як узагальнення принципу Остроградського на випадок неголономних систем Г. К. Сусловим, як рівняння руху неголо-

номних систем, одержані П. В. Воронцем. Цьому сприяла спільність наукових інтересів та взаємний вплив представників цієї школи, що дозволяло глибоко та всебічно підходити до питань, які розглядалися.

У тяжкий період Жовтневої революції, громадянської війни фізико-математичний факультет переніс декілька реорганізацій, як і увесь університет. В ті часи роботою кафедри керували: Г. К. Суслов (до від'їзду до Одеси у 1919 р.), П. В. Воронець – з 1919 по 1922 р. р., О. П. Котельніков – з 1922 по 1924 р. р. (поєднуючи з керівництвом кафедрою теоретичної механіки КПІ).

З 1924 по 1932 р. р. кафедру очолював видатний математик Граве Дмитро Олександрович (1863–1939). Д. О. Граве написав 15 праць з питань небесної механіки та деяких проблем механіки деформівного твердого тіла. Він активно заохочує своїх учнів до прикладних досліджень. В той час Ю. Д. Соколов починає свої дослідження проблеми 3-х тіл і *n* тіл, В. Є. Дяченко зацікавився теорією руху «розривів» у рідині, що рухається, а Н. І. Ахієзер – проблемами аеродинаміки.

Так само, як і І. І. Рахманінов, Д. О. Граве завжди тримав у центрі уваги проблеми підготовки висококваліфікованих і ерудованих спеціалістів, а, отже, проблеми ролі математичних наук у процесі формування світогляду технічного спеціаліста чи науковця та рівня викладання вищої математики та її застосувань. На початку XX сторіччя в ході обговорення нових статутів Харківського і Київського університетів він сформулював своє розуміння університетської освіти: «…единственное правильное понимание университета есть то, что университет должен быть лабораторией науки, в которой профессор должен быть исследователем, а студент – начинающим ученым». Навіть у дуже складні для нашого університету часи постійних реорганізацій 1920–1933 р. р. професор Д. О. Граве турбувався про якість підготовки наукових та науково-педагогічних кадрів. В статті «Прошлое нашей технической школы», надрукованій у січні – лютому 1921 р. в газеті «Коммунист», він писав [22, с. 205]:

«Итак, опыт русской высшей технической школы как бы приводит к выводу, что математика не нужна для техники. Объяснением таких парадоксальных выводов является общий характер всей старорежимной русской техники.

Конечно, математика не нужна для того, чтобы покупать построенные за границей машины, чтобы их чистить, разбирать и собирать.

Но без математики не может существовать деятельная, творческая техника, которая одна только может вывести человечество из суровой борьбы с природой, дать ему победу.

Говорили, что наука есть дело академика, а профессор должен ограничиваться преподаванием, забывая, что профессор, не занимающийся наукой, идет назад, и что лекциям плохого ученого грош цена».

Потреби техніки та наявність в складі молодої тоді Академії наук України інституту технічної механіки та інших інститутів механічного напрямку дають значний поштовх розвитку механіки у Київському університеті у передвоєнні роки. В 1934 р. кафедру механіки очолив вихованець Київського університету, однодумець і співробітник Д. О. Граве професор Ілля Якович Штаєрман (1891–1962). З його ініціативи було введено у викладання курс теорії пружності (включаючи опір матеріалів) і одночасно спеціалізацію з прикладної теорії пружності. Разом з Д. О. Граве він керував роботою декількох семінарів. Наукові інтереси І. Я. Штаєрмана охоплюють широке коло прикладних застосувань наближеного інтегрування диференціальних і інтегральних рівнянь, теорії спеціальних функцій, ряд задач прикладної теорії пружності, контактну задачу, теорії стійкості арок, розрахунку ланцюгових мостів і теорії тонкостінних оболонок; теорії пружної нитки тощо. В теорії оболонок він показав, що задача про циліндричну оболонку, товщина стінки якої змінюється за параболічним законом, розв'язується у гіпергеометричних функціях. Далі він узагальнив метод асимптотичного інтегрування в застосуванні до тонкостінних оболонок та показав, що цей метод є зручним у практичному вжитку. Йому належить фундаментальна праця «Контактная задача теории упругости» (1949).

В цей період розпочав свою наукову і педагогічну роботу на факультеті М. О. Кільчевський, згодом академік АН УРСР, а також вихованець факультету – М. М. Сідляр (1906–1989), у майбутньому професор і завідувач кафедри теорії пружності.

Наступним завідувачем кафедри (1932–1934 р. р.) після Д. О. Граве став його учень Вадим Євгенович Дяченко (1896–1954), який працював у Київському університеті в період з 1934 по 1954 р. р. Свою наукову роботу В. Є. Дяченко почав за порадою Д. О. Граве з вивчення наближених форм рівнянь механіки для випадку залежності зміни маси від швидкості руху і від положення в силовому полі та показав придатність їх застосування до задач небесної механіки. В. Є. Дяченко був послідовником Граве в розумінні великого май-

бутнього за автоматизованими методами чисельного аналізу прикладних задач. Він розробляв фізико-технічні методи обчислювальної математики та конструкції обчислювальних приладів. Під його керівництвом в Києві були розроблені перші електроінтегратори. В. Є. Дяченко був деканом механіко-математичного факультету і з його ініціативи у Київському університеті була створена лабораторія електромоделювання і обчислювальної математики. Пізніше ця лабораторія була реорганізована в обчислювальний центр, а при кафедрі теоретичної механіки під керівництвом А. Л. Наумова, теж учня і послідовника Д. О. Граве, була створена лабораторія аналогових обчислювальних машин.

Підтвердженням тісного зв'язку університетської науки з практикою стало створення у 1940 році механіко-математичного та фізичного факультетів на базі фізико-математичного.

Закладена ще з часів утворення Академії наук України співдружність вчених, які одночасно працювали і в Академії (наприклад, Д. О. Граве, який був першим директором Інституту математики, і І. Я. Штаєрман), стало обрання у 1949 р. професором Київського університету по кафедрі теорії пружності видатного радянського вченого у галузі механіки, Героя Соціалістичної Праці, академіка АН СРСР (1960) та АН УРСР (1948) Олександра Юлійовича Ішлінського (1913–2003). Поєднуючи роботу директора Інституту математики АН УРСР (1948–1955) та професора Київського університету, О. Ю. Ішлінський вперше розробляє і читає оригінальні курси з теорії гіроскопів та теорії пластичності, проводить велику науково-дослідну роботу. Наукові праці О. Ю. Ішлінського вражають глибиною проникнення в фізичну суть процесу, умінням у простій дохідливій формі розкрити наслідки розв'язання задачі при збереженні належної математичної строгості. Це в певній мірі зумовлено систематичною (ще зі студентських років) роботою О. Ю. Ішлінського в промисловості, особливо в галуі приладобудування. В університеті О. Ю. Ішлінський працював до 1956 р. Однак зв'язки з науковою громадськістю після його повернення до Москви не обірвались. Буваючи у Києві, О. Ю. Ішлінський читав відкриті лекції для студентів, викладачів та науковців Київського університету, по слухати його приходили і з інших вузів та академічних інститутів.



О. Ю. Ішлінський

У 1994 році академіка О. Ю. Ішлінського було обрано Почесним доктором Київського університету.

Микола Олександрович Кільчевський (1909–1979), академік АН УРСР, вихованець кафедри теоретичної механіки Київського університету (1933), учень І. Я. Штаєрмана, почав працювати на факультеті ще в середині 30-х років, а у 1947–1958 р. р. та 1971–1979 р. р. читав на кафедрі курс теоретичної механіки. На кафедрі тривалий час працювали його учні доценти Лідія Михайлівна Кисілевська (1920–1999), Ізіда Василівна Ніколенко (1926–2004), Галина Григорівна Філоненко (1925 р. н.) та Василь Олександрович П'ятецький (1941–2012).

З 1958 по 1961 рік за сумісництвом на кафедрі теоретичної механіки працював академік АН УРСР Олександр Іванович Кухтенко (1914–1994). Він відомий своїми працями в галузі неголономної механіки, теорії автоматичного керування та технічної кібернетики. На кафедрі тривалий час працював його учень доцент Іван Іванович Хількевич (1935–1999), який добре поставив вивчення коливних процесів на базі лабораторії аналогових обчислювальних машин, зокрема, властивостей розв'язків рівнянь типу Дюффінга.

З 1966 по 1975 р. на кафедрі теоретичної механіки за сумісництвом викладав директор Інституту механіки АН УРСР, академік АН УРСР Віктор Олімпанович Кононенко (1918–1975).

З 1950 по 1955 р. і потім з 1959 по 1975 р. на посаді завідувача кафедри теоретичної механіки працював вихованець факультету, учень О. П. Котельнікова і Д. О. Граве професор Адольф Львович Наумов (1900–1982) – відомий фахівець в галузі електромеханіки та електротехніки. Він почав працювати на факультеті ще в двадцяті роки асистентом професора Граве. В його роботах була розроблена загальна класифікація електричних машин як електричних ланцюгів зі змінними параметрами та метод розрахунку електромагніту змінного струму, що притягує неферомагнітні тіла.

В період з 1956 по 1958 р. завідувачем кафедри теоретичної механіки був професор, доктор фізико-математичних наук Олександр Олександрович Назаров (1906–1972). Він відомий своїми науковими працями з теорії пологих оболонок, в яких застосував метод «майже декартових» координат, та оболонок обертання, з теорії гіроскопів. З метою більш практичного ознайомлення сту-

дентів з технічними проблемами навігації, віброзахисту та балансування він організував при кафедрі лабораторію гіроскопічних систем. Читав курси з теоретичної механіки та теорії пружності, спецкурс з теорії пологих оболонок. Його учні В. М. Гончаренко, А. Ф. Шестопал, Б. М. Бублик, А. А. Березовський стали відомими вченими в різних галузях математики.



О. О. Горошко

З 1975 по 1985 рік кафедру теоретичної механіки очолював професор, учень академіка АН УРСР Г. М. Савіна, доктор фізико-математичних наук Олег Олександрович Горошко (1925 р. н.), який прийшов до університету з Інституту механіки Академії наук України. Він вивчав проблеми динаміки багатомасових систем з неголономними в'язями, задачі віброзахисту, гіроскопічні системи, займався рухом тіл зі змінною масою. Він був науковим консультантом 5 докторських дисертацій, під його керівництвом було захищено 27 кандидатських дисертацій, відновлено роботу лабораторії гіроскопічних систем та аналогово-обчислювальних машин. О. О. Горошко є автором 8 монографій та підручників. Серед них «Динамика нити переменной длины» (1962, у співавт.), "Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета" (1965), «Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины» (1971), «Двохвильові процеси в механічних системах» (1991, у співавт.), «Аналітична динаміка дискретних спадкових систем» (серб.) (2001, у співавт.)

У 1985 року кафедра отримала назву – кафедра теоретичної та прикладної механіки, – і з цього року до 2002 р. кафедру очолював член-кореспондент НАН України професор Андрій Феофанович Улітко (1934 р. н.). Вихованець механіко-математичного факультету А. Ф. Улітко до 1980 року працював в Інституті механіки НАН України, поєднуючи наукову роботу з лекційною роботою на механіко-математичному факультеті. В період з 1980 по 1985 роки А. Ф. Улітко був деканом механіко-математичного факультету, а з 1985 по 1988 р. – першим проректором університету. Він відомий науковій громадськості своїми працями в галузі спектральних розвинень векторних полів та їх застосувань в просторових задачах теорії пружності та повільних течій в'язких рідин (наближення Стокса), а також розробками загальної теорії коливань та енергоперетворення в п'єзокерамічних елементах різних технічних пристроїв. В останні роки це розробки теоретичних основ та створення діючих зразків мікрохвильових двигунів, хвильових (твердотільних) гіроскопів і перетворювачів для адаптивної оптики.



А. Ф. Улітко

А. Ф. Улітко – автор понад 220 наукових праць, у тому числі 8 монографій, зокрема, «Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости» (1979), «Равновесие упругих тел канонической формы» (1985, у співавт. з В. Т. Грінченком), «Электроупругость» (1989, у співавт. з В. Т. Грінченком та Н. А. Шульгою), «Векторные разложения в пространственной теории упругости» (2002), «Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости» (2006, у співавт. з В. І. Остриком), його наукові результати впроваджено в розробках лабораторії механіки спряжених хвильових полів КНУ ім. Тараса Шевченка, а саме: телесистемі горизонтального буріння свердловин, стендах для випробовування дзеркал адаптивної оптики, скануючому тунельному мікроскопі з акустоемісійним контролем, тощо. Він розробив і на протязі багатьох років читав спецкурси з теорії електромеханічних коливань, хвильових гіроскопів та механіки контактної взаємодії деформівних тіл. Наукові інтереси А. Ф. Улітка сформували новий напрямок в університетській школі механіки – механіка п'єзокерамічних активних матеріалів. Він виховав 30 кандидатів наук та 5 докторів наук. Серед його учнів – випускники механіко-математичного факультету професор В. В. Мелешко (1951–2011), доцент Г. В. Куценко (1937 р. н.), який працював на кафедрі теоретичної та прикладної механіки з 1988 по 2003 роки, доцент В. Ф. Ковальчук (1959 р. н.), який працював на кафедрі з 1984 по 2001 р., професор О. Ю. Жарій (1957 р. н.) працював на кафедрі з 1983 по 2006 р. Насьогодні на кафедрі працюють учні А. Ф. Улітка – доценти Григорій Михайлович Зражевський, Ірина Валеріївна Лебедєва та Ігор Андрійович Улітко.



В. В. Мелешко

З 2002 р. по 2011 р. кафедру теоретичної та прикладної механіки очолював професор В'ячеслав Володимирович Мелешко (1951–2011), випускник механіко-математичного факультету (1973). Він почав викладацьку діяльність на кафедрі наприкінці 1980-их

років, читав спецільні курси «Бігармонічні проблеми механіки», «Механіка мікрорідини», «Хаотична динаміка», керував роботою аспірантів, під його науковим керівництвом захищено 9 кандидатських дисертацій, був науковим консультантом 2 докторських дисертацій. Основні наукові праці виконані у галузі вихорової динаміки, теорії змішування, акустики твердого тіла. Опублікував понад 150 статей та 2 монографії: «Гармонические колебания и волны в упругих телах» (1981, у співавт. з В. Т. Грінченком), «Динамика вихревых структур» (1993, у співавт. з М. Ю. Константіновим). Зараз на кафедрі працює його учень асистент Курилко Олександр Борисович.

З 1980 року при кафедрі теоретичної та прикладної механіки з ініціативи А. Ф. Улітка працює міжрегіональний семінар „*Сучасні проблеми механіки*”. В різні роки його роботою керували член-кореспондент НАН України А. Ф. Улітко та академік НАН України В. Т. Грінченко, професор В. В. Мелешко. Участь в засіданнях беруть аспіранти, викладачі, студенти нашого університету та інших вищих навчальних закладів, науковці інститутів НАНУ. Семінар виконує важливу функцію по апробації кандидатських та докторських дисертацій у різних галузях механіки, знайомить учасників з актуальними проблемами механіки та долучає до наукових пошуків студентів. На його засіданнях виступали з доповідями відомі вчені з США, Великої Британії, Німеччини, Нідерландів та інших країн. Систематична робота семінару є важливим і необхідним елементом підготовки висококваліфікованих спеціалістів на кафедрі теоретичної та прикладної механіки.



В. Т. Маципура

З 2007 р. на кафедрі працює, а з 2011 р. очолює її професор Володимир Тимофійович Маципура (1950 р. н.), який читає курси «Механіка пружних хвиль», «Теорія хвилеводів», «Нелінійна динаміка», «Математичні методи в механіці».

В. Т. Маципура – автор 2 монографій: «Введение в нелинейную динамику» (2005, у співавт. з В. Т. Грінченком, А. О. Снарським, перевидано у 2007 і 2010 р. р.), «Основи акустики» (2007, у співавт. з В. Т. Грінченком, І. В. Вовком, перевидано у 2009 р.) та 6 методичних видань, 4 з яких рекомендовано МОН України як навчальні посібники.

Протягом 150-річної діяльності по підготовці спеціалістів з механіки кафедра створювала, зберігала і примножувала власні традиції наукової, педагогічної та методичної робіт. Школа механіки Київського національного університету кожного періоду свого розвитку тісно пов’язується з тогочасними проблемами техніки, її передовими напрямками розвитку. З часів І. І. Рахманінова при кафедрі завжди діє навчальний підрозділ (кабінет чи лабораторія), який надає можливість студентам власноруч провести лабораторні дослідження, познайомитися з певними механізмами, поставити модельний експеримент. Нині курси лабораторій, демонстраційні заняття зі спеціальних курсів проводяться у навчальній лабораторії механічних і електроакустичних систем (зав. лабораторії, випускник механіко-математичного факультету В. М. Нікітенко). А науково-дослідна лабораторія (НДЛ) механіки спряжених хвильових полів продовжує традицію Д. О. Граве залучати студентів до наукової роботи. НДЛ була створена у 1980 р. за ініціативою і під керівництвом А. Ф. Улітка. З того часу в лабораторії виконувалися дослідження за рахунок державного бюджету на науково-пошукові фундаментальні дослідження, грантів Міносвіти України та госпдоговірної тематики. Були завершені дослідження за темою «Механіка рухомих деформівних середовищ та експериментальні методи механіки» (2001–2005 р. р.), за проектом МОН України “Розробка забійної телесистеми з безкабельним електромагнітним каналом зв’язку для буріння горизонтальних стовбурів нафтогазових свердловин”(2004–2006 р. р.), за грантом НТЦУ “Тунельний зонд з акусто-емісійним контролем для визначення механічних властивостей тонких плівок” (2003–2005 р. р.). З 2006 по 2011 р. р. завідувачем НДЛ був кандидат фізико-математичних наук І. А. Улітко. У 2006–2010 р. р. за рахунок базового бюджетного фінансування виконувалися дослідження за темою «Мікромеханіка тонких плівок на комбінованій шаруватій пружній основі – експериментальні методи індентування надтонких плівок та теоретичні обрахунки». В результаті досліджень по цій темі був розроблений прототип STM-мікронанотвердоміра-профільоміра з діамантовою напівпровідниковою пірамідкою для дослідження фізико-механічних властивостей матеріалів і плівкових покриттів (мікротвердість, модулі пружності та пластичності, анізотропія, міцність руйнування при скрайбуванні, акустичний аналіз тріщиноутворювання). З 2012 р. лабораторію очолює учень А. Ф. Улітка доктор фізико-математичних наук Острик Володимир Іванович. Зараз ведеться науково-дослідна робота за прикладною темою «Крайові задачі динаміки пружних тіл зі спряженими польовими фізико-механічними властивостями та їх застосування у неруйнівному контролі, сенсорних мікроелектромеханічних системах та хвильових гіроскопах».

Традицією педагогічного колективу кафедри є створення власних підручників та навчальних по-

сібників. Першим підручником з теоретичної механіки, виданим професором нашого університету в 1873 р., була перша частина підручника з механіки "*Основы теоретической динамики*". Курс, який читався І. І. Рахманіновим, не поділявся на статику і динаміку, а містив динаміку точки та динаміку системи. В опублікованій частині курсу дано виклад в аналітичній формі динаміки точки, в основу якої покладено так званий принцип прискорюючих сил.

Наступним підручником, виданим професором кафедри механіки, став славнозвісний, декілька раз перевиданий, підручник «Основы аналитической механики» (т. т. 1-2, 1899–1902 р. р.) Г. К. Суслова.

Г. К. Суслов вперше виділяє в окремий розділ кінематику точки і твердого тіла, вперше в загальному курсі приділяє велику увагу таким розділам механіки, як динаміка твердого тіла, методи інтегрування рівнянь динаміки, основні принципи механіки, теорія удару та ін. З великою повнотою досліджується теорія невільних систем, вперше в загальному курсі розглядається питання динаміки неголономних систем. Хоч цей розділ не виділений в курсі окремо, але в різних місцях дано досить повну теорію неголономних систем, а також наведені різні приклади неінтегровних в'язей. Викладання курсу Г. К. Суслов побудував, базуючись на векторному численні, що було прогресивним в механіці того часу й від чого курс виграв у чіткості і послідовності викладу. Цей підручник був настільки повним, що ВКВШ при РНК СРСР рекомендував його 1946 року під назвою «Теоретическая механика» як базовий для вищої школи. Вважається, що цей виклад основ теоретичної і аналітичної механіки є одним з кращим серед тих, що мають виразний аналітичний характер. Джерела цього напрямку йдуть від Лагранжа, від його надзвичайної «Mecanique analytique».

Зміни в суспільстві, явне орієнтування на підготовку технічних спеціалістів вимагали нового підходу до викладання класичних курсів. Тому у 1932 р. Д. О. Граве разом зі своїми учнями Н. І. Ахієзером та А. Л. Наумовим підготував і опублікував оригінальний підручник з механіки "*Теоретична механіка на основі техніки*", в якому крім університетського курсу теоретичної механіки були викладені деякі положення теорії машин і механізмів, опору матеріалів та теорії пружності, технічної гідравліки, теорії судна, аеромеханіки. Про цей підручник О. М. Крилов писав Граве: «Спешу Вас искренне поблагодарить за экземпляр второго издания Вашего превосходного курса теоретической механики, радуясь при этом, что Вы, правоверный математик, совратились в нашу техническую ересь и считаете наши технические вопросы достойными Вашего внимания» [14].

Класичним підручником з теоретичної механіки став і двотомний підручник «Курс теоретичної механіки» академіка АН УРСР Кільчевського Миколи Олександровича, педагогічна діяльність якого була завжди тісно пов'язана з кафедрою теоретичної механіки. Зокрема, у 1948–1950 р. р. він був завідувачем кафедри за сумісництвом. Підручник був виданий українською (том 1 – 1950 р., перевидано у 1954 та 1972 р. р., том 2 – 1952 р., перевидано у 1957 р.) і російською (том 1 – 1972 р., перевидано у 1977 р., том 2 –1974 р., перевидано у 1977 р.) мовами. У 2009 р. цей підручник був перевиданий під упорядкуванням В. В. Мелешка у видавництві Київського національного університету імені Тараса Шевченка до 100-річчя з дня народження М. О. Кільчевського.

У 1957 р. А. Л. Наумов написав підручник «*Курс теоретической механики для физических специальностей*» з елементами теорії відносності та квантової механіки, О. О. Назаров видав монографію «*Некоторые вопросы теории гироскопов*».

Традиції співпраці кафедри теоретичної та прикладної механіки з Академією наук України з роками не змінюються. Протягом останнього десятиріччя на кафедрі викладають випускники механіко-математичного факультету, відомі вчені директор Інституту гідромеханіки НАН України академік В. Т. Грінченко, доктори фізико-математичних наук В. Г. Карнаухов, Т. С. Краснопольська, І. К. Сенченков, Н. С. Городецька. З Інституту механіки НАН України прийшли на кафедру випускники механіко-математичного факультету професор Жук Ярослав Олександрович (у 2011 р.) та доцент Борисейко Олександр Віталійович (у 2001 р.). Кафедра була і є базою для підготовки спеціалістів для Національної академії наук України.

Сьогодні колектив кафедри теоретичної та прикладної механіки складається з трьох професорів, 4 доцентів та 1 асистента. Це доктори наук, професори О. О. Горошко, В. Т. Маципура та Я. О. Жук, кандидати наук, доценти Г. М. Зражевський, О. В. Борисейко, І. В. Лебедєва, І. А. Улітко і кандидат наук, асистент О. Б. Курилко. Загалом на кафедрі спеціалізуються 35 студентів та працюють над дисертаціями 7 аспірантів. Щорічно публікується понад 20 наукових статей у вітчизняних та зарубіжних виданнях.

Список використаних джерел

1. *Balabanov O. D., Nedostup N. M.* (Compilers). Systematic index to periodicals Kiev University. – **1-2**. – Kyiv: Publisher University of Kiev, 1963. – 376 p. (in Ukrainian).
2. Biobibliography scientists Ukrainian SSR. Alexander Yul'evich Ishlinskyy. – Kyiv: Naukova dumka, 1970. – 62 c. (in Ukrainian).
3. Biobibliography scientists Ukrainian SSR. Nikolai Aleksandrovich Kylchevskyy. – Kiev: Publisher University of Kiev, 1991. – 35 p. (in Russian).
4. *Geronimus J. L.* Essays on the works of Russian giants mechanics. – Moscow: GITTL, 1952.– 520 p. (in Russian).
5. *Grigorian A. T., Fradlin B. N.* The history of solid mechanics. – Moscow: Nauka, 1982.– 293 p. (in Russian).
6. *Dobrovolsky V. A.* Vasiliy Petrovich Ermakov (1845–1922). – Moscow: Nauka, 1981.– 88 p. (in Russian).
7. A Biographical Dictionary of professors and lecturers of the Imperial University of St. Vladimir (1834–1884.) / edited Ikonnikov V. S. – Kiev: University Printing House, 1884. – XXXVI, 816 p. (in Russian).
8. The history of mechanics. Since the end of XVIII century to the middle of the XX century. – Moscow: Nauka, 1972. – 414 p. (in Russian).
9. The history of national Mathematics. V. 2. 1801–1917. – Kiev: Naukova dumka, 1967. – 616 p. (in Russian).
10. The history of national Mathematics. V. 4. Book 2. 1917–1967. – Kiev: Naukova dumka, 1970. – 668 p. (in Russian).
11. History of the University of Kiev. – Kyiv: Publisher University of Kyiv, 1959. – 631 p. (in Ukrainian).
12. *Kilchevskyy M. A., Kovalenko A. D., Sedlyar M. M.* Research Department of Mechanics, Department of elasticity and the Department aerohidromehaniky and heat transfer // Scientific Notes Kiev University. – 1957. – V. XVI, No. XVI (Mathematics Proceedings No. 10). – P. 29-41. (in Ukrainian).
13. *Kravchuk M.* Mathematics and Mathematicians at the University of Kiev for a hundred years (1834–1934) // The Faculty of Mechanics and Mathematics – 60. – Kyiv, 2000. – P. 204-248. (in Ukrainian).
14. *Dobrovolsky V. A.* Dmitry Alexandrovych Grave. 1863–1939. – Moscow: Nauka, 1968. – 112 p. (in Russian).
15. *Nazarov A. A., Nicolenko I. V.* On the development of mechanics at Kiev University for the period of the last century // Visnyk Kyiv Univ. Ser. Astronomy, mathematics, mechanics – 1958. – N 1. – **2.** – P. 7-11. (in Ukrainian).
16. *Nicolenko I. V.*, *Sedlyar M. M.*, *Starostyn M. G.* The history of mechanics at KDU for 50 years // Visnyk Kyiv Univ. Ser. Mathematics and Mechanics. – 1967. – **7**. – P. 43-50. (in Ukrainian).
17. *Pisarenko G. S.* Essay on the history of mechanics in Ukraine, 1918–1994 pp. – Kyiv: Naukova dumka, 1995. – 55 p. (in Ukrainian).
18. *Putyata T. V., Fradlin B. N.* Activities of prominent mechanicians in Ukraine. – K.: Dergtehvydav URSR, 1952. – 218 p. (in Ukrainian).
19. *Savin G. N., Georgyevskaya V. V.* Development of mechanics in the Ukraine during the years of Soviet power. – Kiev: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1961. – 282 p. (in Russian).
20. *Savin G. N., Putyata T. V., Fradlin B. N.* Essays on the development of some of the fundamental problems of mechanics.– Kiev: Naukova dumka, 1964. – 338 p. (in Russian).
21. *Ulitko A. T.* Development of Mathematics and Mechanics at the Mechanics and Mathematics Faculty for 150 years // Visnyk Kyiv. Univ. Ser. Mathematics and Mechanics. – 1983. – № 25. – P. 3-25. (in Ukrainian).
22. *Urbansky V.* Dmitry Grave and time. – Kiev: Naukova dumka, 1998. – 270 p. (in Russian).
23. Department of Theoretical and Applied Mechanics // The Faculty of Mechanics and Mathematics – 70. – Kyiv, 2010. – P. 213-235. (in Ukrainian).
24. Kyiv National Taras Shevchenko University. Ways of succes. – Kyiv, 2008. – **3**. – 255 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 23.05.13

УДК 539.3

Грінченко В. Т.[1], академік НАН України, д. ф.-м. н., проф.

Комп'ютер і механіка

Розвиток комп'ютерних технологій, зростання їх потужності сприяли широкому використанню математичного моделювання практично в усіх галузях сучасного природознавства. Для механіки ця тенденція виразилася в формуванні нових розділів, одержанні і систематизації великого обсягу кількісних оцінок в задачах, що не могли бути вирішені з допомогою традиційних аналітичних методів. В роботі в історичній перспективі розглянуто деякі шляхи використання комп'ютерів при розв'язанні нових задач та проблеми практичного використання обчислювальних технологій. Відмічено ряд робіт, виконаних з використанням комп'ютерних обчислень співробітниками кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ імені Тараса Шевченка.

Ключові слова: комп'ютер, комп'ютерні технології, механіка, математичне моделювання.

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4 e-mail: grinchenko@hydromech.com.ua

V. T. Grinchenko[1], Academician of NAS Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Computer and mechanics

The development of computer technology and increase their capacity have contributed to the widespread use of mathematical modeling in almost all areas of modern science. This trend in the mechanics has resulted in the formation of its new chapters, acquisition and systematization of a large amount of quantitative assessments of problems that could not be solved by traditional analytical methods. In this paper some ways of use of computers in solving of new problems and challenges of practical use of computer technology have discussed in historical perspective. A number of works carried out by means of computer calculations have been distinguished, which were performed at the Department of Theoretical and Applied Mechanics of National Taras Shevchenko University of Kyiv.

Key Words: computer, computer technology, mechanics, mathematical modeling.

[1] Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabova st., 8/4 e-mail: grinchenko@hydromech.com.ua

Святкування 150-річчя кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка природно стимулює роздуми про зміни в цій найстарішій галузі природознавства, про її вплив на розвиток інших наукових дисциплін. Основним способом одержання знань в механіці з самого початку її формування було використання математичних моделей. Багато сформульованих математичних задач не мали розв'язків. Величезним досягненням математиків і механіків є розвиток якісної теорії диференціальних рівнянь, використання якої дозволило вивчити властивості багатьох складних систем. Однак величезна кількість задач не мала розв'язків, які б давали кількісні оцінки характеристик механічних систем. Можливість одержати такі оцінки відкрилася в зв'язку з розвитком комп'ютерної техніки.

Бурхливий розвиток технологій в останні півстоліття суттєво вплинув практично на всі сторони людського життя. Осмислення цього впливу знайшло відображення в спробах визначити сучасне суспільство як інформаційне, суспільство знань, постіндустріальне суспільство та ін. Значній вплив комп'ютерних технологій змінив обличчя, як багатьох окремих галузей сучасної науки, так і обличчя науки в цілому. Аналізу цих змін присвячено ряд фундаментальних досліджень, серед яких відмітимо монографію [1]. Ця робота цікава, перш за все, тим, що саме деякі механічні проблеми, в основному із механіки рідини, автор використовує для підтвердження загальних висновків свого аналізу.

Перший комп'ютер (ENIAC) було створено інженерами Пенсільванського університету для розрахунку артилерійських таблиць стрільби, по суті, для вирішення механічних задач балістики. Уже перші тестові розрахунки принесли цікавий результат – 30-та секундна траєкторія польоту снаряда розраховувалася за 20 секунд. Це була перша вказівка на можливість створення з допомогою комп'ютера систем керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

Перший комп'ютер не використовувався для розрахунків при створенні ядерної бомби. Для проведення розрахунків в інтересах Манхетенського проекту використовувалася праця досить великих команд молодих жінок, що дало підставу автору [2] визначити період до появи ENIAC, як час, коли комп'ютери були жінками. Розробка

© В. Т. Грінченко, 2013

термоядерної зброї в США вже проводилася з використанням комп'ютерів. В Радянському Союзі комп'ютерів ще не було і тому обчислення проводилися жіночими командами. Цей період досить яскраво описаний в спогадах людини з незвичною долею, співробітника Харківського фізико-технічного інституту О. О. Лаврентєва (*http://www.npd.ac.ru/npd/history.npd/soldat/soldat.htm*). Зараз ми розуміємо, що факт створення термоядерної бомби в Радянському Союзі раніше ніж в США не слід розглядати, як свідчення більшої ефективності жіночої праці порівняно з комп'ютером. Справа в тому, що розуміння фізичної сторони справи, за спогадами академіка І. М. Халатнікова (http://ega-math.narod.ru/Landau/IMH.htm) дозволило саме фізикам запропонувати надзвичайно ефективні методи чисельного аналізу. Відсутність техніки компенсувалася більшою увагою до розробки методів обчислень, і саме в розробці таких ефективних методів радянські вчені зберігали лідерство багато років.

Значну роботу виконано на першому комп'ютері при реалізації американського термоядерного проекту. При проведені обчислень було запропоновано і випробувано широко відомий нині метод Монте – Карло. Однією із перших задач механіки, що була розв'язана в 1946 році на ENIAC, була задача про надзвукове обтікання крила. Однак визначним моментом в формуванні розуміння ролі і можливостей комп'ютера в сучасній науці стала робота, виконана з участю Е. Фермі та С. Улама. Правда, ця робота була завершена в 1955 році вже після смерті Е. Фермі і з використанням наступного комп'ютера MANIAC I. Результати дослідження представлені в збірнику праць Е. Фермі [3].

Використовуючи можливості комп'ютера, Е. Фермі з колегами дослідили вільні коливання одновимірної системи із 64 однакових зосереджуних мас з різними типами нелінійності в силах взаємодії. Така система апроксимує пружну струну з фізичною нелінійністю. Для квадратичної нелінійності розглядалися такі рівняння руху:

$$\ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + \alpha[(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2].$$

Тут α характеристика нелінійності системи.

Основна ідея роботи полягала в дослідженні процесу збурення періодичного лінійного коливання та перерозподілу енергії початкового одномодового збурення по модам більш високого порядку. Результати розрахунків виявилися, як відмічали самі автори, несподіваними. На початку процесу дійсно спостерігалося поступове зростання амплітуд мод вищого порядку. Однак потім картина змінилася. Деякі із мод вищого порядку ставали домінуючими. Після певного числа періодів (мова йде про період коливань для нижчої моди у відповідній лінійній системі) знову система повернулася до такого стану, коли вся енергія коливання зосереджена в початковій першій моді. Від значення енергії в початкових умовах енергія першої моди після 30 000 періодів відрізнялася не більше ніж на один відсоток. Поведінка системи для всіх розглянутих типів нелінійності була схожою та ілюструвала справедливість теореми А. Пуанкаре про повернення, згідно з якою система частинок, що мають масу і рухаються згідно з законами механіки, з часом обов'язково повернеться до стану, близького до початкового.

Одержані при аналізі кількісних співвідношень результати в оцінці поведінки нелінійної механічної системи вперше проілюстрували можливості комп'ютера, як інструмента одержання принципово нових фундаментальних знань. Ці результати стали основою для розвитку нових методів нелінійної динаміки, формування поняття солітон. Практично в цей самий час використання комп'ютера стало стимулом для розвиненння потужного методу дослідження в багатьох галузях науки – методу Монте – Карло [4].

Широкі можливості одержання принципово нових результатів в механіці з допомогою комп'ютерів відмічалися вже в узагальнюючій статті [8] про роботу третього Всесоюзного з'їзду по теоретичній та прикладній механіці в 1969 році. Уже в цей час на з'їзді було представлено низку доповідей, що чітко свідчили про таку можливість. Автори вказаної статті відмічали, що застосування комп'ютерів в механіці наклало свій відбиток на саму постановку багатьох задач механіки. Слід додати, що нові можливості одержання кількісних оцінок в задачах, що не мають належних аналітичних розв'язків ставлять нові вимоги до глибини аналізу результатів розрахунків, досягнення розуміння ролі різних параметрів задачі. Ставилося завдання про перехід від прикладу розрахунку, що характеризував можливості запропонованого методу до розрахунку пізнавального, такого, що дає підстави для певних практично важливих узагальнень.

Наступним важливим кроком у розвитку механіки та інших природничих наук стало формування теорії детермінованого хаосу. Величезна робота по створенню теоретичного базису такої теорії була проведена багатьма вченими, в основному математиками, на початку та в середині XX століття. Певною мірою початок цієї теорії можна пов'язувати з роботами А. Пуанкаре. Однак основним стимулом для розвитку цієї теорії стали результати аналізу нелінійних систем, одержані з допомогою комп'ютерів. Особливо відзнача-

ють роботу Е. Лоренца [5], присвячену аналізу результатів поведінки досить простої, на перший погляд, системи з трьома степенями вільності. Система призначалася для формування прогнозу погоди. Практично випадково при проведенні обчислень автор встановив наявність однієї з характерних ознак систем з хаотичною динамікою – надзвичайну чутливість кількісних оцінок параметрів системи до незначних змін в початкових умовах. Подальший аналіз кількісних результатів призвів до формування поняття дивного атрактора. Що стосується передбачення погоди, то висновок автора був категоричним – передбачити погоду більше, ніж на тиждень, принципово неможливо.

Розуміння специфіки поведінки нелінійних систем, формування нової понятійної бази на основі узагальнення результатів досліджень сформували основу для широкого використання теорії динамічних систем в інших, "не механічних" галузях природознавства. Особливо цікавими і перспективними виглядають дослідження поведінки живих систем з використанням нових понять. Зараз уже видано 16 томів в серії "Дослідження нелінійних явищ в науці про життя". З тематикою видання можна познайомитися на сайті видавництва http://www.worldscientific.com/series/snpls.

Особливо слід відзначити роботи, виконані на кафедрі теоретичної та прикладної механіки КНУ. Перш за все, відзначу роботи з моделювання на аналогових пристроях поведінки нелінійної системи (рівняння Дюфінга) доцентом кафедри Іваном Івановичем Хількевичем. В загальному випадку це рівняння з кубічною нелінійністю не має аналітичного розв'язку. Він багато разів розгортав перед учасниками семінару, який ми проводили разом з Андрієм Теофановичем Улітко, листи з графічним зображенням результатів моделювання. Крім всього іншого вони блискуче ілюстрували чутливість поведінки розв'язків рівняння до початкових умов. На жаль, тоді ніхто з учасників семінару не зосередився на узагальненні цих результатів моделювання. Важливим етапом в розвитку динаміки нелінійних систем були роботи В. О. Кононенка, присвячені дослідженню коливальних процесів в системах з обмеженим збудженням.

Можливості одержання нових знань про поведінку складних систем з допомогою комп'ютерного моделювання широко використовувалися в роботах В. В. Мелешка та його учнів. Розроблені алгоритми дозволили одержати принципові результати в динаміці вихрових структур [5, 6] та в теорії хаотичної адвекції [7].

Новітні тенденції в механіці, що сформувалися на основі широкого використання можливостей комп'ютерної техніки, оперативно включаються в навчальні програми. Досить змістовну систематизацію сучасних уявлень про особливості теорії динамічних систем та явище детермінованого хаосу приведено в роботі [9].

Навіть прості приклади використання комп'ютера вказують на суттєві ідеологічні проблеми. Оскільки розрахунки завжди ведуться зі скінченним числом значущих цифр, зовсім по іншому виглядають певні математичні твердження, що по суті формуються на основі теорії нескінченно малих (великих) величин. Міркування, що певною мірою висвітлюють важливі аспекти застосування комп'ютерного моделювання приведено в книзі В. І. Арнольда [10]. Перш за все, вказано на точку зору Я. Б. Зельдовіча відносно принципових труднощів переходу від використання класичного аналізу на основі поняття нескінченно малої величини до використання скінченних різниць. При цьому перегляду вимагають навіть такі фундаментальні поняття, як поняття єдиності розв'язку диференціального рівняння.

Аналіз основних співвідношень механіки, що побудовані на заміні похідних скінченними різницями породжує дуже важливий наслідок. При такій заміні навіть дещо підміняється основне фізичне співвідношення – рівняння стану. В задачах механіки в'язкої рідини поряд з фізичною в'язкістю з'являються решіткова та вихрова в'язкість. Якщо в диференціальних рівняннях математичної моделі асимптотика за просторовими змінними та часом узгоджені при використанні поняття похідної, то в резніцевих схемах особливу увагу слід приділяти узгодженню "кроків" по простору та часу. Без такого узгодження обчислювальні процедури стають нестійкими і результати обчислень втрачають фізичний смисл [11]. Принципові труднощі виникають також при формулюванні граничних умов в рамках різних схем дискретизації рівнянь (наприклад, моделювання крупних вихорів, LES).

Практичні потреби розв'язання складних інженерних проблем механіки та можливості використання комп'ютерів для цього стимулювали розробку широкого спектру програмних комплексів для моделювання задач механіки. Як характерні приклади можна відзначити відомі комерційні (дуже дорогі) комплекси ANSYS, FLUENT. Співдружність математиків та механіків розвиває також комплекси з вільним доступом, які також досить широко використовуються. З допомогою таких програмних комплексів та сучасних потужних суперкомп'ютерів вдається успішно розв'язувати надзвичайно складні задачі. При цьому заміна фізичного експерименту комп'ютерним приносить значний виграш, як

економічний, так і виграш в часі реалізації проекту. Так, фірма Боінг при представленні нового літака 787 моделі вказала, що при його створенні проведено всього 11 великомасштабних випробувань в аеродинамічних трубах. В той же час, при створенні попередньої моделі треба було виконати 77 таких випробувань. Така значна різниця досягнута за рахунок широкого використання комп'ютерного експерименту.

Однак, оцінюючи визначні досягнення в використанні комп'ютера при розв'язанні складних задач, слід звертати увагу і на певні проблеми. Накопичений досвід комп'ютерного моделювання свідчить про необхідність обережного підходу до оцінки його результатів. Досить чітко проблема сформульована в назві одного з розділів монографії [1]: Reliability without Truth (надійність без адекватності). Саме ця обставина стимулює дуже активну роботу по створенню стандартів для тестування результатів комп'ютерного моделювання. Лідируючі позиції тут належать американцям. Практично всі державні установи, що фінансують наукові дослідження створили свої нормативні документи, що регламентують таке тестування. Декілька стандартів розроблено і Американським товариством інженерів-механіків. Один із них (ASME V&V 20 2009), визнаний як державний стандарт США, на 85 сторінках регламентує процедуру оцінки результатів моделювання в механіці рідини та в дослідженні процесів теплопередачі. Це було б цікаво і корисно впроваджувати подібні процедури для наших українських досліджень з використанням комп'ютерного моделювання.

Розвиток комп'ютерної техніки зараз дійсно суттєво впливає на саму постановку задач механіки. Побіжний перегляд каталогу бібліотеки одного з провідних західних університетів вказує на видання більше 15 наукових журналів механічного профілю, назва яких починається зі слів COMPUTER, COMPUTING, COPUTATIONAL. Постійно зростає потужність обчислювальних машин. Останнє, відоме автору, повідомлення про суперкомп'ютер, яке відноситься по часу до початку 2013 року, вказує на можливості системи Titan виконати 20 квадрильйонів операцій в секунду. Детальний опис системи можна знайти в англомовному розділі Вікіпедії. Здається, що такі можливості знімають будь-які обмеження на фантазію при постановці задачі.

Однак нові можливості для дослідника дають підставу і для формування нових вимог до якості наукової роботи. В. І. Арнольд в одній із робіт цитував висловлювання Ф. Клейна про "тонку отруту математичної освіти". При цьому малася на увазі можливість заповнювати наукову статтю великою кількістю формул без змістовного аналізу фізичної сторони проблеми. Зараз можна говорити про не менш небезпечну отруту комп'ютерної освіти. Все частіше в наукових виданнях можна зустріти роботи з неймовірною кількістю графічного або числового матеріалу без глибокого осмислення одержаних залежностей. Стає незрозумілим, до якої дисципліни слід віднести таку роботу. Зверненням до читача типу "Дивись і побачиш" не можна користуватися в науковій роботі. Для нього особливу цінність має власна оцінка автором своїх результатів.

Список використаних джерел

1. *Winsberg E. B.* Science in the Age of Computer Simulation. University of Chicago Press. – 2010. – 152 p.
2. *Light J. S.* When computers were women // Technology and Culture. – 1999. – V. 40. – No 3. – P. 455-483.
3. Enrico Fermi Collected Papers. V. 2. The university of Chicago. – 1965. – P. 977-988. http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/fpu55.pdf
4. *Shchur L. N.* Computational physics and testing theoretical predictions // Phys. Usp. – 2012. – V. 55. – No 7. – P. 733-738.
5. *Meleshko V. V.* Coaxial axisymmetric vortex rings: 150 years after Helmholtz // Theoretical and computational Fluid Dynamics. – 2010. – V. 24. – Issue 1. – P. 403-431.
6. *Meleshko V. V., Konstantinov M. Yu.* Dynamics of the vortex structures. – Kiev: Naukova Dumka. – 1983. – 282 p. (in Russian).
7. *Meleshko V. V., Peters G. W. M.* Periodic points for two dimensional Stokes flow in rectangular cavity // Physics Letters A. – 1996. – V. 216. – P. 87-96.
8. *Vorovich I. I., Mikhailov G. K., Mishkis A. D., Yudovich V. I.* The 3-rd All-Union congress on theoretical and applied mechanics // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. – 1969. – V. 24. – P. 201-219. (in Russian).
9. *Grinchenko V. T., Matsipura V. T., Snarskii A. A.* Introduction to nonlinear dynamics. Chaos and fractals. – Kiev: Naukova Dumka. – 264 p. (in Russian).
10. *Courant R., Friedrichs K., Lewy H.* On difference equations of mathematical physics // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. – 1941. – No 8. – P. 125-160.

Надійшла до редколегії 20.05.13

УДК 539.374

Морозов Н. Ф.[1], академик РАН,
Беляев А. К.[2], д. ф.-м. н.,
Ильин Д. Н.[1], аспирант

Параметрический резонанс в задаче Ишлинского о скачкообразном продольном нагружении стержня

Решена задача о динамической устойчивости стержня в случае скачкообразной продольной нагрузки с помощью метода разложения в ряд по формам продольных и изгибных колебаний. Продольные колебания проявляются в виде продольных периодических сил, вызывающих параметрический резонанс. Подход демонстрируется на примере шарнирно опертого стержня, к концу которого скачком приложена осевая сила. Построены области неустойчивости, вид которых зависит от спектральных свойств продольных и изгибных колебаний, величины демпфирования и продольной силы. Получено выражение для критической динамической скачкообразной нагрузки, приводящей к параметрическому резонансу.

Ключевые слова: параметрический резонанс, продольные и изгибные колебания, уравнение Матье.

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: morozov@nm1016.nm.spb.edu, dimakrechet@mail.ru
[2] Институт проблем машиноведения РАН, 199178, г. Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., 61
e-mail: vice.ipme@gmail.com

N. F. Morozov[1], Academician of RAS,
A. K. Belyaev[2], Dr. Sci. (Phys.-Math.),
D. N. Iliin[1], PhD student

Parametric resonance in the Ishlinsky problem of axial jump loading of rod

The problem of the dynamic stability of the rod subjected to a jump longitudinal load is solved with the help of method of series expansion of displacements in terms of longitudinal and bending vibration modes. Longitudinal oscillations are manifested in the form of longitudinal periodic forces that cause a parametric resonance. The approach is demonstrated by the example of simply supported rod, whose end is subjected to an axial jump force. The instability regions are shown to have the form depending upon the spectral properties of the longitudinal and bending vibrations, damping values and axial force. An expression for the critical dynamic load jump leading to a parametric resonance is derived.

Key Words: parametric resonance, axial and bending vibrations, Mathieu equation.

[1] St. Petersburg State University,
199034, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9
e-mail: morozov@nm1016.nm.spb.edu, dimakrechet@mail.ru
[2] Institute for Problems in Mechanical Engineering, RAS, 199178, V.O., Bolshoy pr., 61
e-mail: vice.ipme@gmail.com

Впервые задача о динамических формах потери устойчивости шарнирно опертой балки при внезапном приложении продольной нагрузки рассмотрена в статье А. Ю. Ишлинского и М. А. Лаврентьева [1]. В ней приняты предположения о начальной погиби балки и о том, что внешняя сжимающая сила, приложенная к концу балки, мгновенно охватывает всю балку и затем остается постоянной. Показано, что наибольшим темпом нарастания стрелы прогиба будут обладать не те формы, которые соответствуют значению статической критической силы, а формы с меньшим номером. Например, показано, если внезапно приложена нагрузка, являющая критической для третьей искривленной равновесной формы, то наибольший темп будет иметь вторая равновесная форма и т. д. Постановка задачи статьи [1] имеет ограничения, что приводит, в частности, к следующему:

1) вывод о наибольшем темпе нарастания какой-то формы утрачивает значение для устойчивости стержня если, например, эта форма вообще не представлена в начальной погиби;

2) продольные волновые процессы в балке не учитываются.

Дальнейшее развитие предложено в статье [2],

© Н. Ф. Морозов, А.К. Беляев, Д. Н. Ильин, 2013

где анализ динамики стержня проведен с учетом появления продольных волн, вызванных скачком осевой силы.

В настоящей работе рассматривается задача о динамической устойчивости стержня в случае скачкообразной продольной нагрузки. Предлагается систематическое применение метода разложения в ряд по формам продольных и изгибных колебаний. Продольные колебания приводят к появлению периодических продольных сил, вызывающих неустойчивые изгибные колебания, известные как параметрический резонанс [3].

Области динамической неустойчивости

Рассматривается шарнирно опертый стержень постоянного сечения, к концу $x = l$ которого в момент времени $t = 0$ скачком приложена осевая сила P_0. Предполагаются чисто упругие продольные колебания. Тогда продольное смещение $u(x, t)$ ищем в виде ряда по формам собственных колебаний $u_k(x)$:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) q_k(t), \quad u_k(x) = \sin\frac{\omega_k}{a} x,$$

$$\omega_k = \frac{\pi a}{2l}(2k-1), \quad a = \sqrt{E/\rho},$$

где ω_k – собственные частоты, E и ρ – модуль Юнга и плотность материала стержня. С учетом нулевых начальных условий получаем выражения для обобщенной координаты продольных колебаний

$$q_k(t) = (-1)^{k+1} \frac{2a^2 P_0}{lEF\omega_k^2}(1 - \cos\omega_k t) \qquad (1)$$

и для продольной силы в виде ряда

$$P(x, t) = EF\frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= \frac{4}{\pi} P_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}(1 - \cos\omega_k t)\cos\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{x}{l}, \quad (2)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня.

Уравнение поперечных колебаний стержня с учетом трения по модели Кельвина – Фойгта имеет вид

$$E\left(1 + \gamma\frac{\partial}{\partial t}\right) I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x}\left(P(x, t)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Здесь $w(x, t)$ – прогиб, I и F – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня, γ – коэффициент вязкости. Необходимость введения вязкости в модель поперечных колебаний вызвана тем, что демпфирование оказывает решающее влияние на форму областей неустойчивости при малых амплитудах продольной силы [3].

Поперечное смещение $w(x, t)$ представим в виде разложения по формам изгибных колебаний:

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t)\sin\frac{m\pi x}{l}. \qquad (4)$$

Подставляя представление для продольной силы (4) в уравнение (3), методом Галеркина получаем уравнения для обобщенной координаты $Q_m(t)$:

$$\rho F\frac{l}{2}\ddot{Q}_j(t) + EI\frac{j^4\pi^4}{l^4}\frac{l}{2}\left[\gamma\dot{Q}_j(t) + Q_j(t)\right] -$$

$$-EF\frac{\pi^2}{8l^2}\left[\sum_m m\sum_k (2k-1)\alpha_{mk} q_k(t) Q_m(t)\right] = 0, \quad (5)$$

где α_{kmj} зависит от номера k продольной формы колебаний и номеров j и m поперечных форм.

Система уравнений (5) представляет собой бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений. Как видно из третьего слагаемого в уравнениях (5), представляющего собой двойной ряд, обобщенные координаты изгибных колебаний $Q_j(t)$ зависят от коэффициентов продольного разложения $q_k(t)$, равно как и от других обобщенных координат коэффициентов изгибных колебаний $Q_m(t)$, что отражает влияние поперечных форм колебаний друг на друга.

Пренебрежем влиянием изгибных форм друг на друга, тогда в двойном ряде остается только слагаемое, для которого $m = j$. В этом случае приходим к системе несвязанных уравнений для поперечных колебаний, каждое из которых описывает влияние продольной формы колебаний (с номером k) на рассматриваемую поперечную (с номером m). Система уравнений (5) принимает вид

$$EI\frac{m^4\pi^4}{l^4}\frac{l}{2}Q_{mk}(t) + E\gamma I\frac{m^4\pi^4}{l^4}\frac{l}{2}\dot{Q}_{mk}(t) -$$

$$-EF\frac{\pi^2 m(2k-1)\alpha_{mk}}{8l^2} q_k(t) Q_{mk}(t) + \rho F\frac{l}{2}\ddot{Q}_{mk}(t) = 0.$$

Здесь нижние индексы у Q_{mk}, $k, m = 1, 2, 3, \ldots$ соответствуют номеру m поперечной формы колебаний и номеру k продольной формы, влияние которой рассматривается.

Подставляя в последнее уравнение явное выражение для $q_k(t)$ из (1), получаем

$$\ddot{Q}_{mk} + \frac{E\gamma I\pi^4 m^4}{\rho F l^4}\dot{Q}_{mk} + \left(\frac{EI\pi^4}{\rho F l^4} m^4 + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{2m\alpha_{mk}}{2k-1}\frac{P_0}{\rho F l^2}(1 - \cos\omega_k t)\right) Q_{mk} = 0. \qquad (6)$$

Это уравнение позволяет выяснить, при каких значениях нагрузки P_0 рассматриваемая поперечная форма колебаний (с номером m) станет неустойчивой под действием продольной формы колебаний (с номером k). Перепишем его в виде, принятом при исследовании параметрической неустойчивости [3]:

$$\ddot{Q}_{mk} + 2\delta_{mk}\Omega_{mk}\dot{Q}_{mk} + \Omega_{mk}^2\left(1 - 2\mu_{mk}\cos\theta t\right)Q_{mk} = 0 \,, \quad (7)$$

где

$$\Omega_{mk}^2 = \frac{EI\pi^4}{\rho Fl^4}m^4 + (-1)^k\frac{2m\alpha}{2k-1}\frac{P_0}{\rho Fl^2},$$

$$\delta_{mk} = \frac{E\gamma I\pi^4 m^4}{2\rho Fl^4\Omega_{mk}}, \quad \theta = \omega_k,$$

$$\mu_{mk} = \frac{(-1)^{k+1}\alpha P_0}{EI\pi^4 m^3(2k-1) + (-1)^k 2\alpha l^2 P_0}. \quad (8)$$

Перед тем, как перейти к нахождению границ областей параметрической неустойчивости, заметим, что они существуют только при условии $\Omega_{mk}^2 > 0$. Если же $\Omega_{mk}^2 \le 0$, то решение уравнения вида (7) будет неограниченно возрастающим даже при $\mu_{mk} = 0$, то есть соответствующая поперечная форма колебаний будет неустойчивой. Таким образом, критическое значение нагрузки для рассматриваемой поперечной формы колебаний при влиянии на нее определенной продольной формы может быть найдено из условия

$$\frac{EI\pi^4}{\rho Fl^4}m^4 + (-1)^k\frac{2m\alpha}{2k-1}\frac{P_0}{\rho Fl^2} \le 0. \quad (9)$$

При $\Omega_{mk}^2 > 0$ уравнение (7) является уравнением Матье с затуханием. Известно [3], что влияние затухания, практически несущественное для главной области неустойчивости, делает побочные области нереализуемыми в инженерной практике. Исходя из данного замечания, ограничимся рассмотрением только главной области динамической неустойчивости.

Главные области неустойчивости поперечных форм колебаний на плоскости параметров (P_0, θ) задаются системами неравенств в форме, принятой в [3]:

$$2\Omega\sqrt{1-\sqrt{\mu^2-4\delta^2}} \le \theta \le 2\Omega\sqrt{1+\sqrt{\mu^2-4\delta^2}} \quad (10)$$

(нижние индексы здесь и далее опущены для простоты записи). Эти неравенства формально совпадают с неравенствами классического уравнения Матье, однако надо иметь в виду, что продольные колебания радикально меняют формулы для каждого параметра, см. (8), тем самым принципиально изменяя области динамической неустойчивости. Системы неравенств данного вида задают в неявном виде значения нагрузки, при которых m-ая поперечная форма колебаний будет неустойчивой при рассмотрении влияния k-ой продольной формы.

Путем построения областей динамической неустойчивости, задаваемых неравенствами вида (10), для всевозможных пар продольная – поперечная для некоторых поперечных форм колебаний можно получить критические значения нагрузки, меньшие, чем значения, получаемые из условия (9).

Найдем критическое значение силы путем построения областей динамической неустойчивости для выбранных значений параметров стержня: $l = 2$ м, $h = 0{,}005$ м, $b = 0{,}01$ м, где h и b – соответственно высота и ширина сечения и $\gamma = 10^{-4}$.

Рис. 1 демонстрирует влияние первой продольной формы на главные областей неустойчивости для 7-ой – 12-ой поперечных форм колебаний. В стандартной проблеме динамической потери устойчивости балки [3] частота продольной силы θ может меняться непрерывно. В рассматриваемой задаче частота θ принадлежит дискретному спектру собственных частот продольных колебаний. Учитывая, что для первой продольной формы колебаний $\theta = \omega_1 = \pi a/(2l)$, находим номер поперечной формы колебаний, которой соответствует минимальное значение нагрузки. Как видно из рис. 1, для поперечных форм колебаний с номерами меньше 12, параметрический резонанс невозможен, т. к. эти области не пересекаются прямой $\theta = \omega_1$. Для этих поперечных форм критическое значение силы может быть найдено из условия $\Omega_{mk}^2 > 0$. Для высших поперечных форм наименьшее значение критической силы дает метод построения областей динамической неустойчивости.

Ниже приводятся расчетные данные, полученные численным экспериментом с использованием критериев динамической неустойчивости, выведенных выше:

– сила Эйлера $P_E = EI\pi^2/l^2 \approx 53{,}97$ Н;

– условие неустойчивости *первой* поперечной формы колебаний: $P_0 \ge 1{,}32P_E \approx 71{,}3$ Н;

– условие неустойчивости *второй* поперечной формы колебаний: $P_0 \ge 5P_E \approx 270{,}6$ Н и т. д.;

– условие неустойчивости *седьмой* поперечной формы колебаний: $P_0 \ge 3266{,}6$ Н.

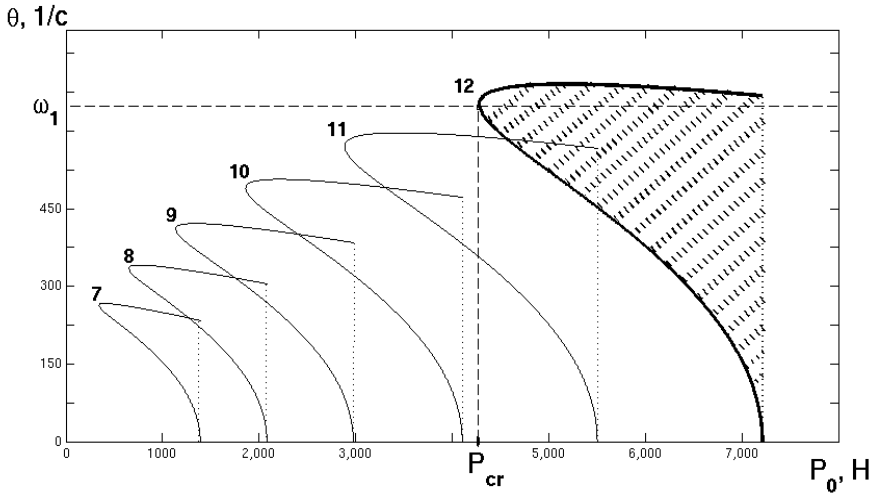


Рис. 1. Границы главных областей неустойчивости для 7-ой – 12-ой поперечных форм колебаний, вызванных первой продольной формой. Горизонтальная прямая $\theta = \omega_1$ не пресекает главные области неустойчивости для поперечных формы с номером ниже 12, P_{cr} – минимальное значение параметра нагрузки, теоретически приводящее к неустойчивости 12-ой поперечной формы колебаний.

При значениях нагрузки $P_0 \geq 3924{,}5$ Н теоретически возможно нарастание прогиба по двенадцатой форме (в соответствии с результатами, полученными из рассмотрения системы (8)).

Расположение областей неустойчивости на плоскости параметров (P_0, θ) зависит от параметров стержня. В зависимости от геометрии стержня и его материала минимальное значение продольной силы может приводить к динамической неустойчивости не обязательно по двенадцатой поперечной форме, а по изгибной форме с другим номером.

Заключение

Построение и анализ областей динамической неустойчивости позволяет сделать следующие выводы.

1. Наиболее опасным является влияние первой продольной формы колебаний на поперечные формы изгибных колебаний.

2. Для первых номеров поперечных форм колебаний значение критической нагрузки может быть получено из условия (9), а для более высоких номеров из неравенств (10).

3. С увеличением (выбором большего значения) сжимающей силы возможно непоследовательное выделение поперечных форм колебаний, то есть зависимость номера формы потери устойчивости от значения нагрузки не прямо пропорциональная.

4. Потеря устойчивости стержня по высшим формам возможна при значениях сжимающей силы меньше, чем значения, вычисленные по формуле Эйлера.

5. Наименьшее значение критической нагрузки соответствует паре первая продольная – первая поперечная. Это значение больше значения силы Эйлера и может быть найдено из условия (9): $P_{cr} = 1{,}3P_E$.

Список использованных источников

1. *Lavrentiev M. A., Ishlinsky A. Yu. Dynamic form of stability loss of elastic systems* // Doklady AN SSSR. – 1949. – N 6. – P. 776-782. (in Russian).
2. *Morozov N. F., Tovstik P. E. Dynamics of rod under axail impact* // Vestnik SPb. State University. Ser. 1. – 2009. – N 2. – P. 105-111. (in Russian).
3. *Bolotin V. V.* Dynamic stability of elastic systems. – Moscow: Nauka, 1956. – 600 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13

УДК 539.3, 544

Фрейдин А. Б.[1, 2, 3], д. ф.-м. н., с. н. с.,
Морозов Н. Ф.[1], д. ф.-м. н., проф., академик РАН,
Вильчевская Е. Н.[2, 3], к. ф.-м. н., доц.

Моделирование фронтов химических реакций в деформируемых телах

С позиций механики конфигурационных сил рассмотрено деформируемое тело, в котором происходит химическая реакция, локализованная на фронте реакции. Определяется тензор деформаций химических превращений, связывающий отсчетные конфигурации твердых компонент реакции. Затем выводится выражение производства энтропии на фронте реакции. В результате получается выражение тензора химического сродства. Предлагается кинетическое уравнение, определяющее скорость фронта химической реакции как функцию нормальных компонент тензора сродства.

Ключевые слова: тензор химического сродства, механохимия, кинетика фронта химической реакции.

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский проспект, 28
e-mail: alexander.freidin@gmail.com, morozov@nm1016.spb.edu
[2] Институт проблем машиноведения Российской академии наук, 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, В. О., Большой пр., 61
e-mail: vilchevska@gmail.com
[3] Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая, 29

A. B. Freidin[1, 2, 3], Dr. Sci. (Phys.-Math.), jun. res.,
N. F. Morozov[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
E. N. Vilchevskaya[2, 3], PhD, Ass. Prof.

Modelling chemical reactions fronts in deformable solids

A deformable solid undergoing chemical reactions localized at the reaction front is considered within the frameworks of configuration forces concept. A chemical transformations strain tensor is determined that relates the reference configurations of solid constituents of the reaction. Then the expression of the entropy production at the reaction front is derived. As a result, the expression of the chemical affinity tensor is obtained. Kinetic equation for chemical reactions front propagation in an elastic solid is formulated in a form of the dependence of the front velocity on normal components of the chemical affinity tensor.

Key Words: chemical affinity tensor, mechanochemistry, chemical reaction front kinetics.

[1] Saint-Petersburg State University, 198504, Russia, St. Petersburg, Peterhof, Universitetsky Prospekt, 28
e-mail: alexander.freidin@gmail.com, morozov@nm1016.spb.edu
[2] Institute for Problems in Mechanical Engineering of Rusian Academy of Sciences, 199178, Russia, St. Petersburg, V. O., Bolshoy Pr., 61
e-mail: vilchevska@gmail.com
[3] Saint-Petersburg State Polytechnical University, 195251, Russia, St. Petersburg, Politekhnicheskaya, 29

Проблемы, связанные с влиянием напряжений на протекание химических реакций, не могут быть отнесены к по-настоящему решенным, несмотря на то, что ставились и обсуждались на всем протяжении 20 века и остаются в центре внимания исследовательских групп в наши дни. В то же время новые технологические задачи требуют описания влияния на кинетику структурных превращений различной природы не только величины напряжений, но и вида напряженного состояния.

Необходимость решения связанных задач механохимии в постановке, явно учитывающей развитие фронтов химических реакций, в частности, обусловлена миниатюризацией рассматриваемых объектов. Например, время жизни деталей микроэлектронных механических систем (МЕМС), выполненных из поликристаллического кремния, определяется ростом трещин в оксидном слое, который, в свою очередь, является результатом протекания химических реакций, скорость которых зависит от напряжений [1].

Другой пример дают проблемы энергетики, которые ставят проблемы учета влияния напряжений на протекание химических реакций и влияния химических реакций на возникновение вну-

© А. Б. Фрейдин, Н. Ф. Морозов, Е. Н. Вильчевская, 2013

тренних напряжений и разрушение при формировании металлогидридов в водород-аккумулирующих материалах для водородного двигателя [2]. Внимание исследователей также привлекает влияние механических факторов на биохимические процессы в растущих костях в контексте разработки приспособлений для лечения отклонений в процессе роста костей и сокращения времени заживления переломов [3].

В ряду ключевых проблем находятся формулировка условий на движущихся в деформируемом теле фронтах химических превращений, и зависимость кинетики превращений от механических воздействий. Настоящая статья посвящена ответам на эти вопросы.

Тензор деформаций превращения

Рассмотрим химическую реакцию

$$\nu_- B_- + \nu_* B_* \to \nu_+ B_+ ,$$

где B_-, B_+ и B_* – химические формулы материалов реагирующих компонент, причем, B_- и B_+ являются исходной и получившейся деформируемыми твердыми компонентами реакции, а B_* – газовой компонентой, ν_-, ν_* и ν_+ – стехиометрические коэффициенты реакции.

Полагаем, что химическая реакция локализована на фронте реакции и поддерживается диффузией газовой компоненты сквозь образовавшийся в результате реакции материал. Для простоты предполагается, что диффузия газовой компоненты не приводит к дополнительным деформациям твердой компоненты, но учитывается, что химическое превращение сопровождается увеличением объема, что, в свою очередь, может приводить к возникновению внутренних напряжений.

Пусть $\upsilon_t = \upsilon_- \cup \upsilon_+$ – текущая конфигурация тела в момент времени t, где области υ_- и υ_+ заняты материалами B_- и B_+ соответственно. Наряду с отсчетной конфигурацией $V_0 = V_- \cup V_+$, соответствующей натуральному состоянию исходного материала до реакции, вводим отсчетную конфигурацию $V_g = V_g^+ \cup V_g^-$, соответствующую натуральному состоянию превращенного материала (рис. 1). Это позволяет естественным образом задавать определяющие соотношения нового материала в терминах деформаций, отсчитываемых от его натурального состояния.

Линейные векторные элементы dx_- и dx_+ из областей υ_- и υ_+ могут быть связаны с соответствующими линейными элементами dX_- и dX_g из областей V_- и V_g деформационными градиентами F_-^e и F_+^e так, что

$$dx_- = F_-^e \cdot dX_- , \quad \det F_-^e = \frac{d\upsilon_-}{dV_-} = \frac{\rho_0}{\rho_-},$$

$$dx_+ = F_+^e \cdot dX_g , \quad \det F_+^e = \frac{d\upsilon_+}{dV_g} = \frac{\rho_g}{\rho_+},$$

где ρ_0, ρ_-, ρ_+ и ρ_g – плотности исходного и превращенного материалов, вычисленные относительно соответствующих конфигураций, линейные элементы dX_- и dX_g связаны тензором деформаций превращения G [4, 5] так, что

$$dX_g = G \cdot dX_- ,$$

$$G = gE, \ \det G = \frac{dV_g}{dV_0} = \frac{\nu_+ M_+ \rho_0}{\nu_- M_- \rho_g}, \ g = \left(\frac{\nu_+ M_+ \rho_0}{\nu_- M_- \rho_g} \right)^{1/3},$$

где M_- и M_+ – молярные массы твердых компонент, E – единичный тензор.

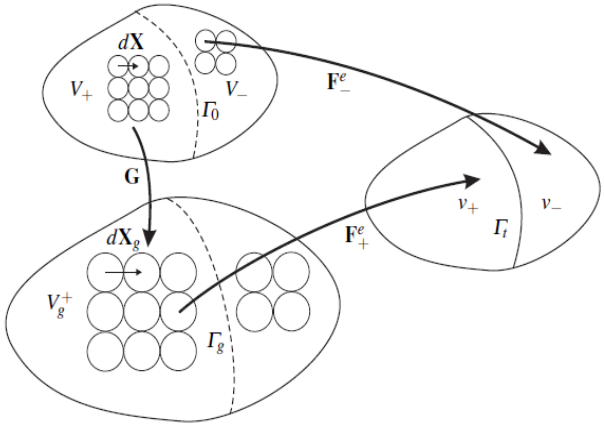


Рис. 1. Конфигурации, порождаемые химическим превращением

Отметим, что в случае нестехиометрических реакций типа образования твердого раствора тензор деформаций превращения определяется аналогичным образом.

Тензор химического сродства

Используя балансы массы, импульса и энергии для открытой системы деформируемое тело – газ, можно показать, что выражение для произ-

водства энтропии на движущемся фронте химической реакции в квазистатическом приближении имеет вид

$$TP[S]=\frac{\rho_0}{\nu_- M_-}\int_\Gamma N\cdot A\cdot V^\Gamma d\Gamma=\frac{\rho_0}{\nu_- M_-}\int_\Gamma A_N V_N^\Gamma d\Gamma\ge 0,$$

где V^Γ и N – векторы скорости фронта реакции и нормали к фронту реакции, $V_N^\Gamma=V^\Gamma\cdot N$, A – тензор химического сродства, $A_N=N\cdot A\cdot N$,

$$A=\nu_- M_- b_- +\nu_* M_* b_* -\nu_+ M_+ b_+, \qquad (1)$$

$$b_+=f_+E-\frac{1}{\rho_g}(S_+^g)^T\cdot F_+^e,\quad b_-=f_-E-\frac{1}{\rho_0}S_-^T\cdot F_-^e,$$

b_+, b_- – тензоры химического потенциала твердых компонент реакции (равны тензорам энергии-импульса Эшелби [6], поделенным на плотности в отсчетных конфигурациях), S_+^g и S_- – тензоры напряжений Пиолы – Кирхгофа, определенные относительно отсчетных конфигураций материалов B_+, и B_-, $b_*=\mu_*(c,T)E$, μ_* – химический потенциал газовой компоненты, $c=\rho_*/\rho_g$ – относительная плотность газовой компоненты (находится из решения задачи дифузии), M_* – молярная масса газовой компоненты.

Формула (1) аналогична классической формуле скалярного химического сродства газообразных и жидких компонент реакции [7]. Для нелинейно-упругих компонент выражение (1) было получено в [4].

Тензорность химического сродства в случае деформируемого твердого тела связана с тем, что скорость химической реакции на площадке зависит от того как ориентирована площадка относительно тензора напряжений – подобно тому, как равновесие фаз деформируемого материала зависит от того, как ориентирована межфазная граница относительно поля напряжений, что, в свою очередь, приводит к тензорности химического потенциала [8].

Кинетическое уравнение

Исходя из выражения для производства энтропии можно записать кинетическое уравнение в виде зависимости нормальной компоненты скорости границы от нормальной компоненты тензора химического сродства, выступающей в роли обобщенной (термодинамической, конфигурационной) силы:

$$V_N^\Gamma=L(A_N),\quad V_N^\Gamma L(A_N)\ge 0.$$

Следуя [7], примем, что скорость реакции ω, равная числу молей, производимому в единицу времени на единице площади фронта реакции, связана с химическим сродством формулой

$$\omega=\hat\omega\left(1-\exp\left(-\frac{A_N}{RT}\right)\right), \qquad (3)$$

в которую вместо скалярного сродства подставлена нормальная компонента тензора сродства, $\hat\omega=k_* c_- c\cong k_* c$ – скорость прямой реакции, k_* – кинетическая константа реакции, c_- и c – парциальные концентрации исходного материала и газообразной компоненты; поскольку исходный материал – твердый, можно считать, что $c_-=1$.

С учетом баланса масс на фронте реакции, кинетическое уравнение принимает вид

$$V_N^\Gamma=\frac{\nu_+ M_+}{\rho_g}k_* c\left(1-\exp\left(-\frac{A_N}{RT}\right)\right). \qquad (4)$$

Равновесная концентрация и запирающий эффект

В случае химического равновесия $A_N=0$, скорость реакции равна нулю. Вводим понятие равновесной концентрации газовой компоненты c_{eq} как концентрации, при которой

$$A_N(c_{eq})=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) определяет равновесную концентрацию в зависимости от напряжений на фронте реакции, температуры и параметров материала. Если равновесная концентрация найдена в виде зависимости от напряжений и температуры, то текущее значение нормальной компоненты тензора сродства может быть вычислено как

$$A_N=\nu_*\left(\mu_*(c(\Gamma),T)-\mu_*(c_{eq},T)\right). \qquad (6)$$

Таким образом, скорость фронта реакции определяется формулами (4), (6), где входящая в (6) равновесная концентрация c_{eq} находится из уравнения (5), а текущая концентрация $c(\Gamma)$ на фронте реакции находится из решения задачи диффузии. Напряжения влияют на скорость фронта реакции через зависимость равновесной концентрации.

Отметим, что если напряжения зависят от положения фронта, то и равновесная концентрация и, следовательно, скорость фронта зависят от его положения. Отметим также, что напряжения на фронте реакции, вообще говоря, ненулевые даже в отсутствие внешних деформационно-силовых воздействий, так как деформация превращения порождает на фронте внутренние напряжения.

Вблизи химического равновесия

$$A_N = \nu_* \left.\frac{\partial \mu_*}{\partial c}\right|_{c_{eq}} \left(c(\Gamma) - c_{eq}\right),$$
$$V_N^\Gamma = \frac{\nu_+ \nu_* M_+}{\rho_g RT} k_* c_{eq} \left.\frac{\partial \mu_*}{\partial c}\right|_{c_{eq}} \left(c(\Gamma) - c_{eq}\right). \quad (7)$$

Если принять формулу химического потенциала идеального газа, согласно которой $M_* \mu_* = \eta(T) + RT \ln c$, то из (7) следует, что

$$V_N^\Gamma = \frac{k_* \nu_+ \nu_* M_+}{\rho_g} \left(c(\Gamma) - c_{eq}\right).$$

Фронт распространяется только если $c(\Gamma) > c_{eq}$. Но в силу решения диффузионной задачи концентрация $c(\Gamma)$ газовой компоненты на фронте реакции не может быть больше концентрации c_0 на внешней поверхности тела. Следовательно, при заданной концентрации c_0 необходимым условием распространения фронта химической реакции является выполнение неравенства

$$c_{eq} < c_0 . \quad (8)$$

Если напряжения на фронте реакции таковы, что неравенство (8) не выполняется, то такие напряжения блокируют реакцию. В частности, можно показать, что в случае тонкого приповерхностного слоя нового материала внутренние напряжения могут быть достаточными для блокирования реакции. Это означает, что тонкий слой превращенного материала может играть защитную роль, предотвращая дальнейшее развитие реакции.

Кинетика развития фронта реакции в зависимости от внешних напряжений и запирающий эффект могут быть продемонстрированы на примерах решения модельных осесимметричных и центрально-симметричных задач механохимии [5], а также при конечно-элементных решениях задач описания химических реакций в окрестности концентраторов напряжений.

Список использованных источников

1. *Muhlstein C. L., Stach E. A., Ritchie R. O.* A reaction-layer mechanism for the delayed failure of micron-scale polycrystalline silicon structural films subjected to high-cycle fatigue loading // J. Acta Materialia. – 2002. – V. 50. – P. 3579-3595.
2. *Kelly S. T., Clemens B. M.* Moving interface hydride formation in multilayered metal thin films // J. Applied Physics. – 2010. – V. 108. – P. 013521(1-6).
3. *Carter D. R., Gary S., Beaupry G. S.* Skeletal Function and Form: Mechanobiology of Skeletal Development, Aging, and Regeneration. – 2001. Cambridge University Press. – 330 p.
4. *Freidin A. B.* On chemical reaction fronts in nonlinear elastic solids // Proc. 36 International Summer School-Conference Advance Problems in Mechanics (APM2009). St. Petersburg. Institute for Problems in Mechanical Engineering. – 2009. – P. 231-237.
5. *Vilchevskaya E. N., Freidin A. B.* On kinetics of chemical reaction fronts in elastic solids. In: Surface Effects in Solid Mechanics, H. Altenbach and N. F. Morozov (eds.), Advanced Structured Materials. – 2013. – Vol. 30. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – P. 105-117.
6. *Eshelby J. D.* Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics. In: Inelastic Behavior of Solids. Ed.: M. Kanninen, W. Adler, Rosenfield A., Jaffee R. McGraw-Hill. New York. – 1970. – P. 77-115.
7. *Prigogine I., Defay R.* Chemical thermodynamics. – Novosibirsk: Nauka, 1966. – 502 p. (in Russian).
8. *Grinfeld M. A.* Continuum mechanics methods in he heory of phase transformations. – Moscow: Nauka, 1990. – 312 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13

УДК 539.3

Кушнір Р. М.[1], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України,
Попович В. С.[1], д. т. н., проф.

Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання

На прикладі багатошарової пластини ілюструється методика визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного їх нагрівання внутрішніми джерелами тепла та складного (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) теплообміну із оточуючими середовищами через обмежуючі поверхні. Ця методика ґрунтується на класичному математичному апараті, через що є доступною для застосування сучасним інженерам.

Ключові слова: багатошарова пластина, термочутливий матеріал, температура, температурні напруження.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-Б, e-mail: dyrector@iapmm.lviv.ua; dept19@iapmm.lviv.ua

R. M. Kushnir[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU,
V. S. Popovych[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.

On determination of steady thermoelastic state of multilayered structures under high-temperature heating

On the example of multilayered plate method of determining the steady thermoelastic state of multilayered structures under high-temperature their heating by internal heat sources and complex (convective, radiant or convective-radiant) heat exchange with the environment through the limiting surfaces is illustrated. This method is based on the classical mathematical apparatus because it is understandable for the application by modern engineers.

Key Words: multilayered plate, heat-sensitive material, temperature, thermal stressed.

[1] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU, 79060, L'viv, Naukova 3-b, e-mail: dyrector@iapmm.lviv.ua; dept19@iapmm.lviv.ua

Для адекватного визначення розподілу температури та компонент термопружного стану в шаруватих елементах конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання використовують модель термочутливого тіла (враховує залежність характеристик матеріалу та коефіцієнтів теплообміну від температури) [1-3]. При цьому, визначенню компонент статичного чи квазістатичного напружено-деформованого стану передує знаходження відповідного розподілу температури, який визначають з нелінійної задачі теплопровідності. Переважно цю задачу частково лінеаризують шляхом введення змінної Кірхгофа. При визначенні стаціонарних температурних полів в отриманій на змінну Кірхгофа задачі нелінійними будуть умови, отримані із рівності температур на межах контакту сусідніх шарів, та умови, отримані з умов складного (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) теплообміну із зовнішніми середовищами через обмежуючі поверхні. В роботах [4, 5] пропонується методика побудови розв'язків таких задач, яка істотно використовує апарат узагальнених функцій і незалежно від кількості шарів зводить проблему до розв'язання (залежно від умов теплообміну на обмежуючих поверхнях) одного або системи двох нелінійних алгебричних рівнянь, розв'язування яких слід здійснити числовими методами. При цьому відкритим залишається принципове питання вибору початкового наближення шуканих розв'язків.

Нижче, на прикладі багатошарової пластини з плоско паралельними межами поділу ілюструється методика розв'язання таких задач, в якій використовується класичний математичний апарат, через що є широкодоступною та простою в застосуванні. Вона, залежно від умов теплообміну на зовнішніх поверхнях, дозволяє отримати точний розв'язок або звести проблему до числового розв'язання одного нелінійного алгебричного рівняння зі зрозумілим способом вибору початкового наближення його розв'язку.

Формулювання задачі

Розглянемо n-шарову пластину (рис. 1), на кожній з обмежувальних поверхонь $z = z_1$ і

© Р. М. Кушнір, В. С. Попович, 2013

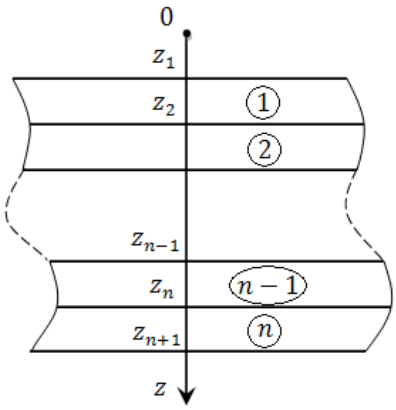


Рис. 1. n-шарова пластина

$z = z_{n+1}$ якої задані сталі температури чи теплові потоки або умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну із зовнішніми середовищами сталих температур. Між ізотропними контактуючими шарами, коефіцієнти теплопровідності яких є різні і залежать від температури, існує ідеальний тепловий контакт. У кожному із шарів наявні рівномірно розподілені по нормальних до осі z площинах джерела тепла. Стаціонарне температурне поле такої пластини описує система рівнянь теплопровідності [1, 6]

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dz}\right] = -W_i(z), \quad i = \overline{1, n}, \qquad (1)$$

з умовами контакту сусідніх шарів

$$t_i\big|_{z=z_{i+1}} = t_{i+1}\big|_{z=z_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad (2)$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dz}\bigg|_{z=z_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1})\frac{dt_{i+1}}{dz}\bigg|_{z=z_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad (3)$$

де t_i – абсолютна температура, а $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності i-го шару пластини, $W_i(z)$ – густина джерел тепла в i-му шарі. Для повного формулювання математичної моделі для визначення температури багатошарової пластини до (1) – (3) слід долучити умови на обмежувальних поверхнях, можливі варіанти яких розглянемо дещо пізніше.

Для зручності подальших викладок введемо безрозмірні температури $T_i = t_i/t_0$ та координату $\bar{z} = z/l_0$, де t_0 і z_0 вибрані нами відлікова температура та характерний розмір. Коефіцієнти теплопровідності шарів подано у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_0^{(i)}\lambda_*^{(i)}(T_i)$, де множники з нуликом – сталі величини, які мають розмірності коефіцієнта теплопровідності, а з зірочкою – безрозмірні функції, що описують залежності коефіцієнтів теплопровідності від безрозмірних температур. Зауважимо, що у довідковій літературі, залежності характеристик матеріалів від температури, переважно, наводять у табличному вигляді. Для використання у теоретичних дослідженнях, у більшості випадків, їх апроксимують певними аналітичними виразами (лінійними, квадратичними і т. інше), використовуючи при цьому для відшукання невідомих параметрів апроксимації метод найменших квадратів.

Нехай коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів задані у діапазоні температур $[t_p, t_k]$. Тоді, найбільш поширену, лінійну апроксимацію їх температурної залежності можна подати у вигляді

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_0^{(i)}\left[1 + k_i(T_i - T_p)\right], \qquad (4)$$

де $\lambda_0^{(i)}$ – значення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів при мінімальній температурі T_p з діапазону їх задання.

Густини джерел тепла W_i подамо у вигляді $W_i = w_0^{(i)} w_*^{(i)}(\bar{z})$, де $w_0^{(i)}$ – розмірні величини, а $w_*^{(i)}(\bar{z})$ – безрозмірні функції, що описують просторовий розподіл джерел тепла.

У введених безрозмірних величинах рівняння (1) та умови контакту (2) і (3) набувають вигляду

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda_*^{(i)}(T_i)\frac{dT_i}{d\bar{z}}\right] = -Po_i w_*^{(i)}(\bar{z}), \quad i = \overline{1, n}, \qquad (5)$$

$$T_i\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = T_{i+1}\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad (6)$$

$$\lambda_0^{(i)}\lambda_*^{(i)}(T_i)\frac{dT_i}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = \lambda_0^{(i+1)}\lambda_*^{(i+1)}(T_{i+1})\frac{dT_{i+1}}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad (7)$$

де $\bar{z}_i = z_i/l_0$, $Po_i = w_0^{(i)} l_0^2/(t_0\lambda_0^{(i)})$ – критерій Померанцева.

Через залежності коефіцієнтів теплопровідності від шуканих температур рівняння (5) та умови (7) є нелінійними. Для їх лінеаризації скористаємось перетворенням Кірхгофа [1, 6]

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_*^{(i)}(T_i)\,dT_i. \qquad (8)$$

У результаті рівняння (5) та умови (7) трансформуються у лінійні на змінні Кірхгофа

$$\frac{d^2\theta_i}{d\bar{z}^2} = -Po_i w_*^{(i)}(\bar{z}), \quad i=\overline{1,n}, \qquad (9)$$

$$\lambda_0^{(i)} \frac{d\theta_i}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = \lambda_0^{(i+1)} \frac{d\theta_{i+1}}{d\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}, \; i=\overline{1,n-1}. \quad (10)$$

У той же час у результаті перетворення Кірхгофа з лінійних умов (6) отримуємо наступні нелінійні умови:

$$T_i(\theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = T_{i+1}(\theta_{i+1})\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}}, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad (11)$$

де $T_i(\theta_i)$ – вирази температури через змінні Кірхгофа. Їх вигляд для конкретних залежностей $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ отримуємо з рівняння (8). Так, якщо залежності коефіцієнтів теплопровідності мають вигляд (4), то $\lambda_*^{(i)}(T_i) = 1 + k_i(T_i - T_p)$ і

$$\theta_i = T_i - T_p + \frac{k_i}{2}(T_i - T_p)^2, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (12)$$

Розв'язавши рівняння (12) відносно T_i, отримаємо вирази температури через змінні Кірхгофа

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1+2k_i\theta_i}-1}{k_i} + T_p, \quad i=\overline{1,n}. \quad (13)$$

Зауважимо, що з двох можливих знаків перед коренем квадратним у формулі (13) вибрали той, який відповідає фізичній суті задачі (при $k_i \to 0$ (нетермочутливі шари) $\theta_i \to T_i - T_p$).

Перетворимо дещо умови рівності температур на межі контакту сусідніх шарів (11). Із виразів змінних Кірхгофа для i-го і $i+1$-го шарів маємо

$$\frac{2}{k_i}\Big[\theta_i - (T_i - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1} = (T_i - T_p)^2\Big|_{\bar{z}=\bar{z}+1},$$

$$\frac{2}{k_{i+1}}\Big[\theta_{i+1} - (T_{i+1} - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1} = (T_{i+1} - T_p)^2\Big|_{\bar{z}=\bar{z}+1}. \quad (14)$$

З умов (6) слідує, що праві частини рівностей (14) однакові, а отже справедливими є рівності

$$\frac{1}{k_{i+1}}\Big[\theta_{i+1} - (T_{i+1} - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1} = \frac{1}{k_i}\Big[\theta_i - (T_i - T_p)\Big]_{\bar{z}=\bar{z}+1},$$

з яких отримуємо наступні умови:

$$\Big(\theta_{i+1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\theta_i\Big)\bigg|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = (1 - \frac{k_{i+1}}{k_i})(T_{i+1}(\theta_{i+1})\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p) =$$

$$\underline{\overset{або}{=} (1 - k_{i+1}/k_i)(T_i(\theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p)}, \quad i=\overline{1,n-1}. \quad (15)$$

Зауважимо, що вигляд умов (15), які рівносильні умовам (11), не є єдиним. Так, виходячи з виразів змінних Кірхгофа для i-го і $i+1$-го шарів та використовуючи умови (6) отримуємо умови типу (15) у вигляді

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} = \frac{k_{i+1} - k_i}{k_i}\Big[T_{i+1}(\theta_{i+1})\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p\Big]^2 \overset{або}{=}$$

$$\underline{= \frac{k_{i+1} - k_i}{k_i}\Big[T_i(\theta_i)\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{i+1}} - T_p\Big]^2}, \quad i=\overline{1,n-1}. \quad (16)$$

Побудова розв'язку задачі на змінні Кірхгофа

Інтегруючи двічі рівняння (9) знаходимо, що

$$\frac{d\theta_i}{d\bar{z}} = c_{i1} - Po_i w_i(\bar{z}), \qquad (17)$$

а $$\theta_i = c_{i1}(\bar{z} - \bar{z}_i) + c_{i2} - Po_i \bar{w}_i(\bar{z}), \quad i=\overline{1,n}, \qquad (18)$$

де

$$w_i(\bar{z}) = \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} w_*^{(i)}(\xi)d\xi, \quad \bar{w}_i(\bar{z}) = \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} w_i(\eta)d\eta,$$

c_{ij}, $j=1,2$, – сталі інтегрування.

Для визначення сталих інтегрування поступаємо так. Вважаємо сталі інтегрування, наприклад, першого шару c_{1j} (назвемо їх базовими) відомими величинами. Покажемо, що використовуючи умови контакту сусідніх шарів (10) і (15) або (16), всі решта сталі інтегрування c_{ij} ($i=\overline{2,n}$ $j=1,2$) виражаються через вибрані базові. Дійсно, з умов (10) знаходимо, що

$$c_{i1} = \frac{1}{\lambda_0^{(i)}}\left[\lambda_0^{(i)} c_{11} - \sum_{j=1}^{i-1}\lambda_0^{(i)} Po_j w_j(\bar{z}_{j+1})\right] \; (i=\overline{2,n}). \quad (19)$$

Задовольняючи умови (15) (підкреслений варіант), враховуючи при цьому, що $\theta_i(\bar{z}_i) = c_{i2}$, отримуємо рекурентне співвідношення

$$c_{i+1,2} = \frac{k_{i+1}}{k_i}\theta_i(\bar{z}_{i+1}) + \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\Big(T_i\big(\theta_i(\bar{z}_{i+1})\big) - T_p\Big)$$

$$(i=\overline{1,n-1}). \qquad (20)$$

З (20) бачимо, що стала інтегрування

$$c_{22}=\frac{k_2}{k_1}\theta_1(\bar z_2)+\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)\left(T_1\left(\theta_1(\bar z_2)\right)-T_p\right),$$

де $\theta_1(\bar z_2)=c_{11}(\bar z_2-\bar z_1)+c_{12}-Po_1\,\bar w_1(\bar z_2)$ виражається через базові сталі.

Подібно до того стала

$$c_{32}=\frac{k_3}{k_2}\theta_2(\bar z_3)+\left(1-\frac{k_3}{k_2}\right)\left(T_2\left(\theta_2(\bar z_3)\right)-T_p\right),$$

де $\theta_2(\bar z_3)=c_{21}(\bar z_3-\bar z_2)+c_{22}-Po_2\bar w_2(\bar z_3)$. Оскільки сталі c_{21} і c_{22} виражаються через базові c_{11} і c_{12}, то і стала c_{32} виражається через них. Так продовжуючи можна виписати вирази всіх решта сталих c_{42},…, c_{n2} через базові сталі c_{11} і c_{12}.

Якщо сталі інтегрування $c_{i2}\,(i=\overline{2,n})$ визначити з умов (16) (підкреслений варіант), то змінні Кірхгофа матимуть вигляд (18), де

$$c_{i+1,2}=\theta_i(\bar z_{i+1})+\frac{k_{i+1}-k_i}{k_i}\left(T_i\left(\theta_i(\bar z_{i+1})\right)-T_p\right)^2 \quad (i=\overline{1,n-1}). \qquad (21)$$

Нескладними перетвореннями можна показати, що вирази (20) і (21) є тотожними.

У знайдених виразах змінних Кірхгофа (18) невідомими залишаються дві базові сталі інтегрування, для визначення яких слід використати умови теплообміну на обмежувальних поверхнях. Розглянемо можливі їх варіанти.

1. Нехай обмежувальна поверхня $z=z_1$ підтримується при сталій температурі, тобто $t_1\big|_{z=z_1}=t_{c1}$. У безрозмірних величинах ця умова має вигляд

$$T_1\big|_{\bar z=\bar z_1}=T_{c1}, \qquad (22)$$

а записана через змінну Кірхгофа

$$\theta_1\big|_{\bar z=\bar z_1}=\theta_{c1}, \qquad (23)$$

де

$$T_{c1}=t_{c1}/t_0,\ \theta_{c1}=T_{c1}-T_p+(k_1/2)\left(T_{c1}-T_p\right)^2.$$

Задовольняючи дану умову знаходимо, що $c_{12}=\theta_{c1}$.

На другій обмежувальній поверхні можуть бути задані:

а) стала температура t_{cn}. У безрозмірних величинах дана гранична умова має вигляд

$$T_n\big|_{\bar z=\bar z_{n+1}}=T_{cn}, \qquad (24)$$

а через змінну Кірхгофа для n-го шару вона запишеться

$$\theta_n\big|_{\bar z=\bar z_{n+1}}=\theta_{cn}, \qquad (25)$$

де

$$T_{cn}=t_{cn}/t_0,\ \theta_{cn}=T_{cn}-T_p+(k_n/2)\left(T_{cn}-T_p\right)^2.$$

З умови (25) отримуємо рівняння

$$(\bar z_{n+1}-\bar z_n)c_{n1}(c_{11})+c_{n2}(c_{11},c_{12})\big|_{c_{12}=\theta_{c1}}= =Po_n\bar w_n(\bar z_{n+1})+\theta_{cn} \qquad (26)$$

для визначення сталої c_{11}.

б) сталий тепловий потік q_n, а саме $\lambda_t^{(n)}(t_n)\times \times dt_n/dz\big|_{z=z_{n+1}}=q_n$.

У безрозмірних величинах ця умова набуває вигляду

$$\lambda_*^{(n)}(T_n)\frac{dT_n}{d\bar z}\bigg|_{\bar z=\bar z_{n+1}}=Ki_n, \qquad (27)$$

а через змінну Кірхгофа для n-го шару вона запишеться так:

$$\frac{d\theta_n}{d\bar z}\bigg|_{\bar z=\bar z_{n+1}}=Ki_n, \qquad (28)$$

де $Ki_n=q_n l_0/(t_0\lambda_0^{(n)})$ – критерій Кірпічова.

У цьому випадку з умови (28) знаходимо, що

$$c_{11}=\frac{1}{\lambda_0^{(1)}}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_0^{(j)}Po_j w_j(\bar z_{j+1})+ +\frac{\lambda_0^{(n)}}{\lambda_0^{(1)}}\left[Po_n w_n(\bar z_{n+1})+Ki_n\right],$$

а отже отримуємо точний аналітичний розв'язок задачі.

в) конвективно-променевий теплообмін з середовищем сталої температури t_{cn}, а саме

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n)\frac{dt_n}{dz}+\alpha_n(t_n)(t_n-t_{cn})+ +\sigma\varepsilon(t_n)(t_n{}^4-t_{cn}{}^4)\right]_{z=z_{n+1}}=0,$$

де $\alpha_n(t_n)$, $\varepsilon(t_n)$ – залежні від температури коефіцієнт теплообміну через поверхню $z=z_{n+1}$ та ступінь чорноти даної поверхні, які подібно до

коефіцієнтів теплопровідності подаємо у вигляді $\alpha_n(t_n)=\alpha_n^0\alpha_n^*(T_n)$, $\varepsilon(t_n)=\varepsilon_0\varepsilon^*(T_n)$. У безрозмірних величинах умова конвективно-променевого теплообміну набуває вигляду

$$\left[\lambda_t^{(n)}(T_n)\frac{dT_n}{d\bar{z}}+Bi_n\alpha_n^*(T_n)(T_n-T_{cn})+\right.$$
$$\left.+Sk\varepsilon^*(T_n)(T_n^4-T_{cn}^4)\right]_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}=0, \quad (29)$$

де $Bi_n=\alpha_n^0 l_0/\lambda_0^{(n)}$ – критерій Біо, $Sk_n=\sigma\varepsilon_0 l_0 t_0^3/\lambda_0^{(n)}$ – критерій Старка.

Через змінну Кірхгофа для n-го шару умова (29) запишеться наступним чином:

$$\left[\frac{d\theta_n}{d\bar{z}}+q_{n+1}\left(T_n(\theta_n)\right)\right]_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}=0, \quad (30)$$

де

$$q_{n+1}\left(T_n(\theta_n)\right)=Bi_n\alpha_n^*\left(T_n(\theta_n)\right)(T_n(\theta_n)-T_{cn})+$$
$$+Sk_n\varepsilon^*\left(T_n(\theta_n)\right)(T_n^4(\theta_n)-T_{cn}^4).$$

З умови (30) отримуємо рівняння

$$\lambda_0^{(1)}\frac{c_{11}}{\lambda_0^{(n)}}+\left[q_n\left(T_n\left(\theta_n\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}\right)\right)\right]_{c_{12}=\theta_{c1}}=$$
$$=\frac{1}{\lambda_0^{(n)}}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_0^{(j)}Po_j w_j(\bar{z}_{j+1})+Po_n w_n(\bar{z}_{n+1}) \quad (31)$$

для визначення сталої інтегрування c_{11}. Зауважимо, що поклавши в рівнянні (31) $Sk_n=0$ отримаємо з нього рівняння для визначення сталої c_{11} у випадку суто конвективного, а при $Bi_n=0$ – суто променевого теплообміну на обмежувальній поверхні $z=z_{n+1}$.

2. Нехай на обмежувальній поверхні $z=z_1$ заданий сталий потік q_{10}. Тоді відповідна умова на цій поверхні записана через змінну Кірхгофа має вигляд

$$\left.\frac{d\theta_1}{dz}\right|_{z=z_1}=-Ki_1, \quad (32)$$

де $Ki_1=q_{10}l_0/(t_0\lambda_0^{(1)})$. З умови (32) знаходимо, що $c_{11}=-Ki_1$. Сталу c_{12} визначаємо з умови теплообміну на поверхні $\bar{z}=\bar{z}_{n+1}$. При заданні на цій поверхні умови конвективно-променевого теплообміну (30), із неї для визначення сталої c_{12} отримуємо рівняння

$$\left[q_{n+1}\left(T_n\left(\theta_n\big|_{\bar{z}=\bar{z}_{n+1}}\right)\right)\right]_{c_{11}=-Ki_1}=\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(n)}}Ki_1+$$
$$+\frac{1}{\lambda_0^{(1)}}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_0^{(j)}Po_j w_j(\bar{z}_{j+1})+Po_n w_n(\bar{z}_{n+1}). \quad (33)$$

3. Нехай розглядувана пластина через поверхні $z=z_1$ і $z=z_{n+1}$ конвективно-променевим способом обмінюється теплом з зовнішніми середовищами, температури яких t_{c1} і t_{cn} відповідно. Тоді умова теплообміну на поверхні $z=z_1$, записана через змінну Кірхгофа для першого шару, має вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{d\bar{z}}-q_1\left(T_1(\theta_1)\right)\right]_{\bar{z}=\bar{z}_1}=0, \quad (34)$$

де

$$q_1\left(T_1(\theta_1)\right)=Bi_1\alpha_1^*\left(T_1(\theta_1)\right)(T_1(\theta_1)-T_{c1})+$$
$$+Sk_1\varepsilon^*\left(T_1(\theta_1)\right)(T_1^4(\theta_1)-T_{c1}^4),$$
$$Bi_1=\frac{\alpha_1^0 l_0}{\lambda_0^{(1)}}, \quad Sk_1=\frac{\sigma\varepsilon_0 l_0 t_0^3}{\lambda_0^{(1)}}.$$

Умова теплообміну на поверхні $z=z_{n+1}$ має вигляд (30). З умови (34) отримуємо рівняння

$$c_{11}-q_1\left(T_1\left(\theta_1(\bar{z}_1)\right)\right)=0. \quad (35)$$

Оскільки $\theta_1(\bar{z}_1)=c_{12}$, то вираз $q_1\left(T_1\left(\theta_1(\bar{z}_1)\right)\right)$ в рівнянні (35) не містить сталої c_{11}, а отже,

$$c_{11}=q_1(c_{12}). \quad (36)$$

Враховуючи співвідношення (36), з граничної умови (30) отримуємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування c_{12}:

$$\lambda_0^{(1)}/\lambda_0^{(n)}\,q_1(c_{12})+\left[q_{n+1}\left(T_n\left(\theta_n(\bar{z}_{n+1})\right)\right)\right]_{c_{11}=\lambda_0^{(1)}q_1(c_{12})}=$$
$$=\frac{1}{\lambda_0^{(n)}}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_0^{(j)}Po_j w_j(\bar{z}_{j+1})+Po_n w_n(\bar{z}_{n+1}). \quad (37)$$

Отже, ми розглянули всі можливі варіанти умов теплообміну на обмежуючих поверхнях багатошарової термочутливої пластини. У випадку задання на одній обмежуючій поверхні температури, а на іншій – теплового потоку отримано точний аналітичний розв'язок розглядуваної нелінійної задачі теплопровідності (варіант 1б). У всіх інших випадках граничних умов проблему зведено до визначення одної з базових сталих ін-

тегрування з нелінійного алгебричного рівняння. Для його розв'язання можна скористатися числовими методами, вибравши за початкове наближення невідомої сталої її значення у розв'язку аналогічної задачі для нетермочутливої багатошарової пластини.

За відомими змінними Кірхгофа температуру у шарах пластини обчислюємо за формулами (13).

Визначення термопружного стану

Дві ненульові компоненти тензора напружень $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, які спричинить знайдений одновимірний розподіл температури $T(\bar{z})$ можна обчислити за формулами, наведеними у працях [1, 3, 5]. При цьому розподіл температури та залежності модуля Юнга $E(\bar{z}, T)$, коефіцієнта Пуассона $\nu(\bar{z}, T)$ та температурного коефіцієнта лінійного розширення $\alpha_t(\bar{z}, T)$ слід подати у вигляді

$$\chi(\bar{z}, T) = \chi_1(T_1) + \sum_{i=1}^{n} \left(\chi_i(T_i) - \chi_{i-1}(T_{i-1})\right) S(\bar{z} - \bar{z}_{i+1}),$$

де $S(\cdot)$ - одинична функція Хевісайда.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД на 2012-2013 рр.

Список використаних джерел

1. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Thermoelasticity of Thermosensitive Solids. – L'viv: Spolom, 2009. – 412 p. (in Ukrainian).
2. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (ed.). – 1986. – P. 391-483.
3. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R.* and *Oka N.* Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate with Temperature-Dependent Material Properties // Journal of Thermal Stresses. – 1996. – 19. – No. 1. – P. 77-102.
4. *Kushnir R. M., Protsiuk Yu. B.* Thermoelastic State of Layered Thermosensitive Bodies of Revolution for the Quadratic Dependence of the Heat-Conduction Coefficients // Materials Science. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 1-15.
5. *Protsyuk Yu. B.* Static Thermoelasticity Problems for Layered Thermosensitive Plates with Cubic Dependence of the Coefficients of Heat Conductivity on Temperature // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 181, No. 4. – P. 481-496.
6. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange: Heat Conduction – Basic Research / V. S. Vikhrenko (ed.). – In Tech, 2011. – P. 131-154.

Надійшла до редколегії 30.04.13

УДК 551.466

Котельнікова А. С.[1], пров. інж.,
Нікішов В. І.[1], чл.-кор. НАНУ, д. ф.-м. н., проф.

Вплив підводних перешкод на процес поширення поверхневих поодиноких хвиль

Представлено результати експериментальних досліджень процесу взаємодії поверхневих поодиноких хвиль з підводними перешкодами. Виявлено, що в залежності від амплітуди хвилі, глибини потоку і висоти перешкоди існують два основні сценарії процесу. Запропоновано критерій, який визначає реалізацію першого чи другого сценарію взаємодії. Показано, що геометричні параметри перешкоди суттєво впливають на взаємодію хвилі з перешкодою.

Ключові слова: поодинока хвиля, підводна перешкода, коефіцієнти проходження та відбиття.

[1] Інститут гідромеханіки НАН України,
03680, м. Київ, Желябова, 8/4
e-mail: vinihm@gmail.com

A. S. Kotelnikova[1], Senior engineer,
V. I. Nikishov[1], Corr. Mem. of NASU, Dr. Sci., Prof.

Effect of underwater obstacles on propagation of surface solitary waves

The results of experimental study of interaction process of surface solitary waves with underwater obstacles are presented. Two mail scenarios of the process exist depending on wave amplitude, depth and height of obstacle. The criterion determining the realization the first or the second scenario of the interaction is proposed. It is shown that interaction highly depends on the geometric parameters of obstacles.

Key Words: solitary wave, underwater obstacle, transmission and reflection coefficients.

[1] Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
8/4 Zheliabov str., Kiev, 03680, Ukraine
e-mail: vinihm@gmail.com

Дослідження взаємодії нелінійних хвиль з береговими схилами і підводними перешкодами має велике значення в інженерній практиці, наприклад, при проектуванні конструкцій для дисипації хвильової енергії та захисту берегів від ерозії. Створення штучних берм на морському дні та хвилеломів суттєво впливають на параметри хвильового процесу, зменшуючи їх руйнівну дію в прибережній зоні [1-3]. При поширенні поверхневих гравітаційних хвиль над донною поверхнею зі складним рельєфом або при наявності локальних неоднорідностей типу виступів, впадин, каналів має місце концентрація хвильової енергії і суттєве переформування структури хвильового потоку, змінюється форма хвилі, швидкість поширення, а також амплітуда і довжина хвилі. Крім того, взаємодія нелінійних хвиль з неоднорідностями дна супроводжується генерацією вихрових структур [4, 5]. Тому важливою задачею є вивчення закономірностей трансформації хвиль при їх взаємодії з топографічними особливостями донної поверхні.

В роботі представлено результати експериментальних досліджень процесу взаємодії поодиноких хвиль з підводними перешкодами типу «вертикальна пластина», «прямокутний поріг» і «уступ».

Експерименти проводились у хвильовому лотку довжиною 16 м, шириною 0,3 м та висотою 0,7 м з глибинами води 8 см, 11 см і 17 см. Ширина перешкод відповідала ширині хвильового лотка, висота складала 6 см і 9 см. Перешкоди встановлювались на дні каналу перпендикулярно напрямку руху потоку: вертикальна пластина і поріг довжиною 30 см – на відстані ≈260 см від торцевої стінки, уступ довжиною 272 см – в торці лотка.

Генерація поодиноких хвиль відбувалась шляхом створення локального підйому рівня води, який виникав при падінні важкого тіла на дно лотка. Подальша еволюція збурення призводила до формування поодинокої хвилі. Дисперсійний «хвіст», який виникав при генерації хвилі, відсікався за допомогою спеціального пристрою. Ефективність такого відсікання падає з ростом глибини, проте інтенсивність дисперсійного «хвоста» залишається малою. Докладний опис експериментальної установки представлено в [6].

Реєстрація деформації вільної поверхні при проходженні поодинокої хвилі здійснювалась розподіленими ємнісними датчиками. Величина

© А. С. Котельнікова, В. І. Нікішов, 2013

часового інтервалу між даними, що реєструвались, була 5 мсек для кожного датчика. Тривалість одного експерименту складала ≈30 с. В ході експерименту датчики були розташовані вздовж осі лотка. Для визначення параметрів падаючої і відбитої хвиль чотири датчики були встановлені до перешкоди, два датчики, встановлені за перешкодою у випадку «вертикальна пластина» і «поріг» або над перешкодою у випадку «уступу», реєстрували хвилю, що пройшла. Взаємодія поодинокої хвилі з підводними перешкодами реєструвалась також за допомогою цифрової відеокамери.

Результати експериментальних досліджень

Поодинокі хвилі, що формувалися в експерименті, є типовими нелінійними хвилями. Теоретичний профіль цих хвиль (суцільна лінія на рис. 1) описується рівнянням [7]

$$\eta = a \cdot \mathrm{sech}^2\left[\left(3a/4H^3\right)^{1/2} x\right],$$

де a – амплітуда хвилі, H – незбурена глибина води. Форма поодинокої хвилі, яка була отримана в результаті обробки даних експериментів, представлена на рис. 1.

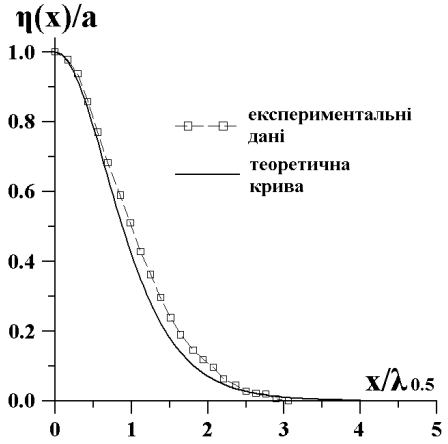


Рис. 1. Форма профілю поодинокої хвилі $\eta(x)/a$ по відношенню до $x/\lambda_{0,5}$; $\lambda_{0,5}$ – відстань від точки, що відповідає гребню хвилі, до точки, яка відповідає половині амплітуди хвилі [8]

Після генерації хвиля з амплітудою a рухається вздовж каналу з горизонтальною донною поверхнею без помітних змін, крім незначного зменшення амплітуди, обумовленого дією дисипативних процесів (тертя рідини о дно і стінки лотка).

Картина поширення хвилі в лотку змінюється, коли на дні каналу встановлено перешкоду. Виявлено, що в залежності від амплітуди хвилі, глибини води і висоти перешкоди реалізуються два основних сценарії процесу взаємодії хвилі з підводною перешкодою: *трансформація і взаємодія*. *Перший сценарій* характеризується трансформацією хвилі та зміною її форми над перешкодою. Відбита хвиля в цьому випадку або не спостерігається, або її інтенсивність мала в порівнянні з падаючою. *Другий* – характеризується сильною взаємодією поодинокої хвилі з перешкодою. Відбувається її розпадання над перешкодою на дві частини. При цьому задня частина захоплюється перешкодою, формуючи відбиту хвилю із супроводжуючим дисперсійним «хвостом», в той час як передня частина продовжує поширюватись вниз по потоку.

Запропоновано критерій, в залежності від величини якого реалізується перший чи другий сценарій взаємодії поодинокої хвилі з перешкодою: $K_{\mathrm{int}} = a/(H-h)$, де h – висота перешкоди. Коли цей критерій більше критичного значення $K_{\mathrm{int}} > K_{\mathrm{int}}^{cr}$ ($K_{\mathrm{int}}^{cr} = 1{,}0$), відбувається сильна взаємодія поодинокої хвилі з перешкодою. У випадку $K_{\mathrm{int}} < K_{\mathrm{int}}^{cr}$ хвиля проходить перешкоду з незначними змінами висоти і форми профілю.

Аналіз даних експерименту показав, що при поширенні поодинокої хвилі над вертикальною пластиною руйнування хвилі, що пройшла, не відбувається. Об'єм рідини, що пройшов над пластиною, формується у вигляді підняття вільної поверхні, яка згідно [7] далі повинна трансформуватися в солітон. Але в будь-якому випадку, при зменшенні глибини води в лотку і незмінній висоті пластини збільшується ступінь впливу перешкоди, що призводить до більш сильної взаємодії поодинокої хвилі з перешкодою. В результаті інтенсивність відбитої хвилі зростає і, відповідно, падає енергія хвилі, що пройшла. Певну роль при цьому грають і витрати енергії на формування вихору. При проходженні поодинокої хвилі над перешкодою типу «вертикальна пластина» відбувається відрив потоку, який зумовлює утворення вихору, що вимагає витрат енергії. Після проходження хвилі вихор руйнується і розсіюється.

Подібна картина спостерігається при взаємодії поодинокої хвилі з «порогом». Але при збільшенні критерію взаємодії після проходження перешкоди проявляються нелінійні ефекти, які спричиняють руйнування хвилі, що пройшла. Довжина перешкоди (L = 30 см) була меншою за довжину падаючої хвилі (λ = 44 см), і руйнування хвилі не спостерігалося. Вдалині від перешкоди форма профілю хвилі, що пройшла, була подібна до профілю падаючої хвилі.

У випадку «поодинока хвиля – уступ» при $K_{\text{int}} < K_{\text{int}}^{cr}$ руйнування хвилі, що пройшла, не відбувається. Але змінюється амплітуда і форма профілю хвилі, що пройшла, тобто відбувається її трансформація. На рис. 2 представлено фотокадр поширення поодинокої хвилі над підводним уступом висотою 6 см при глибині води в лотку 17 см. Критерій взаємодії рівний 0,35.



Рис. 2. Фотокадр поширення поодинокої хвилі над підводним уступом висотою h = 6 см при глибині води H = 17 см ($K_{\text{int}} = 0{,}35$)

Збільшення висоти уступу (h = 9 см) при незмінній глибині води (H = 17 см), тобто збільшення значення критерію взаємодії, призводить до суттєвої зміни характеру взаємодії поодинокої хвилі з перешкодою (рис. 3). Видно, що над ус-

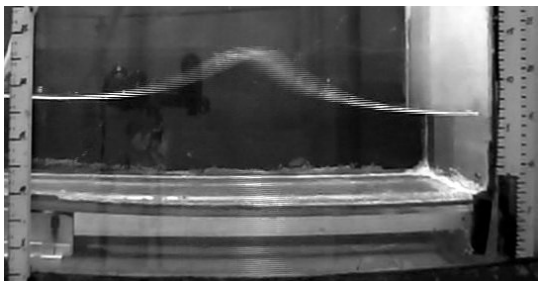


Рис. 3. Фотокадр поширення поодинокої хвилі над підводним уступом висотою h = 9 см при глибині води H = 17 см ($K_{\text{int}} = 0{,}44$)

тупом під впливом зростання нелінійних ефектів відбувається укручення хвилі та загострення форми. Незважаючи на те, що K_{int} в даному випадку залишається меншим K_{int}^{cr} ($K_{\text{int}} = 0{,}44$), профіль хвилі зазнає значних змін. При зменшенні глибини води в лотку, постійній висоті перешкоди (h = = const, $K_{\text{int}} > K_{\text{int}}^{cr}$) і збільшенні довжини перешкоди вплив перешкоди на форму профілю стає більш суттєвим. При переході з великої глибини H на мілку $(H - h)$ швидкість поширення довгої хвилі зменшується, а отже, зменшується її довжина. Енергія хвилі зосереджується на більш короткій ділянці, що призводить до збільшення висоти і крутизни хвилі. При сильному зростанні нелінійних ефектів відбувається руйнування переднього фронту хвилі, і вона може рухатись далі у вигляді турбулентного бору.

Можна зробити висновок, що визначальними параметрами процесу взаємодії поодинокої хвилі з перешкодою є величина коефіцієнту взаємодії K_{int}, а також відношення довжини хвилі до довжини перешкоди. Коли перешкода має велику довжину, процес розщеплення відбувається над перешкодою, і хвиля, що пройшла, руйнується і поширюється далі у вигляді бору.

Характер взаємодії хвиль з перешкодою визначається також коефіцієнтами відбиття по амплітуді та по енергії: $K_a^r = a_r / a_i$, $K_E^r = E_r / E_i$ і відповідними коефіцієнтами проходження $K_a^{tr} = a_{tr} / a_i$, $K_E^{tr} = E_{tr} / E_i$, де a_r, E_r; a_{tr}, E_{tr} і a_i, E_i – амплітуда та енергія відбитої хвилі, хвилі, що пройшла, та падаючої хвилі, відповідно.

На рис. 4 представлено значення коефіцієнтів відбиття по амплітуді для вертикальної пластини у вигляді заштрихованих трикутників (h = 9 см), не заштрихованих трикутників (h = 6 см) в залежності від відносної амплітуди хвилі. Глибина води складала 11 см. Для порівняння на рисунку наведено дані для порогу висотою 9 см у вигляді жирних хрестиків, для порогу висотою 6 см – тонкі хрестики; заштриховані квадрати відповідають уступу висотою 9 см, не заштриховані квадрати – уступу висотою 6 см. Видно, що для висоти перешкоди 6 см при глибині води в лотку 11 см значення коефіцієнтів відбиття для прямокутного порогу довжиною 30 см (тонкі хрестики) та уступу довжиною 272 см (не заштриховані квадрати) мало відрізняються. Коефіцієнти відбиття для вертикальної пластини (не заштриховані трикутники) в даному випадку (H = 11см, h = 6 см) мають менші значення. Збільшення висоти перешкоди (h = 9 см) при глибині води 11 см призводить до збільшення коефіцієнтів відбиття, тобто ступінь взаємодії збільшується. Збільшення висоти перешкоди (h = 9 см) при глибині води 11 см призводить до збільшення коефіцієнтів відбиття, тобто ступінь взаємодії збільшується. В цьому випадку коефіцієнти відбиття для уступу (заштриховані квадрати) мають більші значення, ніж для порогу (жирні хрестики) і вертикальної пластини (заштриховані трикутники). Тобто можна стверджувати, що при сильній взаємодії (другий сценарій, $K_{\text{int}} > 1{,}0$) довжина перешкоди суттєво впливає на значення коефіцієнтів відбиття.

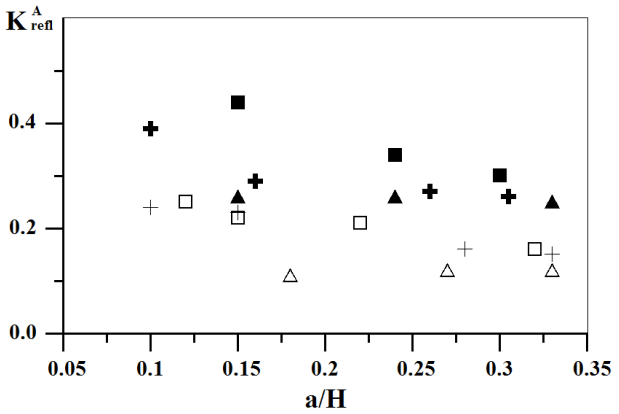


Рис. 4. Коефіцієнти відбиття по амплітуді в залежності від відносної амплітуди хвилі: ▲ – вертикальна пластина висотою h = 9 см; Δ – вертикальна пластина висотою h = 6 см; ✚ – підводний поріг висотою h = 9 см; + – підводний поріг висотою h = 6 см; ■ – висота уступу h =9 см; □ – висота уступу h = 6 см

Оскільки вертикальна пластина тонка в порівнянні з прямокутним порогом і уступом, коефіцієнти відбиття мають менші значення (дані у вигляді трикутників). Відповідно, збільшення довжини перешкоди (поріг і уступ) призводить до збільшення коефіцієнтів відбиття (див. рис. 4). Коли довжина перешкоди значно більша за довжину хвилі (уступ) коефіцієнти відбиття мають більші значення, ніж для перешкод, довжина яких співрозмірна або менша довжини хвилі (поріг, тонка пластина). Відзначимо, що процес розпаду хвиль для вищерозглянутих перешкод є подібним.

Відзначимо, що залежності коефіцієнтів відбиття по амплітуді і по енергії від висоти хвилі мають тільки кількісні відмінності.

Висновки

В роботі наведено результати експериментальних досліджень взаємодії поверхневих поодиноких хвиль з підводними перешкодами. Виявлено, що при поширенні хвилі над перешкодою відбувається деформація її профілю; хвилі змінюють свою форму, швидкість поширення, також змінюється їх амплітуда і довжина. В залежності від амплітуди хвилі, глибини потоку, висоти перешкоди і, відповідно, від введеного критерію взаємодії реалізуються два основних сценарії взаємодії хвиль з перешкодами. Перший сценарій характеризується помірною взаємодією хвилі з перешкодою. Відбита хвиля в цьому випадку або не спостерігається, або її інтенсивність мала в порівнянні з падаючою хвилею. За другим сценарієм, який характеризується сильною взаємодією, відбувається розпадання хвилі над перешкодою на дві частини і формування бору. Показано, що зростання критерію взаємодії призводить до збільшення коефіцієнту відбиття, що, в свою чергу, характеризує енергію потоку, який проходить над перешкодою і діє на берегову смугу. Довжина перешкоди суттєво впливає на характер відбиття хвилі, що взаємодіє з перешкодою, тобто на величину коефіцієнтів відбиття і проходження.

Список використаних джерел

1. *Lin P.* A numerical study of solitary wave interaction with rectangular obstacles // Coastal Engineering. – 2004. – V. 51. – P. 35-51.
2. *Ji L., Xi-Ping Y.* Numerical study of solitary wave fission over an underwater step // Journal of Hydrodynamics. – 2008. – V. 20, N 3. – P. 398-402.
3. *Nakoulima, N. Zahibo, E. Pelinovsky, Talipova T., Kurkin A.* Solitary wave dynamics in shallow water over periodic topography // CHAOS. – 2005. – V. 15, 037107. – P. 1-8.
4. *Chang K.-A., Hsu J., Liu P.L.-F.* Vortex generation and evolution in water waves propagating over a submerged rectangular obstacle. Part 1. Solitary waves // Coastal Engineering. – 2001. – V. 44. – P. 13-36.
5. *Lin C., Ho T.-C., Chang S.-C. et al*. Vortex shedding induced by a solitary wave propagating over a submerged vertical plate // Intern. J. Heat and Fluid Flow. – 2005. – V. 26. – P. 894-904.
6. *Gorodetskiy O. V., Kotelnikova A. S., Nikishov V. I. et al.* Generation, propagation, and run-up of solitary waves on slopes // Applied Hydromechanics. – 2010. – V. 12. – P. 40-47. (in Russian).
7. *Hammack J. L., Segur H.* The Korteweg-de Vries equation and water waves. Part 2. Comparison with experiments // J. Fluid Mech. – 1974. – V. 65. – P. 289-314.
8. *Koop C.G., Butler G.* An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. – 1981. – V. 112. – P. 225-251.

Надійшла до редколегії 12.05.13

УДК 539.3

Галазюк В. А.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Кіт Г. С.[2], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України

Температурне поле у просторі за теплового потоку у круглому отворі теплонепроникного екрану

Розв'язана стаціонарна задача теплопровідності про потік тепла крізь круглий отвір у теплонепроникному екрані за неперервного розподілу радіальної складової вектора теплового потоку на краю отвору.

Ключові слова: стаціонарна теплопровідність, тепловий потік, інтегральні рівняння першого роду.

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1
[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3 б

V. A. Halazyuk [1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
H. S. Kit [2], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU

Temperature field in a space by heat flow in a circular aperture of heat-proof screen

Stationary problem of heat conduction of heat flow through circular aperture in a heat-proof screen by continuous distribution of radial vector component of heat flow on the aperture border is solved.

Key Words: stationary heat conduction, heat flow, integral equation of the first kind.

[1] Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universitetska str., 1
[2] Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 79060, Lviv, Naukova str., 3 б

У праці [1] побудований фундаментальний розв'язок рівняння стаціонарної теплопровідності з плоскою пеленою теплових диполів і показано, що тоді температурне поле і складова вектора теплового потоку у площині розміщення диполів мають стрибок при переході цієї площини по нормалі. Тому за означенням [2] ця площина є матеріальною поверхнею розриву параметрів поля нульового порядку – внутрішнім тепловим вихором (internal thermal vortex).

Нижче ця модель застосована до визначення температурного поля у просторі за теплового потоку в круглому отворі теплонепроникного екрану. Така задача теплопровідності має повну аналогію із задачею гідромеханіки про течію ідеальної нестисливої рідини через круглий отвір в нерухомому екрані, де роль температури відіграє потенціал швидкостей.

1. Простір віднесемо до циліндричної системи координат $R\alpha, \beta, R\gamma$, де R – радіус отвору, і будемо вважати, що у площині $\gamma = 0$ розподілені теплові диполі за законом

$$D(\alpha, p) = 2T_0 \int_0^\infty \eta H(\eta, p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta \qquad (1)$$

з твірною функцією $H(\eta, p)$, яка залежить від параметра $p > 0$. Тоді осесиметричне температурне поле $T(\alpha, \gamma)$ у просторі визначається рівнянням стаціонарної теплопровідності з пеленою теплових диполів

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\gamma^2 T = $$

$$= T_0\delta'(\gamma)\int_0^\infty \eta H(\eta, p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta$$

і є таким:

$$T(\alpha, \gamma) = T_0 \operatorname{sign}\gamma \int_0^\infty \eta H(\eta, p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta\,. \quad (2)$$

Якщо ввести безрозмірний вектор теплового потоку $\vec{q}^{\,*} = R\vec{q}/(\lambda T_0)$, то його компоненти у напрямку осей α і γ

$$q_\alpha^*(\alpha, \gamma) = \operatorname{sign}\gamma \int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\, d\eta\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta \qquad (3)$$

забезпечують виконання рівняння балансу теплового потоку $\operatorname{div}\vec{q}^{\,*} = 0$ і створюють зосереджену

© В. А. Галазюк, Г. С. Кіт, 2013

у площині $\gamma = 0$ теплову вихорову пелену, оскільки

$$\left(\operatorname{rot}\vec{q}^{\,*}\right)_\beta = \partial_\alpha q_\gamma^* - \partial_\gamma q_\alpha^* = 2\delta(\gamma)\int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) J_1(\eta\alpha)\, d\eta$$

завжди не рівний нулеві. Отже, за існування у площині $\gamma = 0$ вихорової складової вектора теплового потоку $\vec{q}^{\,*}$ закон теплопровідності Фур'є $\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ не має місця, тому що його нормальна складова $q_\gamma^*(\alpha, \gamma)$ (3) ним не визначається.

2. Якщо у площині $\gamma = 0$ в області $1 \le \alpha < \infty$ існує теплонепроникний екран, то слід знайти розподіл теплових диполів (1), які забезпечують в крузі $0 \le \alpha \le 1$ довільний тепловий потік $q_\gamma^*(\alpha, \pm 0)$, а зовні цієї області $q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = 0$. Тобто маємо такі крайові умови:

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = (1-\alpha^2)^p f(\alpha^2),\ 0 \le \alpha \le 1,$$
$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = 0,\ 1 \le \alpha < \infty, \qquad (4)$$

причому при $p > 0$ умови (4) є узгодженими на краю отвору $\alpha = 1$.

Оскільки розподіл диполів (1) визначається твірною функцією $H(\eta, p)$, то відповідно до подання (3) і крайових умов (4) одержимо для її визначення інтегральні рівняння

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta = (1-\alpha^2)^p f(\alpha^2), \quad 0 \le \alpha \le 1, \qquad (5)$$

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta = 0, \quad 1 \le \alpha < \infty. \qquad (6)$$

Твірну функцію $H(\eta, p)$ подамо узагальненим рядом Неймана [3]

$$\eta^2 H(\eta, p) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n+p+1}(\eta)}{\eta^p} \qquad (7)$$

і підставимо його в інтегральні рівняння (5) і (6) та обчислимо розривні інтеграли Вебера – Шафгейтліна [4]. В результаті переконаємось, що за вибору твірної функції $H(\eta, p)$ у вигляді ряду (7) інтегральне рівняння (6) виконується за довільних коефіцієнтів a_n, а рівняння (5) набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1) F(n+1, -n-p; 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(n+p+1)} = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1)(1-\alpha^2)^p F(-n, n+p+1; 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(n+p+1)} =$$
$$= (1-\alpha^2)^p f(\alpha^2), \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

звідки знайдемо, що

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1) F(-n, n+p+1; 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(n+p+1)} = f(\alpha^2), \quad 0 \le \alpha \le 1, \qquad (8)$$

де $\Gamma(x)$ – гама-функція, а гіпергеометрична функція

$$F(-n, n+p+1; 1; \alpha^2) = (n+1)^{-1} P_n^{(1,-p)}(1-2\alpha^2)$$

є поліномами Якобі [4], які утворюють повну і ортогональну систему функцій на проміжку $[0, 1]$. Тому коефіцієнти ряду (8) знаходимо за формулою ортогональності.

За відомими коефіцієнтами a_n, твірною функцією $H(\eta, p)$ (7) і поданням (1) знаходимо розподіл диполів $D(\alpha, p)$, які забезпечують виконання крайових умов (4). Отже, маємо розривний інтеграл Вебера – Шафгейтліна

$$D(\alpha, p) = 2T_0 \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty J_0(\eta\alpha) J_{2n+p+1}(\eta) \eta^{-p-1} d\eta,$$

а тому в області $0 \le \alpha \le 1$

$$D(\alpha, p) = 2T_0 \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+0{,}5)}{2^{p+1}\Gamma(n+p+1{,}5)} \times F(n+0{,}5, -n-p-0{,}5; 1; \alpha^2), \qquad (9)$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$D(\alpha, p) = 2T_0 \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+0{,}5)}{2^{p+1}\Gamma(2n+p+2)} \times \frac{F(n+0{,}5, n+0{,}5; 2n+p+2; \alpha^{-2})}{\Gamma(-n+0{,}5)\alpha^{2n+2}}. \qquad (10)$$

Зазначимо, що згідно з поданнями (1) і (2) існує зв'язок між стрибком температури у площині $\gamma = 0$ і розподілом у цій площині диполів:

$$D(\alpha, p) = 2\left|T(\alpha, \pm 0)\right|. \qquad (11)$$

Отже, за фізично обгрунтованого неперервного розподілу стрибка температури у площині $\gamma = 0$ диполі відповідно до рівності (11) завжди існують.

Знайдемо тепер розподіл радіальної складової теплового потоку $q_\alpha^*(\alpha, \pm 0)$ у площині $\gamma = 0$. За першим поданням (3) одержимо, що

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty J_1(\eta\alpha) J_{2n+p+1}(\eta) \eta^{-p} d\eta,$$

звідки маємо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1,5)\alpha}{2^p \Gamma(n+p+0,5)} \times$$

$$\times F(n+1,5, -n-p+0,5; 2; \alpha^2), \quad (12)$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1,5)}{2^p \Gamma(2n+p+2)} \times$$

$$\times \frac{F(n+1,5, n+0,5; 2n+p+2; \alpha^{-2})}{\Gamma(-n+0,5)\alpha^{2n+2}}. \quad (13)$$

Оскільки теплові потоки на краю отвору $\alpha = 1$ повинні виконувати фізично обґрунтовану граничну рівність

$$\lim_{\alpha \to 1-0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha \to 1+0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0), \quad (14)$$

то вона буде мати місце тільки за умови $p > 0$ тому, що гіпергеометрична функція Гаусса $F(a, b; c; x^2)$ визначена в точці $x = 1$ за умови $c - a - b > 0$.

Таким чином, за виконання нерівності (14) стрибок теплового потоку $q_\alpha(\alpha, \pm 0)$ існує в області отвору $0 \le \alpha \le 1$ і створює там теплову вихорову пелену, а разом з тим і стрибок температури.

3. Якщо припустити, що теплова вихорова пелена в отворі відсутня, то у поданні (12) слід покласти $p = -0,5$. Тоді за поданням (13) в області $1 \le \alpha < \infty$ одержимо, що

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1,5)}{\Gamma(2n+1,5)} \times$$

$$\times \frac{F(n+1,5, n+0,5; 2n+1,5; \alpha^{-2})}{\Gamma(-n+0,5)\alpha^{2n+2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2-1}} \times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1,5)F(n, n+1; 2n+1,5; \alpha^{-2})}{\Gamma(2n+1,5)\Gamma(-n+0,5)\alpha^{2n+1}}. \quad (15)$$

Розподіл (15) теплового потоку $q_\alpha^*(\alpha, \pm 0)$ в області $1 < \alpha < \infty$ є сингулярним з кореневою особливістю при $\alpha \to 1+0$, що суперечить фізиці явища та умові (14). Разом з тим відповідно до подання (9) в отворі $0 \le \alpha \le 1$ існують диполі, які розподілені за законом

$$D(\alpha; -0,5) =$$

$$= 2T_0\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+0,5)F(n+0,5, -n; 1; \alpha^2)}{\sqrt{2}\,\Gamma(n+1)}$$

і за формулою (11) створюють там стрибок температури $T(\alpha, \pm 0)$. Тому за означенням [2] в отворі існує матеріальна поверхня розриву параметрів поля нульового порядку – внутрішній тепловий шар.

Список використаних джерел

1. *Halazyuk V., Kit H.* The axisymmetric stress-strain state of a body with a plane sheet of thermal sources or dipoles // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2011. – N 10. – P. 54-60. (in Ukrainian).
2. *Truesdell C.* A. First Course in Rational Continuum Mechanics. – Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1972.
3. *Halazyuk V.* Bounded solution of boundary problem of stress-strain state of an elastic body with absolutely rigid discoidal inclusion with zero thickness // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 1987. – N 12. – P. 23-27. (in Ukrainian).
4. *Abramowits M. and Stegun I.* (editors). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / National Bureau of Standards. Appl. Math. – Ser. 55. – 1964.

Надійшла до редколегії 25.03.13

УДК 539.3

Гудрамович В. С.[1], член-корр. НАН Украины, д. т. н., проф.,
Гарт Э. Л.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Рябоконь С. А.[1], к. т. н.

Применение проекционно-итерационных схем МКЭ к решению задач упругопластического деформирования оболочек с отверстиями

Разработаны проекционно-итерационные схемы вариационно-сеточного метода конечных элементов для численного анализа упругопластического деформирования цилиндрических оболочек с отверстиями. Созданы методики и алгоритмы решения соответствующих задач. Исследовано взаимовлияние отверстий при построении зон пластических деформаций.

Ключевые слова: упругопластические оболочки, отверстия, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы.

[1] Институт технической механики НАН Украины и Государственного космического агентства, 49005, г. Днепропетровск, ул. Лешко-Попеля, 15
e-mail: hudramovich@i.ua
[2] Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, 49010, г. Днепропетровск, просп. Гагарина, 72, e-mail: hart@ua.fm

V. S. Hudramovich[1], Corresponding Member of NAS Ukraine, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
E. L. Hart[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
S. A. Rjabokon'[1], PhD (Tech.)

Application of projective-iterative schemes of FEM to the solution of elastoplastic deformation problems for shells with openings

The projective-iterative schemes of finite element method for numerical analysis of elastoplastic deformation of cylindrical shells with openings are developed. The methods and algorithms for solution of corresponding problems are given. The mutual influence of openings with construction of plastic deformations zones is investigated.

Key Words: elastoplastic shells, openings, finite element method, projective-iterative schemes.

[1] Institute of technical mechanic of Nat. Acad. Sci. Ukraine and State Space Agency Ukraine, 49005, Dnepropetrovsk, Leshko-Popel St., 15
e-mail: hudramovich@i.ua
[2] Oles' Honchar National University of Dnepropetrovsk, 49010, Dnepropetrovsk, Gagarin avenue, 72
e-mail: hart@ua.fm

Постановка задач. Методы решения

Задачи деформирования элементов оболочечных конструкций с отверстиями различной формы имеют большое практическое значение [1, 2]. Оболочки оптимально сочетают вес и необходимую прочность, отверстия-люки являются основным проявлением неоднородности конструкций в различных отраслях техники.

Сложность применения аналитических методов расчёта делает целесообразным использование численных методов, в частности, одного из самых распространенных – вариационно-сеточного метода конечных элементов (МКЭ).

Проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ приводят к значительной экономии компьютерного времени расчёта. Это обуславливает актуальность разработки вычислительных алгоритмов на их основе. Основные положения таких схем базируются на известных теоретических разработках в области математики [3-5].

Высокие уровни действующих нагрузок приводят к появлению пластических деформаций. При их учёте используются методы упругих решений. Они основаны на построении процессов последовательных приближений, в каждом из которых решается задача теории упругости с некоторыми дополнительными факторами, учитывающими особенности пластического деформирования: дополнительные нагрузки или деформации, переменные параметры упругости (ППУ) [6-8]. Используем метод ППУ [7, 8]. В соответствии с ним уравнения, связывающие деформации и напряжения, аналогичны уравнениям теории упругости, однако в них модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν переменны и зависят от уровня накопленных пластических деформаций. Схема метода ППУ показана на рис. 1 (в каждом

© В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт
С. А. Рябоконь, 2013

приближении решается задача теории упругости с новыми E и ν, определяемыми по известным формулам).

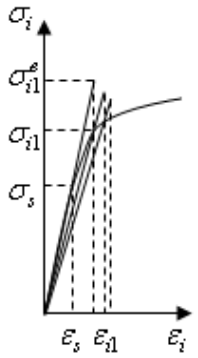


Рис. 1. Схема метода переменных параметров упругости

При использовании метода ППУ на каждом этапе последовательных приближений решается задача теории упругости с помощью проекционно-итерационных схем МКЭ. Напомним основную идею таких схем [3, 9-11]. Исходная задача минимизации функционала аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью дискретных экстремальных задач для функций многих переменных. Каждая из них с помощью итерационного метода последовательной верхней релаксации [4] решается следующим образом. Для функции многих переменных, соответствующей некоторому грубому разбиению области на конечные элементы, строится только несколько приближений, последнее интерполируется на более мелкую конечно-элементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума функции многих переменных. Такой процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Проекционно-итерационные схемы МКЭ использованы при численном анализе деформирования упругих и упругопластических пластин [10], упругих [12] и упругопластических [13] оболочек, пластического деформирования упругопластических структурированных сред (с порами и включениями разной формы) [14]. Они дают значительную (в десятки раз) экономию компьютерного времени расчёта по сравнению с соответствующем временем для традиционного МКЭ (на одной сетке).

Рассмотрим упругопластическое деформирование оболочки с отверстиями. Для определенности возьмём цилиндрическую оболочку с прямоугольными или круговыми отверстиями при осевом сжатии. Расчётные нагрузки меньше критических, определённых при пластических деформациях [8].

Результаты численного анализа

Следуя МКЭ, оболочку разбиваем на конечные элементы (прямоугольные (ПЭ) или треугольные (ТЭ)) [15]. Для прямоугольных отверстий целесообразно использование ПЭ, для круглых – ТЭ. Проведённый в [16] для плоских задач теории упругости анализ показал, что ТЭ дают более точные результаты, однако время расчёта – больше, чем для ПЭ. Используются методики, при которых не требуется хранения матрицы жёсткости системы в явном виде, а значения перемещений оболочки в текущем узле выражаются через их узловые значения в прилегающих к данному узлу конечных элементах [16, 17].

Для определённости рассмотрим оболочку с тремя прямоугольными отверстиями (развёртка оболочки показана на рис. 2). Длина, радиус и толщина оболочки: $L = 1{,}6$ м, $R = 1$ м, $h = 0{,}004$ м, материал – алюминиевый сплав Д16Т (такие параметры и материал соответствуют, в частности, конструкциям ракетно-космической техники [2]). Размер большего отверстия $0{,}4 \times 0{,}4$ м, меньших – $0{,}2 \times 0{,}2$ м.

При разработке методики взяты эрмитовы ПЭ. Проекционно-итерационная схема МКЭ реализована на шести вложенных вдвое конечно-элементных сетках. Количество k_n строящихся приближений на n-ом шаге ($n = 1 \ldots 6$) выбиралось как наименьшее целое k, удовлетворяющее условию

$$\left\| z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)} \right\| \le \varepsilon_n, \quad k = 0, \ldots, k_n$$

($z_h^{(k_n)}$ – приближённое решение конечномерной задачи; ε_n – заданная точность вычислений на n-ой сетке).

При решении вариационных задач теории оболочек используются известные функционалы энергии [18]. Численный анализ показывает, что для рассмотренных размеров оболочек и отверстий вполне допустимо использование функционала для пологих оболочек.

Такой функционал имеет вид [19]

$$U = h\int_\Omega \left\{ \frac{\tilde{G}}{1-\tilde{\nu}} \left[u_{,\alpha}^2 + 2\tilde{\nu} u_{,\alpha} \left(v_{,\beta} + w/R \right) + \left(v_{,\beta} + w/R \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \tilde{G} \left(u_{,\beta} + v_{,\alpha} \right)^2 / 2 \right\} d\alpha d\beta + \frac{h^3}{12} \int_\Omega \left[\frac{\tilde{G}}{1-\tilde{\nu}} \left(w_{,\alpha\alpha}^2 + \right. \right.$$

$$+2\tilde{\nu}w_{,\alpha\alpha}w_{,\beta\beta}+w_{,\beta\beta}^2\big)+2\tilde{G}w_{,\alpha\beta}^2\Big]d\alpha d\beta-$$

$$-\int_{\Gamma}\left(T_1u+S_1v+Q_1w+M_1\varphi_1\right)d\beta\,, \qquad (1)$$

где модуль сдвига $\tilde{G}$ и коэффициент Пуассона $\tilde{\nu}$ разные для каждого шага последовательных приближений метода ППУ; T_1, S_1, Q_1, M_1 – соответственно продольные, касательные, поперечные усилия и изгибающий момент, приложенные на краях оболочки Γ.

Деформации и напряжения для каждого из приближений определяются соотношениями:

$$\varepsilon_\alpha=u_{,\alpha};\quad \varepsilon_\beta=v_{,\beta}+w/R;\quad \omega=u_{,\beta}+v_{,\alpha};$$
$$\chi_\alpha=-w_{,\alpha\alpha};\quad \chi_\beta=-w_{,\beta\beta};\quad \chi_{\alpha\beta}=-w_{,\alpha\beta}; \qquad (2)$$
$$\sigma_\alpha=2\tilde{G}\left(\varepsilon_\alpha+\tilde{\nu}\varepsilon_\beta\right)\big/(1-\tilde{\nu});$$
$$\sigma_\beta=2\tilde{G}\left(\varepsilon_\beta+\tilde{\nu}\varepsilon_\alpha\right)\big/(1-\tilde{\nu});\quad \tau=\tilde{G}\omega.$$

В (1), (2) запятая означает дифференцирование по координате, величины $\tilde{G}$ и $\tilde{E}$ связаны зависимостью $\tilde{E}=2(1+\tilde{\nu})\tilde{G}$.

Варьирование расстояния между отверстиями и их размеров приводит к разным ситуациям трансформации зон пластических деформаций (в дальнейшем – просто зон), которые вначале возникают возле краёв отверстий и увеличиваясь сливаются. Слияние зон приводит к значительному снижению жёсткости оболочки и уменьшению её несущей способности.

Возможны различные другие сценарии образования, трансформации и слияния зон для разных оболочек и отверстий.

При расчётах использована деформационная теория пластичности в сочетании с проекционно-итерационными схемами МКЭ. Вблизи углов отверстий, там, где происходит сложное нагружение, её применимость должна быть исследована [6]. Возможно использование теории пластического течения [7, 8].

На рис. 2 показано распределение зон в цилиндрической оболочке при разных значениях сжимающей нагрузки q. Рис. 2, *а* даёт распределение зон для относительного расстояния между отверстиями $l/R=0{,}6$. Рис. 2, *б*, *в* – для $l/R=0{,}8$. Зоны образуются вначале у краёв вырезов, при повышении нагрузки они трансформируются и сливаются, становятся общими для отверстий. Это приводит к падению жёсткости оболочек (для упругих оболочек она определяется через E, для упругопластических через касательный и секущий модули, которые меньше E) и может использоваться при прогнозе несущей способности оболочек.

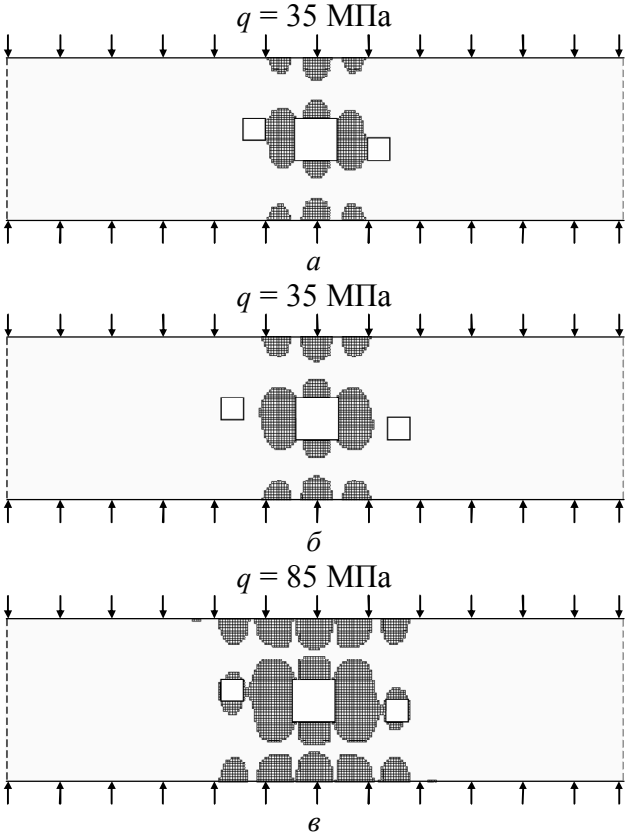


Рис. 2. Распределение зон пластических деформаций для оболочки

В результате расчётов зафиксированы те уровни нагрузок, при которых зоны пластических деформаций сливаются.

Разработанные методики и программа на языке С++ позволяют рассмотреть различные другие варианты конструктивного оформления упругопластических оболочек с отверстиями прямоугольной, круговой и эллиптической формы.

Заключение

Разработаны проекционно-итерационные схемы вариационно-сеточного МКЭ для исследования упругопластического деформирования оболочек с вырезами различной формы. Такие схемы дают существенный выигрыш компьютерного времени расчёта по сравнению с основанным на традиционном МКЭ. Разработанные методики и вычислительные алгоритмы дают возможность изучить процесс образования зон пластических деформаций и прогнозировать несущую способность неоднородных оболочечных конструкций.

Список использованных источников

1. *Guz' A. N., Chernyshenko I. S., Chekhov V. N., et al.* Shell design methods, in 5 volumes. Vol. 1. Theory of shell weakened by openings. – Kiev: Naukova Dumka. – 1980. – 636 p. (in Russian).
2. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 45. – N 12. – P. 1323-1355.
3. *Krasnosel'sky M.A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., et al.* Approximate solution of operator equations. – Moscow: Nauka, 1969. – 455 p. (in Russian).
4. *Samarsky A. A. and Nikolaev E. S.* Methods for solving finite-difference equations. – Moscow: Nauka, 1978. – 592 p. (in Russian).
5. *Vasil'ev F. P.* Optimization method, in 2 books. – Moscow: MTs NMO, 2011. – B. 1. – 620 p.; b. 2. – 433 p. (in Russian).
6. *Il'yushin A. A.* Collected works, in 4 volumes. Vol. 2. Plasticity: 1946 – 1966. – Moscow: Fizmatlit, 2004. – 480 p. (in Russian).
7. *Birger I. A.* General algorithms for solving elastic, plastic and creep problems / Advances in Solids Mechanics. – Moscow: Nauka, 1975. – P. 51-73 (in Russian).
8. *Hudramovich V. S.* Stability of elastoplastic shells. – Kiev: Naukova Dumka. – 1987. – 216 p. (in Russian).
9. *Hart E. L.* Projective-iterative modifications of FEM in boundary problems of elasticity theory // Dop. Nat. Acad. Nauk Ukrainy. – 2008. – N 6. – P. 56-61. (in Russian).
10. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Rjabokon' S. A.* Elastoplastic deformation of nonhomo-geneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – Vol. 78. – Issue 1. – P. 181-197.
11. *Hart E. L.* Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // J. Math. Sci. – 2010. – Vol. 167, No 1. – P. 76-88.
12. *Hart E. L., Klimenko D. V., Rjabokon' S. A.* Investigation of stress-and-strained state of cylindrical shells with rectangular opening on base of projective-iterative schemes of FEM // Methods of solving applied problems in solid mechanics. – 2011. – Issue 12. – P. 47-54. (in Rusian).
13. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Rjabokon' S. A.* Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // Problemy prochnosti. – 2013. – N 1. – P. 5-16. (in Rusian).
14. *Hart E. L. and Hudramovich V. S.* Computing analysis of elastoplastic deformation structural media // Dop. Nat. Akad. Nauk Ukrainy. – 2012. – N 5. – P. 49-56. (in Russian).
15. *Zienkiewicz O. C. and Morgan K.* Finite elements and approximation. – NY, …, Toronto: A Willey-Interscience Publ., 1983. / Translated into Russian. – Moscow: Mir, 1986. – 318 p.
16. *Hart E. L. and Hudramovich V. S.* Influence of finite-elements form on computational efficiency of projective-iterative methods for solution of the plane problem in elasticity theory // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2008. – N 4. – P. 53-58. (in Ukrainian).
17. *Kuzmenko V. I.* Three-dimensional contact problems for multilayer elastoplastic packet // Izv. AN USSR. Mechanics of solid. – 1984. – N 4. – P. 105-112. (in Russian).
18. *Novozhilov V. V., Chernych K. F., Michailovsky E. I.* Linear theory of thin shells. – Leningrad: Politechnika, 1991. – 656 p. (in Russian).
19. *Golovanov A. I. and Kornishin M. S.* Introduction to finite element method for statics of thin shells. – Kazan': Fiziko-tech. Institute of Kazan' filial agency AN USSR, 1989. – 270 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13

УДК 539.3

Острик В. І.[1], д. ф.-м. н., доц.,
Улітко А. Ф.[1], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України,
Щокотова О. М.[2], к. ф.-м. н.

Контакт з відривом штампа і пружного клина

Розглянуто плоску задачу теорії пружності про гладкий контакт пружного клина та жорсткого штампа з прямолінійною основою. Одну з граней клина жорстко закріплено, а на частині іншої грані, прилеглої до вершини клина, вдавлюється штамп. З'ясовано, що при перевищенні кутом розхилу клина певного критичного значення поблизу вершини клина відбувається відрив межі клина від основи штампа. Контактну задачу з відривом із застосуванням методу Вінера – Гопфа зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Визначено контактні напруження та відносний розмір зони відриву для різних кутів розхилу клина.

Ключові слова: пружний клин, штамп, контакт з відривом, метод Вінера – Гопфа, контактні напруження.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: ostrik_v@rambler.ru
[2] Інститут прикладної фізики НАН України,
40000, м. Суми, вул. Петропавлівська, 58
e-mail: olgaschokotova@gmail.com

V. I. Ostryk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
A. F. Ulitko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU,
O. M. Shchokotova[2], PhD (Phys.-Math.)

The tearing off contact of a punch and an elastic wedge

The plane problem of elasticity theory for smooth contact of an elastic wedge and a hard punch with rectilinear base was considered. One of the wedge faces is fixed, and at the part of the other face adjacent to the wedge vertex punch is pressed. It was found that when the wedge angle exceeds a critical value near the wedge vertex occurs tearing off the wedge face from the punch base. Using the Wiener – Hopf method, contact problem with tearing off was reduced to an infinite system of algebraic equations. The contact stresses and the relative size of the zone of tearing off for different wedge angles were determined.

Key Words: elastic wedge, punch, tearing off contact, Wiener – Hopf method, contact stresses.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: ostrik_v@rambler.ru
[2] Institute of Applied Physics, NAS of Ukraine,
40000, Sumy, Petropavlivska str., 58
e-mail: olgaschokotova@gmail.com

Вступ

Розв'язок задачі про гладкий контакт штампа з прямолінійною основою та пружного клина з однією закріпленою гранню у випадку, коли штамп дотикається вершини клина, знайдено методом ортогональних многочленів у роботі [1] та методом Вінера – Гопфа в роботі [2]. У [2] виявлено існування критичного значення кута розхилу клина $\alpha_* = \arccos(1/\sqrt{m})$ (m – число Пуассона; якщо $m = 10/3$, то $\alpha_* = 56{,}8^{\circ}$), при перевищенні якого контактні напруження стають додатними у малому околі вершини клина. Побудований в [1, 2] розв'язок задачі у такому випадку втрачає фізичний зміст та вказує на порушення контакту на краї штампа, прилеглому до вершини клина.

Нижче для кутів розхилу клина α більших за критичний ($\alpha_* < \alpha < \pi/2$) задача формулюється в уточненій постановці з урахуванням часткового відриву поверхні клина від основи штампа. Розв'язок задачі отримано узагальненим методом Вінера – Гопфа із застосуванням підходу, розвинутому в роботах [3-5].

У випадку закритичних кутів розхилу клина побудований у [2] за умови безвідривного контакту розв'язок дозволяє наближено оцінити розмір зони відриву. Так для клина з кутом $\alpha = 5\pi/12$ та числом Пуассона $m = 10/3$ довжина зони додатних контактних напружень складає 0,018 розміру області контакту. Отже, у розглядуваній задачі слід очікувати, що розмір зони відриву є малою величиною, порядку 0,01.

© В. І. Острик, А. Ф. Улітко, О. М. Щокотова, 2013

Постановка задачі

В умовах плоскої деформації розглянемо пружний клин $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \alpha$ $(\alpha_* < \alpha < \pi/2)$, грань $\vartheta = 0$ якого жорстко закріплена, а у грань $\vartheta = \alpha$ на відрізку $0 \le r \le l$ вдавлюється штамп з прямолінійною основою (рис. 1). До правого краю штампа ($r = l$) прикладено нормальну силу *P*, а лівий його край ($r = 0$) закріплений у вершині клина. В результаті деформації пружного клина основа штампа повертається на деякий кут ε. Величина моменту *M*, прикладеного при цьому до штампа, невідома і залежить від розподілу контактних напружень. Припускаємо, що на інтервалі $0 < r < l_1$ ($\vartheta = \alpha$) відбувається відрив межі клина від основи штампа. Розмір l_1 заздалегідь невідомий і потребує визначення. Сили тертя в області контакту $l_1 \le r \le l$ не враховуються.

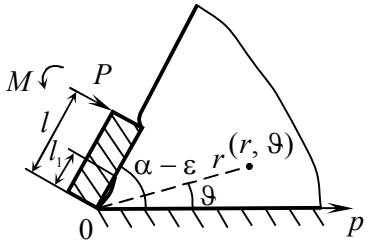


Рис. 1. Взаємодія штампа з пружним клином

Змішані крайові умови на гранях клина мають вигляд

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} = -\varepsilon r \quad (l_1 \le r \le l),$$
$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} = 0 \quad (0 \le r < l_1,\ l < r < \infty), \tag{1}$$
$$\tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad u_r\big|_{\vartheta=0} = 0, \quad u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = 0 \quad (0 \le r < \infty).$$

Крім того, потрібно виконати умови рівноваги штампа

$$\int_{l_1}^{l} \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}\, dr = -P, \quad \int_{l_1}^{l} r\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}\, dr = M - Pl. \tag{2}$$

Інтегральне рівняння задачі та його розв'язання

Введемо невідому функцію контактних напружень

$$g(r) = \frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} \quad (l_1 < r < l), \tag{3}$$

де *G* – модуль зсуву. Вважаємо, що згідно з другою умовою (1) $g(r) = 0$, якщо $0 \le r < l_1$ і $r > l$.

Розв'язок основної змішаної задачі для клина, коли на грані $\vartheta = \alpha$ задані нормальні напруження і відсутні дотичні напруження, а на грані $\vartheta = 0$ – нульові переміщення, отримаємо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. На грані $\vartheta = \alpha$ клина маємо:

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} = \frac{m-1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{s\Delta(s)} a(s) r^{-s} ds,\ a(s) = \int_{l_1}^{l} g(y) y^s dy,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds \quad (-1 < c < 0),$$

$$\lambda(s) = (3m-4)\sin 2\alpha s - ms\sin 2\alpha,$$
$$\Delta(s) = (3m-4)m(\cos 2\alpha s - 1) -$$
$$-2m^2 s^2 \sin^2\alpha + 8(m-1)^2. \tag{4}$$

Розв'язок (4) задовольняє всі крайові умови (1), окрім першої. Підставимо в цю умову вираз для колових переміщень із (4). Після заміни змінних

$$r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta} \tag{5}$$

та введення нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = g(le^{-\eta})e^{-\eta} \tag{6}$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^a k(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \le \xi \le a), \tag{7}$$

$$a = \ln\frac{l}{l_1}, \quad k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau,$$

$$K(\tau) = \frac{\lambda(-i\tau)}{-i\tau\Delta(-i\tau)}, \quad f(\xi) = -\frac{\varepsilon}{2(m-1)} e^{-\xi}.$$

На відміну від класичного інтегрального рівняння Вінера – Гопфа з різницевим ядром $k(\xi-\eta)$ на півнескінченному проміжку [6], рівняння (7) задано на скінченному проміжку $0 \le \xi \le a$. Для його розв'язання застосуємо узагальнений метод Вінера – Гопфа [3-5].

Поклавши $\varphi(\eta) = 0$ при $\eta < 0$ і $\eta > a$, розповсюдимо інтегральне рівняння (7) на всю числову вісь і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Увівши невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{0} \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi^+(z)=-\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty e^{iz\xi}d\xi\int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta\,,$$

$$\Psi^-(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{iz\xi}d\xi\int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta\,, \qquad (8)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\mathrm{Im}\,z>c^+$ і $\mathrm{Im}\,z<c^-$ ($c^+<0$, $c^->0$), приходимо до системи функціональних рівнянь

$$K(z)\Phi^+(z)+e^{iza}\Psi^+(z)-\Psi^-(z)=F^+(z)\,,$$

$$\Phi^+(z)=e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+<\mathrm{Im}\,z<c^-) \qquad (9)$$

з правою частиною

$$F^+(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a f(\xi)e^{iz\xi}d\xi=A\varepsilon\frac{e^{a(iz-1)}-1}{1-iz}\,,$$

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}(m-1)}\,. \qquad (10)$$

Факторизуємо коефіцієнт $K(z)$ системи рівнянь (9) у нескінченних добутках

$$K(z)=K^+(z)K^-(z)\,, \qquad (11)$$

$$K^+(z)\equiv K(0)K^-(-z)=K(0)\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{is_n}\right)\left(1+\frac{z}{i\delta_n}\right)^{-1}\,,$$

де s_n і δ_n ($n=1,2,...$) – корені рівнянь $\lambda(s)=0$ і $\Delta(s)=0$ із півплощини $\mathrm{Re}\,s>0$.

Наступні функції подамо різницями аналітичних у півплощинах $\mathrm{Im}\,z>c^+$ і $\mathrm{Im}\,z<c^-$ функцій:

$$\frac{e^{iza}}{K^-(z)}\left(\Psi^+(z)-\frac{A\varepsilon e^{-a}}{1-iz}\right)=\chi_1^+(z)-\chi_1^-(z)$$

$$\frac{e^{-iza}}{K^+(z)}\left(\Psi^-(z)-\frac{A\varepsilon}{1-iz}\right)=\chi_2^+(z)-\chi_2^-(z)\,,$$

$$\frac{A\varepsilon}{K^-(z)(1-iz)}=f_1^+(z)-f_1^-(z)\,,$$

$$\frac{A\varepsilon e^{-a}}{K^+(z)(1-iz)}=f_2^+(z)\,. \qquad (12)$$

При цьому

$$\chi_1^-(z)=K(0)\sum_{n=1}^\infty\frac{\alpha_n e^{-s_n a}}{s_n+iz}\left(\Psi^+(is_n)-\frac{A\varepsilon e^{-a}}{1+s_n}\right),$$

$$\chi_2^+(z)=-\frac{A\varepsilon e^{-a}}{K^+(-i)(1-iz)}-\sum_{n=1}^\infty\frac{\alpha_n e^{-s_n a}}{s_n-iz}\left(\Psi^-(-is_n)-\frac{A\varepsilon}{1-s_n}\right),$$

$$f_1^+(z)=\frac{A\varepsilon}{K^-(-i)(1-iz)}\,,\quad f_2^-(z)\equiv 0\,,$$

$$\alpha_n=\frac{s_n\Delta(s_n)K^-(-is_n)}{\lambda'(s_n)} \quad (n=1,2,...)\,. \qquad (13)$$

В результаті отримаємо [7]

$$\Phi^+(z)=-[f_1^+(z)+\chi_1^+(z)]\big/K^+(z)\,,$$

$$\Phi^-(z)=-\chi_2^-(z)\big/K^-(z)\,,$$

$$\Psi^+(z)=K^+(z)[f_2^+(z)+\chi_2^+(z)]\,,$$

$$\Psi^-(z)=-K^-(z)[f_1^-(z)+\chi_1^-(z)]\,. \qquad (14)$$

Із поведінки функції $\Phi^-(z)$ при $|z|\to\infty$ за лемою Ватсона [8] випливає, що контактні напруження необмежені на лівому краї області контакту ($r\to l_1+0$). Вимагаючи їх обмеженість, поставимо додаткову умову

$$\lim_{|z|\to\infty} iz\chi_2^-(z)=0\,. \qquad (15)$$

Для знаходження невідомих значень $\Psi^+(is_k)$, $\Psi^-(-is_k)$ ($k=1,2,...$) із (13), які входять до розв'язку (14), поклавши у третій рівності (14) $z=is_n$, а у четвертій – $z=-is_n$, відносно невідомих

$$z_k^+=\varepsilon^{-1}\Psi^+(is_k)-Ae^{-a}\big/(s_k+1)\,,$$

$$z_k^-=\varepsilon^{-1}\Psi^-(-is_k)+A/(s_k-1) \qquad (16)$$

одержуємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n^+ +\beta_n\sum_{k=1}^\infty\frac{\alpha_k e^{-s_k a}}{s_n+s_k}z_k^-=g_n^+\,,$$

$$z_n^- +\beta_n\sum_{k=1}^\infty\frac{\alpha_k e^{-s_k a}}{s_n+s_k}z_k^+=g_n^- \quad (n=1,2,...)\,, \qquad (17)$$

у якій

$$\beta_n=K^+(is_n)\,,\ g_n^+=-\frac{A\beta_n e^{-a}}{K^+(-i)(s_n+1)}\,,\ g_n^-=\frac{A\beta_n}{K^+(i)(s_n-1)}\,.$$

Регулярна нескінченна система алгебричних рівнянь (17) має експоненціально спадаючі за k коефіцієнти та відноситься до систем типу Пуанкаре – Коха. Її розв'язок знаходимо у рядах за степенями малого параметра $\lambda=e^{-\pi a/(2\alpha)}$ [5].

Для визначення відносного розміру зони відриву $l_1/l=e^{-a}$ із додаткової умови (15) отримуємо рівняння

$$\frac{Ae^{-a}}{K^+(-i)}+\sum_{n=1}^\infty\alpha_n e^{-s_n a}z_n^-=0\,. \qquad (18)$$

З умов рівноваги (2) знаходимо кут повороту штампа ε та прикладений до нього момент M:

$$\varepsilon=\bar{\varepsilon}\,P/(2Gl)\,,\quad M=\bar{M}Pl\,,$$

$$\bar{\varepsilon}=k_1\big/\sqrt{2\pi}\,,\quad \bar{M}=1-k_1k_2\big/K^-(-i)\,,$$

$$k_1^{-1} = A(1-\kappa)/K^+(i) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{-1}\alpha_n e^{-s_n a}(z_n^+ - z_n^-),$$

$$k_2 = \frac{A(1-\kappa^2)}{2K^+(i)} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-s_n a}\left(\frac{z_n^+}{s_n-1} - \frac{\kappa z_n^-}{s_n+1}\right),$$

$$\kappa = K^-(-i)e^{-a}/K^-(i). \qquad (19)$$

Обертаючи перше співвідношення (8), знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (7):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^+(t)e^{-i\xi t}dt \quad (0<\xi<a). \qquad (20)$$

Контактні напруження

Обчислюючи інтеграл із (20) з використанням виразів (11) – (14) за теорією лишків і враховуючи заміни (3), (6) отримуємо контактні напруження

$$\left.\frac{\sigma_\vartheta}{2G\varepsilon}\right|_{\vartheta=\alpha} = -\frac{2(m\cos^2\alpha - 1)}{(m-2)\sin 2\alpha} +$$

$$+\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n\Delta(s_n)}{\lambda'(s_n)}\left[\frac{l}{l_1}z_n^+\left(\frac{r}{l_1}\right)^{-s_n-1} - z_n^-\left(\frac{r}{l}\right)^{s_n-1}\right]$$

$$(l_1 < r < l). \qquad (21)$$

На рис. 2 суцільними кривими зображено розподіли безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma} = \sigma_\vartheta/(2G\varepsilon)|_{\vartheta=\alpha}$ для різних кутів α розхилу клина при значенні числа Пуассона $m = 10/3$. Для порівняння точковими кривими показано відповідні розподіли напружень без урахування відриву [2]. Як і очікувалось, зона відриву виявилась малою. Її відносний розмір l_1/l наведено у табл. для різних кутів α і $m = 10/3$. Розв'язок задачі в уточненій постановці показує, що розмір l_1 зони відриву більший, ніж його оціночне значення δ, яке дорівнює розміру зони додатних контактних напружень у задачі про безвідривний контакт клина та штампа [2].

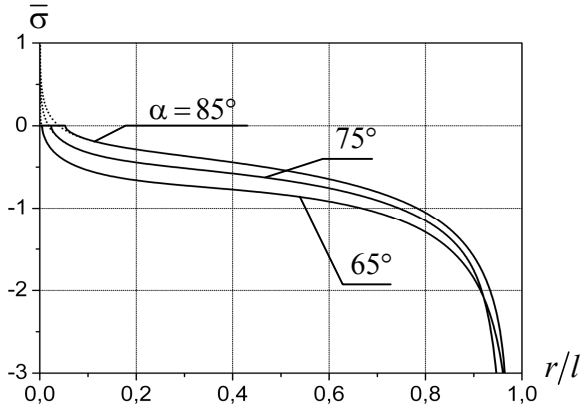


Рис. 2. Контактні напруження

Таблиця

α	60^0	65^0	70^0	75^0	80^0	85^0
l_1/l	0,00029	0,0043	0,0125	0,0233	0,0365	0,0527
δ/l	0,00026	0,0035	0,0099	0,0182	0,0279	0,0396

Список використаних джерел

1. *Lutchenko S. A., Popov G. Ya.* On some plane contact problems of the theory of elasticity for wedges // Prikl. Mekh. – 1970. – **6**, Issue 3. – P. 64-71. (in Russian).
2. *Ostryk V. I., Shchokotova O. M.* Plane contact problem of the indentation of a stamp into an elastic wedge // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **181**, N 4. – P. 470-480.
3. *Ganin M. P.* About Fredholm integral equation with kernel depending on the difference of the arguments // Izv. Vuzov. Math. – 1963. – N 2. – P. 31-43. (in Russian).
4. *Ignatenko M. M., Kirillov V. H.* About the solution some problems of mathematical physics // Diff. Equations. – 1969. – **5**, N 7. – P. 1296-1302. (in Russian).
5. *Antipov Yu. A.* Exact solution of the problem of indentation of a circular punch into the half space // Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A. Fiz.-Mat. i Tekh. Nauki. – 1987. – N 7. – P. 29-33. (in Russian).
6. *Noble B.* Methods Based on the Wiener–Hopf Technique. – Chelsea, New York, 1988.
7. *Ostryk V., Shchokotova O.* Smooth contact of punch with elastic wedge // Mashynoznavstvo. – Lviv, 2009. – N 11. – P. 3-8. (in Ukrainian).
8. *Fedoryuk M. V.* Asymptotics: Integrals and Series. – Moscow: Nauka, 1987. – 544 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Андрущенко В. О.[1], пров. інж.,
Бендюг В. В.[1], студентка,
Борисейко О. Б.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Кононіченко М. В.[1], магістр,
Улітко І. А.[1], к. ф.-м. н, доц.

Ефективність перетворення енергії у п'єзоелементах з розрізними електродами

Розглянуто задачу про планарні коливання п'єзокерамічних елементів з розрізними електродами. Визначені оптимальні конфігурації електродного покриття для підвищення та пригнічення ефективності перетворення енергії на резонансних частотах коливань.

Ключові слова: п'єзокераміка, КЕМЗ, керований підвід енергії.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: andron@univ.kiev.ua, wita1818@mail.ru, b12313@ukr.net, ulitko@univ.kiev.ua

V. O. Andruschenko[1], Principal Engineer,
V. V. Bendug[1], student,
O. V. Boryseiko[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
M. V. Kononichenko[1], MS,
I. A. Ulitko[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Energy conversion efficiency in piezoceramic elements with splitted electrodes

Steady planar vibrations of piezoceramic elements with splitted electrodes are reduced to the electroelastic boundary value problems. Optimal configurations of surface electrodes are determined for the aim of amplification or depression of the energy conversion at resonance frequencies.

Key Words: piezoceramics, EMCF, controlled energy supply.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova avenue, 4 e
e-mail: andron@univ.kiev.ua, wita1818@mail.ru, b12313@ukr.net, ulitko@univ.kiev.ua

Вступ

Конструктивні елементи з п'єзоматеріалів широко застосовуються в сучасних ультразвукових резонансних сенсорах, актуаторах руху та переміщень, в динамічних опорах адаптивних оптичних систем, тощо. Процеси перетворення механічної енергії в електричну та електричної в механічну при динамічних резонансних режимах зазвичай супроводжуються її значними втратами. Навіть і без урахування дисипативних чинників, таких як тепловий розігрів елемента, динамічні коефіцієнти електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) значно зменшуються для старших резонансних частот. Це безпосередньо випливає з аналізу амплітудно-частотних характеристик елемента завдяки скороченню ширини резонансної кривої на старших резонансах [1].

Виявляється, що керований підвід енергії для збудження резонансних коливань п'єзоелементів у випадку вдалого поділу електродного покриття діелектричними розрізами може призвести до значного підвищення величин динамічних КЕМЗ на старших резонансах [2, 3]. Це підвищення ефективності енергоперетворення дає загалом більш якісні робочі показники резонансних п'єзосенсорів та актуаторів. Крім того, поділ електродного покриття елемента при керованому електричному навантаженні відкриває можливість виключити зі спектру збуджуваних частот ту чи іншу небажану частоту, що є важливим, наприклад в динамічних п'єзоактивних опорах адаптивних оптичних дзеркал.

В даній роботі розглядається проблема пригнічення резонансних коливань на першій власній частоті круглої п'єзокерамічної платівки з товщинною поляризацією. Вказаний ефект досягається за допомогою підведення протифазного електричного навантаження до частин електродів на лицьових поверхнях платівки, розділених тонкими концентричними діелектричними проміжками.

Постановка задачі

Розглядається п'єзокерамічний елемент у вигляді тонкого одношарового диска радіуса a та товщини $2h$ з товщинною поляризацією. Електродні покриття на лицьових поверхнях $z = \pm h$ розділені на дві частини кожне вузькими концентричними діелектричними розрізами з радіусом b. Коливання платівки збуджуються гармонічною різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = 2V_0 e^{i\omega t}$, що підводиться до частин електродів згідно схеми, наведеної на рис. 1, тобто внутрішня область (1) платівки у формі круга ($r \le b$) та зовнішня область (2) у формі кільця ($b \le r \le a$) навантажуються протифазно.

© В. О. Андрущенко, В. В. Бендюг, О. В. Борисейко, М. В. Кононіченко, І. А. Улітко, 2013

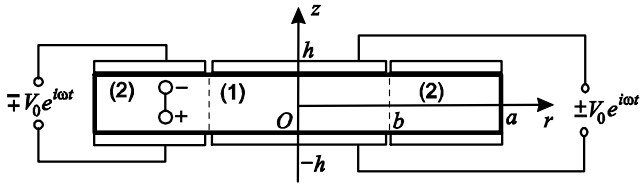


Рис. 1. Схема підводу протифазного електричного навантаження до поверхневих електродів

Для знаходження переміщень, як у області 1, так і у області 2, запишемо рівняння планарних коливань тонких п'єзокерамічних платівок [4]

$$\frac{2}{1-\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}-\frac{1+\nu}{1-\nu}d_{31}\operatorname{grad}E_z=$$
$$=2\rho\, s_{11}^E(1+\nu)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}.$$

На контурі диска задаються однорідні механічні граничні умови

$$\sigma_r\big|_{r=a}=0;$$

а на границі поділу областей $r=b$ задаються умови суміщення напружень та переміщень

$$\sigma_r^{(1)}=\sigma_r^{(2)},\quad \tau_{r\varphi}^{(1)}=\tau_{r\varphi}^{(2)},\quad u_r^{(1)}=u_r^{(2)}.$$

Електричні граничні умови на лицьових поверхнях платівки мають вигляд

$$\psi\big|_{z=\pm h}=\pm V_0(t)e^{i\omega t}$$

для області (1) та

$$\psi\big|_{z=\pm h}=\mp V_0(t)e^{i\omega t}$$

для області (2). На неелектродованій контурній поверхні вимагаємо рівності нулеві радіальної компоненти електричної індукції:

$$D_r\big|_{r=a}=0.$$

В записаних формулах s_{11}^E, $\nu=-s_{12}^E/s_{11}^E$ – пружна податливість та коефіцієнт Пуасона, ρ – густина матеріалу, d_{31} – п'єзомодуль.

Аналітичний розв'язок задачі

Зважаючи на повну осьову симетрію рівняння та граничних умов, розв'язок для переміщень запишемо у вигляді

$$\vec{u}=\vec{e}_r\hat{u}(r)e^{i\omega t}$$

Для амплітуд радіальних переміщень $\hat{u}(r)$ в областях (1) та (2) загальні розв'язки скалярних диференціальних рівнянь типу Бесселя подаються у вигляді

$$\hat{u}_r^{(1)}=AJ_1(\kappa r);\quad \hat{u}_r^{(2)}=BJ_1(\kappa r)+CY_1(\kappa r),$$

де $\kappa=\omega/c$ – хвильове число, $c=[\rho s_{11}^E(1-\nu^2)]^{-1/2}$ – швидкість хвиль радіального розтягу-стиску.

Резонансний визначник та сталі інтегрування визначаються з механічних граничних умов та умов суміщення на границі розділу так:

$$\Delta=\kappa aJ_0(\kappa a)-(1-\nu)J_1(\kappa a);$$
$$A=\frac{-\pi b[\kappa a\Delta^{(1)}(a,b)-(1-\nu)\Delta^{(2)}(a,b)]+a}{\Delta}d_{31}(1+\nu)\hat{E}_z;$$
$$B=\frac{\pi bJ_1(\kappa b)[\kappa aY_0(\kappa a)-(1-\nu)Y_1(\kappa a)]-a}{\Delta}d_{31}(1+\nu)\hat{E}_z;$$
$$C=-\pi bJ_1(\kappa b)d_{31}(1+\nu)\hat{E}_z,$$

де $\Delta^{(1)}(a,b)=J_0(\kappa a)\,\mathrm{Y}_1(\kappa b)-J_1(\kappa b)\,\mathrm{Y}_0(\kappa a)$;
$\Delta^{(2)}(a,b)=J_1(\kappa a)\,\mathrm{Y}_1(\kappa b)-J_1(\kappa b)\,\mathrm{Y}_1(\kappa a)$.

Пригнічення основного резонансу радіальних коливань

Як і слід було очікувати, резонансний визначник елемента з розрізними електродами співпадає з резонансним визначником диска з суцільними електродами [5]. Також умовою для визначення резонансних частот є умова нескінченого зростання амплітуди струму зміщення на електродованих поверхнях диска, а антирезонансні частоти визначаються з умови рівності нулеві цього струму. Тому можемо записати

$$I=-\frac{d}{dt}\iint_{S_1^+}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D})dS\to\begin{cases}0, & \text{resonance},\\ \infty, & \text{antiresonance}.\end{cases}$$

В тому випадку, коли певна антирезонансна частота ω_A співпадає з частотою резонансу ω_R, відповідну радіальну моду коливань п'єзодиска неможливо збуджувати за допомогою електричного навантаження. Дійсно, оскільки за формулою Мезона [1]

$$k_d^2=\frac{\omega_A^2-\omega_R^2}{\omega_A^2}=\frac{(\kappa a)_A^2-(\kappa a)_R^2}{(\kappa a)_A^2},$$

то з умови рівності резонансної та антирезонансної частот слідує рівністю нулю відповідного КЕМЗ. При цьому, слід зауважити, коливання, збуджені механічними напруженнями на контурі, на вказаних частотах в елементі цілком можливі. Неможливе лише електричне збудження коливань, оскільки струм у зовнішньому колі, згенерований п'єзоелементом як електромеханічним перетворювачем, стає рівним за величиною, але протилежним за фазою конденсаторному струму від генератора напруг.

Амплітуди товщинної компоненти вектора електричної індукції знаходяться за наступними формулами:

$$\hat{D}_z^{(1)} = \varepsilon_{33}^T \hat{E}_z (1-k_p^2) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1}{1-\nu} \kappa A J_0(\kappa r),$$

$$\hat{D}_z^{(2)} = \varepsilon_{33}^T \hat{E}_z (1-k_p^2) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1}{1-\nu} \left(\kappa B J_0(\kappa r) + \kappa C Y_0(\kappa r)\right),$$

де ε_{33}^T – діелектрична проникливість, k_p^2 – планарний статичний КЕМЗ. Тоді, виконавши інтегрування у відповідних областях поверхні, з умови $\hat{I}^{(1)} + \hat{I}^{(2)} = 0$ рівняння антирезонансу отримаємо у вигляді

$$2 + (1+\nu)\frac{k_p^2}{1-k_p^2}\frac{1}{b} A J_1(\kappa b) +$$

$$+(1+\nu)\frac{k_p^2}{1-k_p^2}\frac{1}{a^2-b^2}\left\{ a\left[A J_1(\kappa a) + B Y_1(\kappa a)\right] - \right.$$

$$\left. - b[A J_1(\kappa b) + B Y_1(\kappa b)]\right\} = 0.$$

Розв'язуючи отримане рівняння відносно невідомого відношення b/a при заданій резонансній частоті [5] $(\kappa a)_{R,1} = 2{,}07$, отримаємо відносний радіус діелектричного проміжку, при якому електричне збудження коливань диска на першій резонансній частоті є неможливим.

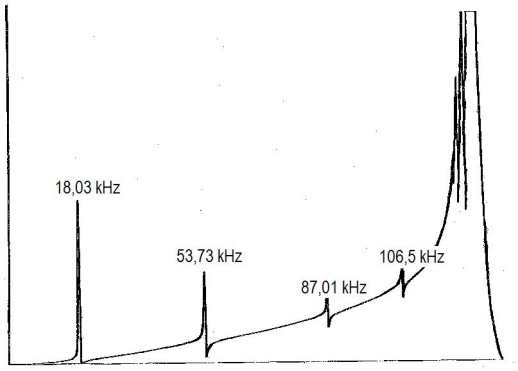


Рис. 2. Амплітудно-частотна характеристика стержня з суцільними електродами

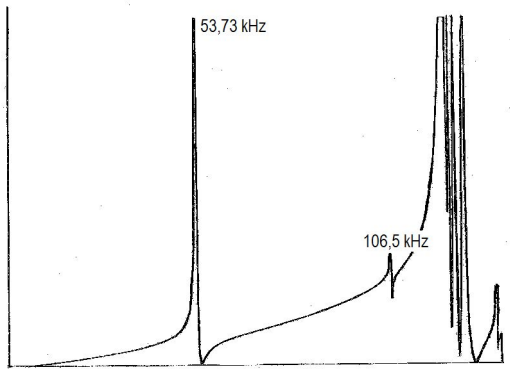


Рис 3. Амплітудно-частотна характеристика стержня з розрізними електродами

Аналогічні аналітичні результати були отримані і для п'єзокерамічного стержня з товщинною поляризацією з розрізами електродів на лицьовій поверхні, симетричними відносно центра стержня [6]. Також були проведені експериментальні дослідження електромеханічних коливань такого стержня. Відповідні АЧХ приведені на рис. 2-3.

Висновки

Таким чином, в роботі встановлено умови мінімізації інтенсивності радіальних коливань на резонансних частотах п'єзокерамічного диска з товщинною поляризацією за допомогою керованого підводу електричного збудження. Проведено аналогію з результатами, отриманими для випадку поздовжніх коливань прямокутного у перерізі п'єзокерамічного стержня з товщинною поляризацією.

Список використаних джерел

1. *Berlincourt D. A., Curran D .R., Jaffe H. J.* Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers // Physical acoustics: In 6 vols / Edt. W. P. Mason. – V. 1. – Pt. A. – NY.: Academic Press, 1964. – 270 p.
2. *Boriseiko O. V.* Planar vibrations of piezoceramic disk under antiphase excitation // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2001. – No 3. – P. 89-94. (in Ukrainian).
3. *Boriseiko O. V., Panasiuk O. M., Ulitko I. A.* Vibrations of piezoceramic rod with splitted electrodes // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2006. – No 3. – P. 89-97. (in Ukrainian).
4. *Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Schul'ga N. A.* Electroelasticity // Mechanics of conjugated fields in the elements of constructions. **5** / Edt. A. N. Guz', Ac.Sci. Ukrainian SSR, Inst. Mechanics. – Kiev: Naukova Dumka, 1989.– 280 p. (in Russian).
5. *Ulitko A. F., Boriseiko O. V, Ulitko I. A.* Applied methods in the problems of electroelasticity. Kyiv.: VPC "Kyivsky universytet", 2007. – 127 p. (in Ukrainian).
6. *Andruschenko V. O., Boriseiko O. V., Nemchenko D. S., Ulitko I. A.* Experimental study of the energy conversion efficiency at the resonance vibrations of piezoceramic rod with sectioned electrodes under controlled electrical excitation // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2010. – No 2. – P. 25-29. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 16.05.13

УДК 539.3

Андрущенко В. О.[1], пров. інж.,
Борисейко О. В.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Улітко І. А.[3], к. ф.-м. н, доц.,
Яцків С. Ю.[4], магістр

Спектр резонансних частот біморфних п'єзоелементів

Розглядаються задачі про стаціонарні коливання біморфних п'єзокерамічних елементів. Проведені експериментальні дослідження згинних та планарних коливань круглої платівки та стержня. Визначені частоти резонансу та антирезонансу. Отримані значення КЕМЗ за формулою Мезона та за енергетичним критерієм. Наведені результати аналітичних розрахунків.

Ключові слова: біморфний елемент, стержень, диск, КЕМЗ, резонанс, антирезонанс, експеримент.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: andron@univ.kiev.ua, b12313@ukr.net, ulitko@univ.kiev.ua, sofia1432@mail.ru

V. O. Andruschenko[1], Principal Engineer,
O. V. Boryseiko[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
I. A. Ulitko[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
S. Yu. Yatskiv, MS

Resonance spectra of bimorph piezoceramic elements

Time harminic vibrations of bimorph piezoceramic elements are considered. The both bending and planar modes of circular plate and prizmatic rod have been studied in experiment. Resonance and antiresonance frequencies have been defined. The values of EMCF are obtained by Mason's formula and by energy criterion. Results of theoretical calculation are presented.

Key Word: bimorph element, rod, disk, EMCF, resonance, antiresonance, experiment.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova avenue, 4 e
e-mail: andron@univ.kiev.ua, b12313@ukr.net, ulitko@univ.kiev.ua, sofia1432@mail.ru

Вступ

В сучасних приладах та пристроях ультразвукової техніки набули широкого застосування елементи конструкцій, в яких проявляються ефекти зв'язанності фізико-механічних полів. Термічні, магнітні, електричні навантаження таких елементів приводять до їх деформування, а отже, до виникнення полів механічних напружень. Навпаки, механічна деформація елемента призводить до його розігріву, а для елементів з п'єзо- та феромагнітними властивостями – до виникнення електромагнітного поля. В елементах конструкцій з п'єзокераміки реалізуються як статичне деформування, так і динамічні коливальні режими.

Постійний інтерес дослідників до вивчення п'єзоефекту та зв'язаних електромеханічних деформівних процесів обумовлений розвитком п'єзосенсорів та п'єзоактуаторів та задачами їх імплантації в технологіях МЕМС.

Якість роботи будь-яких пристроїв, в яких використовується п'єзоефект, суттєво залежить від ефективності перетворення в п'єзоелементі механічної енергії в електричну чи навпаки. Аналогією коефіцієнта корисної дії для таких п'єзокерамічних елементів є статичні та динамічні коефіцієнти електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Тому проблема визначення резонансних робочих частот елементів з п'єзокераміки у зв'язку з оцінкою ефективності перетворення енергії на цих частотах є, поза сумнівом, важливою в динамічній теорії електропружності. У переважній більшості випадків найефективнішою є робота п'єзоелемента на першій головній частоті даного спектру. Для підвищення значення КЕМЗ на вищих резонансних частотах та для вирішення низки технічних задач використовується керований підвід електричного навантаження до елемента, наприклад, протифазне навантаження відокремлених ділянок поверхневих електродів стержнів, платівок та оболонкових елементів з п'єзокераміки [1, 2].

З іншого боку, використання багатоелектродних шаруватих структур з п'єзокераміки за рахунок неоднорідності поля деформацій при різних типах навантажень дає змогу отримати елементи з декількома наборами робочих частот і форм коливань. Ефективність роботи елементів на перших частотах цих спектрів можна оцінити за енергетичним критерієм та за допомогою наближених емпіричних підходів. В даній роботі досліджується задача про зв'язані електромеханічні планарні та згинні коливання біморфних стержнів та круглих платівок з п'єзокераміки.

© В. О. Андрущенко, О. В. Борисейко, І. А. Улітко, С. Ю. Яцків, 2013

Постановка задачі

Розглядаються гармонічні планарні та згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня з розмірами $2l \times 2b \times h$ та диска з радіусом a і товщиною h під дією змінного в часі електричного поля з круговою частотою ω. Структура елементів вказана на рис. 1.

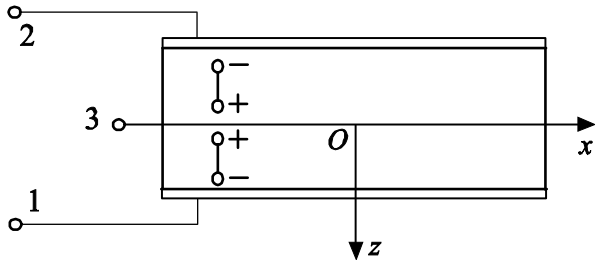


Рис. 1. Структура біморфного п'єзоелемента

Дослідження проводились для двох типів підключення поверхневих електродів біморфних п'єзоелементів.

I. Електроди (1) та (2) при $z = \pm h/2$ навантажуються змінним у часі електричним полем

$$\psi\big|_{z=\pm h/2} = \pm\frac{1}{2}V_0(t)e^{i\omega t},$$

електрод (3) – не навантажений. Збуджуються згинні коливання.

II. Електроди (1) та (2) паралельно навантажуються протифазно до електричного навантаження електрода (3). В результаті виникають планарні коливання.

Усі поверхні п'єзоелементів вільні від механічних навантажень.

Результати експериментальних досліджень

Дослідження частотних спектрів описаних вище п'єзоелементів та ефективності перетворення енергії проводились за допомогою експериментальної установки, структурна схема якої наведена на рис. 2.

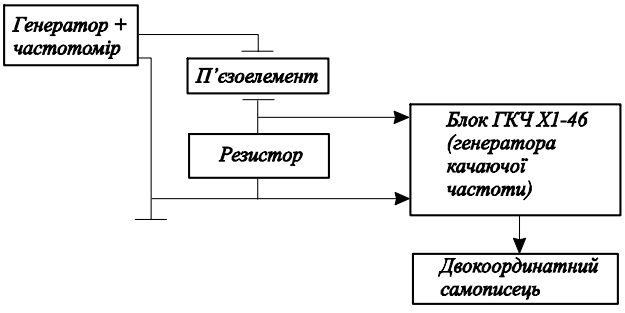


Рис. 2. Схема експериментальної установки

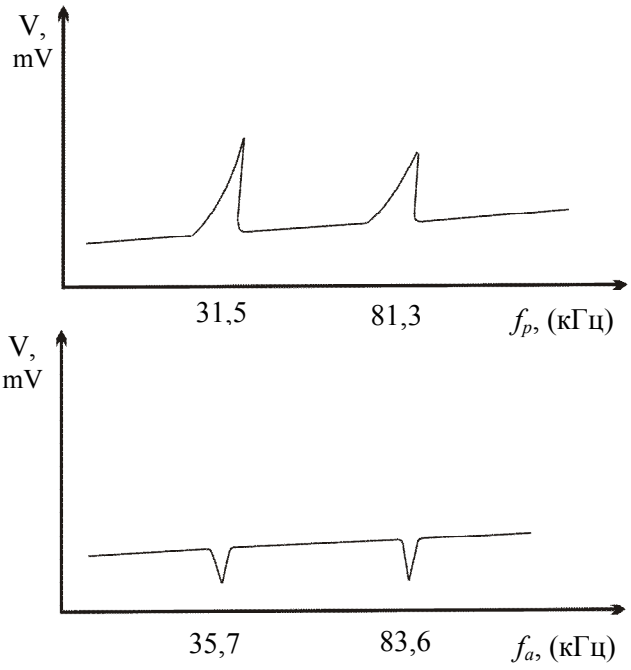


Рис. 3. Амплітудно-частотні характеристики радіальних форм коливань біморфного диска

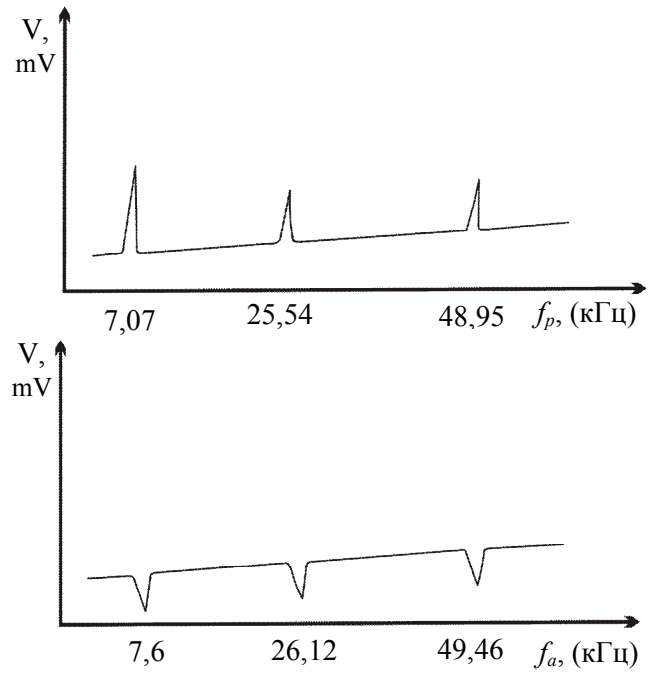


Рис. 4. Амплітудно-частотні характеристики згинних форм коливань біморфного диска

На рис. 3-4 наведені відповідні амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) радіальних та згинних форм коливань біморфного диска діаметром $2r = 63$ мм та товщини $h = 6$ мм, виготовленого з кераміки ЦТС-19. Коефіцієнти електромеханічного зв'язку, обчислені за формулою Мезона [3], мають наступні значення:

– для випадку планарних коливань: $k^2_{d,1} = 0,221$; $k^2_{d,2} = 0,056$;

– для випадку згинних коливань: $k^2_{d,1} = 0,135$; $k^2_{d,2} = 0,044$.

Порівняння з відомими аналітичними результатами

Таблиця 1

Безрозмірні резонансні й антирезонансні частоти та КЕМЗ на згинних коливаннях біморфного стержня [4]

№	$(\beta l)_p$	$(\beta l)_a$	k_d^2 (Мезон)	k_d^2 енерг. критерій
1	2,365	2,4	0,0289	0,0365
2	5,5	5,51	0,0058	0.0072
3	8,639	8,650	0,0024	0,003

Таблиця 2

Безрозмірні резонансні й антирезонансні частоти та КЕМЗ на згинних коливаннях біморфного диска [5]

№	$(\beta a)_p$	$(\beta a)_a$	k_d^2 (Мезон)	k_d^2 енерг. критерій
1	3,170	3,068	0,0634	0,1749
2	6,291	6,235	0,0180	0,0468
3	9,428	9,389	0,0082	0,0212

Для випадку планарних коливань одношарових п'єзоелементів перші безрозмірні резонансні та антирезонансні частоти та відповідні КЕМЗ мають наступні значення [6, 7]. Диск з п'єзокераміки PZT-4: $(\kappa a)_p = 2,07$; $(\kappa a)_a = 2,39$; $k_d^2 = 0,25$ (за Мезоном); $k_d^2 = 0,29$ (за енергетичним критерієм). Стержень з п'єзокераміки PZT-4: $(\kappa l)_p = 1,57$; $(\kappa l)_a = 1,65$; $k_d^2 = 0,09$ (за Мезоном); $k_d^2 = 0,108$ (за енергетичним критерієм).

Висновки

Таким чином, біморфні п'єзоелементи дозволяють за рахунок керованого підводу електричного навантаження отримати два спектри частот: на згинній деформації (більш низькі частоти) та на планарній деформації (більш високі). Динамічні КЕМЗ на частотах згинних коливань мають нижчі значення, ніж на частотах планарних коливань. Зауважимо, що у випадку статичної згинної деформації п'єзоелементів біморфної структури, вказаної на рис. 1, статичний КЕМЗ складає 75 відсотків статичного КЕМЗ для випадку планарної деформації одношарового п'єзоелемента з товщинною поляризацією [6, 7].

Список використаних джерел

1. *Boriseyko O. V.* Planar vibrations of a piezoceramic disk with antiphase excitation // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2001. – No 3. – P. 89-94. (in Ukrainian).
2. *Boriseyko O. V., Panasiuk O. M., Ulitko I. A.* Vibrations of piezoceramic rod with splitted electrodes // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2006. – No 3. – P. 89-97. (in Ukrainian).
3. *Mason W. P.* Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics. – New York: D. Van Nostrand, 1950. – 508 p.
4. *Boriseyko O. V., Nikitenko V. M., Pavlyk A. O., Ulitko I. A.* Bending vibrations of bimorph piezoceramic rod // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2008. – No 3. – P. 57-60. (in Ukrainian).
5. *Boriseyko O. V., Ostapchuk V. V., Ulitko I. A.* Determination of dynamic EMCF on bend vibrations of a round bimorph plate // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Mathematics & Mechanics. – 2006. – No 17. – P. 45-48. (in Ukrainian).
6. *Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Schul'ga N. A.* Electroelasticity // Mechanics of conjugated fields in the elements of constructions. **5** / Edt. A. N. Guz', Ac. Sci. Ukrainian SSR, Inst. Mechanics. – Kiev: Naukova Dumka, 1989. – 280 p. (in Russian).
7. *Ulitko A. F., Boriseyko O. V, Ulitko I. A.* Applied methods in the problems of electroelasticity. – Kyiv: VPC "Kyivsky universytet", 2007. – 127 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 15.05.13

УДК 539.3

Асташкін В. І.[1], к. ф.-м. н., с. н. с.,
Гачкевич О. Р.[1, 2], д. ф.-м. н., , проф.,
Козакевич Т. В.[1], к. ф.-м. н.,
Равська-Скотнічни А.[2], д. т. н., доц.

Оптимізація залишкового напруженого стану сталевих пластин при дії рухомих джерел тепла за врахування структурних перетворень

Розроблено методику параметричної оптимізації характеристик рухомих джерел тепла (з одним та декількома центрами локалізації) відносно відсоткового вмісту мартенситу (за критерієм мінімуму максимального вмісту мартенситу). Методику використано з метою збільшення пластичних властивостей зони термічного впливу за зменшення рівня залишкових напружень.

Ключові слова: параметрична оптимізація, рухомі розподілені джерела тепла, фазовий склад, залишкові напруження, мартенсит.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: tv.kozakevych@gmail.com
[2] Політехніка Опольська, Польща, 45-061,
м. Ополє, вул. Катовицька, 48
e-mail: dept13@iapmm.lviv.net

V. I. Astashkin[1], PhD (Phys.-Math.), sen. res.,
A. R. Hachkevych[1, 2], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
T. V. Kozakevych[1], PhD (Phys.-Math.),
A. Rawska-Skotniczny[2], Dr. Sci. (Tech.), Ass. Prof.

Optimization of residual stress state for steel plates under moving heat sources subject to structural transformation

Developed a method of parametric optimization of moving heat sources (with single and multiple centers of localization) characteristics relative to percentage of martensite (by the criterion of minimum of martensite content maximum). Methodology used in order to increase the plastic properties of heat affected zone subject to reduction of residual stresses.

Key Words: parametric optimization, movable distributed heat source, phase composition, residual stresses, martensite.

[1] Pidstryhach Institut for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU
79060, L'viv, Naukova str. 3-b
e-mail: tv.kozakevych@gmail.com
[2] Opole University of Technology, 45-061, Opole, Katowicka str., 48
e-mail: dept13@iapmm.lviv.net

У працях [1, 2] отримано інтерполяційні аналітичні співвідношення, що визначають механічні характеристики маловуглецевих низьколегованих сталевих взірців (твердості, границі міцності, видовження, в'язкості та ін.) від часу τ^0 охолодження в інтервалі температур евтектоїдних перетворень ($850 \div 500^0 C$), в залежності від їх хімічного складу, а також відсоткового вмісту фазових складових (мартенситу, бейніту і ферито-перліту), що утворюються внаслідок розпаду аустенітту. При цьому залежність механічних характеристик металу від властивостей і суті фазових складових отримано в адитивній формі – інтерполяційні залежності адитивні за фазовими складовими.

На основі згаданих вище результатів досліджень отримано, що найбільшу твердість і міцність має метал з переважно мартенситною структурою, а найменші – з ферито-перлітною. При цьому зменшення відсоткового вмісту мартенситу збільшує пластичні властивості металу. Тому з метою збільшення пластичних властивостей зони термічного впливу (ЗТВ), яке здійснюється за різних видів цільової термообробки елементів конструкцій і машин за їх виготовлення, за зменшення рівня залишкових напружень, розроблено відповідну методику параметричної оптимізації характеристик рухомих розподілених джерел тепла (з одним та декількома центрами локалізації) відносно відсоткового вмісту мартенситу (за критерієм мінімуму максимального вмісту мартенситу).

Математична постановка задачі оптимізації

Розглядається віднесена до декартової системи координат (x_1, x_2, x_3) тонка ізотропна стальна пластина товщиною $2h$. Відомий розподіл початкової температури в кожній точці пластини. Вона локально нагрівається симетричними відносно

© В.І. Асташкін, О. Р. Гачкевич,
Т. В. Козакевич, А. Равська-Скотнічни, 2013

серединної поверхні рухомими нормально розподіленими джерелами тепла $\overline{Q}$ (що рухаються прямолінійно зі сталою швидкістю v в напрямку осі Ox_1) до температур вищих від A_{c3} (температури повної аустенізації сталі) в окремих її підобластях ($|x_2| < \delta$, $|x_3| < h$, де δ − півширина ЗТВ по осі Ox_2, в якій температура пластини $T > A_{c3}$). Пластина перебуває в умовах конвективного теплообміну зі зовнішнім середовищем за однакового коефіцієнта тепловіддачі з поверхонь пластини.

Пластина зазнає теплового впливу, зумовленого дією системи нормально розподілених рухомих джерел тепла $\overline{Q}$, з декількома центрами локалізації: $\overline{Q}_1$ − головне джерело; $\overline{Q}_2$, $\overline{Q}_3$ − додаткові джерела ($Q_2^* = Q_3^*$) (L_1 − відстань між двома додатковими джерелами тепла, при $L_1 = 0$ − додаткове джерело одне, його центр розташований на відстані L від центру локалізації головного джерела $\overline{Q}_1$). Джерела рухаються вздовж осі Ox_1 (по центру пластини) зі швидкістю v. При $L = 0$ додаткових джерел тепла немає.

Температурне поле в тонкій пластині визначаємо рівнянням теплопровідності за наявних початкової та крайових умов в області Ω [3]. Вміст фазових складових: мартенситу, бейніту і ферито-перліту окреслюємо з використанням відомої математичної моделі опису фазового складу і залишкового напруженого стану низьколегованого маловуглецевого стального тіла, зумовлених високотемпературним нагрівом за наявності зони повної аустенізації, після завершення процесу монотонного охолодження. У цій моделі вміст фазових складових пов'язаний з часом перебування точок тіла в діапазоні температур поліморфних перетворень і хімічним складом сталі та визначається наявними у літературі інтерполяційними залежностями, отриманими на основі результатів статистичної обробки термокінетичних діаграм розпаду аустеніту у відповідних сталевих взірцях. А залишковий напружений стан, що зумовлений вмістом і розподілом фазових складових, визначається змінами питомого об'єму присутніх складових за охолодження на основі підходу умовних залишкових деформацій.

За математичної постановки задачі оптимізації характеристик рухомих розподілених джерел тепла приймаємо:

– за оптимізаційну умову − мінімум функціоналу максимального вмісту мартенситу $M_{\max}$ (за наявних умов теплового впливу), тобто

$$M_{\max}(\overline{Q}) \to \min; \qquad (1)$$

− за функції управління:

✓ $H(\overline{Q}_2(L, Q_2^*))$ за наявності одного додаткового джерела $\overline{Q}_2$, яке розташоване на віддалі L по осі Ox_1 від першого (головного) джерела $\overline{Q}_1$;

✓ $H(\overline{Q}_3(L, L_1, Q_2^*, Q_3^*))$ за наявності двох додаткових однакових за потужністю джерел $\overline{Q}_2$, $\overline{Q}_3$ з центрами симетрично розміщеними відносно осі Ox_2 на віддалі L від головного джерела $\overline{Q}_1$ та на віддалі L_1 один від другого;

– за обмеження на змінні керування (вибрані з технологічних міркувань для забезпечення режиму монотонного охолодження) − умови:

$$\delta \le L \le 3\delta; \quad 0 \le L_1 \le 2\delta; \qquad (2)$$

$$0 \le Q_2^* \le Q_1^*/4, \quad 0 \le Q_3^* \le Q_1^*/4. \qquad (3)$$

Параметрична оптимізація здійснювалася послідовним перебором по кожній змінній керування (починаючи з встановлення координат розміщення центрів локалізації з наступним знаходженням потужностей джерел тепла за врахування умови). Багатомірна оптимізація проводилась за 2-3 етапи в залежності від кількості змінних керування в конкретній задачі [4].

Числові дослідження

За розглядуваних схем нагріву (за наявності одного (основного) джерела, його та одного чи двох додаткових) математичний опис джерел тепла має вигляд

$$\overline{Q} \equiv \overline{Q}_1 = \left(Q_1^*/(2\pi\overline{\sigma})\right)\exp\left(-(x_2^2 + (x_1 - x_1^0)^2)/(2\overline{\sigma})\right),$$

$$\overline{Q} \equiv \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 = \overline{Q}_1 + \left(Q_2^*/(2\pi\overline{\sigma})\right)\exp\left(-(x_2^2 + (x_1 - x_1^*)^2)/(2\overline{\sigma})\right),$$

$$\overline{Q} \equiv \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 + \overline{Q}_3 = \overline{Q}_1 + \left(Q_2^*/(2\pi\overline{\sigma})\right)\exp\left(-((x_2 - x_2^*)^2 + (x_1 - x_1^*)^2)/(2\overline{\sigma})\right) +$$

$$+ \left(Q_3^*/(2\pi\overline{\sigma})\right)\exp\left(-((x_2 - x_2^{**})^2 + (x_1 - x_1^*)^2)/(2\overline{\sigma})\right), \qquad (4)$$

де $x_1^0 = v\tau$, $x_1^* = v\tau - L$, $x_2^* = x_2 + L_1/2$, $x_2^{**} = x_2 - L_1/2$, м; $\bar{\sigma}$ − параметр розсіювання, м^2; x_1 і x_2 − координати точок серединної площини пластини; τ − час; $\bar{Q}(x_1, x_2, \tau)$ − приведена (віднесена до одиниці товщини) потужність джерела тепла; Q_1^* − потужність головного джерела і Q_2^*, Q_3^* ($Q_2^* = Q_3^*$) – потужності додаткових джерел тепла на одиницю довжини кВт/м.

Дослідження проведено для пластини з маловуглецевої низьколегованої сталі 17Г1С з хімічним складом: Mn = 1,35%, C = 0,175%, Si = 0,5%, $\bar{\sigma} = 30\cdot10^{-6}$ м^2 при температурі навколишнього середовища t_c = 20 ^{0}C; Q_1^* = 800 кВт/м, v = $2\cdot10^{-3}$ м/с, λ = 4,42 КВт/(м·^{0}C); $a/(2h) = 2{,}34\cdot10^2$ Вт/(м$^3\cdot^0$C); $c\rho$ = 5,52 КДж/(м$^3\cdot^0$C).

На рис. 1 приведено для одного з варіантів досліджень результати розподілів температур (а), фазових складових (б) та компонент залишкових напружень відносно координати x_2 (в) при джерелі тепла з одним центром локалізації (стрілка над рисунком вказує напрям руху основного джерела, о – місце розташування центра локалізації головного джерела; лінії відповідають: 1 − 500 ^{0}C; 2 – 723 ^{0}C; 3 − 850 ^{0}C; 4 – мартенсит, 5 – бейніт, 6 – ферито-перліт, %; 7 − σ_{11}, 8 − σ_{22}, 9 − інтенсивність напружень $\sigma_{інт}$, МПа).

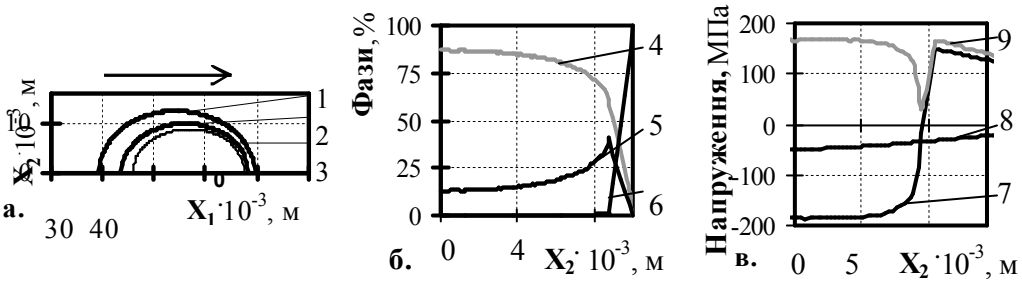


Рис. 1. Температурне поле, фазовий склад та напружений стан для сталевої тонкостінної пластини за локального високотемпературного нагріву одним (основним) джерелом

Отримано, що при додатковому джерелі тепла $\bar{Q}_2$, вибором параметра його розміщення (L = $20\div30\cdot10^{-3}$ м) і потужності (Q_2^* = 40÷200 кВт/м) можна регулювати рівні залишкових фазового та напруженого станів, зокрема за L=$25\cdot10^{-3}$ м при параметрі потужності у п`ять разів меншому, ніж в основного джерела (Q_2^*=160 кВт/м) максимальний вміст мартенситу зменшується в 1,8 раз і на 35% понижується значення максимальної інтенсивності напружень.

За нагріву трьома джерелами тепла (при геометричних параметрах L=$20\div30\cdot10^{-3}$ м, L_1=$10\div20\cdot10^{-3}$ м та значеннях потужності додаткових джерел тепла $Q_2^* = Q_3^*$=40÷200 кВт/м) отримана раціональна схема розміщення додаткових джерел тепла та їх потужності (L=$25\cdot10^{-3}$ м, L_1=$14\cdot10^{-3}$ м, $Q_2^* = Q_3^*$=160 кВт/м), за яких зменшується максимальний вміст мартенситу у 2,4 рази і значно згладжується нерівномірність його розподілу, що зумовлює пониження значення максимальної інтенсивності напружень у два рази.

Висновки

Запропоновано методику параметричної оптимізації характеристик рухомих розподілених джерел тепла (з одним та декількома центрами локалізації) при локальному технологічному високотемпературному нагріві, відносно відсоткового вмісту мартенситу (за критерієм мінімуму максимального вмісту мартенситу) при зменшенні значень залишкових напружень (для підвищення пластичних властивостей зони термічного впливу).

Сформульовано на основі запропонованої розрахункової схеми задач механіки за врахуванням структурних перетворень відповідні задачі для пластин за такого нагріву рухомими розподіленими джерелами тепла з одним, двома і трьома центрами локалізації.

Виявлено на основі аналізу отриманих розв’язків ряд нових закономірностей у розподілах залишкових напружень та фазових складових у пластині за різних термічних параметрів режимів нагріву. За наявності одного додаткового рухомого розподіленого джерела тепла (за оптимальних центру локалізації і параметра потужності при її

нормальному розподілі) максимальний вміст мартенситу може зменшуватись в 1,8 рази, а максимальні значення інтенсивності залишкових напружень на 35% у порівнянні з їхніми значеннями при одному (основному) рухомому розподіленому джерелі, а за наявності двох додаткових рухомих розподілених джерел тепла рівних за потужністю і симетрично розміщених відносно основного джерела (зі встановленими оптимальними центрами локалізації і параметром потужності цих джерел) ці значення зменшуються відповідно у 2,4 та 2,0 рази. Значення параметрів залишкових фазового складу та компонент напружень істотно залежать від відсоткового вмісту конкретних легуючих хімічних елементів [5-6].

Отримані результати можна використати при розробці режимів технологічного високотемпературного нагріву рухомими джерелами тепла, що підвищують пластичні властивості ЗТВ за мінімізації залишкових напружень (шляхом зменшення вмісту гартувальних складових у структурі матеріалу).

Список використаних джерел

1. *Seeffarth P., Kassatkin O. G.* Calculation models to estimate the mechanical properties of the metal HAZ during welding of low-alloy steels // Microstructure and Properties. − 2002. – № 2. – P. 103-106. (in Russian).
2. *Makhnenko O. V., Seeffarth P.* Calculated forecasting of overall deformations of welded beams in laser welding // Automatic welding. − 2008. − № 3. – P. 14-20 (in Russian).
3. *Pidstryhach Ya. S, Lomakin V. A.* Thermoelasticity of bodies with heterogeneous structure – M. : Nauka, 1984. – 368 p. (in Russian).
4. Modeling and optimization in thermomechanics of electroconductive heterogeneous solids / Editors-in-Chif *Burak Ya. Yo., R. M. Kushnir* / V. 5 : Optimization and identification in thermomechanics of heterogeneous solids / *R. M. Kushnir, V. C. Popovych, A. V. Yasins'kyi*. – L'viv : SPOLOM, 2011. – 256 p. (in Ukrainian).
5. *O. Hachkevych, V. Astashkin, T. Kozakevych et al.* Calculation of the phase content of a steel plate at local heating // Metallic Materials (Kovové Materiály). – 2007. – V. 45, № 6. – P. 319-325.
6. *V. Astashkin, O. Hachkevych, R. Kushnir, T. Kozakevych et al.* Uniform phase content optimal local heating of thin steel plates // Optimization of production processes; edit. M. Gajek. – Opole, Printing house of Opole University of Technology: Studies and monographs, 2008. − Z. 238, Ch. 1. – S. 11-21.

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 534.1:539.3

Бай О. В.[1], к. ф.-м. н.,
Бай Ю. П.[1], к. ф.-м. н.,
Сторожев В. І.[1], д. т. н., проф.

Ефекти високочастотної короткохвилевої локалізації електропружних хвиль в низькосиметричному п'єзокристалічному шарі

Визначено і описано особливості кутових розподілів граничних значень фазових швидкостей нормальних електропружних хвиль з різних мод дисперсійного спектру для шару ВТ-зрізу п'єзокристалу α-кварцу у високочастотному короткохвилевому діапазоні. Дослідження здійснено на підставі узагальнення методики аналізу топології відокремлених за параметрами кута поширення та фазової швидкості областей сталості типів сукупностей коренів характеристичних поліномів для систем диференціальних рівнянь хвилевої динаміки п'єзоелектричних середовищ відносно амплітудних функцій товщинної координати шару для хвилевих переміщень і потенціалу зв'язаного квазістатичного електричного поля.

Ключові слова: нормальні електропружні хвилі, шар ВТ-зрізу п'єзокристалу кварцу, ефекти високочастотної локалізації.

[1] Донецький національний університет,
83001, м. Донецьк, вул. Університетська, 24
e-mail: stvi@i.ua, alexey.baj@gmail.com

A. V. Bai[1], PhD (Phys.-Math.),
J. P. Bai[1], PhD (Phys.-Math.),
V. I. Storozhev[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.

Effects of high-frequency shortwave localization of electroelastic waves in low-symmetry piezocrystal layer

Properties of angular distribution of asymptotic values of phase velocities of electroelastic normal waves in high-frequencies shortwave bands are found and described for different modes of dispersion spectrum in a layer of BT-cut quartz piezocrystal. The study is based on a generalization of the methodology for analyzing the topology separating of regions distribution by parameters angle and phase velocity for sustainability types of sets roots of characteristic polynomials for systems of differential equations of wave dynamics of piezoelectric media for amplitude functions of thickness coordinate layer in wave displacements and in potential of coupled quasi-static electric field.

Key Words: normal electroelastic waves, layer of BT-cut quartz piezocrystal, effects of high-frequency shortwave localization.

[1] Donetsk National University,
83001, Donetsk, Universitetskaya str., 24
e-mail: stvi@i.ua, alexey.baj@gmail.com

Аналіз короткохвилевих високочастотних асимптотичних значень для фазових швидкостей біжучих нормальних хвиль з різних гілок дисперсійних спектрів хвиль є одним з принципово важливих аспектів проблеми дослідження хвилеводних властивостей деформівних тіл з різними геометричними і фізико-механічними властивостями. Такого роду дослідження здійснені для випадків пружних хвиль в ізотропному шарі та циліндрі у роботах [1-3], а також для пружних хвиль з різними напрямками поширення у площині пружного ортотропного шару з вільними або закріпленими гранями у роботах [4, 5].

Дану статтю присвячено аналізу цього питання для випадку поширення зв'язаних електропружних хвиль у шарі $V = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty,\ |x_3| \le h\}$ одноповоротного ВТ-зрізу тригонального п'єзокристалу α-кварцу. Ускладнення принципово існуючих механізмів високочастотної короткохвильової локалізації нормальних хвиль у досліджуваному випадку пов'язане з існуванням декількох типів поверхневих акустичних хвиль в п'єзоелектричному середовищі. Так, у роботах [2, 6] показано, що на границі вільного п'єзоелектричного півпростору можливе існування суто зсувних електропружних поверхневих хвиль Гуляєва – Блюстейна, електропружних або суто пружних двопарціальних чи трипарціальних електропружних узагальнених поверхневих хвиль релеївського типу.

Асимптотичні величини шуканих фазових швидкостей υ для різних напрямків поширення θ у площині шару визначаються на підставі дослідження сукупності кутових залежностей [4, 5, 7, 8] значень кратних коренів узагальненого характеристичного рівняння Кристофеля для си-

© О. В. Бай, Ю. П. Бай, В. І. Сторожев, 2013

стеми звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних складових функцій хвилевих переміщень u_j та потенціалу квазістатичного електричного поля φ у аналізованих нормальних хвилях як функцій товщинної координати x_3 шару, що випливають з системи рівнянь динамічної електропружності для п'єзокристалічного середовища.

В найбільш загальному випадку аналізоване поліноміальне характеристичне рівняння відносно параметру p можливо представити у формі

$$K(p)=\sum_{m=0}^{8} a_m(\upsilon,\theta)\,p^m=0 \qquad (1)$$

з параметричними залежностями коефіцієнтів від кутового параметру напрямку поширення і шуканої фазової швидкості.

У процесі здійснюваного аналізу розглядається визначений і наведений на рис. 1 топологічний поділ області варіювання параметрів (θ,υ) на підобласті, у яких є сталою за типом множина коренів рівняння (1) для ВТ-зрізу п'єзокристалу α-кварцу. Цей поділ утворюється лініями параметричних залежностей $\upsilon=\upsilon_\alpha(\theta)$, що випливають з умов рівності нулеві дискримінанту (1) $R(\theta,\upsilon)=\mathrm{Res}\big(K(p),K'(p)\big)=0$ та вільного члену цього рівняння $a_0(\theta,\upsilon)=0$, тобто умовами, що відповідно визначають існування ненульових та нульових кратних коренів (1). Співвідношення $\upsilon=\upsilon_\alpha(\theta)$, що визначаються з рівняння $a_0(\theta,\upsilon)=0$, описують кутові залежності для фазових швидкостей квазіпоздовжніх $\upsilon_P(\theta)$, квазізсувних $\upsilon_{SH}(\theta)$ та $\upsilon_{SV}(\theta)$ об'ємних електропружних хвиль вздовж відповідних напрямків поширення θ у площині шару. Лінії $\upsilon=\upsilon_D(\theta)$ визначаються з рівняння $R(\theta,\upsilon)=0$. Додатково на рис. 1 вказано кутовий розподіл $\upsilon_R(\theta)$ швидкостей поверхневих електропружних хвиль релеївського типу біля границі півпростору ВТ-зрізу α-кварцу з напрямками поширення у діапазоні $\theta\in(0;\pi/2)$.

Принциповим є виявлення на множині побудованих параметричних кривих залежності $\upsilon=\upsilon_{гран}(\theta)$, що обмежує зверху область зміни параметрів (θ,υ), у якій усі корені (1) є уявними. Саме ця властивість коренів відповідає необхідному для визначеності локалізації характеру розв'язків системи рівнянь відносно амплітудних складових електропружних нормальних хвиль. У розглядуваному випадку шару ВТ-зрізу α-кварцу залежність $\upsilon=\upsilon_{гран}(\theta)$ формується наступним чином:

$$\upsilon_{гран}^{(BT)}(\theta)=\begin{cases}\upsilon_{SV}^{(BT)}, & \theta\in(0;\theta_{BT}),\\ \upsilon_{D}^{(BT)}, & \theta\in(\theta_{BT};\pi/2).\end{cases}$$

Значення кутового параметру θ, при якому криві залежностей $\upsilon_{SV}(\theta)$ та $\upsilon_D(\theta)$ перетинаються, для шару ВТ-зрізу дорівнює $\theta_{BT}\approx 5\pi/36$.

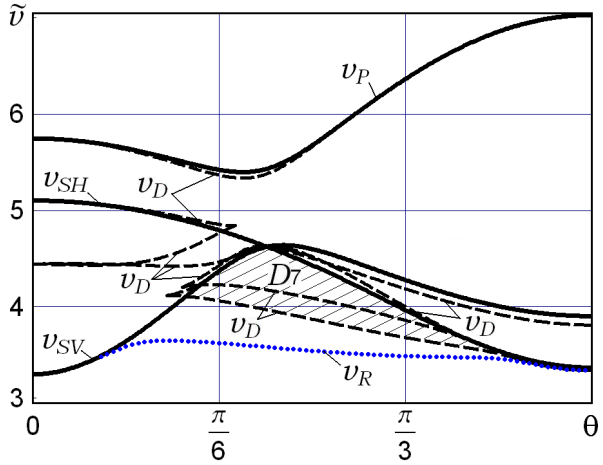


Рис. 1. Топологічний поділ області варіювання (θ,υ) параметричними залежностями $\upsilon=\upsilon_\alpha(\theta)$ для шару ВТ-зрізу α-кварцу

Для певного діапазону варіювання θ в області $\upsilon<\upsilon_{гран}(\theta)$ міститься крива $\upsilon=\upsilon_R(\theta)$, і у цьому діапазоні значення $\upsilon_R(\theta)$ є мінімальними значеннями серед усіх зазначених вище значень $\upsilon_\alpha(\theta)$.

Особливість здійснюваного аналізу для ВТ-зрізу монокристалу α-кварцу полягає також у існуванні вздовж пружно-еквівалентного напрямку шару $\theta=\pi/2$ поверхневої електропружної хвилі Гуляєва – Блюстейна з фазовою швидкістю υ_{GB}.

Проведені числові розрахунки та детальний аналіз типів коренів характеристичних поліномів для рівнянь стаціонарного динамічного деформування п'єзокристалічного шару ВТ-зрізу α-кварцу дозволяють зробити наступні висновки щодо асимптотичної поведінки мод дисперсійних спектрів та значень фазових швидкостей нормальних електропружних хвиль у високочастотному короткохвильовому діапазоні.

З огляду на попередній опис структури аналізованого топологічного розподілу, схема одержання асимптотичних значень фазових швидкостей для електропружних хвиль різних мод дис-

персійного спектру шару ВТ-зрізу α-кварцу полягає у прямуванні швидкостей хвиль з двох нижчих мод, що мають нульову критичну частоту, знизу до величини $\min\left\{\upsilon_{гран}(\theta), \upsilon_R(\theta)\right\}$ та у прямуванні швидкостей хвиль з інших мод зверху до величини $\upsilon_{гран}(\theta)$ при $\theta \in (0; \pi/2)$.

Отже, асимптотичними значеннями фазових швидкостей нормальних електропружних хвиль двох нижчих мод спектру у високочастотному поверхневої хвилі Гуляєва – Блюстейна – для нижчої моди спектру *SH*-хвиль. Як показують проведені числові розрахунки, якщо для заданого напрямку θ не існує поверхневих хвиль зі швидкостями $\upsilon_R(\theta) < \upsilon_{гран}(\theta)$ та $\upsilon_{GB}(\theta) < \upsilon_{гран}(\theta)$, то у цьому випадку в якості асимптотичних граничних значень фазових швидкостей хвиль нижчих мод спектру у високочастотному короткохвильовому діапазоні виступають значення $\upsilon_{гран}(\theta)$.

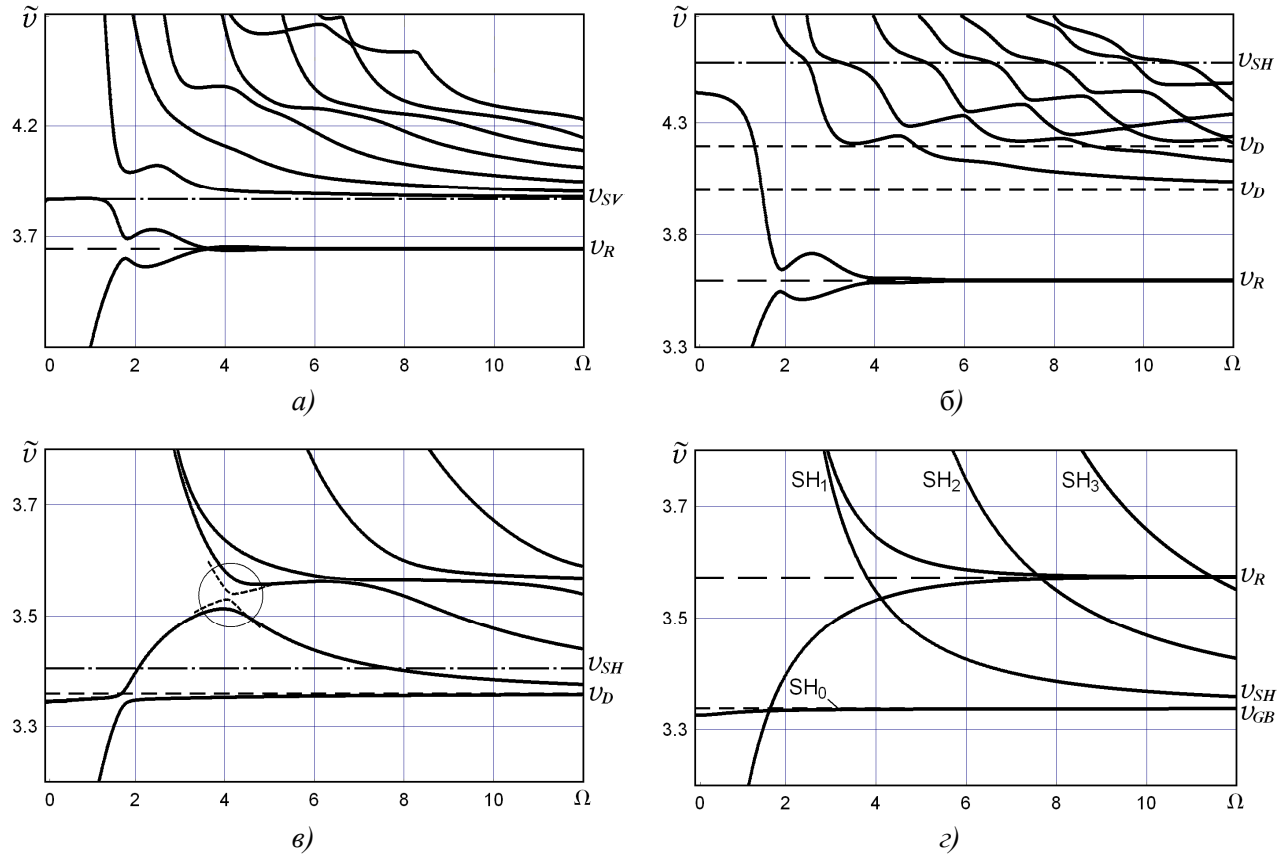


Рис. 2. Фазові швидкості нормальних електропружних хвиль у шарі ВТ-зрізу α-кварцу для напрямків $\theta = \pi/9$ (*а*), $\theta = 7\pi/36$ (*б*), $\theta = 17\pi/36$ (*в*) та $\theta = \pi/2$ (*г*)

короткохвильовому діапазоні для більшості кутових характеристик напрямку поширення є швидкість $\upsilon_R(\theta)$ трипарціальної електропружної поверхневої хвилі релеївського типу. У випадках розпадання спектру на незалежні множини суто пружних *P-SV*-хвиль та електропружних *SH*-хвиль у пружно-еквівалентних напрямках $\theta = 0$ та $\theta = \pi/2$ в якості асимптотичних значень фазових швидкостей нормальних хвиль нижчих мод виступають: значення швидкості υ_R суто пружної двопарціальної поверхневої хвилі Релея – для двох нижчих мод спектру *P-SV* хвиль, а також значення швидкості υ_{GB} зсувної електропружної

Висновки, сформульовані вище відносно асимптотичної граничної поведінки біжучих електропружних нормальних хвиль в п'єзокристалічному шарі у високочастотному короткохвильовому діапазоні, засвідчуються представленими на рис. 2 розрахунками фазових швидкостей цих хвиль.

При виборі напрямку поширення $\theta = \pi/9$ у шарі ВТ-зрізу α-кварцу фазові швидкості двох нижчих мод у високочастотному короткохвилевому діапазоні прямують до значення υ_R електропружної поверхневої хвилі Релея. Фазові швидкості всіх вищих мод спектру при збільшенні частотного параметру прямують до швидкості об'ємних зсувних хвиль υ_{SV} (рис. 2, *а*).

Для напрямку поширення $\theta = 7\pi/36$ у цьому хвилеводі фазові швидкості двох нижчих мод спектру прямують до значення υ_R, а в якості граничного значення фазових швидкостей вищих мод спектру у високочастотному короткохвильовому діапазоні виступають значення υ_D (рис. 2, *б*).

При виборі напрямку поширення $\theta = 17\pi/36$ для шару ВТ-зрізу α-кварцу не існує електропружної поверхневої хвилі Релея з фазовою швидкістю у діапазоні $\upsilon < \upsilon_{гран}(\theta)$. У цьому випадку фазові швидкості двох нижчих мод спектру у високочастотному короткохвилевому діапазоні прямують до значення υ_D (рис. 2, *в*). В якості граничного значення фазових швидкостей вищих мод спектру у високочастотному діапазоні також виступають значення υ_D.

При виборі напрямку поширення $\theta = \pi/2$ у шарі ВТ-зрізу α-кварцу спектр нормальних хвиль розпадається на незалежні множини електропружних *SH*-хвиль та неелектропружних *P-SV*-хвиль. У цьому випадку асимптотичним граничним значенням фазових швидкостей нижчої моди спектру *SH*-хвиль у високочастотному короткохвилевому діапазоні є швидкість υ_{GB} зсувної поверхневої електропружної хвилі Гуляєва – Блюстейна (рис. 2, *г*). Слід зауважити, що у даному випадку нижча мода спектру *SH*-хвиль (SH_0) володіє слабкою дисперсією. Фазові швидкості усіх вищих мод дисперсійного спектру *SH*-хвиль зі збільшенням частотного параметру прямують до значення швидкості об'ємної зсувної хвилі υ_{SH}. Фазові швидкості двох нижчих мод спектру *P-SV*-хвиль, як свідчить діаграма на рис. 2, *г*, у високочастотному короткохвильовому діапазоні прямують до значення υ_R поверхневої хвилі Релея, яка у цьому випадку є двопарціальною неелектропружною. Фазові швидкості усіх вищих мод спектру *P-SV*-хвиль зі збільшенням частоти прямують до значення υ_{SV} швидкості об'ємної повздовжньої хвилі.

Таким чином, у підсумку здійсненого дослідження визначено і описано важливі у теоретичному і прикладному сенсі особливості кутових розподілів граничних значень фазових швидкостей нормальних електропружних хвиль з різних мод дисперсійного спектру для шару ВТ-зрізу п'єзокристалу α-кварцу у високочастотному короткохвилевому діапазоні.

Список використаних джерел

1. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V.* Harmonic vibrations and waves in elastic bodies. – Kyiv: Naukova Dumka, 1981. – 284 p. (in Russian).
2. *Dieulesaint E., Royer D.* Elastic waves in solids: applications to signal processing. – New York: Wiley, 1981. – 511 p.
3. *Victorov I. A.* Rayleigh and Lamb waves: physical theory and applications. – New York; Plenum Press, 1967. – 154 p.
4. *Kosmodamiansky A. S., Storozhev V. I., Shpack V. A.* A new type of energy localization of normal waves in an anisotropic elastic layer // Proc. XI all-union acoust. conf. – Moscow: Andreyev Acoust. Inst. 1991. – P. 155-158. (in Russian).
5. *Abramova O. P., Storozhev V. I., Shpack V. A.* Dispersion of normal waves in an orthotropic layer with a fixed boundary // Acoust. Journal. – 1996. – Vol. 42, N 1. – P. 5-9. (in Russian).
6. *Balakirev M. K., Gilinsky I. A.* Waves in piezocrystals. – Novosibirsk: Nauka, 1982. – 239 p. (in Russian).
7. *Storozhev V. I. Bai A. V.* Real and imaginary branches of spectra of electroelastic waves in AT-cut quartz plate // Theoretical and Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45. – P. 139-145. (in Russian).
8. *Bai J. P., Storozhev V. I., Shpack V. A.* Short-wave asymptotic properties of normal waves in two-layer crystal plates // Acoust. Visn. – 2001. – Vol. 4, N 2. – P. 3-10. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Бандура Л. А.[1], аспірантка,
Вовк І. В.[2], д. ф.-м. н., проф.,
Маципура В. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.

Розсіювання хвиль на куточку

Розглядається плоска задача падіння хвилі на куточок скінченних розмірів. Досліджується силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу. Визначена залежність моменту сил тиску падаючої плоскої хвилі на поверхню смуги від хвильової ширини смуги та кута падіння.

Ключові слова: плоска хвиля, силовий вплив, хвильовий розмір, смуга.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: elvie89@ukr.net, mnivtt@gmail.com
[2] Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4

L. A. Bandura[1], PhD student,
I. V. Vovk[2], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. T. Matsipura[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Waves scattering at the corner

The problem of the plane wave incidence onto the finite size corner is considered. Influence of the incident plane wave power on the strip is investigated. Dependence of the torque generated by the incident plane wave pressure upon the surface of the stripe on the wave bandwidth as well as on the angle of incidence was defined.

Key Words: plane wave, force action, wave size, stripe.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: elvie89@ukr.net, mnivtt@gmail.com
[2] Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabova st., 8/4

Вступ

Куточок широко застосовується у фізиці і техніці. Він здатний ефективно відбивати падаючу хвилю в зворотному напрямку. Ця властивість широко використовується в архітектурній акустиці для коригування розподілу звукового поля в театральних і концертних залах. У радіотехніці та оптиці використовуються кутові відбивачі для точного вимірювання відстаней при топографічній зйомці, морській навігації та ін. Наприклад, в 1969 році американські астронавти згідно з програмою "Аполлон" встановили на Місяці дзеркальні кутові відбивачі. Опромінюючи їх лазером з Землі і приймаючи відбитий сигнал, ось вже багато років з високою точністю визначають відстань від Землі до Місяця і стежать за зміною цієї відстані.

Якщо кут розкриття куточка становитиме 180^0, то куточок перетворюється на смугу. При цьому важливо і цікаво вивчити силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу. Можна очікувати (за аналогією з диском Релея [1]), що коли напрямок падаючої плоскої хвилі буде відповідати деякому куту до площини поверхні смуги, то виникне силовий момент. Цей момент буде намагатися повернути смугу так, щоб площина її поверхні стала перпендикулярною до напрямку падаючої хвилі.

У даній роботі досліджуємо силовий вплив хвилі на смугу.

Побудова розв'язку задачі

Розглянемо плоску задачу падіння хвилі на куточок скінченних розмірів з кутом розкриву $2\theta_1$, рис. 1. Будемо вважати, що поверхні куточка акустично жорсткі, а сам куточок занурений у ідеальне середовище з густиною ρ і швидкістю звуку c. Для побудови розв'язку задачі, введемо полярну систему координат $rO\theta$. Згідно з методом часткових областей [2, 3] весь простір існу-

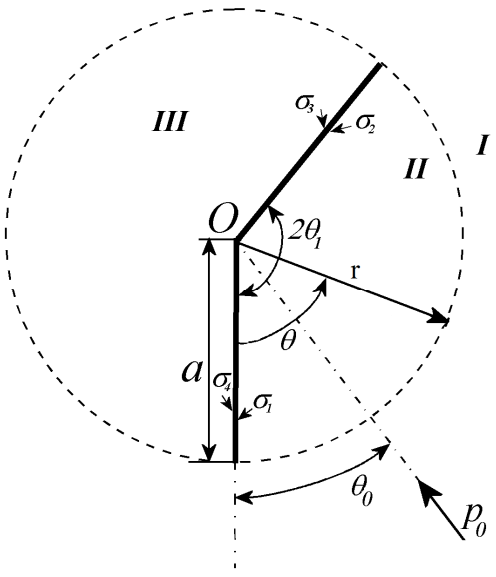


Рис. 1. Геометрія клиноподібного об'єкту (куточку)

© Л. А. Бандура, І. В. Вовк, В. Т. Маципура, 2013

вання звукового поля природно ділиться на три області: I – зовнішність кола радіуса a, тобто $r \ge a$, $0 \le \theta \le 2\pi$; II – сектор $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\theta_1$; III – сектор $0 \le r \le a$, $2\theta_1 \le \theta \le 2\pi$.

Нехай в області I на клиноподібний об'єкт (куточок) падає плоска гармонійна хвиля з одиничною амплітудою тиску

$$p_0 = \exp(-ikr\cos(\theta - \theta_0)). \qquad (1)$$

Знак "мінус" в показнику експоненти вказує на те, що напрям поширення плоскої хвилі протилежний напрямку зростання радіальної координати r. Кути θ_0 і θ визначають, відповідно, кутовий напрямок падіння хвилі і напрям на точку спостереження. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

Поле падаючої хвилі (1) можна записати у вигляді ряду [4]

$$p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr)\cos n(\theta - \theta_0), \qquad (2)$$

де $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, при $n > 0$, $J_n(kr)$ – функція Бесселя першого роду.

При взаємодії плоскої хвилі з клиновидним об'єктом утворюється розсіяне поле, яке представимо у вигляді суперпозиції циліндричних біжучих хвиль типу $H_n^{(1)}(kr)\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ і $H_n^{(1)}(kr)\sin n\theta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Комбінація кутових функцій $\cos n\theta$ і $\sin n\theta$ необхідна, оскільки кут падіння плоскої хвилі θ_0 вважаємо довільним. Отже, поле тиску в області I буде мати вигляд

$$p_{\text{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr)\cos n(\theta - \theta_0) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\sin n\theta. \qquad (3)$$

Поле в областях II і III представимо у вигляді суперпозиції стоячих хвиль:

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{J_{\alpha_n}(kr)}{J'_{\alpha_n}(ka)}\cos\alpha_n\theta, \qquad (4)$$

$$p_{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(ka)}\cos\beta_n(\theta - 2\theta_1), \qquad (5)$$

де числа α_n і β_n визначаються із граничних умов на жорстких границях клина: $\partial p_{\text{II}}/\partial\theta = 0$ при $\theta = 0$, $\theta = 2\theta_1$ і $\partial p_{\text{III}}/\partial\theta = 0$ при $\theta = 2\theta_1$, $\theta = 2\pi$. Таким чином,

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{2\theta_1}, \quad \beta_n = \frac{\pi n}{2(\pi - \theta_1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (6)$$

Запишемо умови спряження на границі розподілу часткових областей I і II, III (рис. 1):

$$\frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = [0, 2\theta_1], \\ \dfrac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = [2\theta_1, 2\pi], \end{cases} \qquad (7)$$

$$p_{\text{I}} = p_{\text{II}}, \quad r = a, \quad \theta = [0, 2\theta_1], \qquad (8)$$

$$p_{\text{I}} = p_{\text{III}}, \quad r = a, \quad \theta = [2\theta_1, 2\pi]. \qquad (9)$$

Алгебраїчне перетворення функціонального рівняння (7) проведемо двічі: перший раз – використовуючи систему функцій $\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, другий – використовуючи систему $\sin n\theta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Обидві системи функцій ортогональні на відрізку $\theta = [0, 2\pi]$. Алгебраїчне перетворення функціонального рівняння (8) проводимо завдяки ортогональності системи функцій $\cos\alpha_n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на відрізку $[0, 2\theta_1]$. Для рівняння (9) використовуємо систему функцій $\cos\beta_n(\theta - 2\theta_1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на відрізку $[2\theta_1, 2\pi]$. В результаті отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n. Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції.

Силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу

Досліджуємо силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу. У цьому випадку кут $2\theta_1 = 180^0$ (рис. 1). В якості характеристики силового впливу будемо обчислювати момент M сил тиску $p_{II}(r, \theta)$ і $p_{III}(r, \theta)$, які впливають на освітлену і тіньову поверхні смуги. Момент M розподіленої вздовж деякої поверхні сили $p(r, \theta)$ відносно точки O визначається у вигляді інтеграла

$$M = \int_{\Sigma} p(r, \theta) r dr, \qquad (10)$$

де для розглянутої задачі поверхня інтегрування складається з двох ділянок у частковій області II і двох ділянок в області III (див. рис. 1). В області II це $(\sigma_1 : r = [0, a], \theta = 0)$ і $(\sigma_2 : r = [0, a], \theta = \pi)$. В області III, відповідно, $(\sigma_3 : r = [0, a], \theta = \pi)$ і $(\sigma_4 : r = [0, a], \theta = 2\pi)$. Тоді, з урахуванням знака

моменту сил на кожній поверхні розрахункова формула буде мати вигляд

$$-M=\int_0^a[-p_{II}(r,0)+p_{II}(r,\pi)- \\ -p_{III}(r,\pi)+p_{III}(r,2\pi)]rdr. \quad (11)$$

На рис. 2 наведено графік залежності моменту сил тиску при падінні плоскої хвилі на поверхню смуги від хвильового розміру смуги $2a/\lambda$; кут падіння хвилі $\theta_0=45^0$. Як і слід було очікувати, величина моменту істотно залежить від хвильового розміру смуги. Дійсно, почина-

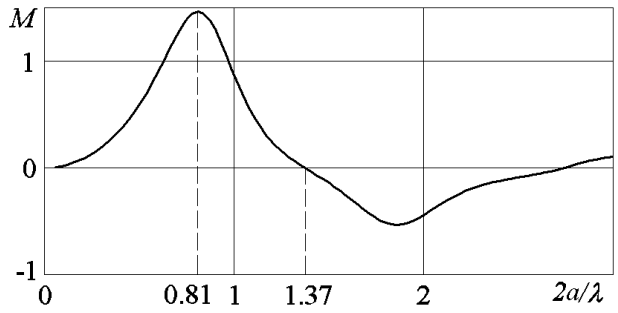


Рис. 2. Залежність моменту сил тиску падаючої плоскої хвилі на поверхню смуги від хвильової ширини смуги $2a/\lambda$; кут падіння хвилі $\theta_0=45^0$

ючи з малих значень величини $2a/\lambda$, момент збільшується и досягає максимального значення при $2a/\lambda=0{,}81$. Далі, зі збільшенням $2a/\lambda$, величина моменту зменшується і при $2a/\lambda=1{,}37$ момент дорівнює нулю. При подальшому збільшенні хвильової ширини смуги момент змінює знак на протилежний, досягає мінімуму, далі збільшуючись, стає рівним нулю і знову змінює знак. Очевидно, що з ростом величини $2a/\lambda$, значення моменту будуть осцилювати поблизу нульового рівня з все меншими значеннями локальних максимумів величини модулю моменту. Таким чином, при збільшенні хвильового розміру смуги, момент буде асимптотично прагнути до нульового значення. Така поведінка моменту має просте фізичне пояснення: поки виконується умова $2a/\lambda\le 0{,}81$, розподіл тиску на поверхні смуги не змінює знаку. При великих хвильових розмірах смуги розподіл тиску буде змінювати знак, тобто на поверхні пластини будуть ділянки, як з додатнім тиском, так і з від'ємним. Тому сила, що діє на пластину, почне зменшуватися і тим швидше, чим більша кількість ділянок буде мати різні знаки тиску.

Для прикладу, на рис. 3 показано розподіл різниці тисків і фаз на поверхні смуги для величини

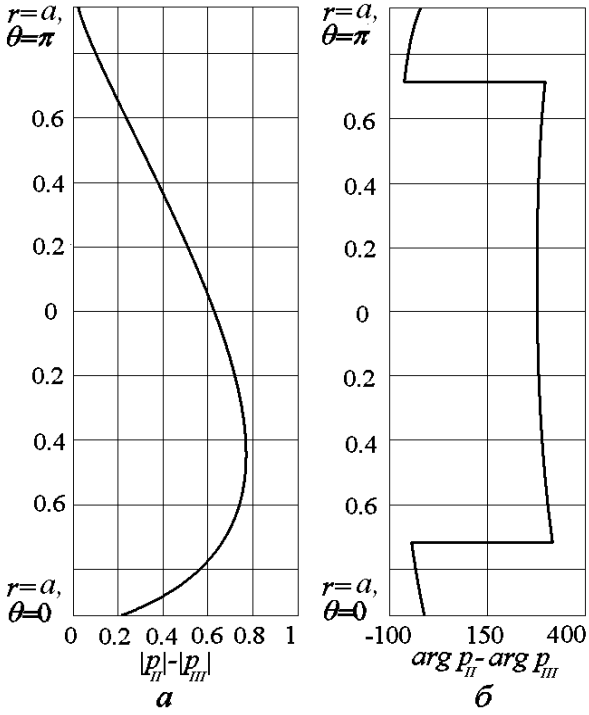


Рис. 3. Графіки різниці модулів тисків на освітленій та тіньової сторонах смуги (а) і відповідна різниця фаз цих тисків (б), $2a/\lambda=0{,}3$

$2a/\lambda=0{,}3$. Такий хвильовий розмір смуги досить малий, тому розподіл тиску по поверхні смуги не змінює знаку. Тут добре видно, що фазова характеристика практично симетрична відносно точки O (рис. 1), в той час як амплітудна крива різна для двох половинок смуги, що, природно, викличе момент, який (якщо смуга не закріплена) буде повертати смугу за годинниковою стрілкою, поки вона не займе положення перпендикулярне напрямку поширення хвилі.

На рис. 4 наведено криві залежності моменту від кута падіння θ_0 плоскої хвилі p_0 на смугу при різних хвильових розмірах смуги. Як видно,

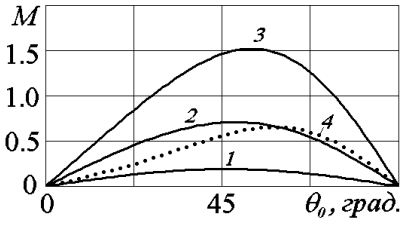


Рис. 4. Залежність моменту від кута падіння θ_0 плоскої хвилі p_0 на смугу: 1 – $2a/\lambda=0{,}3$, 2 – $2a/\lambda=0{,}536$, 3 – $2a/\lambda=0{,}81$, 4 – $2a/\lambda=1{,}08$

у міру зростання $2a/\lambda$ максимум кривих переміщується до більших значень θ_0 (для кривих 1, 2, 3, 4 максимуми моменту сил тиску відповідають наступним кутам падіння: $\theta_0 = 46^0$; 49^0; $52{,}5^0$; $56{,}5^0$). Для малої хвилевої ширини смуги $2a/\lambda < 0{,}3$, як і у випадку з диском Релея [1], максимум моменту сили тиску, що діє на смугу, відповідає куту падіння $\theta_0 = 45^0$.

Висновки

В роботі розглянуто клиноподібний об'єкт (куточок), на який падає плоска гармонічна хвиля. Задача розсіювання хвилі на куточку розв'язана на основі методу часткових областей. При побудові розв'язку задачі отримується нескінченна система алгебраїчних рівнянь другого порядку. Ця система розв'язується методом редукції.

В статті досліджено силовий вплив плоскої хвилі на смугу (куточок з кутом розкриву $2\theta_1 = 180^0$). Побудовано залежність моменту сил тиску падаючої плоскої хвилі на поверхні смуги від хвильової ширини смуги $2a/\lambda$ при куті падіння хвилі $\theta_0 = 45^0$. Встановлено, що величина моменту істотно залежить від хвильового розміру смуги. При збільшенні ширини смуги, силовий момент зростає і досягає максимального значення при $2a/\lambda = 0{,}81$. При подальшому збільшенні хвильового розміру смуги, величина моменту зменшується і дорівнює нулю при $2a/\lambda = 1{,}37$. Надалі, зі зростанням величини $2a/\lambda$ значення моменту змінюючись наближається до нуля.

Обчислена залежність моменту від кута падіння плоскої хвилі на смугу при різних хвильових розмірах смуги. Встановлено, що для малої хвилевої ширини смуги ($2a/\lambda < 0{,}3$), як і у випадку з диском Релея, максимум моменту сили тиску, що діє на смугу, відповідає куту падіння $\theta_0 = 45^0$. При зростанні $2a/\lambda$ максимальне значення моменту переміщується у бік більших значень кута падіння θ_0.

Список використаних джерел

1. *Beranek L.* Acoustic measurement. – Moscow: IIL, 1952. – 626 p. (in Russian).
2. *Grinchenko V. T., Vovk I. V.* Wave-type Problems of Scattering of Sound by Elastic Shells, – Kiev: Naukova Dumka, 1986. – 240 p. (in Russian).
3. *Grinchenko V. T.*, *Matsipura V. T.* Sound scattering on finite wedge-shaped objects. – AV. – 2003. – T. 6, № 2. – P. 23-33.
4. *Shenderov E. L.* Wave problems in hydroacoustics. – Leningrad: "Sudostroenie", 1972. – 347 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 13.05.13

УДК 539.3

Белова О. В.[1], аспирант,
Дзюба А. П.[1], д. т. н., проф.

Экспериментальное исследование влияния повреждений контура отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии

В статье обсуждаются результаты экспериментального исследования устойчивости цилиндрических оболочек, нагруженных осевой сжимающей силой и ослабленных двумя квадратными отверстиями, расположенными симметрично относительно среднего поперечного сечения и в окружном направлении. Углы контуров отверстий повреждены прямолинейными разрезами. Исследуется влияние размера отверстия и длины разреза на величину критической силы потери устойчивости оболочки.

Ключевые слова: экспериментальное исследование, оболочка, квадратное отверстие.

[1] Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, 49044, г. Днепропетровск, просп. Карла Маркса, 35
e-mail: olga.bielova@gmail.com, dzb@ua.fm

O. V. Bielova[1], PhD student,
A. P. Dzyuba[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.

Experimental research of the effect of damage of the opening's contour on stability of cylindrical shells under axial compression

In the paper the results of the experimental research of the stability of cylindrical shells loaded with axial compressive strength, and weakened by two rectangular openings, arranged symmetrically related to the average cross section and in the circular direction. Corners of the borders of openings are damaged with straight directed slits. Researching slits and openings' size effects on the critical stress of buckling of damaged shells.

Key Words: experimental research, shell, square opening.

[1] Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, 49044, Dnepropetrovsk, ave. Karl Marx, 35
e-mail: olga.bielova@gmail.com, dzb@ua.fm

Введение

Большинство оболочек, широко применяемых в качестве несущих элементов конструкций в аэрокосмической, судостроительной и других областях машиностроения и строительства, имеют отверстия различной формы и размеров, обусловленных эксплуатационными или технологическими требованиями [1]. Наличие таких отверстий приводит к снижению несущей способности оболочечных конструкций, необходимость прогнозирования величины которой является весьма важной с практической точки зрения. Теоретическое исследование задач определения критических нагрузок таких тонкостенных элементов при наличии концентраторов напряжений в виде отверстий приводит к необходимости решения достаточно серьёзных математических проблем [6]. Трудности исследования потери несущей способности конструкции в этом случае обусловлены существенной неоднородностью напряжённо-деформированного состояния в области отверстия, появлением достаточно больших прогибов и, как следствие, нелинейностью соответствующей математической модели [2, 7].

Сложность решения задачи прогнозирования остаточной несущей способности конструкции ещё более увеличивается в связи с возможностью появления в процессе эксплуатации дополнительных концентраторов напряжений в виде трещин контура таких отверстий. Одним из немногих эффективных подходов к решению проблемы в этом случае является экспериментальное моделирование поведения оболочек при наличии таких повреждений [5, 8].

Описание эксперимента

Объектом исследования в представленной статье является процесс потери несущей способности цилиндрической оболочки с двумя симметрично расположенными по длине и в окружном направлении оболочки квадратными $a \times a$ отверстиями, углы которых имеют прямолинейные разрезы длиной l, расположенные на лини диагоналей отверстия. Развёртка боковой поверхности исследуемой оболочки представлена на рис. 1. Здесь А и В – зоны приклея заготовки на торцы и шов цилиндрической оболочки шириной $b_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ м и $b_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м соответственно. Внутренний радиус всех моделей был рамен $R = 37{,}5 \cdot 10^{-3}$ м, рабочая длина $L_p = 75 \cdot 10^{-3}$ м. Для передачи на оболочку продольного усилия на криволинейных кромках закреплялись стальные торцы.

© О. В. Белова, А. П. Дзюба, 2013

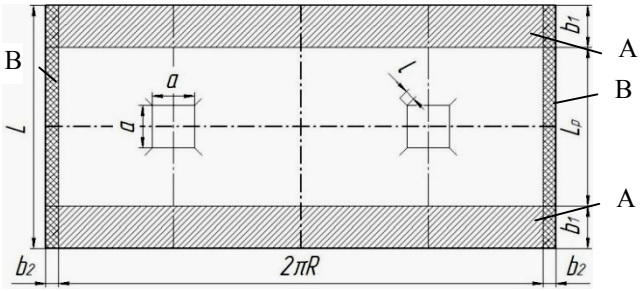
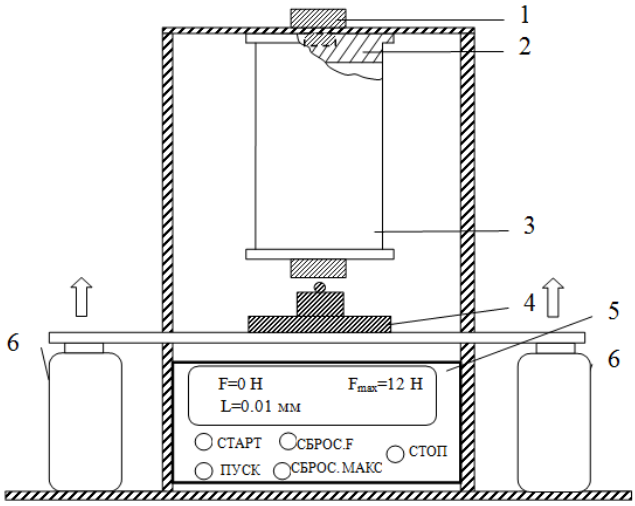


Рис. 1. Схема боковой поверхности оболочки

В качестве материала для изготовления оболочек использовалась чертёжная бумага марки «В» ГОСТ 597-73. Возможность исследования тонкостенных оболочек из специальной бумаги показана Р. В. Роди и Е. Е. Лундквистов [9], позже – В. М. Чебановым [3], а системные исследования проведены Е. Ф. Прокопало [4, 5, 8] . Основные механические характеристики материала: модули упругости $E_x = 6{,}9 \cdot 10^9$ Па, $E_y = 3{,}45 \cdot 10^9$ Па, коэффициенты Пуассона $\mu_x = 0{,}3$, $\mu_y = 0{,}15$ и пределы прочности $\sigma_{x,y} = 4{,}5 \cdot 10^9$ Па, $\sigma_{y,x} = 3 \cdot 10^9$ Па. Здесь индексы x и y соответствуют главным направлениям ортотропии бумаги. Толщина листа составляла $\delta = 0{,}23 \cdot 10^{-3}$ м. Более детально механические характеристики и технология изготовления моделей описаны в работе [8].

Каждая модель оболочки изготавливалась в двух экземплярах. В случае, если различие их критических нагрузок превышало заданную погрешность, испытывались дополнительные модели. Контрольная серия сплошных оболочек изготавливалась в количестве пяти экземпляров. Размеры отверстий имели следующие значения: $a = \{0, 3, 5, 8, 10, 12, 15, 17, 20, 23, 26, 30, 35, 40\}$ мм. Таким образом, для оболочек с величинами разрезов $l = \{0, 2, 5, 10\}$ мм и сплошных оболочек всего было изготовлено и испытано 109 моделей. Для удобства проведения эксперимента и обработки результатов были сформированы 5 серий оболочек с соответствующими размерами отверстий и длинами разрезов.

Следует заметить, что испытываемые модели имеют сравнительно небольшую критическую нагрузку при осевом сжатии: $P_{кр}$ сплошной оболочки составляет 646,8 Н. Поэтому достаточно важной является необходимость исключения влияния различных внешних факторов в процессе нагружения, в частности: случайных динамических нагрузок, несоблюдения соосности, нагружения с неравномерной скоростью и другие. Экспериментальные исследования, описанные в работах [4, 5, 8], проводились на испытательных установках, обеспечение нагрузки в которых происходило по схеме мёртвого груза путём последовательного ступенчатого нагружения оболочки грузами различной массы, что могло приводить к погрешности определения критической силы. В данной работе, с целью повышения точности измерений результатов эксперимента и упрощения процесса его проведения, для испытания оболочек на действие осевой сжимающей силы была разработана и спроектирована специальная установка, схема которой приведена на рис. 2.



1 – винт, 2 – верхний торец, 3 – модель, 4 – тензодатчик, 5 – блок управления, 6 – поршни

Рис. 2. Установка для испытаний цилиндрических оболочек на осевое сжатие

Прибор представляет собой пневматическую установку с электронным управлением, позволяющую нагружать испытуемую модель продольным сжатием или растяжением с возможностью передачи данных испытаний непосредственно в память ПК. Нагрузка прилагается к образцу путём подачи воздуха из компрессора в симметрично расположенные поршни (6), которые поднимают подвижную платформу с установленным на ней тензодатчиком (4). В ходе проведения эксперимента оболочка (3) соединяется с верхней пластиной с помощью винта (1), обеспечивая жёсткое закрепление образца. Подвижная платформа прилагает к оболочке усилие, поднимаясь вверх под давлением поршней. Конструкция предполагает равномерно распределённое на торец оболочки усилие сжатия-растяжения через металлический шарик, входящий в паз нижнего торца оболочки, так, чтобы соблюдалась соосность нагружения. Установка оснащена электронным блоком управления процессом нагружения (5), который представляет собой дисплей для вывода данных и кнопки управления. Испытательная установка подсоединяется от блока управления к ПК с помощью USB-кабеля.

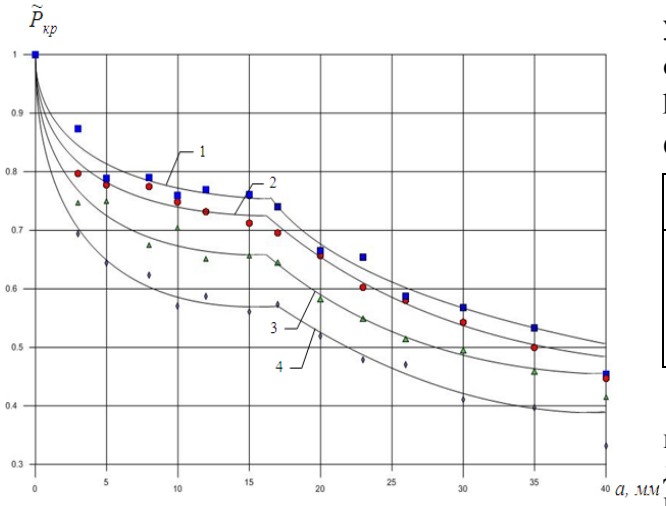


Рис. 3. Зависимость относительной критической нагрузки $\tilde{P}_{кр}$ от размера отверстий a

Анализ полученных результатов. Выводы

На рис. 3 представлены данные, отображающие зависимость относительной критической сжимающей силы $\tilde{P}_{кр}$ от размера квадратного отверстия a. Здесь $\tilde{P}_{кр} = P_{кр} \big/ P^{o}_{кр}$, где $P_{кр}$ и $P^{o}_{кр}$ – величины критической нагрузки для оболочки с отверстиями и для сплошной оболочки соответственно.

Для обработки результатов исследования и построения аппроксимирующих кривых используется алгоритм квадратичной дискретно-непрерывной аппроксимации, разработанный в [4]. Каждая полученная таким образом аппроксимирующая кривая 1, 2, 3, 4 на рис. 3 соответствует различным значениям критической силы для оболочек с величиной прямолинейного разреза $l = \{0, 2, 5, 10\}$ мм в направлении диагонали квадратного отверстия, соответственно. Обращает на себя внимание то, что кривые 1-4, полученные для различных длин разрезов, качественно подобны. Это позволяет использовать полученные данные для прогнозирования несущей способности оболочки для различных длин разрезов l. При этом, как и следовало ожидать, с увеличением длины разреза l критическая нагрузка снижается. Что же касается влияния размера a квадратных отверстий, то для всех кривых характерным является неравномерная зависимость $\tilde{P}_{кр}(a)$. При этом каждая кривая имеет точку излома в диапазоне $16 \le a \le 18$ мм, представляющую собой стык двух аппроксимирующих линий.

Для оценки количественного влияния отверстий и разрезов на несущую способность оболочек в табл. 1 представлены значения снижения критической нагрузки оболочки $\Delta\tilde{P}^{1}_{кр}$ и $\Delta\tilde{P}^{2}_{кр}$ в указанном диапазоне относительно $P^{o}_{кр}$ в зависимости от изменения размеров отверстий a и разрезов l соответственно.

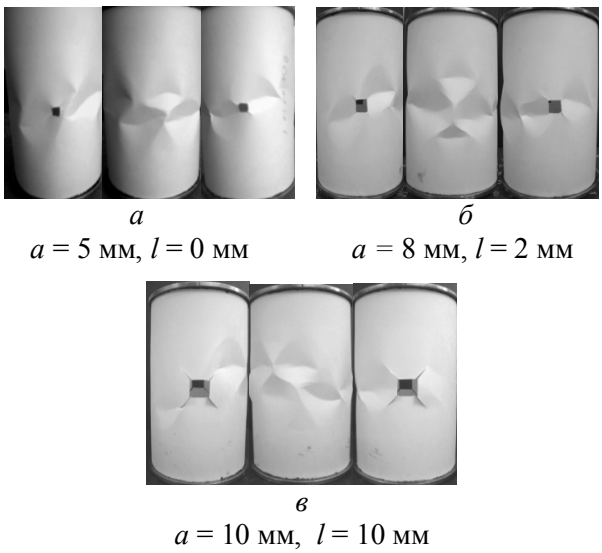
Снижение критической загрузки Таблица 1

a, мм	$\Delta\tilde{P}^{1}_{кр}$	l, мм	$\Delta\tilde{P}^{2}_{кр}$
от 0 до 5	20÷35 %	от 0 до 2	3%
от 5 до 10	3÷5 %	от 2 до 5	5÷8 %
от 10 до 15	1÷2 %	от 5 до 10	10%
от 16 до 40	18÷25%		

Так, появление на оболочках отверстий минимального из исследуемых размера, $a = 3$ мм, ведёт к существенному падению несущей способности оболочки – снижение критической нагрузки составляет от 13% (для оболочек без повреждений контура, $l = 0$) до 31% (для длины разреза $l = 10$ мм). Далее же, увеличение размера отверстия от $a = 5$ мм до $a = 15$ мм, приводит к падению $\tilde{P}_{кр}$ всего на 2,5÷8%. Следует также заметить, что в широком диапазоне от $a = 17$ мм до $a = 40$ мм разница между критическими нагрузками для оболочек с различными разрезами и без них составляет 12÷16%. Появление же прямолинейных разрезов длиной $l = 2$ мм на контурах отверстий приводит к снижению критической нагрузки всего на 3% относительно $P^{o}_{кр}$ для оболочек без разрезов с такими же отверстиями (a = 3 мм). Также следует заметить, что наличие разрезов с длинами $l = \{2, 5, 10\}$ мм приводит к одинаковому снижению $\tilde{P}_{кр}$ для всех размеров квадратных отверстий – примерно 3%, 10%, 20% соответственно.

Наличие изломов кривых на рис. 3 связано с изменением формы потери устойчивости оболочки. Так, в результате потери устойчивости испытуемые оболочки с величинами отверстий от $a = 3$ мм до $a = 15$ мм с прямолинейными разрезами любой из исследуемых длин l и без них имели практически одинаковые формы потери устойчивости в виде двух ярко выраженных поясов вмятин, расположенных параллельно направляющей оболочки (рис. 4 *а, б, в*).

В свою очередь, большинство оболочек с величинами отверстий от $a = 17$ мм до $a = 40$ мм имели форму потери устойчивости в виде одного пояса вмятин, расположенного параллельно направляющей оболочки (рис. 5 *а*) или под углом к последней (рис. 5 *б, в*). Обращает на себя внимание то, что величина прямолинейных разрезов на оболочках с одинаковыми по размеру отверстиями не влияла на формы потери устойчивости, а лишь на величину и глубину вмятин около углов отверстий, являющихся концентраторами напряжений.



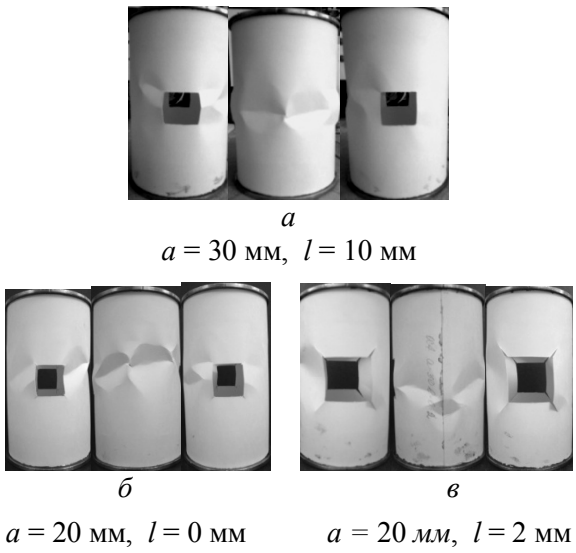
а *б*

a = 5 мм, l = 0 мм a = 8 мм, l = 2 мм

в

a = 10 мм, l = 10 мм

Рис. 4. Формы потери устойчивости оболочки



а

a = 30 мм, l = 10 мм

б *в*

a = 20 мм, l = 0 мм a = 20 *мм*, l = 2 мм

Рис. 5. Формы потери устойчивости оболочки

Таким образом, можно сделать вывод о том, что наличие и величина прямолинейных разрезов в направлении диагонали квадратного отверстия снижают несущую способность оболочек для рассмотренных в эксперименте размеров отверстия от $a = 3$ мм до $a = 40$ мм примерно равномерно с увеличением длины разреза l от 1,2 до 2-х раз, в то время как на формы потери устойчивости оболочек увеличение l не влияет существенно. Зависимость же несущей способности от размеров отверстия является неравномерным. Появление даже малого отверстия резко снижает $\widetilde{P}_{кр}$, далее следует промежуток сравнительно небольшого влияния увеличения размера a, и далее, после изменения формы потери устойчивости оболочки (излом кривой), идёт монотонное падения несущей способности с увеличением размеров отверстий.

Список использованных источников

1. *Ashmarin Y. A.* Stability of shells, weakened with openings (review) / Y. A. Ashmarin, A. N. Guz // Applied mechanics. – 1973. – V. IX, N 4. – P. 3-15. (in Russian).
2. *Ashmarin Y. O.* Nonlinear equations of equilibrium cylindrical shell weakened with circular opening / Y. O. Ashmarin // Rep. AN USSR. – 1971. – Ser. A, N 8. – P. 720-723. (in Ukrainian).
3. *Chebanov V. M.* Investigation of the stability of thin-walled shells using models from paper / V. M. Chebanov // Engineering Collection. Institute of Mechanics, Academy of Sciences of the USSR. – 1955. –V. XXII. – P. 68-73. (in Russian).
4. *Dzyuba P. A.* Research and spline-regression analysis of the stability of cylindrical shells weakened by regularly spaced circular openings / P. A. Dzyuba, E. F. Prokopalo // Problems of computational mechanics and strength of structures: coll. of scientific papers. – Dnepropetrovsk: DNU, 2006. – N 10. – P. 27-37. (in Russian).
5. *Dzyuba P. A.* The stability of cylindrical shells with square cutouts under axial compression / P. A. Dzyuba, E. F. Prokopalo // Technical mechanics. – Dnepropetrovsk, 2007. – N 10. – P. 101-108. (in Russian).
6. *Guz A. N.* The stress concentration around the openings in thin shells / A. N. Guz // Applied mechanics. – 1969. – V. V, N 3. – P. 3-17. (in Russian).
7. *Konoplyov Y. T.* The stability of cylindrical shells with cutouts under axial compression, torsion and external pressure / Y. T. Konoplyov, A. L. Tilsh // Plates and Shells Theory. – Kazan. – 1971. – N 3. – P. 3-13. (in Russian).
8. *Prokopalo E. F.* The stability of cylindrical shells weakened by randomly distributed rectilinear cuts, under the action of axial compressive force / E. F. Prokopalo, P. A. Dzyuba // Problems of computational mechanics and strength of structures: coll. of scientific papers. – Dnepropetrovsk, 2012. – N 20. – P. 292-299. (in Russian).
9. *Rhode R. V.* Strength tests on paper cylinders in compression bending and shear / R.V. Rhode, E. E. Lundquist // NASA. Techn. Notc. – 1931. – № 370.

Поступила в редколлегию 14.05.13

УДК 620.179

Богданов В. Р.[1], к. ф.-м. н., с. н. с.

Моделювання накопичення пластичних деформацій на основі числового розв'язування плоскої задачі із урахуванням процесу розвантаження матеріалу

За допомогою розробленої методики розв'язування задач плоскої деформації у пружно-пластичній динамічній математичній постановці з урахуванням процесу розвантаження матеріалу було отримано числовий розв'язок для брусків з поперечним перерізом у формі прямокутника з пропилом-тріщиною посередині (компактний зразок) при триточковому згині з використанням методу скінчених різниць. Проводиться порівняння зон пластичних деформацій для різних металів в області вістря пропила-тріщини.

Ключові слова: компактний зразок, пластична деформація, вістря тріщини, плоска задача.

[1] Національний транспортний університет,
01010, м. Київ, вул. Суворова, 1
e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

V. R. Bogdanov[1], PhD (Phys.-Math.), sen. res.

The Modeling of An Increment of The Plastic Deformations On The Base of Numerical Solution of A Plane Problem, Taking Into Account The Process of Unloading The Material

Solution technique for the dynamic elastic-plastic plane strain problem with account of unloading of the material is developed. This technique combined with the finite differences method is used to obtain numerical solution for a three point band of material with a transversal profile in the shape of a rectangle with a notch-crack in the middle (compact profile). The comparison of plastic deformation regions at the top of notch-crack for different metals is performed.

Key Words: compact specimen, plastic deformation, growing of crack, top of crack, plane problem.

[1] National Transport University,
01010, Kyiv, Suvorova Street, 1
e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

1. Вступ

Задачі удару по деформівних тілах та їхнього співудару залишаються актуальними і досліджуються у різних постановках. Один із найважливіших напрямків таких досліджень є виявлення особливостей руйнування надрізаних компактних зразків при їхньому руйнуванні на триточковий згин за допомогою ударника. Відповідні експерименти дають можливість визначати вкрай необхідну механіці руйнування характеристику матеріалу – в'язкість його руйнування, пов'язану із коефіцієнтом інтенсивності напружень у вістрі тріщини. Оскільки процес є динамічним і може супроводжуватися значними пластичними деформаціями, то його вивчення є складною та багатоплановою задачею.

Основний масив публікацій пов'язаний із вивченням пружного деформування тіл при ударі на них абсолютно жорсткими тілами. Наприклад, у пружній постановці досліджуються [1, 2] відповідно плоска і осесиметрична задачі удару штампів по пружному шару без урахування підніманя середовища. У [3, 4] досліджено удар жорсткого циліндру. У [5] досліджено дію нестаціонарного навантаження на торцеву поверхню пружної півсмуги. У роботі [6] розглянуто плоску пружну задачу динамічної взаємодії абсолютно твердого ударника з пружним ізотропним однорідним півпростором на надзвуковій стадії взаємодії в умовах жорсткого зчеплення контактуючих багатозв'язних поверхонь. Статичні й динамічні задачі для жорстко-пластичних прямокутних, колових, кільцевих пластин і мембран із різною формою імпульсу навантаження досліджено у [7].

Досліджені задачі нестаціонарної [8-10] ударної взаємодії абсолютно жорсткого плоского ударника з надрізаним у серединному перерізі компактним зразком у динамічній пружно-пластичній постановці. Запропоновані моделі дали можливість у своєму розвитку значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів.

На відміну від [8-10] у цьому дослідженні аналізується розвиток пластичних деформацій у різних металах на основі розв'язку задачі плоского деформованого стану у динамічній пружно-пластичній постановці з урахуванням процесу розвантаження матеріалу.

© В. Р. Богданов, 2013

2. Математичне формулювання задачі

Розглядається деформування ізотропного брусу $\{|x|\le L/2,\ 0\le y\le B\}$ великої товщини, що має у площині поперечного перерізу форму прямокутника $\Sigma = L\times B$ довжини L, ширини B з пропилом-тріщиною завдовжки l вздовж відрізку $\{x=0,\ 0\le y\le l\}$ посередині (компактний зразок). Брус контактує із двома нерухомими опорами по області $\{L_*\le|x|\le L_*+a,\ y=0\}$. Зверху на брус падає абсолютно твердий ударник, що контактує із брусом вздовж відрізку $\{|x|\le A,\ y=B\}$ на протязі короткого проміжку часу. Його дію замінимо рівномірно розподіленим у зоні контакту нормальним навантаженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція ($P=p_{01}+p_{02}t$). Будемо вважати, що область контакту увесь час залишається незмінною. Оскільки процес деформування є симетричним відносно площини $x=0$, далі розглядатиметься тільки права частина поперечного перерізу (рис. 1).

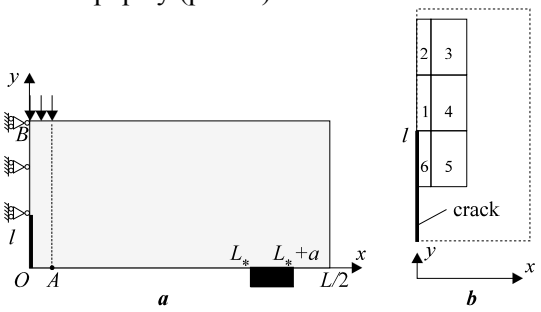


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

Унаслідок високоінтенсивного ударного навантаження вважаємо, що процес деформування є пружнопластичним із зміцненням, причому розрахунки полів напружень, деформацій і їхніх приростів, зокрема, приростів інтенсивності пластичних деформацій, а також параметра Одквіста будемо нижче здійснювати на основі числового розв'язку відповідної динамічної пружнопластичної задачі.

Крайові й початкові умови задачі (у припущенні про незмінність області прикладання реакції опор):

$$
\begin{aligned}
&x=0,\ 0<y<l:\quad \sigma_{xx}=0,\ \ \sigma_{xy}=0;\\
&x=0,\ l<y<B:\quad u_x=0,\ \ \sigma_{xy}=0;\\
&x=L/2,\ 0<y<B:\quad \sigma_{xx}=0,\ \ \sigma_{xy}=0;\\
&y=0,\ 0<x<L_*:\quad \sigma_{yy}=0,\ \ \sigma_{xy}=0;\\
&y=0,\ L_*<x<L_*+a:\quad u_y=\sigma_{xy}=0;\\
&y=0;\ L_*+a<x<L/2:\quad \sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0;\\
&y=B;\ 0<x<A:\quad \sigma_{yy}=-P,\ \ \sigma_{xy}=0;\\
&y=B;\ A<x<L/2:\quad \sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0;\\
&t=0:\ \ u_x=0;\ u_y=0;\ \dot u_x=0;\ \dot u_y=0;\ \ l=l_0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Крапка над символом позначає похідну за часом. Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень $\mathbf{u}=(u_x,u_y)$ пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння руху середовища мають вигляд

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}.$$

За фізичну модель прийнята модель, заснована на теорії неізотермічного пластичного течіння для середовища із зміцненням і умовою текучості Губера – Мізеса разом із гіпотезою короткочасної повзучості [11]. Таким чином рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями матимуть вигляд [12]:

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^e_{ij}+\varepsilon^p_{ij},\quad \varepsilon^e_{ij}=\frac{1}{2G}s_{ij}+K\sigma,\quad d\varepsilon^p_{ij}=s_{ij}d\lambda, \qquad (2)$$

де $s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma$ – компоненти девіатора тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль зсуву; $K=3K_1$, $K_1=(1-2\nu)/(3E)$ – модуль об'ємного стиску, що зв'язує об'ємне розширення 3ε, середнє напруження $\sigma=(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/3$ у співвідношенні $\varepsilon=K\sigma$; ν – коефіцієнт Пуасона; E – модуль пружності (Юнга); $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається формою поверхні навантаження і квадратично залежить від девіатора напружень s_{ij} [11], причому:

$$
\begin{aligned}
&d\lambda=\left\{0\ \ (f\equiv\sigma_i^2-\sigma_S^2(T)<0),\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}\ \ (f=0,df=0)\right\}\\
&\sigma_i=\frac{1}{\sqrt2}\Big(\big(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\big)^2+\big(\sigma_{xx}-\sigma_{zz}\big)^2+\\
&\qquad+\big(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\big)^2+6\big(\sigma_{xy}^2+\sigma_{xz}^2+\sigma_{yz}^2\big)\Big)^{1/2},\\
&d\varepsilon_i^p=\frac{\sqrt2}{3}\Big(\big(d\varepsilon_{xx}^p-d\varepsilon_{yy}^p\big)^2+\big(d\varepsilon_{xx}^p-d\varepsilon_{zz}^p\big)^2+ \qquad (3)\\
&+\big(d\varepsilon_{yy}^p-d\varepsilon_{zz}^p\big)^2+6\Big(\big(d\varepsilon_{xy}^p\big)^2+\big(d\varepsilon_{xz}^p\big)^2+\big(d\varepsilon_{yz}^p\big)^2\Big)\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

де σ_i, ε_i^p, $d\varepsilon_i^p$ – інтенсивності напружень, пластичних деформацій та прирости останніх.

Зміцнення матеріалу відбувається за таким температурним співвідношенням [13]:

Таблиця 1

Відношення модулів зсуву і об'ємного стиску

Метал	$G_K=G/K$	Метал	G_K
Сталь	0,535714	Алюміній	0,358209
Тітан	0,409091	Срібло	0,284672

$$\sigma_S(T)=\sigma_{02}(T_0)\left(1+\kappa(T)/\varepsilon_0\right)^{\eta_*},\ \ \varepsilon_0=\sigma_{02}(T_0)/E,$$

де T – температура; $\kappa=\int d\varepsilon_i^p$ – параметр Одквіста; $T_0=20^\circ\mathrm{C}$; η_* – коефіцієнт зміцнення; $\sigma_S(T)$ – межа текучості після зміцнення матеріалу при температурі T.

3. Схема розв'язування задачі

Схема розв'язування задачі така, як і в [8-10], при цьому для розрахунків використовуються такі ж самі вирази напружень і приростів деформацій. Для урахування фізичної нелінійності, що міститься в залежностях (3), застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [8-10, 13].

Для опису зміни окремих характеристик в ролі незалежного параметра будемо вважати наближене значення коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_I (нижче називатимемо його пружним КІН). Для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною наближено вважають [14]:

$$K_\mathrm{I}=12F\frac{\sqrt{l}}{BH}\left(1{,}93-3{,}07r+14{,}53r^2-25{,}11r^3+25{,}8r^4\right),$$
$$r=l/B, \qquad (4)$$

в котрій $F=2AP$ – контактна сила, $4B$ – відстань між опорами.

Процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом. Якщо в будь-якій комірці абсолютне значення напруження ставало меншим ніж максимальне значення, тоді пластичні деформації зупиняють збільшуватися і зміцнення матеріалу припиняється. Знов пластичні деформації починають збільшуватися і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальних значень.

4. Числова реалізація

Чисельні дослідження проводилися для брусків із компактним профілем з сталі 15Х2НМФА, алюмінію, титану і срібла. Для розрахунків використовувався метод скінченних різниць [15] із змінним кроком розбиття. Використання цього методу обґрунтовується в [16], точність розрахунків з похибкою не більше ніж $O\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2+(\Delta t)^2\right)$. На рис. 2 – 5 відображено результати розрахунків компактних зразків довжиною 60 мм, шириною 10 мм, товщиною 50 мм і глибиною пропила у центрі 3 мм, з коефіцієнтом зміцнення матеріалу $\eta^*=0{,}05$. Відстань між опорними точками дорівнювала 40 мм. Обчислення здійсненні за таких значень параметрів: $\Delta t=5\ 10^{-4}$ с, A=2,5 мм, p_{01}=8 МПа, p_{02}=10 МПа, M=22, N=22, K=21, температура T=50° С.

У табл. 1 приведено значення відношення модулів зсуву і об'ємного стиску. У працях [3, 4] показано, що підйом середовища при ударі залежить від параметру G_K. На рис. 2 приведено параметр Одквіста для різних металів.

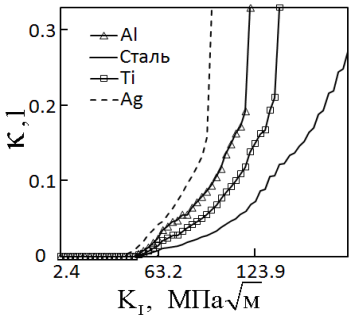


Рис. 2. Параметр Одквіста

Як видно з табл. 1 і рис. 2, чим менше відношення модулів зсуву і об'ємного стиску G_K, тим більше пластичні деформації.

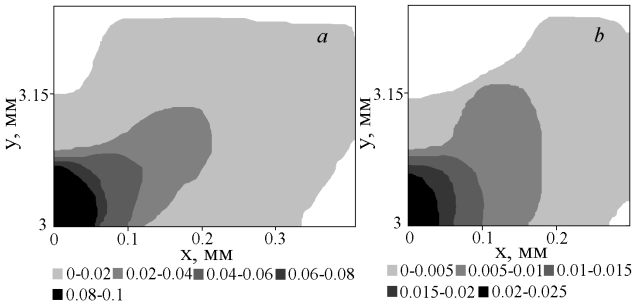


Рис. 3. Пластичні деформації ε_{xx}^p у зоні вістря тріщини: *a*) алюміній *b*) реакторна сталь

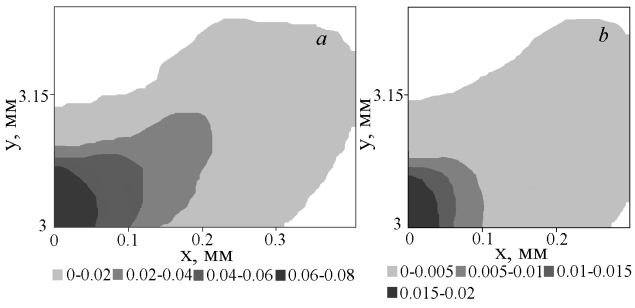


Рис. 4. Пластичні деформації ε_{yy}^p у зоні вістря тріщини: *a*) алюміній *b*) реакторна сталь

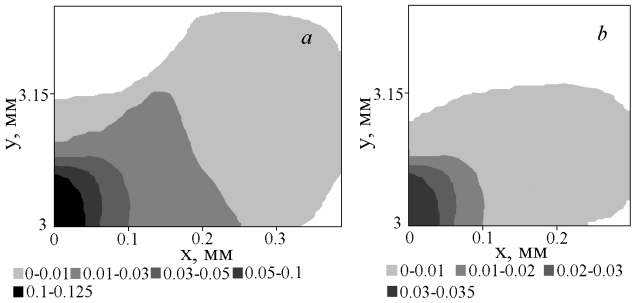


Рис. 5. Пластичні деформації ε_{xy}^{p} у зоні вістря тріщини: *a*) алюміній *b*) реакторна сталь

На рис. 3-5 відповідно приведено області пластичних деформацій ε_{xx}^{p}, ε_{yy}^{p}, ε_{xy}^{p}, що виникають в зоні вістря тріщини в момент, коли $K_{\text{I}} = 108{,}7$ МПа$\sqrt{\text{м}}$, рис. *a*) стосується випадку зразків з алюмінію, рис. *b*) – зразків з реакторної сталі. Зона пластичних деформацій розташовується приблизно під кутом 45° справа і зліва від вістря тріщини, максимальні пластичні деформації виникають безпосередньо біля її вістря. У випадку реакторної сталі (більш твердого матеріалу) значення пластичних деформацій приблизно в чотири рази менше аніж для алюмінія при цьому ширина пластичної області у випадку *a*) на 25% більше ніж у випадку *b*), а висота майже однакова. Пластичні деформації ε_{yy}^{p} найменші за величиною, пластичні деформації ε_{xx}^{p} і ε_{xy}^{p} мають однаковий порядок.

Висновок

На основі розв'язування задачі плоского деформованого стану для матеріалу з поперечним перерізом у формі прямокутника з пропиломтріщиною посередині у динамічній пружно-пластичній постановці із урахуванням процесу розвантаження показано, що чим менше відношення модулів зсуву і об'ємного стиску, тим більше пластичні деформації.

Список використаних джерел

1. *Kubenko V. D.* Non Stationary Indentation of the Flat Hard Body in the Surface of Elastic Layer // Dopovidi Nac. Akad. Nauk. – 2007. – N 4. – P. 58-65. (in Ukrainian).
2. *Kubenko V. D.* An Axisymmetric Problem of Non Stationary Indentation of the Flat Hard Body in the Surface of Elastic Layer // Dopovidi Nac. Akad. Nauk. – 2008. – N 1. – P. 58-67. (in Ukrainian).
3. *Kubenko V. D., Popov S. N.* A Plane Problem of The Impact of Hard Flat Body Against Surface of Elastic Halfspace // Pricl. Mechanika. – 1988. – V. 24. – N 7. – P. 69-77. (in Russian).
4. *Popov S. N.* A Vertical Impact of Round Hard Cylinder by Lateral Surface with An Elastic Halfspace // Pricl. Mechanika. – 1989. – V. 25. – N 12. – P. 41-47. (in Russian).
5. *Kubenko V.D., Gavrilenko V.V., Tarlakovskii D.V.* Motion of the Non Stationary Strain on the Surface of Elastic Layer // Dopovidi Nac. Akad. Nauk. – 2008. – N 1. – P. 59-65. (in Ukrainian).
6. *Medvedskii A. L., Tarlakovskii D. V.* Non Stationary Contact of Not Deformed Imperfect Striker with An Elastic Halfplane at the Supersonic Sector of Penetration // Vestnik MAI. – 2011. – V. 18. – N6. – P. 125-132. (in Russian).
7. *Nemirovskii Yu.V., Romanova T. P.* Dynamical Strength of the Plane Plastic Bodies. – Novosibirsk: Akademicheskoe izdatel'stvo «Geo», 2009. – 311 p. (in Russian).
8. *Bogdanov V. R., Sulym G. T.* About plane problem of deformation state of material under dynamical loading with counting plastic-elastic deformations // Donec'k, Teor. and Pricl. Mech. – 2010. –N 47. – P. 59-66. (in Russian).
9. *Bohdanov V. R., Sulym H. T.* Evaluation of crack resistance based on the numerical modelling of the plane strained state // Material Sciences. – 2011. – V. 46, N 6. – P. 723-734.
10. *Bogdanov V. R., Sulym G. T.* The clevage crack simulation based on the numerical modeling of the plane deformation state // Scientific collection «Problems of Calculation Mechanics and Constructions Strength», Dnepropetrovsk. – 2011. – N 15. – P. 33-44. (in Russian).
11. *Sbornik*, Theory of Plasticity. – Moscow: Inostrannaja Literatura, 1948. – 460 p. (in Russian).
12. *Arkulis G. Je., Dorogobid V. G.* Theory of Plasticity. – Moscow: Metallurgija, 1987. – 352 p. (in Russian).
13. *Mahnenko V. I.* A Calculation Methods of Investigation of Kinetic of Welded Stresses and Deformations. – Kiev: Naukova dumka, 1976. – 320 p. (in Russian).
14. *Savruk M. P.* Mechanics of Destruction and strength of the Materials, Stress Intensity Factors of Bodies with Cracks. – Kiev: Naukova dumka, 1988. – V. 2. – 620 p. (in Russian).
15. *Hamming R. W.* Numerical methods for scientists and engineers, 2d ed. – New York: McGraw-Hill, 1973. – 721 p.
16. *Zjukina E. L.* Conservative Schemas of Differences on The Not Uniformed Grid for Two Dimension Wave Equation // Trudy matematicheskogo centra im. N. I. Lobachevskogo. – Kazan', 2004. – V. 26. – P. 151-160. (in Russian).

Надійшла до редколегії 15.10.12

УДК 539.3

Вайсфельд Н. Д.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Мойсєєнок О. П.[1], к. ф.-м. н.

Антиплоска деформація клиношаруватого середовища

В роботі побудовано розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності для клиношаруватого середовища за допомогою застосування інтегрального перетворення Мелліна безпосередньо до рівняння Лапласа. Отриману у просторі трансформант одновимірну граничну задачу розв'язано точно. Схему розв'язання деталізовано для деяких часткових випадків поставленої задачі.

Ключові слова: клиношарувате середовище, інтегральне перетворення Мелліна, рекурентна формула.

[1] Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 65023, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
e-mail: vaysfeld@onu.edu.ua, yogan@ua.fm

N. D. Vaysfel'd[1], Dr. Sci. (Phys. -Math.), Prof.,
A. P. Moysyeyenok[1], PhD (Phys. -Math.)

The antiplane deformation of the wedge-layered medium

The solution of the elasticity antiplane problem for the wedge-layered medium through the use of the Mellin integral transformation directly to the Laplace equation is constructed. The one-dimensional boundary problem is solved exactly in the transformation's space. The specification of the solving procedure is done for some special cases of the stated problem.

Key Words: wedge-layered medium, Mellin integral transformation, recurrent formula.

[1] I. I. Mechnikov National University of Odessa, 65023, Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: vaysfeld@onu.edu.ua, yogan@ua.fm

Вступ

Широке застосування функціонально-градієнтних, композиційних матеріалів в інженерії спонукає багатьох вчених до вивчення напруженого стану неоднорідних середовищ, оцінки концентрації напружень у місцях стикування різнорідних шарів. Суттєвий внесок у розвиток математичних методів розв'язання задач для клиноподібних областей внесли В. М. Александров, С. А. Лутченко, Б. І. Сметанін, В. Г. Койтер. Розвиток теорія набула у працях Б. В. Будаєва, В. М. Бабіча, D. V. Body, A. N. Noris.

Антиплоский зсув усередині клиноподібного середовища досліджено у працях В. А. Бабешка, В. М. Берковича, Є. Г. Іванова, П. Я. Уфімцева, В. Д. Ламзюка.

Антиплоску задачу про усталені коливання складеного клиноподібного середовища із двох різних пружних матеріалів розв'язано у докторській дисертації А. Ф. Улітка [1]. У працях В. І. Острика розглянуто задачу про контактну взаємодію двох пружних клинів [2]. В останній час у працях В. А. Бабешка [3] запропоновано підхід до розв'язання задач для неоднорідних середовищ на основі подальшого розвинення метода факторизації у зв'язку з дослідженням та застосуванням теорії блочних структур. Новий метод розв'язання задач для функціонально-градієнтних середовищ розвинуто у працях С. М. Айзиковича [4].

У працях Г. Я. Попова [5, 6] запропоновано новий метод розв'язання задач для шаруватих середовищ. Його суть полягає у застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до рівнянь Ламе (на відміну від застосування до зображень їх розв'язків через гармонічні та інші функції, як це робиться традиційно). У просторі трансформант будується точний розв'язок задачі. Цей метод застосовується для розв'язання антиплоскої задачі теорії пружності для клиношаруватого середовища.

Постановка задачі

Розглядається антиплоска деформація клиношаруватого середовища, яке описується у полярній системі координат співвідношеннями

$$0 < r < \infty, \quad \omega_0 \le \varphi \le \omega_n. \qquad (1)$$

Кожному із клиноподібних шарів $0 < r < \infty$, $\omega_j \le \le \varphi \le \omega_{j+1}$ ($j = \overline{0, n-1}$) відповідає власний модуль зсуву G_j та коефіцієнт Пуассона μ_j ($j = \overline{1, n}$).

© Н. Д. Вайсфельд, О. П. Мойсєєнок, 2013

Уздовж границь контакту шарів виконано умови спряження

$$W_j(r, \omega_{j-1}) = W_{j-1}(r, \omega_{j-1}),$$
$$r\tau_{\varphi z}^{(j)}(r, \omega_{j-1}) = r\tau_{\varphi z}^{(j-1)}(r, \omega_{j-1}), \quad j = \overline{2, n}. \qquad (2)$$

Тут індекс j відповідає номеру шару, $W_j(r, \varphi) = u_z^{(j)}(r, \varphi)$ – переміщення j-го шару, що задовольняють рівняння

$$r[rW_j'(r, \varphi)]' + W_j^{\bullet\bullet}(r, \varphi) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

На зовнішніх гранях задані дотичні напруження

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}\Big|_{\varphi=\omega_0} = q(r), \quad \tau_{\varphi z}^{(n)}\Big|_{\varphi=\omega_n} = \tilde{q}(r), \qquad (4)$$

причому $q(r) = 0$, $\tilde{q}(r) = 0$, якщо $0 \le r \le a$, $b \le r < \infty$ $(0 \le a < b)$.

Потрібно визначити поле переміщень та напружень середовища (1), що задовольняє граничній задачі (2) – (4).

Зведення вихідної задачі до одновимірної та побудова її точного розв'язку

До рівняння (3) застосуємо інтегральне перетворення Мелліна

$$W_j^{(s)}(\varphi) = \int_0^\infty r^{s-1} W_j(r, \varphi) dr \qquad (5)$$

з формулою оберненого перетворення

$$W_j(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} r^{-s} W_j^{(s)}(\varphi) ds. \qquad (6)$$

Загальний розв'язок рівняння (3) у просторі трансформант Мелліна має вигляд

$$W_j^{(s)}(\varphi) = C_j^0(s)\sin s\varphi + C_j^1(s)\cos s\varphi, \qquad (7)$$

де $C_j^0(s)$, $C_j^1(s)$ $(j = \overline{1, n})$ – невідомі сталі кожного шару.

Переформулюємо у термінах переміщень другу умову спряження (2) та крайові умови (4), після чого застосуємо до них інтегральне перетворення (5):

$$G_1\left(W_1^{(s)}(\omega_0)\right)' = q_s, \quad G_n\left(W_n^{(s)}(\omega_n)\right)' = \tilde{q}_s, \qquad (8)$$

$$\begin{bmatrix} q_s \\ \tilde{q}_s \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} q(r) \\ \tilde{q}(r) \end{bmatrix} r^{s-1} dr,$$

$$W_j^{(s)}(\omega_{j-1}) = W_{j-1}^{(s)}(\omega_{j-1}),$$
$$G_j W_j'^{(s)}(\omega_{j-1}) = G_{j-1} W_{j-1}'^{(s)}(\omega_{j-1}), \ j = 2, 3, ..., n. \qquad (9)$$

Підставимо до умов спряження (9) переміщення, що визначені за формулою (7), та введемо матриці та вектори

$$\mathbf{G}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_j(s) = \begin{pmatrix} \sin s\omega_j & \cos s\omega_j \\ s\cos s\omega_j & -s\sin s\omega_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\vec{q}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ q_s \end{pmatrix}, \ \vec{\tilde{q}}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{q}_s \end{pmatrix}, \ \vec{C}_j(s) = \begin{pmatrix} C_j^0(s) \\ C_j^1(s) \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

За допомогою позначень (10) умови спряження та крайові умови матимуть вигляд

$$\begin{cases} \mathbf{G}_j \mathbf{R}_{j-1}(s)\vec{C}_j(s) = \mathbf{G}_{j-1}\mathbf{R}_{j-1}(s)\vec{C}_{j-1}(s), \ j = 2, 3, ..., n, \\ G_1 \mathbf{R}_1^0(s)\vec{C}_1(s) = \vec{q}_s, \\ G_n \mathbf{R}_n^0(s)\vec{C}_n(s) = \vec{\tilde{q}}_s, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_j^0(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s\cos s\omega_j & -s\sin s\omega_j \end{pmatrix}, \ j = 1, n. \qquad (11)$$

Із системи (11) за схемою, що вперше запропонована у [5], встановлено рекурентну залежність

$$\vec{C}_j(s) = \mathbf{\Omega}_{j-1}(s)\mathbf{R}_{j-1}(s)\vec{C}_{j-1}(s), \qquad (12)$$

$$\vec{C}_1(s) = \left[\mathbf{R}_1^0(s)\right]^{-1} \mathbf{G}_1^{-1}\vec{q}_s, \qquad (13)$$

$$\vec{C}_n(s) = \left[\mathbf{R}_n^0(s)\right]^{-1} \mathbf{G}_n^{-1}\vec{\tilde{q}}_s. \qquad (14)$$

Тут $\mathbf{\Omega}_{j-1}$ – матриця порядку 2×2, що визначається за формулою

$$\mathbf{\Omega}_j(s) = \left[\mathbf{R}_j(s)\right]^{-1} \mathbf{G}_j^{-1}\mathbf{G}_{j-1}. \qquad (15)$$

Після підстановки співвідношення (13) до рекурентної формули (12), отримано подання вектора $\vec{C}_2(s)$; далі, діючи за рекурентною формулою (12), отримано остаточно

$$\vec{C}_j(s) = \mathbf{\Phi}_j(s)\vec{C}_1(s),$$
$$\mathbf{\Phi}_j(s) = \prod_{k=1}^{j-1} \mathbf{\Omega}_k(s)\mathbf{R}_k(s), \qquad (16)$$

де $\mathbf{\Phi}_j(s)$ – матриця порядку 2×2.

Після застосування подання (13), (14) до крайових умов отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих сталих $C_1^0(s)$, $C_1^1(s)$, $C_n^0(s)$, $C_n^1(s)$:

$$\begin{cases} C_n^0(s) = \Phi_n^{1,1}(s)C_1^0(s) + \Phi_n^{1,2}(s)C_1^1(s), \\ C_n^1 = \Phi_n^{2,1}(s)C_1^0(s) + \Phi_n^{2,2}(s)C_1^1(s), \\ sG_1C_1^0(s)\cos\omega_0 s - sG_1C_1^1(s)\sin\omega_0 s = q_s, \\ sG_nC_n^0(s)\cos\omega_n s - sG_nC_n^1(s)\sin\omega_n s = \tilde{q}_s, \end{cases} \quad (17)$$

де $\Phi_n^{k,l}(s)$ – відповідні компоненти матриці (16).

Розв'язок вихідної задачі визначається формулами

$$W_j(r, \varphi) = \int_a^b \Phi(r, \rho, \varphi)\, d\rho,$$

$$\Phi(r, \rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{W_j^{(s)}(\varphi)}{\Delta(s)}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} ds, \quad (18)$$

де $\Delta(s)$ – визначник системи лінійних алгебричних рівнянь (17), $W_j^{(s)}(\varphi)$ визначається за формулою (7) з урахуванням (12) – (14). Для того, щоби обчислити інтеграл (18), потрібно застосувати теорему про лишки, для чого відшукати нулі s_j знаменника $\Delta(s)$. Корені відповідного рівняння є полюсами підінтегральної функції (18), отже, використовуючи лему Жордана, за теоремою про лишки остаточно маємо формулу, що визначає переміщення *j*-го шару. Перші декілька значень коренів отримано наближеними числовими методами за допомогою пакету MAPLE 13. Решта значень отримана за допомогою асимптотичної формули для коренів трансцендентного рівняння за схемою, що наведена у роботі [2].

Деталізація запропонованого методу для деяких частинних випадків

1. Розглянемо вихідну задачу без врахування шаруватості середовища. Така задача у антиплоский постановці розглядалась раніше у багатьох роботах. У такому випадку потрібно відшукати розв'язок крайової задачі (3), (4), де у співвідношені (3) вилучити індекс *j*. Розв'язок будується за допомогою інтегрального перетворення (5) за формулами (7) (де потрібно також вилучити індекс *j*). З урахуванням граничних умов (8) отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (17) (без урахування перших двох рівнянь, а у останньому рівнянні індекс «*n*» потрібно замінити на індекс «1»). Остаточно за формулою (18) отримаємо розв'язок вихідної задачі без урахування шаруватості середовища.

2. Розглянемо випадок двошарового клинового середовища. У загальних формулах потрібно взяти $n = 2$. Після застосування викладеної вище схеми розв'язання остаточно отримаємо формулу (18), де асимптотика коренів трансцендентного рівняння визначена за схемою роботи [2]:

$$s_j = \begin{cases} -\dfrac{2\pi j}{\omega_0} + O(1), & \omega_0 > \omega_1, \\ -\dfrac{2\pi j}{\omega_1} + O(1), & \omega_0 < \omega_1. \end{cases}$$

Обговорення числових результатів

Становить інтерес розглянути значення напружень $\tau_{\varphi z}(r, \varphi)$ і $\tau_{rz}(r, \varphi)$, що виникають на ортогональних ділянках за різних кутів у точках прикладання навантаження. Результати числових досліджень наведені для наступних вихідних даних: $\omega_0 = \pi/6$, $\omega_1 = \pi/4$, $\omega_2 = \pi/2$, $G_1/G_2 = 1/10$, $q_1 = r$, $\tilde{q}_2 = r$, $a = 5$, $b = 10$.

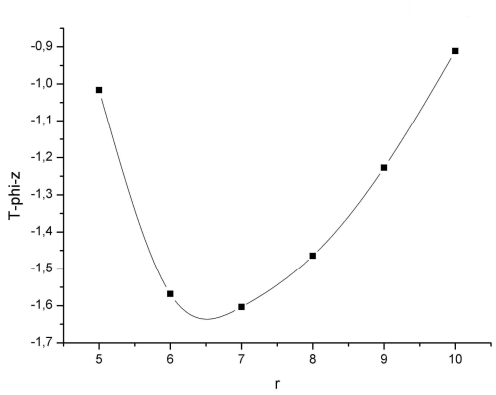


Рис. 1

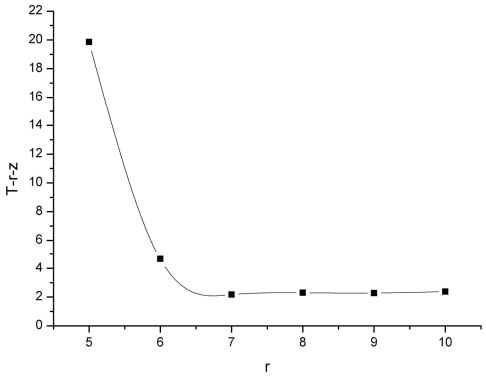


Рис. 2

На рис. 1 та рис. 2 наведено графіки напружень $\tau_{\varphi z}(r, \varphi)$, $\tau_{rz}(r, \varphi)$ уздовж лінії дії навантаження. На рис. 1 наведено значення напружень

$\tau_{\varphi z}(r,\varphi)$. З цього рисунка видно, що на проміжку, де прикладене навантаження, напруження за абсолютними значеннями сягають максимуму. На рис. 2 представлено значення напружень $\tau_{rz}(r,\varphi)$. Тут видно, що значення напружень сягають найбільших значень на початковій точці проміжку, де діє навантаження, потім значення прямують до деякої сталої величини. Відзначимо, що значення напружень $\tau_{rz}(r,\varphi)$ більші, ніж значення напружень $\tau_{\varphi z}(r,\varphi)$. Також встановлено, що при зміні значень модулів зсуву, напруження змінюються пропорційно до цієї зміни.

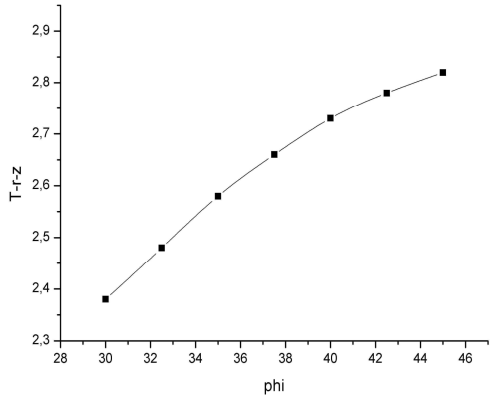


Рис. 3

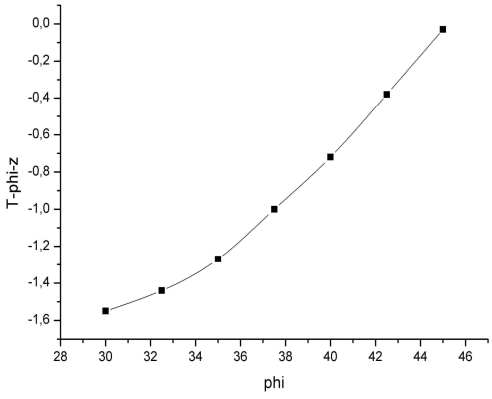


Рис. 4

На рис. 3 і рис. 4 наведені значення напружень $\tau_{\varphi z}(r,\varphi)$ та $\tau_{rz}(r,\varphi)$ в залежності від зміни значень кута розхилу φ. На обох графіках видно, що із збільшенням цієї величини відбувається збільшення значень напружень.

Висновки

1. Розв'язано антиплоску задачу для клиношаруватого середовища на основі застосування інтегрального перетворення Мелліна безпосередньо до рівняння Лапласа (а не до зображень розв'язку через гармонічні чи інші функції, як це робиться традиційно).

2. У просторі трансформант завдяки введенню матричного формулювання умов спряження та граничних умов, побудовано рекурентну формулу, що зв'язує невідомі сталі загального розв'язку, яка не залежить від кількості шарів.

3. Проведено реалізацію запропонованого підходу для деяких окремих випадків – відсутності шаруватості, двошарового середовища.

4. Запропонований підхід надає можливість отримати розв'язок плоскої задачі для клиношаруватого середовища.

Список використаних джерел

1. *Ulitko A. F.* The vector's expansion in the spacial elasticity theory. – Kiev: Akademperiodika, 2002. – 341 p. (in Russian).
2. *Ostrik V. I., Ulitko A. F.* The Wiener – Hopf method in the contact problems. – Kiev: Naukova Dumka, 2006. – 328 p. (in Russian).
3. *Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V.* Integral method for factoring in mixed problems for anisotropic media // DAN. – 2009. – V. 426, No 4. – P. 471-475. (in Russian).
4. *Ayzikovich S. M., Alexandrov V. M., Vasiliev A. S., Krenev L. I., Trubchik I. S.* Analytical solutions of mixed problems for axisymmetric functionally graded media. – Moscow: Fizmatlit, 2011. – 192 p. (in Russian).
5. *Popov G. Ya.* To the solution of boundary value problems of mechanics and mathematical physics for layered media // Izv. Akad. Nauk Arm. SSR. – 1978. – V. 31, No 2. – P. 34-47. (in Russian).
6. *Popov G. Ya.* The concentration of elastic stresses near the stamps, incisions, thin inclusions and reinforcements. – Moscow: Nauka, 1982. – 344 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Вайсфельд Н. Д.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Реут А. В.[1], аспирант

Осесимметричная смешанная задача теории упругости для полого дважды усеченного конуса

Построено точное решение осесимметричной смешанной задачи теории упругости для дважды усеченного кругового полого конуса с учетом его собственного веса. Предполагается, что по коническим поверхностям заданы условия гладкого контакта. По сферическим поверхностям заданы условия первой основной задачи теории упругости. Применение интегрального преобразования Попова по меридиональному углу сводит задачу в пространстве трансформант к одномерной, которая формулируется в виде векторной краевой задачи. Последняя решается точно с помощью аппарата матричного дифференциального исчисления. Применение обратного преобразования завершает построение решения исходной задачи. Проведен численный анализ нормальных напряжений на конических поверхностях с целью установить наличие зон отрыва и условия их появления.

Ключевые слова: полый конус, осесимметричная задача, собственный вес.

[1] Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, 65026, г. Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: vaysfeld@onu.edu.ua, a.reut@onu.edu.ua

N. D. Vaysfeld[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
A. V. Reut[1], PhD student

The axisymmetrical mixed elasticity problem for the hollow twice truncated cone

The exact solution of the axisymmetrical mixed elasticity problem for the twice truncated hollow elastic cone is constructed. It is supposed that the conditions of the smooth contact are fulfilled on the conical surfaces. On the spherical surfaces conditions of the first main elasticity problem are given. The application of the Popov's integral transformation with regard to the meridial angle reduces the problem to the one-dimensional one, which is formulated as the vector boundary problem. The last one is solved exactly. The inversion of the integral transformation finishes the construction of the stated problem's solution. The numerical analyze of the normal stress on the conical surface is done with the aim to find the existence and conditions of the separation zones occurrence.

Key Words: hollow cone, axisymmetrical problem, proper weight.

[1] Odessa National Mechnikov University,
65026, Odessa, 2 Dvoryanska Street
e-mail: vaysfeld@onu.edu.ua, a.reut@onu.edu.ua

Введение

Исследованию напряженного состояния тел конической формы посвящено достаточно много работ. Так, общее решение осесимметричных граничных задач для усеченного конуса получено в [1]. Однородные решения для конуса рассмотрены в [2]. Ряд решений краевых задач для конусов при различных граничных условиях на торцах конуса и конической поверхности приведены в [3-5]. В [6, 7] предполагалось, что на конической поверхности считаются выполненными либо условия сцепления, либо условия гладкого контакта соответственно. Общее решение осесимметричных граничных задач для усеченного конуса получено в [8]. В постановке всех приведенных выше задач собственный вес тела не учитывался. В [9] построено решение осесимметричной задачи для сплошного конуса с учетом его собственного веса при выполнении условий гладкого контакта на конической поверхности. Решение получено методом, предложенным Г. Я. Поповым и базирующимся на применении новых интегральных преобразований [10] непосредственно к уравнениям Ламе с последующим сведением исходной задачи к векторной краевой задаче, решаемой точно с помощью аппарата матричного дифференциального исчисления. В предлагаемой задаче этот метод позволил получить точное решение осесимметричной смешанной задачи теории упругости для полого конуса с учетом его собственного веса при выполнении условий скользящей заделки на конических поверхностях.

© Н. Д. Вайсфельд, А. В. Реут, 2013

Постановка задачи

Рассматривается упругий (G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона) дважды усеченный полый конус, который занимает объем $a_0 < r < a_1$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$, $-\pi < \varphi < \pi$, здесь r, θ, φ – сферическая система координат. На конических поверхностях считаются выполненными условия скользящей заделки

$$u_\theta(r, \omega_i) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \omega_i) = 0; \quad i = 0, 1; \quad a_0 < r < a_1. \tag{1}$$

На сферических гранях выполнены условия первой основной задачи теории упругости

$$\sigma_r(a_i, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a_i, \theta) = 0; \quad i = 0, 1; \quad \omega_0 < \theta < \omega_1. \tag{2}$$

Смещения $u \equiv u_r(r, \theta)$, $v \equiv u_\theta(r, \theta)$ удовлетворяют уравнениям Ламе [7]

$$(r^2 u')' - 2u - \frac{1}{\mu_*}\frac{(\sin\theta u^{\cdot})^{\cdot}}{\sin\theta} - \frac{\mu_{**}}{\mu_*}\frac{(\sin\theta v)^{\cdot}}{\sin\theta} + \frac{\mu_0}{\mu_*}\frac{(\sin\theta v')^{\cdot}}{\sin\theta} = \frac{2r^2}{\mu_*}\gamma\sin\theta,$$

$$(r^2 v')' + \mu_*\left[\frac{(\sin\theta v^{\cdot})^{\cdot}}{\sin\theta} - \frac{v}{\sin^2\theta}\right] + \mu_0 r u'^{\cdot} + 2\mu_* u^{\cdot} = -2r^2\gamma\sin\theta, \tag{3}$$

где $\mu_0 = (1-2\mu)^{-1}$, $\mu_* = \mu_0 + 1$, $\mu_{**} = \chi\mu_0$, $\chi = 3 - 4\mu$, γ – удельный вес материала конуса; штрих над символом обозначает производную по первой переменной, а точка – по второй. Требуется определить напряженное состояние конуса.

Сведение задачи к одномерной векторной краевой задаче

Применим к уравнениям равновесия (3) интегральное преобразование Попова [10] по схеме

$$U_k(r) = \int_{w_0}^{w_1} y_*(\theta, \nu_k) u(r, \theta)\, d\theta,$$

$$V_k(r) = \int_{w_0}^{w_1} y(\theta, \nu_k) v(r, \theta)\, d\theta \tag{4}$$

с формулами обращения

$$u(r, \theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} U_k(r)(2\nu_k + 1)\left[S_\nu \frac{\partial\Omega_\nu}{\partial\nu}\right]\Bigg|_{\nu=\nu_k}^{-1} y_*(\theta, \nu_k),$$

$$v(r, \theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} V_k(r)\frac{2\nu_k + 1}{\nu_k(\nu_k + 1)}\left[S_\nu \frac{\partial\Omega_\nu}{\partial\nu}\right]\Bigg|_{\nu=\nu_k}^{-1} y(\theta, \nu_k). \tag{5}$$

Тут приняты обозначения

$$S_\nu(\cos\theta) = P_\nu^1(\cos\omega_1) / P_\nu^1(\cos\omega_0)$$

$$y(\theta, \nu) = P_\nu^1(\cos\theta) Q_\nu^1(\cos\omega_1) - P_\nu^1(\cos\omega_1) Q_\nu^1(\cos\theta),$$

$$y_*(\theta, \nu) = P_\nu(\cos\theta) Q_\nu^1(\cos\omega_1) - P_\nu^1(\cos\omega_1) Q_\nu(\cos\theta).$$

Здесь $\nu = \nu_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, – корни трансцендентного уравнения

$$\Omega_\nu \equiv \Omega(\omega_0, \omega_1) \equiv P_\nu^1(\cos\omega_0) Q_\nu^1(\cos\omega_1) - P_\nu^1(\cos\omega_1) Q_\nu^1(\cos\omega_0) = 0. \tag{6}$$

В результате система уравнений Ламе (3) в пространстве трансформант примет вид

$$(r^2 U_k'(r))' - \mu_*^{-1}\mu_0 r V_k'(r) - (2 + \mu_*^{-1} N_k)\times U_k(r) + \mu_*^{-1}\mu_{**} V_k(r) = r^2 \tilde{q}_k,$$

$$(r^2 V_k'(r))^{\cdot} + \mu_0 N_k r U_k'(r) + 2\mu_* N_k \times U_k(r) - \mu_* N_k V_k(r) = -r^2 \tilde{p}_k,$$

$$N_k = \nu_k(\nu_k + 1), \quad \tilde{q}_k = \mu_*^{-1}\gamma\int_{w_0}^{w_1} \sin 2\theta\, y_*(\theta, \nu_k) d\theta,$$

$$\tilde{p}_k = 2\gamma\int_{w_0}^{w_1} \sin^2\theta\, y(\theta, \nu_k) d\theta.$$

Переформулируем краевые условия (2) в терминах смещений и применим к ним интегральное (4), предварительно проделав замену переменной

$$r = a_1\rho, \quad U_k(a_1\rho) = \tilde{u}_k(\rho), \quad V_k(a_1\rho) = \tilde{v}_k(\rho), \quad \alpha = a_0/a_1, \quad \alpha < \rho < 1,$$

$$(1-\mu)\tilde{u}_k'(\rho) + 2\mu\tilde{u}_k(\rho) - \mu\tilde{v}_k(\rho)|_{\rho=\alpha,1} = 0,$$

$$N_k\tilde{u}_k(\rho) + \tilde{v}_k'(\rho) - \tilde{v}_k(\rho)|_{\rho=\alpha,1} = 0. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение матрицы и векторы

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_*^{-1} \\ N & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2\mu & -\mu \\ N & -1 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 1-\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2-\mu_*^{-1} & \mu_*^{-1}\mu_{**} \\ 2\mu_* N & -\mu_* N \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}(\rho) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_k \\ \tilde{v}_k \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\rho) = (a_1\rho)^2 \begin{pmatrix} \tilde{q}_k \\ \tilde{p}_k \end{pmatrix}.$$

С их помощью сформулируем векторную краевую задачу

$$\begin{cases} L_2(\vec{y}(\rho)) = \vec{f}(\rho), & \alpha < \rho < 1, \\ V_i[\vec{y}] = 0, & i = 0, 1, \end{cases} \tag{8}$$

дифференциальный оператор и краевые функционалы которой имеют вид

$$L_2\vec{y} = I(\rho^2\vec{y}'(\rho))' + \mu_0\rho Q\vec{y}'(\rho) + P\vec{y}(\rho),$$
$$V_i[y] \equiv Ay(a_i) + By'(a_i) = 0,$$
$$i = 0, 1; \quad a_0 = \alpha, \quad a_1 = 1. \qquad (9)$$

Решение векторной одномерной краевой задачи

Прежде чем построить векторное решение уравнения (8), построим матричное решение однородного уравнения

$$L_2 Y(\rho) = 0, \quad \alpha < \rho < 1. \qquad (10)$$

Для этого подставим в уравнение (8) матрицу $Y(\rho) = \rho^s I$ (I – единичная матрица), что приведет к соотношению $L_2 Y(\rho) = \rho^s M(s)$, где $M(s)$ – матрица порядка 2×2. Решение уравнения тогда запишется в виде [11]:

$$Y(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \rho^s \frac{\tilde{M}(s)}{\Delta(s)} ds, \qquad (11)$$

где C – замкнутый контур, охватывающий полюса подынтегральной функции, которыми являются корни уравнения $\Delta(s) = 0$, $\Delta(s)$ – определитель матрицы $M(s)$, $\tilde{M}(s)$ – союзная матрица,

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + (2N_k + 1)s^2 -$$
$$-2(N_k + 1)s + N_k(N_k - 2) = \prod_{i=1}^{4}(s - s_i),$$
$$s_1 = \nu_k + 1, \quad s_2 = \nu_k - 1, \quad s_3 = -\nu_k, \quad s_4 = -\nu_k - 2.$$

Применим следующие обозначения

$$\Omega_k(s) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{s^k \rho^s}{\Delta(s)} ds, \quad k = 0, 1. \qquad (12)$$

Матрица $Y(\rho)$ в принятых обозначениях запишется в виде

$$Y(\rho) = \begin{pmatrix} \Omega_2(s) - \Omega_1(s) - & \mu_0\mu_*^{-1}\Omega_1 - \\ \quad -\mu_* N_k\Omega_0 & \quad -\mu_{**}\mu_*^{-1}\Omega_0(s) \\ -\mu_0 N_k\Omega_1 - & \Omega_2(s) + \Omega_1(s) - \\ \quad -2\mu_* N_k\Omega_0 & -(2 + \mu_*^{-1}N_k)\Omega_0(s) \end{pmatrix}.$$

Если в (12) подсчитать интегралы в простых полюсах $s_1 = \nu_k + 1$ и $s_2 = \nu_k - 1$, то получим решение $Y_0(\rho)$, растущее на бесконечности, при $s_3 = -\nu_k$, $s_4 = -\nu_k - 2$ – решение $Y_1(\rho)$, убывающее на бесконечности.

$$Y_0(\rho) = \rho^{\nu+1}R_{\nu+1}A_+(\nu) - \rho^{\nu-1}R_\nu B_+(\nu),$$
$$Y_1(\rho) = \rho^{-\nu}R_\nu A_-(\nu) - \rho^{-\nu-2}R_{\nu+1}B_-(\nu). \qquad (13)$$

Здесь

$$R_\nu = [2(4\nu^2 - 1)]^{-1}, \quad \mu_1 = [2(1 - \mu)]^{-1},$$
$$\nu = \nu_k \ (k = 1, 2, ...),$$
$$A_+(\nu) = \begin{pmatrix} 2(\nu + 1) - \mu_0 N_k & \mu_*^{-1}(\mu_0\nu_k - 2) \\ -\mu_0 N_k(\nu + k + 2) & \mu_1 N_k + 2\nu_k \end{pmatrix},$$
$$B_+(\nu) = \begin{pmatrix} -(\mu_0 N_k + 2\nu) & 2 - \mu_1\nu \\ \mu_0 N_k(\nu + \kappa) & -(2(\nu + 1) - \mu_1 N_k) \end{pmatrix},$$
$$A_-(\nu) = \begin{pmatrix} -\mu_0 N_k - 2\nu & -\mu_1(\nu + k) \\ \mu_0 N_k(\nu - 4(1 - \mu)) & \mu_1 N - 2(\nu + 1) \end{pmatrix},$$
$$B_-(\nu) = \begin{pmatrix} -(\mu_0 N_k - 2(\nu + 1)) & -\mu_1(\nu + k + 2) \\ N_k(\mu_0\nu - 2) & \mu_1 N_k + 2\nu \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Рассмотрим отдельно случай $k = 0$. Для данного случая $\nu_0 = 0$, т. е. ν_0 – собственное число лишь функции $P_\nu(\cos\theta)$, стало быть $P_0(\cos\theta) = 1$, $P_0^1(\cos\theta) = 0$. Отсюда вытекает, что $u_0(\rho) \neq 0$, тогда как $\nu_0(\rho) = 0$. В этом случае одномерная задача в пространстве трансформант упрощается:

$$\begin{cases} (\rho^2 u_0'(\rho))' - 2u_0(\rho) = a_1^2\rho^2\tilde{q}_0, \quad \alpha < \rho < 1, \\ (1 - \mu)u_0'(1) + 2\mu u_0(\alpha) = 0, \\ (1 - \mu)a u_0'(1) + 2\mu u_0(1) = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Неизвестные постоянные d_1 и d_2 общего решения уравнения (15)

$$u_0(\rho) = d_1\rho + \frac{d_2}{\rho^2} + \frac{a_1^2 q_0}{4}\rho^2 \qquad (17)$$

отыщем из краевых условий (15). Окончательно, решение для случая $k = 0$ примет вид

$$u_0(\rho) = -\frac{a_1^2 q_0}{2}\left(\alpha_1\rho + \alpha_2\rho^{-2} - \frac{\rho^2}{2}\right), \qquad (18)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{(\alpha^2 + 1)(\alpha + 1)}{\alpha^2 + \alpha + 1}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \alpha + 1}\frac{1}{2 - 4\mu}.$$

Теперь перейдем к случаю $k \geq 1$. Сформулированная векторная краевая задача (8) является полуоднородной, и потому ее решения можно строить несколькими способами: 1) с помощью матрицы Грина [12]; 2) с помощью отыскания частного решения векторного уравнения. Воспользуемся вторым способом, исходя из того, что в данном случае частное решение $u_k^*(\rho), \upsilon_k^*(\rho)$ можно построить пропорциональным правой части уравнения:

$$u_k^*(\rho) = D_k^1\rho^2, \quad \upsilon_k^*(\rho) = D_k^2\rho^2. \qquad (19)$$

Подставим представления (19) в уравнение (8), откуда найдем вид постоянных D_k^1, D_k^2 $(k=1,2,...)$:

$$D_k^1=\frac{\tilde{q}_k-D_k^2\mu_*^{-1}(\mu_{**}-2\mu_0)}{2-\mu_*^{-1}N_k},$$

$$D_k^2=\frac{\tilde{p}_k\eta_k^1-\tilde{q}_k\eta_k^2}{\Delta_k^1}, \qquad (20)$$

$$\Delta_k^1=\mu_*(N_k-12)(N_k-2),$$

коэффициенты η_k^1, η_k^2 не приводятся в связи с громоздкостью выражений. Частное решение векторного уравнения построено:

$$\vec{y}_k^*(\rho)=\begin{pmatrix}D_k^1\\D_k^2\end{pmatrix}\rho^2.$$

Общее решение векторного уравнения (2) принимает вид

$$\vec{y}_k(\rho)=Y_0(\rho)\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}+Y_1(\rho)\begin{pmatrix}C_3\\C_4\end{pmatrix}+y_k^*(\rho). \qquad (21)$$

Неизвестные постоянные C_i, $i=\overline{1,4}$, найдем, удовлетворив краевым условиям в (8). Таким образом, решение векторной одномерной краевой задачи построено в пространстве трансформант точно.

Обращение полученного решения

Для построения окончательного решения поставленной задачи применим к компонентам вектора решения (21) обратные преобразования (5) соответственно, учитывая, что во второй формуле следует суммировать ряд, начиная с единицы. При проведении суммирования следует использовать удобную для этого формулу вычисления производной по порядку от функции Лежандра

$$\frac{\partial P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\partial\nu}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\Gamma(1/2+\mu)\sin^\mu\theta\right]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^\theta(\cos\varphi-\cos\theta)^{\mu-1/2}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\times$$
$$\times\Big[\big(\Psi(\nu-\mu+1)-\Psi(\nu+\mu+1)\big)\times$$
$$\times\cos\big(\varphi(\nu+1/2)\big)-\varphi\sin\varphi(\nu+1/2)\Big]d\varphi. \qquad (22)$$

Для больших значений ν получена асимптотическая формула путем использования формул асимптотического поведения функций $\Gamma(z)$ и $\Psi(z)$ при больших значения аргумента [13]:

$$\frac{\partial P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\partial\nu}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\Gamma(1/2+\mu)\sin^\mu\theta\right]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^\theta\frac{(\cos\varphi-\cos\theta)^{\mu-1/2}}{\nu^{2\mu}}\left[\frac{2}{(\nu+1)^2-\mu^2}\cos\big(\varphi(\nu+1/2)\big)+\right.$$
$$\left.+4\varphi\sin\varphi(\nu+1/2)\right]d\varphi. \qquad (23)$$

Следует указать, что в случае общего вида векторной краевой задачи (8) для точного решения необходимо построить матрицу Грина $G_k(\rho,\xi)$. Для этого предварительно следует найти фундаментальную матрицу $\Phi_k(\rho,\xi)$, с помощью которой решение неоднородного векторного уравнения можно для любого вида правой части записать в виде $\vec{y}_k(\rho)=\int_\alpha^1\Phi_k(\rho,\xi)\vec{f}_k(\xi)d\xi$. Для построения такой матрицы правая часть векторного уравнения продлевается нулем вне интервала $(\alpha,1)$, после чего к уравнению применяется интегральное преобразование Меллина. Решив полученное алгебраическое уравнение и обратив трансформанты, найдем решение векторного уравнения и, тем самым, отыщем фундаментальную матрицу $\Phi_k(\rho,\xi)$. Далее согласно методу решения, предложенного в [7], находим базисную матричную систему решений $\Psi_j(\rho)$, $j=0,1$:

$$\begin{cases}L_2(\Psi_j(\rho))=0, & \alpha<\rho<1,\\ V_i[\Psi_j(\rho)]=\delta_{ij}I, & i=0,1,\end{cases}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, I – единичная матрица.

Располагая базисной матричной системой решений и фундаментальной матрицей, матрицу Грина можно найти по формуле [7]

$$G_k(\rho,\xi)=\Phi_k(\rho,\xi)+\sum_{j=0}^1\Psi_j(\rho)\Big(V_j\big(\Phi_k(\rho,\xi)\big)\Big)^{-1}.$$

В этом случае точное решение неоднородной векторной краевой задачи вида

$$\begin{cases}L_2(\vec{y}_k(\rho))=\vec{f}_k(\rho), & \alpha<\rho<1,\\ V_i[\vec{y}]=\chi_i(\rho), & i=0,1,\end{cases}$$

запишется в форме

$$\vec{y}_k(\rho)=\int_0^\infty G_k(\rho,\xi)\vec{f}_k(\xi)d\xi+\sum_{j=0}^1\Psi_j(\rho)\chi_j(\rho).$$

Результаты численного анализа

Было исследовано значение нормальных напряжений $\sigma_\theta(r,\theta)$ на конических поверхностях $\theta=\omega_i$, $i=0,1$, $a_0<r<a_1$ стального конуса. Це-

лью исследования было выявление зон возникновения растягивающих напряжений на поверхности и геометрических параметров конуса, при которых они возникают.

Результаты численного анализа показали, что при величине отношения радиусов a_1/a_0 меньшем, чем 4, растягивающие напряжения $\sigma_\theta(r,\theta)$ появляются на поверхностях при величине отношения углов ω_1/ω_0 меньшем, чем 1,5. При увеличении отношения a_1/a_0 растягивающие напряжения появляются уже при величине отношения ω_1/ω_0 меньшем, чем 3. Зона появления растягивающих напряжений расположена около сферической поверхности $r=a_1$, $\omega_0<\theta<\omega_1$, и ее длина увеличивается с увеличением величины отношения a_1/a_0.

Выводы

1. Построено точное решение задачи о напряженном состоянии полого упругого дважды усеченного конуса при выполнении условий гладкого контакта на конических поверхностях с учетом его собственного веса.
2. Проведено исследование нормальных напряжений на конических поверхностях с целью обнаружения зон отрыва и условий их возникновения.
3. Предложенный подход позволяет найти решение поставленной задачи, для случая, когда на сферических поверхностях конуса заданы ненулевые нормальные напряжения.

Список использованных источников

1. *Ulitko A. F.* The vectors' expansion in the space elasticity theory. Kiev: Akademperiodika, 2002. – 341 p. (in Russian).
2. *Nuller B. M.* To the solving of the elasticity problems for the truncated cone // Izvestiya AN SSSR. – 1967. – N 5. – P. 146-151. (in Russian).
3. *Khomsuridze N. G.* The thermoelastic equilibrium of the conical bodies // Prikladnaya matematika i mechanica. – 2003. – V. 67, iss. 3. – P. 124-133. (in Russian).
4. *Thompson T. R.* End effects in a truncated semi-infinite cone // Quart. J. Mech. Appl. Math. – V. 23, iss. 2. – 1970. – P. 185-196.
5. *Kamran Asemi.* Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads // Acta Mechanica. – V. 217, iss.1-2. – 2011. – P. 119-134.
6. *Vaysfeld N. D.* The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the fixed through the lateral surface cone with spherical segment / *N. D. Vaysfeld, G. Ya. Popov, V. V. Reut* // Prikladnaya matematika i mechanica. – 2013. – V. 77, iss.1. – P. 102-112. (in Russian).
7. *Popov G. Ya.* The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the truncated circular hollow cone // Prikladnaya matematika i mechanica. – 2000. – V. 64, iss. 3. – P. 431-443. (in Russian).
8. *Popov G. Ya.* On the axisymmetrical problems of elasticity for the truncated hollow cone // Prikladnaya matematika i mechanica. – 2005. – V. 69, iss. 3. – P. 458-468. (in Russian).
9. *Vaysfeld N. D.* The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the truncated circular cone with edge with regard of its proper weight / *N. D. Vaysfeld, A. V. Reut* // Vestnik Odesskogo Universiteta. Matematika I Mechanica. – 2012. – V.17, iss. 3. – P. 99-107. (in Russian).
10. *Popov G. Ya.* On the one method of the integral transformations obtaining with the application to the exact solution of the boundary problems of mathematical physics construction // Mat. Metody I Fiz.-Mech. Polya. – 2003. – V. 46, N 3. – P. 74-89. (in Russian).
11. *Gantmakher R. F.* The matrix theory. Moscow: Nauka, 1967. – 576 p. (in Russian).
12. *Popov G. Ya., Abdymanapov S. A., Efimov V. V.* The Green's functions and matrixes of the onedimensional boundary problems. Almaty: Ruan, 1998. – 106 p. (in Russian).
13. *Beytmen G., Erdelye A.* The higher transcendental functions. – Moscow: Nauka, 1967. – 576 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13

УДК 534.2

Вовк І. В.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Коновалюк Т. П.[1], м. н. с.

Особливості динаміки звукового поля при взаємодії точкових вихорів

В рамках моделі точкових вихорів та акустичної аналогії Лайтхіла виконано чисельні розрахунки та аналіз звукових полів, що генеруються трьома точковими вихорями в необмеженій ідеальній рідині при прямій та обмінній взаємодіях. Встановлено співвідношення між поворотом діаграми напрямленості звукового поля в процесі взаємодії вихорів та поворотом вихорової системи.

Ключові слова: точкові вихорі, поворот діаграми напрямленості, поворот вихорової системи.

[1] Інститут гідромеханіки НАНУ,
01057, м. Київ, в. Желябова, 8/4
e-mail: ivovk@voliacable.com, tpk_8_4@ukr.net

I. V. Vovk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
T. P. Konovalyuk[1], jun. res.

The features of the dynamics of the sound field during the point vortex interaction

Within the frameworks of the point vortex model and the acoustical Lighthill's analogy, the sound fields produced by the direct and exchange interactions of three point vortices in the ideal unbounded liquid are computed and analyzed. The relations between the directivity pattern rotation and the vortex system rotation during the vortex interaction are specified.

Key Words: point vortices, rotation of the directivity pattern, rotation of the vortex system.

[1] Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
01057, Kyiv, Zhelyabova str. 8/4
e-mail: ivovk@voliacable.com, tpk_8_4@ukr.net

1. Введение

Метод акустической аналогии Лайтхилла [1] является основой при моделировании явлений, связанных с излучением шума течениями различной геометрии. Подход, основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений (САР), стал применяться при решении задач данного класса благодаря попыткам ряда авторов формализовать теорию аэрогидродинамического шума [2]. Подход, основанный на САР, при числах Маха $M \ll 1$ дает такие же оценки излучаемой мощности, как и акустическая аналогия Лайтхилла, и позволяет с физической точки зрения объяснить асимптотику тензора напряжений Лайтхилла. Однако, данный подход, в отличие от аналогии Лайтхилла, ограничен требованием акустической компактности [2].

Анализ литературы показывает, что излучение звука вихревыми потоками – весьма сложная задача. Повысить уровень понимания физики таких явлений помогает исследование процесса звукообразования от модельных течений. Детально исследованной моделью вихревого течения является модель точечных вихрей [3]. Имеется большое количество работ, посвященных излучению звука точечными вихрями как в безграничной среде, так и при наличии границ [4].

Целью данной статьи является установление связей между поворотом звукового поля и поворотом вихревой системы, образованной тремя точечными вихрями в безграничной идеальной среде. При моделировании звукового поля воспользуемся акустической аналогией Лайтхилла.

2. Моделирование течения и звукового поля

Взаимодействие N точечных вихрей с интенсивностями κ_α и координатами x_α, y_α в безграничной идеальной среде описывается гамильтоновой системой уравнений [3]:

$$\kappa_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \kappa_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}; \quad \alpha = 1,\ldots,N, \quad (1)$$

с независящим явно от времени гамильтонианом H [3]. Кроме H, система (1) обладает еще тремя независимыми первыми интегралами [3], выражающими собой выполнение законов сохранения импульса и момента импульса течения, образованного вихрями. Подробный анализ системы (1) и обширная библиография по исследованию точечных вихрей содержатся, например, в [5, 6].

© І. В. Вовк, Т. П. Коновалюк, 2013

Как известно, задача о движении трех точечных вихрей в отсутствии границ является интегрируемой [5]. Рассмотрим вихревую систему, образованную вихрями с интенсивностями $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3 = \kappa$. В [7, 8] детально рассмотрены все возможные типы взаимодействия вихревой пары с одиночным вихрем. Автор [7] поместил начало координат в центр завихренности и пронормировал все линейные размеры таким образом, что $H \equiv 0$. Классификация взаимодействий данной вихревой системы была построена в зависимости от единственного отличного от нуля инварианта Λ, выражающего закон сохранения импульса, и начального радиуса одного из вихрей, например, ρ_1^0, взятого в качестве независимой переменной в решении [7]. Было найдено три типа взаимодействия: прямое взаимодействие, обменное взаимодействие и взаимный захват.

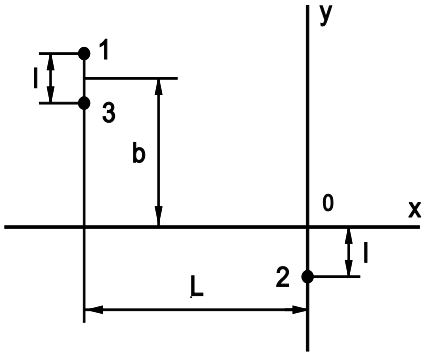


Рис. 1. Начальная геометрия модельного течения; 1,3 – падающая вихревая пара; 2 – одиночный вихрь

В данной статье рассмотрим звуковое поле в случаях прямого и обменного взаимодействий. В случае прямого взаимодействия вихревая пара 1,3 искривляет свою траекторию под действием возмущающего вихря 2, при этом целостность пары не нарушается. Результатом обменного взаимодействия есть образование новой вихревой пары 2,3 [8]. Нагляднее перейти от параметров Λ, ρ_1^0 к параметрам L, l, b (рис. 1). Полагая L и l постоянными для всех случаев, будем исследовать звуковое поле, порождаемое вихревыми взаимодействиями, в зависимости от параметра b. В исследуемой вихревой геометрии начало координат поместим в центр завихренности, все линейные размеры пронормируем таким образом, что $l = 1$, при этом в общем случае $H \neq 0$. Параметры Λ, ρ_1^0 и L, l, b связаны соотношениями:

$$\Lambda = \frac{(2b+l)l}{4B_{Gr}^2}, \quad (\rho_1^0)^2 = \frac{L^2 + (b+l/2)^2}{B_{Gr}^2}, \qquad (2)$$

где

$$B_{Gr}^2 = \frac{[L^2 + (b+l/2)^2]l^2}{L^2 + (b+3l/2)^2}.$$

Рассматривались следующие значения начальных геометрических параметров: $L = -20$; $l = 1$; $-10 \le b \le 10$. В данной классификации есть три граничных случая, разделяющие типы взаимодействия: $b = -1$; $b = -0{,}5$; $b = 3{,}41\ldots$.

Течения, формируемые вихрями в безграничной идеальной слабосжимаемой среде, порождают источники звука, являющиеся аналогом классических поперечных квадруполей [1]. Решение уравнения Лайтхилла в форме Пауэлла [4] с нулевыми начальными условиями и учетом предположений о компактности источника и дальнего поля для флуктуаций давления имеет вид [9]:

$$p'(\vec{x}, t) = -M^2 \int_0^{t-\rho} \frac{x_1^2 f_1(\tau) + x_2^2 f_2(\tau) + x_1 x_2 f_3(\tau)}{[(t-\tau)^2 - \rho^2]^{1/2}(t-\tau)^2} d\tau, \quad (3)$$

где

$$\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad x_1 = \rho\cos\theta, \quad x_2 = \rho\sin\theta,$$

$$f_1(\tau) = -\sum_{\beta=1}^{3} \kappa_\beta (y_{1\beta} y_{2\beta}')'', \quad f_2(\tau) = \sum_{\beta=1}^{3} \kappa_\beta (y_{2\beta} y_{1\beta}')'',$$

$$f_3(\tau) = -\sum_{\beta=1}^{3} \kappa_\beta (y_{2\beta}^2)''',$$

$y_{1\beta}(\tau), y_{2\beta}(\tau)$ и $y'_{1\beta}(\tau), y'_{2\beta}(\tau)$ – координаты и компоненты скорости вихря с номером β; x_1, x_2 и θ – координаты и угол точки наблюдения. Решение представлено в безразмерном виде. В качестве масштабов обезразмеривания были взяты; κ – масштаб интенсивности вихря; B – характерный линейный масштаб в области вихревого движения; B^2/κ – характерный временной масштаб; $U = \kappa/B$ – характерная скорость в области вихревого движения; $\lambda = BM^{-1}$ – характерный линейный масштаб в области излучения; $\rho_0 U^2/(2\pi)$ – характерный масштаб флуктуаций давления; ρ_0 – плотность в невозмущенной среде.

Отметим, что система дифференциальных уравнений (1) интегрировалась численно методом экстраполяции с переменным шагом и порядком, интегрирование в (3) выполнялось по квадратурным формулам, учитывающим интегрируемую особенность в точке $\tau = t - \rho$.

3. Анализ результатов расчета звукового поля

Результатом прямого и обменного взаимодействия есть излучение звукового импульса, частотные компоненты которого лежат в низкочастотной области [9]. Характер рассматриваемых вихревых взаимодействий таков, что вихри меняют взаимное расположение, при этом оси симметрии в системе отсутствуют. В результате в процессе вихревых движений имеет место вращение диаграммы направленности эквивалентного звукового квадруполя. Поэтому логично исследовать звуковое поле с учетом его вращения [10]. Установим связь между вращением звукового поля и вращением вихревой системы для характерных типов взаимодействия. С этой целью для заданного значения параметра b фиксировался опорный лепесток, на оси которого в каждый момент времени вычислялось звуковое давление в соответствии с (3) и определялась угловая координата оси. В качестве опорного выбирался лепесток, ось которого совпадала с направлением падения вихревой пары. Разность между конечной и начальной угловыми координатами оси опорного лепестка есть полный поворот диаграммы направленности для заданного значения $b-\Delta\theta_d$. Поворот вихревой системы определялся как поворот вихря 3 ($\kappa_3=-1$), поскольку вихрь 3 формирует как падающую, так и уходящую вихревые пары для всех исследуемых типов взаимодействия. Разность между конечной и начальной угловыми координатами вихря 3 есть полный поворот вихревой системы для заданного значения $b-\Delta\theta_3$.

Обобщение полученных численных результатов, связывающих поворот диаграммы направленности звукового поля и поворот вихревой системы, представлено на рис. 2 в виде графиков зависимости $\Delta\theta_d(b)$ и $\Delta\theta_3(b)$ от параметра b навременном интервале, соответствующем длительности излучаемого звукового импульса. Отметим, что в качестве положительного поворота принят поворот против часовой стрелки.

Римскими цифрами I-VI на рис. 2 обозначены характерные диапазоны изменения параметра b. Для случаев прямого взаимодействия – $b\in[-10;-1[\cup\,]3,41...;10]$ (области I и VI) – характерно вращение диаграммы направленности и вихревой системы в одном направлении: положительном (I) и отрицательном (VI). В области I полные повороты диаграммы направленности и

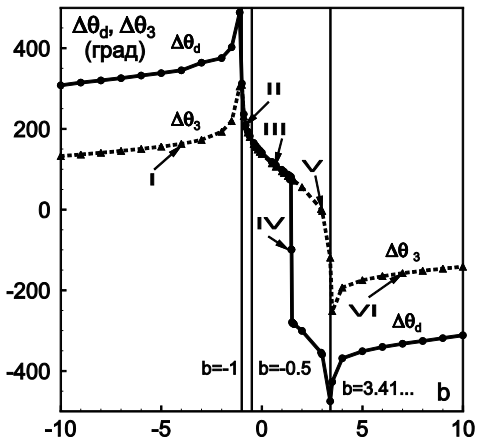


Рис. 2. Зависимость полного поворота диаграммы направленности $\Delta\theta_d(b)$ (сплошная кривая) и вихревой системы $\Delta\theta_3(b)$ (пунктирная кривая) от параметра b

вихревой системы связаны соотношением $\Delta\theta_d=$ $=\Delta\theta_3+180^0$; в области VI эта связь имеет вид $\Delta\theta_d=\Delta\theta_3-180^0$. Фаза звукового давления на лепестке постоянна. Таким образом, в случаях прямого взаимодействия поворот звукового поля опережает поворот вихревой системы на 180^0. В случае обмена $b\in]-1;-0,5[$ (область II) звуковое поле и вихревая система вращаются сходным образом; повороты звукового и вихревого полей равны между собой: $\Delta\theta_d=\Delta\theta_3$. Звуковое поле на лепестке диаграммы направленности фазу не меняет и вращается в положительном направлении. Наиболее интересным диапазоном изменения параметра b есть диапазон $]-0,5;3,41...[$ (области III-V). В этом диапазоне с увеличением b изменяется направление вращения диаграммы направленности с положительного на отрицательное, а при дальнейшем росте b происходит изменение направления вращения и вихревой системы. Данный диапазон делится на три интервала, для каждого из которых характерны особенности во вращении звукового поля и вихревой системы: $b\in]-0,5;1,45]$ (область III) – в этом интервале диаграмма направленности начинает совершать колебательные движения, вихревая система продолжает вращаться в положительном направлении. Связь между поворотом диаграммы направленности и вихревой системы: $\Delta\theta_d=\Delta\theta_3$. На узком интервале $b\in]1,45;1,5[$ (область IV) направление вращения диаграммы направленности изменяется на отрицательное, вихри враща-

ются в положительном направлении: $\Delta\theta_d = -\Delta\theta_3$. Только для этого интервала характерно изменение фазы давления на лепестке диаграммы направленности с течением времени. Далее, при $b \in [1,5;\ 3,41...[$ (область V) вихревая система, вращаясь, совершает колебательные движения и с ростом b начинает вращаться в том же направлении, что и диаграмма направленности. В этом диапазоне изменения b поворот диаграммы направленности отличается от поворота вихрей на 360^0: $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 360^0$.

Анализ результатов также показал, что угловое распределение физических характеристик звукового поля таково, что вдоль падающей и уходящей вихревых пар всегда направлена ось одного из лепестков точечного квадруполя.

Кратко остановимся на граничных случаях. При $b = -1$ и $b = 3,41...$ вихри при взаимодействии образуют равносторонний треугольник и линейную конфигурацию, соответственно, вращающиеся с постоянными угловыми скоростями вокруг центра завихренности [7, 8]. При этом звуковые поля, вращающееся синхронно с вихревыми системами, являются монохроматическими с частотами, равными удвоенным частотам вращения вихрей, что характерно для источников квадрупольной природы. Для течения с $b = -0,5$ вихри движутся по параллельным прямым (обмен); при этом $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$ – повороты звукового и вихревого поля равны между собой.

4. Заключение

В рамках модели точечных вихрей и акустической аналогии Лайтхилла выполнены численные расчеты и анализ звуковых полей, генерируемых точечными вихрями при прямом и обменном типах взаимодействия в широком диапазоне геометрических параметров. Получены следующие основные результаты:

1. При прямом и обменном взаимодействиях имеет место явление вращения диаграммы направленности звукового поля, что обусловлено изменением взаимного расположения вихрей при их движении в сочетании с отсутствием в системе осей симметрии, а также вращением вихрей как единого целого.

2. Поворот диаграммы направленности в процессе взаимодействия либо равен повороту вихревой системы, либо противоположен ему, либо отличается на величину, кратную 180^0.

3. Фазовое распределение физических характеристик звукового поля при его зарождении и спадании таково, что их максимальные (минимальные) значения всегда связаны с направлением падающей и уходящей вихревых пар.

Список использованных источников

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy.Soc. – 1952. – **A2**. – P. 564-587.
2. *Crighton D. G.* Basic Principles of Aerodynamic Noise Generation // Prog. Aerospace Sci. – 1975. – **16**, N 1. – P. 31-96.
3. *Batchelor G. K.* Introduction to fluid dynamics. – Moscow: Mir, 1973. – 758 p. (in Russian).
4. *Howe M. S.* Theory of Vortex Sound. – Cambridge: Unirversity Press, 2003. – 216 p.
5. *Aref H.* Intergable, chaotic, and turbulent vortex motion in two dimensional flows // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1983. – **15**. – P. 345-389.
6. *Meleshko V. V., Konstantinov M. Yu.* Dynamics of the vortex structures. – Kiev: Naukova Dumka, 1993. – 279 p. (in Russian).
7. *Grobli W.* Specielle Promleme uber die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfaden // Vierteljahrschrrift der Naturfors. Zurich. – 1877. – **22**. – P. 37-81, 129-165.
8. *Konovalyuk T. P.* Classification of the interactions of the vortex pair with the single vortex in ideal fluid // Gidromekhanika. – 1990. – **62**. – P. 64-71. (in Russian).
9. *Konovalyuk T. P., Meleshko V. V.* Sound radiation by the point vortex system // Plikl. Gidromekhanika. – 1996. – **70**. – P. 41-52. (in Russian).
10. *Konovalyuk T. P.* The features of the structure of the sound field during the point vortex interactions // Akust. Visnyk. – 2012. – **15**. – N 1. – P. 38-58. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 532.5

Вовк І. В.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Малюга В. С.[1], к. ф.-м. н., с. н. с.

Обтікання сфери в'язкою нестисливою рідиною

Чисельно досліджується обтіканні сфери в'язкою нестисливою рідиною в широкому діапазоні чисел Рейнольдса. При ламінарних режимах обтікання задача розв'язується шляхом прямого чисельного моделювання. При турбулентних режимах використовується підхід LES.

Ключові слова: зрив вихорів, LES, турбулентний слід.

[1] Інститут гідромеханіки НАН України,
03680, м. Київ, вул. Желябова, 8/4
e-mail: v_s_malyuga@ukr.net

I. V. Vovk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
V. S. Malyuga[1], PhD (Phys.-Math.), sen. res.

Flow of viscous incompressible fluid past a sphere

Flow of viscous incompressible fluid past a sphere is studied numerically in a wide range of Reynolds number. For the laminar flow regimes the problem is solved through the use of direct numerical simulation. For the turbulent flow regimes LES approach is employed

Key Words: vortex shedding, LES, turbulent wake.

[1] Institute of hydromechanics,
03680, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4
e-mail: v_s_malyuga@ukr.net

Характер обтекания сферы меняется драматически с ростом числа Рейнольдса. Чем выше значение числа Рейнольдса, тем сложнее природа течения. Ниже мы подробно описываем характер обтекания сферы в широком диапазоне чисел Рейнольдса. При числах Рейнольдса Re < 20 течение представляет собой безотрывное ламинарное течение с гладкими незамкнутыми линиями тока. Течение за сферой идентично течению перед сферой [1, 2].

Стационарное осесимметричное обтекание (20 < Re < 210)

Экспериментальные исследования стационарного следа за сферой при малых числах Рейнольдса проводили Taneda [1] и Nakamura [2]. Было установлено, что при числах Рейнольдса выше 25 течение отделяется от сферы вблизи задней точки и формирует замкнутый рециркуляционный след в форме осесимметричного вихревого кольца. По мере увеличения числа Рейнольдса угол отрыва потока и длина следа растут. Taneda показал, что размер вихревого кольца был пропорционален логарифму числа Рейнольдса. Magarvey, Bishop [3] и Wu, Faeth [4] также проводили экспериментальное исследование обтекания сферы. Wu и Faeth установили, что течение остается осесимметричным и стационарным вплоть до Re = = 200, а Magarvey и Bishop – вплоть до Re = 210. Эти результаты хорошо согласуются с расчетами Natarajan, Acrivos [5], которые установили, что течение испытывает регулярную бифуркацию при значении Re около 210.

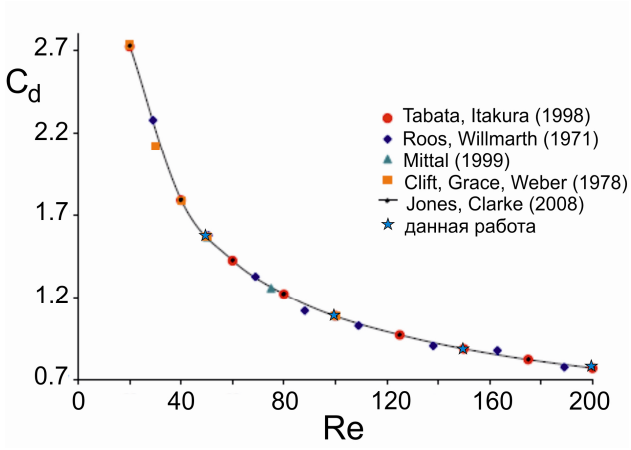


Рис. 1. Коэффициент сопротивления C_d

Мы проводили расчеты для четырех значений числа Рейнольдса: Re = 50; 100; 150; 200. На рис. 1 показано сравнение полученных нами значений для коэффициента сопротивления C_d с данными работ [6-10]. Наблюдается хорошее совпадение при всех четырех значениях числа Рейнольдса. Значения коэффициента сопротивления при Re = = 100 приведены в табл. 1. Видно, что полученные нами значения C_d находятся в диапазоне значений, представленных другими авторами.

Стационарный режим с симметрией относительно плоскости (210 < Re < 270)

Magarvey, Bishop [3] и Wu, Faeth [4] исследовали течение в данном диапазоне чисел Рейнольдса и пришли к заключению, что течение остается стационарным, однако больше не явля-

© І. В. Вовк, В. С. Малюга, 2013

ется осесимметричным. В течении за сферой появляются два вихревых хвоста, вытянутых вдоль по потоку и имеющих равную по модулю и противоположную по знаку интенсивность. Johnson и Patel [12] объяснили нарушение осевой симметрии следа азимутальной неустойчивостью вихревого ядра, имеющего низкое давление.

Таблица 1

Коэффициент лобового сопротивления C_d при Re = 100. Сравнение полученных результатов с результатами работ [6], [8-11]

данная работа	[6]	[8]	[9]	[10]	[11]
1.091	1.09	1.09	1.087	1.087	1.096

Таблица 2

Среднее значение коэффициента сопротивления C_d при Re = 300. Сравнение с результатами работ [10], [12], [17-21]

данная работа	[10]	[12]	[17]	[18]	[19]
0.657	0.661	0.656	0.656	0.657	0.658
	[20]	[21]			
	0.671	0.671			

Таблица 3

Число Струхаля St при Re = 300. Сравнение с результатами работ [10], [12], [17-20]

данная работа	[10]	[12]	[17]	[18]	[19]	[20]
0.133	0.133	0.137	0.136	0.134	0.134	0.136

Нестационарный режим с симметрией относительно плоскости (270 < Re < 400)

В данном диапазоне чисел Рейнольдса вихревой след за сферой сохраняет симметрию относительно плоскости, однако теряет стационарность. Magarvey, Bishop [3], а также Wu, Faeth [4] обнаружили, что след является нестационарным и состоит из последовательности взаимосвязанных вихревых петель, сбрасываемых со сферы. Sakamoto и Haniu [13] проводили эксперименты по обтеканию сферы в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Они обнаружили периодический сброс вихревых петель при Re = 300. Причем процесс был регулярным и симметрия относительно плоскости сохранялась. Упомянутые выше экспериментальные работы хорошо согласуются с целым рядом расчетных работ по численному моделированию таких течений. Упомянем работы Johnson и Patel [12], Ploumhans, *et al.* [14], Tomboulides и Orszag [15], Mittal [8, 16].

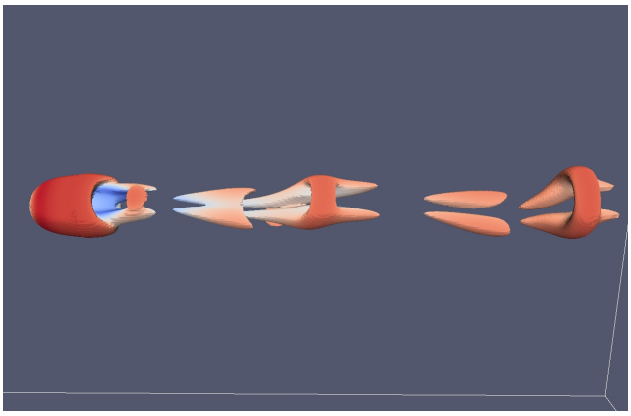


Рис. 2. Идентификация срывающихся вихрей. Изоповерхность второго инварианта Q тензора градиента скорости; Q=0.02, Re = 300

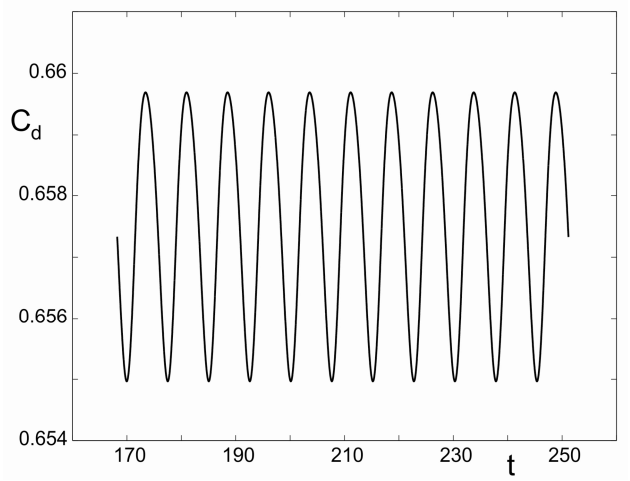


Рис. 3. Коэффициент сопротивления при Re = 300

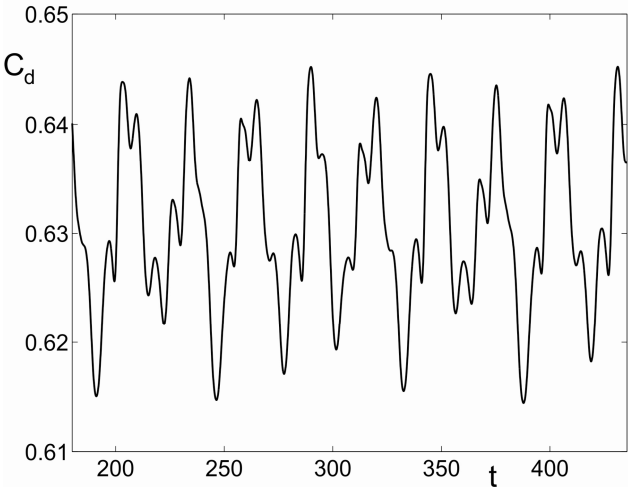


Рис. 4. Коэффициент сопротивления при Re = 350

Мы проводили расчеты при Re = 300 и также пришли к выводу, что процесс сброса вихревых петель носит ярко выраженный периодический характер и след обладает симметрией относи-

тельно плоскости (см. рис. 2). На рис. 3 представлено периодическое изменение во времени коэффициента лобового сопротивления C_d. В табл. 2 представлены средние значения коэффициента лобового сопротивления C_d, а в табл. 3 – числа Струхаля. Видно, что полученные нами данные находятся в диапазоне данных, представленных другими авторами.

При увеличении числа Рейнольдса до 350 течение становится более сложным. На рис. 4 показано изменение во времени коэффициента сопротивления C_d . Видно, что данная кривая представляет собой суперпозицию нескольких колебательных процессов. Колебания с более высокой частотой и малой амплитудой соответствуют сбросу вихрей в следе за сферой. А медленные колебания с большей амплитудой соответствуют колебаниям самой струи за сферой, что, естественно, приводит к колебаниям точки отрыва вихрей.

Нестационарный асимметричный режим (400 < Re < 1000), переход к турбулентности

В данном диапазоне чисел Рейнольдса течение теряет симметрию относительно плоскости, а угол отрыва вихрей изменяется иррегулярным образом. Sakamoto и Haniu в экспериментальной работе [13] отметили, что сброс вихрей начал приобретать иррегулярный характер при Re = = 420. В расчетных работах Dallmann *et al*. [22] было указано, что симметрия относительно плоскости все еще наблюдается при Re = 400. Также следует отметить численную работу [20], в которой авторы показали, что при Re = 500 след также состоит из вихревых петель, но они имеет различную ориентацию. Временной спектр скорости, взятой в нескольких точках, теперь уже становится широкополосным. Хотя, по-прежнему, наблюдается доминирующий пик при St = 0.167. Следующее изменение характера течения наблюдается при Re = 800. В работе [23] было показано, что при Re > 800 в течении присутствуют как крупномасштабная неустойчивость в следе (сброс вихрей), так и мелкомасштабная неустойчивость в сдвиговом слое (неустойчивость Кельвина – Гельмгольца). В то время как число Струхаля, определяемое сбросом вихрей, практически не зависит от числа Рейнольдса, число Струхаля, определяемое неустойчивостью Кельвина –Гельмгольца, возрастает с ростом числа Рейнольдса. Аналогичные результаты были получены также в работах [13], [20].

Турбулентный режим при Re > 1000

Турбулентные режимы обтекания сферы исследовались в работах [21], [24-26] и других. При числах Рейнольдса ниже критического значения $Re < 3.8\times10^5$ в следе за сферой наблюдались явные периодические флуктуации, происходящие благодаря срыву вихрей. Также было установлено, что в докритическом режиме имеет место отрыв ламинарного пограничного слоя и уже затем в оторвавшемся сдвиговом слое происходит формирование вторичных вихрей вследствие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. При превышении критического значения $Re > 3.8\times10^5$ область в следе сразу за сферой существенно сжимается, а коэффициент сопротивления резко уменьшается. Периодический сброс вихрей более не наблюдается.

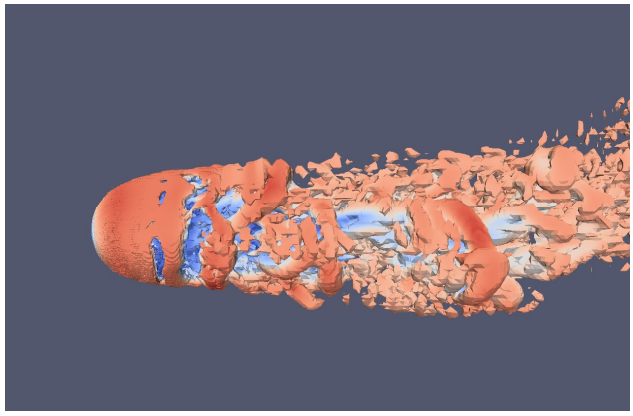


Рис. 5. Изоповерхность второго инварианта Q тензора градиента скорости; Q=0.02, $Re = 10^4$

Мы проводили численные расчеты для докритического значения $Re = 10^4$. Для этого использовалась техника LES. Для моделирования SGS масштабов использовалась дифференциальная *k*-модель с одним уравнением. Полученные нами значения для коэффициента сопротивления и чисел Струхаля хорошо соответствовали результатам других авторов. Картина течения показана на рис. 5. Видно как срыв вихрей с поверхности сферы, так и последующую турбулизацию следа вниз по потоку.

Заключение

Полученные нами численные результаты хорошо согласуются с численными и экспериментальными результатами других авторов. В диапазоне $270 < Re < 3{,}8\times10^5$ наблюдаются явные периодические флуктуации в следе за сферой, вызванные сбросом вихрей. Такие флуктуации могут служить источником звуковых колебаний в среде.

Список використаних джерел

1. *Taneda S.* Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. – 1956. – **11** (10). – P. 1104-1108.
2. *Nakamura I.* Steady wake behind a sphere // Phys. Fluids. – 1976. – **19** (1). – P. 5-8.
3. *Margavey R. H., Bishop R. L.* Transition ranges for three-dimensional wakes // Can. J. Phys. – 1961. – **39**. – P. 1418-1422.
4. *Wu J. S., Faeth G. M.* Sphere wakes in still surroundings at intermediate Reynolds numbers // AIAA J. – 1993. – **31**. – P. 1448-1455.
5. *Natarajan R., Acrivos A.* The instability of the steady flow past spheres and disks // J. Fluid Mech. – 1993. – **254**. – P. 323-344.
6. *Tabata M., Itakura K.* A precise computation of drag coefficients of a sphere // Int. J. Comput. Fluid Dynam. – 1998. – **9**. – P. 303-311.
7. *Roos F. W., Willmarth W. W.* Some experimental results on sphere and disk drag // AIAA Journal. – 1971. – **9** (2). – P. 285-291.
8. *Mittal R.* A Fourier – Chebyshev spectral collocation method for simulating flow past sphere and spheroids // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 1999. – **30**. – P. 921-937.
9. *Clift R., Grace J. R., Weber M. E.* Bubbles, Drops and Particles. – New York: Academic Press, 1978. – 380 p.
10. *Jones D. A., Clarke D. B.* Simulation of Flow Past a Sphere using the Fluent Code // Technical Report. – 2008. – DSTO number: DSTO-TR-2232, AR number: AR-014-365.
11. *Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R.* A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers // J. Atmos. Sci. – 1970. – **27**. – P. 308-315.
12. *Johnson T. A., Patel V. C.* Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // J. Fluid Mech. – 1999. – **378**. – P. 19-70.
13. *Sakamoto H., Haniu H.* A study of vortex shedding from spheres in uniform flow // J. Fluids Eng. – 1990. – **112**. – P. 386-393.
14. *Ploumhans P., Winckelmans G. S., Salmon J. K., Leonard A., Warren, M. S.* Vortex methods for direct numerical simulation of three-dimensional bluff body flows: Application to the sphere at Re = 300, 500 and 1000 // J. Computational Physics. – 2002. – **178.** – P. 427-463.
15. *Tomboulides A. G., Orszag S. A.* Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere // J. Fluid Mech. – 2000. – **416**. – P. 45-73.
16. *Mittal R.* Planar symmetry in the unsteady wake of a sphere // AIAA Journal. – 1999. – **37**. – P. 388-390.
17. *Constantinescu G. S., Chapelet M. C., Squires K. D.* Prediction of turbulent flow over a sphere // AIAA J. – 2003 – **41.** – P. 1733-1742.
18. *Kim J., Kim D., Choi H.* An immersed- boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries // J. Comp. Phys. – 2001. – **171.** – P. 132-150.
19. *Giacobello M.* Wake structure of a transversely rotating sphere at moderate Reynolds numbers. – Ph.D. thesis, The University of Melbourne, Department of Mechanical Engineering, 2005. – 306 p.
20. *Tomboulides A. G., Orszag S. A., Karniadakis G. E.* Direct and Large eddy simulations of axisymmetric wakes // *AIAA paper number 93-0546*. – 1993. – 13 p.
21. *Taneda S.* Visual observations of the flow past a sphere at Reynolds numbers between 10^4 and 10^6 // J. Fluid Mech. – 1978. – **85**. – P. 187-192.
22. *Dallmann U., Gebing H., Vollmers H.* Unsteady three-dimensional separated flows around a sphere – analysis of vortex chain formation // in Bluff-body wakes, dynamics and instabilities, Eckelmann, H. – Springer–Verlag, 1993. – P. 27-30.
23. *Kim H. J., Durbin P. A.* Observations of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation // Phys. Fluids. – 1988 – **31**. – P. 3260-3265.
24. *Achenbach E.* Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers // J. Fluid Mech. – 1972. – **54**. – P. 565-575.
25. *Achenbach E.* Vortex shedding from spheres // J. Fluid Mech. – 1974. – **62**. – P. 209-221.
26. *Constantinescu G. S., Squires K. D.* Numerical investigations of flow over a sphere in the subcritical and supercritical regimes // Phys. Fluids. – 2004. – **16**. – P. 1449-1466.

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Гарт Э. Л.[1], к. ф.-м. н., доц.

Сравнительный анализ двух моделей упругопластического деформирования пористых сред при использовании проекционно-итерационных схем МКЭ

Проведен сравнительный численный анализ моделей плоской деформации и плоского напряженного состояния в задачах упругопластического деформирования пористых сред. Применяются проекционно-итерационные схемы реализации вариационно-сеточного метода конечных элементов. Рассмотрены "ячейки разрушения" в виде двух пор круговой и эллиптической формы. Исследовано взаимодействие пор при упругопластическом деформировании.

Ключевые слова: пористая среда, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы, численный анализ.

[1] Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, 49010, г. Днепропетровск, просп. Гагарина, 72, e-mail: hart@ua.fm

E. L. Hart[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Comparative analysis of two elastoplastic deformation models for porous media in projective-iterative schemes of finite element method

The comparative numerical analysis of plane deformation model and plane stress state model for deformation problems of porous media is developed. The projective-iterative schemes realization of variational-grid finite element method is used. The cells in view of two pores of circular and elliptic form are considered. The interaction of pores under elastoplastic deformation is investigated.

Key Words: porous media, finite element method, projective-iterative schemes, numerical analysis.

[1] Oles' Gonchar National University of Dnepropetrovsk, 49010, Dnepropetrovsk, Gagarin avenue, 72, e-mail: hart@ua.fm

Постановка задачи

Модели плоских задач механики деформируемого твердого тела широко используются при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС), определяя его основные особенности [1-3]. При высоких уровнях нагрузки необходимо учитывать пластические деформации. Эффективными для решения многочисленных задач деформирования структурированных сред, включающих поры, трещины, включения, пластин и оболочек с отверстиями являются проекционно-итерационные модификации вариационно-сеточного метода конечных элементов (МКЭ) [4-11].

Рассматривается пористая среда в случае одноосного растяжения (рис. 1). Заметим, что при исследовании НДС вблизи пор, которые являются локальными концентраторами напряжений, область возмущения напряженного состояния значительно меньше характерных размеров тел. Использование экстремальных принципов для таких областей следует проводить с учетом соображений, изложенных в [12].

Выделим элементарную "ячейку разрушения" в виде двух пор круговой и эллиптической формы. Проблема определения НДС для плоских задач без учета пластических деформаций сводится к минимизации функционала потенциальной энергии на классе непрерывно-дифференцируемых в области Ω функций $u(x,y), \upsilon(x,y)$:

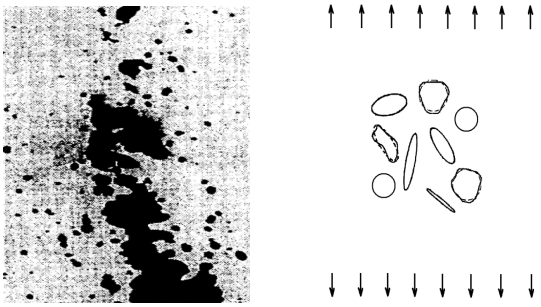


Рис. 1. Пористая среда

$$I(x,y)=\int_{\Omega}\left\{(2\mu+\lambda)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+2\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2\right\}d\Omega-\int_{\Gamma}\left(p_x u+p_y \upsilon\right)dS, \quad (1)$$

где $u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$, $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$ – проекции векторов перемещений и нагрузки на оси Ox и Oy; λ, μ – постоянные Ляме. Здесь для случая

© Э. Л. Гарт, 2013

плоской деформации и плоского напряженного состояния постоянные Ляме вычисляются соответственно по формулам [2]:

$$\lambda_1 = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad \mu_1 = G, \quad \lambda_2 = \frac{2G\nu}{1-\nu}, \quad \mu_2 = G,$$

где ν – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига, $G = E/[2(1+\nu)]$.

Для модели плоской деформации (в этом случае $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$) при отсутствии массовых сил имеем уравнения равновесия Ляме в виде

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u = 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 \upsilon = 0,\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$, $\mu = G$, $\Delta = \partial u/\partial x + \partial \upsilon/\partial y$, $\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$, $\nabla^2 \upsilon = \partial^2 \upsilon/\partial x^2 + \partial^2 \upsilon/\partial y^2$.

Деформации определяются соотношениями

$$\varepsilon_x = \left(\sigma_x - \nu'\sigma_y\right)/E' = \left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y/2G\right],$$
$$\varepsilon_y = \left(\sigma_y - \nu'\sigma_x\right)/E' = \left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x/2G\right],$$
$$\varepsilon_{xy} = (1+\nu')\tau_{xy}/E' = \tau_{xy}/2G,$$

где $E' = E/\left(1-\nu^2\right)$, $\nu' = \nu/(1-\nu) = \nu_1/(1-2\nu_1)$, $\nu_1 = \nu/(1+\nu)$.

В соответствии с моделью плоского напряженного состояния (в этом случае $\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$) уравнения Ляме имеют ту же форму (2), при этом вместо λ в (2) вводится параметр

$$\lambda' = 2\lambda G/(\lambda+2G) = (1-2\nu)\lambda/(1-\nu) = \nu E/\left(1-\nu^2\right) = 2\lambda G/(1-\nu). \qquad (3)$$

Деформации для этой модели определяются соотношениями

$$\varepsilon_x = \left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)/E, \ \varepsilon_y = \left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)/E, \quad \varepsilon_{xy} = \tau_{xy}/(2G).$$

Оценка деформаций для моделей плоской деформации и плоского напряженного состояния при конкретном коэффициенте Пуассона ν дана в [3].

Для обобщенного плоского напряженного состояния (на основе этой модели определяется НДС пластины толщиной $2h$) уравнения Ляме имеют вид (2), при этом λ заменяют на λ' (3), ∇, u, υ – на $\overline{\nabla}, \overline{u}, \overline{\upsilon}$. Здесь вместо перемещений u, υ вводятся их средние значения по толщине

$$\overline{u} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u\,dz, \quad \overline{\upsilon} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \upsilon\,dz.$$

Вычисляя разность между величинами интенсивности деформаций для случаев плоского напряженного состояния и плоской деформации, получаем, что она положительна.

Метод решения

Для решения задачи минимизации функционала (1) применяются проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ [6-11]. Построение таких схем проводится следующим образом. Исходная экстремальная задача аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью (n=1, 2, …) дискретных экстремальных задач. Каждая из полученных задач решается с применением некоторого итерационного метода, в частности, метода последовательной верхней релаксации [4], но не до конца. Начиная с произвольного, достаточно грубого разбиения (n=N), строится лишь несколько (k_n) приближений к точке минимума соответствующей функции многих переменных. Последнее полученное приближение интерполируется на более мелкую конечноэлементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума следующей, (n+1)-ой, функции многих переменных. Процесс продолжается до достижения заданной точности вычислений.

Упругопластическое НДС определяется на основе методов упругих решений [13], к которым могут быть отнесены методы переменных параметров упругости и метод дополнительных нагрузок. При этом строится процесс последовательных приближений, в каждом из которых решается неоднородная задача теории упругости. В методе переменных параметров упругости при использовании деформационной теории пластичности НДС в каждом приближении определяется из нелинейных соотношений [10, 11]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G_*}\left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu_*}{1+\nu_*}\delta_{ij}\sigma\right),$$

где

$$G_* = \frac{E_*}{2(1+\nu_*)}, \quad E_* = \frac{3E}{2E\psi+1-2\nu},$$
$$\nu_* = \frac{E\psi-1+2\nu}{2E\psi+1-2\nu}, \quad \psi = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i},$$

σ_{ij}, ε_{ij} – напряжения и деформации; σ_i, ε_i – их интенсивности; σ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера.

Для первого приближения полагается $E_{*1} = E$, $\nu_{*1} = \nu$, определяются напряжения σ^e_{ij1} и их интенсивность σ^e_{i1} (значок *e* соответствует расчёту на основе теории упругости), вычисляется σ_{i1} (по диаграмме $\sigma_i \sim \varepsilon_i$) и $\psi_1 = 3\varepsilon_{i1}/2\sigma_{i1}$. Во втором приближении решается задача теории упругости при $E_{*2} = \sigma_{i1}/\varepsilon_{i1}$, для вычисления ν_{*2} используется ψ_1 и т. д. Решение проводится до совпадения соседних приближений с заданной точностью (при расчётах используется условие $E_{*(n)} \approx E_{*(n-1)}$).

Численный анализ

Приведем результаты конечноэлементного анализа распределения интенсивности деформаций для двух моделей деформирования при различных конфигурациях и расположении отверстий, моделирующих поры. Расчёты проведены на ПК Turion 64×2 (2 GHz, 2×512 Kb L2 cache) с 2 Gb оперативной памяти для пористой среды, поведение которой определяется диаграммой деформирования, аналогичной диаграмме для алюминиевого сплава Д16Т.

Зоны пластических деформаций (ПД), где $\varepsilon_i > \varepsilon_s$ (ε_s – интенсивность деформаций, соответствующая условному пределу текучести σ_s), возникают в местах концентрации напряжений и при повышении нагрузки или при уменьшении расстояния между порами сливаются. На рис. 2 показаны такие зоны для двух пор круговой формы при нагрузке $p_y = 125\ МПа$, $r_1/r_2 = 2$, $\alpha = 45°$, $l/r_1 = 4{,}24$ (рис. 2, а); $l/r_1 = 2{,}83$ (рис. 2, б, в) (r_1, r_2 – радиусы большей и меньшей пор соответственно, l – расстояние между центрами пор, α – угол между прямой, проходящей через центры пор, и осью *Ox*). На рис. 2, б показаны зоны ПД для модели плоской деформации (модель 1), на рис. 2, в – для модели плоского напряженного состояния (модель 2).

На рис. 3 показаны зоны ПД для двух пор круговой и эллиптической формы при нагрузке $p_y = 125\ МПа$, $r/a = 1$, $\alpha = \beta = 45°$, $l/r = 1$ (r – радиус круговой поры, a – большая полуось эллипса, ограничивающего пору, β – угол между большой полуосью эллиптической поры и осью *Ox*). Рис. 3, а и 3, б соответствуют моделям 1 и 2. Картина распределения интенсивности напряжений σ_i, соответствующей определенным уровням ε_i, приведена на рис. 4.

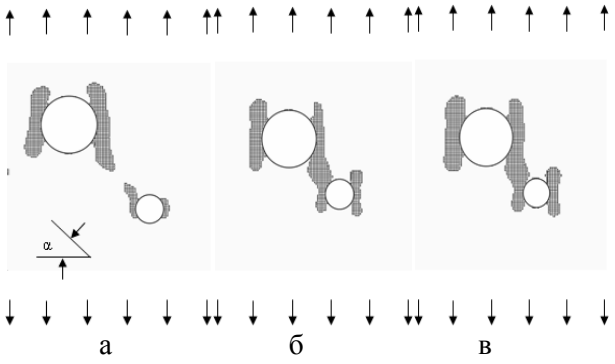


Рис. 2. Зоны ПД для пор круговой формы

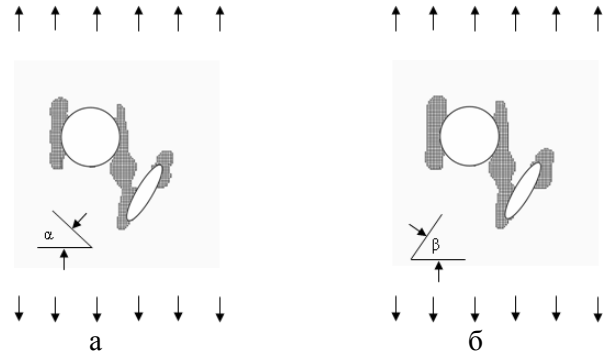


Рис. 3. Зоны ПД для пор круговой и эллиптической формы

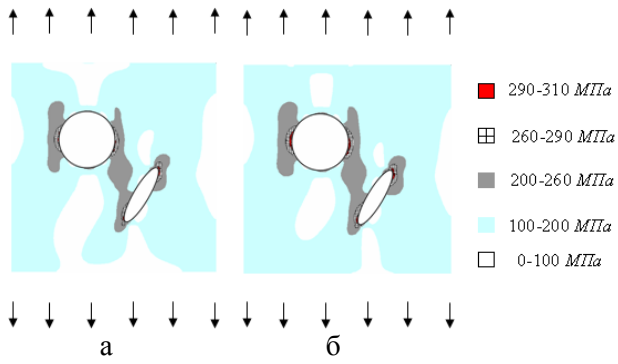


Рис. 4. Распределение интенсивности напряжений для пор круговой и эллиптической формы

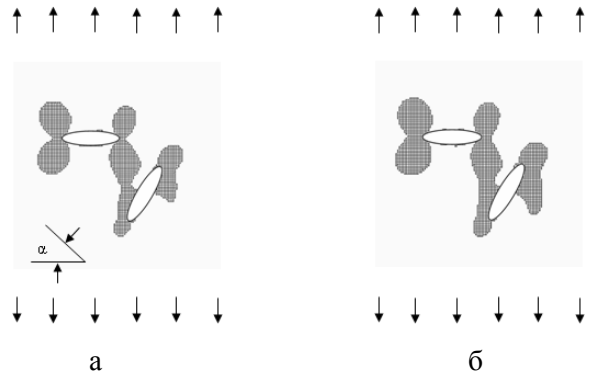


Рис. 5. Зоны ПД для пор эллиптической формы при $\alpha = \beta = 45°$

На рис. 5 показаны зоны ПД для двух пор эллиптической формы при нагрузке $p_y = 125\ МПа$, $a_1 / a_2 = 1$, $\alpha = \beta = 45°$, $l / a_1 = 2{,}83$. Рис. 5, а и 5, б соответствуют моделям 1 и 2.

Выводы

Проведен анализ двух моделей деформирования (плоской деформации и плоского напряженного состояния) при исследовании НДС пористой среды. Для модели плоского напряженного состояния зоны пластических деформаций имеют большую величину при одних и тех же нагрузках.

Варьирование формы пор, их размеров, расстояния между ними позволяет исследовать динамику процесса трансформации полей остаточных деформаций, взаимовлияние пор для различных материалов (различные диаграммы деформирования материалов). Такой анализ дает возможность прогнозировать возникновение очагов разрушения в плоскодеформируемых пористых средах.

Список использованных источников

1. *Timoshenko S. P.* Course of elasticity theory. – Kiev: Naukova Dumka, 1972. – 508 p. (in Russian).
2. *Leibenzon L. S.* Course of elasticity theory. – Moscow – Leningrad: OGIZ, 1947. – 464 p. (in Russian).
3. *Demidov S. P.* Elasticity theory. – Moscow: Vysschaja schkola, 1979. – 432 p. (in Russian).
4. *Samarskii A. A., Nikolaev E. S.* Methods for solving finite-difference equations. – Moscow: Nauka, 1978. – 592 p. (in Russian).
5. *Kluge R.* Ein Projektions-Iterationsverfahren bei Fixpunktroblemen und Gleichungen mit monotonen Operatoren // Monatsber. Dtsch. Acad. Wiss. − Berlin, 1969. − B. 11, No 8-9. − S. 599-609.
6. *Hart E. L.* Projective-iterative modifications of finite element method in boundary-value problems of elasticity theory // Dop. NAN Ukrainy. – 2008. – № 6. – P. 56-61. (in Russian).
7. *Hart E. L.* Finite element analysis of plane deformable media with inclusions // Visn., Ser. Mechanika, Dnipropetr. Univ. im. Olesja Gonchara. – 2011. – Issue 15, vol. 2. – P. 39-47. (in Russian).
8. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Numerical modelling of behaviour of plane deformable structural media // Mathematic modelling in mechanics of deformable solids and structures. Methods of boundary and finite elements: international conference, September 28-30, 2011. – Sankt-Peterburg, Russia: proceedings. – 2011. – P. 37-39. (in Russian).
9. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Numerical analysis of elastoplastic deformation of structured media // Dop. NAN Ukrainy. – 2012. – № 5. – P. 49-56. (in Russian).
10. *Hudramovich V. S, Hart E. L., Ryabokon' S. A.* Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – Vol. 78, Issue 1. – P. 181-197.
11. *Hudramovich V. S, Hart E. L., Klimenko D. V., Ryabokon' S. A.* Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // Strength of Materials. – 2013. – Vol. 45, No 1. – P. 5-16.
12. *Lin'kov A. M., Novozhilov V. V.* Exstremal principles for infinite // Progress in mechanics of deformable media. – Moscow: Nauka, 1975. – P. 350-354. (in Russian).
13. *Il'yushin A. A.* Plasticity. – Moscow – Leningrad: OGIZ, 1948. – 376 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12: 681.142.2

Гачкевич О. Р., д. ф.-м. н., проф.,
Дробенко Б. Д., д. ф.-м. н., с. н. с.

Комп'ютерне моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах за електромагнітних навантажень

Подано результати досліджень термомеханічних процесів в електропровідних тілах за квазіусталених електромагнітних навантажень з урахуванням феромагнітних властивостей та термочутливості матеріалів, а також пружно-пластичного характеру їх деформування. Показано, що шляхом вибору частоти електричного струму і умов подальшого охолодження тіл після зняття дії струму можна формувати близькі до заданих залишкові напруження у тілах.

Ключові слова: зв'язані поля, залишкові напруження, індукційна термообробка.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б
e-mail: drobenko@ukr.net, dept13@iapmm.lviv.ua

O. R. Hachkevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
B. D. Drobenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.

Computer simulation of thermomechanical processes in electrically conductive solids subjected to electromagnetic loading

Results of the research of thermomechanical processes in electrically conductive solids subjected to quasi-steady electromagnetic loading considering elastic–plastic deformations, ferromagnetic properties and temperature sensitivity of materials are given. There are shown that by proper selection of electric current frequency as well as cooling conditions after removing the current action the predefined level of residual stresses can be obtained.

Key Words: coupled fields, residual stresses, induction heat treatment.

Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU
79060, L'viv, Naukova str., 3-b
e-mail: drobenko@ukr.net, dept13@iapmm.lviv.ua

Для підвищення міцності й надійності виробів з електропровідних матеріалів у сучасних технологіях термообробки широко використовують електромагнітні поля (ЕМП). Відоме застосування такої обробки при гартуванні, лютуванні, зварюванні, очищенні, дегазації, сушінні, легуванні, нанесенні зміцнювальних покриттів та ін.

Дія ЕМП на електропровідне тіло спричиняє протікання в ньому взаємозв'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів, які істотно впливають на функціональні параметри і міцність. Тому для побудови раціональних режимів обробки з використанням ЕМП і оцінки функціональної здатності виробів з електромагнітних матеріалів важливою є наявність математичних моделей і методів дослідження у взаємодії процесів електропровідності, теплопровідності й деформування у твердих тілах залежно від їх електропровідності і здатності до намагнічування.

Загальні підходи до побудови термомеханічних моделей суцільного середовища, які враховують взаємодію полів різної фізичної природи, достатньо повно висвітлені в літературі. На їх основі запропоновано численні конкретні моделі опису механічної поведінки електропровідних тіл за дії зовнішнього ЕМП. У переважній більшості праць (див., напр., огляди [1-3]), присвячених кількісному опису термомеханічних процесів в електропровідних тілах за термообробки з використанням ЕМП, характеристики матеріалів приймають незалежними від температури, а процеси деформування – пружними. Застосування таких моделей у випадках, коли тіла нагрівають до підвищених температур, може призводити до істотних похибок в оцінках параметрів стану тіл [3].

У працях [4-9] запропоновано моделі, які адекватніше описують термомеханічні процеси в нелінійних електропровідних тілах за індукційного нагрівання. Зокрема, математична модель [8, 9] розроблена на основі загальної теорії взаємодії ЕМП та матеріального континууму (в якій вплив поля враховано через об'ємні тепловиділення, як джоулеві, так і пов'язані з перемагнічуванням і переполяризацією, та пондеромоторні сили), зв'язаних рівнянь теплопровідності та Максвелла для тіл з різними електропровідністю і здатністю до намагнічування та поляризації (з феноменологічними співвідношеннями, що враховують нелінійні зв'язки між індукціями і напруженостями відповідно електричного й магнітного полів) за температурно залежних електро- і теплофізичних характеристик, а також теорії неізотермічної тер-

© О. Р. Гачкевич, Б. Д. Дробенко, 2013

мопружно-пластичності у геометрично лінійному наближенні, рівняння якої відповідають фізичним особливостям процесів нагрівання і охолодження термочутливих, здатних до пружно-пластичного деформування матеріалів [10].

З використанням числових підходів розроблено методику розв'язування сформульованої на цій основі задачі електро-магніто-термо-пружнопластичності, а також відповідне програмне забезпечення для комп'ютерного моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах за комплексного навантаження [3]. Наявність такого забезпечення дає змогу у стислі терміни визначити раціональні значення параметрів технологічних процесів термообробки виробів з електропровідних матеріалів з метою отримати в них необхідні функціональні властивості, а також проаналізувати механічну поведінку того чи іншого виробу за комплексного навантаження, оцінити його міцність, структуру, рівень залишкових напружень тощо. Це значно пришвидшує виготовлення виробів як на етапі прийняття і оцінки конструктивних рішень, так і під час виробничого циклу. При цьому різко зменшується кількість натурних експериментів, оскільки перевіряють лише раціональні проекти, отримані в результаті комп'ютерного моделювання.

Мета даної роботи – з використанням розробленого програмного забезпечення провести дослідження режимів високотемпературної індукційної обробки виробів з електропровідних матеріалів для формування в них залишкових напружень, близьких до заданих. Керування при цьому можна здійснювати умовами теплообміну із зовнішнім середовищем, геометричними розмірами і розташуванням джерел струму в зовнішньому середовищі, частотою та значенням амплітуди електричного струму.

Вплив умов охолодження

Під час термообробки тіло $V = \{r \le R, \, |z| \le L\}$ нагрівають за допомогою ЕМП, яке індукує заданий у зовнішньому середовищі струм густиною

$$j_\varphi^{(0)} = J_0 \delta(r - R_i) \cdot (S_-(z + L_i) - S_+(z - L_i)) \sin(2\pi \nu_\omega t),$$

де δ, S_-, S_+ – δ- та S-функції (r, φ, z – циліндричні координати); циліндричною поверхнею радіуса R_i і завдовжки $2L_i$ (що моделює індуктор) тече струм з частотою ν_ω і амплітудою J_0. У початковий момент часу ЕМП у тілі й середовищі відсутнє. Заданий початковий розподіл T_0 температури у тілі, яке перебуває за умов конвективного теплообміну (з коефіцієнтом β) із зовнішнім середовищем, температура якого T_S. Коли температура у перерізі $z = 0$ циліндра на глибині h_g від поверхні досягає T_g, струм $j_\varphi^{(0)}$ вимикають, і тіло охолоджується через теплообмін із середовищем. Формулювання і методику розв'язування такої задачі досить повно висвітлено у працях [3, 8, 9].

Досліджено залежність залишкових напружень у циліндрі для різних способів охолодження, які моделювали за допомогою температурно залежного коефіцієнта тепловіддачі. Моделювання виконано для циліндра із магнітном'якої феромагнітної сталі Ст. 30 [11-14] за таких значень числових параметрів:

R=0,01 м; L=0,01 м; R_i=0,012 м; L_i=1,05·L;

J_0 = 1 МА/м; ν_ω = 8 кГц;

T_g = 970°C; h_g = 0,0015 м;

$T_0 = T_S$ = 20 °C; β=13 Вт/(м^{2}К) – за нагрівання.

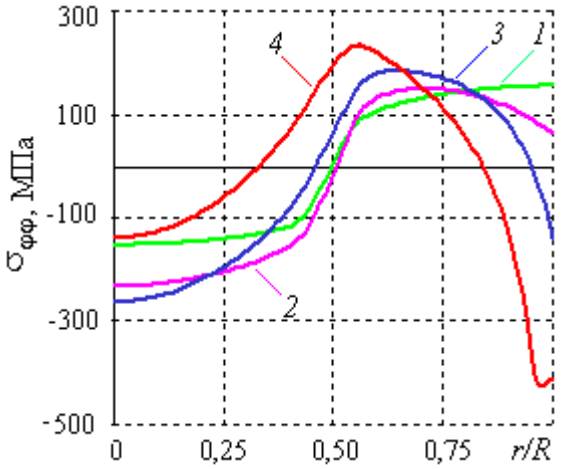


Рис. 1. Кільцеві напруження у циліндрі за різних способів охолодження

На рис. 1 показано розподіли залишкових колових $\sigma_{\varphi\varphi}$ напружень уздовж радіуса циліндра після повного його охолодження за чотирьох різних залежностей коефіцієнта теплообміну від температури (за допомогою яких моделюють часто використовувані на практиці способи охолодження): тіло повільно охолоджується з тим же коефіцієнтом тепловіддачі, що й за нагрівання (крива *1* – природне охолодження на повітрі); тіло охолоджується інтенсивними потоками повітря (*2*), оливи (*3*) і води (*4*) (температурні залежності коефіцієнта тепловіддачі за охолодження потоками води (β_b), оливи (β_0) і повітря (β_π) подано у праці [14]).

Зазначимо, що швидкість охолодження поверхні циліндра не є монотонна. Під час використання потоків води, наприклад, максимальний відбір тепла спостерігають на початку охолодження і в околі температур 300…200°С. Тому обчислення зі сталими (усередненими) коефіцієнтами теплообміну можуть призводити до невірних оцінок залишкових напружень у тілі. Зокрема, у розглянутих випадках різниця в значеннях залишкових напружень, які отримані за врахування температурної залежності коефіцієнта теплообміну і без такого врахування, становить близько 40%.

Отже, шляхом вибору умов охолодження можна істотно регулювати як рівень, так і характер розподілу залишкових напружень у циліндрі, що дає можливість отримувати раціональні режими його термообробки для формування бажаних рівня і розподілу залишкових напружень.

Вплив частоти струму

Аналогічно досліджено вплив частоти струму на етапі нагрівання з допомогою ЕМП на залишкові напруження у циліндрі $V=\{R_1\le r\le R_2,\ |z|\le L\}$ з тієї ж сталі. Обчислювальний експеримент проведено за параметрів:

$$R_1=0{,}1\text{ м};\ R_2=0{,}11\text{ м};\ L=0{,}2\text{ м};\ R_i=0{,}112\text{ м};$$
$$L_i=0{,}21\text{ м};\ J_0=1\text{ МА/м};$$
$$\beta=\beta_b(T)\text{ і }\beta=\beta_0(T)\ -\text{ за охолодження.}$$

Інші параметри – такі ж, як і у попередній задачі.

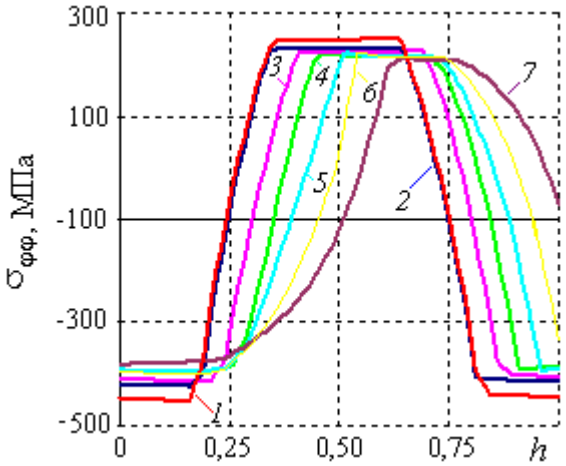


Рис. 2. Залишкові кільцеві напруження у циліндрі за різних частот струму на етапі нагрівання

На рис. 2 подано розподіли колових залишкових напружень за товщиною циліндра у центральній його частині за нагрівання струмом відповідно з частотами $\nu_\omega=0{,}05$ (крива *1*); 0,3 (*2*); 0,5 (*3*); 0,8 (*4*); 1,6 (*5*); 3 (*6*); 8 (*7*) кГц після повного охолодження інтенсивним водяним потоком з обох поверхонь ($h=(r-R_1)/(R_2-R_1)$).

На рис. 3 для цих же випадків показано розподіли температури у циліндрі в момент вимкнення струму. Як бачимо, під час нагрівання струмом із частотою $\nu_\omega\le 0{,}5$ кГц тіло до вимкнення індуктора встигає рівномірно прогрітись за товщиною. Як наслідок за його охолодження з обох поверхонь отримуємо в кінцевому стані практично однакові зони стискальних залишкових напружень у приповерхневих шарах.

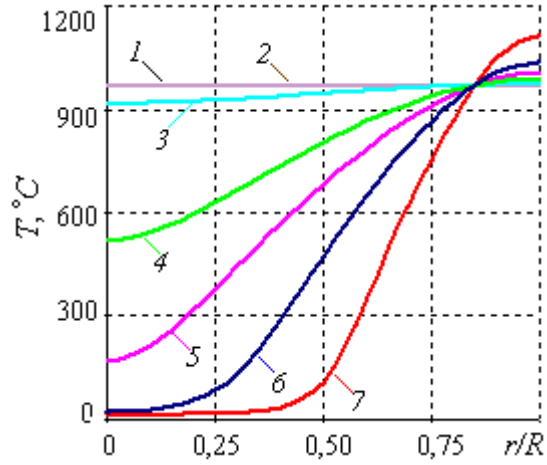


Рис. 3. Розподіли температури у циліндрі у момент досягнення необхідної глибини прогрівання

На рис. 4 лінії *1–3* описують зміни температури зовнішньої (суцільні лінії) та внутрішньої (штрихові) поверхонь циліндра в часі за нагрівання струмами відповідно з частотами $\nu_\omega=0{,}3$ (*1*); 0,5 (*2*); 0,8 (*3*) кГц і двостороннього охолодження інтенсивними потоками води.

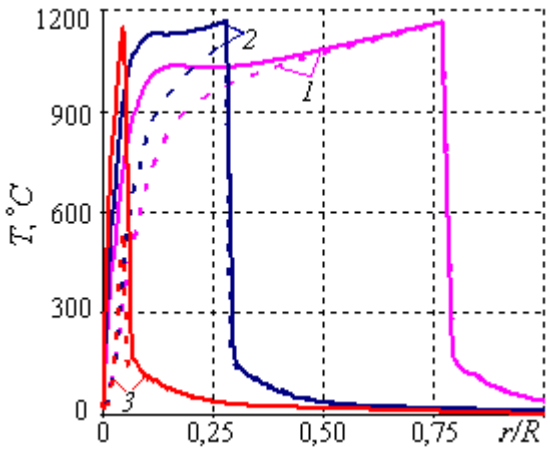


Рис. 4. Зміни температури поверхонь циліндра за нагрівання струмами з різними частотами

За температур вищих точки Кюрі (770°С) з втратою матеріалом феромагнітних властивостей нагрівання тіла сповільнюється (за незмінного струму). За малих частот (за відсутності належної теплоізоляції) нагрівання зовнішньої поверхні може зупинитись і навіть спадати певний час, необхідний для прогрівання тіла по товщині, що ілюструє рис. 5. На ньому кривими *1–5* проілюстровано зміни температури у перерізі $z = 0$ зовнішньої поверхні, точок на віддалі 2, 4 і 6 мм від неї та внутрішньої поверхні циліндра відповідно.

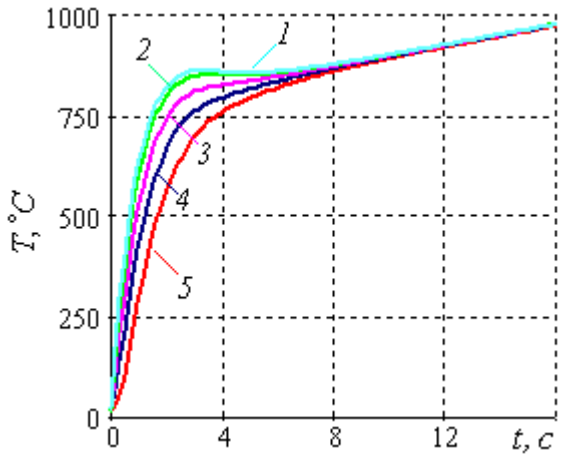


Рис. 5. Зміни температури в різних точках тіла за нагрівання струмом з частотою $\nu_\omega = 0{,}3$ кГц

Запропонована в [3] методика математичного моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах з різними здатностями до намагнічування і поляризації за електромагнітних навантажень дає змогу адекватніше прогнозувати поведінку електропровідних тіл у широкому температурному діапазоні. Розроблене на цій основі програмне забезпечення можна використовувати для побудови раціональних режимів індукційної обробки виробів з електропровідних матеріалів за різноманітними критеріями, зокрема, мінімізації часу обробки чи відхилення напружень у виробі від деяких заданих тощо.

Список використаних джерел

1. *Podstryhach Ya. S., Burak Ya. Yo., Gachkevich A. R., Cherniavskaya L. V.* Thermoelasticity of electrically conductive solids. – Kiev: Naukova Dumka, 1977. – 248 p. (in Russian).
2. *Gaczkiewicz A., Kasperski Z.* Models and mathematical methods in boundary value problems for the thermomechanics of electrically conducting solids. – Opole: Politechnika Opolska, 1999. – 368 p. (in Polish).
3. *Modelling* and optimization in thermomechanics of electroconductive heterogeneous solids / Edit. Ya. J. Burak and R. M. Kushnir. V.4: Thermomechanics of magnetizable electrically conductive thermosensitive solid / O. R. Hachkevych., B. D. Drobenko. – Lviv: SPOLOM, 2010. – 260 p. (in Ukrainian).
4. *A numerical* model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics / F. Bay, V. Labbe, Y. Favennec, J. L. Chenot // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2003. – **58**, № 6. – P. 839-867.
5. *Pantelyat I. G., Zgraja J.* Inductive heating of large steel disks: coupled electromagnetic, thermal and mechanical simulation // Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 1999. – **10**. – P. 185-192.
6. *Induction* heat treatment of a ISO C45 steel bar: Experimental and numerical analysis / I. Magnabosco. P. Ferro, A. Tiziani, F. Bonollo // Computational Materials Science. – 2006. – **35**. – P. 98-106.
7. *Kim D. H., Kim B. M., Kang C. G.* Die life considering the deviation of the preheating billet temperature in hot forging process // Finite Elements in Analysis and Design. – 2005. – **41**. – P. 1255-1269.
8. *Drobenko B., Hachkevych O., Kournyts'kyi T.* A mathematical simulation of high temperature induction heating of electroconductive solids // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 2007. – **50**. – P. 616-624.
9. *Drobenko B., Hachkevych O., Kournyts'kyi T.* Thermomechanical behaviour of polarizable and magnetizable electroconductive solids subjected to induction heating // J. of Eng. Mathematics. – 2008. – **61**, № 2-4. – P. 249-269.
10. *Allen D. H. Heisler W. E.* A theory for analysis of thermoplastic materials // Computers & Structures. – 1981. – V. 13. – P. 129-135.
11. *Preobrazensky A. A.* Magnetic materials and elements. – Moscow: Wyshaja Shkola, 1976. – 336 p. (in Russian).
12. *Turowski J.* Technical electrodynamics. – Warsaw: WNT, 1993. – 462 p. (In Polish).
13. *Tables* of physical values. Reference book / I. K. Kikoin (Ed.). – Moscow: Atomizdat, 1976. –1008 p. (in Russian).
14. *Golovin H. F., Zamiatin M. M.* High frequency thermal treatment. – Leningrad: Mashinostrojenie, 1990. – 240 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Георгиевский Д. В.[1], д. ф.-м. н., проф.

Об «ортогональных эффектах» напряжённо-деформированного состояния в механике сплошной среды

Описаны некоторые явления, возникающие в изотропной сплошной среде и выражающиеся в том, что угол между единичным девиатором напряжений в данной точке в данный момент времени и единичным девиатором деформаций (скоростей деформаций) в этой же точке в этот же момент времени не равен нулю. Его отличие от нуля не объясняется лишь экспериментальной погрешностью. К таким явлениям относятся эффект Пойнтинга, эффект Вайссенберга («центростремительный насос»), рэтчет, эффект Малышева, явления в экспериментах по виброползучести. Указано на возможность моделирования описанных явлений аппаратом тензорно нелинейных функций.

Ключевые слова: экспериментальная механика, эффекты второго порядка, тензорно нелинейные определяющие соотношения.

[1] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
119991, Воробьёвы Горы, г. Москва, Россия
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

D. V. Georgievskii[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

On «orthogonal effects» of stress-strain state in continuum mechanics

Some phenomena in isotropic continuum media being expressed by the fact that an angle between an unit stress deviator at given point at given time moment and an unit strain (strain rate) deviator at the same point at the same time moment is not equal to zero, are collected. This difference from zero could not be explained only by an experimental error. The Poynting effect, Weissenberg effect («centripetal pump»), ratcheting, Malyshev effect, phenomena in vibrocreep experiments may be numbered among mentioned appearances. A possibility to simulate these phenomena on the basis of theory of tensor nonlinear functions is pointed out in published paper.

Key Words: experimental mechanics, effects of second order, tensor nonlinear constitutive relations.

[1] M. V. Lomonosov Moscow State University,
119991, Vorobyovy Gory, Moscow, Russia
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

В экспериментальной механике сплошной среды [1, 2] и теории определяющих соотношений давно известны явления, называемые в различных приложениях эффектами второго порядка, эффектами высших порядков, а также «ортогональными эффектами». Их смысл заключается в том, что в изотропной среде при некоторых видах напряжённо-деформированного состояния единичный тензор-девиатор напряжений в данной точке в данный момент времени существенно отличается от единичного тензора-девиатора деформаций (скоростей деформаций) в этой же точке в этот же момент времени.

Впервые ещё в середине XIX века, проводя опыты с кручением металлических цилиндров, Г. Вертгейм обнаружил и измерил удлинение цилиндров. Им было проведено около шестидесяти таких опытов [3], в них осуществлялись малые деформации сплошных и полых, стальных и латунных цилиндров кругового и эллиптического сечения. В начале XX века Дж. Пойнтинг также наблюдал изменение длины и объёма скручиваемых стальных образцов, но уже при больших деформациях [4]. Относительное удлинение образца приближённо пропорционально квадрату угла закручивания, а при фиксированном значении угла удлинение пропорционально квадрату радиуса. Пойнтингом же показано, что удлинение и изменение объёма скорее всего не связаны с изменением упругих постоянных, т. е. с деформационной анизотропией.

Для явления возникновения деформаций в направлении, ортогональном чисто сдвиговым усилиям, был введён термин «эффект Пойнтинга». В [5] это явление было отнесено к так называемым эффектам второго порядка. Его количественному описанию для изотропных и анизотропных материалов при малых и конечных деформациях посвящено большое количество работ [6-11].

© Д. В. Георгиевский, 2013

В 1958 г. в [12, 13] приведены результаты первых экспериментальных исследований по кручению различных образцов под действием крутящих моментов при непрерывном пластическом растяжении. В [12] испытания велись при нагружении, мало отличающемся от простого. После некоторой осевой деформации момент внезапно прикладывался и снимался. Отмечены различные аномалии в поведении образцов, свидетельствующие ещё об одном помимо эффекта Пойнтинга явлении, указывающем на тензорную нелинейность определяющих соотношений, – рэтчете (см., например, [14, 15]). Он заключается в гораздо более сильном изменении осевых деформаций при совместном растяжении и циклическим кручении с ненулевым сдвигом, чем при отдельном растяжении без кручения. К числу аналогичных по смыслу явлений в реономных моделях можно отнести виброползучесть [16].

Говоря о гидродинамических приложениях, необходимо отметить привлекшее в конце 40-х годов XX века внимание специалистов явление, обнаруженное К. Вайссенбергом в экспериментах с очень вязкими жидкостями – растворами каучука, целлюлозы, крахмала, некоторыми пищевыми продуктами – и получившее название «центростремительный насос». Если такие среды вращать между двумя сооснными цилиндрами, один из которых может, не вращаясь, двигаться только вдоль своей оси, а второй вращается и захватывает среду, то последняя заметно поднимается и течёт при этом внутрь. Эти течения противоположны действиям тяжести и центробежной силы.

Одним из объяснений эффекта Вайссенберга стало введение в неньютоновскую модель так называемой поперечной вязкости и, таким образом, привлечение тензорно-нелинейных определяющих соотношений между скоростями деформаций и напряжениями [17, 18]. По предложению К. Трусделла подобные среды стали называть средами Рейнера – Ривлина [18-20]. К их числу относятся коллоидные растворы, высокополимерные соединения, некоторые геоматериалы [21]. Различные аспекты и качественные особенности течений сред Рейнера – Ривлина к настоящему времени хорошо изучены и вошли в обзоры, монографии и учебники [22-29].

В [30] дан анализ тензорно нелинейных определяющих соотношений, связывающих девиаторы напряжений и скоростей деформаций в несжимаемых изотропных средах. Приведены связи квадратичных и кубических инвариантов, куда входят две материальные функции среды. Основное внимание уделено комбинациям сдвиговых течений в различных криволинейных системах координат.

В [31] получены точные автомодельные решения, соответствующие обобщённой диффузии вихревого слоя в плоском и осесимметричном случаях в среде Рейнера – Ривлина. В [32] описана принципиальная схема установочного эксперимента по нахождению двух материальных функций от двух инвариантов, входящих в определяющие соотношения тензорно нелинейной несжимаемой среды. В качестве базового течения такой среды взята комбинация радиального растекания и двух одномерных сдвигов во взаимно перпендикулярных направлениях, реализующихся в цилиндрическом слое.

В [33] представлены свойства изотропных нелинейных трёхмерных и двумерных тензор-функций, встречающихся в МДТТ, которые зависят от двух тензорных аргументов и обладают потенциалом по одному из них. Вторым тензорным аргументом может быть некоторый материальный параметр, характеризующий структуру, например, повреждённость.

Список использованных источников

1. *Bell J. F.* Experimental Foundations in Mechanics of Solids. Part. 1. Infinite Strains / J. F. Bell. – Moscow: Nauka, 1984. – 600 p. (in Russian).
2. *Bell J. F.* Experimental Foundations in Mechanics of Solids. Part. 2. Finite Strains / J. F. Bell. – Moscow: Nauka, 1984. – 432 p. (in Russian).
3. *Wertheim G.* Memoir sur la torsion. Premiere Partie / G. Wertheim // Annales de Chimie et de Physique. – 1857. – Ser. 50. – P. 195-321.
4. *Poynting J. H.* On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distorsional waves in steel / J. H. Poynting // Proc. Roy. Soc. London. – 1912. – Ser. A86. – P. 534-561.
5. *Green A. E.* A note on second-order effect in the torsion of incompressible cylinders / A.E. Green // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1954. – V. 50. – No. 3. – P. 488-490.
6. *Chen M.* Second-order effect of an elastic circular shaft during torsion / M. Chen, Z. Chen // Appl. Math. Mech. – 1991. – V. 12. – P. 769-776.
7. *Astapov V. F.* Torsion of a continuous cylinder of isotropic elastic material / V. F. Astapov, A. A. Markin, M. Yu. Sokolova // Izv. Tula State Univ. Ser. Mathematics, Mechanics, Informatics. – 1999. – V. 5. – No. 2. (in Russian).

8. *Gavrilyachenko T. V.* On special behavior of nonlinear compressible solids of cylindrical form by torsion / T. V. Gavrilyachenko, M. I. Karyakin // Applied Mech. And Techn. Phys. – 2000. – V. 41. – No. 2. – P. 188-193. (in Russian).
9. *Batra R. C.* Generalized Poynting effects in prismatic bars / R. C. Batra, F. dell'Isola, G. C. Ruta // J. Elasticity. – 1998. – V. 50. – No. 2. – P. 181-196.
10. *Akinola A.* An energy function for transversely-isotropic elastic material and the Poynting effect / A. Akinola // Korean J. Comput. Appl. Math. – 1999. – V. 6. – No. 3. – P. 639-649.
11. *Adamov A. A.* Torsion of a viscoelastic cylinder of incompressible material by finite strains / A.A.Adamov // Stress-strain state and strength of constructions. Sverdlovsk: USSR Ural Sci. Center Ed., 1982. – P. 61-65. (in Russian).
12. *Malyshev B. M.* Plastic flow by synchronous continuous tension and torsion under small torsion moments / B.M.Malyshev // Vestn. Moscow State Univ. Ser. Mathematics, Mechanics, Astronomy, Physics, Chemistry. – 1958. – No. 1. – P. 55-68. (in Russian).
13. *Malyshev B. M.* Torsion of tubes by step change of torsion moment in a process of continuous tension / B. M. Malyshev // Vestn. Moscow State Univ. Ser. Mathematics, Mechanics, Astronomy, Physics, Chemistry. – 1958. – No. 2. – P. 33-46. (in Russian).
14. *Chaboche J. L.* Modeling of ratcheting: evaluation of various approaches / J. L. Chaboche // Europ. J. Mech. Ser. A. Solids. – 1994. – V. 13. – No. 4. – P. 501-518.
15. *Delobelle P.* Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel / P. Delobelle, P. Robinet, L. Bocher // Internat. J. Plasticity. – 1995. – V. 11. – No. 4. – P. 295-330.
16. *Lokoshchenko A. M.* On vibrocreep / A. M. Lokoshchenko, S. A. Shesterikov // Izv. USSR Acad. Sci. Ser. Mech. of Solids – 1966. – No. 3. P. 141-143. (in Russian).
17. *Malinin N. I.* On a problem of Weissenberg effect / N.I. Malinin // Colloid. J. – 1960. – V. 22. – No. 2. – P. 201. (in Russian).
18. *Reiner M.* Rheology / M. Reiner. – Moscow: Mir, 1965. – 224 p. (in Russian).
19. *Rivlin R. S.* Stress-deformation relations for isotropic materials / R. S. Rivlin, J. L. Ericksen // J. Rational Mech. Anal. – 1955. – V. 4. – No. 2. – P. 323-425.
20. *Rivlin R. S.* The formulation of constitutive equations in continuum physics. Part I / R. S. Rivlin // Arch. Rational Mech. Anal. 1960. – V. 4. – No. 2. – P. 129-144.
21. *Nikolaevskii V. N.* Mechanics of geomaterials. Complicated models / V. N. Nikolaevskii // Itogi nauki i tekhniki. Ser. MDTT. – Moscow: VINITI Ed., 1987. – V. 19. – P. 148-176. (in Russian).
22. *Wilkinson W. L.* Non-Newtonian Fluids. Hydromechanics, Mixing, and Heat Transfer / W. L. Wilkinson. – Moscow: Mir, 1964. – 216 p. (in Russian).
23. *Astarita J.* Foundations in Hydromechanics of Non-Newtonian Fluids / J. Astarita, J. Marrucci. – Moscow: Mir, 1978. – 312 p. (in Russian).
24. *Bibik E. E.* Rheology of Dispersible Systems / E. E. Bibik. – Leningrad: LGU Ed., 1981. – 172 p. (in Russian).
25. *Litvinov V. G.* Flow of Nonlinear Viscous Fluid / V. G. Litvinov. – Moscow: Nauka, 1982. – 374 p. (in Russian).
26. *Brutyan M. A.* Hydrodynamics of non-Newtonian fluids / M. A. Brutyan, P. L. Krapivskii // Итоги Itogi nauki i tekhniki. Ser. Complex and Special Parts of Mechanics. – Moscow: VINITI Ed., 1991. – V. 4. – P. 3-98. (in Russian).
27. *Andreev V. K.* Symmetries of nonclassical models of hydrodynamics / V. K. Andreev, V. V. Bublik, V. O. Bytev. – Novosibirsk: Nauka, 2003. – 352 p. (in Russian).
28. *Skul'skii O. I.* Mechanics of anomalous viscous fluids / O. I. Skul'skii, S. N. Aristov. – Moscow: R&C Dynamics, 2004. – 156 p. (in Russian).
29. *Miroshnichenko D. S.* Influence of non-Newtonian properties of disperse fluids on rheological behavior of diluted suspensions / D. S. Miroshnichenko. – Thesis for candidate of phys.-math. sci. 01.02.05. – Kyiv: KNU im. T. G. Shevchenka, 2000. – 129 p. (in Ukrainian).
30. *Georgievskii D. V.* Tensor nonlinear effects by isothermal deformation of continuum media / D. V. Georgievskii // Advances of Mechanics (Uspekhi mekhaniki). – 2002. – V. 1. – P. 150-176. (in Russian).
31. *Georgievskii D. V.* Tensor nonlinear shear flows: material functions and diffusion-vortex solutions / D. V. Georgievskii // Nonlinear Dynamics. – 2011. – V. 7. – No. 2. – P. 451-463. (in Russian).
32. *Georgievskii D. V.* Establishing experiments to find the material functions of tensor nonlinear constitutive relations / D. V. Georgievskii, W. H. Mueller, B. E. Abali // Izv. Ran. Ser. Phys. – 2012. – V. 76. – No. 12. – P. 1534-1537. (in Russian).
33. *Georgievskii D. V.* On potential isotropic tensor functions of two tensor arguments in solid mechanics / D. V. Georgievskii // Izv. RAN. Ser. MTT. – 2010. – No. 3. – P. 220-224. (in Russian).

Поступила в редколлегию 12.01.13

УДК 539.3

Говоруха В. Б.[1], д. ф.-м. н., доц.,
Ходанен Т. В.[1], к. ф.-м. н.,
Лобода В. В.[1], д. ф.-м. н., проф.

Об электрических и магнитных граничных условиях на берегах трещины в пьезоэлектромагнитном материале

Рассмотрена плоская задача для пьезоэлектромагнитного пространства с трещиной с конечной электрической и магнитной проницаемостями. Проблема сведена к векторной задаче линейного сопряжения, которая решена точно. Найдены аналитические выражения для напряжений, электрических и магнитных смещений, их коэффициентов интенсивности, а также для скорости освобождения энергии. Проиллюстрирована зависимость интенсивности электрического и магнитного потоков через трещину от параметров нагружения.

Ключевые слова: трещина, пьезоэлектромагнетик, конечная проницаемость.

[1] Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, 49010, г. Днепропетровск, пр. Гагарина, 72
e-mail: govorukhavb@yahoo.com, loboda@mail.dsu.dp.ua, thod@ua.fm

V. B. Govorukha[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
T. V. Hodanen[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
V. V. Loboda[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

On electric and magnetic boundary conditions on the crack faces in piezoelectromagnetic material

A plane problem for piezoelectromagnetic space with a crack of finite electric and magnetic permeability is considered. The problem is reduced to the vector Hilbert problem which is solved exactly. The analytical expressions for the stresses, electric and magnetic fluxes, their intensity factors, as well as for the energy release rate are found. Illustrates The dependencies of the electric and magnetic fluxes through the crack with respect to the loading parameters are illustrated.

Key Words: crack, piezoelectromagnetic, limited permeability.

[1] Oles Gonchar National University of Dnipropetrovsk, 49010, Dnipropetrovsk, Gagarina avenue, 72
e-mail: govorukhavb@yahoo.com, loboda@mail.dsu.dp.ua, thod@ua.fm

1. Введение

Актуальность изучения влияния разных видов внешних нагрузок – электрических, магнитных и механических – на параметры разрушения новых композитных материалов, характеризующихся разными пьезоэлектрическими, пироэлектрическими, пьезомагнитными свойствами, очевидна. Электроупругое состояние пьезоэлектрических тел как с дефектами, так и без них изучалось в монографиях [1, 2].

Использование на практике материалов с выраженными одновременно пьезоэлектрическим и пьезомагнитным эффектами обусловило появление ряда работ по изучению трещин в такого рода материалах под действием механической нагрузки, электрического и магнитного потоков [3-5].

Важным фактором является проблема правильного выбора граничных условий на берегах трещины, которая применительно к пьезоэлектрическому материалу впервые рассматривалась в [6]. Что же касается пьезоэлектромагнитного материала, то проблема выбора электрических и магнитных условий на берегах трещины обсуждалась в [7].

Данная работа посвящена решению плоской задачи для трещины в пьезоэлектрическом/ пьезомагнитном пространстве под действием магнито-электро-механический нагрузки с учетом наиболее общего вида электрических и магнитных граничных условий на берегах трещины.

2. Формулировка основных соотношений

Рассматривается пьезоэлектромагнитный материал, определяющие соотношения для которого имеют вид [3]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijks}\varepsilon_{ks} - e_{sij}E_s - h_{sij}H_s\,, \\ D_i = e_{iks}\varepsilon_{ks} + \alpha_{is}E_s + d_{is}H_s\,, \\ B_i = h_{iks}\varepsilon_{ks} + d_{is}E_s + \gamma_{is}H_s\,, \end{cases} \qquad (1)$$

© В. Б. Говоруха, Т. В. Ходанен, В. В. Лобода, 2013

где σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_i, B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукций; E_i, H_i – напряженности электрического и магнитного полей, c_{ijks} – упругие константы, e_{iks} – пьезоэлектрические, h_{iks} – пьезомагнитные, d_{is} – электромагнитные, α_{is}, γ_{is} – диэлектрические и магнитные проницаемости.

Уравнения равновесия в отсутствии массовых сил и свободных зарядов таковы:

$$\sigma_{ij,\,j}=0\,,\ D_{i,i}=0\,,\ B_{i,i}=0\,. \qquad (2)$$

Выражения для деформаций, напряженности электрического и магнитного полей имеют вид

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,\,j}+u_{j,i})\,,\ \ E_i=-\varphi_{,i}\,,\ \ H_i=-\phi_{,i}\,, \qquad (3)$$

где u_i – компоненты вектора перемещения, φ, ϕ – электрический и магнитный потенциалы.

3. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается трещина на промежутке $(-a,\,a)$ в бесконечном пьезоэлектромагнитном пространстве. На бесконечности действуют равномерно распределенная растягивающая нагрузка, электрический и магнитный потоки σ^{∞}, D^{∞}, B^{∞} соответственно (рис. 1). Предполагается, что все

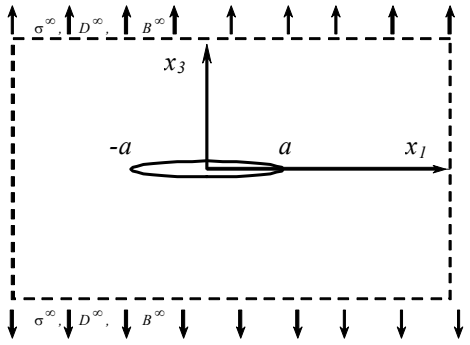


Рис. 1. Сечение пьезоэлектромагнитного пространства с трещиной

поля не зависят от координаты x_2, а на берегах трещины выполняются равенства: $\sigma_{33}=0$, $D_3=D_0$ и $B_3=B_0$, где D_0 и B_0 пока неизвестные величины.

Воспользуемся представлениями [5]:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1,\,0)=\mathbf{G}\{\mathbf{W}^{+}(x_1)+\mathbf{W}^{-}(x_1)\}\,, \qquad (4)$$

$$\langle\mathbf{V}'(x_1)\rangle=\mathbf{W}^{+}(x_1)-\mathbf{W}^{-}(x_1)\,, \qquad (5)$$

где $\mathbf{t}^{(1)}=[\sigma_{31},\,\sigma_{33},\,D_3,\,B_3]^T$, $\mathbf{V}=[u_1,\,u_3,\,\varphi,\,\phi]^T$, $\mathbf{G}=[G_{ij}]\big|_{i,\,j=1,\,3,\,4,\,5}$ и скобки $\langle\ \rangle$ означают скачок соответствующей функции при переходе через плоскость $x_3=0$.

При отсутствии сдвиговой нагрузки имеем: $W_1(z)\equiv 0$. Тогда соотношения (4), (5) можно записать в виде

$$\mathbf{t}_0^{(1)}=\mathbf{G}_0\{\mathbf{W}_0^{+}+\mathbf{W}_0^{-}\}\,, \qquad (6)$$

$$\langle\mathbf{V}_0'\rangle=\mathbf{W}_0^{+}-\mathbf{W}_0^{-}\,, \qquad (7)$$

где $\mathbf{t}_0^{(1)}=[\sigma_{33},\,D_3,\,B_3]^T$, $\mathbf{V}_0=[u_3,\,\varphi,\,\phi]^T$, $\mathbf{G}_0=[G_{ij}]\big|_{i,\,j=3,\,4,\,5}$, $\mathbf{W}_0=[W_3,\,W_4,\,W_5]^T$.

Снося σ^{∞}, D^{∞}, B^{∞} на трещину и рассматривая только локальное электромагнитоупругое состояние, получаем, что на трещине

$$\mathbf{G}_0\{\mathbf{W}_0^{+}+\mathbf{W}_0^{-}\}=\hat{\mathbf{t}}\ \ \text{на}\ (-a,\,a)\,, \qquad (8)$$

где

$$\hat{\mathbf{t}}=[-\sigma^{\infty},\,-D^{\infty}+D_0,\,-B^{\infty}+B_0]^T\,.$$

Из (8) следует, что

$$\mathbf{W}_0^{+}+\mathbf{W}_0^{-}=\mathbf{G}_0^{-1}\hat{\mathbf{t}}\ \ \text{на}\ (-a,\,a)\,, \qquad (9)$$

причем $\mathbf{W}(z)\big|_{z\to\infty}=0$.

Решение последней задачи линейного сопряжения имеет вид

$$\mathbf{W}_0(z)=-\frac{1}{2}\mathbf{G}_0^{-1}\hat{\mathbf{t}}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-b^2}}-1\right). \qquad (10)$$

На основании (10) получаем для $|x_1|\ge a$:

$$\mathbf{t}_0^{(1)}=2\mathbf{G}_0\mathbf{W}_0(x_1)=-\hat{\mathbf{t}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^{\,2}-a^2}}-1\right). \qquad (11)$$

Из соотношений (9) следует, что на $(-a,\,a)$ $\mathbf{W}_0^{-}=\mathbf{G}_0^{-1}\hat{\mathbf{t}}-\mathbf{W}_0^{+}$. Тогда на основании (7) имеем

$$\langle\mathbf{V}_0'\rangle=2\mathbf{W}_0^{+}(x_1)-\mathbf{G}_0^{-1}\hat{\mathbf{t}}=-\mathbf{G}_0^{-1}\hat{\mathbf{t}}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}\,.$$

Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$\langle\mathbf{V}_0\rangle=i\mathbf{G}_0^{-1}\hat{\mathbf{t}}\sqrt{a^2-x_1^2}\ .$$

Обозначая $\mathbf{\Lambda}=-i\mathbf{G}_0^{-1}/4$, приходим к следующему выражению:

$$\langle \mathbf{V}_0 \rangle = -4\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{t}}\sqrt{a^2 - x_1^2}\,. \qquad (12)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений, электрической и магнитной индукции введем следующим образом:

$$\mathbf{K} = \left[K_1,\, K_4,\, K_5\right]^T = \hat{\mathbf{t}}\sqrt{\pi a}\,. \qquad (13)$$

Тогда скорость освобождения энергии

$$G = \left[K_1,\, K_4,\, K_5\right]\mathbf{\Lambda}\left[K_1,\, K_4,\, K_5\right]^T. \qquad (14)$$

Учтем, что для наполнителя трещины $D_3 = \varepsilon_a E_a$, $B_3 = \gamma_a H_a$. Это означает, что

$$D_0 = -\varepsilon_a \frac{\langle \varphi \rangle}{\langle u_3 \rangle}, \quad B_0 = -\gamma_a \frac{\langle \phi \rangle}{\langle u_3 \rangle}. \qquad (15)$$

С учетом представления (13) соотношения (15) принимают вид

$$D_0 = -\varepsilon_a \frac{(\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{t}})_2}{(\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{t}})_1}, \quad B_0 = -\gamma_a \frac{(\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{t}})_3}{(\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{t}})_1}. \qquad (16)$$

Но

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sigma^\infty \\ -D^\infty + D_0 \\ -B^\infty + B_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\Lambda_{11}\sigma^\infty - & \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) - & \Lambda_{13}(B^\infty - B_0) \\ -\Lambda_{21}\sigma^\infty - & \Lambda_{22}(D^\infty - D_0) - & \Lambda_{23}(B^\infty - B_0) \\ -\Lambda_{31}\sigma^\infty - & \Lambda_{32}(D^\infty - D_0) - & \Lambda_{33}(B^\infty - B_0) \end{Bmatrix}.$$

Подставляя компоненты последнего представления в (16), получаем

$$\begin{cases} D_0\left\{\Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0)\right\} = \\ = -\varepsilon_a\left\{\Lambda_{21}\sigma^\infty + \Lambda_{22}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{23}(B^\infty - B_0)\right\}, \\ B_0\left\{\Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0)\right\} = \\ = -\gamma_a\left\{\Lambda_{31}\sigma^\infty + \Lambda_{32}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{33}(B^\infty - B_0)\right\}. \end{cases} \qquad (17)$$

Соотношения (17) представляют собой нелинейную систему алгебраических уравнений относительно D_0 и B_0. После определения D_0 и B_0, из (9) находится $\hat{\mathbf{t}}$, а далее по формуле (12) – $\langle \mathbf{V}_0 \rangle$, по формуле (11) – $\mathbf{t}_0^{(1)}$, по формуле (13) – $\mathbf{K}$, а по формуле (14) – G.

Система (17) имеет несколько решений. Подходящим будет то, для которого трещина остается открытой, т. е. выполняется условие $\langle u_3 \rangle > 0$. На основании (12)

$$\langle u_3(x_1, 0) \rangle = -4(\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{t}})_1\sqrt{a^2 - x_1^2} =$$

$$= 4\left\{\Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0)\right\}\sqrt{a^2 - x_1^2}\,.$$

Максимальное раскрытие в середине трещины выражается формулой

$$\langle u_3(0, 0) \rangle = 4a\left\{\Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0)\right\}.$$

4. Численные результаты и их анализ

Расчеты проводились для пьезоэлектрического/пьезомагнитного материала $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ со следующими значениями физических констант: $c_{11} = 226$, $c_{13} = 124$, $c_{33} = 216$, $c_{44} = 44$ (ГПа), $e_{31} = -2{,}2$, $e_{33} = 9{,}3$, $e_{15} = 5{,}8$ (Кл/м^2), $\alpha_{11} = 56{,}4 \cdot 10^{10}$, $\alpha_{33} = 63{,}5 \cdot 10^{10}$ (Кл^2/Н·м^2), $h_{31} = 290$, $h_{33} = 350$; $h_{15} = 275$ (Н/А·м), $\gamma_{11} = 810 \cdot 10^{-7}$, $\gamma_{33} = 835 \cdot 10^{-7}$ (Н·с^2/Кл^2).

Характеристики наполнителя трещины выбирались следующими: $\varepsilon_a = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ (Кл^2/Н·м^2), $\gamma_a = \gamma_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Н·с^2/Кл^2), что соответствует воздуху, а также $\varepsilon_a = 81\varepsilon_0$, $\gamma_a = 0{,}99992\gamma_0$ для воды. Предполагалось, что электрический и магнитный потоки на бесконечности имеют интенсивности $D^\infty = 0{,}01$ Кл/м^2, $B^\infty = -7{,}65 \cdot 10^{-3}$ Вб/м^2. В табл. 1 показаны результаты расчета электрического и магнитного потоков через трещину, а также раскрытие трещины в ее средней точке, соответствующие различным σ^∞, для наполнителя-воздуха, а в табл. 2 – значения этих же величин для наполнителя-воды.

Таблица 1

Зависимости электрического и магнитного потоков через трещину и раскрытия трещины для воздушного наполнителя трещины

σ^∞, *Pa*	D_0, *Кл/м*^{2}	B_0, *Вб/м*^{2}	$u_3(0,0)$, *м*
10^5	0,00998	-0,00795	$2{,}98 \cdot 10^{-8}$
10^6	0,00981	-0,0106	$2{,}97 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^6$	0,00911	-0,0225	$1{,}47 \cdot 10^{-6}$
10^7	0,00831	-0,0369	$2{,}93 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^7$	0,00695	-0,0645	$5{,}79 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^7$	0,00405	-0,140	$1{,}41 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

То же, что в табл. 1, для наполнителя-воды

σ^{∞}, *Pa*	D_0, *Кл/м*^{2}	B_0, *Вб/м*^{2}	$u_3(0,0)$, *м*
10^5	0,00999	-0,00791	$2{,}73\cdot10^{-8}$
10^6	0,00992	-0,0103	$2{,}73\cdot10^{-7}$
$5\cdot10^6$	0,00961	-0,0208	$1{,}36\cdot10^{-6}$
10^7	0,00923	-0,0337	$2{,}73\cdot10^{-6}$
$2\cdot10^7$	0,00847	-0,0595	$5{,}46\cdot10^{-6}$
$5\cdot10^7$	0,00619	-0,134	$1{,}36\cdot10^{-5}$

Из результатов, приведенных в табл. 1 и 2, видно, что при малых значениях напряжений электрический и магнитный потоки через трещину незначительно отличаются от своих значений на удалении от трещины. В то же время рост напряжений ведет к существенному изменению как указанных факторов, так и раскрытия трещины. Наполнитель трещины также оказывает влияние на расчетные факторы, однако это влияние не есть существенным.

5. Выводы

Рассмотрена трещина с конечной электрической и магнитной проницаемостями в пьезоэлектрическом/пьезомагнитном пространстве под действием удаленной механической нагрузки, электрического и магнитного потоков. Путем представления всех факторов через комплексные потенциалы проблема сведена к задаче линейного сопряжения (8), для которой получено точное решение (11). С использованием этого решения получены выражения для напряжений, электрических и магнитных смещений (12), их коэффициентов интенсивности (14), а также для скорости освобождения энергии (15). Путем решения нелинейных уравнений (18) получены зависимости электрического и магнитного потоков в области трещины от удаленных механической нагрузки, электрического и магнитного смещений.

Список использованных источников

1. *Grinchenko B. T., Ulitko A. F., Shulga N. A.* Mechanics of coupled fields in the elements of constructions. – Editor Guz A. N. – K.: Naukova Dumka, 1989. – V. 5. – 280 p.
2. *Parton V. Z., Kudryavtsev B. A.* Electromagnetoelasticity. – Gordon and Breach Science Publishers, New York. – 1988. – 471 p.
3. *Sih G. C., Song Z. F.* Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO3 – CoFe2O4 composite // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – V. 39. – P. 209-227.
4. *Kaloerov S. A., Boronenko O. I.* Two-dimensional magneto-elastic problem for a multiply connected piezomagnetic body // Int. Appl. Mech. – 2005. – V. 41, No. 10. – P. 1137-1147.
5. *Herrmann K. P., Loboda V. V., Khodanen T. V.* An interface crack with contact zones in piezoelectric/piezomagnetic materials // Archive of Applied Mechanics. – No. 80. – 2010. – P. 651-670.
6. *Polovinkina I. B., Ulitko A. F.* On the theory of equilibrium of piezoceramic bodies with cracks // Thermal Stresses in the Construction's Elements: Republican Interdepartmental Research Issue. – Charkov: Higher School - 1978. – No. 18. – P. 10-17.
7. *Wang B.-L., Mai Y.-W.* Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magnetoelectroelastic materials // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – V. 44. – P. 387-398.

Поступила в редколлегию 31.03.13

УДК 519.9

Горошко О. О.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Лебедєва І. В.[1], к. ф.-м. н., доц.

Параметричні коливання гіроскопічного маятника

Досліджуються параметричні коливання гіроскопічного маятника, збуджені вертикальною вібрацією точки підвісу. Для опису коливань застосовуються параметр віброактивності опори – відношення віброприскорення до прискорення вільного падіння – та модифікована площина Айнса – Стрета. Побудовано область нестійкості прецесійного руху та підтверджено нечутливість нутаційних коливань до параметричних збуджень гіроскопічного маятника за реальних значень параметра віброактивності.

Ключові слова: гіроскопічний маятник, параметричні коливання, параметр віброактивності.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 60
e-mail: Lebedevai@ukr.net

O. O. Goroshko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.,
I. V. Lebedyeva[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Parametric oscillations of gyroscopic pendulum

Parametric oscillations of gyroscopic pendulum excited by vertical vibration of suspension point were studied. Parameter of vibration activity – the ratio of vibration acceleration to acceleration of gravity – and modified Ayns – Stret plane were applied to describe the oscillations. The nonstability areas of precession motion were constructed and nutation vibration insensitivity to parametric excitation was confirmed for gyroscopic pendulum under real values of parameter of vibration activity.

Key Words: gyroscopic pendulum, parametric oscillation, parameter of vibration activity.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 60, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: Lebedevai@ukr.net

Вступ

Модель гіроскопічного маятника використовується для опису руху гіровертикалі як чутливого елемента навігаційних приладів, підвісних промислових центрифуг, систем гіростабілізації тощо. На відміну від параметричних коливань фізичного маятника рух гіроскопічного маятника здійснюється у формі двох кругових рухів – зворотної прецесії та прямої нутації. Відповідно, до опису цих рухів застовуються модифікації класичних схем, зокрема, модифікована площина Айнса – Стрета для побудови областей стійкості та нестійкості параметричних коливань.

Рух гіроскопічного маятника розглянемо на прикладі типової підвісної центрифуги, встановленої на вібруючому фундаменті [1]. У цехових умовах вібрацію фундаменту спричиняє робота близько розташованих важких силових машин.

Диференціальні рівняння руху центрифуги

Згідно з принципом Даламбера при вертикальних коливаннях точки підвісу диференціальні рівняння руху центрифуги в кутах Резаля [2, 3] мають вигляд

$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + \mu\dot{\alpha} + \left(mgl + c_0\right)\left(1 + h\cos pt\right)\alpha = 0,$$

$$A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + \mu\dot{\beta} + \left(mgl + c_0\right)\left(1 + h\cos pt\right)\beta = 0. \quad (1)$$

Тут $h = h_0 p^2 / g$ – безрозмірний параметр віброактивності вертикальних коливань точки підвісу, h_0 та p – амплітуда й частота вібрації, c_0 – момент жорсткості кріплення центрифуги в опорі, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – кути відхилення осі центрифуги від вертикалі (кути Резаля), $\dot{\varphi}$ – кутова швидкість обертання ротора центрифуги $\mu\dot{\alpha}$, $\mu\dot{\beta}$ – моменти в'язкого тертя в опорі, $A\dot{\alpha}$, $A\dot{\beta}$, $H = C\dot{\varphi}$ – проекції кінетичного моменту ротора на осі Резаля.

Дослідження стійкості параметричних коливань гіроскопічного маятника

Рівняння (1) описують параметричні коливання підвісної центрифуги. За класичною схемою [4, 5] розв'язок системи (1), який задає межу областей стійкості та нестійкості руху ротора, визначається у формі тригонометричних рядів

$$\alpha = \sum_k \left(a_k \cos\frac{kpt}{2} + b_k \sin\frac{kpt}{2} \right),$$

$$\beta = \sum_k \left(a_k \sin\frac{kpt}{2} - b_k \cos\frac{kpt}{2} \right). \quad (2)$$

© О. О. Горошко, І. В. Лебедєва, 2013

Тут k = 1, 3, 5, … відповідають непарному, а k = 0, 2, 4, … – парному фундаментальному розв'язку. У даній роботі обмежимось дослідженням непарних розв'язків. Підставляючи ряди (2) в рівняння (1) та перетворюючи добутки тригонометричних функцій за відомими формулами

$$\cos\frac{kpt}{2}\cos kpt = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{k-2}{2}pt + \cos\frac{k+2}{2}pt\right),$$

$$\sin\frac{kpt}{2}\cos kpt = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{k-2}{2}pt + \sin\frac{k+2}{2}pt\right),$$

дістанемо нескінченну систему рівнянь для визначення коефіцієнтів тригонометричних рядів a_k і b_k

$$\left[D\left(\frac{kp}{2}\right)\cos\frac{kpt}{2} + \frac{mglh}{2}\left(\cos\frac{k-2}{2}pt + \cos\frac{k+2}{2}pt\right)\right]a_k + \mu\frac{kp}{2}\cos\frac{kpt}{2}b_k = 0,$$

$$-\mu\frac{kp}{2}a_k + \left[D\left(\frac{kp}{2}\right)\sin\frac{kpt}{2} - \frac{mglh}{2}\left(\sin\frac{k-2}{2}pt + \sin\frac{k+2}{2}pt\right)\right]b_k = 0$$

$$(k = 1, 3, 5, ...), \quad (3)$$

де введено позначення

$$D\left(\frac{kp}{2}\right) = -A\left(\frac{kp}{2}\right)^2 + H\left(\frac{kp}{2}\right) + mgl + c_0. \quad (4)$$

Прирівнюючи до нуля множники при $\sin(kpt/2)$, $\cos(kpt/2)$, дістанемо систему двох рівнянь

$$\left(D\left(\frac{kp}{2}\right) + \frac{mglh}{2}\right)a_k + \frac{\mu p}{2}b_k - \frac{mgh}{2}a_{k+2} + ... = 0,$$

$$-\frac{\mu p}{2}a_k + \left(D\left(\frac{kp}{2}\right) - \frac{mglh}{2}\right)b_k - \frac{mgh}{2}b_{k+2} + ... = 0$$

$$(k = 1, 3, 5, ...). \quad (5)$$

Чотиридіагональний нескінченний визначник системи однорідних рівнянь (5) збіжний [4]. Збіжність цих визначників дозволяє при побудові розв'язків використовувати вкорочену систему рівнянь (5). Для відшукання наближених значень коефіцієнтів a_1 і b_1 з достатньою точністю обмежимось рівняннями

$$\left(D\left(\frac{kp}{2}\right) + \frac{mglh}{2}\right)a_1 + \frac{\mu p}{2}b_1 = 0,$$

$$-\frac{\mu p}{2}a_1 + \left(D\left(\frac{kp}{2}\right) - \frac{mglh}{2}\right)b_1 = 0. \quad (6)$$

Визначник цієї однорідної системи (визначник В. В. Болотіна) є поліномом

$$\Delta\left(\frac{p}{2}\right) = D^2\left(\frac{p}{2}\right) + \left(\frac{\mu p}{2}\right)^2 - \left(\frac{mglh}{2}\right)^2 = 0. \quad (7)$$

Поліном (4) при $p/2 = \lambda$ має форму

$$A\lambda^2 - H\lambda - mgl - c_0 = 0. \quad (8)$$

Це характеристичне рівняння диференціальних рівнянь коливань гіроскопічного маятника визначає частоти прецесії та нутації

$$\lambda_{1,2} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 + 4A(mgl + c_0)}}{2A}. \quad (9)$$

Таким чином, при значеннях параметра віброактивності

$$h_0 < \frac{2\mu\lambda_{1,2}}{mgl} \quad (10)$$

поліном (7) не дорівнює нулю, а, отже, рівняння (6) не має розв'язку. Фізично умова (10) визначає рівень нечутливості гіроскопічного маятника до параметричного збудження. За розв'язком рівняння (7) при $p/2 = \lambda$ значення параметра h обчислюється за формулою

$$h = \pm\frac{2}{mgl}\sqrt{\left(A\lambda^2 - H\lambda - \left(mgl + c_0\right)\right)^2 + \left(\mu\lambda\right)^2}. \quad (11)$$

Згідно з прецесійною теорією [3] частоти прецесії й нутації мають значення

$$\lambda_1 = -\frac{mgl + c_0}{C\dot{\varphi}}, \quad \lambda_2 = \frac{C\dot{\varphi}}{A} \quad (12)$$

відповідно, а розв'язки (11) набувають вигляду

$$h_1 = \pm\frac{2}{\lambda_1}\sqrt{\left(\lambda - \lambda_1\right)^2 + \left(\frac{\mu\lambda}{H}\right)^2},$$

$$h_2 = \pm\frac{2\lambda A}{mgl}\sqrt{\left(\lambda - \lambda_2\right)^2 + \left(\frac{\mu\lambda_2}{H}\right)^2}. \quad (13)$$

Модифікована площина Айнса-Стрета

У площині Айнса – Стрета параметрів $((2\lambda/p)^2, h)$ за теоремою Флоке чисто періодичні розв'язки рівнянь задають межі областей стійкості та нестійкості коливань фізичного маятника. Для визначення меж нестійкості та стійкості прецесійних і нутаційних коливань гіроскопічного маятника введемо модифіковану площину Айнса – Стрета параметрів $((2\lambda/p)^2, h)$.

На рис. 1 представлені області стійкості та нестійкості типової промислової центрифуги ФПН-1250 (рис. 2) [1] для таких значень параметрів: m = 1000 кг, $\dot{\varphi} = 80$ с$^{-1}$, l = 2 м, l_0 = 2 м, r = = 0,6 м та моментів інерції ротора центрифуги відносно точки підвісу $C = mr^2/2 = 0{,}2m$ кг м^2, $A = (m/12)(l_0^2 + 3r^2 + 12l^2) = 4{,}14m$ кг м^2.

Відношення моменту тертя в опорі та гіроскопічного моменту, яке визначає поріг чутливості гіроскопічного маятника до параметричних збуджень (10), практично перебуває в межах $0{,}01 < \mu/H < 0$. Реальні значення віброактивності опори $h = h_0 p^2/g$ обмежені одиницею (рис. 1).

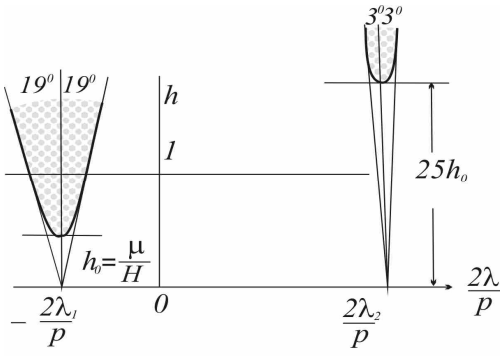


Рис. 1. Модифікована площина Айнса – Стрета

Таким чином, має місце реальна можливість утрати стійкості прецесійного руху за достатньої віброактивності h фундаменту. Параметричне збудження нутаційного руху в межах віброактивності опори $h < 1$ практично неможливе.

Конструкції центрифуг ФПН-1250 обладнані спеціальним штурвалом для регулювання жорсткості c_0 та в'язкості μ у сферичній опорі підвіски досвідченим оператором, який контролює процес фугування.

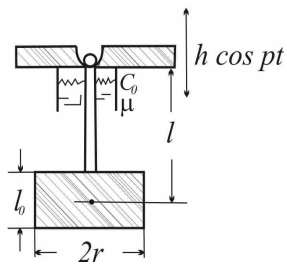


Рис. 2. Схема закріплення ротора підвісної центрифуги

Проведений науковий пошук дає змогу розробити обгрунтовані критерії для автоматизації роботи штурвалу з урахуванням амплітудно-частотної залежності віброактивності h підвіски ротора.

Висновки

Проведено дослідження параметричних коливань гіроскопічного маятника з вібруючою точкою підвісу. Основні результати роботи такі:

1. Уведено єдиний параметр віброактивності опори за амплітудним і частотним рівнями збудження та модифікація площини Айнса – Стрета для резонансних областей параметричних збуджень.

2. Побудована область параметричного збудження нестійких коливань прецесійного руху гіроскопічного маятника.

3. Підтверджено нечутливість гіроскопічного маятника до параметричних збуджень на частотах нутаційних коливань за реальних значень параметра віброактивності.

Список використаних джерел

1. *Lukyanenko V. M., Taranets A. V.* Industrial centered fugue. – Moscow: Chemistry, 1974. – 376 p. (in Russian).
2. *Lurie A. I.* Analytical Dynamics. – Moscow: GIFML, 1961. – 824 p. (in Russian).
3. *Nicolai E. L.* Theory of gyroscopes. – Moscow, Leningrad : GITTL, 1948. – 172 p. (in Russian).
4. *Bolotin V. V.* The dynamic stability of elastic systems. – Moscow : GITTL, 1956. – 600 p. (in Russian).
5. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A course of modern analysis, Part 1. – Moscow: GIFML, 1963. – 343 p. (in Russian).
6. *Goroshko O. O., Puchko N. P, P'yatetskyy V. A.* Analysis of Stability of pendulum parametric vibrations at different ways of excitation // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2000. – № 8. – P. 115-119. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 10.05.13

УДК 539.5

Гуржій О. А.[1], д. ф.-м. н., с. н. с.
Шалденко О. В.[1], аспірант

Інтенсивні режими адвекції виділеної рідини в течії Діна

Розглядається задача адвекції виділеної рідини усередині криволінійної труби з круговим поперечним перерізом у наближенні Діна. Аналіз різних критеріїв хаотичної та регулярної адвекції показує, що в розглянутої течії існує критичне значення осьової швидкості, за якого настає суттєва інтенсифікація процесів адвекції.

Ключові слова: течія Діна, хаотична адвекція, біфуркаційна діаграма.

[1] Національний технічний університет України «КПІ», 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 5
e-mail: o.shaldenko@gmail.com

A. A. Gourjii[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.,
O. V. Shaldenko[1], PhD student

Intensive advection regime of separated fluid in Dean flow

The advection problem of separated fluid inside a curved tube with a circular cross section in Dean approximation is considered. Analysis of various criteria of chaotic and regular advection shows that a critical value of the axial velocity, at which the significant intensification of advection takes place, is exist in the considered flow.

Key Words: Dean flow, chaotic advection, bifurcation diagram.

[1] National Technical University of Ukraine “KPI”, 03056, Kiev, 37 Pobedy adv., bld. #5
e-mail: o.shaldenko@gmail.com

В современных европейских инновационных технологиях стали активно использоваться различные смесители и теплообменники на ламинарных течениях [1]. Недавнее открытие явления детерминированного хаоса позволило рассматривать проблему переноса скалярных полей в ламинарных течениях с новых концепциальных позиций [2]. Применение в различных технических устройствах хаотических течений с малыми числами Рейнольдса позволяет существенно снизить затраты энергии на их формирование при высоких значениях коэффициентов тепло- и массопереноса. Изучение особенностей таких течений является сегодня одним из важных направлений в прикладной гидромеханике.

Процессы переноса скалярных полей в жидкостях представляет собой сложное природное явление, включающее два важнейших процесса: перенос поля в связи с наличием поля скорости, и диффузия в связи с молекулярным движением [3]. Анализ геометрических и временных масштабов различных течений позволяет в некоторых случаях пренебречь диффузионными эффектами, и проблема переноса скалярного поля (или выделенной жидкости) сводится к анализу деформации границ выделенной жидкости в заданном поле скорости. Такая задача в научной литературе [4] получила название задачи об адвекции.

В настоящей работе рассматривается задача об адвекции пассивной жидкости в криволинейной трубе постоянного радиуса R с неизменным круговым поперечным сечением радиуса a и угловой протяженностью $\theta = \pm\pi$ (рис. 1). Соседние сегменты трубы периодически смещаются друг относительно друга на угол $\chi = \pm\pi/2$. Целью исследований является определение областей интенсивной адвекции в поперечном сечении криволинейной трубы.

В предположении $a << R$ для течения с малыми числами Рейнольдса Re (малые числа Дина $\mathrm{Dn} = (a/R)\,\mathrm{Re}^2$) решение задачи разделяется на течение Пуазейля вдоль прямолинейной трубы и поперечное течение, которое после нормировки на характерную осевую скорость W и радиус трубы a, может быть представлено в виде [5]:

$$u_x = \frac{\alpha}{1152}\left\{h(r) + \frac{y^2}{r}h'(r)\right\},$$

$$u_y = \frac{\alpha}{1152}\frac{xy}{r}h'(r), \quad w = \frac{\beta}{4}(1-r^2). \qquad (1)$$

где

$$h(r) = (1-r^2/4)(1-r^2)^2, \quad \alpha = \mathrm{Dn}C^2,$$

$$\beta = \frac{\mathrm{Dn}C}{\mathrm{Re}}, \quad C = -\frac{a^2}{RW\mu}\frac{\partial p}{\partial\theta}.$$

Здесь p – поле давления, а μ – динамическая вязкость жидкости, и $r^2 = x^2 + y^2$.

Утверждение равенства скорости движения пассивной жидкой частицы и скорости течения в точке, в которой она находится, приводит к урав-

© О. А. Гуржій, О. В. Шалденко, 2013

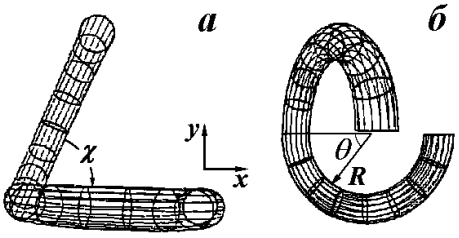


Рис. 1. Геометрия задачи

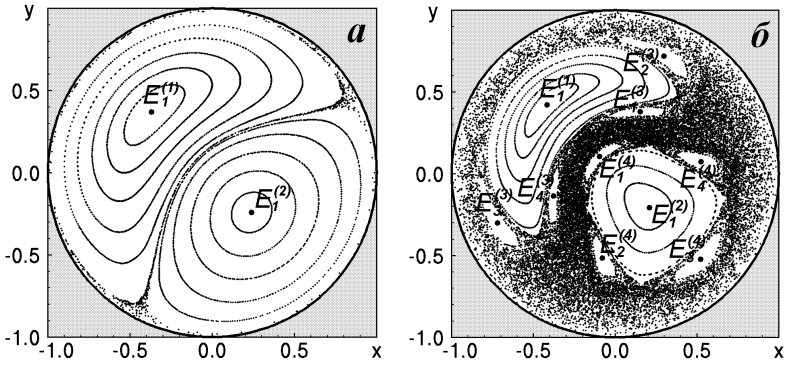


Рис. 3. Сечение Пуанкаре для жидких частиц

нению адвекции [4]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{2}$$

В дальнейшем интегрирование (2) по времени можно изменить на интегрирование вдоль осевой координаты θ. Разделив первые два уравнения (1) на третье уравнение, получаем

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{G}{1152}(4 - 5x^2 - 23y^2 + x^4 + 8x^2y^2 + 7y^4),$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{G}{192}xy(3 - x^2 - y^2), \tag{3}$$

где $G = \alpha / \beta$. Эти уравнения описывают движение жидких частиц по мере их продвижения вдоль трубы по угловой координате θ.

Движение жидкости вдоль трубы описывается системой уравнений (3). Она движется в первом сегменте трубы по замкнутым траекториям, образуя два циркуляционных течения в верхней и нижней частях поперечного сечения трубы (сплошные линии на рис. 2). На следующем сегменте (первый период, $N = 1$) циркуляционные течения поворачиваются на угол χ (штриховые линии на рис. 2). На следующих двух сегментах

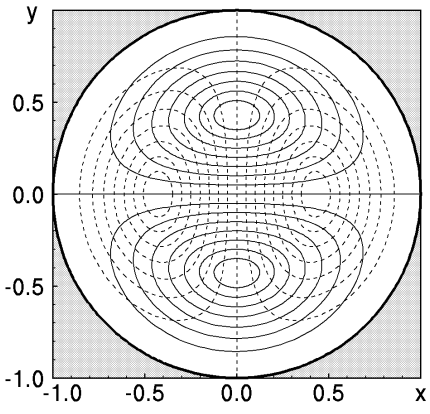


Рис. 2. Траектории жидких частиц в поперечном сечении трубы

траектории жидких частиц имеют аналогичную структуру.

При анализе режимов адвекции жидкостей исследователи пользуются основным критерием [6]: хаотическая (интенсивная) адвекция – процесс, при котором в двумерном случае длина границ выделенной жидкости растягивается во времени по экспоненциальному закону.

Для идентификации хаотического режима движения отдельных жидких частиц в работе используются различные критерии [6, 7], основанные на анализе фазовых траекторий, сечения Пуанкаре, периодических точек течения, наибольшего показателя Ляпунова для отдельных жидких частиц в рассматриваемом течении.

На рис. 3 показано сечение Пуанкаре для различных значений G. Дискретизация фазовых траекторий проводилась после прохождения жидкой частицы двух сегментов, составляющих период течения. При $G = 30.0$ (рис. 3, а), сечение Пуанкаре является регулярным во всей области течения. Анализ результатов показывает, что в течении имеются две периодические эллиптические точки ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$) первого порядка. При $G = 50.0$ в сечении Пуанкаре появляются зоны хаотического движения частиц (рис. 3, б). В области, прилегающей к эллиптическим периодическим точкам ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$), появляются периодические точки четвертого порядка, обозначенные на рисунке $E_i^{(3)}$ и $E_i^{(4)}$, где $i = 1, \ldots, 4$.

Бифуркационная диаграмма периодических точек первого порядка при изменении параметра G показана на рис. 4, на котором координаты z^* представляют собой координаты точек на прямой $y = -x$ в поперечном сечении трубы. Для малых значений G течение обладает только двумя эллиптическими (E) периодическими точками. При $G = 177$ происходит первая бифуркация, при которой образуются две пары эллиптических и гиперболических (H) точек. В дальнейшем (при $G =$

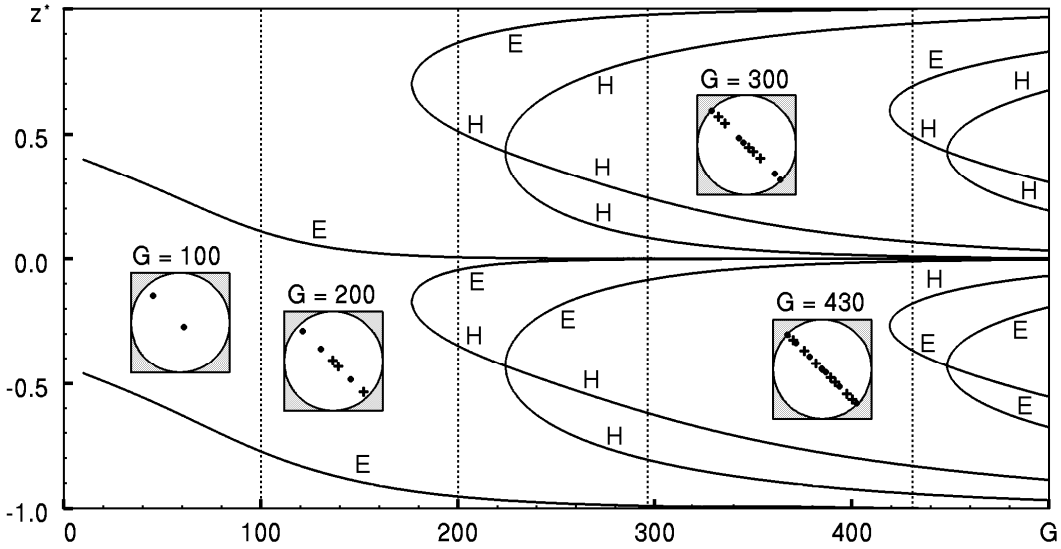
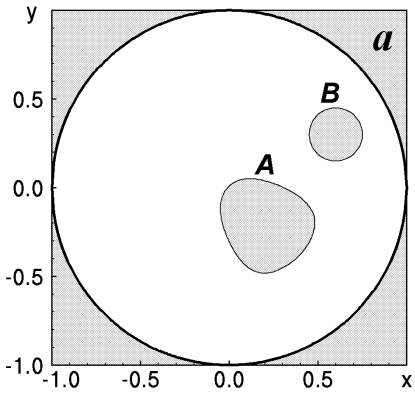


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма течения Дина при $\chi = \pi/2$, $\theta_0 = \pi$



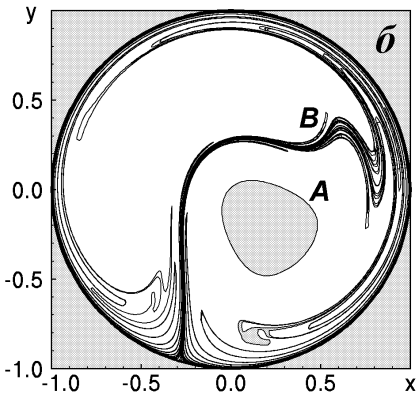


Рис. 5. Адвекция выделенной жидкости внутри регулярного и хаотического сечений Пуанкаре

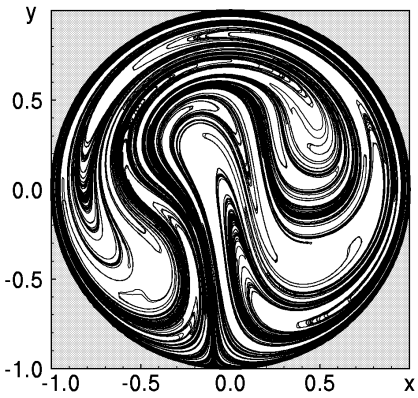


Рис. 6. Пример интенсивного режима адвекции

= 225) происходит образование одной эллиптической и трех гиперболических периодических точек. Схемы пространственного положения периодических точек при некоторых значениях G показаны на рисунке, на котором эллиптические периодические точки нанесены сплошными кружочками, а гиперболические периодические точки – крестиками.

В рассматриваемом течении можно обнаружить области выделенной жидкости, которая в течение одного периода возвращается в свое начальное положение. Выделим в начальный момент объем A жидкости, сформированный регулярным сечением Пуанкаре около эллиптической периодической точки E на рис. 3, б при $G = 50.0$. Одновременно выделим малую круговую область B (рис. 5, а) радиуса $R_0 = 0.15$ с центром в точке ($x_c = 0.6$, $y_c = 0.3$), которая расположена в хаотической зоне сечения Пуанкаре. Процесс деформации выделенного контура в рассматриваемом поле скорости рассчитывался на основе метода кусочной сплайн-интерполяции [8].

Результаты численного моделирования процесса адвекции выделенной жидкости показывают, что жидкость A в течение каждого периода возвращается в свое начальное положение. С другой стороны, выделенная жидкость B подвержена сильному растяжению вдоль границы поперечного сечения. Положение выделенных жидкостей в сечении при $N = 12$ показано на рис. 5, б.

При увеличении осевой скорости течения жидкости, интенсивность процесса адвекции существенно увеличивается. На рис. 6 показан случай адвекции жидкости при $G = 90.0$. В начальном сечении выделенная жидкость занимала положение, аналогичное выделенной жидкости A рис. 5, а. Уже после 5 периодов границы выделенной жидкости сильно растянулись, и подкрашенная жидкость разместилась по всему попе-

речному сечению. Положение выделенной жидкости при N=10 показано на рис. 6. Такой режим адвекции относится к интенсивному (хаотическому) режиму.

На рис. 7 показано изменение нормированной длины $L(z)/L(0)$ контуров выделенной жидкости для характерных режимов адвекции выделенной жидкости по мере продвижения ее вдоль оси трубы, $z = R\theta$. Цифрами *1* и *2* показаны кривые для контуров областей выделенной жидкости (рис. 5, б), расположенных в регулярной и хаотической областях сечения Пуанкаре (рис. 3). Кривая *3* иллюстрирует зависимость для случая на рис. 6. Видно, что кривые *2* и *3* возрастают по экспоненциальной зависимости, что соответствует интенсивному режиму адвекции жидкости внутри криволинейной трубы.

Исследования показали, что при увеличении приложенного градиента давления к сегментированной криволинейной трубе постоянного кругового поперечного сечения топологические свойства течения существенно усложняется. При этом происходит последовательность бифуркаций, которая сопровождается появлением системы эллиптических и гиперболических точек различного порядка. Анализ структуры сечения Пуанкаре, выполненный для системы пассивных жидких частиц, и расположение периодических точек рассматриваемого течения, позволяют оценить размеры области в поперечном сечении трубы для интенсивной и регулярной адвекции выделенной жидкости.

Численное моделирование процесса адвекции выделенной жидкости показывает, что при увеличении градиента давления к сегментам трубы площади областей застойных зон, окружающие эллиптические периодические точки течения, существенно уменьшаются.

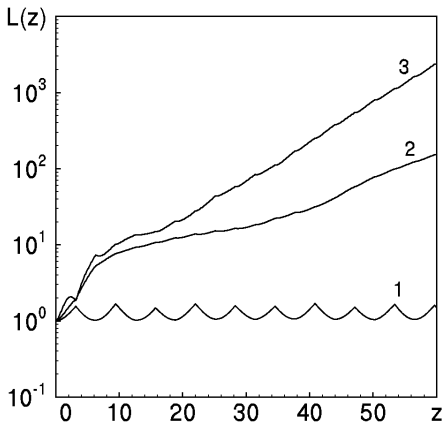


Рис. 7. Изменение длины контуров по мере продвижения вдоль трубы

В работе показано, что процессы адвекции для жидкости, расположенной в начальный момент в областях, прилегающих к гиперболическим периодическим точкам, протекает, по мере продвижения жидкости вдоль периодически сегментированной трубы, в интенсивном режиме. Частицы выделенной жидкости могут двигаться в хаотическом режиме. При этом длина контура выделенной пассивной жидкости, при продвижении ее вдоль трубы, растягивается по экспоненциальному закону, что соответствует хаотическому режиму процесса адвекции выделенной жидкости.

Список использованных источников

1. *Aref H.* The development of chaotic advections // Phys. Fluids. – 2002. – V. 14. – P. 1315-1325.
2. *Mashelkar R. A.* Seamless chemical engineering science: the emerging paradigm // Chem. Eng. Sci. – 1995. – V. 50, N 1. – P. 1-22.
3. *Lambe H.* Hydrodynamics / M.-L.: GITTL, 1947. – 929 p.
4. *Aref H.* Stirring by chaotic advection // JFM. – 1984. – V. 143. – P. 1-23.
5. *Jones S. W., Thomas O. M., Aref H.* Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe // JFM. – 1989. – V. 209. – P. 335-357.
6. *Ottino J. M.* The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport / Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 683 p.
7. *Moon F.* Chaotic vibrations / M.: Mir, 1990. – 312 p. (in Russian).
8. *Gourjii A. A.*, *Meleshko V. V., G. J. F. van Heijst.* Method of piece spline-interpolation in the advection problem of passive impurity in known velocity field // Dopovidi NAN Ukraine. – 1996. – N 8. – P. 54-62. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Дзюба П. А.[1], канд. техн. наук

Алгоритм кусково-поліноміальної апроксимації даних експериментальних випробувань

Розроблено алгоритм апроксимації неоднорідних даних експериментальних випробувань у вигляді кусково-неперервних поліномів, що ґрунтується на поєднанні методу найменших квадратів відшукання коефіцієнтів поліномів і покоординатного спуску для обчислення координат межових точок апроксимуючих кривих Підхід застосовано для аналізу результатів експериментальних досліджень впливу параметрів пошкоджень на величину критичного навантаження циліндричних оболонок.

Ключові слова: апроксимація, метод найменших квадратів,експериментальні дані.

[1] Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
49010, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72
e-mail: avatarrr@ua.fm

P. A. Dzyuba[1], degree, PhD (Tech. Sc.)

Algorithm piecewise polynomial approximation of experimental data testing

Work out an algorithm for approximating the experimental testing of heterogeneous data in the form of continuous piecewise polynomials, based on the combination of least squares for finding the coefficients of polynomials and pokoordinates descent for calculate the coordinates of boundary points approximating curves. The approach used to analyze the results of experimental researches of the impact damage parameters on the critical load of cylindrical shells.

Key Words: approximation, least squares method, experimental data.

[1] Dnepropetrovsk National University named after Oles Gonchar,
49010, Dnepropetrovsk, Gagarin Avenue, 72
e-mail: avatarrr@ua.fm

Вступ

Залежності вимірюваних даних експериментальних досліджень від змінюваного параметра часто мають різний (неоднорідний) характер на окремих ділянках. При цьому координати меж ділянок різних тенденцій змінювання отриманих результатів експерименту виявляються недостатньо чітко вираженими.

Математичні проблеми побудови кусково-поліноміальної апроксимації обговорюються в [1, 6]. При цьому виявиляється, що застосування відомих у цьому напрямку напрацювань для обробки результатів експериментальних досліджень, зокрема, стійкості циліндричних оболонок з пошкодженнями під дією механічних навантажень, потребує досить ґрунтовних модифікацій у зв'язку з неоднорідною залежністю критичної сили від параметра (або кількості) ушкоджень.

Задача у цьому випадку часто вимушено зводиться до необхідності підвищення порядку апроксимуючого поліному або відшукання апроксимуючих функцій спеціального вигляду [2, 5], що ускладнює можливості аналізу отриманих результатів випробувань.

У поданій статті вирішується задача побудови методики сплайн-апроксимації неоднорідних даних експериментальних досліджень у вигляді кусково-неперервних поліномів 1-го і 2-го порядків. Для відшукання коефіцієнтів та координат точок з'єднання апроксимуючих кривих в їх довільній комбінації пропонується спеціальний числовий алгоритм, що ґрунтується на застосуванні методу найменших квадратів і покоординатного спуску. Підхід апробовано шляхом його застосування для аналізу результатів експериментальних досліджень впливу параметрів пошкоджень на величину критичного навантаження втрати стійкості циліндричних оболонок при механічних навантаженнях.

Основні співвідношення

Відповідно до методу найменших квадратів [5] найкраще наближення табличних даних y_i в точках випробувань x_i повинно відповідати умові мінімуму суми квадратів відхилень

$$\Phi(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(\bar{a}, x_i) \right]^2 \to \min, \qquad (1)$$

де $f(\bar{a}, x)$ – апроксимуюча функція, яка може бути, зокрема, і поліномом деякого порядку з невідомими варійованими коефіцієнтами $\bar{a}$; n – кількість точок випробувань; $x_0 \le x_i \le x_k$; $y_i =$

© П. А. Дзюба, 2013

$= \sum_{j=1}^{m_i} \tilde{y}_j / m_i$ – осереднені дані m_i випробувань для кожної із точок x_i, а $\tilde{y}_j$ – результати j-го випробування в і-ій точці.

Вирішення зазначених аспектів проблеми пропонується здійснювати шляхом відшукання мінімуму функції квадратичного відхилення (1) на сукупності k проміжків $\left[x_0^*, x_1^*\right]$, ... , $\left[x_{j-1}^*, x_j^*\right]$, ... , $\left[x_{k-1}^*, x_k^*\right]$, що характеризуються різним характером зміни даних (рис. 1):

$$\Phi\left(\bar{a}, x_j^*\right) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} \left[y_i - f_j\left(\bar{a}, x_j^*, x_i\right)\right]^2 \to \min, \quad (2)$$

де $z_1 = f_1\left(\bar{a}, x\right)$; $x_0^* \le x \le x_1^*$; $z_2 = f_2\left(\bar{b}, x\right)$; $x_1^* \le$ $\le x \le x_2^*$; ... , $z_k = f_k\left(\bar{c}, x\right)$, $x_{k-1}^* \le x \le x_n^*$ – апроксимуючі функції, залежні від коефіцієнтів $\bar{a}$, $\bar{b},...,\bar{c}$; x_0^*, x_k^* – граничні точки проміжку зміни характерного параметра в експерименті; x_j^* – невідомі межі (точки склеювання $j = \overline{1, k}$) проміжків експериментальних даних, що описуються різними кривими; k_{j-1}, k_j – відповідні номери координат цих межових точок.

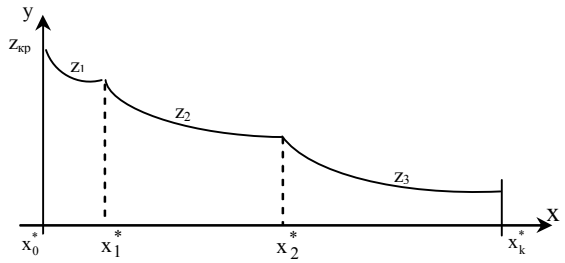


Рис. 1. Схема сплайн-апроксимації

Проміжку $[x_0^*, x_k^*]$ загалом належить N довільним чином розміщених дискретних (вузлових) точок $\tilde{x}_r$ ($\tilde{x}_{r-1} < \tilde{x}_r < \tilde{x}_{r+1}$, $r = \overline{1, N-1}$) можливих випробувань. Вважається, що конкретні експериментальні дані $y_i\ (i = 0, ... , n)$ можуть бути отримані в нерівномірно розташованих точках x_i ($i = \overline{0, n}$), кожна з яких співпадає із однією з точок можливих випробувань $\tilde{x}_r$ ($r = \overline{0, N}$; $i \in \{\overline{0, N}\}$; $n \le N$, $x_L = x_N$).

У випадку (2) побудови алгоритму кусково-неперервної апроксимації квадратичними поліномами і, як приклад, наявності 3-х таких ділянок, апроксимуючі функції приймаються у вигляді

$$z_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$$
$$z_2 = b_0 + b_1\left(x - x_1^*\right) + b_2\left(x - x_1^*\right)^2;$$
$$z_3 = c_0 + c_1\left(x - x_2^*\right) + c_2\left(x - x_2^*\right)^2. \quad (3)$$

При цьому кожному з проміжків повинно належати не менше 3-х (разом з граничними) точок конкретних експериментальних даних.

Особливістю задачі побудови алгоритму сплайн-апроксимації експериментальних даних випробувань механічних систем з пошкодженнями є можливість визначення початкового значення $z_1(0)$, як результат осереднення даних експериментальних випробувань системи без ушкоджень.

Таким чином, можна вважати, що

$$\text{при } x = 0: \qquad z_1 = z_{кр}^{\circ}, \quad (4)$$

де $z_{кр}^{\circ}$ – осереднені результати випробувань серії оболонок без пошкоджень.

Умови неперервності в точках склеювання x_j^* приймають наступними:

$$\text{при } x = x_1^*: \qquad z_1(x_1^*) = z_2(x_1^*); \qquad (а)$$
$$\text{при } x = x_2^*: \qquad z_2(x_2^*) = z_3(x_2^*). \qquad (б) \quad (5)$$

При цьому з першого рівняння (3) з урахуванням (4) випливає:

$$a_0 = z_{кр}^{\circ}. \quad (6)$$

Далі, аналогічно, із (5, а) та (5, б) отримуємо

$$b_0 = z_{кр}^{\circ} + a_1 x_1^* + a_2 x_1^{*2}; \quad (7)$$

$$c_0 = z_{кр}^{\circ} + a_1 x_1^* + a_2 x_1^{*2} + b_1\left(x_2^* - x_1^*\right) + b_2\left(x_2^* - x_1^*\right)^2. \quad (8)$$

Функція Ф з урахуванням (2), (3) подається наступним чином:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \quad (9)$$

де

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{k_1}\left[y_i - y_{кр}^{\circ} - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right]^2;$$
$$\Phi_2 = \sum_{i=k_1+1}^{k_2}\left[y_i - y_{кр}^{\circ} - a_1 x_1^* - a_2 x_1^{*2} - b_1\left(x_i - x_1^*\right) - b_2\left(x_i - x_1^*\right)^2\right]^2; \quad (10)$$
$$\Phi_3 = \sum_{i=k_2+1}^{n}\left[y_i - y_{кр}^{\circ} - a_1 x_1^* - a_2 x_1^{*2} - b_1\left(x_2^* - x_1^*\right) - b_2\left(x_2^* - x_1^*\right)^2 - c_1\left(x_i - x_2^*\right) - c_2\left(x_i - x_2^*\right)^2\right]^2.$$

Тут k_1, $k_2 - k_1$, $n - k_2$ – кількість точок (вузлів) випробувань на відповідних проміжках. При цьому номери k_1, k_2 пов'язані з координатами відповідних точок, тобто також є функціями x_1^*, x_2^*.

Побудова алгоритму

Критерій мінімуму функції середньоквадратичного відхилення (2), таким чином, можна подати у вигляді

$$\min_{\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{x}^*} \Phi\left(\bar{a},\bar{b},...,\bar{c},\bar{x}^*\right) \to \min. \qquad (11)$$

Для відшукання коефіцієнтів (a_i, $i = 1,2$; b_j, $j = 1,2$; c_k, $k = 1,2$) на окремих проміжках, при певних значеннях (нульового або k-го наближення) координат x_1^*, x_2^*, використовуються необхідні умови екстремуму функції середньоквадратичного відхилення (2):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial b_j} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial c_k} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

що з урахуванням (10) приводить до систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 та їх поетапного роз'вязування на проміжках $0 \le x \le x_1^*$, $x_1^* \le x \le x_2^*$, $x_2^* \le x \le x_n$, де a_0, b_0, c_0 визначаються у відповідності до (6), (7), (8), а уточнення невідомих координат межових точок x_1^*, x_2^* здійснюється методом Гаусса – Зейделя почергової зміни невідомих на сукупності точок $\tilde{x}_r$ ($r = \overline{0,n}$) з урахуванням $k_1 \ge 3$; $k_2 \ge k_1 + 2$; $k_3 \ge k_2 + 2$ в загальній схемі послідовних наближень. Збіжність ітераційного процесу оцінюється за зміною значень (2).

При збільшенні кількості проміжків неоднорідності експериментальних даних відповідним чином збільшується і кількість систем (12) та координат межових точок $\bar{x}^*$. Для випадку, коли на певному проміжку апроксимуючою функцією вибирається лінійна функція, то з (12) маємо одне лінійне рівняння з внесенням відповідних поправок і до (7), (8). Алгоритм узагальнюється також і на випадок, коли відсутня можливість достатньо достовірного визначення коефіцієнта a_0 у вигляді (6) за результатами випробувань оболонки без пошкоджень. У цьому випадку визначення a_0, a_1, a_2 на першому проміжку здійснюється розв'язуванням системи 3-х лінійних алгебричних рівнянь.

Алгоритм реалізовано у вигляді комп'ютерної програми та застосовано для побудови залежності „критична сила втрати стійкості – характерний розмір чи кількість отворів" за результатами експериментальних досліджень впливу зміни розміру круглого або квадратного отвору [7], кількості регулярно розташованих в окружному напрямку круглих отворів різного діаметра [3], впливу кількості випадково розташованих на бічній поверхні прямолінійних розрізів-тріщин [4, 8] на стійкість циліндричних оболонок за різних видів статичного навантаження.

Список використаних джерел

1. *Aliyev S. A.* Methods of combined piecewise approximation / S.A. Aliyev, V.A. Dorofeyuk // Math. North Caucasian. Science. centers of higher. educe.: Tech. Science. – 1981. – № 2. –P. 44-46. (in Russian).
2. *Ahlberg J.* Theory of splines and their application: monograph / J. Ahlberg, E. Nilson, J. Walsh. – M.: Mir. – 1972. – 320 p. (in Russian).
3. *Dzyuba P. A.* Research and spline-regression analysis of the stability of cylindrical shells, weakened by regularly disposed circular holes / P. A. Dzyuba, E. F. Prokopalo // Problems computational mechanics and strength of structures. Dnepropetrovsk: DNU, 2006. – Is. 10. – P. 27-37. (in Russian).
4. *Dzyuba P. A.* The influence of the randomly spaced slits on the stability of a cylindrical shell under load torque / P. A. Dzyuba, E. F. Prokopalo // Bulletin of Dnipropetrovs National University: Mechaniks. – Dnepropetrovsk: DNU, 2008. – Is. 12, T. 2. – P. 38-49. (in Russian).
5. *Kalitkin N. N.* Numerical methods: monograph / N. N. Kalitkin / Moscow: Nauka, – 1978. – 512 p. (in Russian).
6. *Prystavka A. P.* Spline distribution in the statistical analysis: monograph / A. P. Prystavka / Dnepropetrovsk: DSU, 1995. – 152 p. (in Russian).
7. *Prokopolo E. F.* Experimental researches of the stability of cylindrical shells with holes in the separate action of axial compressive force and torsion / E. F. Prokopalo, P. A. Dzyuba // Problems computational mechanics and strength of structures. – Dnepropetrovsk: DNU, 2007. – Is. 11. – P. 106-114. (in Russian).
8. *Prokopalo E. F.* The stability of cylindrical shells weakened by randomly distributed rectilinear cuts under the action of axial compressive force / E. F. Prokopalo, P. A. Dzyuba / Methods of solving applied problems in solid mechanics. – Dnepropetrovsk: DNU, 2008. – Is. 9. – P. 167-178. (in Russian).

Надійшла до редколегії 30.03.13

УДК 539.595

Дідківська О. М.[1], магістр

Коливання резервуару з рідиною для від'ємних довжин маятникового підвісу

Розглянуто задачу про вимушені гармонічні коливання циліндричного резервуару частково заповненого рідиною для від'ємних довжин маятникового підвісу (резервуар розташовується вище точки підвісу маятника). Отримано графіки амплітуд всіх форм коливань рідини для різних частот та довжин підвісів. Проаналізовано характер коливального руху для білярезонансної частоти коливань резервуару з рідиною.

Ключові слова: вимушені гармонічні коливання, циліндричний резервуар, маятниковий підвіс.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: olena.mukolajivna.didkivska@gmail.com

O. M. Didkivska[1], master

Oscillations of reservoir with liquid for negative lengths of pendulum suspension

The problem on forced harmonic oscillations of a cylindrical tank partially filled with liquid for negative lengths of pendulum suspension (reservoir located above the hanging pendulum) was considered. Graphs for amplitudes of all modes of fluid for different frequencies and lengths of suspensions were determined. The nature of oscillatory motion for near-resonant oscillation frequency of the system liquid–tank was analyzed.

Key Words: forced harmonic vibrations, cylindrical tank, pendulum suspension.

[1] The Taras Shevchenko Kiev National University, 01601, Kyiv, Volodymyrska street, 64
e-mail: olena.mukolajivna.didkivska@gmail.com

Вступ

Метою даної роботи була розробка моделі і дослідження особливостей поведінки рідини з вільною поверхнею, що частково заповнює резервуар у формі кругового циліндра. Система резервуар – рідина підвішена на математичному маятнику таким чином, що точка закріплення резервуару розташована нижче центра мас системи (випадок від'ємної довжини підвісу). Резервуар здійснює вимушені коливання за гармонічним законом: $\alpha = \alpha_0 \sin\theta t$, де α – кут відхилення осі циліндра від вертикальної осі, α_0 – амплітуда коливань, θ – частота коливань.

Для дослідження цієї задачі використаємо варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського та метод Канторовича. Це дозволяє звести модель системи до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів.

Механічна система (рис. 1) складається із циліндричного резервуару кругового поперечного перерізу з абсолютно твердими стінками, який частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною, що знаходиться під дією сил поверхневого натягу. В чисельних прикладах розглядаються коливання, що відбуваються в одній площині.

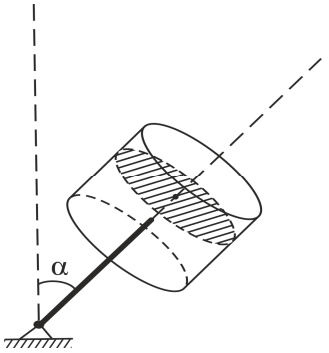


Рис. 1. Циліндр на маятниковому підвісі від'ємної довжини

Математична модель системи

В початковий момент часу рідина незбурена. Тоді, враховуючи її ідеальність, за теоремою Лагранжа в усі наступні моменти часу її рух буде потенціальним. Тому введемо потенціал швидкостей у вигляді

$$\Phi(\vec{r}, t) = \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega},$$

де φ – потенціал хвильового руху рідини, $\vec{\varepsilon}$ – радіус-вектор центра незбуреної вільної поверхні рідини в умовно нерухомій системі координат, $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки в зв'язаній з резервуаром системі координат, $\vec{\omega}$ – кутова швид-

© О. М. Дідківська, 2013

кість тіла в умовно нерухомій системі координат, $\vec{\Omega}$ – потенціал Стокса – Жуковського.

Тоді кінетична енергія і, як наслідок, функція Лагранжа буде містити інформацію стосовно хвильового, поступального, кутового рухів та їх попарного взаємозв'язку:

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}\left(\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}} + \vec{\nabla}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\Omega}\right)\right)^2 d\tau .$$

Для застосування принципу Гамільтона – Остроградського застосуємо наступну форму представлення розв'язку задачі, для попереднього виключення кінематичних граничних умов (метод Канторовича):

$$\xi = \sum_n a_n(t)\psi_n(x, y)$$

$$\varphi = \sum_n b_n(t)\psi_n(x, y)\frac{ch\varpi_n(z+H)}{\varpi_n sh\varpi_n H}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t)\psi_n(x, y)\frac{ch\varpi_n(z+H)}{\varpi_n sh\varpi_n H}$$

де $z = \xi(x, y, t)$ – рівняння вільної поверхні, $\psi_n(x, y)$ – система власних форм коливань з параметром ϖ_n (ϖ_n – параметр рівняння Гельмгольца, розв'язаного в циліндричних координатах, що знаходиться з рівняння $J_1'(\varpi_n r/R) = 0$ при $r = R$), H – рівень незбуреної поверхні рідини в резервуарі, $a_n, b_n, \vec{q}_n$ – невідомі функції часу. При цьому b_n і $\vec{q}_n$ є залежними і виключаються з кінематичних умов, а a_n – амплітудні параметри коливань рідини.

Виходячи з загальних законів нелінійної механіки, будемо шукати залежність величин b_i і $\vec{q}_j$ від a_k у вигляді

$$b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} + b_i^{(3)} + b_i^{(4)},$$
$$\vec{q}_i = \vec{q}_i^{(1)} + \vec{q}_i^{(2)} + \vec{q}_i^{(3)},$$

де цифрові індекси в круглих дужках відповідають порядкам малості величин. Таким чином виразимо b_i та q_i через квадратури функцій ψ_i і $\vec{\Omega}_0$. В результаті для визначення амплітудних параметрів коливань рідини, її поступального руху, а також її кутового руху отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь, лінійну відносно других похідних невідомих величин:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{mn}\ddot{\alpha}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{mn}\ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{mn}\ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_m .$$

У випадку розглядуваних вимушених гармонічних коливань резервуару поступальний рух відсутній, кутовий задається. Тому замість $N+6$ рівнянь одержимо систему із N рівнянь, в які як задані увійдуть параметри кутового руху тіла і відповідні сили інерції.

Аналіз вимушених коливань резервуара з рідиною

Дана модель динаміки коливань резервуара з рідиною для від'ємних довжин маятникового підвісу була чисельно реалізована на ЕОМ за допомогою мови Fortran. Було визначено амплітуди всіх форм коливань рідини для різних частот та довжин підвісу на амплітуді кутових коливань резервуару 0,003; висота циліндра – 1,5 *R*; глибина – *R*.

Для всіх частот та довжин підвісу на початку руху характерним є певний перехідний процес, який згодом переходить в усталений рух. На рис. 2 зображена перша (основна) форма коливань, що ілюструє даний факт.

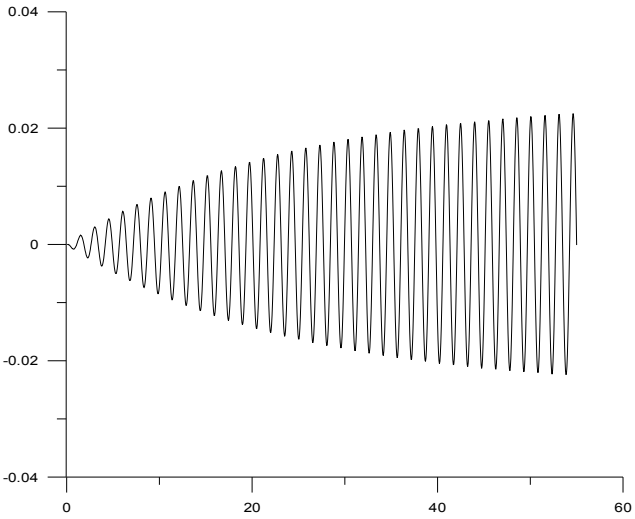


Рис. 2. Залежність в часі амплітуди першої форми коливань при довжині підвісу –0,1 і частоті 4,14

Порівнявши її з наступним графіком (для додатної довжини підвісу, рис. 3), яскраво видно різницю в максимальних амплітудах, що простежується для всіх розглядуваних випадків.

Амплітуди всіх форм коливань для від'ємних довжин математичного маятника менші ніж при його додатніх довжинах. Наприклад, для білярезонансної частоти 4,14 максимальна амплітуда при від'ємному підвісі складає 0,3835, а при додатному дорівнює 0,4061. Різниця складає більше 5,5%.

На рис. 4 і 5 зображено відповідно першу і другу форми коливань резервуару для білярезонансної частоти 4,14.

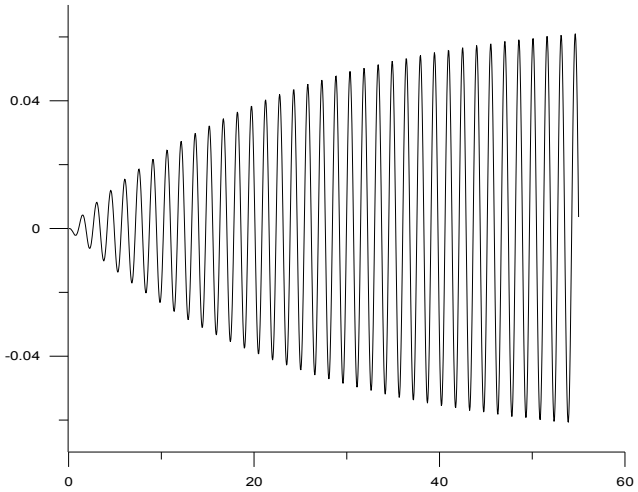


Рис. 3. Залежність в часі амплітуди першої форми коливань для довжини підвісу 0,1 та частоти 4,14

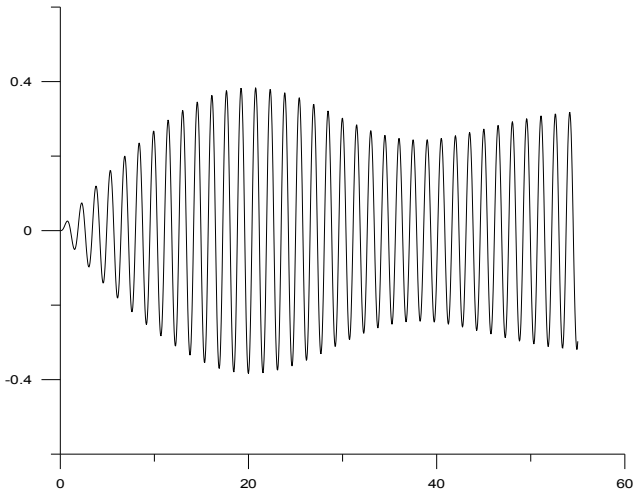


Рис. 4. Залежність в часі амплітуди першої форми коливань для довжини підвісу –4 та частоти 4,14

Як видно, відбувається значне збільшення амплітуди коливань для першої форми – більш ніж в 120 разів, для другої форми – майже в 20 разів. Також різниця між амплітудами першої і другої форм коливань складає близько 86% амплітуди першої форми. Суттєва зміна частотної залежності не відбувається, так як внесок першої форми дуже великий. Друга ж форма (яка є показником нелінійності в системі) чітко ілюструє суттєвий прояв нелінійних властивостей поверхневого хвилеутворення в системі (несиметрія профілей хвиль, висота горба хвилі перевершує глибину впадини).

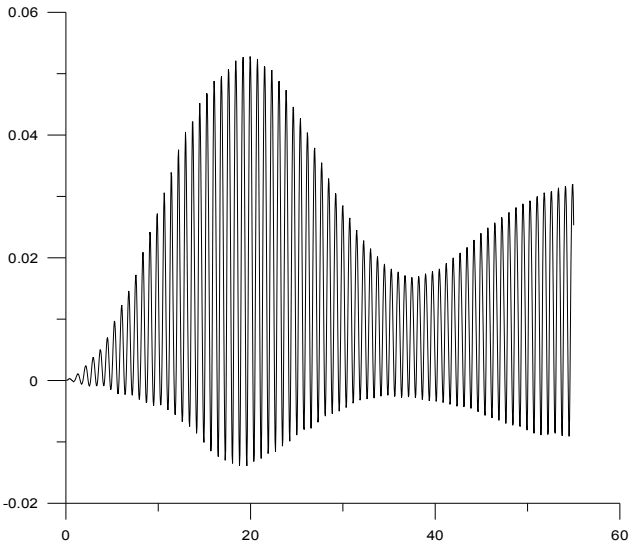


Рис. 5. Залежність в часі амплітуди другої (осесиметричної) форми коливань для довжини підвісу –4 та частоти 4,14

Висновки

В роботі розглянуто задачу про гармонічні коливання циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною для від'ємних довжин маятникового підвісу. Чисельно реалізовано динамічну модель даної системи. Досліджено вимушені коливання резервуару з рідиною для різних від'ємних довжин підвісу. Проведено порівняння для додатних та від'ємних довжин. Показано, що в околі резонансних частот збурення в системі характеризуються суттєвим проявом нелінійних властивостей поверхневого хвилеутворення.

Список використаних джерел

1. *Mikishev G. N., Rabinivich B. I.* Dynamics of rigid body with empties, partially filled by liquid. – Moscow: Mashinostroeniye, 1968. – 532 p. (in Russian).
2. *Narimanov G. S., Dokuchaev L. V., Lukovskiy I. A.* Nonlinear dynamics of spacecraft with liquid. – Moscow: Mashinostroeniye, 1977. – 208 p. (in Russian).
3. *Limarchenko O. S., Yasinskiy V. V.* Nonlinear dynamics of structures with liquid. – Kiev: National Technical University of Ukraine "KPI", 1997. – 338 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 20.05.13

УДК 539.3

Жук Я. О.[1], д. ф.-м. н., проф.

Методика оцінки залишкової міцності тонкостінного сталевого елемента конструкції при імпульсному тепловому опроміненні

У рамках динамічної постановки зв'язаної задачі термомеханіки досліджується залишковий напружено-деформований стан металевого диска, що виникає внаслідок дії теплового імпульсу. Розв'язування осесиметричної задачі проводиться чисельно з використанням термодинамічно узгодженої теорії непружної поведінки матеріалу із застосуванням скінченноелементної методики. Вивчається реакція матеріалу на процеси теплового опромінення і наступного поступового охолодження, досліджуються поля основних механічних величин, які входять до критеріїв міцності металевих елементів конструкцій.

Ключові слова: імпульсне теплове опромінення, термов'язкопластичність, залишковий напружено-деформований стан.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: y.zhuk@i.ua

Y. A. Zhuk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Technique of the residual strength estimation of thin-wall steel structural element under thermal peenning

The residual stress-strains state of the metal disk caused by the thermal pulse are investigated within the framework of the coupled dynamic thermomechanics. Solution of axisymmetric problem carried out numerically using the thermodynamically consistent theory for inelastic behavior of the material involving finite element method. Response of the material to thermal irradiation and following gradual cooling processes are studied, and the fields of the main mechanical characteristics used in the strength criteria of the metal struc-tural elements are investigated.

Key Words: thermal pulse irradiation, thermoviscoplasticity, residual stress-strain state.

[1] Taras Shevshenko National University of Kyiv, 4e Glushkov ave., Kyiv, 03187, Ukraine
e-mail: : y.zhuk@i.ua

Теплове імпульсне опромінення відноситься до технологій, які ґрунтуються на новітніх фізичних принципах і можуть знаходити широке застосування у промисловості, зокрема, для обробки поверхні з метою підвищення міцності, довговічності та витривалості деталей машин і елементів конструкцій [1, 2].

Для покращення експлуатаційних характеристик конструкцій використовуються, як правило, лазери слабкої і середньої потужності (2-3 кВт), або пучки електронних променів. При цьому для оцінки міцності конструкції необхідно розраховувати залишковий напружено-деформований стан (НДС).

Слід зазначити, що при обробці поверхні імпульсами малої потужності або тривалішими імпульсами термомеханічний вплив на матеріал при опроміненні реалізується, як правило, через наступний механізм: за відсутності абляції відбувається швидкий розігрів матеріалу і наступне поступове охолодження з великими градієнтами температури. Як наслідок, виникають великі теплові напруження і залишкові деформації. При цьому механічні і трибологічні властивості елемента конструкції можуть суттєво змінитися не лише безпосередньо на поверхні, а й у приповерхневому шарі.

Мета даного дослідження полягає у розробці методики вивчення взаємодії теплового імпульсу і елемента конструкції із визначенням залишкового НДС. Для цього використовується динамічна постановка задачі із залученням узагальненої погодженої з термодинамікою незворотних процесів моделі фізично нелінійної поведінки матеріалів в широкому діапазоні температур. Вплив опромінення моделюється заданням теплового потоку через границю, що відповідає випадку опромінення лазерами малої потужності.

В рамках такого наближення досліджується осесиметрична задача про дію теплового імпульсу в центрі сталевого диска. При цьому вважається, що термомеханічний вплив на матеріал не супроводжується зміною агрегатного стану. Задача розв'язується за допомогою методики скін-

© Я. О. Жук, 2013

чених елементів, розвиненої для моделювання зв'язаної термомеханічної поведінки фізично нелінійних матеріалів [3].

1. Постановка задачі. Основні рівняння

Розглядається диск радіусу R і товщини h, геометрія якого в циліндричній системі координат $Orz\varphi$ задається так: $|r| \le R$, $0 \le |z| \le h$. Центр поверхні $z = 0$ опромінює одноразовий тепловий імпульс, що моделюється тепловим потоком q_s через границю диску, який змінюється за законом

$$q_s = \begin{cases} q_0 \cos\dfrac{\pi r}{2r_p} \sin\dfrac{\pi t}{t_p}; & r \le r_p,\ t \le t_p, \\ 0; & r > r_p,\ t > t_p, \end{cases} \qquad (1)$$

де t_p – тривалість імпульсу, r_p – радіус теплової плями. Така «дзвоноподібна» форма імпульсу з поступовим наростанням і спаданням у часі відповідає реальним умовам опромінення.

Вся інша поверхня диска вважається теплоізольованою. Після припинення дії імпульсу опромінена частина поверхні теж вважається теплоізольованою.

Постановку динамічної осесиметричної зв'язаної задачі складають

– співвідношення Коші

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},\ \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r},\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \qquad (2)$$

– рівняння руху

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\varphi\right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \qquad (3)$$

– рівняння балансу енергії, що зводиться до рівняння теплопровідності,

$$c_v \dot{\theta} + 3\alpha\theta K_V \left(\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\dot{\theta}\right) - D' - k\Delta\theta = r_s, \qquad (4)$$

– механічні граничні умови

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \ \text{ на } S, \qquad (5)$$

– теплові граничні умови

$$-k\frac{\partial \theta}{\partial z} = q_s \ \text{ на } \ S_p \ \text{ і } \ 0 \le t \le t_p;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} = 0 \ \text{ на } \ S - S_p, \qquad (6)$$

і початкові умови

$$u_r = u_z = \dot{u}_r = \dot{u}_z = 0, \quad \theta = \theta_0 \ \text{ при } \ t = 0, \qquad (7)$$

де u_r, u_z – переміщення вздовж відповідних осей; ε_r, ε_z, ε_{rz} і ε_φ – компоненти тензора деформації; σ_r, σ_z, σ_{rz} і σ_φ – компоненти тензора напружень; θ – температура; α, c_v і k – коефіцієнти лінійного теплового розширення, теплоємності при сталому об'ємі і теплопровідності відповідно; K_V – об'ємний модуль матеріалу; r_s – потужність заданих внутрішніх джерел тепла; D' – швидкість дисипації механічної енергії, θ_0 – початкова температура; n_j – компонента вектора одиничної нормалі до відповідної граничної поверхні; S_p – частина поверхні ($r \le r_p$, $z = 0$), яка знаходиться під дією теплового імпульсу;

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\varphi; \quad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для описання фізично нелінійної поведінки матеріалу диска і конкретизації вигляду дисипативної функції D' використовується теорія, розвинена на основі моделі Боднера – Партома (МБП) і узагальнена на випадок зв'язаних термомеханічних процесів [3, 4].

Вона використовує

– представлення повної деформації у вигляді суми пружної, пластичної і теплової складових

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta, \quad ij \leftrightarrow r,\ z,\ rz,\ \varphi, \qquad (8)$$

де теплова деформація представляється у вигляді

$$\varepsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha\left(\theta'\right) d\theta'; \qquad (9)$$

– закон Гука, записаний для кульової і девіаторної частин

$$s_{ij} = 2G\left(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p\right),\ \sigma_{kk} = 3K_V\left(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^\theta\right), \qquad (10)$$

де s_{ij} і e_{ij} – девіатори тензорів напруження і деформації відповідно; G – модуль зсуву; по індексах, що повторюються, проводиться додавання;

– закон течії з умовою пластичної нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0; \qquad (11)$$

– кінетичне рівняння

$$D_2^p = D_0^2 \exp\left[-\left(\frac{Z^2}{3J_2}\right)^n\right], \qquad (12)$$

де $Z = K + D$, $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$, $D_2^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 2$, $\lambda^2 = D_2^p / J_2$;

– рівняння еволюції для внутрішніх змінних ізотропного K та направленого β_{ij} зміцнення

$$\dot{K} = m_1\left(K_1 - K\right)\dot{W}_p, \quad K(0) = K_0,$$

$$\dot{\beta}_{ij} = m_2\left(D_1 u_{ij} - \beta_{ij}\right)\dot{W}_p, \quad \beta_{ij}(0) = 0, \qquad (13)$$

де $D = \beta_{ij}u_{ij}$, $u_{ij} = \sigma_{ij}\big/(\sigma_{ij}\sigma_{ij})^{1/2}$, $\dot{W}_p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}$.

Величини D_0, D_1, K_0, K_1, m_1, m_2 і n є константами моделі [3, 4]. Експериментальні і теоретичні дослідження [3, 4] показали, що для більшості металів параметри D_0, D_1, m_2 слабо залежать від температури і можуть вважатись сталими в широкому інтервалі температур. Параметри K_0, K_1, m_1 і n – функції температури.

В рівняннях (13) на відміну від робіт [3, 4] відсутні доданки, що визначають тепловий зворот. Оскільки процеси, які розглядаються в даній роботі, достатньо швидкі, то при описанні поведінки матеріалу цим явищем можна знехтувати.

В загальному випадку для повного описання зв'язаної термомеханічної поведінки матеріалу диска необхідна конкретизація вигляду дисипативної функції D'. В даній роботі внаслідок специфічних умов теплового навантаження вважаємо, що розсіяною механічною енергією можна знехтувати, тому дисипативна функція буде дорівнювати нулю: $D' = 0$.

Рівняння (1) – (13) складають постановку зв'язаної задачі термомеханіки фізично нелінійних тіл при тепловому навантаженні.

Постановка задачі (1) – (13) є суттєво нелінійною і розв'язується чисельно. Для цього використовується підхід, розвинений в статтях [3, 4] для розв'язання динамічних плоских і осесиметричних задач термов'язкопластичності.

2. Результати розрахунків

Розрахунки проводились для диска радіусом $R = 5\cdot10^{-3}$ м і товщиною $h = 10^{-4}$ м. Радіус зони опромінення $r_p = 1{,}5\cdot10^{-3}$ м, тривалість дії імпульсу t_p змінювалась від 10^{-8} с до 10^{-7} с, параметр теплового потоку q_0 також відповідно змінювався від $6\cdot10^7$ кВт/м^2 до $2\cdot10^8$ кВт/м^2. Початкова температура диска θ_0 приймалась рівною $20\,^{\circ}C$.

Фізико-механічні властивості матеріалу та їх температурні залежності взяті з робіт [3, 4].

Дослідження полів компонент пластичної деформації показало, що в досліджених умовах теплового навантаження виникають значні пластичні деформації в зоні опромінення. Динаміка розподілів компонент пластичної деформації ε^p_{rr} вздовж радіуса при $z = 0$ і вздовж осі диска при $r = 0$, а також ε^p_{zz} вздовж осі диска при $r = 0$ представлена на рис. 1. Дані побудовані для випадку, коли параметр теплового потоку дорівнює $q_0 = 2\cdot10^8$ кВт/м^2. На рисунках моменти часу вказані цифрами.

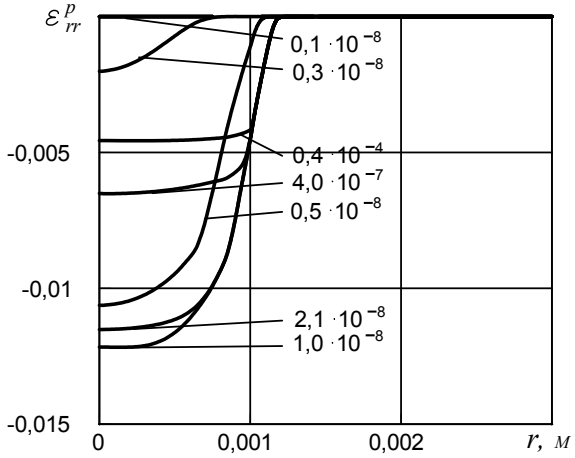


Рис. 1а. Розподіл компоненти пластичної деформації ε^p_{rr} вздовж радіуса диска

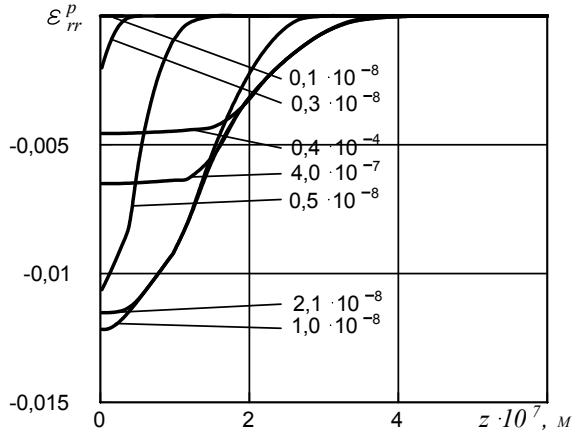


Рис. 1б. Розподіл компоненти пластичної деформації ε^p_{rr} по товщині диска

Особливий інтерес з точки зору зміцнення матеріалу має оцінка залишкових полів напружень і пластичної деформації. На рис. 2 представлені типові розподіли компоненти залишкової пластичної деформації $\varepsilon^p_{rr}(r)$ при $z = 0$ для різних значень параметра теплового потоку q_0.

З наведених даних видно, що збільшення теплового потоку призводить до розширення області впливу імпульсу температури.

Оцінка залишкової міцності елемента конструкції вимагає розрахунку залишкових полів основних механічних величин.

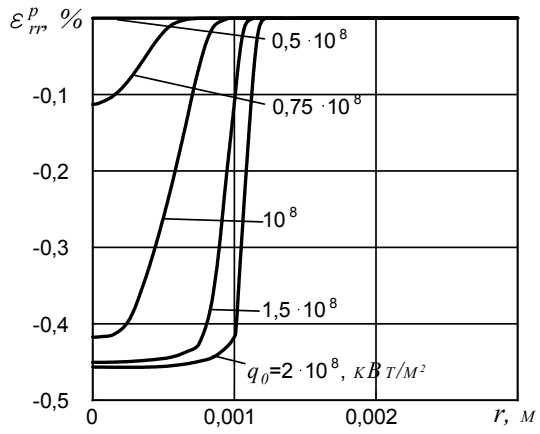


Рис. 2. Залишкова пластична деформація ε^p_{rr} при різних значеннях параметра теплового потоку q_0

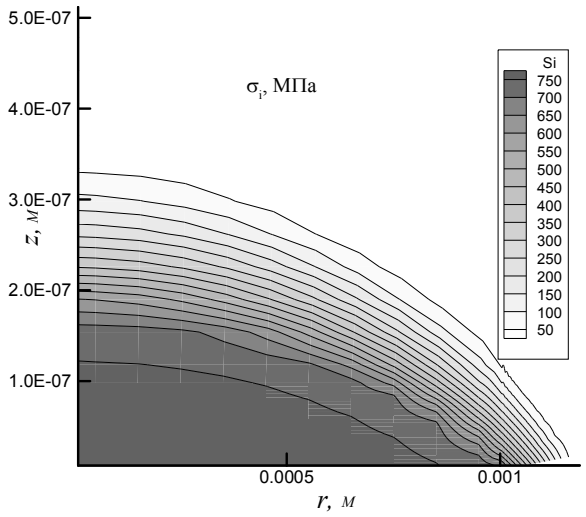


Рис. 3. Просторовий розподіл інтенсивності напружень

Численні критерії оцінки залишкової міцності елемента конструкції ґрунтуються на використанні максимальних головних напружень або деформацій, максимальних дотичних напружень, максимальних деформацій зсуву, октаедричних напружень, максимальних пластичних деформацій, інтенсивності напружень або інтенсивності пластичних деформацій тощо.

На рис. 3 показане залишкове поле інтенсивності напружень в околі зони опромінення. Поле інтенсивності пластичної деформації та поле максимальних головних напружень демонструють аналогічну поведінку. Максимум спостерігається безпосередньо в центрі диска (зони опромінення). При наближенні до краю теплової плями інтенсивності напружень σ_i, деформацій ε_i і максимальне головне напруження $\sigma^{\max}_{pr}$ різко зменшуються. Область небезпечних значень досліджуваних величин зосереджена всередині круга радіусом приблизно $r = 1{,}1$ мм. За його межами рівні залишкових інтенсивностей напружень та деформацій, максимальних головних напружень незначні.

3. Висновки

Розроблена методика оцінки залишкової міцності тонкостінного сталевого елемента конструкції при імпульсному лазерному або пучковому опроміненні є застосовною до металічних елементів конструкцій за прийнятих припущень. Аналіз отриманих результатів показує, що визначення розмірів області впливу теплового імпульсу може проводиться як за компонентами напружень або пластичних деформацій, так і за параметром ізотропного зміцнення. В усіх означених випадках присутня кореляція між розмірами цієї зони, що дозволяє вважати адекватною запропоновану методику визначення області впливу термічного імпульсу, полів залишкових інтенсивностей напружень, деформації або максимальних головних напружень. Ці величини можуть бути застосованими для оцінки залишкової міцності обробленого короткими тепловими імпульсами заданої форми елемента конструкції шляхом використання будь-якого з критеріїв, основаних на використанні інтенсивностей напружень, деформації або максимальних головних напружень, а також критеріїв, що комбінують ці величини.

Список використаних джерел

1. *Ocana J. L., Morales M., Molpeceres C. and Torres J.* Numerical simulation of surface deformation and residual stresses fields in laser shock processing experiments // Applied Surface Science. – 2004. – V. 238. – P. 242-248.
2. *Chen H., Kysar J. and Yao Y. L.* Characterization of plastic deformation induced by microscale laser shock peening // J. Appl. Mech. – 2004. – V. 71. – P. 713-723.
3. *Zhuk Y. A., Senchenkov I. K., Boychuk Y. V.* Residual stress-strains state of steel disk under the thermal pulse irradiation // Math. Meth. and Phys.-Mech. Fields. – 2008. – V. 51, № 1. – P. 157-168. (in Ukrainian).
4. *Zhuk Y. A., Senchenkov I. K., Kozlov V. I., Tabieva G. A.* Axisymmetric dynamic coupled problem of thermoviscoelasticity // Int. Appl. Mech.– 2001. – V. 37, № 10. – P. 1311-1317.

Надійшла до редколегії 13.03.2013

УДК 519.9

Зражевський Г. М.[1], к. ф.-м. н., доц.

Визначення оптимальних параметрів збудження форми коливань балки

У роботі розглянута модельна задача про коливання шарнірно закріпленої балки, що знаходиться під впливом деякого числа періодичних зосереджених сил. Метою дослідження є визначення оптимальної кількості сил та їх характеристик – місця прикладання, амплітуди і фази коливань, які забезпечують із заданою точністю найкращим чином наближення заданих форми і поточкової фази коливань балки в заданому частотному діапазоні. Після часткового аналітичного обернення, задача зведена до умовної багатоекстремальної задачі мінімізації основного функціоналу, яка не піддається аналітичному розв'язанню. У другій частині роботи, побудований її дискретний еквівалент, що формулюються у вигляді змішаної умовної задачі неопуклої мінімізації. Дискретна задача розв'язана чисельно з використанням багатофункціонального пакета PSG (Matlab Interface), наданого American Optimal Decision, USA.

Ключові слова: форма коливань, оптимальні характеристики збудження.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,03680, м. Київ, просп. Глушкова 4 е
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

G. M. Zrazhevsky[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Determination of the optimal parameters of the beam waveform actuation

In the present paper we consider a model problem of the vibrations of hinged beam under the influence of a number of periodic concentrated forces. The problem is to determine the optimal number of forces and their characteristics – the fulcrum, the amplitude and phase oscillations, which provide a given accuracy of the best approximation of a given shape and point-wise phase vibrations of the beam in a given frequency range. After partial analytical treatment, the problem is reduced to the problem of minimizing the conditional Multiple-core functionality, not amenable to analytical solution. In the second part, a discrete equivalent is built which is formulated as a mixed conditional non-convex minimization problem. The discrete problem is solved numerically using a multifunctional package PSG (Matlab Interface), provided by American Optimal Decision, USA.

Key Words: vibrations, waveform, optimal actuation.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

Постановка задачі

Прогини балки $w(x,t)$, що виконує усталені коливання під дією I точкових сил, прикладених в точках ξ_i з амплітудами F_i і фазами δ_i, визначаються як розв'язок крайової задачі для рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]+\rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}= =\sum_{i=1}^{I}F_i\cos(\omega t+\delta_i)\delta(x-\xi_i),\quad x\in(0,L),\ t\in(-\infty,\infty) \qquad (1)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} w(0,t)=w(L,t)=0,\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t),\ \ t\in(-\infty,\infty),\end{cases} \qquad (2)$$

де E, I, ρ – відповідно, модуль Юнга, момент інерції поперечного перерізу і щільність балки.

Визначимо параметри силового впливу (кількість сил, їх амплітуди, фази і точки прикладання), щоб усталені коливання балки найкращим чином (у сенсі деякого критерію) відповідали заданим параметрам форми коливання

$$\overline{W}(x,t)=A(x)\cos\big(\omega t+D(x)\big). \qquad (3)$$

Розглядаючи тільки вимушені моногармонійні коливання і ввівши в розгляд функцію Гріна $G(x,t;\xi)$, що задовольняє однорідним граничним умовам, розв'язок задачі (1), (2) можна представити у вигляді

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{I}F_i G(x;\xi_i;k)\cos(\omega t+\delta_i), \qquad (4)$$

де

$$G(x,t;\xi)=G(x;\xi;k)\begin{bmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{bmatrix},$$

а $G(x;\xi;k)$ задовольняє рівняння з хвильовим числом k ($k^4=\omega^2\rho/EI$). Введемо безрозмірні параметри (далі хвилю опускаємо для зручності)

© Г. М. Зражевський, 2013

$$\tilde{x} = x/L, \quad \tilde{w} = w / \max_{x\in(0,L)} A(x),$$
$$\tilde{k} = k/k_1, \quad \tilde{F}_i = F_i / (2k_1^3 EI \max_{x\in(0,L)} A(x)), \qquad (5)$$

де $k_1 = \pi/L$ – хвильове число першої згинної форми коливань балки. Нев'язка задачі – двохфункціональна і має вигляд

$$R_\Omega(x,t) = w(x,t) - \overline{W}(x,t) =$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{I} G(x;\xi_i;k)F_i\cos\delta_i - A(x)\cos D(x)\right\}\cos\omega t -$$
$$-\left\{\sum_{i=1}^{I} G(x;\xi_i;k)F_i\sin\delta_i - A(x)\sin D(x)\right\}\sin\omega t$$

Мінімізуємо коефіцієнти при $\cos\omega t$ та $\sin\omega t$. Приймемо в якості критерію наближення середньоквадратичні функціонали

$$\begin{cases} I^c = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{I} G(x;\xi_i;k)a_i - A(x)\cos D(x)\right)^2 dx, \\ I^s = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{I} G(x;\xi_i;k)b_i - A(x)\cos D(x)\right)^2 dx, \end{cases} \qquad (6)$$

де введено нові змінні: $a_i = F_i\cos\delta_i$, $b_i = F_i\sin\delta_i$.

Залежність функціоналів (6) від I підкреслює, що кількість сил, взагалі кажучи, також підлягає визначенню. Таким чином, задача зводиться до відшукання мінімумів функціоналів (6) у повному просторі змінних $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{\xi}$, I, де $\vec{a}^T = \{a_i\}_{i=1}^I$, $\vec{b}^T = \{b_i\}_{i=1}^I$. Очевидно, що задача є не тільки неопуклого а й негладкою. Якщо знайдено оптимальний розв'язок, прогин знаходиться за формулою

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{I} G(x;\xi_i;k)(a_i\cos\omega t - b_i\sin\omega t), \qquad (7)$$

а оптимальні сили та їх фази – за формулами

$$F_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \delta_i = \operatorname{arctg}(b_i/a_i). \qquad (8)$$

Функція Гріна в силу лінійності може бути легко знайдена у вигляді суперпозиції фундаментального та однорідного розв'язків:

$$G(x;\xi;k) = A^{\pm}\operatorname{ch}kx + B^{\pm}\operatorname{sh}kx + C^{\pm}\cos kx + D^{\pm}\sin kx, \quad x \lessgtr \xi.$$

Задовольняючи умови неперервності прогину, кута нахилу, згинального моменту і стрибка перерізуючої сили, а також граничні умови, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь восьмого порядку, розв'язавши яку матимемо

$$G(x;\xi;k) = \begin{cases} g(x;\xi;k), & x \le \xi, \\ g(\xi;x;k), & x > \xi, \end{cases} \qquad (9)$$

де

$$g(x;\xi;k) = \frac{\sin kx\sin k(1-x)}{\sin k} - \frac{\operatorname{sh}k\xi\operatorname{sh}k(1-\xi)}{\operatorname{sh}k}. \qquad (10)$$

Очевидно, також, що $G(x;\xi;k) = G(\xi;x;k)$, що суттєво спрощує подальше розв'язання.

Аналітичне розв'язання

Очевидно, що аналітична мінімізація (6) неможлива, проте задача допускає часткове обернення, яке можливе в силу квадратичної залежності функціоналів від $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Дійсно, необхідна умова існування екстремуму по $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\partial I^c/\partial a_j = 0$, $j = \overline{1, I}$, має вигляд систем рівнянь

$$\sum_{i=1}^{I}\int_0^1 G(x;\xi_j;k)G(x;\xi_i)dx\,a_i = \int_0^1 G(x;\xi_j;k)A(x)\cos D(x)dx,$$
$$\sum_{i=1}^{I}\int_0^1 G(x;\xi_j;k)G(x;\xi_j;k)dx\,b_i = \int_0^1 G(x;\xi_j;k)A(x)\sin D(x)dx,$$
$$j = \overline{1, I}. \qquad (11)$$

Ввівши позначення

$$K = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^I, \quad K_{ij}(k) = \int_0^1 G(x;\xi_j;k)G(x;\xi_i;k)dx,$$
$$\vec{f}^{cT} = \{f_i^c\}_{i=1}^I, \quad f_i^c(k) = \int_0^1 G(x;\xi_i;k)A(x)\cos D(x)dx,$$
$$\vec{f}^{sT} = \{f_i^s\}_{i=1}^I, \quad f_i^s(k) = \int_0^1 G(x;\xi_i;k)A(x)\sin D(x)dx, \qquad (12)$$

формальний розв'язок системи (11) має вигляд

$$\vec{a}(\vec{\xi};k) = K^{-1}\vec{f}^c, \quad \vec{b}(\vec{\xi};k) = K^{-1}\vec{f}^s. \qquad (13)$$

Назвемо вирази (13) частковим оберненням, оскільки вони дозволяють зменшити розмірність задачі на $2I$. Зауважимо, що матриця K вироджується при виконанні умови: $\xi_{i1} = \xi_{i2}[= \xi_{i3} = ... = \xi_{ir}]$. Проте в даному випадку це не має принципового значення, оскільки в запропонованому методі можливо встановити відношення: $\xi_1 < \xi_2 ... < \xi_r$, $r \le I$.

При обчисленнях обернень погано обумовлених матриць ($\xi_{i1} \approx \xi_{i2}[\approx \xi_{i3} \approx ... \approx \xi_{ir}]$) можна скористатись процедурою псевдообернення. Для функції Гріна даної модельної задачі, вирази в (13) можна отримати в аналітичному вигляді, що дозволяє, принаймні для невеликих значень I, записати аналітичні вирази і для коефіцієнтів K^{-1}. В силу громіздкості вони не наводяться, однак, їх наявність суттєво спрощує аналітичні обчислення.

Використання часткового обернення (13) дозволяє переформулювати задачу мінімізації (6) в редукованому просторі:

$$I^f(\vec{\xi};k;I) \downarrow \min_{\vec{\xi},\, I}, \qquad (14)$$

де

$$I^f(\vec{\xi};k;I) = \lambda\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{I} G(x;\xi_i;k)a_i(\vec{\xi}) - A(x)\cos D(x)\right)^2 dx +$$

$$+(1-\lambda)\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{I}G(x;\xi_i;k)b_i(\vec{\xi})-A(x)\sin D(x)\right)^2 dx. \quad (15)$$

Враховуючи, що

$$\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{I}G(x;\xi_i;k)a_i(\vec{\xi})-A(x)\cos D(x)\right)^2 dx = \\ = \vec{a}^T K\vec{a}-2\vec{f}^c\vec{a}^T+C,$$

де $C=\int_0^1 A^2(x)\cos^2 D(x)dx$ (та аналогічний вираз для другого інтегралу у зваженій комбінації $S=\int_0^1 A^2(x)\sin^2 D(x)dx$), а також рівності $\vec{a}^T K\vec{a}=\vec{f}^c\vec{a}^T$, $\vec{b}^T K\vec{a}=\vec{f}^c\vec{b}$, (14) приводиться до вигляду

$$I^f(\vec{\xi};k;I)=\lambda C+(1-\lambda)S-\lambda\vec{f}^{cT}(\vec{\xi};k)K^{-1}(\vec{\xi};k)\times \\ \times\vec{f}^c(\vec{\xi};k)-(1-\lambda)\vec{f}^{sT}(\vec{\xi};k)K^{-1}(\vec{\xi};k)\vec{f}^s(\vec{\xi};k). \quad (16)$$

Таким чином, задача зведена до мінімізації зваженої комбінації квадратичних форм (15). Однак, параметр мінімізації входить в коефіцієнти як матриці, так і вектора форм складним нелінійним чином. Окрім того, розмірність форм (I) також є оптимізаційним параметром. В якості розв'язання задачі (14) (див. також (15)) пропонується наступна напіваналітична процедура. Послідовно, починаючи з однієї сили збільшуємо кількість сил до I, відшукуємо розв'язок (14). Вибираємо в якості оптимального розв'язок $\arg\min I^f(\vec{\xi};k;I)$ для найменшого значення I^f. Потім, використовуючи (13), відновлюємо оптимальні значення $\vec{a}$ та $\vec{b}$ для оптимальної кількості сил і оптимального їх розташування. Використовуючи (8), відшукуємо значення сил та їх фази. Наприкінці перевіряємо отриманий розв'язок.

Дискретне формулювання еквівалентної задачі

Дискретна постановка задачі відрізняється від аналітичної (14). Дійсно, в аналітичній постановці відшукується умовний мінімум функціоналу за неперервною векторною змінною при заданій кількості сил. У дискретній постановці, покриємо область рішення (відрізок [0, 1]) рівномірної сіткою $\Omega=\{x_n=nh,\ n=\overline{0,N},\ h=1/N\}$, в кожній точці якої помістимо силу. Дискретний функціонал, аналогічний (15) при використанні квадратурної формули трапеції з урахуванням того, що $G(0;\xi;k)=G(1;\xi_i;k)=0$, має вигляд

$$I^f(k;N)=\lambda C+(1-\lambda)S-\lambda\vec{f}^{cT}(k)\vec{a}^c(k)- \\ -(1-\lambda)\vec{f}^{sT}(k)\vec{a}^s(k), \quad (17)$$

де $\vec{a}^c(k)$ та $\vec{a}^s(k)$ – розв'язки лінійних систем

$$K(k)\vec{a}^c(k)=\vec{f}^c(k),\quad K(k)\vec{a}^s(k)=\vec{f}^s(k). \quad (18)$$

В позначеннях

$$K=\left\{K_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N},\ K_{ij}(k)=h\sum_{n=1}^{N-1}G_{in}(k)G_{jn}(k),\ G_{in}(k)=G(x_n;\xi_i;k),$$

$$\vec{f}^{cT}=\left\{f_i^c\right\}_{i=1}^{N-1},\quad f_i^c(k)=h\sum_{n=1}^{N-1}G_{in}(k)A_n\cos D_n,$$

$$A_n=A(x_n),\ D_n=D(x_n),$$

$$\vec{f}^{sT}=\left\{f_i^s\right\}_{i=1}^{N-1},\ f_i^s(k)=h\sum_{n=1}^{N-1}G_{in}(k)A_n\sin D_n. \quad (19)$$

Задача (17) – (19) не є оптимізаційною. Вона дає можливість лише визначити характеристики сил, розташованих в заданих вузлах сітки (шляхом розв'язання систем (18)) і оцінити функціонал (17) шляхом обчислення.

Поставимо оптимізаційну дискретну задачу, еквівалентну аналітичній наступним чином. Маючи (17), (18), визначити $\mathrm{I}_1=\{i_1,\dots,i_n\}$ ($\mathrm{I}_0=\{j\in\{j_1,\dots,j_{N-1-n}\}:\ \mathrm{I}_0\cup\mathrm{I}_1=\overline{1,N-1}\}$, $n\le I$) – набір точок сітки Ω потужності, що не перевищує I, такий, що при прикладанні в цих точках сил з оптимальними характеристиками, (17) приймає мінімальне значення.

Відповідно, I_0 – набір індексів вузлів, в яких сили не прикладаються. При цьому, очевидно, системи рівнянь (18) повинні мати порядок $(n\times n)$ та їх матриці й вектори правих частин отримуються з повних виразів (18) шляхом відкидання рядків і стовпчиків з індексами з I_0. В результаті розв'язання оптимізаційної задачі визначимо оптимальний набір I_1 (індекси точок сітки прикладання сил, його потужність – оптимальна кількість сил), а $\vec{a}^c(k)$ і $\vec{a}^s(k)$ – оптимальні характеристики прикладених сил. Реалізація цього підходу має вигляд

$$I^f(k;N)=\lambda C+(1-\lambda)S-\lambda\vec{f}^{cT}(k)\vec{a}^c(k)- \\ -(1-\lambda)\vec{f}^{sT}(k)\vec{a}^s(k)\underset{I_1,\vec{a}^c,\vec{a}^s}{\downarrow}\min,$$

$$\begin{cases}-A(\vec{1}-\vec{r})\le K(k)\vec{a}^c(k)-\vec{f}^c(k)\le A(\vec{1}-\vec{r}),\\ -A(\vec{1}-\vec{r})\le K(k)\vec{a}^s(k)-\vec{f}^s(k)\le A(\vec{1}-\vec{r}),\\ -B\vec{r}\le\vec{a}^c(k)\le B\vec{r},\quad -B\vec{r}\le\vec{a}^s(k)\le B\vec{r},\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}r_i\le I,\quad \vec{r}=\left\{r_i\right\}_{i=1}^{N-1},\quad r_i=\begin{cases}1, & i\in\mathrm{I}_1,\\ 0, & i\in\mathrm{I}_0.\end{cases}$$

Висновки

У роботі розглянута модельна задача про визначення оптимальної кількості сил та їх характеристик – місця прикладання, амплітуд і фаз, які забезпечують із заданою точністю найкращим чином наближення заданих форми і поточкової фази

коливань балки в заданому частотному діапазоні. У першій частині роботи задача зведена до умовної багатоекстремальної задачі мінімізації основного функціоналу, яка не піддається аналітичному розв'язанню. У другій частині роботи, побудований її дискретний еквівалент, що формулюються у вигляді змішаної умовної задачі неопуклої мінімізації. Дискретна задача розв'язана чисельно з використанням багатофункціонального пакета PSG (Matlab Interface), наданого American Optimal Decision, USA [7, 8]. Використання функціональних можливостей пакету дозволило отримати і проаналізувати оптимальний розв'язок задачі. Показано, що найкращим розподілом точок прикладання сил у широкому частотному діапазоні є близьке до рівномірного розподілу. Управління фазою коливань утруднено у вузьких діапазонах, що утримують резонансні частоти. Збільшення кількості прикладених сил призводить до експоненціального зменшення середньоквадратичної помилки (на рис. 1 приведено залежність мінімуму функціонала (17) від кількості прикладених сил у логарифмічному масштабі), а розширення частотного діапазону – до її експоненціального зростання, що може бути основою оптимального конструювання випромінюючих елементів (на рис. 2 приведено залежність мінімуму функціонала (17) від частоти збурення). На рис. 3 та на рис. 4 приведено оптимальні наближення амплітуди та фази при $I = 2$ та $I = 10$.

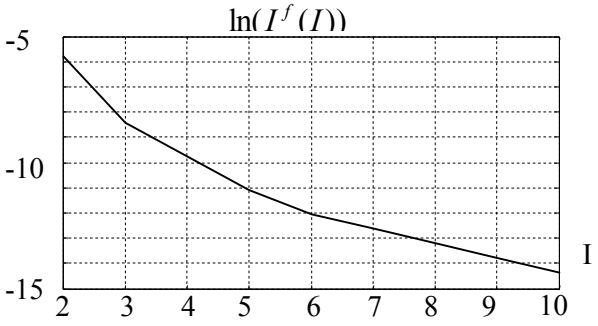


Рис. 1. Залежність похибки від кількості сил

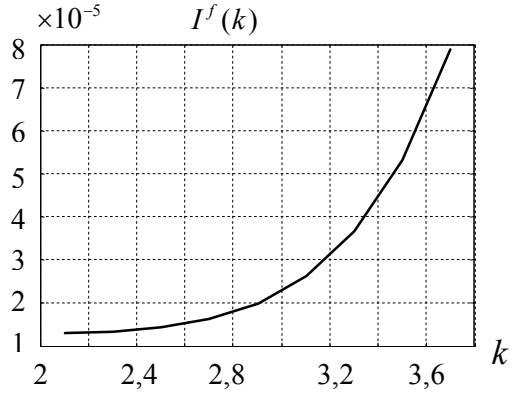


Рис. 2. Залежність похибки від частоти

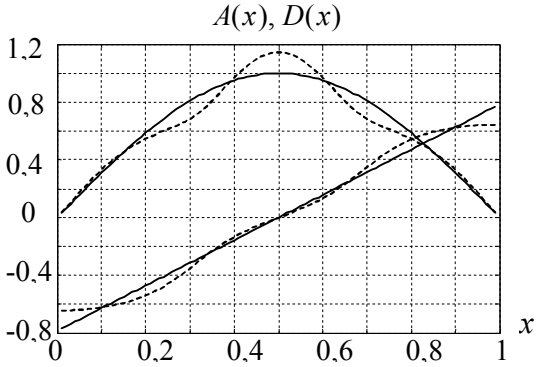


Рис. 3. Наближення амплітуди та фази при $I = 2$

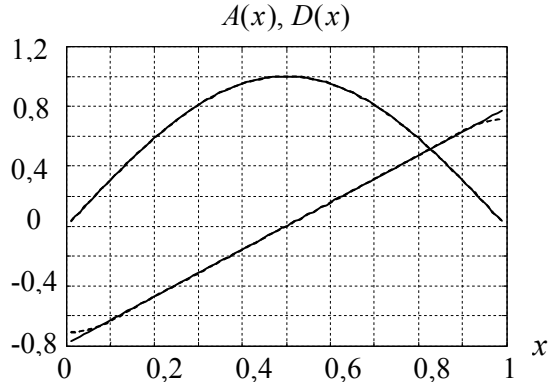


Рис. 4. Наближення амплітуди та фази при $I = 10$

Список використаних джерел

1. *Chernousko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N.* Control of vibration. – Moscow: Nauka, 1980. – 384 p. (in Russian).
2. *Akulenko L. D.* The design of the vibrational motion control systems with discrete and distributed parameters //Applied Mathematics and Mechanics. – 1989. – V. 3, is. 4. – P. 43-49. (in Russian).
3. *Balandin D. V.* On the optimal vibration absorption of elastic objects // Applied Mathematics and Mechanics. – 1995. – V. 59, is. 3. – P. 73-75. (in Russian).
4. *Komkov V.* Optimal control theory for the damping of vibrations of simple elastic systems. – Springer Verlag. Berlin. Heidelberg, New York, 1972. – 253 p.
5. *Banichuk N. V.* Introduction to Optimization of Structures. – Springer-Verlag, NY, 1990. – 312 p.
6. *Banichuk N. V., Klimov D. M.* Dynamical Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures. – Springer-Verlag, NY, 1991. – 257 p.
7. American Optimal Decisions Portfolio Safeguard (PSG) in Windows Shell Environment: Basic Principles. – AORDA, 2011. – C. 260. – ISBN 098282131X, 270 p.
8. American Optimal Decisions Optimization and Risk Management Case Studies with Portfolio Safeguard (PSG) in Windows Shell Environment. – AORDA, 2010. – C. 528. – ISBN 0982821301, 310 p.

Надійшла до редколегії 10.05.13

УДК 539.3

Карнаухов В. Г.[1], д. ф.-м. н., проф.

Термомеханіка зв'язаних полів в непружних матеріалах та елементах конструкцій при гармонічному навантаженні

Розглядаються основні питання термомеханіки зв'язаних полів в тілах з пасивних і п'єзоативних непружних матеріалів при гармонічному навантаженні: рівняння стану, постановка зв'язаних задач, методи їх розв'язування, вплив зв'язанності на термомеханічну поведінку непружних тіл.

Ключові слова: непружність, коливання, розігрів.

[1] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: karn@inmech.kitv.ua

V. G. Karnaukhov[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Thermomechanics of the coupled fields in nonelastic materials and structural elements under harmonic loading

The main problems of thermomechanics of the coupled fields for the inelastic passive and piezoactive solids under harmonic loading are considered. Among them are formulation of constitutive equations, coupled problem statements, methods of their solutions, influence of coupling on thermomechanical behavior of inelastic solids.

Key Words: nonelasticity, vibrations, heating.

[1] Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Scince of Ukraine,
Nesterov Str., 3, Kyiv 03057, Ukraine
e-mail: term@inmech.kiev.ua

Вступ

Механіка зв'язаних полів вивчає взаємодію механічних, електромагнітних та теплових полів у деформівних тілах. В останні роки ця галузь привертає увагу механіків всього світу через її велике практичне значення. Суттєвий внесок в її розвиток вніс академік А. Д. Коваленко та його учні. Уже в ранніх роботах А. Д. Коваленка, коли він працював на кафедрі теорії пружності Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка, були розглянуті лінійні зв'язані задачі термомеханіки для тонкостінних елементів [1]. Основи лінійної електропружності, яка враховує взаємодію механічних та електричних полів в елементах конструкцій з п'єзоматеріалів, закладено в фундаментальних роботах А. Ф. Улітка, який довгий час очолював кафедру теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка. Перші роботи по термомеханіці зв'язаних полів в елементах конструкцій при гармонічному навантаженні було виконано в роботах А. Д. Коваленка та автора цієї статті [2-9]. В подальшому дослідження коливань і дисипативного розігріву елементів конструкцій знайшли суттєвий розвиток в роботах співробітників Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ [10-18].

В даній статті подано короткий нарис тих основних питань, які виникають при математичному моделюванні вимушених коливань і дисипативного розігріву елементів конструкцій з непружних матеріалів при дії на них гармонічного за часом механічного чи електричного навантаження.

Постановка зв'язаних нелінійних задач термомеханіки непружних просторових тіл при гармонічному навантаженні

Для моделювання термомеханічних процесів в тілах з пасивних і п'єзоактивних матеріалів можна використовувати загальні моделі в'язкопружності, пластичності або в'язкопружнопластичності. Проте, застосування таких моделей для гармонічного навантаження потребує великого об'єму експериментально-теоретичних досліджень для визначення параметрів, функцій або функціоналів, які входять у рівняння стану. До того ж розв'язання нелінійних крайових задач, які описують вказані процеси, вимагає застосування ітераційних методів і багато часу при їх реалізації. Тому виникає потреба у спрощенні визначальних рівнянь з урахуванням специфіки гармонічних процесів, яка полягає в тому, що при наявності в'язкості при періодичному електромеханічному

© В. Г. Карнаухов, 2013

навантаженні з деякою частотою, в тілі через короткий час встановлюється періодичний процес з цією ж частотою. Ця специфіка дозволяє суттєво спростити визначальні рівняння і дати спрощену постановку зв'язаних задач. Це питання для активних і пасивних матеріалів детально обговорюється в монографії [18]. Застосовуючи до загальних рівнянь стану методи нелінійної механіки, прийдемо до визначальних рівнянь, які мають такий самий вигляд, як і рівняння стану теорії пружності з тією лише різницею, що вони є комплексними, а параметри цих визначальних рівнянь залежать від амплітуд незалежних польових величин. Рівняння енергії приймає вигляд класичного рівняння теплопровідності з джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією. Суттєво спрощується і визначальне рівняння для останньої. Вона дорівнює осередненій за період потужності. Таким чином, постановка зв'язаних задач електротермомеханіки для гармонічних процесів зводиться до розв'язання універсальних комплексних рівнянь руху, кінематичних співвідношень, комплексних рівнянь електростатики, рівняння енергії. Граничні умови співпадають з граничними умовами для пружного матеріалу.

Якщо всі електричні величини покласти рівними нулеві, приходимо до більш простої задачі термомеханіки для тіл з пасивних матеріалів. Використовуючи вказані вище універсальні рівняння та визначальні рівняння, одержимо в загальному випадку складну нелінійну комплексну систему диференціальних рівнянь відносно комплексних компонент вектора зміщень, комплексного потенціалу та дійсної температури. Аналіз цієї системи показує, що можливі різні варіанти постановки зв'язаних задач термомеханіки елементів конструкцій з пасивних (без п'єзоефекту) та активних (з п'єзоефектом) матеріалів. Найпростіша постановка задачі має місце в тому випадку, коли електромеханічні характеристики не залежать від температури та інших польових величин. Тоді цей перший клас задач зводиться до розв'язання лінійної задачі електромеханіки чи механіки, розрахунку дисипативної функції і розв'язання задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Якщо електромеханічні характеристики залежать від температури, маємо більш складний другий клас нелінійних задач. Їх нелінійність обумовлена залежністю дисипативної функції від температури та деформацій і залежністю електромеханічних характеристик від температури. Третій клас задач виникає при врахуванні залежності електромеханічних характеристик від незалежних польових величин, скажемо, від деформацій для задач термомеханіки для тіл з пасивних непружних матеріалів. Цей клас задач зводиться до розв'язання нелінійної задачі ефектромеханіки (чи механіки), розрахунку дисипативної функції і розв'язання лінійного рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла. Найбільш складний четвертий клас задач виникає при врахуванні залежності електромеханічних характеристик від температури і незалежних польових величин, скажемо, деформацій для випадку тіла з пасивного матеріалу.

Постановка зв'язаних задач термомеханіки непружних тонкостінних елементів при гармонічному навантаженні

Тонкостінні елементи широко застосовуються в усіх галузях сучасної техніки. Тому дослідженню різних питань механіки й термомеханіки пластин й оболонок присвячено дуже багато робіт вчених різних країн. Часто ці елементи виготовляються з полімерних матеріалів чи композитів на їх основі, які мають суттєві гістрезисні втрати. Тому при дослідженні вимушених коливань виникають поставлені вище питання про вплив температури дисипативного розігріву на термомеханічний стан тонкостінних елементів з пасивних та п'єзоактивних матеріалів. Такі питання було вперше поставлено в роботах [3, 6-8]. Для математичної постановки задач про коливання і дисипативний розігрів тонкостінних елементів можна використовувати гіпотези різного рівня. Найпростіші з них – це гіпотези Кірхгофа – Лява. Для п'єзоактивних матеріалів вони повинні бути доповнені гіпотезами відносно електричних польових величин. До того ж потрібно приймати гіпотези відносно температури. Ці питання детально обговорено в монографіях [3, 11-14, 17], де наведено нелінійні комплексні диференціальні рівняння відносно компонент зміщень та температури дисипативного розігріву.

При використання гіпотез типу Тимошенка вважається, що нормальна складова індукції значно більша її тангенціальних складових. З цієї

умови визначаються тангенціальні складові напруженості електричного поля через її нормальну складову. Відносно температури приймаються додаткові гіпотези. Кінематичні співвідношення залишаються класичними. В результаті можна одержати спрощені визначальні рівняння, а з їх використанням і нелінійну систему диференціальних рівнянь відносно комплексних компонент зміщень, кутів зсуву і коефіцієнтів розкладу теплового потоку і температури. При врахуванні геометричної нелінійності додатково використовуються нелінійні кінематичні співвідношення. Основні рівняння уточнених зв'язаних теорій тонкостінних елементів представлено в [12, 14].

Методи розв'язування зв'язаних задач термомеханіки

Задачі першого з вказаних вище класів є, по суті, лінійними, бо вони зводяться до розв'язання лінійних задач електромеханіки чи механіки; до розрахунку дисипативної функції, яка є алгебраїчною функцією польових величин; до розв'язання лінійної задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією. Єдиним ускладненням є те, що задача електромеханіки чи механіки для непружних матеріалів є комплексною.

Для розв'язання вказаних вище нелінійних зв'язаних задач термомеханіки застосовуються різного роду ітераційні процеси: метод послідовних наближень, метод квазілінеаризації, узагальнений метод пружних розв'язків, метод покрокового інтегрування за часом та ін. За допомогою цих ітераційних процедур вихідні нелінійні задачі зводяться до розв'язання послідовності лінійних задач термомеханіки чи електротермомеханіки з залежними від координат комплексними коефіцієнтами, розрахунку дисипативної функції та розв'язання лінійних задач теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для розв'язування вказаних лінійних задач застосовуються чисельні методи – метод скінченних елементів, метод дискретної ортогоналізації, метод скінченних різниць тощо. Детальний огляд методів розв'язування зв'язаних задач подано в [10-14, 16-18].

При дослідженні резонансних коливань і викликаного ними дисипативного розігріву в деяких випадках вдається одержати аналітичні розв'язки задач. Для цього використовується метод Бубнова – Гальоркіна, коли задається форма коливань, розраховується дисипативна функція і тим самим методом розв'язується нелінійне рівняння теплопровідності. В результаті вихідна нелінійна задача зводиться до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для амплітуди коливань та температури дисипативного розігріву.

Подальше спрощення розв'язку задач можна одержати при дослідженні коливань і дисипативного розігріву непружних тіл в квазістатичній постановці [13].

Вплив зв'язанності полів на термоелектромеханічну поведінку тіл з непружних матеріалів

Температура дисипативного розігріву може вплинути на всі сторони механічного та електромеханічного стану непружних тіл: на розподіл напружень та деформацій; на амплітудно-температурно-частотні характеристики коливань та на залежність коефіцієнта демпфування від частоти; на статичну та динамічну стійкість тонкостінних елементів, зокрема, на області динамічної стійкості; на ефективність роботи сенсорів та актуаторів і на ефективність активного демпфування коливань за їх допомогою. При досягненні температурою деяких критичних точок, наприклад, точок деградації матеріалу, зокрема, точки плавлення для пасивних матеріалів чи точки Кюрі для активних матеріалів елементи конструкцій втрачають свою функціональну здатність, так що має місце специфічний тип теплового руйнування, коли конструкція не розділяється на частини, але перестає виконувати свою функціональну здатність. Розрахувавши температуру дисипативного розігріву для різних значень механічного навантаження, можна знайти критичні значення амплітуд механічного навантаження. При амплітуді навантаження, яка перевищує критичне значення, можна розрахувати критичний час, при досягненні якого має місце вказаний вище тип теплового руйнування. Розрахувавши критичний час для різних закритичних значень амплітуди навантажень, побудуємо криву типа Велера, яка асимптотично наближається зверху до критичного значення механічного навантаження і яка дає інформацію про довговічність елемента.

Список використаних джерел

1. *Kovalenko A. D.* Thermoelasticity of the plates and shells. – Kiev, KSU. – 1971. – 108 p.
2. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On influence of cyclic loading on temperature of cylinder with viscoelastic materials // Reports of NAS of USSR. – 1966. – N 9. – P. 1135-1140. (in Ukrainian).
3. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* The equations and solutions of some problems of the theory of viscoelestic shells // The thermal stress in constructional elements. – 1967. – N 7. – P. 1-24. (in Russian).
4. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of viscoelastic bodies with material with resonant dispersion // Reports of NAS of USSR. – 1968. – N 11. – P. 1029-1034. (in Ukrainian).
5. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of viscoelastic bodies under periodical loading // Applied Mechanics. – 1969. – V. 5, N 2. – P. 28-35. (in Russian).
6. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of orthotropic viscoelastic cylindrical shells under transversal vibrations // The thermal stress in constructional elements. – 1970. – N 10. – P. 234-238. (in Russian).
7. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of viscoelastic revolution' shells under periodical loading // The thermal stress in constructional elements. – 1971. – N 11. – P. 5-18. (in Russian).
8. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On main features of behavior of the viscoelastic orthotropic shells with generalized thermoreological simple materials // The thermal stress in constructional elements. – 1972. – N 12. – P. 5-18. (in Russian).
9. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* The methods a solutions of coupled problems of thermoviscoelasticity. – The strength of materials and constructions. – Kiev: Nauk. Dumka, 1974. – P. 176-189. (in Russian).
10. *Karnaukhov V. G.* Coupled problems of thermoviscoelasticity. – Kiev: Nauk. dumka, 1982. – 260 p.
11. *Karnaukhov V. G., Senchenkov I. K., Gumeniuk B. P.* Thermomechanical behavior of viscoelastic bodies under harmonic loading. – Kiev: Nauk. dumka, 1985. – 288 p.
12. *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F.* Coupled problems of theory of viscoelastic plates and shells. – Kiev: Nauk. dumka, 1986. – 224 p.
13. *Poturaev V. N., Dyrda V. I., Karnaukhov V. G. and etc.* Thermomechanics elastomeric construction' elements under cyclic loading. – Kiev: Nauk. dumka, 1987. – 288 p.
14. *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F.* Electrothermovicoelasticity. – Kiev: Nauk. dumka, 1988. – 320 p. (Mechanics of coupled fields in construction' elements: in 5 volums, vol. 4).
15. *Karnaukhov V. G., Gumeniuk B. P.* Thermomechanics of prestrain visccoelestic bodies. – Kiev: Nauk. dumka, 1990. – 304 p.
16. *Guz' A. N., Shul'ga N. A., ..., Karnaukhov V. G. and etc.* Tecnological stresses in materials. – Kiev: «A.S.K.», 1997. – 396 p. – (Mechanics of composits: in 12 volumes, vol. 6).
17. *Kubenko V.D., ..., Karnaukhov V.G and etc.* Dynamics of construction' elements. – Kiev: «A.S.K.», 1999. – 379 p. – (Mechanics of composits: in 12 volumes, vol. 9).
18. *Karnaukhov V. G., Mychailenko V. V.* Nonlinear thermomechanics of piezoelectric nonelestic bodies under monohsrmonic loading. – Zytomyr: ZSГTU, 2005. – 428 p.

Надійшла до редколегії 14.05.13

УДК 539.3

Кирилова О. І.[1], асистент

Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з жорсткими включеннями при коливаннях повздовжнього зсуву

Розв'язана задача по визначенню напруженого стану поблизу тонких жорстких включень в нескінченному циліндрі довільного перерізу при коливаннях повздовжнього зсуву. Запропоновано підхід, що дозволяє окремо задовольнити умови на включеннях та на границі циліндра. Отримано наближені формули для обчислення КІН та досліджено вплив на їх значення частоти коливань, а також геометрії циліндра та розташування включень.

Ключові слова: циліндр довільного перерізу, гармонічні коливання, система включень, коефіцієнти інтенсивності напружень.

[1] Одеська національна морська академія,
65029, м. Одеса, вул. Дидріхсона, 8
e-mail: ol007ga@yandex.ru

O. I. Kirillova[1], Assistant

Stressed state in an infinite cylinder of arbitrary cross-section with rigid inclusions under oscillations of longitudinal shear

The problem of determining the stress state near the thin rigid inclusions in an infinite cylinder of arbitrary cross-section under oscillations of longitudinal shear. We propose an approach to satisfy the conditions separately on the surface of inclusions and on the boundary of the cylinder. The approximate formulas for calculating stress intensity factors are obtained to investigate the influence of frequency oscillations, geometry of the cylinder and location of the inclusions on their values.

Key Words: cylinder of arbitrary cross-section, harmonic oscillations, stress intensity factors, the system of inclusions.

[1] Odessa national maritime academy,
65029, Odessa, 8, Didrikhsona str.
e-mail: ol007ga@yandex.ru

Проблеми визначення динамічного напруженого стану поблизу тонких дефектів в необмежених тілах можна вважати достатньо вивченими. Як можна бачити з робіт [1-3], це стосується як двовимірних, так і просторових задач теорії пружності. Однак аналогічні задачі для тіл скінченних розмірів досліджені значно менше. Це пов'язано з тим, що використання прямих чисельних методів (різницевих і скінченних елементів) ускладнюється необхідністю згущення дискретизації в околі дефекту. Одним з перспективних методів для розв'язування таких задач є метод граничних елементів. Але при його застосуванні вихідна крайова задача зводиться до системи інтегральних рівнянь і на поверхні дефекту, і на границі тіла, що істотно ускладнює чисельну реалізацію. У даній роботі розглянуто підхід, що дозволяє окремо задовольнити умови на поверхнях включень і на границі тіла. Запропонований метод ґрунтується на використанні розривних розв'язків рівняння Гельмгольца.

Постановка задачі

Розглянемо пружний циліндр з твірними, паралельними осі Oz (рис. 1), перетин якого площиною xOy є довільна замкнена гладка крива, яка в полярній системі координат визначається рівнянням $r = r_0\psi(\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

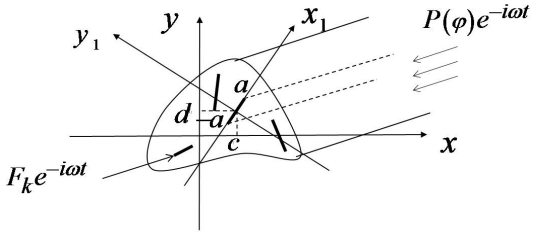


Рис.1. Циліндр довільного перерізу з системою жорстких включень

У циліндрі містяться N наскрізних тонких жорстких включень у вигляді пластин малої товщини h, які займають відрізки довжиною $2a_l$ з центрами в точках (c_l, d_l), $l = 1, 2, \ldots, N$. У циліндрі відбуваються коливання поздовжнього зсуву, які можуть бути викликані або дією на бічну поверхню зсувного гармонічного навантаження $P(\varphi)e^{-i\omega t}$, або в результаті дії на включен-

© О. І. Кирилова, 2013

ня зсувних сил $F_k e^{-i\omega t}$. В останньому випадку границя циліндра вважається нерухомою. За таких умов відмінною від нуля буде тільки z-компонента вектора переміщення, яка задовольняє рівняння Гельмгольца [4]. У полярній системі координат це рівняння має вигляд

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \qquad (1)$$

де $\kappa_2^2 = \omega^2 c_2^{-2}$, $c_2^2 = G\rho_1^{-1}$, G і ρ_1 – модуль зсуву і густина матриці, ω – частота коливань. Множник $e^{-i\omega t}$ в (1) і всюди далі опущений і розглядаються тільки амплітудні значення.

Рівняння (1) розглядається з двома типами граничних умов. У разі завантаженої границі

$$\tau_{\bar{n}z}\left(r_0\psi(\varphi), \varphi\right) = GP(\varphi), \ \ 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (2)$$

Якщо ж границя нерухома, виконується умова

$$w\left(r_0\psi(\varphi), \varphi\right) = 0, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (3)$$

Для формулювання граничних умов на включеннях з кожним з них пов'язується локальна система координат $x_k O_k y_k$. Нехай $w_k(x_k, y_k)$ – z-компонента вектора переміщення при переході від полярних координат до декартових $x_k O_k y_k$. Вважається, що між тілом і включенням здійснені умови повного зчеплення

$$w_k(x_k, \pm 0) = d_k, \quad |x_k| < a_k. \qquad (4)$$

На поверхнях включень дотичні напруження є розривними зі стрибком

$$\left\langle \tau_{zy_k}^k \right\rangle = G\left(\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0)\right) = \chi_k(x_k). \ (5)$$

У рівності (4) d_k – амплітуда поздовжніх коливань включення, яка визначається з рівняння руху включення як жорсткого тіла. При гармонічних коливаннях це рівняння має вигляд

$$-m_k d_k \omega^2 = F_k + \int_{-a_k}^{a_k} \chi_k(\eta)\, d\eta, \ \ m_k = 2a_k h_k \rho_k, \ \ (6)$$

де ρ_k – густина включення. Рівняння (6) записано для випадку, коли до включень прикладено сили і виконано умову (3). У разі завантаженої границі циліндра (2) в рівнянні (6) покладається $F_k = 0$.

За сформульованих умов ставиться задача визначити коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для кожного із включень.

Розв'язання задачі

У локальній системі координат для кожного включення будується розривний розв'язок [5] рівняння Гельмгольца зі стрибками, визначеними в (5):

$$w_l^{(d)}(x_l, y_l) = \int_{-a_l}^{a_l} \frac{\chi_l(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l)\, d\eta, \qquad (7)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2}\right),$$

де $H_0^{(1)}$ – функція Ганкеля.

Далі в системі $Or\varphi$ переміщення подаються у вигляді

$$w^{(g)}(r, \varphi) = w_0^{(g)}(r, \varphi) + \sum_{l=1}^{N} w_l^{(g)}(r, \varphi). \qquad (8)$$

У (8) $w_l^{(g)}(r, \varphi)$ – розривні розв'язки (5) після переходу до полярних координат, а $w_0^{(g)}(r, \varphi)$ – такий розв'язок рівняння Гельмгольца (1), що для (8) виконуються граничні умови (2) або (3). Ця невідома функція подається у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівняння (1):

$$w_0^{(g)}(r, \varphi) = r_0 \sum_{s=1}^{M} A_s g_s(r, \varphi), \qquad (9)$$

де

$$g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r)\cos(m-1)\varphi,$$

$$g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r)\sin m\varphi.$$

Функції $g_s(r, \varphi)$, $s = 1, \ldots, M, \ldots$, лінійно незалежні і утворюють повну замкнену систему функцій [6].

Для реалізації граничних умов на включеннях (4) переміщення в локальній системі координат аналогічно (8) запишуться у вигляді

$$w_k(x_k, y_k) = w_k^0(x_k, y_k) + \sum_{l=1}^{N} w^{kl}(x_k, y_k). \quad (10)$$

Підставляючи (10) в (4), отримаємо систему інтегральних рівнянь, яка після введення позначень

$$\kappa_0 = \kappa_2 r_0, \ \gamma_k = a_k r_0^{-1}, \ \eta_k = a_k \tau, \ x_k = a_k \varsigma, \\ c_k^0 = c_k r_0^{-1}, \ d_k^0 = d_k r_0^{-1}, \ Gq_l(\tau) = \chi_l(a_l \tau) \qquad (11)$$

і виділення сингулярних складових ядер набуде вигляду

$$\frac{\gamma_k}{2\pi}\int_{-1}^{1} q_k(\tau)\left(\ln|\tau - \zeta| + Q_1^{(k)}(\tau - \zeta)\right) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{N}\int_{-1}^{1} q_l(\tau) F^{kl}(\tau, \zeta)\, d\tau + r_0 \sum_{s=1}^{M} A_s g_s(a_k\zeta, 0) = d_k^0, \qquad (12)$$

де $Q_1^{(k)}(z)=O(1)$, $z\to 0$, а $F^{kl}(\tau,\zeta)$ – нескінченно диференційована функція при $-1\le\tau,\varsigma<1$. До (12) необхідно додати рівність, яке випливає з (6) при переході до нових позначень (11):

$$d_k^0=-\frac{1}{2\overline{\rho}_k\kappa_0^2\varepsilon_k\gamma_k}\left(F_k^0+\int\limits_{-1}^{1}q_k(\tau)d\tau\right), \qquad (13)$$

де $\overline{\rho}_k=\rho_k\rho_1^{-1}$, $\varepsilon_k=h_ka_k^{-1}$, $F_k^0=F_k(Ga_k)^{-1}$. У випадку, коли навантаження прикладено до границі, в (13) вважається, що $F_k^0=0$.

Розв'язок системи (12) шукаємо у вигляді

$$q_k(\tau)=\sum_{s=1}^{M}A_s\varphi_s^k(\tau)+\varphi_0^k(\tau). \qquad (14)$$

Тоді кожний доданок із (14) має задовольняти інтегральні рівняння (12):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_s^k(\tau)\left(\gamma_k\ln|\tau-\zeta|+\gamma_kQ_1^{(k)}(\tau-\zeta)+\frac{\pi}{\varepsilon_k\gamma_k\overline{\rho}_k\kappa_0^2}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{l=1\\l\ne k}}^{N}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_s^l(\tau)F^{kl}(\tau,\zeta)d\tau=-f_{s,k}(\zeta), \qquad (15)$$

$$f_{0,k}=\frac{F_0}{2\overline{\rho}_k\kappa_0^2\varepsilon_k\gamma_k},\quad f_{s,k}=g_s(a_k\zeta,0),$$

$$s=0,\dots,M;\quad k=1,\dots,N.$$

Для знаходження розв'язків отриманих рівнянь невідомі функції подаються у вигляді $\varphi_s^k(\tau)=\psi_s^k(\zeta)\big/\sqrt{1-\tau^2}$, $k=1,2,\dots,N$. Функції $\psi_s^k(\tau)$ наближаються інтерполяційним многочленом

$$\psi_s^k(\tau)=\sum_{m=1}^{n}\psi_{sm}^k\frac{T_n(\tau)}{(\tau-\tau_m)T_n'(\tau_m)},$$

де $T_n(\tau)$ – многочлен Чебишева, τ_m – його корені, $\psi_{sm}^k=\psi_s^k(\tau_m)$.

Після застосування методу механічних квадратур отримано систему алгебричних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n}a_m\psi_{sm}^k\left(\gamma_kB_{jm}+\gamma_kQ_1^{(k)}(\tau_m-\zeta_j)+\frac{\pi}{\varepsilon_k\gamma_k\overline{\rho}_k\kappa_0^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{l=1\\l\ne k}}^{N}\sum_{m=1}^{n}a_m\psi_{sm}^lF_{jm}^{kl}=-f_{s,k}(\zeta), \qquad (16)$$

де $F_{jm}^{kl}=F^{kl}(\tau_m,\varsigma_j)$, $s=0,\dots,M$; $k=1,\dots,N$. У (16) для обчислення інтеграла з логарифмічною особливістю використана квадратурна формула [7]; B_{jm} – коефіцієнти цієї формули.

Для визначення коефіцієнтів A_k скористаємось умовами (2) або (3) на границі. Задовольняючи граничну умову (2), отримуємо рівність

$$\sum_{s=1}^{M}A_s\left(\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_s^l(\tau)V_l(\tau,\varphi)d\tau+B_s(\varphi)\right)=P(\varphi), \qquad (17)$$

де

$$V_l(\tau,\varphi)=-\frac{1}{4}i\gamma_l\kappa_0R_{0l}^{-1}H_1^{(1)}(\kappa_0R_{0l})\times$$

$$\times\Big[\big((\gamma_l\tau-x_{0l})\cos\alpha_l+y_{0l}\sin\alpha_l\big)\cos(\overline{n},x)+$$

$$-\big(y_{0l}\cos\alpha_l-(\gamma_l\tau-x_{0l})\sin\alpha_l\big)\cos(\overline{n},y)\Big],$$

$$B_s(\varphi)=f_s^{(x)}\cos(\overline{n},x)+f_s^{(y)}\cos(\overline{n},y);$$

$$f_s^{(u)}=r_0\,\partial g_s/\partial u\big|_{r=r_0\psi(\varphi)}.$$

У випадку нерухомої границі аналогічна рівність набуває вигляду

$$\sum_{s=1}^{M}A_s\left(\sum_{l=1}^{N}\gamma_l\int\limits_{-1}^{1}\varphi_s^l(\tau)U_l(\tau,\varphi)d\tau+g_s\big(r_0\psi(\varphi),\varphi\big)\right)=$$

$$=-\sum_{l=1}^{N}\gamma_l\int\limits_{-1}^{1}\varphi_0^l(\tau)U_l(\tau,\varphi)d\tau, \qquad (18)$$

де $U_l(\tau,\varphi)=-(i/4)H_0^{(1)}(\kappa_0\sqrt{(\gamma_l\tau-x_{0l})^2+y_{0l}^2})$.

Квадратурні формули Гауса – Чебишева та використання коллокаційного метода у вузлах $\sigma_b=2\pi b/M$, $b=1,\dots,M$ дають можливість замінити (17) та (18) системами лінійних рівнянь з невідомими A_s, $s=1,\dots,M$:

$$\sum_{s=1}^{M}A_s\left(\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}a_m\psi_{sm}^lV_l(\tau_m,\sigma_b)+B_s(\sigma_b)\right)=P(\sigma_b), \qquad (19)$$

$$\sum_{s=1}^{M}A_s\left(\sum_{l=1}^{N}\gamma_l\sum_{m=1}^{n}a_m\psi_{sm}^lU_l(\tau_m,\sigma_b)+g_s\big(r_0\psi(\sigma_b),\sigma_b\big)\right)=$$

$$=-\sum_{l=1}^{N}\gamma_l\sum_{m=1}^{n}a_m\psi_{0m}^lU_l(\tau_m,\sigma_b). \qquad (20)$$

Як відомо, концентрація напруження в тілі навколо тонких жорстких включень характеризується КІН [8]:

$$\begin{bmatrix}\tau_{zy_1}\\ \tau_{zy_1}\end{bmatrix}=-\frac{K^{\pm}}{\sqrt{r}}\begin{bmatrix}\sin(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{bmatrix}+O(1),\quad r>0.$$

Після розв'язування систем (19) або (20) та (16) наближені значення КІН знаходяться за формулами

$$k_l^{\pm}=\frac{K_l^{\pm}}{G_1\sqrt{2a_l}}=\mp\frac{(\pm1)^n}{n}\sum_{s=1}^{M}A_s\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\psi_{sm}^l\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}\right)^{\mp1}\mp$$

$$\mp\frac{(\pm1)^n}{n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\psi_m^*\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}\right)^{\mp1}.$$

Результати числових досліджень

Для числової реалізації запропонованого методу розглядався еліптичний циліндр з чотирма включеннями (рис. 2).

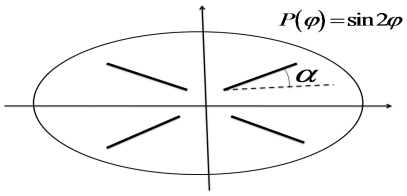


Рис. 2. Переріз еліптичного циліндра з чотирма включеннями

Вважалось, що ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon = 0{,}5$, а нахил включень до великої півосі характеризує кут α (рис. 2). На поверхню циліндра діє самоврівноважене навантаження $P(\varphi) = \sin 2\varphi$. При таких умовах $\left|k_i^{\pm}\right| = \left|k^{\pm}\right|$, $i = 1, 2, 3, 4$. Обчислювались значення КІН для включення, розташованого в першій чверті. Змінювався параметр $\gamma = a/r_0$ – відношення довжин включень до великої осі еліпса. Для даного еліпса при $\alpha = 30^0$ та $\gamma \approx 0{,}488$ має місце вихід включення на поверхню циліндра.

Результати обчислень наведені на рис. 3-4 у вигляді графіків залежності безрозмірних КІН від безрозмірної частоти $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $\gamma = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}485$. Числові результати показують, що в усіх випадках $\left|k^-\right| > \left|k^+\right|$. Значення параметра γ суттєво впливає

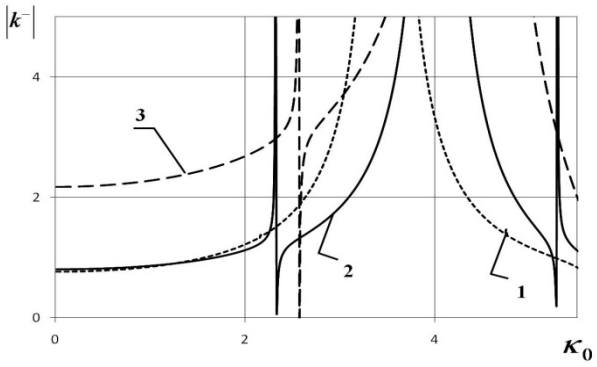


Рис. 3. Значення КІН для кінця включення, віддаленого від границі

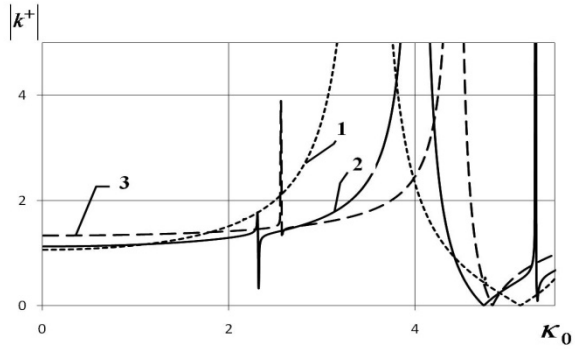


Рис. 4. Значення КІН для кінця включення, наближеного до границі

на значення частоти першого резонансу. Вона зростає при збільшенні γ, що геометрично означає збільшення довжини включення і наближення одного кінця до границі. Також при цьому спостерігається і зростання абсолютних значень КІН при частотах, менших частоти першого резонансу.

Список використаних джерел

1. *Jain D. L. Kanval R. P.* Diffraction of elastic waves by two complanar parallel rigid strips//Int. J. Solids and Struct. – 1972. – V. 10, № 11. – P. 925-937.
2. *Jun Jei, Qingheny Yung, Yue-Sheng Wang and Chuangzeng Thung.* An investigation of dynamic interaction between multiple cracks and inclusions by TDBEM // Composites Science and Technology, June 2009. –V. 69, Iss. 7-8. – P. 1275-1285.
3. *Popov V. G.* Diffraction of elastic shear waves on radially distributed rigidinclusions // International Applied Mechanics. – 1996. – V. 32, № 8. – P. 624-630.
4. *Poruchikov V. B.* Metods of dynamical theory of elasticity. – Moscow: Nauka, 1986. – 328 p. (in Russian).
5. *Popov V. G.* Comparison of displacement and stress fields in the diffraction of elastic shear waves on various defects: crack and thin rigid inclusion // Dynamic systems. – 1993. – V. 12. – P. 14-23. (in Russian).
6. *Vekua N. P.* Systems of singular integral equations and some boundary problems. – Moscow: Nauka, 1970. – 379 p. (in Russian).
7. *Nazarchuk Z. T.* Numerical investigation of waves diffraction on cylindrical structures. – Kiev: Nauk. dumka, 1989. – 256 p. (in Russian).
8. *Sulym G. T.* Fundamentals of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable bodies with thin inclusions. – Lviv, 2007. – 716 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 25.03.13

УДК 539.3

Киричок І. Ф.[1], д. ф.-м. н., с. н. с.,
Карнаухова Т. В.[2], к. ф.-м. н., доц.

Осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів

В роботі представлено результати чисельного дослідження вимушених резонансних осесиметричних коливань і вібророзігріву циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами. Досліджено вплив температурної залежності комплексних характеристик пасивного і п'єзоактивного матеріалів на амплітуду коливань, температуру вібророзігріву та електричний показник сенсора.

Ключові слова: резонансні коливания, дисипативний розігрів, в'язкопружна циліндрична оболонка, сенсор.

[1] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,
03057, Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: term@inmech.kiev.ua
[2] Національний технічний університет "КПІ",
03057, Київ, просп. Перемоги, 3
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

I. F. Kyrychok[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.,
T. V. Karnaukhova[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Axisymmetric resonant vibrations and vibroheating of viscoelastic cylindrical shell containing piezoelectric sensors with taking into account of temperature dependence of material characteristics

In the paper, the results of numerical investigation of the forced resonant axisymmetric vibrations and vibroheating of viscoelastic cylindrical shell with piezoelectric sensors are given. Influence of temperature dependence of material characteristics on vibration amplitude, heating temperature and electrical sensor indication are investigated.

Key Words: resonant vibrations, dissipative heating, viscoelastic cylindrical shell, sensor.

[1] Timoshenko Institute of Mechanics,
National Academy of Science of Ukraine,
3, Nesterov Str., Kyiv, 03057, Ukraine
e-mail: term@inmech.kiev.ua
[2] National technical university of Ukraine “KPI”,
37, Peremogy Prosp., Kyiv, 03056, Ukraine
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

Вступ

В останні роки находять широке застосування методи активного демпфування вимушених коливань тонкостінних елементів за допомогою п'єзоелектричних включень, які виконують роль сенсорів або актуаторів [1, 2]. Побудові електротермомеханічних моделей динамічної поведінки шаруватих тонкостінних елементів із в'язкопружних пасивних (без п'єзоефекту) і п'єзоактивних матеріалів з врахуванням температурної залежності властивостей матеріалів, геометричної і фізичної нелінійностей, а також розв'язанню конкретних задач присвячено роботи [3-7] та ін. Зокрема, в статтях [4-6] отримано аналітичні та чисельні результати про вимушені осесиметричні коливання і вібророзігрів циліндричних оболонок з п'єзоелектричними актуаторами.

В даній статті чисельно розв'язується задача про вимушені коливання і дисипативний розігрів шарнірно обпертої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при моногармонічному навантаженні. Досліджується вплив температурної залежності властивостей пасивного і п'єзоактивного матеріалів на динамічну і температурну поведінку оболонки та електричні показники п'єзосенсора.

Постановка задачі

Розглянемо тришарову циліндричну оболонку довжиною l, яка віднесена до ортогональної системи координат α, θ, z з координатою $z = 0$ на серединній поверхні радіуса R. Середній шар товщиною h_0 є ізотропним і пасивним. Зовнішні шари товщиною h_1 виготовлені із поляризованої по товщині в протилежних напрямках п'єзокераміки с однаковими властивостями. Вважаємо, що матеріали шарів є в'язкопружними, їх властивості залежать від температури, а поляризація зовнішнього $(z \ge h_0/2)$ і внутрішнього $(z \le h_0/2)$ п'єзошарів характеризуються значеннями п'єзомодулів $-d_{31}$ і d_{31}, відповідно. Поверхні, що контактують з пасивним шаром, покриті суцільними електродами, на яких задано електричний потен-

© І. Ф. Киричок, Т. В. Карнаухова, 2013

ціал $\varphi(\pm h_0/2)=0$. Зовнішні поверхні $z=\pm H/2$ ($H=h_0+2h_1$) п'єзошарів електродовані на ділянці $s^{\pm}=2\pi R\Delta_\alpha$ ($\Delta_\alpha=\alpha_1-\alpha_0$) та неелектродовані поза $s^{\pm}$, де виконуються такі електростатичні граничні умови [3]:

$$\iint\limits_{s^{\pm}} D_z^{\pm}ds=0 \quad (\alpha_0\le x\le\alpha_1);$$
$$D_z^{\pm}=0 \quad (0\le\alpha<\alpha_0,\ \alpha_1<\alpha\le l), \qquad (1)$$

де $D_z^{\pm}$ – нормальна складова електричної індукції на зовнішньому і на внутрішньому п'єзошарах оболонки.

На оболонку діє осесиметричний поверхневий тиск $q_z=q\cos\omega t$ з частотою ω, близькою до резонансної. В результаті, на розімкнутих ефектродах сенсора $s^{\pm}$ виникають електричні потенціали $\varphi(\pm H/2)=\pm V_s$, амплітудні значення яких необхідно визначити. Торці оболонки шарнірно обперті, а поверхні знаходяться в умовах конвективного теплообміну з оточуючим середовищем.

При моделюванні електротермомеханічної поведінки розглядуваної оболонки приймаємо, що по всьому пакету шарів справедливі гіпотези Кірхгофа – Лява для механічних величин і адекватні припущення відносно електричних змінних [8], з яких випливає, що $D_z=\text{const}$ є постійною по товщині п'єзошарів. Вважаємо, що температура по товщині пакету постійна, а в'язкопружні властивості матеріалів описуються концепцією комплексних модулів [8], які залежать від температури.

Побудова розв'язку задачі

З використанням підходу [7] поставлена задача зводиться до розв'язання рівнянь гармонічних коливань (множник $e^{i\omega t}$ опускається)

$$N_{\alpha,\alpha}+\hat\rho\omega^2u=0,\quad M_{\alpha,\alpha}-Q_\alpha=0,$$
$$Q_{\alpha,\alpha}-N_\theta/R+\hat\rho\omega^2w+q_z=0; \qquad (2)$$

виразів для зусиль і моментів

$$N_\alpha=C_{11}\varepsilon_\alpha+C_{12}\varepsilon_\theta,\ M_\alpha=D_{11}\kappa_\alpha,$$
$$N_\alpha=C_{12}\varepsilon_\alpha+C_{11}\varepsilon_\theta,\ M_\theta=D_{12}\kappa_\alpha; \qquad (3)$$

кінематичних співвідношень

$$\varepsilon_\alpha=u_{,\alpha},\quad \varepsilon_\theta=w/R,$$
$$\kappa_\alpha=\vartheta_{\alpha,\alpha},\quad \vartheta_\alpha=-w_{,\alpha}; \qquad (4)$$

усередненого за період коливань і товщиною оболонки рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{a}T_{,t}=T_{,\alpha\alpha}-\frac{2\alpha_s}{\lambda H}(T-T_*)+\frac{1}{\lambda H}\widehat W \qquad (5)$$

з дисипативною функцією

$$\frac{2}{\omega}\widehat W=N''_\alpha\varepsilon'_\alpha-N'_\alpha\varepsilon''_\alpha+N''_\theta\varepsilon'_\theta-N'_\theta\varepsilon''_\theta+M''_\alpha\kappa'_\alpha-M'_\alpha\kappa''_\alpha. \qquad (6)$$

Рівняння (2) – (4) необхідно доповнити умовами шарнірного обпирання торців оболонки

$$N_\alpha=0,\ w=0,\ M_\alpha=0 \quad (\alpha=0,l). \qquad (7)$$

Граничні та початкова умови рівняння теплопровідності (5) – (6) такі:

$$\lambda T_{,\alpha}=\pm\alpha_{n,l}(T-T_c) \quad (\alpha=0,l),$$
$$T=T_0 \quad (t=0). \qquad (8)$$

Обумовлені гармонічним деформуванням системи електричні потенціали $\pm V_s$ на розімкнутих електродах сенсора на основі розв'язку задачі термомеханіки (2) – (8) і першої умови (1) обчислюються за формулою

$$\frac{V_s}{h_1}=\frac{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}b_{31}(\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\theta+h'\kappa_\alpha)d\alpha}{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}b_{33}d\alpha},\quad h'=\frac{h_0+h_1}{2}. \qquad (9)$$

У співвідношеннях (2) – (9) введено такі позначення:

$$C_{1k}=h_0[B_{1k}+(2B_{1k}^s+\gamma_{33})\delta,$$
$$D_{1k}=h_0^3(B_{1k}+2B_{1k}^s\delta_*^3+2\gamma_{33}\delta^3)/12,$$
$$B_{11}=E/(1-\nu^2),\ B_{11}^s=[s_{11}^E(1-\nu_E^2)]^{-1},$$
$$B_{12}=\nu B_{11},\ B_{12}^s=\nu_E B_{11}^s,\ \nu_E=-s_{12}^E/s_{11}^E,$$
$$b_{31}=d_{31}[s_{11}^E(1-\nu_E)]^{-1},\ \gamma_{33}=b_{31}^2/b_{33},$$
$$b_{33}=\varepsilon_{33}^T(1-k_p^2),\ k_p^2=2b_{31}d_{31}/\varepsilon_{33}^T,$$
$$\delta=h_1/h_0,\ \delta_*^3=4\delta^3+6\delta^2+3\delta,$$
$$\hat\rho=2\rho_*h_1+\rho h_0,\ s_{1k}^E=s'_{1k}(1-i\delta_{1k}^s),$$
$$d_{31}=d'_{31}(1-i\delta_{31}^d),\ \varepsilon_{33}^T=\varepsilon'_{33}(1-i\delta_{33}^\varepsilon)$$

– залежні від температури T комплексні податливості, п'єзомодуль і діелектрична проникливість п'єзоматеріалу; $E=E'+iE''$, $\nu=\text{const}$ – коефіцієнти в'язкопружності і Пуассона пасивного матеріалу; w,u – амплітуди прогину і осьового переміщення; ρ_0, ρ_1 – питомі густини пасивного і п'єзоактивного матеріалів. Тут і далі застосовуються стандартні позначення комплексних величин:

$$a=a'+ia'',\quad |a|=(a'^2+a''^2)^{1/2}.$$

Для розв'язання нелінійної взаємозв'язаної системи рівнянь (2) – (8) використовується метод покрокового за часом інтегрування [8]. При цьому система (2) – (4) записується у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду відносно комплексних величин u, w, ϑ_α, $N_\alpha, Q_\alpha, M_\alpha$. На кожному кроці інтегруються отримані рівняння методом дискретної ортогоналізації, а рівняння теплопровідності – методом кінцевих різниць.

Результати розрахунків та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для частот навантаження, близьких до першої резонансної частоти осесиметричних згинних коливань оболонки з розмірами $R = 0{,}1$ м, $l = 0{,}2$ м, $h_0 = 0{,}004$ м, $h_1 = 0{,}1\cdot 10^{-4}$ м і параметрами сенсора $\alpha_0 = 0{,}375\, l$, $\alpha_1 = 0{,}625\, l$. Пасивний шар виготовлений із полімера, а п'єзошари – із п'єзокераміки ЦТСтБС-2, температурні апроксимації електромеханічних властивостей яких приведені в статті [7].

На рис. 1 показано розподіли вздовж оболонки безрозмірної амплітуди прогинів $\tilde{w} = |w|\cdot 10^2 / h_0$ (криві 1) і температури вібророзігріву (криві 2), розраховані на резонансній частоті $\omega = 0{,}158\cdot 10^5\, c^{-1}$ при $q = 0{,}1\cdot 10^4$ Па, $\gamma_0 = \alpha_{s,0,l}\, l/\lambda = 0{,}25$. Тут і далі штрихові криві відповідають ізотермічним характеристикам матеріалів, а суцільні – при врахуванні їх залежності від температури. Частотні залежності максимальної температури $T(\alpha = 0{,}5l)$, амплітуд прогинів $\tilde{w}$ і показника сенсора $|V_s|$ показані на рис. 2, 3, 4

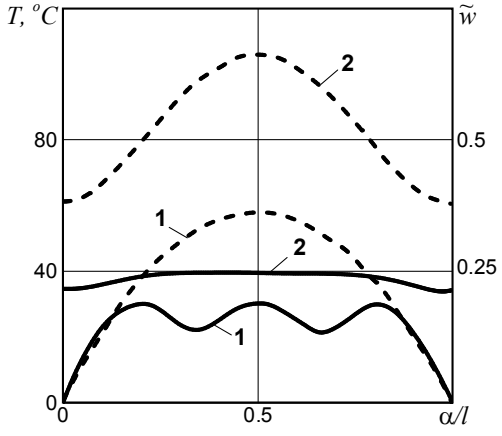


Рис. 1. Розподіли амплітуди прогину (криві 1) і температури (криві 2) по координаті

відповідно. Тут криві 1, 2 розраховані при $q = 0{,}05\cdot 10^4$, $0{,}10\cdot 10^4$ Па. Аналіз кривих показує, що врахування температурної залежності властивостей матеріалів (суцільні лінії) при вимушених коливаннях оболонки приводить до появи частотних характеристик м'якого типу та зменшенню резонансної частоти. Збільшення механічного навантаження супроводжується ростом температури вібророзігріву, яка може досягати критичного значення T_{kp}, коли розмягчується пасивний матеріал, або деполяризується п'єзокераміка сенсора (точка Кюрі) і система втрачає працездатність. Проводячи числові розрахунки для різних амплітуд навантаження, за критичне значення приймалось навантаження q_{kp}, при якому максимальна температура досягає T_{kp}. Для механічного навантаження $q \ge q_{kp}$ обчислювався критичний час, який відповідає значенню T_{kp}.

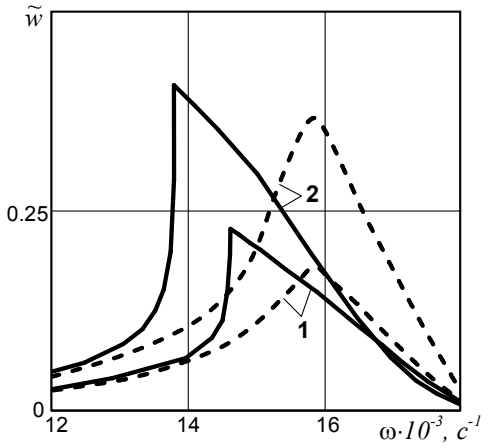


Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики

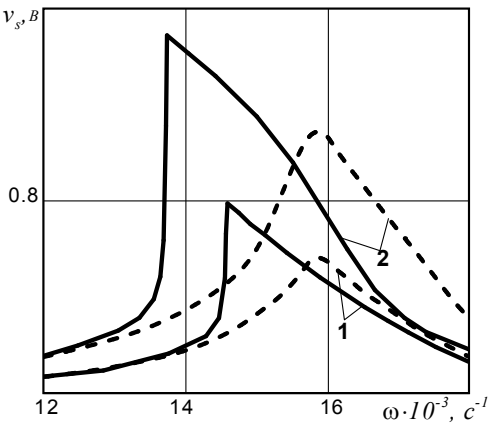


Рис. 3. Частотні залежності амплітуди показника сенсора

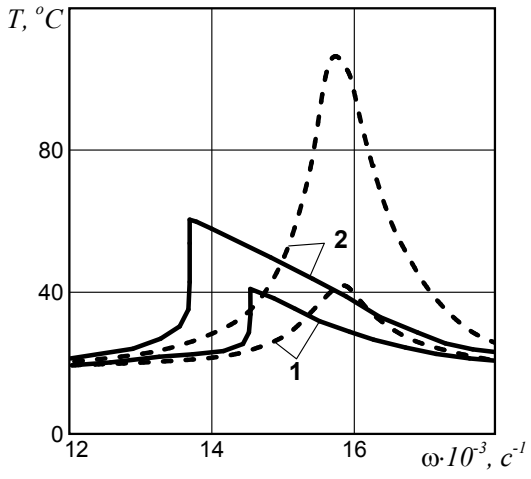


Рис. 4. Частотні залежності максимальної температури вібророзігріву

Висновки

Дано постановку задачі про вимушені осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей пасивного і п'єзоактивного матеріалів. Показано, що врахування взаємозв'язаності механічних і теплових полів приводить до зменшення ізотермічної резонансної частоти і трансформації частотних залежностей амплітуд прогину, температури вібророзігріву оболонки та показника сенсора в нелінійні характеристики м'якого типу.

Список використаних джерел

1. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 2001. – 384 p.
2. *Tzou H. S.* Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 400 p.
3. *Karnaukhov V. G., Mykhailenko V. V.* Nonlinear thermomechanics of piezoelectrical nonelastic bodies under monoharmonic loading. – Zhytomir: ZSTU, 2005. – 428 p. (in Russian).
4. *Kyrychok I. F., Karnaukhova T. V., Peresun'ko N. V.* Resonant axisymmetric vibrations and dissipative heating of cylindrical shells and their control by piezoelectric actuators // Theoretical and applied mechanics. – 2009. – P. 132-114. (in Russian).
5. *Kozlov V. I., Karnaukhova T. V., Peresun'ko N. V.* Demping forced axisymmetric vibrations of viscoelastic cylindrical shell by piezoelectric actuators // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2007. – N 4. –P. 84-87. (in Ukrainian).
6. *Kyrychok I. F., Karnaukhova T. V.* Forced axisymmetric vibrations and heating of viscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators taking into account of thermomechanical coupling // Appl. Mechanics. – 2010. – V. 46, N 10. – P. 53-61. (in Russian).
7. *Kyrychok I. F.* Axisymmetric resonant vibrations and heating of revolution' shells and their control by piezoelectric sensors and actuators // Appl. Mechanics. – 2010. – V. 46, N 8. – P. 42-57. (in Russian).
8. *Karnaukhov V. G., Kyrychok I. F.* Coupling problems of theory of viscoelastic plates and shells. – Kyiv: Naukova Dumka. – 1986. – 222 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 14.05.13

УДК 539.595

Константінов О. В.[1], к. ф.-м. н.

Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного амортизатора

Досліджується узагальнення класичної задачі Фарадея щодо розвитку параметричного резонансу в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею». Дослідження проведено для випадку, коли в систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» внесено додаткову ступінь вільності – можливість поступального руху резервуару в горизонтальній площині за наявності пружного амортизатора. Показано, що наявність та характеристики пружного амортизатора суттєво впливають на якісну картину розвитку параметричного резонансу в системі.

Ключові слова: параметричний резонанс, задача Фарадея, додатковий ступінь вільності, вільна поверхня рідини, зони нестійкості, пружний амортизатор.

[1] Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: akonst.im@mail.ru

O. V. Konstantinov [1], PhD (Phys.-Math.)

The Faraday generalized problem for the mechanical system «cylindrical tank – liquid with a free surface» with the elastic shock absorber

The generalized Faraday problem about attainment on parametric resonance in the mechanical system «cylindrical reservoir – liquid with a free surface» is under consideration. Behaviour of the system is considered in the case, when supplementary degree of freedom is implemented into the system, namely, potential of translational movement of the reservoir in the horizontal plane with the elastic shock absorber under system disturbance by vertical translational movement, which changes in time according to harmonic law. It is shown that the presence and characteristics of elastic shock absorber significantly affect the qualitative picture of the parametric resonance in the system.

Key words: parametric resonance, Faraday problem, an additional degree of freedom, free surface of liquid, the area of instability, elastic shock absorber.

[1] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
01601, Kyiv, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: akonst.im@mail.ru

Вступ

Параметричний резонанс в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» вперше експериментально досліджував М. Фарадей в 1831 році. Циліндричний резервуар, частково заповнений водою, був встановлений на спеціальному лабораторному устаткуванні і мав можливість рухатись у вертикальній площині за заданим гармонічним законом. Результатом експерименту було встановлення Фарадеєм того факту, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоті збурення резервуару. Оскільки резервуар рухається тільки вертикально за заданим законом, коливання рідини ніяк не впливають на характер його руху.

Узагальнення задачі Фарадея проводилося в таких напрямках. По-перше, в системі передбачається додатковий ступінь вільності: можливості поступального руху резервуару в горизонтальній площині за рахунок антисиметричних коливань вільної поверхні рідини, по-друге, до резервуару кріпиться пружний амортизатор, який забезпечує наявність зворотної сили. Подальший аналіз показав, що одним із головних факторів, які впливають на характер динамічних процесів в системі, стає жорсткість пружного амортизатора.

Дискретна модель механічної системи

Розглянемо задачу про коливання механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності пружного амортизатора. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, який може рухатись поступально у вертикальній площині під дією параметричного збурення $\varepsilon_z = H_z \cos pt$ та у горизонтальній площині за рахунок коливань вільної поверхні рідини та пружного амортизатора. Рідину вважа-

© О. В. Константінов, 2013

ємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух – безвихровим.

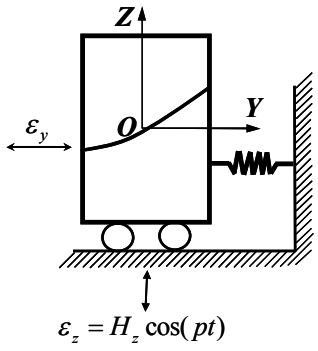


Рис. 1. Механічна модель системи

На основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, методу модальної декомпозиції та методу [2], який дозволяє повністю виключити кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини, отримаємо дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розвинення в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщення центру незбуреної вільної поверхні рідини

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta^q_{ri} + \sum_j a_j \gamma^q_{rij} + \sum_{i,j} a_i a_j \delta^q_{rijk} \right\} +$$

$$+ \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}^1_r + \sum_i a_i \vec{B}^2_{ri} + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}^3_{rij} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}^4_{rijk} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma^q_{ijr} - 2\gamma^q_{rij}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta^q_{ijkr} - 2\delta^q_{rijk}) -$$

$$- \frac{1}{2} g \alpha^s_r - g N_r a_r + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}^1_r + \sum_i a_i (\vec{B}^2_{ir} - \vec{B}^2_{ri}) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (\vec{B}^3_{ijr} - \vec{B}^3_{rij}) + 3 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k (\vec{B}^4_{ijkr} - \vec{B}^4_{rijk}) \right\}, \quad (1)$$

$$\rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[B^{1y}_i + \sum_j a_j B^{2y}_{ij} + \sum_{j,k} a_j a_k B^{3y}_{ijk} \right] \right\} + (M_F + M_T) \ddot{\varepsilon}_y =$$

$$= -c\varepsilon_y - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}^2_{ij} + 2 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}^3_{ijk} \right\}, \quad (2)$$

де ρ – густина рідини, g – прискорення гравітаційних сил, M_F та M_T – маси рідини та резервуару відповідно, c – коефіцієнт жорсткості пружного амортизатора.

Система рівнянь (1), (2) містить N+3 рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) і описує динаміку сумісного руху системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності параметричного збурення. Рівняння (1) описують динаміку коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку квазітвердого поступального руху резервуару, однак ці рівняння взаємозалежні і містять сили взаємодії між резервуаром та рідиною.

Власні частоти механічної системи

Визначимо власні частоти механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності пружного закріплення. Для визначення власних частот відповідно до теорії механічних коливань [1] запишемо рівняння (1), (2) тільки для амплітуди a_1 першої антисиметричної форми ψ_1 з можливістю горизонтального руху резервуару по координаті ε_y у вигляді

$$\beta^q_{11} \ddot{a}_1 + B^{1y}_1 \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0,$$

$$\frac{\rho B^{1y}_1}{M_T + M_F} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y + \frac{c}{M_T + M_F} \varepsilon_y = 0,$$

і з урахуванням позначень

$$a = a_1, \quad \lambda_F = \frac{B^{1y}_1}{\beta^q_{11}}, \quad \lambda_T = \frac{\rho B^{1y}_1}{M_T + M_F},$$

$$\omega^2_F = \frac{g N_1}{\beta^q_{11}}, \quad \omega^2_T = \frac{c}{M_T + M_F}$$

представимо далі цю систему в канонічному вигляді

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\varepsilon}_y + \omega^2_F a = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\varepsilon}_y + \omega^2_T \varepsilon_y = 0, \quad (4)$$

де ω_F та ω_T – парціальні частоти вільної поверхні рідини та резервуару з пружним амортизатором відповідно. Будемо шукати періодичні розв'язки системи рівнянь (3), (4) у вигляді

$$a = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad \varepsilon_y = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

і, застосовуючи до системи рівнянь (3), (4) метод Бубнова – Гальоркіна, запишемо рівняння для амплітуд A_1 і A_2 у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega^2_F & \lambda_F \omega^2 \\ \lambda_T \omega^2 & \omega^2 - \omega^2_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Записана система рівнянь має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю. Прирівнюючи цей визначник до нуля, розв'яжемо рівняння четвертого ступеня

$$(1-\lambda_T\lambda_F)\omega^4-(\omega_T^2+\omega_F^2)\omega^2+\omega_F^2\omega_T^2=0$$

та отримаємо формулу для визначення власних частот механічної системи

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\frac{\omega_T^2+\omega_F^2\pm\sqrt{(\omega_T^2-\omega_F^2)^2+4\omega_T^2\omega_F^2\lambda_T\lambda_F}}{2(\lambda_T\lambda_F-1)}}.$$

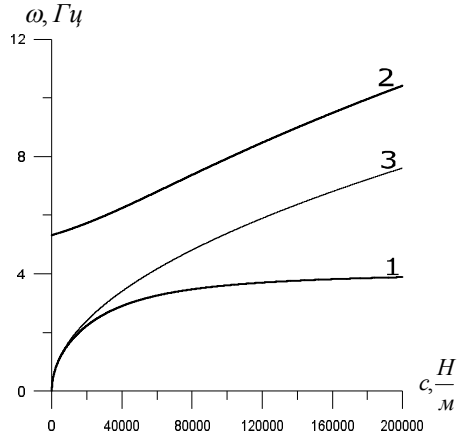


Рис. 2. Залежність власних частот (1, 2) механічної системи та парціальної частоти резервуару з пружним амортизатором (3) від жорсткості пружини

Обчислимо власні частоти для резервуару радіусу R = 1 м та маси M_T, який частково заповнений водою маси M_F до глибини $H = R$. Маси резервуару та рідини пов'язані співвідношенням $M_T = 0{,}1M_F$. Для системи з такими характеристиками парціальна частота рідини $\omega_F = 4{,}144$ Гц та завжди є постійною величиною (оскільки витікання рідини з резервуару відсутнє), а парціальна частота резервуару з пружним амортизатором збільшується при збільшенні жорсткості пружини (рис. 2, крива 3) та має мінімальне значення $\omega_T^{\min}=0$ Гц при нульовій жорсткості (за відсутності амортизатора). Як видно з графіку, перша власна частота асимптотично прямує до парціальної частоти рідини ω_F (рис. 2, крива 1), а друга власна частота нескінченно зростає (рис. 2, крива 2).

Зони нестійкості та характер розвитку параметричного резонансу

Рівняння (1), (2) описують процес розвитку параметричних коливань в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система рухається вертикально за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z\cos pt$. Як відомо із теорії параметричних коливань [1], існують області в площині параметрів (p, H_z), коли розв'язки рівнянь (3) або (4), (5) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів зовнішнього силового збурення резервуару (p, H_z) система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Відомо з теорії нелінійних коливань [1], що дослідження нестійкості ведеться на основі лінеаризованих рівнянь руху і практично для всіх випадків руху в околі першого (нижчого) резонансу. Тому для побудови зон нестійкості скористаємось системою рівнянь (3), (4), доповнивши її параметричним вертикальним збуренням резервуару $\varepsilon_z = H_z\cos pt$, тобто отримаємо систему

$$\ddot{a}+\lambda_F\ddot{\varepsilon}_y+\omega_F^2(1-\nu H_z p^2\cos pt)a=0, \qquad (5)$$

$$\lambda_T\ddot{a}+\ddot{\varepsilon}_y+\omega_T^2\varepsilon_y=0, \qquad (6)$$

де

$$\nu=\frac{B_{11}^{2z}}{gN_1}.$$

Області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості [1]. Звідси випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, за яких диференціальні рівняння (5), (6) мають періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Отже, зони нестійкості для першого резонансу обмежені періодичними розв'язками з частотою $p/2$, тому періодичні рішення системи рівнянь (5), (6) представимо у вигляді

$$a=A_1\cos\frac{pt}{2}+B_1\sin\frac{pt}{2},\quad \varepsilon_y=A_2\cos\frac{pt}{2}+B_2\sin\frac{pt}{2},$$

та з використанням методу Бубнова – Гальоркіна отримаємо рівняння границь зон нестійкості

$$p_1=\sqrt{\frac{2}{\lambda_T\lambda_F-1-2\nu H_z\omega_F^2}}\left(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1-2\nu H_z\omega_T^2)^2+2\omega_T^2\omega_F^2(2\lambda_T\lambda_F-1+2\nu H_z\omega_T^2)}\right)^{1/2},$$

$$p_2=\sqrt{\frac{2}{1+2\nu H_z\omega_F^2-\lambda_T\lambda_F}}\left(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)-\right.$$

$$-\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1-2\nu H_z\omega_T^2)^2+2\omega_T^2\omega_F^2(2\lambda_T\lambda_F-1+2\nu H_z\omega_T^2)}\Big)^{1/2},$$

$$p_3=\sqrt{\frac{2}{-1+2\nu H_z\omega_F^2+\lambda_T\lambda_F}}\Big(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)-$$

$$-\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1+2\nu H_z\omega_T^2)^2-2\omega_T^2\omega_F^2(1-2\lambda_T\lambda_F+2\nu H_z\omega_T^2)}\Big)^{1/2},$$

$$p_4=\sqrt{\frac{2}{-1+2\nu H_z\omega_F^2+\lambda_T\lambda_F}}\Big(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)+$$

$$+\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1+2\nu H_z\omega_T^2)^2-2\omega_T^2\omega_F^2(1-2\lambda_T\lambda_F+2\nu H_z\omega_T^2)}\Big)^{1/2}.$$

На рис. 3 та рис. 4 показані зони нестійкості відносно першої та другої власної частоти системи при різних значеннях коефіцієнту жорсткості

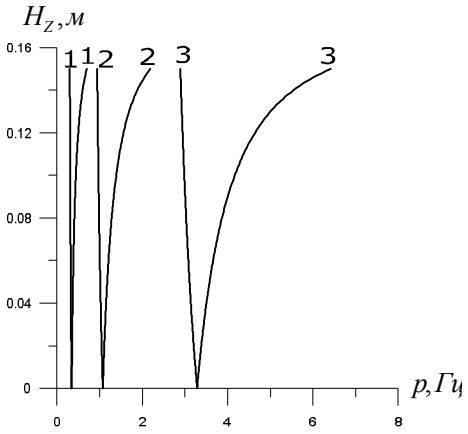


Рис. 3. Зони нестійкості відносно першої власної частоти механічної системи

пружного амортизатора (1 – 100 Н/м , 2 – 1000 Н/м , 3 – 10000 Н/м). Як видно з графіків, збільшення жорсткості амортизатора на порядок суттєво змінює розташування зон нестійкості відносно першої власної частоти та практично не впливає на розташування зон нестійкості відносно другої власної частоти. Оскільки власні частоти системи при збільшенні жорсткості амортизатора збільшуються, зони нестійкості теж зміщуються в бік збільшення зовнішньої частоти параметричного збудження.

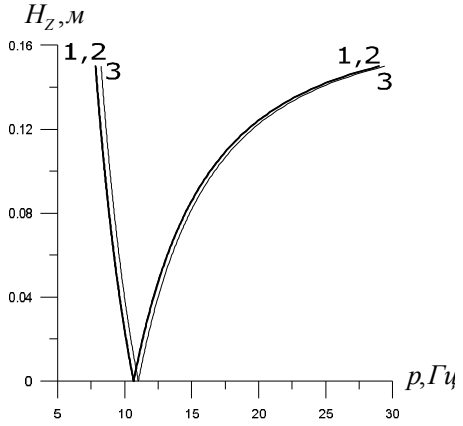


Рис. 4. Зони нестійкості відносно другої власної частоти механічної системи

Висновки

Для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» проведено дослідження умов виходу на параметричний резонанс у випадку, коли в систему внесено додаткову ступінь вільності – можливість поступального руху резервуару в горизонтальній площині за наявності пружного амортизатора. Показано, що наявність та параметри пружного амортизатора суттєво впливають на розташування зон нестійкості, а, значить, і на якісну картину розвитку параметричного резонансу в системі.

Список використаних джерел

1. *Bolotin V. V.* Dynamic stability of elastic systems. – M:GITTL, 1956. – 600 p. (in Russian).

2. *Limarchenko O. S., Yasinsky V. V.* Nonlinear dynamics of constructions with liquid. – Kiev: Kiev Polytechnic Inst., 1997. – 338 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 20.05.13

УДК 519.9

Краснопольська Т. С.[1], д. ф.-м. н., с. н. с.,
Приходько Д. Ф.[2], аспірант,
Гуржій О. А.[3], д. ф.-м. н., с. н. с.

Нелінійні моделі коливань консольного стрижня з малою жорсткістю на згин

В статті побудовано дві моделі коливань консольного пружного стрижня з малою жорсткістю на згин. Одна модель враховує геометричну нелінійність, а друга – фізичну нелінійність.

Ключові слова: пружна система, згинна жорсткість, нелінійна модель.

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com
[3] Національний технічний університет України "КПІ", 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37
e-mail: a.gourjii@gmail.com

T. S. Krasnopolskaya[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.
D. F. Prihodko[2], PhD student,
A. A. Gourjii[3], Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.

Nonlinear models of vibrations of cantilever bar with low bending rigidity

Two models of oscillations of a cantilever bar with low bending rigidity are constructed. One model takes in to account a geometrical nonlinearity, while the second model uses physical nonlinear properties.

Key Words: cantilever bar, bending rigidity, nonlinearity.

[1] Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabov st., 8/4,
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4 e
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com
[3] National Technical university of Ukraine “KPI”, 03056, Kyiv, Peremoga av., 37
e-mail: a.gourjii@gmail.com

Дана робота присвячена розробці нелінійних моделей згинних коливань консольного стрижня, з настільки малою жорсткістю на згин, що – є “закритичним” [1, 2]. Насамперед, розглядається модель коливань стрижня з урахуванням геометричної нелінійності. Потім виводяться рівняння коливань з урахуванням фізичної нелінійності.

Нелінійна модель згинних коливань стрижня при врахуванні геометричної нелінійності

На рис. 1 показано схему однорідного пружного стрижня постійного поперечного перетину з консольним закріпленням. В недеформованому стані вісь стрижня співпадає з віссю x прямокутної системи координат xOy, початок координат знаходиться в закріпленні стрижня (рис. 1, а: початкове положення). При відсутності зовнішнього впливу, окрім рівномірно розподіленої сили ваги, гнучкий прямолінійний стрижень може втратити стійкість і його вісь викривляється (рис. 1, а), якщо $mgL > 7{,}839\,EI/L^2$ (L – довжина стрижня, m – лінійна вага, EI – жорсткість на згин, g – прискорення вільного падіння, h – діаметр поперечного перетину). Такий стрижень буде називатись “закритичним” [2, 5].

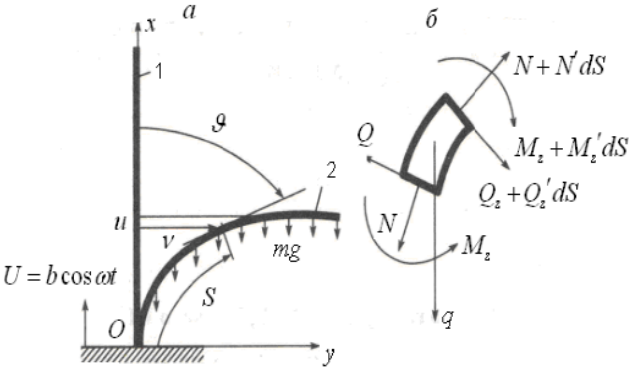


Рис. 1

Якщо надати основі стрижня вертикальні коливання $U(t) = b\cos\omega t$, то за рахунок збудження параметричних коливань можна стабілізувати прямолінійне (вертикальне) положення вісі шляхом підбору частоти ω та амплітуди b вібрацій. Рух стрижня буде описуватись в рухомій системі координат xOy, початок якої жорстко зв’язаний з закріпленням стрижня (рис. 1, а). Враховуємо скінченні повороти його перетинів.

© Т. С. Краснопольська, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій, 2013

Припускаємо що поперечні перетини стрижня залишаються плоскими та перпендикулярними до здеформованої осі, а нормальні напруження на ділянках паралельних осі дуже малі порівняно з повздовжніми напруженнями, вісь стрижня залишається нерозтяжною (гіпотеза Кіргофа).

Положення осі стрижня $\mathbf{r}(t, s)$ можна подати в параметричній формі $\mathbf{r}(t, s) = x(t, s)\mathbf{i} + y(t, s)\mathbf{j}$, де t – час; s – натуральна координата осі стрижня, відлік від точки закріплення (рис. 1, а); $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – одиничні орти осей координат. Умова нерозтяжності вісі стрижня записується у вигляді [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t, s)}{\partial s} = \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1. \tag{1}$$

У подальшому похідну за дуговою координатою будемо позначати штрихом ($\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}$). У нездеформованому стані вісь стрижня ($\mathbf{r}^0(t, s) = x^0(t, s)\mathbf{i}$) співпадає з вертикальною віссю x. Виходячи з (1), отримаємо: $\mathbf{r}^0(t, s) = s\mathbf{i}$, $s \in [0, L]$, де L – довжина стрижня. Вектор переміщення $\mathbf{R}(t, s) = \mathbf{r}(t, s) - \mathbf{r}^0(t, s) = -u(t, s)\mathbf{i} + \upsilon(t, s)\mathbf{j}$, де компоненти вектора переміщень

$$u(t, s) = s - x(t, s), \quad \upsilon(t, s) = y(t, s). \tag{2}$$

Додатним напрямком u є переміщення в протилежному напрямку до осі x. З визначення кута повороту навколо осі стрижня ϑ (рис. 1, а) випливає, що $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}\cos\vartheta + \mathbf{j}\sin\vartheta$, де $\cos\vartheta = x'$, $\sin\vartheta = y'$. Прийнявши до уваги (2), вираз для кривини $\kappa = \vartheta'$ осі стрижня у здеформованому стані в функції від прогину υ набуває вигляду [2]

$$\kappa = \upsilon''\left(1 - \upsilon'^2\right)^{-1/2} \approx \upsilon''\left(1 + \upsilon'^2/2\right). \tag{3}$$

Осьове переміщення u можна виразити через поперечне переміщення υ:

$$u' = 1 - \sqrt{1 - \sin^2\vartheta} \approx \frac{1}{2}\upsilon'^2. \tag{4}$$

Вирази (3) та (4) описують геометричні нелінійності даної моделі. Доданками третього порядку малості й вище при розкладах в ряди нехтуємо.

Розглянемо дану систему за відсутності тертя. Для стрижня Бернуллі – Ейлера згинний момент M_z виражається через кривину зігнутої осі κ наступним чином: $M_z(t, s) = EI\kappa(t, s)$. Звідси, враховуючи (3), маємо

$$M_z = EI\upsilon''\left(1 + \upsilon''^2/2\right). \tag{5}$$

Нехтуючи інерцією кручення поперечних перетинів, з рівності для моментів у диференціальному вигляді $M_z' + Q = 0$ з урахуванням (5) отримаємо вираз для повздовжньої сили:

$$Q = -EI\left[\upsilon''\left(1 + \upsilon'^2/2\right)\right]' = -EI\left(\upsilon''' + \upsilon'^2\upsilon'''/2 + \upsilon'\upsilon''^2\right). \tag{6}$$

Так як розглядаємо рух стрижня в рухомій системі координат, зв'язаній з основою стрижня, то до масових сил необхідно додати інерційну складову від переносного руху вздовж осі x. Тоді сумарне розподілене зовнішнє осьове навантаження (додатний напрямок проти осі x) є

$$q_x(t) = m(g + \ddot{U}) = m(g - b\omega^2\cos\omega t).$$

Рівняння поступального руху диференціального елемента стрижня (рис.1, б) (деформований стан в проекціях на осі x та y) має вигляд

$$\begin{cases} m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(N\cos\vartheta\right)' + \left(Q\sin\vartheta\right)' + q_x(t), \\ m\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = \left(N\sin\vartheta\right)' + \left(Q\cos\vartheta\right)'. \end{cases} \tag{7}$$

Перше рівняння системи (7) дозволяє знайти нормальну силу N. Враховуючи, що верхній кінець стрижня вільний від зовнішніх навантажень (тобто при $x = L$: $N = 0$, $Q = 0$), та нехтуючи доданками третього порядку малості, отримуємо вираз для нормальної сили

$$N = m\int_s^L d\tilde{s}\,\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{s}} \frac{\partial^2 \upsilon'^2}{\partial t^2} d\tilde{s} - EI\upsilon'''\upsilon' - q_x'(t)(L - s)\left(1 + \upsilon'^2/2\right). \tag{8}$$

Із другого рівняння системи (7) з урахуванням (8), зберігаючи члени не вище третього порядку малості, отримаємо

$$\begin{aligned} &m\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} + EI\upsilon^{IV} + q_x(t)\left[(L - s)\upsilon'\right]' = \\ &= m\left[\upsilon'\int_s^L d\tilde{s}\,\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{s}} \frac{\partial^2 \upsilon'^2}{\partial t^2} d\tilde{s}\right] - \\ &- EI\left[\upsilon'\left(\upsilon''\upsilon'\right)'\right]' - q_x'(t)\left[\left(L - S\right)\upsilon'^3/2\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Рівняння (9) описує нелінійні поперечні коливання вертикально розташованого консольного стрижня з нерозтяжною віссю на вібруючій основі в полі сил тяжіння.

Крайові умови мають вигляд $s=0:\ \upsilon=0$ $\vartheta=0$; $s=L:\ M_z=0$, $Q=0$, або з урахуванням (5) та (6):

$$\begin{cases} s=0: \quad \upsilon=0, \quad \upsilon'=0; \\ s=L: \quad \upsilon''=0, \quad \upsilon'''=0. \end{cases} \tag{10}$$

Для подальшого аналізу перетворимо рівняння (10) до безрозмірного вигляду, використовуючи такі заміни:

$$\tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \zeta=\frac{s}{L}, \quad \xi=\frac{\upsilon}{h}, \quad \beta=\frac{b}{L},$$
$$\Omega=\omega L^2\sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad \varepsilon=\left(\frac{h}{L}\right)^2, \quad \gamma=\frac{mgL^3}{EI}. \tag{11}$$

Тоді рівняння (9) запишеться так:

$$\ddot{\xi}+\xi^{IV}+p(\tau)\left[(1-\zeta)\xi'\right]'=\varepsilon\left\{\xi'\int_{\zeta}^{1}d\zeta_1\int_{0}^{\zeta_1}\left(\xi'^2+\ddot{\xi}'\right)d\zeta_2-\right.$$
$$\left.-\xi'\left(\xi''\xi'\right)'-p(\tau)(1-\zeta)\xi'^3/2\right\}', \tag{12}$$

де $p(\tau)=\gamma-\beta\Omega^2\cos\Omega\tau$. Точками позначаємо диференціювання за безрозмірним часом τ, штрихами – за безрозмірною осьовою координатою ζ.

Відповідно, крайові умови (10) приймуть вигляд

$$\zeta=0:\ \xi=0,\ \xi'=0; \quad \zeta=1:\ \xi''=0,\ \xi'''=0.$$

Розв'язок отриманого нелінійного рівняння (12) будується методом Гальоркіна у вигляді

$$\xi(\zeta,\tau)\approx\sum_{i=1}^{n}q_i(\tau)\varphi_i(\zeta), \tag{13}$$

де $q_i(\tau)$ – амплітудна функція, $\varphi_i(\zeta)$ – координатна, неперервна і чотири рази диференційована функція, що задовольняє крайові умови.

Після підстановки (13) у рівняння (12) і подальшій ортогоналізації нев'язки з координатними функціями на інтервалі $\xi\in[0,1]$, отримуємо систему n звичайних диференціальних рівнянь для амплітудних функцій $q_i(\tau)$.

В якості координатних функцій використовуються форми поперечних коливань стрижня. Розв'язок задачі про власні поперечні коливання консольного стрижня має представлення не за допомогою функцій Крилова [5], а за допомогою функцій, що задовольняють [4] рівняння

$$\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial\zeta^4}+\gamma\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\zeta}\right]-\gamma\lambda_n\varphi_i=0. \tag{14}$$

Якщо параметр гнучкості $\gamma>7{,}839$, то вертикальний стрижень, знаходячись під дією сили тяжіння, втрачає стійкість, і початкова прямолінійна форма його осі викривляється. Вертикальна форма осі стрижня може бути стабілізована за рахунок вібрації основи в вертикальному напрямі (D. Acheson, T. Mullin і співавтори, А. М. Гуськов і Г. Я Пановко). В наших чисельних розрахунках ми використовували значення параметра $1/\gamma=0{,}055$, обраховане для сталевої проволоки, один сантиметр якої важить 0,12 г.

Згині коливання стрижня при нелінійному законі пружності

Досліджуємо коливання, які можуть виникнути при згині осі стрижня в площині (x, y), причому використаємо нелінійну технічну теорію згину [3]. У цій теорії пружна поведінка стрижня характеризується нелінійним співвідношенням $\sigma_x=f(\varepsilon_x)$, що встановлює зв'язок між повздовжніми напруженнями σ_x і повздовжніми видовженнями ε_x на основі випробувань матеріалу на розтяг – стиск. Крім того приймемо, що $f(\varepsilon_x)$ має вигляд

$$f(\varepsilon_x)=E\left(1-\alpha_3E^2\varepsilon_x{}^2\right)\varepsilon_x, \tag{15}$$

де E – модуль Юнга, K – модуль стиску, G – модуль зсуву,

$$E=\frac{9KG}{3K+G};\ \alpha_3=-\frac{2}{9}\frac{3K}{3K+G}\frac{\gamma_2}{G^2};$$
$$\gamma_2=-g_2=-\frac{9}{2}G^2\left(1+\frac{G}{3K}\right).$$

Позначимо прогин точки x осі стрижня в напрямку y в момент часу t через $\eta(x,t)$, згинний момент в цій точці – через $M(x,t)$, площу поперечного перетину Q – через F і густину матеріалу стрижня через ρ. Тоді незалежно від вигляду закону пружності, основним рівнянням динаміки для елемента dx стрижня в момент часу t буде

$$\frac{\partial^2M}{\partial x^2}=-\rho F\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \tag{16}$$

за умови, що можна не враховувати інерцію обертання елемента стрижня.

Згинний момент $M=\iint_Q f(Ay)ydydz$, де A – кривина осі стрижня. Замінивши A другою похідною $\partial^2\eta/\partial x^2$ і враховуючи рівність (15), отримаємо

$$M(x,t)=E\iint_Q\left[1-\alpha_3E^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2y^2\right]\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}y^2dydz\,, \quad (17)$$

де інтегрування проводиться по всьому поперечному перетину Q стрижня. Враховуючи осьовий момент інерції площі $J_0=\iint_Q y^2dydz$ і другу постійну $J_2=\iint_Q y^4dydz$ приведемо $M(x,t)$ до вигляду

$$M(x,t)=EJ_0\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\alpha_3E^2\frac{J_2}{J_0}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^3\right]. \quad (18)$$

Підставивши цей вираз у рівняння (16), отримаємо для $\eta(x,t)$ нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\rho F\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+EJ_0\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}-3\alpha_3E^3J_2\times \times\left[\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)^2\right]\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0. \quad (19)$$

Якщо в перетинах стрижня діє повздовжня сила $N(x)$, і замість жорсткого закріплення стрижень здійснює вертикальні коливання вигляду $a\cos\omega t$, то повздовжня сила в перетині x дорівнює

$$N(x)=\rho F\left\{g(l-x)+(l-x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a\cos\omega t)\right\}. \quad (20)$$

Рівняння нелінійних згинних коливань стрижня записується в формі

$$EJ_0\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\rho Fg\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[(l-x)+(l-x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{g}\cos\omega t\right)\right]\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)- -3\alpha_3E^3J_2\left[\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)^2\right]\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\rho F\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0. \quad (21)$$

На основі врахування геометричної та фізичної нелінійностей побудовані дві моделі нелінійних згинних коливань консольного закритичного стрижня.

Список використаних джерел

1. *Champneys A. Fraser B.* The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis. – Proc. R. Soc. London, 2000. – P. 553-570.
2. *Guskov A. M., Panovko G. Ya.* Vibrational stabilization of the vertical axis of a flexible shaft // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2006. – № 5.
3. *Kauderer H.* Nichtlineare mechanic. – Berlin: Springer, 1958.
4. *Krasnopolskaya T. S., Prihodko D. F., Gourjii A. A.* Dynamic characteristics of a cantilever bar with low bending rigidity // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2012. – № 4. – P. 52-55. (in Ukrainian).
5. *Timoshenko S., Gere J.* Theory of elastic stability. – New York: McGRAW-HILL, 1961.

Надійшла до редколегії 15.03.13

УДК 539.3

Кривий О. Ф.[1], д. ф.-м. н., доц.

Особливості поля напружень біля тунельної тріщини, яка виходить в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів

Задача про тунельну тріщину, яка виходить під довільним кутом в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, зведена до системи трьох сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з нерухомою особливістю, для якої доведено існування і встановлені асимптотики розв'язків. Запропоновано і обґрунтовано збіжність ефективного числового-аналітичного методу розв'язання вказаної системи СІР. Отримано залежності КІН в вершині тріщини від кута її розташування для різних комбінацій анізотропних матеріалів.

Ключові слова: неоднорідний анізотропний простір, тріщина, сингулярні рівняння, нерухома особливість.

[1] Одеська національна морська академія,
65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

O. F. Kryvyy[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Singularity of the stress field near the tunnel crack, opening onto splice plane of two different anisotropic half spaces

In this paper, the problem of tunnel crack, opening onto an arbitrary angle to the splice plane of the of two different anisotropic half spaces, reduced to a system of three singular integral equations (SIE) with fixed singularities, for which the existence proof and asymptotic behaviour of solutions. Proposed and justified the convergence of effective numerical-analytical method for the solution the specified system SIE. Dependencies of SIF at the crack tip of the angle fracture spacing for different combinations of anisotropic materials.

Key Words: inhomogeneous anisotropic spaces, crack, singularity equations, fixed singularity.

[1] Odessa National Maritime Academy,
65029, Odessa, Didrikhson str., 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

Задачі про внутрішні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувались плоскими випадками [1, 2]. В роботах [3-5] за допомогою побудованих інтегральних сингулярних співвідношень досліджені задачі про міжфазні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі, який знаходиться в двовимірному стані (узагальнена плоска деформація [6]). В роботі [7] розглянута задача про внутрішню тунельну тріщину в кусково-однорідному анізотропному просторі. В цій праці досліджена задача про тунельну тріщину, яка виходить під довільним кутом в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів.

1. Постановка і зведення задачі до системи СІР

Нехай тунельна тріщини займає смугу $\ell = (0; a)$, яка розташована під кутом $\pi/2 - \varphi$ до площини з'єднання різних анізотропних півпросторів (рис. 1). До берегів тріщини прикладенні довільні навантаження $\{\chi_k^{\pm}\}^3 = \{p_j^{\pm}\}^3 = \mathbf{p}^{\pm}$, де $\chi_k^{\pm}(t)$ – відповідно стрибки та суми напружень на берегах тріщини.

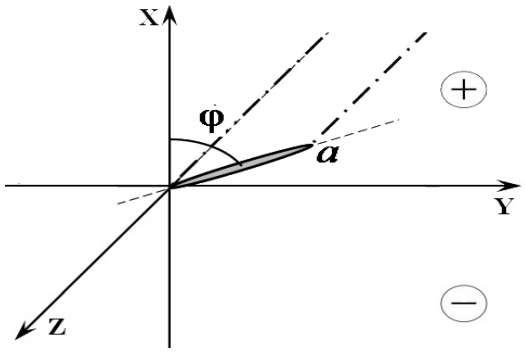


Рис.1. Тунельна тріщина в просторі

Скориставшись інтегральними співвідношеннями [7], відносно невідомих стрибків похідних переміщень $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_j\}^3 = \{< u' >_\ell, < v' >_\ell, < w' >_\ell\}$ отримаємо систему трьох СІР $(t \in \ell)$:

© О. Ф. Кривий, 2013

$$\frac{1}{\pi}\mathbf{M}_{\mathrm{S}}\int\limits_{\ell}\frac{\boldsymbol{\eta}(\tau)d\tau}{t-\tau}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n,m=1}^{3}\mathbf{M}_{nm}\int\limits_{\ell}\frac{\boldsymbol{\eta}(\tau)d\tau}{e_{nm}t-\tau}=\mathbf{q}\,, \quad (1)$$

$$\mathbf{q}=\mathbf{p}^{+}-\frac{\mathbf{M}_{\mathrm{S}}^{*}}{\pi}\int\limits_{\ell}\frac{\mathbf{p}^{-}d\tau}{t-\tau}-\mathrm{Im}\sum_{n,m=1}^{3}\frac{\mathbf{M}_{nm}^{*}}{\pi}\int\limits_{\ell}\frac{\mathbf{p}^{-}d\tau}{te_{nm}-\tau}\,,$$

$$e_{nm}=(\overline{z}_{n}^{+}\cos\varphi+\sin\varphi)(z_{m}^{+}\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}.$$

Компоненти матриць $\mathbf{M}_{\mathrm{S}}, \mathbf{M}_{nm}, \mathbf{M}_{\mathrm{S}}^{*}, \mathbf{M}_{nm}^{*}$ та числа z_{n}^{+} залежать від пружних сталих півпросторів і подані в роботі [7]. Додатковими для системи будуть умови замкнутості тріщин:

$$\int\limits_{\ell}\eta_{k}(\tau)d\tau=0,\quad k=\overline{1,3}. \quad (2)$$

2. Існування і асимптотики розв'язків системи CIP

Рівняння системи (1) крім сингулярності типу Коші, яка обумовлює кореневу особливість розв'язків при $t\to a$, містять також нерухомі особливості при $t\to 0$. Останнє призводить до необхідності дослідження поведінки розв'язків при $t\to 0$ і доведення їх існування, зокрема, в просторі функцій Банаха [8]: $L_{p}(\ell,\omega)$ $(\omega=t^{\gamma}(a-t)^{\beta}$, $-1<\mathrm{Re}\gamma,\mathrm{Re}\beta<-1+p$, $1<p<\infty)$. Подамо предсимвол [8] системи (1) так:

$$\mathbf{G}^{0}(\eta)=\frac{\mathbf{G}(\eta)}{\sin\pi\eta}=\left\{\frac{g_{kj}(\eta)}{\sin\pi\eta}\right\}^{3}=\{\mathbf{M}_{0}-\mathrm{ctg}\,\pi\eta\,\mathbf{M}_{\mathrm{S}}-$$

$$-\frac{i}{2\sin\pi\eta}\sum_{m,n=1}^{3}(\mathbf{M}_{nm}(-e_{nm}^{++})^{-1-\eta}-\overline{\mathbf{M}}_{nm}(-\overline{e}_{nm}^{++})^{-1-\eta}))\}\,.$$

Теорема 1. Якщо існує число γ, $\mathrm{Re}\gamma\in(-1;0]$, яке є $(\kappa+1)$-кратним коренем рівняння

$$\Delta(\eta)=0, \quad (3)$$

$$\Delta(\eta)=\begin{cases}\det\mathbf{G}(\eta), & g_{kj}\neq 0\ (k=j),\\ \mathrm{tr}\,\mathbf{G}(\eta), & g_{kj}=0\ (k\neq j),\end{cases}$$

де $\mathrm{tr}\,\mathbf{G}(\eta)$ – слід матриці $\mathbf{G}(\eta)$, то система (1) за додаткових умов (2), а також за умови $|\mathbf{q}|<$ $<\mathrm{q}_{*}t^{\varepsilon+\gamma}(1-t)^{\varepsilon-1/2}$, $\varepsilon>0$, має єдиний розв'язок у просторі $L_{p}(\ell,\omega)$, який при $t\to 0$ має асимптотичне розвинення

$$\eta_{j}(t)\simeq h_{j}^{*}t^{\gamma}P_{\kappa j}(\ln t),\ \ \eta_{j}^{*}\neq 0,\ \ j=\overline{1,3}, \quad (4)$$

де $P_{\kappa j}(z)$ – многочлени степеня κ.

Доведення. При виконанні умов теореми будемо мати: $\det\mathbf{G}^{0}(\eta)\neq 0$, $-1<\mathrm{Re}\,\eta<\mathrm{Re}\,\gamma$. Отже, згідно [8], система нетерова в просторі $L_{p}(\ell,\omega)$ а її індекс визначається формулою $\mathrm{Ind}\,\mathrm{A}=-\mathrm{ind}(\mathrm{A}_{\xi})$, $\mathrm{A}_{\xi}(\tau)=\det\mathrm{G}^{0}(\eta)$, $\eta=\xi+i\tau$. Неважко встановити, що $\mathrm{ind}\,(\mathrm{A}_{\xi}(\tau))=m^{0}-1$, де $m^{0}=\mathrm{ind}(\mathrm{A}_{\xi}^{0}(\tau))$, $\mathrm{A}_{\xi}^{0}(\tau)=\mathrm{tg}\,\frac{\eta}{2}\mathrm{A}_{\xi}(\tau)$. Якщо τ змінюється від $-\infty$ до ∞, функція $\mathrm{A}_{\xi}^{0}(\tau)$ при $\xi\in(\mathrm{Re}\gamma,1)$ опише замкнений контур, який розташований симетрично відносно дійсної осі і не охоплює початок координат. Така поведінка має місце для комбінацій відомих матеріалів [6]. Отже, $m^{0}=0$, а індекс системи (1) дорівнює одиниці і за додаткових умов (2) існує єдиний розв'язок у просторі $L_{p}(\ell,\omega)$, який має інтегровану особливість при $t\to 0$. Тобто має місце подання

$$\eta_{j}(t)\simeq t^{\gamma}P_{rj}(\ln t)\eta_{j}^{*},\ t\to 0,\ \ \eta_{j}^{*}(0)\neq 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Скориставшись асимптотичними властивостями [1] операторів з нерухомими особливостями, які входять в систему (1), отримаємо співвідношення

$$t^{\gamma}\sum_{k=1}^{3}\eta_{k*}(0)\sum_{m=0}^{\kappa}g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa j}^{(m)}(\ln t)+ \quad (5)$$
$$+\,\Omega_{j}^{0}(t)=0,\quad j=\overline{1,3}.$$

Для функції Ω_{j}^{0} має місце оцінка: $|\Omega_{j}^{0}|<$ $<Ct^{\mathrm{Re}\gamma+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Згідно останній оцінці, рівності (5) при $t\to 0$ можливі лише за умови

$$\sum_{l=0}^{\kappa}\ln^{l}t\cdot\mathbf{N}_{\kappa-l}=0, \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_{m}=\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\binom{\kappa}{m-p}\mathbf{Q}_{m-p}\mathbf{X}_{\kappa-p}\,,$$

$$\mathbf{X}_{p}=\{\eta_{j*}(0)a_{pj}\}_{1}^{3},\qquad \mathbf{Q}_{m-p}=\{g_{jk}^{(m-p)}(\gamma)\}^{3},$$

де $a_{\kappa j}$ – коефіцієнти многочленів $P_{\kappa j}$. Рівність (6) можлива, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\binom{r}{m-p}\mathbf{Q}_{m-p}\mathbf{X}_{\kappa-p}=0,\ m=\overline{0,\kappa}.$$

Так як вектори $\mathbf{X}_{p}\neq 0,\ p=\overline{0,3}$ лінійно незалежні, то останні рівності можливі тоді і тільки

тоді, коли визначник системи (7), який дорівнює $\Delta^{(\kappa)}(\gamma)$, обертається в нуль. Отже, якщо має місце подання (4), то γ є $(\kappa+1)$-кратним коренем трансцендентного рівняння (3). *Теорему доведено.*

Наслідок 1. Якщо γ простий корінь трансцендентного рівняння (3) з найбільшою дійсною частиною із смуги $\mathrm{Re}\gamma \in (-1; 0]$, то розв'язки системи (1) допускають асимптотичне подання

$$\eta_j(t) \simeq t^{\gamma}\eta_j^*, \ t \to 0, \quad \mathrm{Re}\,\gamma \in (-1, 0], \ j = \overline{1, 3}. \quad (8)$$

Наслідок 2. Трансцендентне рівняння (4) дозволяє виявити наступні за головною доданки до будь-якого порядку в асимптотичному розвиненні розв'язків системи (1):

$$\eta_j(t) \simeq \sum_{k=0}^{N} \eta_{jk}^* t^{\gamma_k}, \ t \to 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

$$-1 < \mathrm{Re}\gamma_0 < \mathrm{Re}\gamma_1 < \ldots < \mathrm{Re}\gamma_N, \quad h_{jk}^* \neq 0.$$

Дослідження показали, що для відомих комбінацій анізотропних матеріалів [4] рівняння (1) має принаймні один корінь у смузі $\mathrm{Re}\gamma \in (-1; 0]$. Отже, справедливе твердження.

Наслідок 3. Система (1) за додаткових умов (2) має єдиний розв'язок у просторі $L_p(\ell, \omega(t))$, який допускає асимптотичне подання (9).

3. Узагальнення методу граничних елементів

Асимптотичне розвинення (9) дає можливість застосувати до розв'язання системи (1) ефективний чисельно-аналітичний метод, який є узагальненням методу граничних елементів і полягає у врахуванні на кінцевих проміжках розбиття області інтегрування наступних за головною доданків в асимптотичних поданнях розв'язків. Тобто, розв'язки системи (1) подано так:

$$\boldsymbol{\eta}(\rho) = \Pi_h^{-1}\boldsymbol{\eta}_N, \quad \boldsymbol{\eta}_N = \{\eta_k^N\}^3, \quad (10)$$

$$\eta_k^N(\rho) = \Pi_h \eta_{lk} = \sum_{j=0}^{N} s_{kj}^N \upsilon_j^k(\rho), \quad h = \max_{1 \le j \le N} |\mathrm{I}_j|,$$

$$\upsilon_j^k = \begin{cases} \rho^{\gamma_j} \sum\limits_{q=0}^{K} \theta(\mathrm{I}_q), \ j = 0, \ldots, K, \\ \rho^{\gamma_0}\theta(\mathrm{I}_j), \ j = K+1, \ldots, N/2, \\ (a-\rho)^{-1/2}\theta(\mathrm{I}_j), \ j = N/2+1, \ldots, N-K-1, \\ (a-\rho)^{j-1/2} \sum\limits_{q=0}^{K} \theta(\mathrm{I}_{\mathrm{N}-q}), \ j = N-K, \ldots, N, \end{cases}$$

$$\mathrm{I}_j = (\rho_{j-1}, \rho_j), \quad \rho_j = \frac{2aj}{N}, \quad \theta(\mathrm{I}_j) = \theta(\rho_j) - \theta(\rho_{j-1}),$$

$$j = \overline{1, N}, \quad -1 < \mathrm{Re}\gamma_0 < \mathrm{Re}\gamma_2 < \ldots < \mathrm{Re}\gamma_K,$$

$$0 \le \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_N \le a.$$

Показники степеневих функцій в поданні (10) є нулі символу систем (1) і знаходяться із трансцендентного рівняння (3). Підставивши (10) в систему (1), і розглянувши вказану систему в точках ρ_j^0, $j = \overline{1, N}$, які є серединами відрізків розбиття I_j, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення s_{lkj}^N:

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{T}_{qj}^{lk} s_{kj}^{\mathrm{N}} = \mathrm{C}_q^{lk}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, N}, \quad (11)$$

$$\mathrm{T}_{qj}^{lk} = \mathrm{S}_{qj}^{lk} + \mathrm{Q}_{qj}^{lk}, \quad \mathrm{S}_{qj}^{k} = \frac{m_{jk}^s}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\upsilon_j^k d\varsigma}{\varsigma - \rho_q^0},$$

$$\mathrm{Q}_{qj}^{lk} = \frac{4}{\pi}\mathrm{Im} \sum_{n,\,m=1}^{3} b_{jk}^{nm} \int_0^a \frac{\upsilon_j^p(\tau) d\tau}{e_{nm}\rho_q^0 - \tau}, \quad \mathrm{C}_q^k = q_k(\rho_q^0).$$

При такому виборі інтерполянту, згідно [9], K- та похідна різниці $\vartheta_k^h(\rho) = \eta_k - \Pi_h\eta_k$ належить класу функцій Гельдера $H_{\mu}(\mathrm{I})$ і отже, має місце оцінка [10]:

$$|\eta_k - \Pi_h\eta_k| = o(h^{K+\mu}), \ \mu \in (0, 1), \quad (12)$$

яка обумовлює збіжність за нормою простору $L_p(\ell, \omega)$: $\lim\limits_{N\to\infty} \|\eta_k - \Pi_h^{-1}\eta_k^N\|_{L_p(\ell,\,\omega)} = 0$. Отже, доведено твердження.

Теорема 2. Розв'язок системи (11) збігається до розв'язку системи (1), швидкість збіжності визначається оцінкою (12).

4. Числові результати та їх аналіз

Для чисельної реалізації метода використані такі матеріали [6]: стеклопластик ортогонально-армований (2:1) (матеріал $m1$), стеклопластик СТЕТ (матеріал $m2$), стеклопластик АСТТ(б) (матеріал $m3$), стекло-епоксид (матеріал $m4$) і графіто-епоксид (матеріал $m5$).

На рис. 2 подані залежності відносного КІН від кута φ у вершині тріщини $t = a$, при рівномірному нормальному завантаженні берегів: $\chi_1^+ = -2P_1$, $\chi_1^- = 0$, $\chi_{2,3}^{\pm} = 0$. Лінії 1-5 побудовані відповідно для комбінацій матеріалів $m1 - m2$, $m1 -$

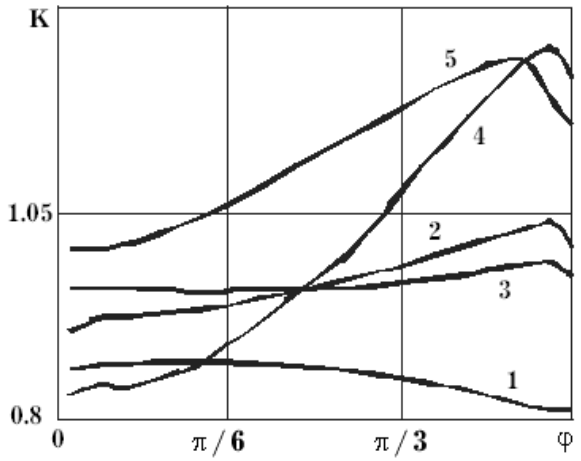


Рис. 2. КІН у внутрішні вершині тріщини

$-m3$, $m1-m4$, $m1-m5$, $m2-m3$. Наведені залежності показують, що поведінка КІН суттєво залежить від співвідношень пружних сталих анізотропних півпросторів і більше змінюється при зміні кута φ, якщо півпростори більше відрізняються значеннями пружних сталих. Помітно також, що КІН для наведених комбінацій матеріалів має екстремум при наближені вершини тріщини до площини $x = 0$.

Чисельні дослідження підтвердили, що на точність обчислень і швидкість збіжності розв'язків суттєво вплинуло врахування наступних доданків в асимптотичному розвиненні розв'язків. Вказане врахування дозволило зменшити кількість подрібнення внутрішніх інтервалів при досягненні високої швидкості збіжності. Чисельні дослідження показали, що для будь-якої комбінації пружних сталих і кута нахилу тріщини φ оптимальними є значення: $N = 40$ і $K = 7$, що підтверджує високу стійкість обчислень, не зважаючи на наявність нерухомих особливостей в ядрах системи.

Список використаних джерел

1. *Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V.* Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite an isotropic plane // Journal of Applied Mathematics and Mechanics . – 1986. – V. 50, N 4. – P. 475-483.
2. *Kryvyy O. F.* Arbitrarily oriented defects in composite anisotropic plane // Visn. Odessa National University. Ser.: Physics and Mathematical Science. – 2001. – V. 6, N 3. – P. 108-115. (in Ukrainian).
3. *Kryvyy O. F.* The tunnel inclusions in inhomogeneous anisotropic space // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya. – 2007. – V. 50, N 2. – P. 55-66. (in Ukrainian).
4. *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – V. 72, N 4. – P. 499-507.
5. *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. – 2008. – V. 44, N 6. – P. 626-634.
6. *Lekhnitskii S. G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. – Moscow: Nauka, 1977. – 415 p. (in Russian).
7. *Kryvyy O. F.* The tunnel inner crack in the inhomogeneous anisotropic space // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya – 2012. – V. 55, N 4. – P. 78-89. (in Ukrainian).
8. *Duduchava R. V.* Convolution equation with discontinuous symbols, singular integral equations with fixed singularities and their applications to problems of mechanics. – Tbilisi: Metsniereba, 1979. – 136 p. (in Russian).
9. *Kravchuk M. P.* Selected mathematical works / Contractor N. Virchenko. – Kiev – New York. – 2002. – 792 p. (in Ukrainian).
10. *Prezdorf Z.* Some classes of singular equations. – M.: Mir, 1979. – 493 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Кундрат М. М.[1], д. т. н., проф.,
Мельник Ю. В.[1], аспірант

Контактна взаємодія півплощини з навантаженою по верхній границі пружною накладкою

Подано розв'язок двовимірної модельної задачі для півбезмежної пластини з пружною гнучкою накладкою, навантаженою по всій довжині зсувними напруженнями. Задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння, яке в класі функцій, необмежених на кінцях інтервалу, розв'язано методом колокацій. Обчислено розміри зон передруйнування, розподіли контактних напружень під накладкою, розривні осьові зусилля у накладці.

Ключові слова: півбезмежна пластина, накладка, зона передруйнування, контактні напруження, осьові зусилля.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування,
33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: kundrat@i.ua, Melnytschka@ukr.net

M. M. Kundrat[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
Ju. V. Melnik[1], PhD student

Contact interaction a half-plane with elastic loaded along the upper border reinforcement

Solution of two-dimensional model problem for a semi-infinite plate with elastic flexible plate loaded along the whole length with a shifting tension are presented. The task is reduced to a singular integral equation that is solved by collocation method in class of functions unlimited at the ends of the interval. There are calculated dimensions of eventual zones of prefracture, distribution of contact tensions under the reinforcement and breaking axial forces in the reinforcement.

Key Words: semi-infinite plate, reinforcement, zone of prefracture, contact stresses, axial forces.

[1] National university of water management and natural resources using,
33028, Rivne city, Soborna st. 11,
e-mail: kundrat@i.ua, Melnytschka@ukr.net

Задачі розрахунку підкріплюючих елементів, як одного із засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій, інтенсивно розвиваються. Підкріплення є одночасно й потужними концентраторами напружень, які спричиняють нелінійні та пластичні деформації і в значній мірі ускладнюють розрахунок напружено-деформованого стану в композиції. Урахування явищ розпушення матеріалів та нелінійного їх деформування, що передують безпосередньо руйнуванню, дає можливість більш точно прогнозувати і раціонально використати несучу здатність елементів конструкцій.

Задача для пластини з приєднаним по всій довжині безмежно довгим ребром вперше розв'язана в праці Е. Мелана [1] і в подальшому отримала назву від його імені. Дослідження та огляд контактної задачі Мелана для пружного тіла подано в монографіях М. І. Мусхелішвілі [2], А. І. Каландії [3], Е. І. Григолюка, В. М. Толкачова [4], Г. Я. Попова [5], В. М. Александрова, С. М. Мхітаряна [6], Г. Т. Сулима [7] та широкому колі праць. У використаних в них підходах розглядались ідеалізовані схеми математичної постановки задачі, які не враховували можливості виникнення в області країв накладки часто спостережуваних зон ослабленого контакту, що призводило до появи у розв'язках механічно некоректних сингулярностей напружень в околах кінців накладок. Розрахункова модель для аналізу напружено-деформованого стану та граничної рівноваги в півплощині з нерозтягливою чи пружною накладкою запропонована в праці М. М. Кундрата [8]. Постановка задачі дала можливість уникнути сингулярності напружень в околах кінців накладки та отримати механічно коректні обмежені напруження у всіх точках композиції.

Розглянемо ізотропну півбезмежну пластину одиничної товщини підкріплену пружною гнучкою накладкою завдовжки $2a$, модуль пружності якої більший від такого ж для пластини ($E_f > E$). Накладка по верхній границі навантажена тангенціальними напруженнями інтенсивності $\tau_+(x)$ та зосередженою силою P на її правому кінці (рис. 1).

З аналізу пружного розв'язку відповідної задачі слідує, що найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців накладки, де на-

© М. М. Кундрат, Ю. В. Мельник, 2013

самперед слід чекати виникнення і розвитку локалізованих зон передруйнування. Вважаємо, що саме тут зароджуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини вздовж межі з'єднання пластина – накладка, і складаються з двох частин: ділянок пластичного деформування та розпушення.

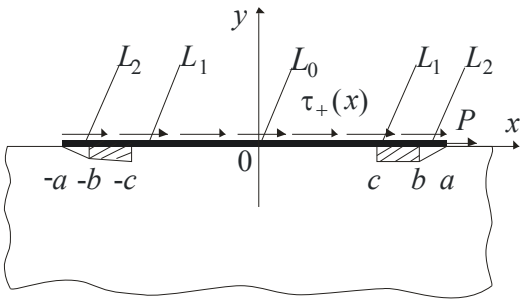


Рис 1. Напівнескінченна пластина підкріплена накладкою

На ділянках розпушення дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_s^*:

$$\tau_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a-|x|}{a-b} \quad (x \in L_2). \qquad (1)$$

На ділянках пластичного деформування дотичні напруження приймаємо сталими і рівними граничному значенню τ_s^* :

$$\tau_{xy}(x) = \tau_s^* \quad (x \in L_1). \qquad (2)$$

Параметр τ_s^* трактуємо як теоретичну або як технічну адгезійну зсувну міцність контактної межі пластина – накладка, а при пластичному деформуванні – як її зсувний поріг пластичності. При досягненні взаємними переміщеннями матеріалу контактної межі в таких зонах певної границі зв'язок між матеріалами може порушуватися, тобто накладка в її кінцевих областях відшаровується від пластини.

Розглянемо рівновагу накладки: для довільного перерізу з координатою x рівняння рівноваги має [3] вигляд

$$\frac{\partial u^f(x)}{\partial x} = \frac{1}{hE_f}\left[\int_x^a \tau_+(t)dt - \int_x^a \tau_{xy}(t)dt + P\right]. \qquad (3)$$

Для навантаженої півплощини згідно праці [2] вираз для деформації вільного краю є наступний:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\kappa+1}{4G}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\tau_{xy}(t)}{t-x}dt\right], \; x \in (-a, a). \qquad (4)$$

Умова рівності деформацій між накладкою і пластиною (3), (4) з врахуванням формул (1), (2) породжує сингулярне інтегральне рівняння стосовно невідомих контактних напружень $\tau_{xy}(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\tau_{xy}(t)dt}{t-x} + \frac{1}{2h\lambda_0}\int_x^c \tau_{xy}(t)dt + \\ + \tau_s^*\left[\frac{a+b-2c}{4h\lambda_0} + \frac{1}{\pi}g(x)\right] + \qquad (5)$$
$$+ \frac{1}{2h\lambda_0}\left[P - \int_x^a \tau_+(t)dt\right] = 0, \quad x \in (-c, c),$$

де

$$g(x) = \frac{1}{a-b}\left((a+x)\ln\frac{b+x}{a+x} + (a-x)\ln\frac{a-x}{b-x}\right) + \\ + \ln\frac{(c+x)(b-x)}{(c-x)(b+x)}, \quad \lambda_0 = E_f / E.$$

Окрім того має виконуватися умова загальної рівноваги накладки

$$\int_{-a}^{a}\tau_{xy}(t)dt = P + \int_{-a}^{a}\tau_+(t)dt. \qquad (6)$$

Числові дослідження виконаємо для сталих зсувних напружень $\tau_+(x) = \tau_+$ та відсутності зосередженої сили ($P = 0$). Вираз для напружень $\tau_{xy}(x)$ подаємо у вигляді ряду за многочленами Чебишева першого роду $T_n(x)$ з виділеною кореневою особливістю та невідомими коефіцієнтами b_n:

$$\tau_{xy}(x) = \frac{\tau_+ c}{\sqrt{c^2 - x^2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x), \quad |x| < c. \qquad (7)$$

Після підстановки (7) у рівняння (5), (6) отримуємо нескінченну систему нелінійних рівнянь стосовно довжини зони передруйнування $(a-c)$ та коефіцієнтів b_n, яку розв'язували методом редукції.

На рис. 2 подано залежності відносної загальної довжини зони передруйнування $\varepsilon = (a-c)/a$ від параметра навантаження $\tilde{\tau}_+ = \tau_+ / \tau_s^*$ при фіксованих відносній жорсткості λ_0 та довжині ділянки розпушення $\gamma = (a-b)/a$: для ліній *1*, *4* – $\lambda_0 = 10^9$, для *2*, *5* – $\lambda_0 = 10$, для *3*, *6* – $\lambda_0 = 10/3$; параметр $\gamma = 0{,}05$ відповідає лініям *1*, *2*, *3*, $\gamma = 0{,}0001$ – для *4*, *5*, *6*.

Зі зростанням жорсткості накладки загальна довжина зони передруйнування збільшується. За наперед заданої довжини ділянки розпушення за-

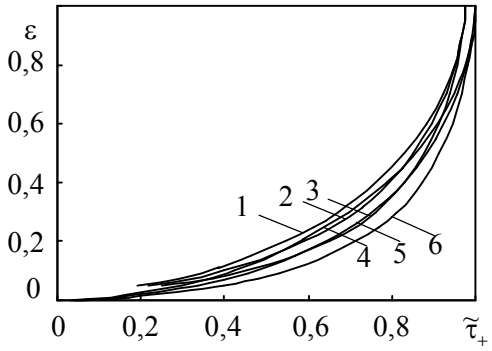


Рис. 2. Довжина зони передруйнування

гальна довжина зони передруйнування не може бути меншою від неї, і це відповідає обриву ліній в околі початку координат, що передбачає деяке мінімальне навантаження, за якого починається розвиток ділянки нелінійного деформування

На рис. 3 подано розподіл контактних дотичних напружень $\tilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy} / \tau_s^*$ уздовж правої половини накладки (на лівій – картина симетрична) при фіксованому навантаженні $\tilde{\tau}_+ = 0{,}3$ та жорсткості $\lambda_0 = 20$: для лінії *1* параметр $\gamma = 0{,}1$, ($\varepsilon = 0{,}1021$); *2* – $\gamma = 0{,}05$, ($\varepsilon = 0{,}0714$); *3* – $\gamma = 0{,}0001$ ($\varepsilon = 0{,}0434$).

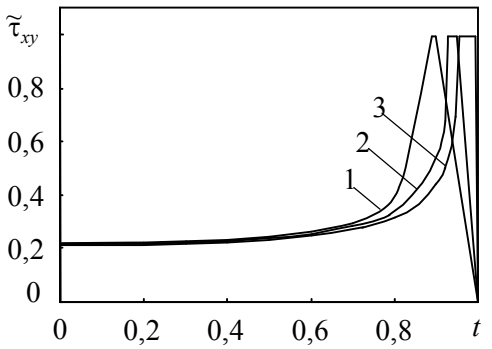


Рис. 3. Розподіл напружень під накладкою

Основна частина навантаження від накладки на пластину передається в околі її кінців. В середній частині контактні напруження практично не залежать від подання в зоні передруйнування і при $t = x/a = 0$ (середина накладки) узгоджуються з результатами праці [6].

Дотичні напруження уздовж межі зчеплення пластини з накладкою спричиняють у поперечному перерізі останньої осьові зусилля, розподіл яких обчислюємо за формулою

$$\tilde{P}(t) = \frac{\sigma_{xx} h}{2\tau_s^*} = \frac{1}{2\tau_s^* h}\left[\int_x^a \tau_+(t)dt - \int_x^a \tau_{xy}(t)dt\right].$$

Їх розподіл за фіксованого навантаження $\tilde{\tau}_+ = 0{,}3$ та жорсткості $\lambda_0 = 20$ подано на рис. 4: для лінії *1* параметр $\gamma = 0{,}1$; *2* – $\gamma = 0{,}05$; *3* – $\gamma = 0{,}0001$.

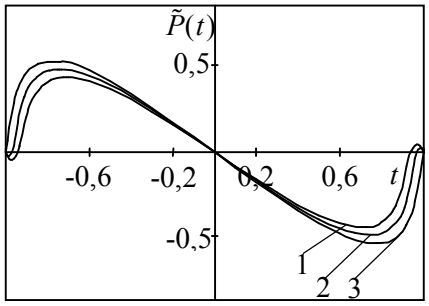


Рис. 4. Осьові розривні зусилля у накладці

Осьові розривні зусилля в лівій половині накладки розтягуючі (максимальне значення при $t = x/a = 0{,}7$ для лінії *1*, для *2* – $t = 0{,}74$, для *3* – $t = 0{,}77$), на середині накладки ($t = 0$) вони дорівнюють нулю. В правій частині картина антисиметрична і осьові зусилля стискаючі. Точка максимуму зміщується до краю при зменшенні довжини ділянки розпушення.

Список використаних джерел

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theoric geschweisster Verbindungen // Ingenieur – Archiv. – 1932. – Bd. 3, Heft 2. – S. 123-129.
2. *Muskhelishvili N. I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. – M.: Nauka, 1966. – 707 p. (in Russian).
3. *Kalandiya A. I.* Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity. – Nauka: Moscow, 1973. – 303 p. (in Russian).
4. *Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M.* Contact Problems of the Theory of Plates and Shells. – M.: Mashinostroenie, 1980. – 411 p. (in Russian).
5. *Popov G. Ya.* Concentration of elastic stress close to stamps, cross sectional view, thin inclusions and reinforcements. – M.: Nauka, 1982. – 344 p. (in Russian).
6. *Alexandrov V. M., Mkhitaryan S. M.* The contact problems for solids with thin coatings and layers. – M., Nauka, 1983. – 488 p. (in Russian).
7. *Sulym G. T.* Basis of math theory of thermoelastic balance of deformable solids with thin inclusions. – Lviv: Research & publishing center NTS, 2007. – 716 p. (in Ukraine).
8. *Kundrat M. M.* Limited balance and local destroying of plate with a lining. // Journal RDTU. Hydromelioration and hydravlic engineering. Special issue. – Rivne, 1999. – P. 200-204. (in Ukraine).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.595

Лимарченко В. О.[1], аспірант

Поведінка трубопроводу на рухомій основі при імпульсному збуренні коливань

Досліджується задача коливань трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Труба кругового перетину консольно закріплена на рухомій основі. Розглядається поведінка системи при імпульсному збуренні основи трубопроводу. Отримано графіки коливання кінця труби для різних швидкостей потоку рідини, включаючи випадок, коли рідина залишається нерухомою. Проаналізовано вплив швидкості руху рідини на поведінку системи та розглянуто умови, за яких система може приймати альтернативне положення рівноваги.

Ключові слова: трубопровід, швидкісна течія рідини, рухома основа, дискретна модель системи, сили взаємодії, імпульс, поштовх.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: vladimir_limarchenko@yahoo.com

V. O. Limarchenko[1], PhD student

Behavior of pipeline on a moving base with impulse excitation of oscillations

The problem of oscillations of pipeline with flowing liquid on a moving foundation is under consideration. The system consists of tube of circular cross-section, attached as cantilever to a moving foundation. We consider the behavior of the system under impulse disturbance of the pipeline base. The plots of oscillations of the free end of the pipe for different velocities of fluid flow have been obtained, including the case when the fluid remains stationary. The influence of the fluid velocity on the behavior of the system and the conditions under which the system can obtain alternative equilibrium have been analyzed.

Key Words: pipeline, high-speed liquid flow, moving foundation, discrete model of the system, forces of interaction, impulse, push.

[1] The Taras Shevchenko Kiev National University, 01601, Kyiv, Volodymyrska street, 64
e-mail: vladimir_limarchenko@yahoo.com

Вступ

Метою даної роботи є аналіз характеру коливань системи при короткотривалому імпульсному збуренні основи трубопроводу. В якості такого збурення розглядаємо поштовх основи трубопроводу за гармонічним законом в поперечному напрямку відносно труби. Для дослідження цієї задачі використовуємо нелінійну постановку, яка враховує можливість малих рухів основи трубопроводу в поперечному та поздовжньому напрямках. Така постановка також дозволяє врахувати прикладення зосереджених сил саме до точок закріплення трубопроводу, а не розподілених по всій довжині труби.

Механічна система (рис. 1) складається з рухомої основи, рух якої вважаємо заданим, трубопроводу, який описується моделлю пружної балки зі згинною жорсткістю EJ, площею поперечного перерізу F та масою $M_{TP} = \mu l$, де μ – лінійна густина, а l – довжина трубопроводу, й ідеальної, однорідної, нестисливої рідини, яка має масу $M_P = \rho l$ (ρ – лінійна густина рідини), та рухається в трубопроводі з заданою постійною швидкістю. Вважаємо, що рух системи відбувається в одній площині.

В більшості попередніх робіт [1-3] основа трубопроводу вважається нерухомою, а силова взаємодія може бути врахована лише за рахунок включення відповідних членів у вираз потенціальної енергії системи. Але такий підхід не дозволяє отримати реальні переміщення основи трубопроводу в будь-який момент часу. Модель для дослідження поведінки трубопроводу у випадку імпульсного збурення було побудовано на основі підходів робіт [1, 4, 6]. Використовувався мішаний опис руху складових системи, що дозволило отримати дискретну модель руху системи на основі методу модальної декомпозиції.

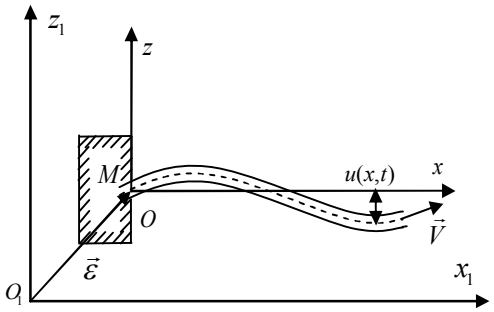


Рис. 1. Трубопровід з рідиною на рухомій основі

© В. О. Лимарченко, 2013

Математична модель системи

Побудова моделі полягає в отриманні функції Лагранжа для подальшого складання рівнянь руху на основі рівнянь Лагранжа другого роду та детально описана в статті [6].

Для побудови дискретної моделі системи виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича. Подамо зміщення точок трубопроводу у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}A_i(x)c_i(t).$$

Тут N – кількість форм коливань трубопроводу.

Оскільки трубопровід розглядаємо у наближенні балки, то за $A_i(x)$ беремо форми коливань труби як балки з нерухомою рідиною, виражені через функції Крилова. В результаті дискретизації функції Лагранжа рівняння Лагранжа другого роду набудуть вигляду

$$\ddot{c}_r=-\frac{EJ}{\rho+\mu}\kappa_r^4c_r+\frac{7}{2}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\,\beta_{ir}^2+$$
$$+\frac{2\rho V}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\left(\beta_{ri}^1-\beta_{ir}^1\right)-\frac{PF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\beta_{ir}^2-$$
$$-\frac{2\rho\dot{V}}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\beta_{ir}^2-\frac{1}{2N_r}\sum_{ijk}\ddot{c}_ic_jc_kd_{jkir}^2-$$
$$-\sum_{ijk}\dot{c}_i\dot{c}_jc_k\frac{1}{N_r}\left(d_{jkir}^2-\frac{1}{2}d_{krij}^2\right)-\frac{EJ}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_ic_jc_kd_{ijkl}^6-$$
$$-\frac{2EF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_ic_jc_kd_{ijkr}^3-\frac{13}{4}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_ic_jc_kd_{ijkr}^4+$$
$$+\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\psi_r^1\left[V\dot{\varepsilon}_z-\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right]+\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{N}c_i\beta_{ir}^2\left[-2\rho V\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_x^2\left(\rho+\frac{1}{2}\mu\right)+\dot{\varepsilon}_z^2\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{5}{2}\rho\right)\right]-$$
$$-\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\left(\beta_{ri}^1-\beta_{ir}^1\right)\dot{\varepsilon}_x+$$
$$+\frac{3\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N}c_ic_j\varphi_{ijr}^3\left[-2V\dot{\varepsilon}_z+\frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right]+$$
$$+\frac{\mu-3\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N}c_i\dot{c}_j\left(\varphi_{irj}^2-\varphi_{jir}^2\right)\dot{\varepsilon}_z+$$
$$+\frac{9\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_j\dot{c}_k\left(d_{ijrk}^3-d_{kjir}^3\right)\dot{\varepsilon}_x+$$
$$+\frac{2}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_jc_kd_{ijkr}^4\left[-4\rho V\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_x^2\left(-\frac{5}{2}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)+\right.$$
$$\left.+\dot{\varepsilon}_z^2\left(\frac{27}{8}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)\right]-\frac{1}{N_r}\psi_r^0\ddot{\varepsilon}_z+\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\beta_{ir}^1\dot{\varepsilon}_x+$$
$$+\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\beta_{ir}^1\ddot{\varepsilon}_x-\frac{\mu-3\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N}c_ic_j\varphi_{ijr}^2\ddot{\varepsilon}_z-$$
$$-\frac{3\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_jc_kd_{ijkr}^3\ddot{\varepsilon}_x.$$

Введені величини ψ_i^0, ψ_i^1, N_i, β_{ij}^1, β_{ij}^2, κ_i^4, φ_{ijk}^2, φ_{ijk}^3, d_{ijkl}^2, d_{ijkl}^3, d_{ijkl}^4, d_{ijkl}^6 є квадратурами від відомих форм коливань $A_i(x)$ по відомій області та визначаються чисельно.

Підставимо замість члену рівнянь руху, що містить $\ddot{c}_r$, його лінійне представлення та проведемо заміну змінних. При проведені підстановки можна обмежитись тільки лінійними членами рівнянь, оскільки ми розглядаємо величини тільки до третього порядку малості.

Отримана система рівнянь описує рух трубопроводу при заданому законі вібрації основи.

Систему рівнянь руху шляхом зниження порядку можна легко звести до форми Коші та інтегрувати чисельно методом Рунге – Кута. Для випадку сумісного руху трубопроводу з рідиною, необхідно вирішити лінійну алгебраїчну задачу, щоб всі рівняння системи містили другу похідну по змінній в лівій частині та вирази відносно змінних та їх перших похідних в правій частині. В цілому система рівнянь руху є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів деформації трубопроводу.

Аналіз руху системи трубопровід – рідина при поздовжній вібрації основи

В результаті чисельного моделювання було отримано та проаналізовано дані про поведінку системи трубопровід – рідина при короткочасному імпульсному збуренні основи в поперечному напрямку O_1z_1 відносно труби (рис. 1). Труба довжиною 1 м виготовлена із алюмінію. Швидкість руху рідини вздовж трубопроводу вважається постійною.

У випадку імпульсного збурення задаємо закон руху основи трубопроводу у вигляді $\varepsilon_z = A\sin\omega t$ при $t\in[0,\pi/\omega]$; $\varepsilon_z=0$ при $t\in[\pi/\omega,\infty)$.

Параметр A впливає на амплітуду імпульсу збурення. Параметр ω впливає на тривалість та плавність імпульсу. В нашому випадку обираємо відносно невелику частоту $\omega=20$, що приблизно дорівнює половині власної частоти першої форми коливань балки. При такому співвідношенні

початкове збурення буде діяти приблизно на протязі повного періоду першої форми коливань.

Зауважимо, що критична швидкість течії рідини $V_{KP} = 20{,}94$ м/с, а власна частота першої форми коливань балки $\omega_1 = 40{,}27$. Відлік часу проводиться в періодах першої форми коливань $T_1 = 0{,}1567$ с.

Для різних параметрів збурення A, ω та різних швидкостей рідини в трубі V шляхом чисельного моделювання знайдено графіки руху вільного кінця балки по осі Oz та порівняльні графіки впливу форм коливань на процес руху системи. Наведемо графіки найбільш характерних випадків, на яких продемонструємо основні закономірності та залежності процесу коливань від обраних параметрів.

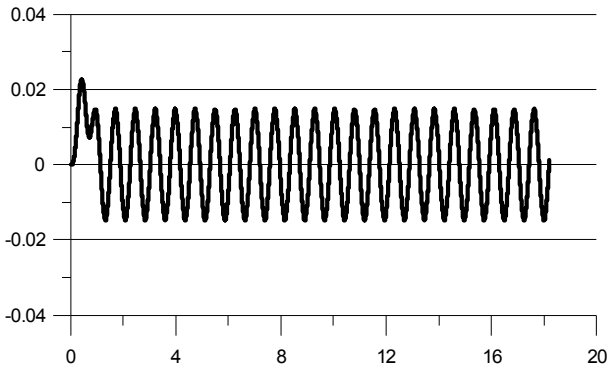


Рис. 2. Графік коливань кінця труби при $V = 0$ м/с; $A = 0{,}1$; $\omega = 20$

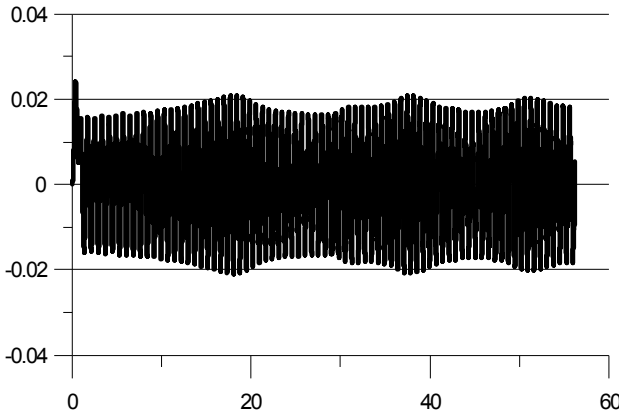


Рис. 3. Графік коливань кінця труби при $V = 5$ м/с; $A = 0{,}1$; $\omega = 20$

В першу чергу розглянемо випадок, коли рідина залишається нерухомою, тобто швидкість потоку рівна $V = 0$ м/с (рис. 2). Бачимо, що спочатку відхилення кінця труби різко зростає за рахунок дії імпульсу, а потім амплітуда коливань набуває певного сталого значення і майже не змінюється із часом. Картина коливань має регулярний характер.

Якщо розглянути процес коливань трубопроводу з рідиною, що рухається, після такого самого імпульсу (рис. 3), побачимо, що наявність рухомої рідини якісно впливає на розвиток коливань. Спостерігається зміна амплітуди коливань із часом, що спричинена дією сил інерції Коріоліса та відцентрової сили, що діє з боку рідини на стінки труби. Бачимо, що кінець трубопроводу зазнає більших відхилень, ніж у попередньому випадку.

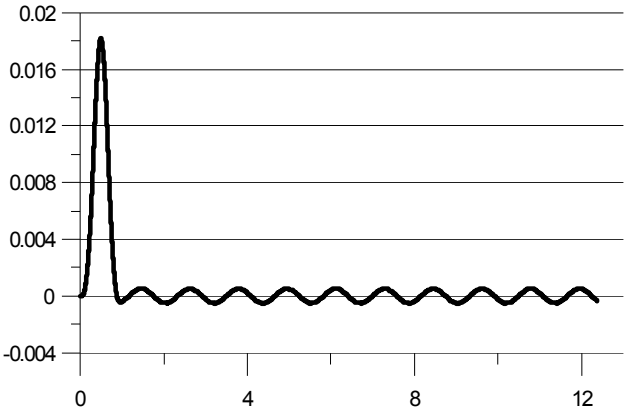


Рис. 4. Графік коливань кінця труби при $V = 5$ м/с; $A = 0{,}05$; $\omega = 20$

На графіку рис. 4 бачимо, що невелика швидкість потоку рідини, біля $0{,}25\,V_{KP}$, може також мати стабілізуючу дію для процесу коливань. Отримавши збурення за рахунок імпульсу, система переходить до дуже малих, порівняно з величиною імпульсу, коливань відносно початкового положення. Варто зазначити, що у випадках з амплітудами $A = 0{,}06$ та $A = 0{,}04$, амплітуди коливань набагато більші, ніж у випадку $A = 0{,}05$.

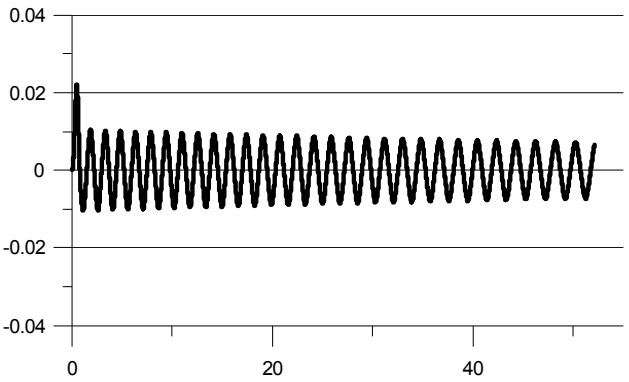


Рис. 5. Графік коливань кінця труби при $V = 10$ м/с; $A = 0{,}05$; $\omega = 20$

Явище стабілізації коливань трубопроводу також спостерігається при збільшенні швидкості потоку до V =10 м/с, що становить приблизно $0{,}5\,V_{KP}$ (рис. 5). З графіку бачимо, що амплітуда коливань поступово та рівномірно зменшується, що призводить до довготривалого процесу коливань.

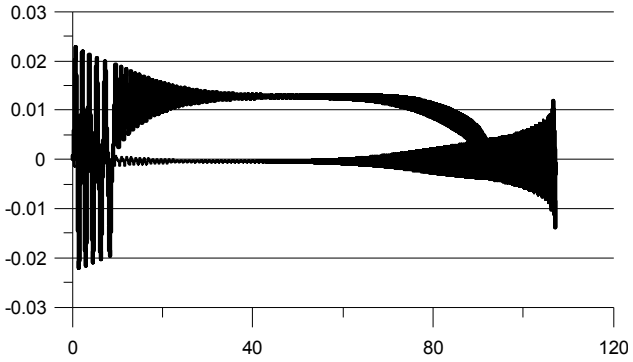


Рис. 6. Графік першої та другої форм коливань $V = 15$ м/с; $A = 0{,}05$; $\omega = 20$

Якщо збільшити швидкість потоку до $0{,}5\,V_{KP}$, що становить V = 15 м/с в нашому випадку, можемо спостерігати втрату трубопроводом прямолінійної стійкості та вихід системи на альтернативне положення рівноваги. На рис. 6 наведено порівняльний графік першої та другої форм коливань. З малюнку видно, що вихід на альтернативне положення рівноваги здійснюється за рахунок зміщення по першій формі, друга форма продовжує коливатись відносно прямолінійного положення. Також бачимо, що при швидкості потоку V = 15 м/с не спостерігається стрибкоподібного зменшення амплітуди по закінченні дії імпульсу, як у всіх попередніх випадках. Амплітуда спадає плавно, після чого трубопровід переходить до коливань відносно певного викривленого положення.

Наприкінці процесу помітним стає вплив другої форми та інших вищих форм на характер коливань.

Висновки

В роботі розглянуто задачу динаміки трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Розроблено модель руху такої системи для випадку заданого руху основи трубопроводу. Використовуючи метод модальної декомпозиції, побудовано нелінійну скінченновимірну модель динаміки системи трубопровід – рідина для довільної кількості форм коливань (при чисельній реалізації приймалося до уваги сім форм коливань), що дало змогу більш детально проаналізувати рух системи в перехідних режимах. Проаналізовано поведінку системи при збудженні руху за рахунок заданого поперечного імпульсу, що діє на основу трубопроводу на початку процесу коливань. Показано, що поведінка системи може якісно змінюватись при різних значеннях швидкості потоку рідини та при його відсутності. Так, при високій швидкості потоку рідини система може втрачати стійкість прямолінійної форми та здійснювати перехід до альтернативного положення рівноваги (при швидкості потоку, близькій до критичної швидкості). При нижчих швидкостях потік рідини має стабілізуючий вплив на коливання трубопроводу. На відміну від випадків збурення за заданим гармонічним законом, у випадку імпульсного збурення явище амплітудної модуляції коливань не спостерігається.

Список використаних джерел

1. *Bondar N. G.* Nonlinear Autonomous Problems in Mechanics of Elastic Systems. – Kyiv: Budivelnyk, 1971. – 140 p. (in Russian).
2. *Kuiper G. L.* Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid // Journal of Fluids and Structures. – 2008. – No. 24. – P. 541-558.
3. *Paidoussis M. P.* A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – No. 280. – P. 141-157.
4. *Babakov I. M.* Theory of vibrations. – Moscow: Nauka, 1968. – 560 p. (in Russian).
5. *Vasilevskiy Yu. E., Limarchenko O. S.* Nonlinear model of pipeline dynamics with high-speed fluid flow // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2006.– № 4. – P. 322-334. (in Ukrainian).
6. *Limarchenko V. O.* Dynamics of pipeline with liquid on a vibrating foundation // Physico-mathematical modelling and informational technologies. – 2012. – № 15. – P. 40-48. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 20.05.13

УДК 539.595

Лимарченко О. С.[1], д. т. н., проф.,
Тімохін О. П.[1], аспірант

Поведінка трубопроводу при закритичних швидкостях течії рідини

Досліджується задача коливань трубопроводу з рідиною при за критичних швидкостях течії рідини. Розглядається поведінка системи при малому початковому відхиленні від прямолінійної форми. Встановлено точку біфуркації розв'язку, коли прямолінійний стан трубопроводу втрачає стійкість, проте стійким стає певне альтернативне викривлене положення. Побудовано форми альтернативних положень в залежності від значень швидкості течії. Проаналізовано вплив сил Коріоліса на розвинення коливань в докритичній і закритичній областях зміни швидкості.

Ключові слова: трубопровід, швидкісна течія рідини, біфуркація, сили Коріоліса.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: olelim2010@yahoo.com

O. S. Limarchenko[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
O. P. Timokhin[1], PhD student

Behavior of pipeline for supercritical velocities of liquid flow

The problem of oscillations of pipeline with flowing liquid for supercritical velocities of liquid flow is under consideration. System behavior for small initial deviations from rectilinear shape is considered. Point of solution bifurcation was determined, when rectilinear state of pipeline losses stability, however certain alternative curved state becomes to be stable. Shapes of these alternative positions depending on values of flow velocities are constructed. Effect of the Coriolis forces on development of oscillations for subcritical and supercritical domains of liquid variation was analyzed.

Key Words: pipeline, high-speed liquid flow bifuracation, Coriolis forces.

[1] The Taras Shevchenko Kiev National University, 01601, Kyiv, Volodymyrska street, 64
e-mail: olelim2010@yahoo.com

Вступ

Метою даної роботи є аналіз руху системи трубопровід – рідина в діапазоні біля- і закритичних значень швидкості течії. Відомо, що для трубопроводу з рідиною існує критична швидкість, яка визначається рівністю відцентрових сил, зумовлених течією рідини на криволінійних ділянках трубопроводу, і сил пружності [1]. Практично всі дослідження поведінки трубопроводів обмежуються випадками, коли швидкість течіє менша за критичну [1-5]. Окремо також варто проаналізувати внесок сил Коріоліса в докритичних та за критичних діапазонах.

Визначення зон стійкості трубопроводів

Трубопровід розглядається в балочному наближенні. Прийнято, що $A_i(x)$ – форми коливань труби як балки з нерухомою рідиною, виражені через функції Крилова. В результаті дискретизації функції Лагранжа, записаної для балки з рідиною, рівняння Лагранжа другого роду відносно амплітудних параметрів коливань трубопроводу c_i набудуть вигляду [2, 5]:

$$\ddot{c}_r = -\frac{EJ}{\rho+\mu}\kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\,\beta_{ir}^2 +$$

$$+\underbrace{\frac{2\rho V}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i \dot{c}_i\left(\beta_{ri}^1-\beta_{ir}^1\right)}-\frac{PF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\beta_{ir}^2 -$$

$$-\frac{2\rho\dot{V}}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\beta_{ir}^2-\frac{1}{2N_r}\sum_{ijk}\ddot{c}_i c_j c_k\; d_{jkir}^2 -$$

$$-\sum_{ijk}\dot{c}_i\dot{c}_j c_k\frac{1}{N_r}\left(d_{jkir}^2-\frac{1}{2}d_{krij}^2\right)-\frac{EJ}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 -$$

$$-\frac{2EF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_i c_j c_k d_{ijkr}^3-\frac{13}{4}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_i c_j c_k d_{ijkr}^4.$$

Введені величини N_i, β_{ij}^1, β_{ij}^2, κ_i^4, d_{ijkl}^2, d_{ijkl}^3, d_{ijkl}^4, d_{ijkl}^6 є квадратурами від відомих форм коливань $A_i(x)$ по відомій області та визначаються чисельно. Для приведення системи до форми Коші підставимо замість нелінійного члену рівнянь руху, що містить $\ddot{c}_r$, його лінійне представлення. В підсумку одержимо рівняння з точністю до третього порядку малості відносно амплітуд коливань.

© О. С. Лимарченко, О. П. Тімохін, 2013

Звернемо увагу на підкреслений член рівнянь руху, який відповідає дії сил Коріоліса. З рівнянь видно, що дія сил Коріоліса не проявляється для випадку одного рівняння, оскільки коефіцієнт при амплітудному параметрі є антисиметричним виразом. Отже, дія сил Коріоліса проявляється лише для многомодової моделі. Коріолісов член фактично замість форми коливань створює вираз, в якому здійснюється часовий і просторовий зсув по фазі на $\pi/2$. В результаті в часі і в просторі одержуються вирази, які не є елементами системи форм коливань і основних законів зміни за часом. В підсумку це призводить до того, що в системі встановлюється на рівні лінійних членів взаємозв'язок між всіма формами коливань. Дослідження показують, що цей механізм перерозподілу енергії в системі значно переважає вплив нелінійних механізмів.

На основі одномодового наближення діаграма залежності першого власного значення (парціальної частоти) від безрозмірної швидкості течії (віднесеної до критичної швидкості, визначеної за [1]) набуває вигляду, показаного на рис. 1. До критичного значення швидкості частота є дійсною, а для закритичних значень вона стає уявною, що свідчить про втрату стійкості прямолінійної форми трубопроводу.

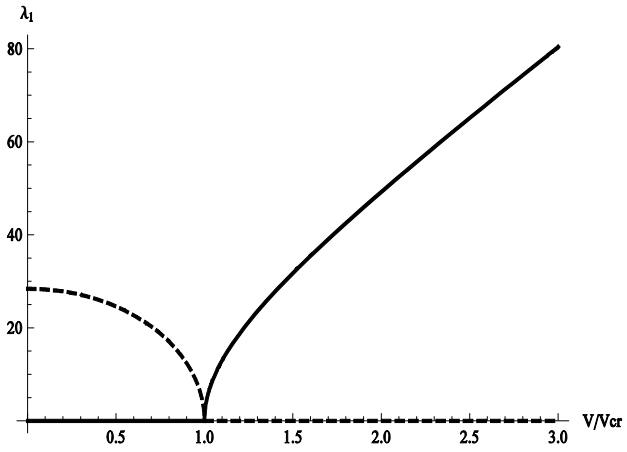


Рис. 1. Перша парціальна частота

При визначенні за методикою роботи [1] другої парціальної частоти залежності перших двох частот від безрозмірної швидкості течії рідини набудуть вигляду, представленому на рис. 2. Як видно з цих малюнків, закони зміни цих частот є незалежними. Проте, відомо, що для випадку багатомодової моделі системи суттєвим стає прояв сил Коріолісу, що значно змінює поведінку системи.

Якщо скористатися двомодовою моделлю системи і визначити зміну власних частот сумісних коливань від безрозмірної швидкості, то внесок сил Коріоліса вагомо змінює характер залежності дійсних та уявних значень власних частот в порівнянні з парціальними частотами (рис. 3).

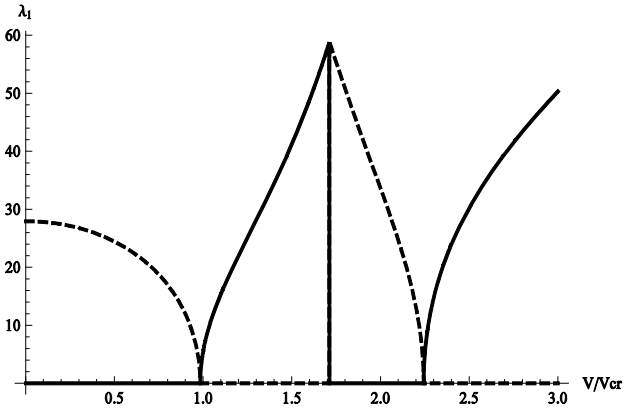


Рис. 2. Перші дві парціальні частоти

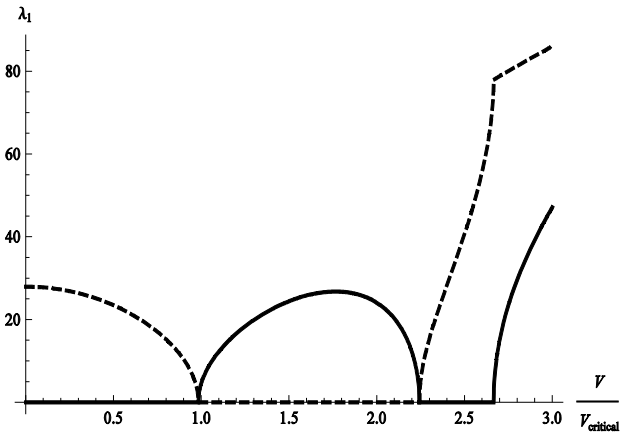


Рис. 3. Дійсні та уявні частини значень λ_1

Тепер характер розвинення коливань може бути представлений таким чином. При зростанні швидкості течії до першої критичної швидкості прямолінійна форма коливань трубопроводу втрачає стійкість. На відрізку від першої критичної швидкості до приблизно 2,25 цієї швидкості стійким буде нове викривлене альтернативне положення динамічної рівноваги. Далі приблизно від 2,25 до 2,7 вказаної швидкості прямолінійне положення рівноваги стає знову стійким.

На рис. 4 приведені значення трьох амплітуд відхилення положення рівноваги трубопроводу від безрозмірної течії рідини. Верхнє і нижнє положення рівноваги є симетричними. Точка, що відповідає значенню безрозмірної швидкості, яка дорівнює одиниці, є точкою біфуркації розв'язків (розв'язок може розгалузитися на три гілки). На рис. 5 показано форми динамічної рівноваги (альтернативні положення) трубопроводу для

різних закритичних значень швидкості течії рідини. Зауважимо, що всі вони утворені різними збуреннями першої форми коливань. На рис. 5 приведені лише верхні альтернативні положення. Ці положення відповідають рівновазі всіх сил, що діють на трубопровід в усталеному русі системи. При цьому в балансі сил приймають участь не лише сили пружності і відцентрові сили, а додатково ще й сили Коріоліса.

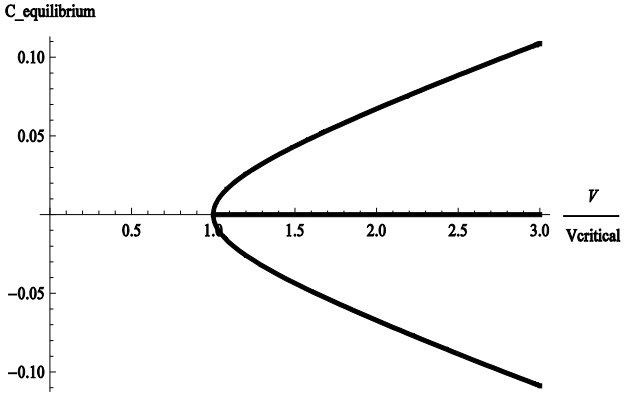


Рис. 4. Значення трьох амплітуд відхилень балки в залежності від безрозмірної швидкості

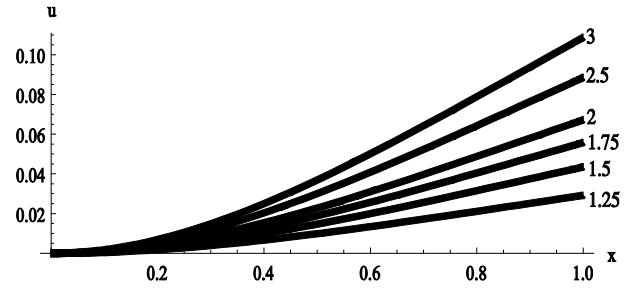


Рис. 5. Форми трубопроводу в альтернативних положеннях рівноваги при безрозмірних швидкостях течії 1,25; 1,5; 1,75; 2,0; 2,5: 3,0

Для системи тестових прикладів на основі розробленої моделі було чисельно було досліджено вплив сил Коріоліса для докритичних і закритичних швидкостях течії. Врахування сил Коріоліса в обох діапазонах зміни швидкостей є принципово важливим і визначальним при описі динамічної поведінки системи. Для режимів з докритичними швидкостями течії рідини сила Коріоліса сприяє енергообміну між формами коливань і її вплив значно поскладнює характер розвинення динамічних процесів. Проте у випадку закритичних швидкостей течії рідини вплив сили Коріоліса навпаки сприяє впорядкуванню коливань і приводить до домінування коливань в системі першої форми. Тобто, в закритичному діапазоні швидкостей сила Коріоліса стає стабілізуючим фактором, що сприяє регулярності коливань системи.

Висновки

В роботі розглянуто питання динамічної стійкості коливань трубопроводу в околі критичних швидкостей течії і для діапазону закритичних швидкостей. Показано існування альтернативних положень динамічної рівноваги трубопроводу, навколо яких можуть розвиватися коливання. Встановлено точки біфуркації розв'язків і показано якими будуть форми альтернативних положень для різних значень критичних швидкостей. Чисельно на тестових прикладах проаналізовано вплив сил Коріоліса для докритичних і закритичних швидкостей течії. Показано, що характер впливу сил Коріоліса на цих діапазонах суттєво відрізняється.

Список використаних джерел

1. *Feodosiev V. I.,* On oscillations and stability of pipeline on liquid flowing inside it // Engineering Collected Articles, AS USSR. – 1951. – No. 10. – P. 169-170.
2. *Bondar N. G.* Nonlinear Autonomous Problems in Mechanics of Elastic Systems. – Kyiv: Budivelnyk, 1971. – 140 p. (in Russian).
3. *Kuiper G. L.* Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid // Journal of Fluids and Structures. – 2008. – No. 24. – P. 541-558.
4. *Paidoussis M. P.* A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – No. 280. – P. 141-157.
5. *Vasilevskiy Yu. E., Limarchenko O. S.* Nonlinear model of pipeline dynamics with high-speed fluid flow // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.– 2006. – № 4. – P. 322-334. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 20.05.13

УДК 539.3

Лібов Д. Ю.[1], аспірант

Крайовий резонанс при неосесиметричній деформації пружного циліндра скінченної довжини

Розглянуто явище крайового резонансу при неосесиметричній деформації пружного скінченного циліндра. Представлено точний розв'язок граничної задачі, отриманий методом суперпозиції. Показано, що визначник нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює нулю при певній частоті, яка лежить нижче першої частоти запирання нескінченного хвилеводу, для достатньо довгого циліндра. Форма такого крайового резонансу характеризується локалізацією області інтенсивних рухів в околі торців циліндра.

Ключові слова: крайовий резонанс, пружний циліндр, частотний спектр.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: dmytro.libov@univ.net.ua

D. Yu. Libov[1], PhD student

The end resonance under non-axisymmetric deformation of a cylinder of finite length

The end resonance phenomenon under the non-axisymmetric deformation of a finite elastic cylinder is studied. The exact solution to the boundary-value problem obtained by the superposition method is presented. It is found that the determinant of an infinite system of linear algebraic equations is equal to zero at a particular frequency, lying below the lowest cut-off frequency of an infinite waveguide, and for a sufficiently long cylinder. The form of this end resonance is characterized by large displacements localized near the cylinder ends.

Key Words: end resonance, elastic cylinder, frequency spectrum.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: dmytro.libov@univ.net.ua

1. Вступление

Закономерности процессов отражения и распространения гармонических волн в упругом цилинде были предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, ведущихся уже более столетия, начиная от работы Похгаммера [1]. В настоящее время накоплены и систематизированы [2, 3] обширные данные о свойствах распространяющихся (однородных) и нераспространяющихся (неоднородных) нормальных волн в бесконечном упругом цилиндре. Роль последних в интерпретации волнового поля проявилась в связи с явлением краевого резонанса при осесимметричных вынужденных колебаниях конечного и полубесконечного цилиндра [4, 5]. В [6, 7] отмечено, что в частных случаях, когда коэффициент Пуассона ν материала цилиндра равен нулю или ≈0,127, наблюдается «чистое» проявление такого резонанса в неоднородных волнах без связи их (через посредство граничных условий на торце цилиндра) с движениями в распространяющейся моде.

Аналогичный по свойствам (чистый) краевой резонанс наблюдался автором работы [8] в связи с экспериментальным исследованием неосесимметричных резонансных колебаний алюминиевых цилиндров. Доказательству существования изолированного резонанса в полубесконечном цилиндре для любого ν посвящено сообщение [9].

В данной работе рассматривается ряд вопросов о влиянии коэффициента Пуассона, геометрических параметров, типа симметрии движений – неосесимметрическая антисимметрическая деформация – на явление краевого резонанса в цилиндре конечной длины.

2. Неосесимметричные нормальные волны в бесконечном цилиндре

На рис. 1 представлены дисперсионные свойства неосесимметричных мод

$$\vec{\tilde{u}}(r_1, \theta, z_1)\exp(i\omega t) = \vec{U}(r_1)\exp\left[i(\ell\theta + \kappa z_1 + \omega t)\right]$$

(ℓ – порядок круговой координаты θ, κ – постоянная распространения, ω – круговая частота, t – время) бесконечного упругого изотропного цилиндра $0 \le r_1 \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $|z_1| < \infty$ со свободной

© Д. Ю. Лібов, 2013

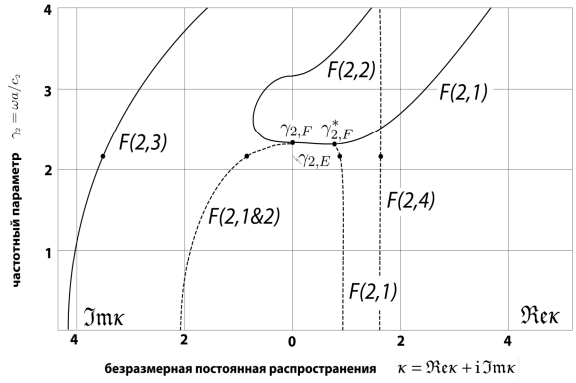


Рис. 1. Дисперсионный спектр бесконечного цилиндра для нормальных волн кругового порядка два и коэффициента Пуассона ν = 0,344

от напряжений боковой поверхностью. Эти свойства описываются дисперсионным уравнением [9]

$$P(\kappa)Q(\kappa)-C(\kappa)T(\kappa)=0, \qquad (1)$$

где

$$\begin{cases} P(\kappa)=\dfrac{(\kappa^2+q_2^2)(\kappa^2+q_2^2+2\ell^2)}{4\kappa^2\left[\Im_\ell(iq_1)-\ell\right]}-\dfrac{q_2^2+\ell^2}{\Im_\ell(iq_2)-\ell}+\dfrac{\gamma_2^2}{2\kappa^2}, \\ Q(\kappa)=\Im_\ell(iq_2)-\ell-\dfrac{q_2^2+\ell^2}{2}-\dfrac{\ell^2}{2\left[\Im_\ell(iq_1)-\ell\right]}, \\ T(\kappa)=\left[\dfrac{\kappa^2+q_2^2}{2\kappa^2\left[\Im_\ell(iq_1)-\ell\right]}-\dfrac{1}{\Im_\ell(iq_2)-\ell}+\dfrac{\gamma_2^2}{2\kappa^2}\right]\ell, \\ C(\kappa)=\left[\Im_\ell(iq_2)-\ell-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\kappa^2+q_2^2+2\ell^2}{4\left[\Im_\ell(iq_1)-\ell\right]}\right]\ell \end{cases}$$

и

$$q_s^2+\gamma_s^2=\kappa^2, \quad \gamma_s=\frac{\omega a}{c_s},$$

$$\Im_\ell(iq_s)=q_s\frac{I_{\ell-1}(q_s)}{I_\ell(q_s)} \quad (s=1,2).$$

Здесь c_1 – скорость волн расширения, c_2 – скорость сдвиговых волн; I_ℓ – модифицированная функция Бесселя порядка ℓ.

Результаты решения дисперсионного уравнения (1), определяющие допустимые значения κ для частотного параметра γ_2, представляют дисперсионные ветви $F(\ell,m)$ в прямоугольной системе координат ({Imκ, Reκ}, γ_2). На спектре представлены низшие (m = 1, 2, 3) ветви для ν = = 0,344 и ℓ = 2. Нормальные моды $F(\ell, m)$ круговых порядков $2 < \ell < \infty$ и других значений ν не имеют качественных отличий от представленных на рис. 1 [10]. На дисперсионном спектре сплошными линиями изображены действительные и чисто мнимые участки ветвей, штриховыми – проекции комплексных ветвей на действительную и мнимую плоскость. В первой моде $F(2,1)$ постоянная распространения κ есть комплексной в области $\gamma_2 < \gamma_{2,F}^*$ ($\gamma_{2,F}^* \approx 2{,}317$ – критическая частота). Поэтому ниже критической частоты $\gamma_2 < \gamma_{2,F}^*$ волновод заперт, вместе с тем полубесконечный цилиндр имеет резонанс при $\gamma_2 \approx 2{,}135$ [7, 9]. Это предопределяет интерес к исследованию резонанса в неоднородных волнах в цилиндре конечной длины.

3. Неосесимметричные антисимметричные колебания цилиндра конечной длины

Решение уравнений Ламе для амплитуд вектора перемещения $\vec{\tilde{u}}(r_1,\theta,z_1)$ (гармонический множитель $\exp(i\omega t)$ здесь и далее опущен)

$$c_1^2 \text{ grad div } \vec{\tilde{u}} - c_2^2 \text{ rot rot } \vec{\tilde{u}} + \omega^2 \vec{\tilde{u}} = 0$$

в конечном цилиндре $0 \le r_1 \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $|z_1| \le H$ строится методом суперпозиции [10] и имеет вид

$$u_r(r,\theta,z)=\cos(\ell\theta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}U_r^c(\kappa_n,r,z)+\sum_{j=1}^{\infty}U_r^p(\lambda_j,r,z)\right\},$$

$$u_\theta(r,\theta,z)=-\sin(\ell\theta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}U_\theta^c(\kappa_n,r,z)+\sum_{j=1}^{\infty}U_\theta^p(\lambda_j,r,z)\right\},$$

$$u_z(r,\theta,z)=\cos(\ell\theta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}U_z^c(\kappa_n,r,z)+\sum_{j=1}^{\infty}U_z^p(\lambda_j,r,z)\right\},$$

где (2)

$$U_r^c=(-1)^n\left(x_n\left[\frac{k_n^2+q_2^2}{2k_n^2}\frac{I_\ell'(q_1r)}{I_\ell'(q_1)}-\frac{I_\ell'(q_2r)}{I_\ell'(q_2)}\right]+ z_n\ell\left[\frac{I_\ell(q_2r)}{rI_\ell(q_2)}-\frac{I_\ell'(q_1r)}{2I_\ell'(q_1)}\right]\right)\sin(k_nz),$$

$$U_r^p=y_jh\left[\frac{p_2}{\lambda_j}\frac{\operatorname{sh}p_2z}{\operatorname{sh}p_2h}-\frac{\lambda_j^2+p_2^2}{2\lambda_jp_1}\frac{\operatorname{sh}p_1z}{\operatorname{sh}p_1h}\right]\frac{J_\ell'(\lambda_jr)}{J_\ell(\lambda_j)};$$

$$U_\theta^c=(-1)^n\left(x_n\left[\frac{k_n^2+q_2^2}{2k_n^2q_1}\frac{I_\ell(q_1r)}{I_\ell'(q_1)}-\frac{I_\ell(q_2r)}{q_2I_\ell'(q_2)}\right]\frac{\ell}{r}+ z_n\left[q_2\frac{I_\ell'(q_2r)}{I_\ell(q_2)}-\frac{\ell^2}{2q_1r}\frac{I_\ell(q_1r)}{I_\ell'(q_1)}\right]\right)\sin(k_nz),$$

$$U_\theta^p=y_jh\left[\frac{p_2}{\lambda_j^2}\frac{\operatorname{sh}p_2z}{\operatorname{sh}p_2h}-\frac{\lambda_j^2+p_2^2}{2\lambda_j^2p_1}\frac{\operatorname{sh}p_1z}{\operatorname{sh}p_1h}\right]\frac{\ell}{r}\frac{J_\ell(\lambda_jr)}{J_\ell(\lambda_j)};$$

$$U_z^c = (-1)^{n+1}\left(x_n\left[\frac{q_2}{k_n}\frac{I_\ell(q_2 r)}{I_\ell^{'}(q_2)} - \frac{k_n^2+q_2^2}{2k_n^2 q_1}\frac{I_\ell(q_1 r)}{I_\ell^{'}(q_1)}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} z_n \frac{\ell k_n}{q_1}\frac{I_\ell(q_1 r)}{I_\ell^{'}(q_1)}\right)\cos(k_n z),$$

$$U_z^p = y_j h\left[\frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} - \frac{\lambda_j^2+p_2^2}{2\lambda_j^2}\frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h}\right]\frac{J_\ell(\lambda_j r)}{J_\ell(\lambda_j)}. \quad (3)$$

Здесь $\vec{u}(r, \theta, z)$ – безразмерный вектор перемещения; $r = r_1/a$, $z = z_1/a$; J_ℓ – обычная функция Бесселя порядка ℓ; λ_j – ненулевые корни уравнения $J_\ell^{'}(\lambda_j) = 0$, расположенные в возрастающем порядке; и

$$p_s^2 + \gamma_s^2 = \lambda_j^2, \quad q_s^2 + \gamma_s^2 = \kappa_n^2 \quad (s = 1, 2);$$

$$\kappa_n = \pi(n - 1/2)/h \quad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Аналогично [11] удается показать, что для неизвестных x_n, z_n, y_j в (3) справедливы асимптотические равенства

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_j = a_0 = \text{const}, \quad \lim_{n\to\infty} z_n \kappa_n^4 = \text{const}. \quad (4)$$

Выполняя с помощью (2), (3) граничные условия

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \text{ при } r = 1;$$

$$\frac{\sigma_z}{2\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_\ell(\lambda_j r)}{J_\ell(\lambda_j)}; \quad \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0 \text{ при } |z| = h,$$

приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно x_n, z_n, y_j. Отнимая и прибавляя к рядам, содержащим коэффициенты с неизвестными x_n, z_n, y_j, их асимптотические значения (4), бесконечную систему уравнений сводим к следующей конечной системе:

$$\begin{cases} x_n P(\kappa_n) + z_n C(\kappa_n) + \sum_{j=1}^{J} y_j D_{jn} - a_0 \sum_{j=J}^{\infty} D_{jn} = 0; \\ x_n T(\kappa_n) + z_n Q(\kappa_n) + \sum_{j=1}^{J} y_j G_{jn} - a_0 \sum_{n=N}^{\infty} G_{jn} = 0; \\ y_j R(\lambda_j) + \sum_{n=1}^{N} x_n \left[K_{nj} + L_{nj}\right] - a_0 \sum_{n=N}^{\infty} K_{nj} = g_j, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$R(\lambda_j) = p_2 h \operatorname{th} p_2 h - \frac{(\lambda_j^2+p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} h \operatorname{th} p_1 h,$$

$$D_{jn} = \left(\frac{k_n^2}{\lambda_j^2+q_2^2} - \frac{k_n^2}{\lambda_j^2+q_1^2}\right)\frac{\lambda_j^2-\ell^2}{\lambda_j^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\lambda_j^2}\frac{\gamma_2^2-2\ell^2}{\lambda_j^2+q_1^2},$$

$$G_{jn} = \left(\frac{k_n^2}{\lambda_j^2+q_1^2} - \frac{k_n^2}{\lambda_j^2+q_2^2} + \frac{\gamma_0^2}{\lambda_j^2+q_1^2}\right)\frac{\ell^2}{\lambda_j^2},$$

$$K_{nj} = \left(\frac{2\lambda_j^2}{k_n^2+p_1^2} - \frac{2\lambda_j^2}{k_n^2+p_2^2} + \frac{\gamma_0^2\gamma_2^2}{k_n^2(k_n^2+p_1^2)}\right)\frac{\lambda_j^2-\ell^2}{\lambda_j^2},$$

$$L_{nj} = \frac{k_n^2+\gamma_0^2}{k_n^2+p_1^2}\frac{\ell\lambda_j^2}{\lambda_j^2-\ell^2}, \quad \gamma_0^2 = \frac{\nu\gamma_1^2}{1-2\nu}.$$

Для замыкания системы (5) используется уравнение, выражающее разность нормальных напряжений σ_r и σ_z на реберных окружностях $r = 1$ и $|z| = h$.

4. Краевой резонанс в конечном цилиндре

Непосредственная организация процесса вычислений полностью аналогична детально описанному в [11] алгоритму обработки решения задачи о колебаниях прямоугольника. При решении системы (5) оставлялось $N = 30$ неизвестных x_n и $J = 30$ неизвестных y_j. Самоуравновешенной нагрузке на торцах цилиндра соответствовали коэффициенты $g_j = \delta_{1j}$ (δ_{ij} – символ Кронекера).

Структура резонансного спектра (зависимость γ_2 от h) в области $\gamma_2 < \gamma_{2,F}^*$ для ν = 0,344 и ℓ =2 представлена на рис. 2. Резонансные спектры в частотном диапазоне $\gamma_2 < \gamma_{2,F}$ для круговых порядков $2 < \ell < \infty$ и других значений ν не имеют качественных отличий от представленных на рис. 2. Для иллюстрации возможностей теоретического способа определения резонансных частот, на рис. 2 приведены экспериментальные данные (•) работы [6] в диапазоне $h < 2$.

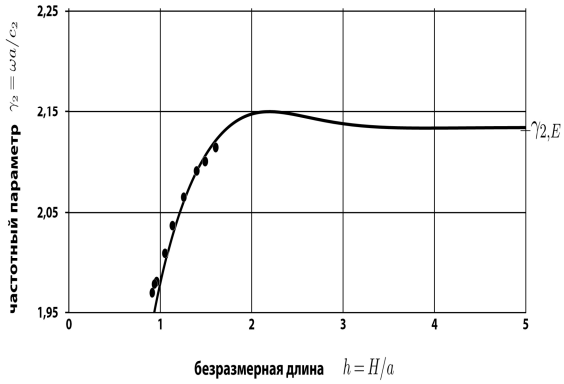


Рис. 2. Резонансный спектр конечного цилиндра для кругового порядка два и коэффициента Пуассона ν = 0,344

Спектр собственных частот длинного цилиндра при $h > 3$ и $\gamma_2 = \gamma_{2,E} \approx 2{,}134$ представляет горизонтальное плато, соответствующее краевому резонансу. В связи с этим следует отметить, что частота краевого резонанса полубесконечного цилиндра для $\nu = 0{,}3317$ и $\ell = 2$ заключена в интервале $2{,}13 < \gamma_2 < 2{,}14$ [6].

На рис. 3 показана форма перемещений точек поверхности цилиндра на частоте несколько выше $\gamma_{2,E}$ для $h = 4$. Поскольку $\gamma_{2,E} < \gamma^*_{2,F}$, то такой краевой резонанс происходит только в неоднородных волнах бесконечного цилиндра для любого ν.

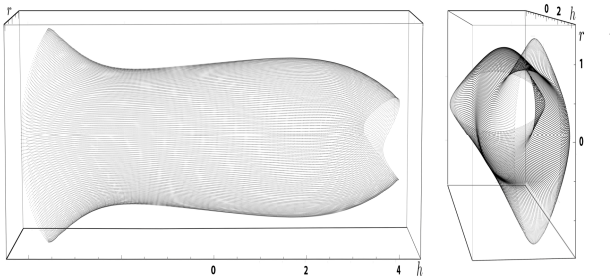


Рис. 2. Форма колебаний поверхности цилиндра при краевом резонансе

Список використаних джерел

1. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder // J. reine und angew. Math. – 1876. – N 55. – S. 324-336. (in German).
2. *Meeker T. R., Meitzler A. H.* Guided wave propagation in elongated cylinders and plates. – Phys. Acoust: Principles and Methods I, part A, 1964. – P. 140-203. (in Russian).
3. *Thurston R. N.* Elastic waves in rods and clad rods. // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – N 64. – P. 1-37.
4. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by wide-band and short-duration pulse technique. // J. Acoust. Soc. Am. – 1957. – N 29. – P. 189-194.
5. *McNiven H. D.* Extensional waves in a semi-infinite elastic rod. // J. Acoust. Soc. Am. – 1961. – N 33. – P. 23-27.
6. *Meleshko V. V.* The end resonance in a semi-infinite elastic cylinder. // Dokl. Akad. Nauk Ukr. RSR. – 1980. – N 12. – P. 920-924. (in Russian).
7. *Pagneux V.* Complex resonance and localized vibrations at the edge of a semi-infinite elastic cylinder. // Math. Mech. Solids. – 2012. – N 17. – P. 17-26.
8. *McMahon G. W.* Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders. // J. Acoust. Soc. Am. – 1964. – N 36. – P. 85-92.
9. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V.* Properties of a wave field in a semi-infinite elastic cylinder (boundary resonance). // Mech. Solids. – 1982. – N 6. – P. 81-89.
10. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. // J. Acoust. Soc. Am. – 1972. – N 51. – P. 265-283.
11. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. – Kiev: Naukova Dumka, 1981. – 284 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 18.05.13

УДК 539.3

Лобода В. В.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Шевельова А. Є.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Тулін К. О.[1], аспірант

Дугова тріщина з зонами контакту між включенням і матрицею

Розв'язується плоска задача для дугової тріщини між круговим включенням та нескінченною матрицею під дією довільно орієнтованого рівномірного напруження на нескінченості. Побудована та розв'язана методом механічних квадратур система сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій, які характеризують розкриття тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, дугова тріщина, сингулярне інтегральне рівняння.

[1] Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, 49010, м. Дніпропетровськ, просп. Гагаріна, 72
e-mail: loboda@mail.dsu.dp.ua,
allasheveleva@i.ua, 7780038@mail.ru

V. V. Loboda[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
A. E. Sheveleva[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
K. O. Tulin[1], PhD student

An arc crack with contact zones between an inclusion and a matrix

The plane problem for an arc crack between a circular inclusion and an infinite matrix under an arbitrary oriented uniform tension at infinity is solved. The system of singular integral equations with respect to unknown functions which characterize the crack opening is constructed and solved by the method of mechanical quadratures.

Key Words: interface crack, arc crack, singular integral equation.

[1] Oles Gonchar National University of Dnipropetrovsk, 49010, Dnipropetrovsk, Gagarina avenue, 72
e-mail: loboda@mail.dsu.dp.ua,
allasheveleva@i.ua, 7780038@mail.ru

1. Вступ

Прямолінійна тріщина між двома матеріалами з урахуванням зон контакту її берегів досліджувалась у роботах [1-3] та ін.

У випадку дугової тріщини дослідження проблеми виникнення зон контакту берегів тріщини є навіть більш актуальним, оскільки дуже часто великі зони контакту мають місце навіть для однорідного матеріалу. Незважаючи на це контактна модель дугової тріщини досліджена значно менше. Стосовно цього питання можна вказати роботи [4, 5], де для однорідного та композитного матеріалів, відповідно, вказана проблема досліджувалась шляхом чисельного аналізу системи сингулярних інтегральних рівнянь та роботу [6], в якій для випадку всестороннього розтягнення пружної площини з відшарованим круговим включенням, отримано замкнутий розв'язок.

У даній роботі розглядається проблема дугової тріщини між матрицею та круговим включенням у полі віддаленого довільно орієнтованого одноосного навантаження. З використанням комплексних потенціалів [7] формулюється система сингулярних інтегральних рівнянь, для якої пропонується метод її чисельного розв'язання, що враховує можливі зони контакту берегів тріщини.

2. Формулювання проблеми

Розглянемо плоску задачу для тріщини з кутом розхилу $2\beta_0$, яка виникла між круговим включенням радіусу a і нескінченою матрицею. Вважаємо, що на нескінченості діє рівномірне розтягуюче напруження інтенсивності T, направлене під кутом ω до осі, що проходить через середину тріщини. Кут θ полярної системи координат (r, θ) також відраховуємо від цієї осі. Вважаємо, що механічні характеристики матриці μ_1, κ_1, а включення – μ_2, κ_2.

Припускаючи, що напруження на верхньому і нижньому берегах тріщини однакові або ж вони вільні від напружень, бачимо, що $\forall\theta$ напруження $\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)}$ при $z = t = ae^{i\theta}$. З урахуванням цієї умови одержуємо

$$\sigma_{rr}^{(1)}(t) + i\sigma_{r\theta}^{(1)}(t) = \\ = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \kappa_1\mu_2}\left\{G^+(t) + \lambda G^-(t) + \delta F(t)\right\}, \quad (1)$$

© В. В. Лобода, А. Є. Шевельова, К. О. Тулін, 2013

де

$$F(z)=\Phi_1(z)-\Theta_2(z),$$

$$G(z)=\frac{\kappa_1}{\mu_1}\Phi_1(z)+\frac{1}{\mu_2}\Theta_2(z) \quad \text{для} \quad z\in S_+,$$

$$F(z)=\Phi_2(z)-\Theta_1(z),$$

$$G(z)=\frac{\kappa_2}{\mu_2}\Phi_2(z)+\frac{1}{\mu_1}\Theta_1(z) \quad \text{для} \quad z\in S_-,$$

$$\Phi_k(z)=\phi_k'(z), \quad \Theta_k(z)=\Omega_k'(z),$$

$$\Omega_k(z)=z\overline{\phi}_k'\left(\frac{a^2}{z}\right)+\overline{\psi}_k\left(\frac{a^2}{z}\right), \quad k=1,2,$$

$$\lambda=\frac{\mu_1+\kappa_1\mu_2}{\mu_2+\kappa_2\mu_1}, \quad \delta=\frac{1-\kappa_1\kappa_2}{\mu_2+\kappa_2\mu_1}.$$

Функції $\phi_k'(z)$ та $\psi_k(z)$ – комплексні потенціали [7] для включення ($k=1$) і матриці ($k=2$), а «+» і «-» означають, що ми наближаємось до дуги $t=ae^{i\theta}$ з зовнішньої (S_+) і внутрішньої (S_-) частин, відповідно.

На основі представлення (1) можна легко сформулювати задачу лінійного спряження Гільберта – Рімана відносно функції $G(t)$. Розв'язок цієї задачі буде фізично коректним, якщо тріщина залишається відкритою. Але для випадку міжфазної дугової тріщини, як правило, виникають не тільки мікрозони, а і макрозони контакту. На можливості врахування цих зон в подальшому і зосередимо увагу.

3. Побудова сингулярного інтегрального рівняння (СІР)

Введемо функцію, що характеризує розкриття тріщини

$$d(\theta)=\left(u_1+iu_2\right)^+-\left(u_1+iu_2\right)^-, \quad |\theta|<\beta_0.$$

Запишемо $d'(\theta)$ у вигляді

$$d'(\theta)=\upsilon_x(\theta)+i\upsilon_y(\theta)=e^{i\theta}\left\{\upsilon_r(\theta)+i\upsilon_\theta(\theta)\right\}, \quad |\theta|<\beta_0, \quad (2)$$

де

$$\upsilon_x=\frac{d}{d\theta}\left(u_1^+-u_1^-\right), \quad \upsilon_y=\frac{d}{d\theta}\left(u_2^+-u_2^-\right). \quad (3)$$

Умова однозначності переміщень при обході контуру тріщини має вигляд

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} d'(\theta)d\theta=0. \quad (4)$$

Припустимо тепер, що на протилежних берегах задані напруження $\sigma_{rr}^{\pm}(a,\theta)=N(\theta)$ і $\sigma_{r\theta}^{\pm}(a,\theta)=S(\theta)$. Тоді задовольняючи за допомогою (1) граничним умовам на берегах тріщини і використовуючи представлення переміщень через комплексні потенціали, маємо

$$c_0\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right)+i\right\}\left\{\upsilon_r(\gamma)+i\upsilon_\theta(\gamma)\right\}d\gamma-$$

$$-\frac{c\beta}{a}\left\{\upsilon_\theta(\theta)-i\upsilon_r(\theta)\right\}=N(\theta)+iS(\theta)+P_0, \quad (5)$$

де

$$|\theta|<\beta_0, \quad P_0=n_1\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\upsilon_\theta(\gamma)d\gamma+in_2\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\upsilon_r(\gamma)d\gamma-$$

$$-\frac{2(1+\alpha)}{1+\alpha-2\beta}\Gamma+\frac{1+\alpha}{1+\beta}\overline{\Gamma}'e^{-2i\theta}, \quad n_1=\frac{c_0(1-\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha-2\beta},$$

$$n_2=ic_0(1+\beta), \quad c_0=\frac{c}{2\pi a}, \quad c=\frac{\mu_1\mu_2(1+\lambda)}{\mu_1+\kappa_1\mu_2},$$

причому α і β є параметри Дундурса [8].

Комплексне рівняння (5) являє собою систему двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно $\upsilon_r(\gamma)$ і $\upsilon_\theta(\gamma)$. Крім того, невідомими для $\theta\in\Omega_k$ є також $N(\theta)$ і $S(\theta)$, де Ω_k – множина точок контакту берегів тріщини.

На основі (2) та (4) умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини можна записати у вигляді

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\left[\upsilon_r(\theta)\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix}-\upsilon_\theta(\theta)\begin{Bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{Bmatrix}\right]d\theta=0. \quad (6)$$

Розкриття тріщини характеризується наступними стрибками переміщень

$$\Delta_x=u_1^+-u_1^-, \quad \Delta_y=u_2^+-u_2^-,$$

$$\Delta_r=u_r^+-u_r^-, \quad \Delta_\theta=u_\theta^+-u_\theta^-.$$

Це розкриття через невідомі функції системи (5) можна записати у вигляді

$$\Delta_r(\theta)+i\Delta_\theta(\theta)=\int_{-\beta_0}^{\theta}e^{i(\gamma-\theta)}\left\{\upsilon_r(\gamma)+i\upsilon_\theta(\gamma)\right\}d\gamma, \quad \theta\in(-\beta_0,\beta_0). \quad (7)$$

4. Тріщина в однорідному матеріалі

Розглянемо частковий випадок поставленої задачі, коли матеріали матриці S_+ та включення

S_- однакові. У цьому випадку $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $\alpha = \beta = 0$, $c = 2\mu/(1+\kappa)$. Припустимо також, що тертя між берегами тріщини в зоні контакту відсутнє. Тоді рівняння (5) після відокремлення дійсної та уявної частини приймає вигляд наступної системи рівнянь:

$$c_0 \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right) \upsilon_r(\gamma)\, d\gamma = \frac{c}{\pi a} \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0} \upsilon_\theta(\gamma)\, d\gamma + N(\theta) - R_1(\theta),$$

$$c_0 \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right) \upsilon_\theta(\gamma)\, d\gamma = -R_2(\theta), \quad |\theta| < \beta_0. \quad (8)$$

де

$$R_1(\theta) = \frac{T}{2}\{1 + \cos 2(\omega - \theta)\}, \quad R_2(\theta) = \frac{T}{2}\sin 2(\omega - \theta).$$

Цю систему рівнянь як і у випадку неоднорідного матеріалу треба розв'язувати за умови однозначності переміщень (6) та додаткові умови в області контакту. Напруження поза тріщиною можна записати у вигляді

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr}(t) \\ \sigma_{r\theta}(t) \end{Bmatrix} = c_0 \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} \upsilon_r(\gamma) \\ \upsilon_\theta(\gamma) \end{Bmatrix} d\gamma -$$

$$-\frac{c}{\pi a} \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0} \begin{Bmatrix} \upsilon_\theta(\gamma) \\ 0 \end{Bmatrix} d\gamma + \begin{Bmatrix} R_1(\theta) \\ R_2(\theta) \end{Bmatrix}, \quad \theta \notin (-\beta_0, \beta_0). \quad (9)$$

Для чисельного розв'язання системи рівнянь (8) введемо наступну заміну координат:

$$\tau = \frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\beta_0/2)}, \quad s = \frac{\operatorname{tg}(\gamma/2)}{\operatorname{tg}(\beta_0/2)}. \quad (10)$$

Тоді рівняння (8) приймають вигляд

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{B_1(s)}{s-\tau} ds = \eta^2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{sB_1(s)}{g(s)} ds + 2\eta \int\limits_{-1}^{1} \frac{B_2(s)}{g(s)} ds +$$

$$+ \hat{R}_1(\tau) + \hat{N}(\tau),$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{B_2(s)}{s-\tau} ds = \eta^2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{sB_2(s)}{g(s)} ds + \hat{R}_2(\tau), \quad (11)$$

де

$$\tau \in (-1, 1), \quad \hat{R}_i(\tau) = R_i[\theta(\tau)], \quad i = 1, 2,$$

$$g(s) = 1 + \eta^2 s^2, \quad \eta = \operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2}, \quad \upsilon_r(\theta) = \frac{a}{\tilde{c}} B_1(s),$$

$$\upsilon_\theta(\theta) = \frac{a}{\tilde{c}} B_2(s), \quad \hat{N}(s) = N[\gamma(s)], \quad \tilde{c} = \frac{c}{\pi}.$$

Умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини (6) записуються так:

$$\int\limits_{-1}^{1} g^{-2}(s)\left\{(1-\eta^2 s^2) B_1(s) - 2\eta s B_2(s)\right\} ds = 0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} g^{-2}(s)\left\{2\eta s B_1(s) + (1-\eta^2 s^2) B_2(s)\right\} ds = 0. \quad (12)$$

Умова рівності нулю відкриття тріщини в зоні контакту на основі (7) приймає вигляд

$$\int\limits_{-1}^{\tau} \frac{2\eta}{g(s)} \{B_1(s)\cos[\psi(s,\tau)] -$$

$$-B_2(s)\sin[\psi(s,\tau)]\} ds = 0, \quad \tau \in \Omega_k^*, \quad (13)$$

де

$$\psi(s,\tau) = 2\operatorname{arctg}(\eta s) - 2\operatorname{arctg}(\eta\tau).$$

Для розв'язання системи рівнянь (11) – (13) подамо невідомі функції у вигляді

$$B_1(s) = \frac{B_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad B_2(s) = \frac{B_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (14)$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (11) – (13), розглядаючи їх у точках $\tau_i = \cos(i\pi/n)$ і застосовуючи квадратурні формули Гауса – Чебишева у вузлах $s_j = \cos((2j-1)\pi/(2n))$ отримуємо систему $2n+m$ алгебричних рівнянь відносно невідомих $B_1^*(s_j)$, $B_2^*(s_j)$, $\hat{N}(\tau_k)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $k = 1, 2, \ldots, m$; $m < n$).

5. Результати та їх аналіз

Припустимо, що матеріал однорідний з характеристиками μ, κ. Для кожного кута нахилу зовнішнього навантаження ω слід знаходити таку зону контакту Ω_k, при якій виконуються співвідношення (13). Це можна здійснити шляхом розв'язання дискретизованої системи рівнянь (11) – (13) методом послідовних наближень за різних Ω_k.

В даному випадку реалізувалась обернена процедура, а саме: вибиралось Ω_k і шляхом послідовного розв'язання дискретизованої системи рівнянь (11) – (13) підбирався такий кут нахилу зовнішнього навантаження ω, при якому напруження σ_{rr} в Ω_k є недодатними, а розкриття в іншій частині тріщини – невід'ємним. Конкретним критерієм слугувало таке значення ω, при незначній варіації якого змінювався знак $\hat{N}(\tau_m)$.

На рис. 1 наведено графіки розкриття тріщини $\tilde{\Delta}_r(\theta) = [5\mu/(Ta)]\Delta_r(\theta)$ на проміжку $(-\beta_0, \beta_0)$ для $\omega_1 = 0{,}57917$, $\omega_2 = 1{,}17917$ і $\beta_0 = \pi/3$.

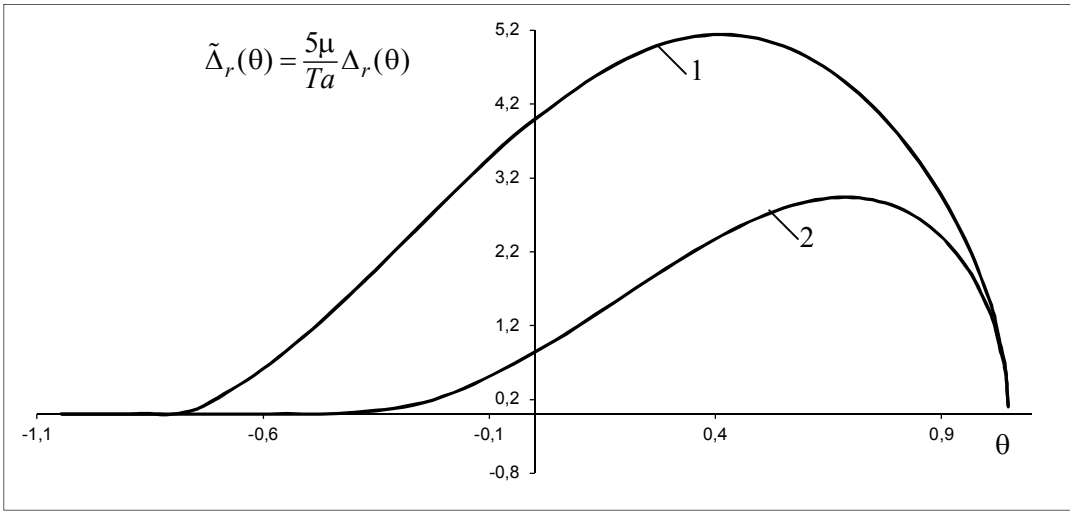


Рис. 1. Стрибок радіальних переміщень берегів тріщини

6. Висновки

Досліджена дугова тріщина, що розташована між круговим включенням та нескінченною матрицею з різними механічними властивостями. На нескінченності в довільному напрямку діє рівномірне розтягуюче навантаження. Сформульована нелінійна система сингулярних рівнянь (5) з відповідними додатковими умовами відносно функцій, які характеризують розкриття тріщини. Ця система розв'язувалась чисельно з використанням процедури послідовних наближень та квадратурної формули Гауса – Чебишева. Для часткового випадку однорідного матеріалу наведені результати розрахунку довжини зони контакту берегів тріщини та її розкриття в залежності від кута нахилу зовнішнього навантаження.

Список використаних джерел

1. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – V. **44**. – P. 631-636.
2. *Simonov I. V.* Interface crack in homogeneous stress field. // Mechanics of composite materials. – 1985. – No 6. – P. 969-976. (in Russian).
3. *Ostrik V. I., Ulitko A. F.* A crack on the interface of two dissimilar half-planes // Math. Methods and Phis.-Mech. Fields. – 2000. – V. **43**, No 2. – P. 119-126. (in Ukrainian).
4. *Chao R.*, *Laws N.* Closure of an arc crack in an isotropic homogeneous material due to uniaxial loading // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1992. – V. **45**. – P. 629-640.
5. *Chao R.*, *Laws N.* The fiber-matrix interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1997. – V. **64**. – P. 992-999.
6. *Ulitko A. F., Ostrik V. I.* Interface crack on the board of division of circular inclusion and matrix // Physically-Math. Modeling and Information Technologies. – 2006. – No 3. – P. 138-149. (in Ukrainian).
7. *Muskhelishvili N. I.* Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity. – Noordhoff, Groningen, 1963.
8. *Dundurs J.* Discussion // Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME, Series E. – 1969. – V. **36**. – P. 650-652.

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Мартиненко М. А.[1], д. ф.-м. н., проф.

Перша основна задача теорії пружності для тіла з циліндричною тріщиною

Аналітичними методами лінійної теорії пружності розв'язано осесиметричну задачу про напружено-деформований стан просторового тіла, ослабленого математичним розрізом по частині циліндричної поверхні. Задачу зведено до системи двох інтегральних рівнянь Фредгольма.

Ключові слова: просторове пружне тіло, циліндричний розріз, система рівнянь Фредгольма.

[1] Національний університет харчових технологій, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 68
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

M. A. Martynenko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.

The first major problem of the elasticity theory for a body with a cylindrical crack

The axisymmetric problem on stress - strain state of a space body relaxed by mathematical cut on a part of the cylindrical surface is solved by analytical methods of the linear elasticity theory. The problem is reduced to a system of two Fredholm integral equations.

Key Words: spatial elastic body, cylindrical section, system of equations Fredholm.

[1] National University of Food Technologies, 68, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

Вступ

Сучасний комплексний розрахунок на міцність і надійність елементів конструкцій з позиції статичної лінійної механіки руйнування включає три основні етапи:

а) розрахунок напружено-деформованого стану тіла з тріщиною відомої геометрії, яка знаходиться у заданому полі зовнішніх сил;

б) визначення тріщиностійкості чи в'язкості руйнування;

в) вибір критерію руйнування і оцінки міцності конструкцій.

Ця робота присвячена аналізу напружено-деформованого стану просторового тіла, яке послаблене циліндричною тріщиною. Важливе значення такі дослідження мають для оцінки надійності композитних матеріалів типу матриця – циліндричні волокна. В таких матеріалах досить часто спостерігається розрив суцільності на міжфазовій межі, внаслідок чого відбувається послаблення конструкції в цілому. З математичних позицій таке дослідження досить важливе як метод розв'язання мішаних задач математичної фізики.

Нехай на пружний простір з математичною тріщиною, яка лежить на поверхні $S(\rho = \rho_0;\ |z| \le z_0;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ \rho, z, \varphi$ – циліндричні координати), діє осесиметрична система сил на нескінченності. Відповідно до принципу Бюлнера [1] зовнішні сили переносяться на поверхню тріщини, і в подальшому задача зводиться до знаходження полів переміщень і зусиль, які задовольняють граничні умови

$$R_\rho^{(1)} = -R_\rho^{(2)} = f_1(\xi), \quad Z_\rho^{(1)} = -Z_\rho^{(2)} = f_2(\xi), \quad \left(|\xi| < 1,\ s = s_0\right), \tag{1}$$

$$R_\rho^{(1)} = -R_\rho^{(2)},\ Z_\rho^{(1)} = -Z_\rho^{(2)},\ u_\rho^{(1)} = u_\rho^{(2)},\ u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \quad \left(|\xi| > 1,\ s = s_0\right), \tag{2}$$

де R_ρ, Z_ρ, u_ρ, u_z – проекції векторів зусиль і переміщень на поверхні циліндра; верхні індекси визначають фізичні поля у внутрішніх $(\rho \le \rho_0)$ і зовнішніх $(\rho \ge \rho_0)$ областях по відношенні до поверхні циліндра; $\xi = z/z_0$ і $s = \rho/z_0$ – безрозмірні координати; $f_1(\xi) = f_1(-\xi)$, $f_2(-\xi) = -f_2(\xi)$ – задані зусилля на поверхні тріщини.

Складові напружено-деформованого стану у внутрішній області $(s < s_0)$ записуються у вигляді інтегралів Фур'є [2, 3]:

$$2Gu_\rho^{(1)} = -z_0 \int_0^\infty \left[b(\lambda)\lambda I_1(\lambda s) + B(\lambda)\lambda s I_0(\lambda s)\right]\cos\lambda\xi d\lambda,$$

© М. А. Мартиненко, 2013

$$2Gu_z^{(1)} = z_0\int_0^\infty \{\lambda b(\lambda)I_0(\lambda s) + B(\lambda)[\lambda s I_1(\lambda s) + 4\frac{m-1}{m}I_0(\lambda s)\}\sin\lambda\xi d\lambda, \quad (3)$$

$$R_\rho^{(1)} = -\int_0^\infty \Big\{b(\lambda)\lambda^2\left[I_0(\lambda s) - I_1(\lambda s)/(\lambda s)\right] + \lambda B(\lambda)\Big[\frac{m-2}{m}I_0(\lambda s) + \lambda s I_1(\lambda s)\Big]\Big\}\cos\lambda\xi d\lambda,$$

$$Z_\rho^{(1)} = \int_0^\infty \{\lambda b(\lambda)I_1(\lambda s) + B(\lambda)\times \Big[\lambda s I_0(\lambda s) + 2\frac{m-1}{m}I_1(\lambda s)\Big]\Big\}\lambda\sin\lambda\xi d\lambda,$$

$$Z_z^{(1)} = \int_0^\infty \{\lambda b(\lambda)I_0(\lambda s) + B(\lambda)\times \Big[\lambda s I_1(\lambda s) + 2\frac{2m-1}{m}I_0(\lambda s)\Big]\Big\}\lambda\cos\lambda\xi d\lambda. \quad (4)$$

де G, m – модуль зсуву і число Пуассона, $b(\lambda)$, $B(\lambda)$ – невідомі щільності; $I_0 = I_0(\lambda s)$, $I_1 = I_1(\lambda s)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду.

Ці ж складові в області $V_2(s > s_0)$ визначаються рівностями (3), (4), тільки в них необхідно I_n замінити відповідно модифікованими функціями Бесселя третього роду (функціями Макдональда) $K_0(\lambda s), [-K_1(\lambda s)]$ [4], невідомі щільності $b(\lambda)$, $B(\lambda)$ щільностями $a(\lambda)$, $A(\lambda)$ і в проекціях R_ρ, Z_ρ загальний знак поміняти на протилежний.

Умова неперервності зусиль на всій поверхні циліндра $s = s_0$ дозволяє виключити із подальшого розгляду невідомі щільності, наприклад, внутрішньої задачі

$$b(\lambda) = \frac{1}{\lambda\Delta}\{\lambda a(\lambda)\times \Big[\lambda^2 {s_0}^2(I_0K_0 + I_1K_1) + 2\frac{m-1}{m}(I_1K_1 + 1)\Big] + A(\lambda)\Big(2\frac{m-1}{m}\frac{m-2}{m} - \lambda^2{s_0}^2\Big)\Big\}, \quad (5)$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\Delta}\{-\lambda a(\lambda) + A(\lambda)\times \Big[2\frac{m-1}{m}(K_1I_1 - 1) + \lambda^2{s_0}^2(I_0K_0 + I_1K_1)\Big]\Big\},$$

де

$$\Delta = \lambda^2{s_0}^2\Big[\big((I_0)^2 - (I_1)^2\big)\Big] - 2\frac{m-1}{m}(I_1)^2, \quad I_n = I_n(\lambda s_0), \quad K_n = K_n(\lambda s_0). \quad (6)$$

Визначник Δ (6) досліджувався в роботах [5, 6], де відмічається, що він не дорівнює нулеві.

Задовольняючи граничні умови (1), (2) приходимо до взаємопов'язаної системи парних інтегральних рівнянь з тригонометричними ядрами

$$2G(u_\rho^{(1)} - u_\rho^{(2)})z_0^{-1} = = -2\frac{m-1}{m}\int_0^\infty A_1(\lambda, s_0)\cos\lambda\xi d\lambda = 0, \quad (7)$$

$$2G(u_z^{(1)} - u_z^{(2)})z_0^{-1} = = 2\frac{m-1}{m}\int_0^\infty A_2(\lambda, s_0)\frac{1}{\Delta}\lambda a(\lambda)\sin\lambda\xi d\lambda = 0 \quad (\xi > 1),$$

$$\int_0^\infty \{\lambda a(\lambda)(K_0 + K_1/(\lambda s_0)) + A(\lambda)\Big(\frac{m-2}{m}K_0 - \lambda s_0 K_1\Big)\Big\}\lambda\cos\lambda\xi d\lambda = -f_1(\xi),$$

$$\int_0^\infty \Big\{\lambda a(\lambda)K_1 - A(\lambda)\Big(\lambda s_0 K_0 - 2\frac{m-1}{m}K_1\Big)\Big\}\times \lambda\sin\lambda\xi d\lambda = -f_2(\xi) \quad (\xi<1). \quad (8)$$

$$A_1(\lambda, s_0) = \frac{1}{\Delta}\Big[\lambda a(\lambda)I_1 + A(\lambda)\Big(2\frac{m-1}{m}I_1 - \lambda s_0 I_0\Big)\Big],$$

$$A_2(\lambda, s_0) = \frac{1}{\lambda s_0\Delta}\{\lambda a(\lambda)(I_1 - \lambda s_0 I_0) + A(\lambda)\times \Big[(4\frac{m-1}{m} + \lambda^2 s_0)I_1 - 3\frac{m-2}{m}\lambda s_0 I_0\Big]\Big\}. \quad (9)$$

Розв'язок системи (7), (8) шукаємо у вигляді спеціально побудованих інтегральних операторів

$$A_1(\lambda, s_0) = \int_0^1 \varphi(t)J_0(\lambda t)dt = S_1,$$

$$A_2(\lambda, s_0) = \int_0^1 \psi(t)J_1(\lambda t)dt = S_2, \quad (10)$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ та їх похідні неперервні при $0 \le t \le 1$. На підставі інтегралів [7]

$$\int_0^\infty \cos\tau z\, J_0(\tau t)dt = \frac{H(t-z)}{\sqrt{t^2 - z^2}},$$

$$\int_0^\infty \sin\tau z\, J_1(\tau t)d\tau = \frac{z}{t}\frac{H(t-z)}{\sqrt{t^2 - z^2}} \quad (11)$$

рівняння [7] задовольняються тотожно. Після розв'язання системи [10] невідомі щільності запишуться у вигляді

$$\lambda a(\lambda) = -\left[\left(4\frac{m-1}{m} + \lambda^2 {s_0}^2\right) I_1 - 3\frac{m-2}{m}\lambda s_0 I_0\right] S_1 + \left(2\frac{m-1}{m} I_1 - \lambda s_0 I_0\right)\lambda s_0 S_2;$$

$$A(\lambda) = (I_1 - \lambda s_0 I_0) S_1 - \lambda s_0 I_1 S_2. \qquad (12)$$

Якщо скористатися граничними умовами (1) і замінити щільності $\alpha(\lambda)$ і $A(\lambda)$ їх виразами через інтегральні оператори, то прийдемо до функціональних рівнянь такого вигляду:

$$\int_0^\infty \left[a_{11}(\lambda) S_1 + a_{12}(\lambda) S_2\right] \lambda \cos\lambda\xi \, d\lambda = -f_1(\xi);$$

$$\int_0^\infty \left[a_{21}(\lambda) S_1 + a_{22}(\lambda) S_2\right] \lambda \sin\lambda\xi \, d\lambda = -f_2(\xi) \quad (0 \le \xi < 1), \qquad (13)$$

де

$$a_{11}(\lambda) = 2\lambda s_0 (I_0 K_0 - I_1 K_1) + \left(\frac{3m-2}{m} + \lambda^2 {s_0}^2\right)(K_1 I_0 - I_1 K_0) - 4\frac{m-1}{m} I_1 K_1 / (\lambda s_0),$$

$$a_{12}(\lambda) = \lambda^2 {s_0}^2 (K_1 I_1 - I_0 K_0) + \lambda s_0 (I_1 K_0 - I_0 K_1) + 2\frac{m-1}{m} I_1 K_1, \qquad (14)$$

$$a_{21}(\lambda) = -a_{12}(\lambda),\ a_{22}(\lambda) = \lambda^2 {s_0}^2 (K_0 I_1 - I_0 K_1).$$

Якщо перше рівняння проінтегрувати по змінній ξ, а потім в обох рівняннях замінити функцію $\sin\lambda\xi$ її інтегральним зображенням [7]

$$\sin\tau z = \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{x^2 I_1(\tau x)\,dx}{\sqrt{z^2 - x^2}} = \tau \int_0^x \frac{x I_0(\tau x)\,dx}{\sqrt{z^2 - x^2}},$$

то після заміни порядків інтегрування і низки перетворень приходимо до такої системи рівнянь Абеля:

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \int_0^1 \left[\varphi(t) L_{11}(t,x) + \psi(t) L_{12}(t,x)\right] dt = -F_1(\xi),$$

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \int_0^1 \left[\varphi(t) L'_{21}(t,x) + \psi(t) L'_{22}(t,x)\right] dt = -f_2(\xi), \qquad (15)$$

де

$$L_{11}(t,x) = \int_0^\infty a_{11}(\lambda)\lambda x J_0(\lambda t) J_0(\lambda x)\, d\lambda,$$

$$L_{12}(t,x) = \int_0^\infty a_{12}(\lambda)\lambda x J_1(\lambda t) J_0(\lambda x)\, d\lambda,$$

$$L'_{21}(t,x) = \int_0^\infty a_{21}(\lambda)\lambda^2 x J_0(\lambda t) J_0(\lambda x)\, d\lambda,$$

$$L'_{22}(t,x) = \int_0^\infty a_{22}(\lambda)\lambda^2 x J_1(\lambda t) J_0(\lambda x)\, d\lambda, \qquad (16)$$

$$F_1(\xi) = \int f_1(\xi) d\xi + C_1.$$

Подальше перетворення рівнянь (13) неможливе без дослідження асимптотичної поведінки $\alpha_{ij}(\lambda)$ при $\lambda >> 1$. Якщо скористатися наближеними формулами для функцій Бесселя [4] при $x >> 1$:

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \times \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{1!8x} + \frac{\left(4n^2 - 1\right)\left(4n^2 - 3^2\right)}{2!(8x)^2} + \ldots\right],$$

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \times \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{1!8x} + \frac{\left(4n^2 - 1\right)\left(4n^2 - 3^2\right)}{2!(8x)^2} + \ldots\right], \qquad (17)$$

то отримаємо

$$a_{11}(\lambda) \approx \frac{1}{2}, \quad a_{12}(\lambda) \approx \frac{m-4}{4m}\frac{1}{\lambda s_0},$$

$$a_{21}(\lambda) \approx -\frac{m-4}{4m}\frac{1}{\lambda s_0},$$

$$a_{22}(\lambda) \approx -\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\frac{1}{\lambda^2 {s_0}^2}. \qquad (18)$$

Розв'язок рівнянь Абеля знаходимо з формул

$$\int_0^s \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} = f(s),$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{s f(s)\,ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \qquad (19)$$

В кінцевому результаті задача зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма

$$\frac{1}{2}\varphi(x) + \int_0^1 \left[\varphi(t) K_{11}(t,x) + \psi(t) K_{12}(t,x)\right] dt = \Phi_1(x),$$

$$-\frac{1}{2}\psi(x)+\int_0^1\left[\varphi(t)K_{21}(t,x)+\psi(t)K_{22}(t,x)\right]dt= \\ =\Phi_2(x), \tag{20}$$

де

$$K_{11}(t,x)=\int_0^\infty\left[a_{11}(\lambda)-\frac{1}{2}\right]x\lambda J_0(\lambda t)J_0(\lambda x)d\lambda,$$

$$K_{12}(t,x)=\frac{m-4}{4ms_0}\frac{x}{t}H(t-x)+ \\ +\int_0^\infty\left[a_{12}(\lambda)-\frac{m-4}{4m\lambda s_0}\right]x\lambda J_1(\lambda t)J_0(\lambda x)d\lambda,$$

$$K_{21}(t,x)=-\frac{m-4}{4ms_0}H(x-t)+ \\ +\int_0^\infty\left[a_{22}(\lambda)+\frac{m-4}{4m\lambda s_0}\right]x\lambda J_0(\lambda t)J_1(\lambda x)d\lambda, \tag{21}$$

$$K_{22}(t,x)=-\frac{3}{32{s_0}^2}\begin{cases}x/t, & t>x\\ t/x, & x>t\end{cases}+ \\ +\int_0^\infty\left[a_{22}(\lambda)+\frac{1}{2}+\frac{3}{16\lambda^2{s_0}^2}\right]x\lambda J_1(\lambda t)J_1(\lambda x)d\lambda;$$

$$\Phi_1(x)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{sF_1(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}}, \\ \Phi_2(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{sf_2(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}};\qquad F_1'(s)=f_1(s). \tag{22}$$

При виведенні рівнянь (15) застосовувався метод Кумера покращення збіжності невласних інтегралів, а також значення інтегралів в класі узагальнених функцій такого вигляду:

$$\int_0^\infty J_1(\tau x)J_0(\tau t)d\tau=\frac{1}{\tau}H(t-x),$$

$$\int_0^\infty J_0(\tau x)J_0(\tau t)d\tau=\frac{1}{t}\delta(t-x).$$

В цій роботі приведена методика зведення другої основної мішаної задачі математичної теорії пружності для просторового тіла з циліндричною тріщиною до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Список використаних джерел

1. *Mushelyshvyly N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Moscow: Nauka, 1966. – 707 p. (in Russian).
2. *Ulytko A. F.* The method of own vector functions in the spatial problems of the theory of elasticity. – Kiev: Naukova dumka, 1979. – 264 p. (in Russian).
3. *Martynenko M. A.* Mixed spatial problems of mathematical theory of elasticity: monograph. – Kiyv, 2012. – 376 p. (in Ukrainian).
4. *Lebedev N. N.* Special functions and applications. – Leningrad: Fyzmatgiz, 1963. – 358 p. (in Russian).
5. *Lure A. I.* Spatial problems of the theory of elasticity. – M.: Gostehizdat, 1955. – 492 p. (in Russian).
6. *Ulytko A. T.* Axisymmetric deformation of an elastic paraboloid of revolution // Add. USSR. August. A. – 1968. – № 12. – P. 17-20. (in Russian).
7. *Watson G. N.* Theory of Bessel functions. – Moscow: IL, 1949. – 798 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 20.05.13

УДК 539.3

Мартиненко М. А.[1], д. ф.-м. н., проф.

Аналітичний аналіз напружено-деформованого стану в тілі з циліндричною тріщиною

Знайдено аналітичні формули для полів напружень і переміщень в довільній точці пружного середовища з циліндричною тріщиною. Отримано вирази для знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень, а також проаналізовано локальне поле напружень і переміщень в околі тріщини.

Ключові слова: коефіцієнти інтенсивності напружень, локальне фізичне поле.

[1] Національний університет харчових технологій, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 68
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

M. A. Martynenko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.

Analytical analysis of the stress-strain state of a cylindrical body with a crack

The analytical formulas for the fields of stresses and displacements at an arbitrary point of an elastic medium with a cylindrical crack were obtained. The expressions for the stress intensity factors were constructed. The local fields of stresses and displacements in the vicinity of the crack were analyzed.

Key Words: intensity factors and stresses, local physical field.

[1] National University of Food Technologies, 68, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

Дослідження полів переміщень і напружень в тілі з циліндричною тріщиною є ключовою задачею при оцінці міцності та надійності конструкцій, ослаблених такими дефектами, методами механіки руйнування. Ця задача потребує значно більше аналітичних досліджень, ніж зведення проблеми до системи інтегральних рівнянь Фредгольма.

На підставі рівностей (4), (12) із [1] вирази для проекцій вектора зусиль $\overrightarrow{F_n}$ на поверхні циліндра поза розрізом запишемо у вигляді

$$R_\rho = \int_0^\infty \left[a_{11}(\lambda)S_1 + a_{12}(\lambda)S_2\right]\lambda\cos\lambda\xi\, d\lambda \quad (\xi > 1);$$

$$Z_\rho = \int_0^\infty \left[a_{21}(\lambda)S_1 + a_{22}(\lambda)S_2\right]\lambda\sin\lambda\xi\, d\lambda, \qquad (1)$$

де $a_{ij}(\lambda)$ знаходяться з формул (14) [1].

Безпосередній розрахунок зусиль на поверхні циліндра поза розрізом неможливий, так як асимптотичний аналіз невласних інтегралів (1) показує, що в точці $\xi = 1$ зусилля мають кореневу особливість. Якщо скористатися інтегральним представленням [1]

$$\sin\tau z = \tau\int_0^z \frac{xJ_0(\tau x)dx}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

тригонометричних функцій і поміняти порядки інтегрування, то прийдемо до інтегральних рівнянь Абеля такого вигляду:

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi - x^2}}\left\{\int_0^1 \varphi(t)\left[\int_0^\infty L_{ij}J_0(\tau t)J_0(\tau x)dx\right]\right\}dt = F(\xi).$$

Так як точка $\xi = 1$ є особливою точкою, то зовнішній інтеграл будемо знаходити з граничної рівності

$$\int_0^\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\xi}\right\}.$$

Після низки перетворень отримано такі вирази для зусиль на поверхні циліндра поза розрізом $(\xi > 1)$:

$$R_\rho = -\frac{1}{2}\frac{\xi\varphi(1)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{\xi\left[\Phi_1(x)x^{-1}\right]dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + \int_1^\xi \frac{\xi dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1 \left[\varphi(t)K_{11}(t,x) + \psi(t)K_{12}(t,x)\right]x^{-1}dx\right\} + C,$$

© М. А. Мартиненко, 2013

$$Z_\rho = \frac{1}{2}\frac{\psi(1)}{\sqrt{\xi^2-1}} + \int_0^1 \frac{\Phi_2'(x)dx}{\sqrt{\xi^2-x^2}} + \int_1^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2-x^2}} \times$$
$$\times \left\{ \int_0^1 \left[\varphi(t)K_{21}(t,x) + \psi(t)K_{22}(t,x) \right] dt \right\}. \quad (2)$$

Формули (2) характерні тим, що особливість напружень зосереджена в перших доданках, а інші складові є регулярними. Це дає можливість знайти коефіцієнти інтенсивності напружень із граничних рівностей [2]

$$k_1 = \lim_{l_0 \to 0} \sigma_\rho \Big|_{s=s_0} \sqrt{2l_0} = -\frac{1}{2}\varphi(1)\sqrt{z_0},$$
$$k_2 = \lim_{l_0 \to 0} \sigma_{z\rho} \Big|_{s=s_0} \sqrt{2l_0} = \frac{1}{2}\psi(1)\sqrt{z_0}. \quad (3)$$

де l_0 – найкоротша відстань від точки на поверхні циліндра до граничного кола розрізу.

Складові поля переміщень, наприклад, в довільній точці зовнішньої області $(s > s_0)$ запишуться через інтегральні оператори (10) із [1] у вигляді

$$2Gu_\rho^{(2)}(s,\xi) = z_0 \int_0^\infty \left[\beta_{11}S_1 + \beta_{12}S_2 \right] \cos\lambda\xi\, d\lambda,$$
$$2Gu_z^{(2)}(s,\xi) = z_0 \int_0^\infty \left[\beta_{21}S_1 + \beta_{22}S_2 \right] \sin\lambda\xi\, d\lambda, \quad (4)$$

де

$$\beta_{11} = ass_0K_0I_0 + \frac{3m-2}{m}\lambda s_0I_0K_1 - \lambda sK_0I_1 -$$
$$-\left(4\frac{m-1}{m} + \lambda^2 s_0^{\,2} \right) I_1K_1,$$
$$\beta_{12} = 2\frac{m-1}{m}\lambda s_0I_1K_1 + \lambda^2 ss_0I_1K_0 - \lambda^2 s_0^{\,2}I_0K_1,$$
$$\beta_{21} = \lambda^2 ss_0I_0K_1 - \lambda^2 s_0^{\,2}K_0I_1 - \lambda sI_1K_1 -$$
$$-\frac{m-2}{m}\lambda s_0I_0K_0,$$
$$\beta_{22} = \lambda s_0 \left(\lambda sI_1K_1 - \lambda s_0I_0K_0 - 2\frac{m-1}{m}I_1K_0 \right). \quad (5)$$

Зауважимо, що в рівностях (5) функції I_n залежать від аргументу λs_0, а функції Макдональда K_n – від λs $(s > s_0)$.

Для дослідження (4) в околі граничного кола циліндричного розрізу необхідно знайти асимптотику виразів (5) при $\lambda \gg 1$. Після низки перетворень отримаємо

$$\beta_{11} \approx \frac{1}{2}e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) + 2\frac{m-1}{m} \right] = \overline{\beta_{11}},$$
$$\beta_{12} \approx \frac{1}{2}e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) + \frac{m-2}{m} \right] = \overline{\beta_{12}},$$
$$\beta_{21} \approx \frac{1}{2}e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) - \frac{m-2}{m} \right] = \overline{\beta_{21}},$$
$$\beta_{22} \approx \frac{1}{2}e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) - 2\frac{m-1}{m} \right] = \overline{\beta_{22}}. \quad (6)$$

Якщо додати і відняти під знаками інтегралів вирази $\overline{\beta_{ij}}$ (6), то після відповідного аналізу доказано, що інтеграли вигляду

$$\int_0^\infty \left(\beta_{ij} - \overline{\beta_{ij}} \right) S_{1,2} \sin\lambda\xi\, d\lambda \quad (7)$$

в околі точки $(s_0, 1)$ мають порядок $O(r^p)$ $(p > 1)$ і є регулярними.

Проведемо асимптотичне інтегрування невласних інтегралів (4) при s, ξ близьких до $s_0, 1$. Для цього введемо локальну полярну систему координат r, γ так, як показано на рис. 1.

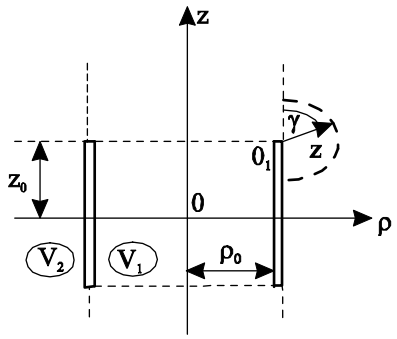


Рис. 1

Якщо в табличних інтегралах [3]

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(tx) x^{-1} dx = \left(\sqrt{\alpha^2+t^2} - \alpha \right)^\nu (vt)^{-1} \quad (\mathrm{Re}\,\nu > 0),$$
$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(tx) x^{-1} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+t^2}} \left(\sqrt{\alpha^2+t^2} - \alpha \right)^\nu$$
$$(\mathrm{Re}\,\nu > -1,\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0),$$
$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_1(tx) x dx = t\left(\alpha^2+t^2 \right)^{-3/2} \quad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0),$$
$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_0(tx) x dx = \alpha\left(\alpha^2+t^2 \right)^{-3/2} \quad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0)$$

покласти

$$\alpha = s - s_0 + i\xi, \quad t = 1, \quad \xi \approx 1, \quad s \approx s_0,$$

то після ряду перетворень отримаємо наближені значення інтегралів такого типу

$$\int_0^\infty e^{-\tau(s-s_0+i\xi)} J_0(\tau)\tau^{-1} d\tau \approx -\sqrt{2r}e^{i\gamma/2},$$

$$\int_0^\infty e^{-\tau(s-s_0+i\xi)} J_1(\tau) d\tau \approx -(2r)^{-1/2} e^{-i\gamma/2}. \qquad (8)$$

На їх підставі проводиться асимптотичне інтегрування виразів

$$\int_0^\infty \overline{\beta_{ij}}\, S_{1,2} \sin\lambda\xi\, d\lambda.$$

Після низки громіздких перетворень локальне поле переміщень записується у вигляді

$$2Gu_\rho^{(2)} \approx \sqrt{2r}\left\{k_1\left(2\frac{m-1}{m}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\right) + k_2\left(\frac{1}{2}\sin\gamma\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{m-2}{m}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\right\},$$

$$2Gu_z^{(2)} \approx \sqrt{2r}\left\{k_1\left(\frac{1}{2}\sin\gamma\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{m-2}{m}\cos\frac{\gamma}{2}\right) + k_2\left(\frac{1}{2}\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2} + 2\frac{m-1}{m}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\right\}. \qquad (9)$$

Здійснюючи перехід до полярних складових вектора переміщень, отримаємо

$$2Gu_r^{(2)} \approx \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}}\left\{k_1\left[(2k-1)\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{3\gamma}{2}\right] - k_2\left[(2k-1)\sin\frac{\gamma}{2} - 3\sin\frac{3\gamma}{2}\right]\right\},$$

$$2Gu_\gamma^{(2)} \approx \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}}\left\{k_1\left[-(2k+1)\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{3\gamma}{2}\right] - k_2\left[(2k+1)\cos\frac{\gamma}{2} - 3\cos\frac{3\gamma}{2}\right]\right\}, \qquad (10)$$

де $k = (3m-4)/m$, а k_1, k_2 визначаються формулами (3).

На підставі формул (4), (12) із [1] показано, що компоненти тензора напружень в довільній точці зовнішньої області V_2 $(s > s_0)$ визначаються інтегралами Фур'є

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = \int_0^\infty \left(A_{11}S_1 + A_{12}S_2\right)\lambda\cos\lambda\xi\, d\lambda,$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \int_0^\infty \left(A_{31}S_1 + A_{32}S_2\right)\lambda\cos\lambda\xi\, d\lambda,$$

$$\sigma_{\rho z}^{(2)} = \int_0^\infty \left(A_{21}S_1 + A_{22}S_2\right)\lambda\sin\lambda\xi\, d\lambda, \qquad (11)$$

де

$$A_{11} = 2\lambda s_0 I_0 K_0 - \left(4\frac{m-1}{\lambda s m} + \lambda s + \lambda s_0{}^2 s^{-1}\right) I_1 K_1 + \frac{3m-2}{m}\left(s_0 s^{-1} I_0 K_1 - I_1 K_0\right) + +\lambda^2 s_0 (s I_0 K_1 - s_0 I_1 K_0),$$

$$A_{12} = \lambda s_0 \times \left(I_1 K_0 - \frac{s_0}{s} I_0 K_1 + \lambda s I_1 K_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 + 2\frac{m-1}{m}\frac{I_1 K_1}{\lambda s}\right),$$

$$A_{21} = \lambda s I_1 K_0 - \lambda s_0 I_0 K_1 + +\lambda^2 s_0 (s_0 I_1 K_1 - s I_0 K_0) + 2\frac{m-1}{m} I_1 K_1,$$

$$A_{22} = \lambda^2 s_0 (s_0 I_0 K_1 - s I_1 K_0),$$

$$A_{31} = \frac{2}{m} K_0 I_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 + +\lambda^2 s (s K_1 I_0 - s_0 K_0 I_1) - \lambda s K_1 I_1,$$

$$A_{32} = \lambda s_0 \left[\lambda s I_1 K_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 - 2 I_1 K_1\right]. \qquad (12)$$

У формулах (12) функції Макдональда і Бесселя залежать відповідно від аргументів λs і λs_0.

Асимптотичний аналіз виразів A_{ij} дає наближення такого вигляду:

$$A_{11} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)}\left[\lambda(s-s_0)+1\right] = \overline{A_{11}},$$

$$A_{12} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)}\lambda(s-s_0) = \overline{A_{12}},$$

$$A_{21} \approx -\frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)}\lambda(s-s_0) = \overline{A_{21}},$$

$$A_{22} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)}\left[1-\lambda(s-s_0)\right] = \overline{A_{22}}, \qquad (13)$$

$$A_{31} \approx -\overline{A_{22}}; \quad A_{32} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)}\left[\lambda(s-s_0)-2\right] = \overline{A_{32}}.$$

Саме ці складові і визначають особливість полів напружень в околі граничного кола циліндричного розрізу. Якщо інтеграли S_1, S_2 проінтегрувати частинами, то їх перше наближення матиме вигляд

$$\int_0^1 \varphi(\tau) J_1(\tau t)\, d\tau \approx -\frac{1}{\tau}\varphi(1) J_0(\tau) + \ldots.$$

Наступний доданок при інтегруванні особливостей не дає.

Після низки перетворень складові тензора напружень в полярній системі координат були отримані у вигляді

$$\sigma_{rr} \approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times$$
$$\times\left[k_1(3-\cos\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}+k_2(3\cos\gamma-1)\sin\frac{\gamma}{2}\right]+O(\sqrt{r})$$
$$\sigma_{\gamma\gamma} \approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times$$
$$\times\left[k_1(1+\cos\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}-3k_2\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\right]+O(\sqrt{r})$$
$$\sigma_{r\gamma} \approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times \qquad (14)$$
$$\times\left[k_1\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}+k_2(3\cos\gamma-1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]+O(\sqrt{r}).$$

Формули (10), (14) мають місце в областях V_1 і V_2.

Аналіз (10), (14) показує, що в околі граничного кола циліндричного розрізу поля напружень і переміщень відповідають стану плоскої деформації, і, як показано в [4], це твердження має місце для просторової тріщини довільної геометрії. Цей висновок співпадає з відомим класичним результатом, отриманим Снеддоном [5] при аналізі локального напружено-деформованого стану в околі монетоподібної тріщини.

Від постановки задачі до отримання асимптотичних формул (10), (14) необхідно було виконати не одну сотню аналітичних перетворень. Найменша похибка методичного характеру або алгебраїчного характеру на любому з етапів перетворень обов'язково б привела до похибки в формулах (10), (14), а значить і до спотворення фізичної суті задачі. Тобто, локальні фізичні поля такого класу задач є найнадійнішим критерієм достовірності методів аналітичного розв'язання від постановки задачі до кінцевих результатів.

Числові результати отримані для найбільш розповсюдженого на практиці випадку, коли пружний простір знаходиться під радіальними рівномірними зусиллями.

Показано, що із двох розрізів однакової площі, той розріз буде більш небезпечним у якого параметр $s_0' > s_0''$.

Список використаних джерел

1. *Martynenko M. A.* The first major problem on the theory of elasticity for a body with a cylindrical crack // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2013. – No 3. (in Ukrainian).
2. *Panasiuk V.* The limit equilibrium of elastic bodies with cracks – Kiyv: Naukova dumka, 1968. – 246 p. (in Russian).
3. *Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev S. I.* Integrals and series. Special Functions– Moscow: Nauka, 1983. – 752 p. (in Russian).
4. *Martynenko M. A.* Mixed spatial problems of mathematical theory of elasticity: monograph. – Kiyv, 2012. – 376 p. (in Ukrainian).
5. *Sneddon I.* Fourier transformation. – Moscow: IL, 1966. – 667 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 20.05.13

УДК 539.3

Маципура В. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Вовк І. В.[2], д. ф.-м. н., проф.,
Трунов О. О.[1], аспірант

Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі

У статті розглянуто поширення звукової хвилі в криволінійному хвилеводі. Визначені дисперсійні співвідношення для хвилеводу з жорсткими і м'якими межами. Побудовані частотні залежності фазових та групових швидкостей мод криволінійного хвилеводу. Проведено порівняльний аналіз власних форм криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів.

Ключові слова: криволінійний хвилевід, структура мод, дисперсійні криві.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: mnivtt@gmail.com,
trunov.olexandr@gmail.com
[2] Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4

V. T. Matsipura[1], Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.,
I. V. Vovk[2], Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.,
O. O. Trunov[1], PhD student

Wave propagation in the bent waveguide

The sound wave propagation in the bent waveguide was considered. The dispersion curves in the waveguide with hard and soft boundary were determined. Frequency and phase relationships of modes in the bent waveguide were constructed. The comparative analysis of modes in the bent waveguide and in straight waveguides was done.

Key Words: bent waveguide, wave mod structure, dispersion curves.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: mnivtt@gmail.com,
trunov.olexandr@gmail.com
[2] Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabova st., 8/4

Вступ

Розглянемо плоский хвилевід, поверхні якого на деякій ділянці являють собою дуги кола, рис. 1. До криволінійної ділянки примикають плоскопаралельні хвилеводи. Оскільки такі структури часто зустрічаються в конструкціях акустичних і електромагнітних хвилеводів, то інтерес до дослідження хвильового поля в них не слабшає (див., наприклад, [1, 2]).

Для опису геометрії хвилеводу і подальшої побудови розв'язку задачі поширення гармонічної хвилі в такому хвилеводі введемо три системи координат: дві декартові (x, y), (x', y') і полярну (r, φ) з загальним центром у точці O. Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені r_1 та r_2. Ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою і дорівнює $h = r_2 - r_1$. Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений як φ_0. Всі поверхні хвилеводу будемо вважати або акустично жорсткими, або акустично м'якими. Хвилевід наповнений ідеальною рідиною, яка має густину ρ та швидкість звуку c. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

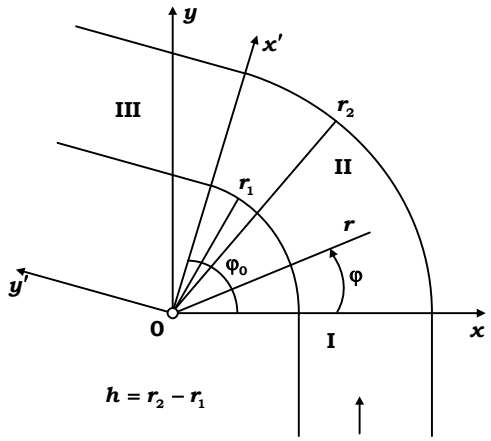


Рис. 1. Геометрія хвилеводу

Метод розв'язання

Природнім чином вся область існування звукового поля розбивається на три області: області I та III – плоскопаралельні хвилеводи, область II – ділянка хвилеводу з криволінійними поверхнями. Нехай в області I в додатному напрямку осі Oy поширюється m-та мода плоскопаралельного

© В. Т. Маципура, І. В. Вовк, О. О. Трунов, 2013

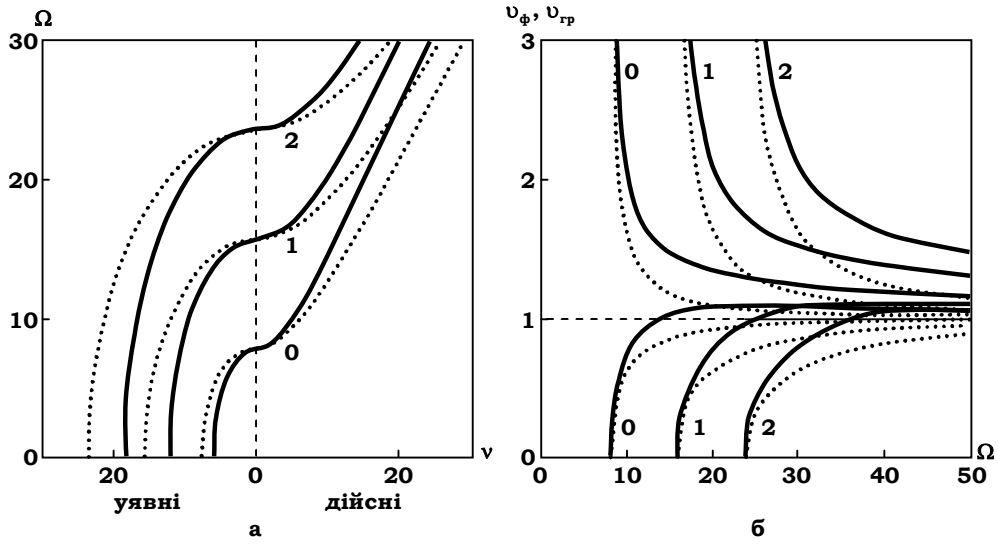


Рис. 2. Дисперсійні криві (а) та частотні залежності фазових (верхня група кривих) і групових (нижня група кривих) швидкостей (б) для криволінійного хвилеводу з акустично м'якими межами, $q = 0{,}6$

хвилеводу. Тоді поля в областях I и III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод плоскопаралельного хвилеводу. Для хвилеводу з акустично жорсткими поверхнями поля мають вигляд

$$p_{\mathrm{I}} = \cos\left(\alpha_m\left(x - r_1\right)\right)\exp\left(i\gamma_m y\right) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\alpha_n\left(x - r_1\right)\right)\exp\left(-i\gamma_n y\right), \qquad (1)$$

$$p_{\mathrm{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\alpha_n\left(x' - r_1\right)\right)\exp\left(i\gamma_n y'\right), \qquad (2)$$

де

$$\alpha_n = n\pi/h\,,\ \ \gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}\,,\ \ k = \omega/c\,.$$

Для хвилеводу з акустично м'якими межами у формулах (1), (2) функції косинуса, що визначають власні форми мод, замінюються на функції $\sin\left(\alpha_n\left(x - r_1\right)\right)$, де $\alpha_n = (n+1)\pi/h$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Перед тим як записати поле в області II визначимо вираз для нормальних хвиль криволінійної частини хвилеводу. Частковий розв'язок рівняння Гельмгольца в полярних координатах для області II має вигляд (див. [3])

$$p = \left[J_\nu(kr) + E_\nu Y_\nu(kr)\right]\exp\left(i\nu\varphi\right), \qquad (3)$$

де $J_\nu(kr)$ і $Y_\nu(kr)$ – функції Бесселя і Неймана ν-го порядка, E_ν і ν – довільні сталі.

Використовуючи граничні умови на жорстких поверхнях області II ($\partial p/\partial r = 0$ при $r = r_1$ і $r = r_2$), визначаємо сталу $E_\nu = -J'_\nu(kr_2)/Y'_\nu(kr_2)$ та приходимо до дисперсійного рівняння, яке встановлює зв'язок між частотою $\omega = kc$ та сталою поширення ν:

$$J'_\nu\left(kr_2\right)Y'_\nu\left(kr_1\right) - J'_\nu\left(kr_1\right)Y'_\nu\left(kr_2\right) = 0\,. \qquad (4)$$

Штрих означає похідну по аргументу.

Аналогічно, використовуючи граничні умови на м'яких поверхнях області II ($p = 0$ при $r = r_1$ і $r = r_2$), визначаємо константу $E_\nu = -J_\nu(kr_2)/Y_\nu(kr_2)$ і приходимо до такого дисперсійного рівняння:

$$J_\nu\left(kr_2\right)Y_\nu\left(kr_1\right) - J_\nu\left(kr_1\right)Y_\nu\left(kr_2\right) = 0\,. \qquad (5)$$

На рис. 2, *а* побудовано дисперсійні криві для акустично м'яких поверхонь хвилеводу, а на рис. 3, *а* – для хвилеводу з жорсткими стінками. Вздовж осі ординат відкладемо безрозмірну частоту $\Omega = kr_2 = \omega r_2/c$, вздовж осі абсцис – сталу поширення ν. Радіус $r_1 = r_2 q$, де стала $q < 1$ (в даному випадку $q = 0{,}6$). Точкові криві відповідають плоскому хвилеводу з тим самим, що і у криволінійного хвилеводу, поперечним розміром. Цифри поблизу кривих визначають номер нормальної хвилі. Як бачимо, якщо критичні частоти мод криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів з графічною точністю співпадають, то подальший хід кривих відрізняється. Природно цей факт знаходить своє відображення при побудові частотних залежностей фазових та групових швидкостей нормальних хвиль (рис. 2, *б*; 3, *б*).

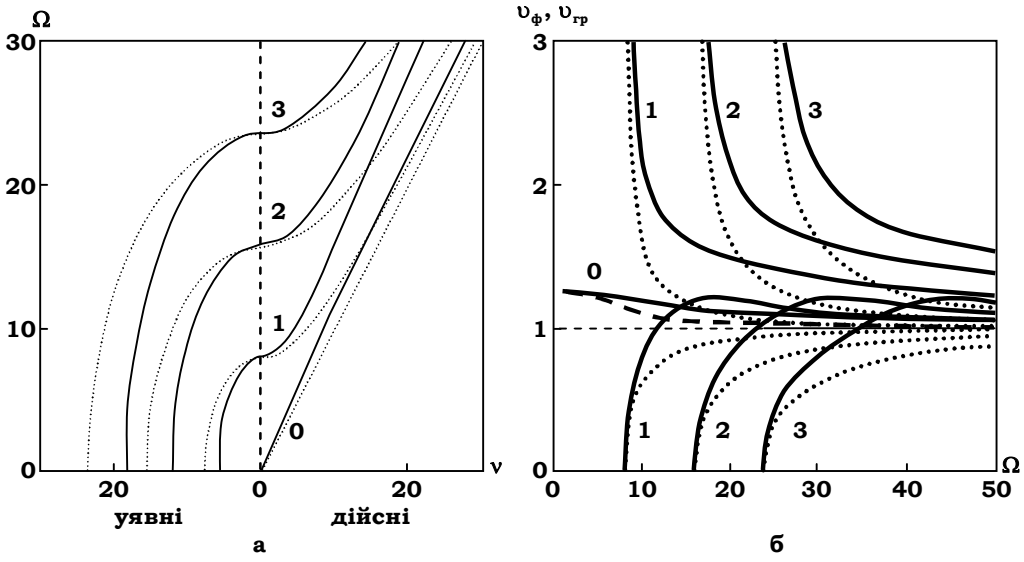


Рис. 3. Розрахунки для акустично жорсткого хвилеводу

Провівши на рис. 2, *а* чи рис. 3, *а* горизонтальну пряму, яка відповідає заданому значенню частоти, визначаємо тим самим скінченне число однорідних і нескінченне число неоднорідних нормальних хвиль. Їх суперпозиція дозволить описати довільне поле в криволінійній частині хвилеводу.

Таким чином, *n*-ту моду хвилеводу можна продати у вигляді

$$p_n = R_{\nu_n}(kr)\exp\left(i\nu_n\varphi\right), \qquad (6)$$

де власні форми мод для акустично жорсткого хвилеводу записуються як

$$R_{\nu_n}\left(kr\right) = J_{\nu_n}\left(kr\right) - \frac{J'_{\nu_n}\left(kr_2\right)}{Y'_{\nu_n}\left(kr_2\right)} Y_{\nu_n}\left(kr\right), \qquad (7)$$

а для акустично м'якого хвилеводу

$$R_{\nu_n}\left(kr\right) = J_{\nu_n}\left(kr\right) - \frac{J_{\nu_n}\left(kr_2\right)}{Y_{\nu_n}\left(kr_2\right)} Y_{\nu_n}\left(kr\right). \qquad (8)$$

Як приклад, на рис. 4 (м'які стінки) і рис. 5 (жорсткі стінки) показано профілі розподілу тиску в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу для однорідних і перших неоднорідних мод при $\Omega = kr_2 = 27$ і $q = 0{,}6$. Точкові криві визначають власні форми плоского хвилеводу з тією ж хвильової шириною, що і у криволінійного хвилеводу. Як бачимо, власні форми перших мод зазначених хвилеводів істотно відрізняються.

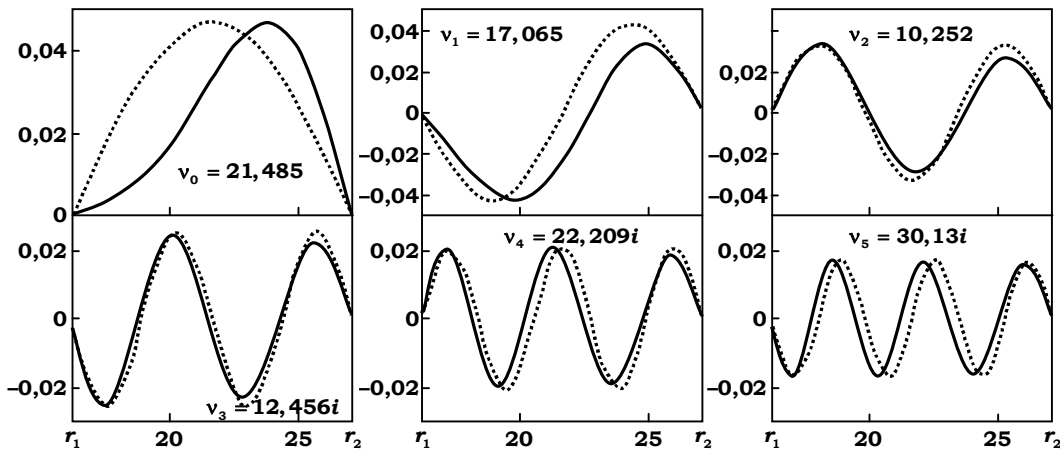


Рис. 4. Розподілу тиску в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу з м'якими поверхнями для однорідних і перших неоднорідних мод

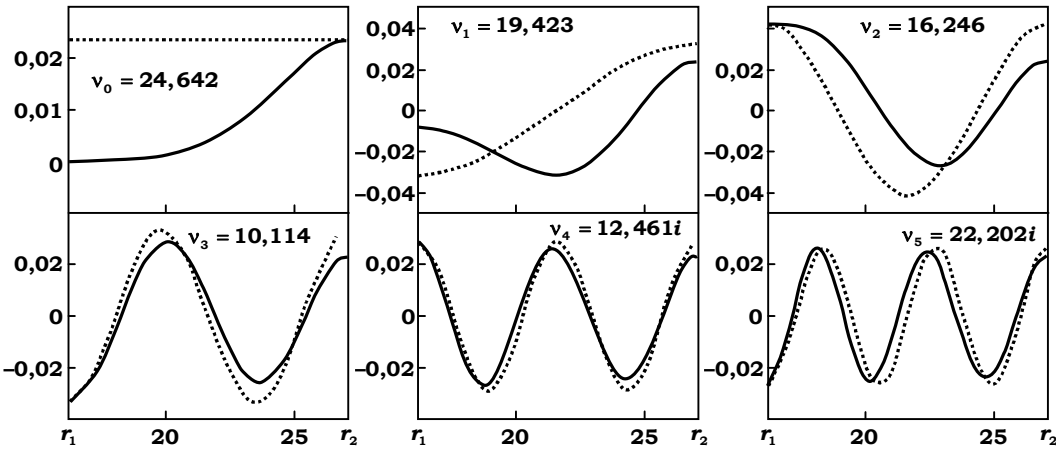


Рис. 5. Розподіл тиску в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу з жорсткими поверхнями для однорідних і перших неоднорідних мод

Отже, поле в області II запишемо у вигляді

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{\nu_n}(kr)\left[B_n \exp(i\nu_n \varphi) + C_n \exp\left(i\nu_n(\varphi - \varphi_0)\right)\right]. \quad (9)$$

Для розв'язання задачі поширення хвилі у хвилеводі слід розписати умови спряження звукових полів на межах часткових областей і скористатися властивістю ортогональності набору функцій $\cos\left(\alpha_n(x - r_1)\right)$, $x \in [r_1, r_2]$ та $R_{\nu_n}(kr)$, $r \in [r_1, r_2]$.

Висновки

В роботі побудовано розв'язок задачі поширення звукових хвиль у криволінійному хвилеводі як для випадку ідеально м'яких меж, так і для ідеально жорстких. Визначені дисперсійні співвідношення і побудовано дисперсійні криві для криволінійної області. Це дало можливість визначити частотні залежності фазових та групових швидкостей мод криволінійного хвилеводу.

Також побудовано розподіл тиску в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу з жорсткими і м'якими поверхнями для однорідних і перших неоднорідних мод. Проведено порівняльний аналіз з модами плоскопаралельного хвилеводу відповідної ширини. Встановлено, що власні форми однорідних мод (особливо перших номерів) криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів можуть суттєво відрізнятися.

Список використаних джерел

1. *Cochran J. A., Pecina R. G.* Mode propagation in continuously curved waveguides. – Radio science, 1966. – **34**. – P. 679-696
2. *Horvat M., Prosen T.* The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2007. – **1**. – 34 p.
3. *Rzhevkin S. N.* Course of lectures on theory of a sound. – Moscow: MGH, 1960. – 336 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 13.05.13

УДК 539.3

Мольченко Л. В.[1], д. ф.-м. н.,
Лоос І. І.[1], к. ф.-м. н.,
Федорченко Л. М.[1], студент

Магнітопружність ортотропної гнучкої конічної оболонки з врахуванням ортотропної електропровідності

Розглядається напружено-деформований стан гнучкої ортотропної конічної оболонки в нестаціонарному магнітному полі. Проведено аналіз отриманих результатів.

Ключові слова: оболонка, магнітне поле, магнітопружність.

[1] Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: Mol_LV@univ.kiev.ua, Loiri@univ.kiev.ua

L. V. Molchenko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.),
I. I. Loos[1], PhD (Phys.-Math.),
L. M. Fedorchenko[1], Stud.

The magnetoelasticity of flexible orthotropic conical shell with orthotropic electrocondactivity

The stress-strain state of flexible orthotropic conical shell in no stationary magnetic field is considered. The analysis results has been carried out.

Key Words: shell, magnetic field, magnetoelastisity.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: Mol_LV@univ.kiev.ua, Loiri@univ.kiev.ua

1. Вступ

Розвиток теорії спряжених полів і, зокрема, теорії електромагнітної взаємодії з середовищем, що деформується, вважається одним із головних напрямків розвитку сучасної механіки твердого тіла.

Механізм взаємодії пружного середовища з електромагнітним полем різнобічний і обумовлений геометричними характеристиками і фізичними властивостями тіла.

У рухомому суцільному середовищі при наявності електромагнітного поля виникають сили Лоренца. Механізм взаємодії через сили Лоренца буде мати місце в струмопровідному тілі і за відсутності феромагнітних, сегнетоелектричних чи п'єзоелектричних властивостей.

2. Основні рівняння

Завдяки такій взаємодії рівняння магнітопружності для подібних тіл в лагранжевих змінних в області, що займає тіло (внутрішня область), запишуться наступним чином [1, 2]:

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\vec{H}=\vec{J}+\vec{J}_{cm},$$

$$\operatorname{div}\vec{B}=0,\quad \operatorname{div}\vec{D}=0; \qquad (1)$$

$$\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}=\rho\left(\vec{F}+\hat{\vec{F}}\right)+\operatorname{div}\hat{\sigma}, \qquad (2)$$

де $\vec{J}_{cm}$ – густина стороннього електричного струму, $\vec{J}$ – густина індукованого електричного струму, $\vec{E}$ – напруженість електричного поля, $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля, $\vec{D}$ – електрична індукція, $\vec{B}$ – магнітна індукція, $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\vec{\upsilon}$ – швидкість деформації; ρ – густина матеріалу; $\vec{F}$ і $\hat{\vec{F}}$ – об'ємна механічна і Лоренца сили відповідно.

При повільній зміні електромагнітного поля у рухомому тілі рівняння Максвелла доповнюються матеріальними співвідношеннями. Це – закон Ома і вирази для пондеромоторних сил в змінних Лагранжа:

$$\vec{B}=\mu_{ij}\vec{H},\quad \vec{D}=\varepsilon_{ij}\vec{E}, \qquad (3)$$

$$\vec{J}=\sigma_{ij}\Gamma F^{T}F^{-1}\left[\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right], \qquad (4)$$

$$\rho\hat{\vec{F}}=\Gamma^{-1}F^{-1}\left[\vec{J}_{cm}\times\vec{B}+\sigma_{ij}\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right], \qquad (5)$$

де

$$F=\frac{\partial x_i}{\partial\xi_j},\quad \Gamma=\det\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}\right|\quad (i,\,j=1,2,3),$$

© Л. В. Мольченко, І. І. Лоос, Л. М. Федорченко, 2013

σ_{ij}, ε_{ij}, μ_{ij} – відповідно тензори електричної провідності, діелектричної та магнітної проникливості, відповідно, з анізотропною електропровідністю.

Для отримання рівнянь магнітопружності тонких оболонок в геометрично нелінійній постановці використовується варіаційний підхід з застосуванням гіпотез Кірхгофа – Лява та електромагнітних гіпотез [2, 3].

Пружні властивості матеріалу оболонки вважаються ортотропними, головні напрямки пружності якого співпадають з напрямками відповідних координатних ліній. Електромагнітні властивості оболонки характеризуються тензорами σ_{ij}, ε_{ij}, μ_{ij}. Виходячи з кристалографії [4], для розглядуваного класу провідних ортотропних тіл з ромбічною кристалічною структурою тензори σ_{ij}, μ_{ij}, ε_{ij} приймають діагональний вигляд.

У випадку конічної оболонки, якщо в якості незалежної змінної прийняти довжину дуги меридіану конуса s (система координат s, θ, γ), то величини, що характеризують геометрію оболонки, запишуться наступним чином:

$$A=1,\ B=r,\ \frac{1}{R_s}=0,\ \frac{1}{R_\theta}=\frac{\sin\varphi}{r},\ r=s\cos\varphi,$$

де A, B – коефіцієнти Ламе серединної поверхні оболонки; R_s, R_θ – головні радіуси кривизн; φ – кут між нормаллю до серединної поверхні та віссю обертання; $r=r(s)$ – радіус паралельного кола.

З урахуванням діагонального вигляду тензорів σ_{ij}, μ_{ij}, ε_{ij}, а також враховуючи описану геометрію оболонки, отримуємо повну систему рівнянь магнітопружності гнучкої ортотропної конічної оболонки з урахуванням електромагнітної ортотропії [2, 5].

3. Чисельний приклад

Розглядається зрізана ортотропна конічна оболонка з бороалюмінію, яка знаходиться у зовнішньому магнітному полі під дією нормальної складової механічної сили $P_\gamma = 5\cdot 10^3 \sin\omega t$ Н / $м^2$ і зовнішнього електричного струму $J_{\theta cm} = 5\cdot 10^5 \times$ $\times \sin\omega t$ $A / м^2$. Товщина оболонки стала. Напружено-деформований стан оболонки визначаємо в залежності від кута φ ($\varphi = \pi/30, \pi/15, \pi/10, \pi/6$).

Параметри оболонки та матеріалу наступні:

$s_0 = 0;\ s_N = 0{,}5\ м;\ \mathrm{e_s} = 22{,}9\cdot 10^{10}\ H / м^2;$

$\mathrm{e}_\theta = 10{,}7\cdot 10^{10} H / м^2;$

$\sigma_s = \sigma_\theta = 0{,}454\cdot 10^8\ (ом\cdot м)^{-1};$

$\sigma_\gamma = 0{,}2\cdot 10^8\ (ом\cdot м)^{-1};$

$\nu_s = 0{,}262;\ \nu_\theta = 0{,}32;\ \mu = 1{,}256\cdot 10^{-6}\ Гн / м;$

$\omega = 314{,}16\ c^{-1};\ \rho = 2600\ кг / м^3;$

$h_0 = 5\cdot 10^{-4}\ м;\ \ B_s^{\pm} = B_\theta^{\pm} = 0{,}1\ T.$

Граничні умови обрані наступним чином:

$$u = M_s = 0;\ Q_s = -200 H / м;\ B_\gamma = 0{,}3\sin\omega t$$

при $s = 0$,

$$u = 0;\ w = 0;\ \vartheta_s = 0;\ B_\gamma = 0$$

при $s = 0{,}5$.

Розв'язок задачі визначався на інтервалі за часом $t = 1\cdot 10^{-2} c$, крок інтегрування за часом обирався рівним $\Delta t = 1\cdot 10^{-3} c$ при 100 точках інтегрування за довжиною оболонки.

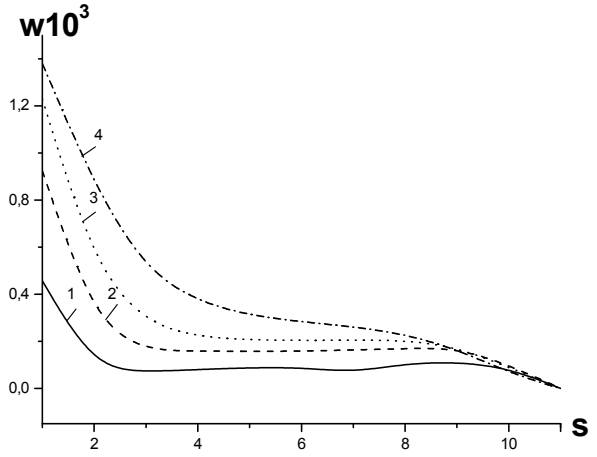


Рис. 1. Максимальні прогини оболонки

На рис. 1 показано зміну максимальних прогинів $w = w(s)/h_0$ для значень кута $\varphi = \pi/6; \pi/10; \pi/15; \pi/30$ – (відповідно графіки 1 – 4). Точки 1 – 11 за віссю s – це точки видачі результатів, які відповідають $s = 0; 0{,}05; 0{,}1; 0{,}15; 0{,}2; 0{,}25; 0{,}3; 0{,}35; 0{,}4; 0{,}45; 0{,}5$. Максимальні значення прогинів досягаються на п'ятій ітерації за часом при $t = 5\cdot 10^{-3} c$, що відповідає вигляду навантаження. Видно, що зі збільшенням кута конусності прогин збільшується.

На рис. 2 наведено графік зміни $\sigma_\theta^{\pm}(s)$ для

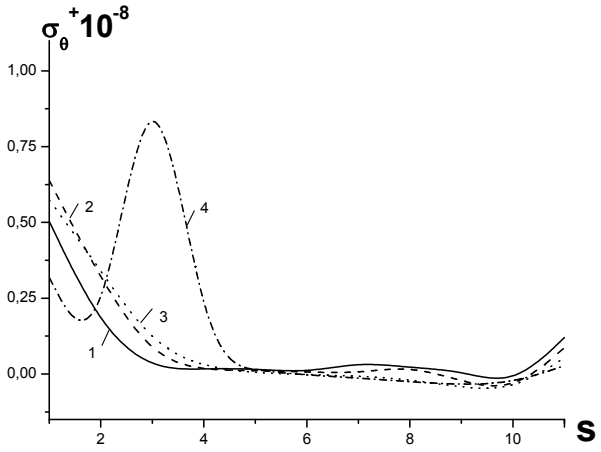


Рис. 2 . Механічні напруження оболонки

розглядуваних вище значень кута φ при $t = 5\cdot 10^{-3} c$, що відповідає максимальним значенням прогину на рис. 1. Тут $\sigma_\theta^+(s)$ – механічні напруження на зовнішній поверхні конічної оболонки.

Виходячи із наведених даних можна судити про вплив зміни кута конусності на напружено-деформований стан оболонки (номери кривих 1–4 відповідають прийнятим на рис. 1).

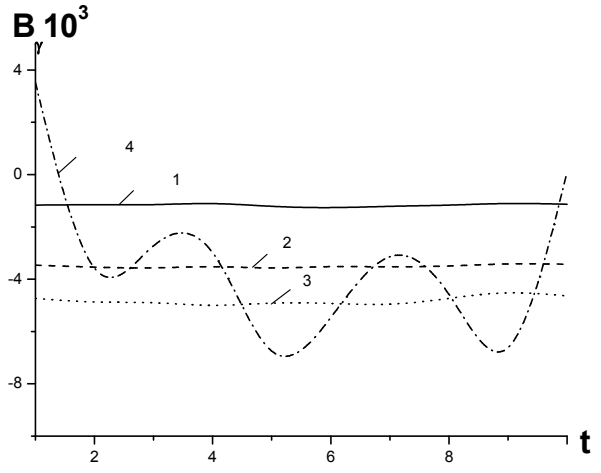


Рис. 3. Магнітна індукція оболонки

На рис. 3 показано розподіл нормальної складової магнітної індукції $B_\gamma(t)$ при $s = 0{,}04$ *м* для кутів вказаних вище.

Варто зазначити, що при $\varphi = \pi/6; \pi/10; \pi/15$ значення магнітної індукції зменшуються зі збільшенням кута і залишаються монотонними. При $\varphi = \pi/30$ значення $B_\gamma(t)$ мають немонотонний характер, відбувається чередування екстремальних значень $B_\gamma(t)$ за абсолютною величиною.

4. Висновки

На підставі отриманих рівнянь з використанням запропонованої методики маємо можливість враховувати як ортотропію матеріалу, так і ортотропію електромагнітного поля конічної оболонки, а також вплив деформацій на електромагнітні властивості тіла.

Такі задачі електромагнітопружності досить актуальні з точки зору додатків. У разі тонких ортотропних або ізотропних оболонок з ортотропною електропровідністю можна розв'язувати задачі магнітопружності шляхом варіації всіх фізико-механічних параметрів оболонки. В даному випадку вивчено вплив кутів конусності на напружено-деформований стан ортотропної оболонки.

Список використаних джерел

1. *Moon F. C.* Magneto-solid mechanics. – New-York: Wiley, 1984. – 437 p.
2. *Grigorenko Y. M., Molchenko L. V.* Foundations theory of plates and shells with elements mahnitopruzhnosti. – K.: HNV "Kiïvskyi universitet", 2009. – 403 p. (in Ukrainian).
3. *Ambartsumian S. A*., *Bagdasarian G. E.*, *Belubekyan M. V.* Magnetoelasticity thin shells and plates. – Moscow: Nauka, 1977. – 272 p. (in Russian).
4. *Kelly A., Groves* Crystallography and defects in crystals. – Moscow: Mir, 1974. – 496 p. (in Russian).
5. *Molchenko L. V., Loos I. I.* Influence of conicity on the stress–strain state of a flexible orthotropic conical shell in a nonstationary magnetic field // Int. Appl. Mechanics. – 2011. – V. 46, Iss. 11. – P. 1261-1267.

Надійшла до редколегії 13.03.13

УДК 534.143-8

Петрищев О. Н. [1], д. т. н., проф.,
Михеева А. Н.[1], студентка

Об одном способе решения задачи Лэмба

Предлагается схема решения осесимметричной задачи Лэмба для невзаимодействующих продольных и сдвиговых волн, которые уносят энергию источника внешних сил в объем полупространства.

Ключевые слова: суперпозиция, сферическая система координат, потенциалы смещений.

[1] Национальный технический университет Украины «КПИ», 03056, г. Киев, просп. Победы, 37
e-mail: petrischev@ukr.net,
anastacia.mikheeva@gmail.com

O. N. Petrishchev[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
A. N. Mikheeva[1], student

On a method of solving Lamb's problem

It is proposed scheme for solving Lamb's axisymmetric problem for non-interacting longitudinal and shear waves which carry energy of source of external forces in the amount of half-space.

Key Words: superposition, spherical coordinate system, potentials of the displacement.

[1] National technical university of Ukraine “KPI”, 03056, Kyiv, Prospect Peremogy, 37
e-mail: petrischev@ukr.net,
anastacia.mikheeva@gmail.com

Введение

Известно [1], что при динамическом нагружении конечной области поверхности упругого полупространства в нем возбуждаются взаимодействующие и невзаимодействующие продольные и поперечные (сдвиговые) волны. Взаимодействующие продольные и поперечные волны порождают поверхностную волну Рэлея, которая распространяется в радиальных направлениях вдоль поверхности полупространства. Невзаимодействующие продольные и поперечные волны уносят энергию источника внешних сил в объем полупространства. Определение компонентов векторов смещений в волне Рэлея и в невзаимодействующих продольных и поперечных волнах составляет основное содержание задачи, которая впервые была сформулирована Горацио Лэмбом в 1904 г. [2] и в настоящее время носит его имя.

Стремление удержать в общем решении задачи Лэмба оба типа продольных и поперечных волн заставляет привязываться к поверхности полупространства, т. е. использовать либо декартову, либо цилиндрическую систему координат. Решения уравнений движения элемента объема деформируемого твердого тела в этих системах координат требует, помимо интегрального преобразования по времени, выполнения интегральных преобразований по координатным осям. Выполнение обратных интегральных преобразований сопряжено с известными [1] математическим трудностями.

Поскольку в линейной теории упругости a priori предполагается выполнение принципа суперпозиции решений, постольку задачу Лэмба можно разделить на две частные задачи, а именно – на задачу для поверхностных волн Рэлея и задачу для невзаимодействующих продольных и поперечных волн. Задача Лэмба для волн Рэлея решается в цилиндрической системе координат с помощью интегральных преобразований Ханкеля. Задача Лэмба для невзаимодействующих продольных и поперечных волн решается в сферической системе координат без применения интегральных преобразований.

В настоящей статье предлагается методика решения задачи Лэмба для невзаимодействующих продольных и поперечных волн для случая, когда поверхностные плотности внешних сил обладают осевой симметрией.

Возбуждение сферических продольных и перечных волн осесимметричными нагрузками

Рассмотрим изотропное упругое полупространство (рис. 1), на поверхности которого $\vartheta=\pi/2$ (ϑ – полярная угловая координата сферической системы координат r, ϕ, ϑ, которая сопряжена с правовинтовой декартовой системой координат x_1, x_2, x_3 так, как это показано на рис. 1) в круге $r\le R$ заданы внешние нагрузки $\sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r)e^{i\omega t}$ и $\sigma^*_{\vartheta r}(r)e^{i\omega t}$ ($i=\sqrt{-1}$; ω – круговая частота; t – время). Требуется найти амплитудное значение $\vec{u}(r, \vartheta)$ гармонически изменяющегося во времени вектора смещения материальных частиц полупространства в произвольной точке A при условии, что напряженное состояние полупро-

© О. Н. Петрищев, А. Н. Михеева, 2013

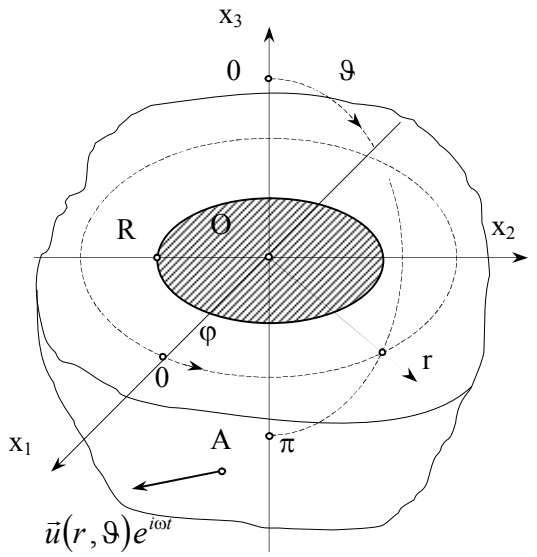


Рис. 1. Расчетная схема задачи Лэмба

странства на поверхности $\vartheta=\pi/2$ удовлетворяет третьему закону Ньютона, т. е.

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)-\sigma^{*}_{\vartheta\vartheta}(r)=0\,, \qquad (1)$$

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{\vartheta r}(r,\pi/2)-\sigma^{*}_{\vartheta r}(r)=0\,, \qquad (2)$$

где $\mathrm{Re}\,\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)$ и $\mathrm{Re}\,\sigma_{r\vartheta}(r,\pi/2)$ – действительные части амплитудных значений упругих напряжений, которые возникают при динамическом деформировании полупространства.

Представим вектор смещения $\vec{u}(r,\vartheta)$ в виде суперпозиции следующих векторов

$$\vec{u}(r,\vartheta)=\vec{u}^{\,\ell}(r,\vartheta)+\vec{u}^{\,s}(r,\vartheta), \qquad (3)$$

где $\vec{u}^{\,\ell}(r,\vartheta)=\mathrm{grad}\,\Phi(r,\vartheta)$ – вектор смещения в продольной волне; $\Phi(r,\vartheta)$ – скалярный потенциал; $\vec{u}^{\,s}(r,\vartheta)=\mathrm{rot}\,\vec{\Psi}(r,\vartheta)$ – вектор смещения в поперечной волне; $\vec{\Psi}(r,\vartheta)$ – векторный потенциал, который в случае осевой симметрии волнового поля полностью определяется азимутальным компонентом $\Psi_{\phi}(r,\vartheta)$, что автоматически обеспечивает выполнение условия $\mathrm{div}\,\vec{\Psi}(r,\vartheta)=0$. Потенциалы перемещений удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2\Phi(r,\vartheta)+k_{\ell}^2\Phi(r,\vartheta)=0\,,$$

$$-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\Psi_{\phi}(r,\vartheta)+k_s^2\Psi_{\phi}(r,\vartheta)=0\,, \qquad (4)$$

где $k_{\ell}^2=\omega^2/v_{\ell}^2$; $k_s^2=\omega^2/v_s^2$; $v_{\ell}=\sqrt{(\lambda+2G)/\rho_0}$ и $v_s=\sqrt{G/\rho_0}$ – скорости распространения продольной (ℓ) и сдвиговой (s) волн; λ, G и ρ_0 – модули упругости и плотность материала полупространства.

Решения уравнений (4) выполняется по стандартной схеме разделения переменных и записывается в виде разложений по сферическим гармоникам

$$\Phi(r,\vartheta)=x_{\ell}^{-1/2}\sum_{\nu}B_{\nu}H^{(2)}_{\nu+1/2}(x_{\ell})P_{\nu}(\xi)\,, \qquad (5)$$

$$\Psi_{\phi}(r,\vartheta)=-x_s^{-1/2}\sum_{\mu}C_{\mu}H^{(2)}_{\mu+1/2}(x_s)\frac{\partial P_{\mu}(\xi)}{\partial\vartheta}\,, \qquad (6)$$

где $x_{\beta}=k_{\beta}r$ ($\beta=\ell,s$) – безразмерная радиальная координата; ν и μ – элементы ряда натуральных чисел; B_{ν} и C_{μ} – подлежащие определению константы; $H^{(2)}_{\lambda+1/2}(x_{\beta})$ ($\lambda=\nu,\ \mu$) – функции Ханкеля второго рода; $P_{\lambda}(\xi)$ ($\xi=\cos\vartheta$) – функции Лежандра первого рода степени λ.

По известным потенциалам $\Phi(r,\vartheta)$ и $\Psi_{\phi}(r,\vartheta)$ определяются компоненты векторов смещения $u^{\lambda}_{\beta}(r,\vartheta)$, компоненты тензоров деформаций и напряжения $\sigma^{\lambda}_{\vartheta\beta}(r,\pi/2)$. Если значок $\nu=2n$, где $n=1,2,3,\ldots$, то $\sigma^{\ell}_{\vartheta r}(r,\pi/2)=0$, а нормальные напряжения $\sigma^{\ell}_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)\neq 0$, причем граничное условие (1) можно записать в следующем виде

$$2k_{\ell}^2x_{\ell}^{-1/2}G\sum_{n=1}^{\infty}B_n\Big[a_1J_{2n-3/2}(x_{\ell})+a_2J_{2n+1/2}(x_{\ell})+ a_3J_{2n+5/2}(x_{\ell})\Big]P_{2n}(0)=\sigma^{*}_{\vartheta\vartheta}(r), \qquad (7)$$

где

$$a_1=\frac{1}{4n-1}+\frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n-1)}\,,\ a_3=\frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)}\,,$$

$$a_2=\frac{1}{4n-1}+\frac{(2n+1)^2}{4n+1}\left(\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+3}\right)-\frac{\eta}{1-2\eta}\,;$$

η – коэффициент Пуассона упругого полупространства; $J_{2n-3/2}(x_{\ell})$, $J_{2n+1/2}(x_{\ell})$, $J_{2n+5/2}(x_{\ell})$ – функции Бесселя. Если значок $\mu=2n+1$, где $n=1,2,3,\ldots$, то $\sigma^{s}_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)=0$, а касательные напряжения $\sigma^{s}_{\vartheta r}(r,\pi/2)\neq 0$, причем граничное условие (2) можно записать в виде

$$Gk_s^2x_s^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n(2n+1)\Big[\beta_1J_{2n-1/2}(x_s)+ +\beta_2J_{2n+3/2}(x_s)+\beta_3J_{2n+7/2}(x_s)\Big]P_{2n}(0)=\sigma^{*}_{\vartheta r}(r), \qquad (8)$$

где

$$\beta_1 = \frac{4(2n+1)^2 + 7(2n+1) - 3}{2(4n+1)(4n+3)} - \frac{3}{2(4n+1)};$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \frac{4(2n+1)^2 + 7(2n+1) - 3}{2(4n+3)(4n+5)} - 1;$$

$$\beta_3 = \beta_1 + \frac{3}{2(4n+1)}.$$

Известен интеграл [3]

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} J_{2m+1/2}(x) J_{2n+1/2}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \forall\, m \neq n, \\ 1/(2n+1) & при\ m = n. \end{cases}$$

Умножая левую и правую части соотношения (7) на функцию

$$W_n^\ell(x_\ell) = x^{-1/2}\left[J_{2n-3/2}(x_\ell) + J_{2n+1/2}(x_\ell) + J_{2n+5/2}(x_\ell)\right],$$

и выполняя интегрирование по переменной x_ℓ, получаем следующий результат:

$$B_n = \frac{1}{2Gk_\ell^2 P_{2n}(0) Q_n} \int_0^\infty \sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r) W_n^\ell(x_\ell)\,dx_\ell,$$

где $Q_n = a_1/(4n-3) + a_2/(4n+1) + a_3/(4n+5)$.

Аналогичным образом определяются константы

$$C_n = \frac{1}{Gk_s^2(2n+1) P_{2n}(0) S_n} \int_0^\infty \sigma^*_{\vartheta r}(r) W_n^s(x_s)\,dx_s,$$

где

$$W_n^s(x_s) = x_s^{-1/2}\left[J_{2n-1/2}(x_s) + J_{2n+3/2}(x_s) + J_{2n+7/2}(x_s)\right];$$

$$S_n = \beta_1/(4n-1) + \beta_2/(4n+3) + \beta_3/(4n+7).$$

Сумма напряжений $\sigma^\lambda_{\vartheta\beta}(r, \pi/2)$ удовлетворяет граничным условиям (1), (2), т. е. найденные потенциалы являются решением осесимметричной задачи Лэмба.

Рассмотрим модельную ситуацию, когда в круге $(r \le R,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ \vartheta = \pi/2)$ созданы изменяющиеся во времени по гармоническому закону нормальные напряжения с постоянной амплитудой σ_0. Указанная нагрузка возбуждает продольную сферическую волну. Вектор смещения $\vec{u}^\ell(r, \vartheta)$ при этом определяется следующим образом:

$$u_r^\ell(x_\ell, \xi) = \frac{\sigma_0 R}{2G} x_\ell^{-1/2} \sum_{n=1}^\infty U_n^\ell(k_\ell R)\left[H^{(2)}_{2n-1/2}(x_\ell) - \frac{2n+1}{x} H^{(2)}_{2n+1/2}(x_\ell)\right] P_{2n}(\xi),$$

$$u_\vartheta^\ell(x_\ell, \xi) = \frac{\sigma_0 R}{2G} x_\ell^{-3/2} \sin\vartheta \sum_{n=1}^\infty U_n^\ell(k_\ell R) H^{(2)}_{2n+1/2}(x_\ell) \frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial \xi},$$

где $U_n^\ell(k_\ell R)$ – амплитудный множитель n-ой сферической гармоники продольной волны, который определяется следующим выражением

$$U_n^\ell(k_\ell R) = \frac{1}{k_\ell R P_{2n}(0) Q_n} \int_0^{k_\ell R} W_n^\ell(x_\ell)\,dx_\ell.$$

На рис. 2 показаны графики амплитудных множителей $U_n^\ell(k_\ell R)$ первых десяти сферических гармоник продольной волны в упругом полупространстве с коэффициентом Пуассона $\eta = 0{,}3$.

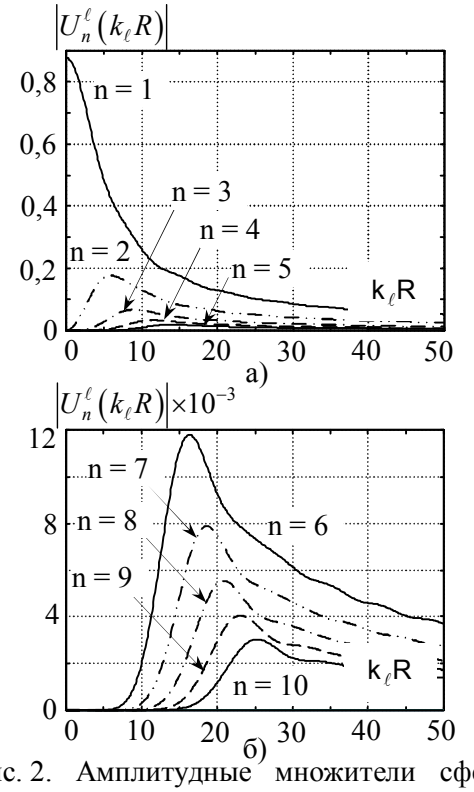


Рис. 2. Амплитудные множители сферических гармоник продольной волны, которая возбуждается напряжениями, равномерно распределенными в круге $r \le R$

Список использованной литературы

1. *Grinchenko V. T, Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. – Kyiv: Naukova dumka, 1981. – 283 p. (in Russian).
2. *Nowacki W.* The theory of elasticity. – Moscow: Mir, 1975. – 873 p. (in Russian).
3. *Prudnikov A. P., Brychkov Y. A., Marichev O. I.* Integrals and series. Special functions. – Moscow: Nauka, 1983. – 752 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 24.05.13

УДК 534.143-8

Петрищев О. Н.[1], д. т. н., проф.,
Романюк М. И.[1], аспирант

Возбуждение пространственно развитых волн Рэлея

Приводится постановка и результаты решения граничной задачи о возбуждении гармонических волн Рэлея системой поверхностных и объемных внешних сил, произвольно распределенных в ограниченной области упругого полупространства.

Ключевые слова: изотропное упругое полупространство, поверхностная и объемная плотность внешних сил, радиальное распространение, гармонические волны Рэлея.

[1] Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», 03056, г. Киев, ул. Политехническая, 16
e-mail: petrischev@ukr.net, romanyuk_rita@ukr.net

O. N. Petrishchev[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
M. I. Romanyuk[1], PhD student

Excitation of the spatial developed Rayleigh waves

Is given the formulation and results of boundary problem solution of harmonic Rayleigh waves excitation by surface and volume system of external forces, that are randomly distributed in a limited area of the elastic half-space.

Key words: isotropic elastic half-space, surface and volume density of external forces, the radial distribution, harmonic Rayleigh waves.

[1] National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
03056, Kyiv, str. Polytechnique, 16
e-mail: petrischev@ukr.net, romanyuk_rita@ukr.net

Введение

В устройствах акустоэлектроники, ультразвукового контроля поверхности металлопроката и в ряде других технических приложений используются источники поверхностных акустических волн (волн Рэлея), что формируют на поверхности и в объеме упругого полупространства систему нагрузок, которые не обладают осевой симметрией. Естественно, что формируемые ими волновые поля также не обладают осевой симметрией. В этой связи становится актуальной задача определения амплитудных множителей волн Рэлея, возбуждаемых системой объемных и поверхностных нагрузок, которые произвольным образом распределены в ограниченной области упругого полупространства.

Постановка задачи

Предположим, что в некоторой конечной области изотропного упругого полупространства (рис. 1) с плотностью ρ_0 и с модулями упругости λ и G заданы гармонически изменяющиеся во времени t по закону $e^{i\omega t}$ ($i=\sqrt{-1}$; ω – круговая частота) внешние силы.

На площадке S^* (рис. 1) заданы амплитуды поверхностных плотностей внешних сил $\sigma^*_{3j}(x_1, x_2)$ $(j=1, 2, 3)$, а в объеме V^* – амплитуды объемных плотностей $f^*_j(x_j)$. Будем полагать, что в области $x_3>0$ отсутствуют материальные объекты, т. е. находится вакуум.

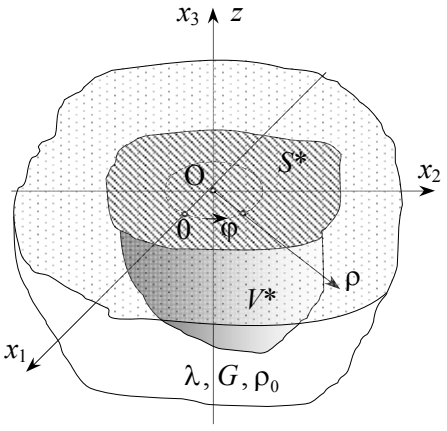


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Указанная система внешних сил возбуждает волны Рэлея, которые распространяются в радиальных направлениях вдоль поверхности $x_3=0$ полупространства, и невзаимодействующие сферические продольные и поперечные волны, которые уносят энергию источника внешних сил в объем полупространства [1].

© О. Н. Петрищев, М. И. Романюк, 2013

Вектор смещения $\vec{u}(x_j)e^{i\omega t}$ материальных частиц изотропного полупространства должен удовлетворять уравнениям установившихся гармонических колебаний

$$(\lambda+2G)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}(x_j)-G\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}(x_j)+$$
$$+\rho_0\omega^2\vec{u}(x_j)-\vec{f}^{*}(x_j)=0 \quad \forall x_j\in V, \quad (1)$$

где V – объем полупространства.

Деформации, которые возникают при смещениях материальных частиц, сопровождаются упругими напряжениями $\sigma_{ij}(x_j)e^{i\omega t}$, амплитуды которых на поверхности S $(x_3=0)$ полупространства должны удовлетворять третьему закону Ньютона, т. е.

$$\sigma_{3j}(x_j)-\sigma^{*}_{3j}(x_j)=0 \quad \forall x_j\in S. \quad (2)$$

Решения неоднородной граничной задачи (1), (2), т. е. компоненты $u_k(x_j)$ вектора смещения $\vec{u}(x_j)$ должны удовлетворять условиям физической реализуемости источника упругих возмущений, т. е. предельным условиям следующего вида

$$\lim_{R\to\infty}\left\{Ru_k(x_j), R\frac{\partial u_k(x_j)}{\partial x_j}\right\}=0, \quad (3)$$

где R – расстояние от источника, т. е. от области $V^{*}+S^{*}$ существования внешних сил.

Результаты решения граничной задачи

Общее решение однородной граничной задачи, которая соответствует задаче (1), (2) при $\vec{f}^{*}(x_j)=0$ и $\sigma^{*}_{3j}(x_j)=0$ достаточно просто получается при использовании представления Гельмгольца $\vec{u}(x_j)=\operatorname{grad}\Phi(x_j)+\operatorname{rot}\vec{\Psi}(x_j)$, где $\Phi(x_j)$ и $\vec{\Psi}(x_j)$ – амплитудные значения скалярного и векторного потенциалов. Проводя вычисления в цилиндрической системе координат (ρ,φ,z) (рис. 1), можно показать, что пространственно развитые волны Рэлея определяются скалярным потенциалом и двумя, не равными нулю, компонентами $\Psi_\rho(\rho,\varphi,z)$ и $\Psi_\varphi(\rho,\varphi,z)$ векторного потенциала. При этом компоненты вектора смещения материальных частиц определяются следующими соотношениями:

$$u_\rho(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\gamma_R)R_\rho(\gamma_R,z)\times$$
$$\times\left[H^{(2)}_{m-1}(\gamma_R\rho)-H^{(2)}_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix},$$

$$u_\varphi(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\gamma_R)R_\rho(\gamma_R,z)\times$$
$$\times\left[H^{(2)}_{m-1}(\gamma_R\rho)+H^{(2)}_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\begin{pmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix},$$

$$u_z(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\gamma_R)W_z(\gamma_R,z)\times$$
$$\times H^{(2)}_m(\gamma_R\rho)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}, \quad (4)$$

где m – элемент ряда натуральных чисел; $R_m(\gamma_R)$ – амплитудный множитель m-ой цилиндрической гармоники; γ_R – волновое число волны Рэлея;

$$R_\rho(\gamma_R,z)=\gamma_R[e^{\alpha z}-2\alpha\beta e^{\beta z}/(\gamma_R^2+\beta^2)]$$

– функция распределения по глубине полупространства радиальных смещений материальных частиц; α и β – отстающие по фазе на $\pi/2$ проекции волновых векторов $\vec{k}_\ell$ и $\vec{k}_s$ взаимодействующих продольных (ℓ) и сдвиговых (s) гармонических волн, которые распространяются со скоростями $\upsilon_\ell=\sqrt{(\lambda+2G)/\rho_0}$ и $\upsilon_s=\sqrt{G/\rho_0}$ соответственно. При этом $k_\ell^2=\gamma_R^2-\alpha^2$ и $k_s^2=\gamma_R^2-\beta^2$, а волновые числа α, β и γ_R удовлетворяют условию существования рэлеевской волны, т. е. трансцендентному уравнению следующего вида:

$$\Delta_R(\chi_R)=(\gamma_R^2+\beta^2)^2-4\gamma_R^2\alpha\beta=0,$$

где $\chi_R=\gamma_R^2$. Символами $H^{(2)}_\nu(\gamma_R\rho)$ $(\nu=m;m\pm1)$ в соотношениях (4) обозначены функции Ханкеля второго рода. Распределение аксиальных смещений материальных частиц полупространства определяется функцией

$$W_z(\gamma_R,z)=\alpha[e^{\alpha z}-2\gamma_R^2e^{\beta z}/(\gamma_R^2+\beta^2)].$$

Амплитудный множитель $R_m(\gamma_R)$ определяется из решения неоднородной граничной задачи (1), (2), которое, благодаря условию (3), осуществляется с помощью интегральных преобразований Ханкеля [2]. Выражение для его расчета записывается в следующем виде:

$$R_m(\gamma_R)=\frac{i\pi}{2G\Delta'_R(\chi_R)}\left[\frac{(\gamma_R^2+\beta^2)^2}{\alpha k_s^2}W_0(\gamma_R)-\right.$$

$$\left.-2\gamma_R\beta\sigma_0^{(m)}(\gamma_R)+{}^{(m)}\sigma_{zz}^*(\gamma_R)(\gamma_R^2+\beta^2)\right],$$

где

$$\Delta'_R(\chi_R)=d\,\Delta_R(\chi_R)/d\,\chi_R\ ;$$

$$W_0(\gamma_R)=\int_{-\infty}^{0}\left[F_0^{(m)}(\gamma_R,z)R_\rho(\gamma_R,z)+f_z^{(m)}(\gamma_R,z)\times\right.$$

$$\left.\times W_z(\gamma_R,z)\right]dz;$$

$$F_0^{(m)}(\gamma_R,z)=\frac{1}{2\pi\delta_m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho\left\{f_\rho^*(\rho,\varphi,z)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times\right.$$

$$\times\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)-J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]+f_\varphi^*(\rho,\varphi,z)\begin{pmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}\times$$

$$\left.\times\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)+J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\right\}d\rho d\varphi;$$

$\delta_m=\left(2\text{ для }m=0;1\ \forall m\geq 1\right)$; $J_\nu(\gamma_R\rho)$ $\left(\nu=m;\,m\pm1\right)$ – функции Бесселя порядка ν;

$$f_z^{(m)}(\gamma_R,z)=\frac{1}{\pi\delta_m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho\,f_z^*(\rho,\varphi,z)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times$$

$$\times J_m\left(\gamma_R\rho\right)(\gamma_R\rho)\,d\rho\,d\varphi;$$

$$\sigma_0^{(m)}(\gamma_R)=\frac{1}{2\pi\delta_m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho\left\{\sigma_{z\rho}^*(\rho,\varphi)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times\right.$$

$$\times\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)-J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]+\sigma_{z\varphi}^*(\rho,\varphi)\times$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)+J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\right\}d\rho d\varphi;$$

$${}^{(m)}\sigma_z^*(\gamma_R)=\frac{1}{\pi\delta_m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho\,\sigma_{zz}^*(\rho,\varphi)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times$$

$$\times J_m(\gamma_R\rho)\,d\rho\,d\varphi.$$

Рассмотрим модельный пример.

Предположим, что на поверхности полупространства в круге $\rho\leq R$ задана гармонически изменяющаяся во времени по закону $e^{i\omega t}$ аксиальная нагрузка с амплитудой поверхностной плотности $\sigma_{zz}^*(\rho)=\left(\sigma_0\ \forall\rho\leq R,\ 0\ \forall\rho>R\right)$. При этом возбуждаются осесимметричные, радиально распространяющиеся волны Рэлея. Из общих соотношений (4) следует, что смещения материальных частиц упругого полупространства определяются следующим образом:

$$u_\rho(\rho,z)=-R_0(\gamma_R)\frac{R_\rho(\gamma_R,z)}{\gamma_R}H_1^{(2)}(\gamma_R\rho),$$

$$u_z(\rho,z)=R_0(\gamma_R)\frac{W_z(\gamma_R,z)}{\gamma_R}H_0^{(2)}(\gamma_R\rho),$$

где

$$R_0(\gamma_R)=i\pi\frac{\sigma_0 R}{2G}f(\nu)J_1(\gamma_R R);$$

$$f(\nu)=(\gamma_R^2+\beta^2)/\Delta'_R(\chi_R),$$

$f(\nu)$ – безразмерное число, которое не зависит от частоты, но зависит от значений коэффициента Пуассона ν. Для $\nu=0{,}3$ константа $f(\nu)=-0{,}507774$. Функция Бесселя первого порядка $J_1(\gamma_R R)$ определяет влияние размеров площадки нагружения на эффективность возбуждения ультразвуковых волн на заданной частоте смены знака внешних сил. Эта функция убывает с ростом частоты (безразмерного волнового числа $\gamma_R R$), а на частотах, которым соответствуют волновые числа $\gamma_R R=3{,}8317$, $\gamma_R R=7{,}0156$, $\gamma_R R=10{,}1735$ и т. д., обращается в нуль. Сообразно этому изменяются амплитудные значения смещений материальных частиц во фронте рэлеевской волны.

Указанные особенности частотно зависимого изменения амплитуд смещений объясняются интерференцией волновых полей, которые излучаются в упругую среду различными участками деформируемого твердого тела, находящимися в области действия внешних сил.

Выводы

Впервые, в приближении дальнего поля, решена задача о возбуждении радиально распространяющихся, пространственно развитых волн Рэлея. Полученные результаты могут быть использованы при разработке излучателей ультразвуковых волн в устройствах акустоэлектроники и неразрушающего контроля листового металлопроката.

Список использованных источников

1. *Hrinchenko V. T., Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. – Kiev: Naukova dumka, 1981. – 283 p. (in Russian).
2. *Koshlyakov N. S., Gleaner E. B., Smirnov M. M.* Partial differential equation of mathematical physics. – Moscow: Vyshcha shcola, 1970. – 710 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 21.05.13

УДК 539.3

Попов В. Г.[1], д. ф.-м. н., проф.

Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву

Розв'язана задача визначення динамічних КІН для двох тріщин, що виходять з однієї точки, при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву. Коливання відбуваються внаслідок дії на береги тріщин зсувного гармонічного навантаження. Вихідна задача приведена до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Для наближеного розв'язання цієї системи запропоновано числовий метод, який враховує справжню асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: тріщини,сингулярні інтегральні рівняння, нерухома особливість, гармонічні коливання.

[1] Одеська національна морська академія,
65029, м. Одеса, вул. Дидріхсона, 8
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

V. G. Popov[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

The stress condition near two cracks, which begin of one point under harmonic longitudinal oscillation

The problem of determination the dynamic SIF is solved for two cracks, which begin of one point. The oscillations are the result of harmonic longitudinal load at the cracks edges. The original problem is reduced to the system of two singular integro-differential equations with the fixed singularity. The numerical method of this system solving which considers real asymptotic unknown function and special quadrature formulas for singular integrals is proposed.

Key Words: cracks, singular integral equations, fixed singularity, harmonic oscillation.

[1] Odessa national maritime academy,
65029, Odessa, 8, Didrikhsona str.
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

Постановка задачі і зведення її до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (ССІДР)

Нехай ізотропне пружне тіло знаходиться в умовах антиплоскої деформації і містить дві тріщини, що виходять з однієї точки (рис.1). Ці тріщини у площині Oxy займають відрізки $2d_k$ і утворюють з віссю Ox кути α_k, $k = 1, 2$. В тілі відбуваються гармонічні коливання повздовжнього зсуву внаслідок дії на береги тріщин зсувного навантаження $Pe^{-i\omega t}$. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, далі відкинуто. Нехай $w(x, y)$ єдина відмінна від 0 при антиплоскій деформації компонента вектора переміщень. Вона визначається з рівняння Гельмгольца

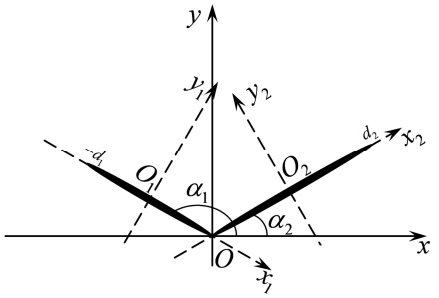


Рис. 1. Дві тріщини, що виходять з однієї точки

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \kappa_2^2 = \rho\omega^2 / G, \tag{1}$$

де Δ – оператор Лапласа в системі координат Oxy, ω – частота коливань, ρ, G – густина і модуль зсуву тіла. Для формулювання граничних умов на тріщинах з кожною з них зв'язується локальна система координат $O_l x_l y_l$, $l = 1,2$ (рис.1). Нехай $w_l(x_l, y_l)$ отримано в результаті переходу у $w(x, y)$ до локальних координат. Тоді на кожній з тріщин виконуються умови

$$\tau_{zyl}(x_l,\ 0) = P, \quad |x_l| < d_l,$$

$$\tau_{zyl} = G\frac{\partial w_l}{\partial y_l}, \quad l = 1, 2. \tag{2}$$

© В. Г. Попов, 2013

Також на кожній тріщині переміщення $w_l(x_l, y_l)$ є розривними з невідомими стрибками

$$w_l(x_l,+0) - w_l(x_l,-0) = \chi_l(x_l), \qquad (3)$$
$$\chi_l(\pm d_l) = 0, \quad l = 1, 2.$$

При сформульованих умовах ставиться задача визначити переміщення і напруження хвилевого поля в тілі і КІН для тріщин.

Для розв'язання цієї задачі для кожної тріщини у системі координат зв'язаній з нею будується розривний розв'язок рівняння (1) зі стрибками (3) [2]

$$w_k^d(x_k, y_k) = \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k(\eta) \frac{\partial}{\partial y_k} r_2(\eta - x_k, y_k)\, d\eta, \quad (4)$$
$$r_2 = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_k)^2 + y_k^2}\right), \quad k = 1, 2.$$

Після цього переміщення у системі Oxy подаються у вигляді

$$w(x,y) = w_1^g(x,y) + w_2^g(x,y), \qquad (5)$$

де $w_k^g(x,y)$, $k = 1, 2$, знаходяться за формулами (4) після переходу в них до координат Oxy. Щоб остаточно визначити переміщення і напруження в тілі слід знайти невідомі стрибки переміщень (3) (розкриття тріщин). Для цього слід скористатися умовами (2). Попередньо знаходимо напруження у системах координат пов'язаних з l-ою тріщиною

$$\tau_{zyl} = \sum_{k=1}^{2} \tau_{zyk}^k, \quad l = 1, 2, \qquad (6)$$
$$\tau_{zyl}^k = -\tau_{zxk}^d \sin\alpha_{lk} + \tau_{zyk}^d \cos\alpha_{lk}, \ \alpha_{lk} = \alpha_l - \alpha_k.$$

Згідно з (5) доданки у (6) визначаються за формулами

$$\tau_{zyl}^k = G \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k'(\eta) \frac{i\kappa_2}{4} \frac{H_1^{(1)}\left(\kappa_2\sqrt{Q_{lk}}\right)}{\sqrt{Q_{lk}}} \times \qquad (7)$$
$$\times\left((\eta + d_k)\cos\alpha_{lk} - (x_l + d_l)\right) d\eta +$$
$$+ \frac{i\kappa_2^2}{4} G \cos\alpha_{lk} \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k(\eta) H_0^{(1)}\left(\kappa_2\sqrt{Q_{lk}}\right) d\eta,$$
$$Q_{lk} = \left(\eta + d_k - (x_l + d_l)\cos\alpha_{lk} + y_l \sin\alpha_{lk}\right)^2 +$$
$$+\left((x_l + d_l)\sin\alpha_{lk} + y_l \cos\alpha_{lk}\right)^2.$$

Після підстановки (6) і (7) у (2) отримана система двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_1'(\tau)\left[\frac{1}{\tau - \zeta} + R_{11}(\tau - \zeta)\right] d\tau + \qquad (8)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_2'(\tau)\left[g_{12}(\tau,\zeta) + R_{11}(\tau - \zeta)\right] d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_1(\tau)\left[-\gamma_1^2\kappa_0^2 \ln|\tau - \zeta| + U_{11}(\tau - \zeta)\right] d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_2(\tau) U_{12}(\tau,\zeta)\, d\tau = p_0,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_2'(\tau)\left[\frac{1}{\tau - \zeta} + R_{22}(\tau - \zeta)\right] d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_1'(\tau)\left[g_{21}(\tau,\zeta) + R_{21}(\tau - \zeta)\right] d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_2(\tau)\left[-\gamma_2^2\kappa_0^2 \ln|\tau - \zeta| + U_{22}(\tau - \zeta)\right] d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_2(\tau) U_{21}(\tau,\zeta)\, d\tau = p_0,$$

У системі (8) введені наступні позначення:

$$\eta = d_k\tau, \quad x_l = d_l\zeta, \quad y_l = d^{-1}d_l,$$
$$\kappa_0 = \kappa_2 d, \quad d = \max(d_1, d_2), \quad p_0 = P/G,$$
$$\varphi_k(\tau) = d_k^{-1}\chi_k(d_k\tau), \quad \gamma_k = d_k/d, \quad k, l = 1, 2,$$
$$g_{12}(\tau,\zeta) = \frac{(\gamma_2(1+\tau)\cos\beta + \gamma_1(1-\zeta))\gamma_2}{q_{12}(\tau,\zeta)},$$
$$g_{21}(\tau,\zeta) = \frac{-(\gamma_1(1-\tau)\cos\beta + \gamma_2(1+\zeta))\gamma_1}{q_{21}(\tau,\zeta)},$$
$$q_{12}(\tau,\zeta) = \gamma_2^2(1+\tau)^2 + \gamma_1^2(1-\zeta) +$$
$$+2\gamma_1\gamma_2(1-\zeta)(1+\tau)\cos\alpha_{12},$$
$$q_{21}(\tau,\zeta) = \gamma_1^2(1-\tau)^2 + \gamma_2^2(1+\zeta)^2 +$$
$$+2\gamma_1\gamma_2(1+\zeta)(1-\tau)\cos\alpha_{21}.$$

Наближене розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь

Наявність у системи (8) нерухомих особливостей при $\tau = -1$, $\zeta = 1$ і $\tau = 1$, $\zeta = -1$ впливає на поведінку її розв'язків в околі точок $\tau = \pm 1$. Асимптотіка розв'язків в цих точках визначається так, як і у випадку жорстких включень, що виходять з однієї точки [3]. Встановлено, що похідні невідомих функцій слід розшукувати у вигляді

$$\varphi_l'(\tau) = W_l(\tau)\psi_l(\tau), \quad l = 1, 2, \tag{9}$$
$$W_1(\tau) = (1-\tau)^{-\sigma}(1+\tau)^{-1/2},$$
$$W_2(\tau) = (1-\tau)^{-1/2}(1+\tau)^{-\sigma}.$$

де степеневий показник визначається рівністю $\sigma = (\pi-\beta)/(2\pi-\beta)$, $\beta = |\alpha_2 - \alpha_1|$, $0 \le \beta \le \pi$, а функції $\psi_l(\tau)$ вважаються такими, що задовольняють умови Гьольдера на $[-1, 1]$.

Наближене розв'язання ґрунтується на апроксимації цих функцій інтерполяційними многочленами

$$\psi_l(\tau) \approx \psi_{n-1}^{(l)}(\tau), \tag{10}$$
$$\psi_{n-1}^{(l)}(\tau) = \sum_{m=1}^{n} \psi_{lm} \frac{P_{ln}(\tau)}{(\tau-\tau_{lm})P_{ln}'(\tau)}, \quad \psi_{lm} = \psi_l(\tau_{lm}),$$

де $P_{1n}(\tau) = P_n^{-\sigma-1/2}(\tau)$, $P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2-\sigma}(\tau)$ – многочлени Якобі, ортогональні з ваговими функціями $W_l(\tau)$, а τ_{lm} – корені цих многочленів. При поданні невідомих функцій у вигляді (9), (10), для інтегралів з ядром Коші мають місце наступні квадратурні формули [1]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_l'(\tau)}{\tau-\zeta_{lj}} d\tau = \sum_{m=1}^{n} \psi_{lm} \frac{A_{lm}}{\tau_{lm}-\zeta_{lj}}, \tag{11}$$
$$l = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

У формулі (11) ζ_{lj} $(l = 1,2,\ j = 1, 2, \dots, n)$ – нулі функцій Якобі другого роду $J_n^{-\sigma-1/2}(\tau)$ і $J_n^{-1/2-\sigma}(\tau)$, а A_{lm} – коефіцієнти відповідних квадратурних формул Гаусса – Якобі [11].

Далі відповідні квадратурні формули необхідно знайти для інтегралів з нерухомими особливостями

$$E_{lk}^{j} = \int_{-1}^{1} \varphi_k'(\tau) g_{lk}(\tau, \zeta_{lj}) d\tau, \quad l, k = 1, 2, \quad l \ne k. \tag{12}$$

Якщо $1 \pm \zeta > \varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1$, $g_{lk}(\tau, \zeta)$ є нескінченно диференційованими і до інтегралів (12) може бути застосована квадратурна формула Гаусса – Якобі. Коли $1 \pm \zeta \to 0$, використаються подання (9), (10) і метод для обчислення інтегралів з ортогональними многочленами [10], за допомогою інтегрального перетворення Мелліна і теореми про згортку. Остаточні формули для інтегралів (12) мають вигляд

$$E_{lk}^{j} = \sum_{m=1}^{n} \psi_{km} \frac{D_{jm}^{lk}}{q_{lk}(\tau_{km}, \zeta_{lj})}, \quad l, k = 1, 2, \quad l \ne k, \tag{13}$$

де при $1 - \zeta_{1j} > \varepsilon > 0$ і $1 + \zeta_{2j} > \varepsilon > 0$

$$D_{jm}^{12} = A_{2m}\gamma_2(\gamma_2(1+\tau_{2m})\cos\beta + \gamma_1(1-\zeta_{1j})),$$
$$D_{jm}^{21} = A_{1m}\gamma_1(\gamma_1(1-\tau_{1m})\cos\beta + \gamma_2(1+\zeta_{2j})).$$

А при $1 - \zeta_{1j} \to 0$ і $1 + \zeta_{2j} \to 0$ коефіцієнти D_{jm}^{lk} подаються швидко збіжними рядами за степенями $1 \pm \zeta_{lj}$.

Для обчислення інтегралів з функціями $\varphi_k(\tau)$ спочатку знаходиться їх наближене значення за допомогою формул

$$\varphi_l(\tau) = \left(1 - (-1)^l \tau\right)^{1/2} \sum_{m=1}^{n} A_{lm}\psi_{lm} S_{lm}(\tau), \tag{14}$$
$$S_{lm}(\tau) = F\left(\sigma, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1-(-1)^l\tau}{2}\right)\frac{(-1)^l 2^{1-\sigma}}{\sigma_0}$$
$$-\left(1+(-1)^l\tau\right)^{1-\sigma} \sum_{j=1}^{n} \frac{P_{lj}(\tau_{lm}) P_{lj}^{(1)}(\tau)}{2j\sigma_j^2}, \quad l = 1,2.$$

Далі для інтегралів, що містять $\varphi_k(\tau)$ застосовуються квадратурні формули Гаусса – Якобі. Для інтегралів з логарифмічною особливістю отримані наступні квадратурні формули:

$$\int_{-1}^{1} \varphi_k(\tau) \ln|\tau - \zeta_{lj}| d\tau = \sum_{m=1}^{n} A_{lm} H_{jm}^{l} \psi_{lm}, \tag{15}$$
$$H_{jm}^{(l)} = (-1)^l\left(1+(-1)^l\zeta_{lj}\right)\left(\ln\left|1+(-1)^l\zeta_{lj}\right| - 1\right) -$$
$$-\left(\tau_{lm} - \zeta_{lj}\right)\left(\ln|\tau_{lm} - \zeta_{lj}| - 1\right), \quad l = 1, 2.$$

Застосування квадратурних формул (11), (13), а також формул Гаусса – Якобі приводить до заміни (8) на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно ψ_{lm}.

Для механіки руйнування найбільшу цікавість являє коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)

$$K_1 = \lim_{x_1 \to -d_1 - 0} \sqrt{-x_1 - d_1}\,\tau_{y_1 z}^{1}(x_1, 0),$$
$$K_2 = \lim_{x_2 \to d_2 + 0} \sqrt{x_2 - d_2}\,\tau_{y_2 z}^{2}(x_2, 0).$$

Після розв'язання системи (8) наближені значення КІН обчислюються за формулою

$$\frac{K_l}{G\sqrt{d_l}} = \frac{P_{ln}((-1)^l)}{-2^{1+\sigma}} \sum_{m=1}^{n} \frac{\psi_{lm}}{P_{ln}^{l}(\tau_{lm})(1-(-1)^l\tau_{lm})}. \tag{16}$$

Результати числового аналізу і висновки

При числовій реалізації перш за все була досліджена практична збіжність запропонованого

наближеного методу розв'язання ССІДР. Для цього розглядались дві тріщини однакової довжини d, що виходять з початку координат симетрично відносно осі Oy і утворюють між собою кут $\beta = 90^\circ$. Внаслідок симетрії $K_1 = K_2 = K$. Результати розрахунків подані на рис. 2 у вигляді графіків залежності абсолютного значення безрозмірного КІН $k = K/G\sqrt{d}$ від безрозмірного хвильового числа κ_0. Кожна крива відповідає вказаному числу вузлів інтерполяції у формулі (10). Як можна бачити, при коливаннях з низькою частотою $(0 < \kappa_0 \le 1)$ для отримання значень КІН з похибкою меншою 0,1% досить 5 вузлів інтерполяції у (10). В усьому розглянутому частотному діапазоні вказана точність досягається при 15-20 вузлах інтерполяції.

Далі досліджено вплив на значення КІН величини кута, утвореного тріщинами. Ці результати показано на рис. 3, де криві 1-4 відповідають наступним значенням кута $\beta: 30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$. Як показують графіки, при частотах, таких що $\kappa_0 \le 2$, при збільшенні кута між тріщинами значення КІН зменшуються і приймають мінімальне значення у випадку прямолінійної тріщини $(\beta = 180^\circ)$. Характерним є наявність частот, при яких КІН приймає максимальні значення, які суттєво, до 10 разів, перевищують значення при аналогічному статичному навантаженні.

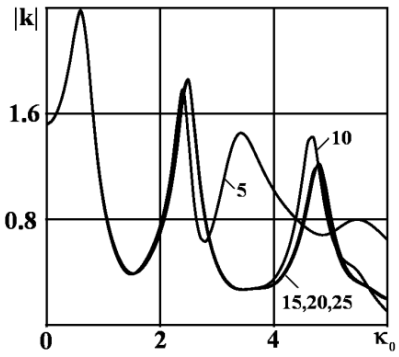


Рис. 2. Практична збіжність числового методу

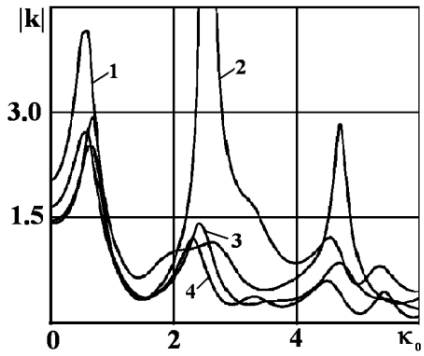


Рис. 3. Залежність КІН від хвильового числа при різних значеннях кута, утвореного тріщинами

Список використаних джерел

1. *Andreev A. V.* Direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels // Mech. Solids. – 2005. – **40** (1). – P. 104-119.
2. *Popov V. G.* Studies of Stress and Displacement Fields under Shear Wave Diffraction on a Thin Rigid Separated Inclusion // Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela. – 1992. – No. 3. – P. 139-146. [Mech. Solids (Engl. Transl.)].
3. *Popov V. G.* The diffraction of the shear elastic waves on the complex form inclusion situated in the unbounded elastic medium // Hydroaeromechanics and elasticity theory. – 1986. – P. 121-127. (in Russian).
4. *Krylov V. I.* Approximate Computations of Integrals. – Moscow: Nauka, 1967. (in Russian).
5. *Popov G. Ya.* Concentration of Elastic Stresses Near Punches, Cuts, Rigid Inclusions, and Stiffeners. – Moscow: Nauka, 1982. (in Russian).

Надійшла до редколегії 25.03.13

УДК 539.9

П'ятецька О. В.[1], к. ф.-м. н.

Дисипативний розігрів та ефективність роботи сенсора при резонансних коливаннях пластини

Розглядається задача про вплив температури дисипативного розігріву на эфективність роботи п'єзоелектричних сенсорів при вимушених резонансних коливаннях тонкої в'язкопружної прямокутної пластини з шарнірним закріпленням торців. Розв'язок задачі одержано за допомогою варіаційного методу. Досліджено вплив розмірів сенсора і температури дисипативного розігріву на показники сенсора.

Ключові слова: п'єзоелектричні сенсори, демпфування, різниця потенціалів.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

O. V. Pyatetska[1], PhD (Phys.-Math.)

Dissipative heating and efficiency sensors work by resonance vibrations of plates

The problem of influence temperature of dissipative heating on efficiency piezoelectric sensors work by resonance vibrations of thin viscoelastic rectangular plate is considered. The problem is solved by the variation method. The influence sensors dimensions and temperature of dissipative heating on sensors indicator is investi-gated.

Key Words: piezoactuators, damping, potential difference.

[1] Taras Shevshenko National University of Kyiv, 4 e Glushkov ave., Kyiv, 03187, Ukraine
e-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

Для активного демпфірування усталених гармонічних коливань тонких пластин із пасивних матеріалів за допомогою сенсорів та актуаторів в її структуру вводяться п'єзоелектричні включення, які виконують роль сенсорів. Вони можуть бути розміщені як на поверхні пластини, так і у будь-якому місці по її товщині, покривати всю область пластини або наноситись у вигляді плям. Основна функція цих включень – дати інформацію про механічну поведінку пластини, зокрема, про амплітуду резонансних коливань. Маючи показники сенсора, для демпфірування коливань до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна цим показникам. Тому ефективність демпфірування суттєво залежить від роботи сенсора.

Загальна теорія вимушених коливань шаруватих пластин з пасивних в'язкопружних ортотропних матеріалів з розподіленими поляризованими по товщині трансверсально-ізотропними сенсорами із врахуванням впливу дисипативного розігріву представлена в [4]. Основні співвідношення виведені на основі гіпотез Кірхгофа – Лява, доповнених адекватними їм гіпотезами відносно розподілу електричних польових величин по товщині пластини. Пасивні шари можуть бути металічними, полімерними або композитними. Дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів враховуються на основі концепції комплексних характеристик [1-3]. Деформації і кути повороту вважались настільки малими, що кінематичні співвідношення між деформаціями та переміщеннями є лінійними.

Розглянемо випадок згинних коливань пластини, яка складається з пасивного середнього шару товщиною h_0, що лежить між верхнім та нижнім протилежно поляризованими п'єзоактивними шарами однакової товщини h_1. Властивості цих п'єзошарів відрізняються тільки знаками п'єзоконстанти.

Рівняння енергії, яке описує дисипативний розігрів, для згинних коливань має вигляд

$$\lambda_{11}\theta_{,xx} + \lambda_{22}\theta_{,yy} - (2\delta/h)\theta + W/h = 0, \qquad (1)$$

де $\theta = T - T^0$, $T^0 = (\alpha_3\theta_3 + \alpha_4\theta_4)/(\alpha_3 + \alpha_4)$, $\delta = (\alpha_3 + \alpha_4)/2$; α_3, α_4 – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm h/2$ із зовнішнім середовищем з температурами θ_3, θ_4; λ_{ij} – коефіцієнти теплопровідності. В (1) дисипативна функція W для згинних коливань розраховується за спрощенною формулою:

$$W = \frac{\omega}{2}\left[(M_1''\chi_1' - M_1'\chi_1'') + (M_2''\chi_2' - M_2'\chi_2'') + 2(H_1''\chi_{12}' - H_1'\chi_{12}'')\right].$$

Спрощене у випадку згинних коливань визначальне рівняння для індукції [4] приймає вигляд

© О. В. П'ятецька, 2013

$$\frac{D_3}{\gamma_{33}} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33}}[z(\kappa_1+\kappa_2)]. \qquad (2)$$

Для пасивних пластин з розподіленими сенсорами важливе значення мають електричні граничні умови на сенсорах. Розглянемо випадок електричних граничних умов, що відповідають розімкнутим електродам. Для кожного із п'єзошарів при згинних коливаннях будемо мати співвідношення

$$\frac{\overset{i}{C}}{\underset{i}{\gamma_{33}}} = \overset{i}{E}_3 + \frac{\overset{i}{\gamma_{31}}}{\underset{i}{\gamma_{33}}}[(\kappa_1+\kappa_2), \quad (i=1,2). \qquad (3)$$

Якщо внутрішні електроди відсутні, то згідно з наведеними вище гіпотезами

$$D_3 = C(\alpha,\beta) = \gamma_{33}E_\gamma + \gamma_{31}(\varepsilon_x+\varepsilon_y). \qquad (4)$$

Для розімкнутих електродів при згинних коливаннях з (4) маємо

$$C(\alpha,\beta) = \frac{w_{11}}{\upsilon_{10}}(\kappa_1+\kappa_2).$$

Для розімкнутих електродів різниця потенціалів визначається із рівності нулю струму, так що

$$V_S = -\frac{1}{\int\limits_{(S)} \frac{dxdy}{\upsilon_{10}}} \iint\limits_{(S)} \left(\frac{w_{11}}{\upsilon_{10}}(\kappa_1+\kappa_2)\right)dx\,dy. \qquad (5)$$

Для пасивного шару покладаємо: $\gamma_{31}=0$. При цьому

$$E_3 = \frac{C(x,y)}{\gamma_{33}(z)} - \frac{\gamma_{31}(z)}{\gamma_{33}(z)}[z(\kappa_1+\kappa_2)]. \qquad (6)$$

Підставляючи (6) у подані в [4] спрощені рівняння, одержимо спрощені вирази для напружень. Після їх інтегрування по товщині отримаємо рівняння стану для зусиль та моментів. Як і для актуаторів, при демпфіруванні коливань за допомогою сенсорів у більшості випадків через їх малу товщину можна знехтувати впливом сенсорів на жорсткісні характеристики пластини. При дії на пластину рівномірного поверхневого тиску, що змінюється з часом за гармонічним законом, термомеханічна поведінка ізотропної пластини описується нелінійною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[D(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}]-(\gamma h)\,\omega^2 w - p_0(x,y)=0.$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{2\alpha}{(\lambda h)}(T-T_C)+\frac{\omega E''(T)h^3}{24(1-\nu^2)(\lambda h)}\left\{\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\right)^2+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2}\right)+2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}=0. \qquad (7)$$

Тут $D = D' + iD''$ – комплексна згинна жорсткість; ρ – густина матеріалу; ω – частота коливань; якщо нехтувати впливом п'єзошарів на згинну жорсткість, то $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, E, ν – комплексні модуль і коефіцієнт Пуасона; T – температура дисипативного розігріву; α – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою T_C; λ – коефіцієнт теплопровідності.

До цієї системи рівнянь необхідно додати традиційні механічні та теплові граничні умови. Для розімкнутих електродів різницю потенціалів, яку показує сенсор при згинних коливаннях пластини, можна подати у вигляді

$$V_S = \frac{h_1(h_0+h_1)\int\limits_{C_1}^{C_2}\int\limits_{D_1}^{D_2}\frac{d_{31}}{s_{11}(1-\nu_S)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy}{2\int\limits_{C_1}^{C_2}\int\limits_{D_1}^{D_2}\varepsilon_{33}(1-k_p^2)dxdy}. \qquad (8)$$

Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (8) набуває вигляду

$$V_S = \frac{h_1(h_0+h_1)k_p^2}{2S\,d_{31}(1-k_p^2)}\int\limits_{C_1}^{C_2}\int\limits_{D_1}^{D_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

Для дослідження впливу температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора необхідно спочатку знайти показники сенсора без врахування впливу температури дисипативного розігріву, потім розв'язати нелінійні диференціальні рівняння типу (7) з граничними умовами, що відповідають шарнірному закріпленню торців, потім підставити знайдену температуру та прогин у представлені вище формули для показників сенсора у залежності від температури дисипативного розігріву.

Використаємо варіаційний метод для розв'язання сформульованої вище задачі, так як різниця потенціалів є інтегральною характеристикою. Орієнтуючись на вимушені коливання на першій

резонансній частоті, вибираємо стандартний для шарнірного закріплення торців пластини вираз для прогину:

$$w = A\sin k_1 x \sin p_1 y, \quad k_1 = \frac{\pi}{a}, \quad p_1 = \frac{\pi}{b}. \qquad (9)$$

Якщо на контурі задана постійна температура T_C, апроксимацію температури вибираємо так:

$$\theta = T - T_C = \theta_0 \sin k_1 x \sin p_1 y.$$

З використанням варіаційного методу та методу Бубнова – Гальоркіна, знайдемо [3]:

$$\theta_0 = \frac{8\omega W_0^2 a^2}{(\lambda h)\pi^4} \cdot \frac{a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{9}a_2}{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2\alpha a^2}{\lambda h \pi^2}}. \qquad (10)$$

Максимальний розігрів буде мати місце в центрі пластини, так що при постійній температурі на контурі максимальна температура $\theta_{\max} = \theta_0$. Прирівнюючи вираз для θ_0 температурі Кюрі, одержимо вираз для критичного значення параметра навантаження W_{0K}^2, після перевищення якого актуатор перестає виконувати своє функціональне призначення:

$$W_{0K}^2 = \frac{(\lambda h)\pi^4 \theta_K}{8\omega a^2} \frac{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2\alpha a^2}{\lambda h \pi^2}}{a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{9}a_2}.$$

Якщо властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, то для заряду одержимо [4]:

$$Q = -\frac{w_{11}}{v_{10}} \iint_{(S)} (\kappa_1 + \kappa_2) dx dy. \qquad (11)$$

З цієї формули видно, що дисипативний розігрів впливає на величину заряду і у випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, так як дисипативний розігрів впливає на амплітуду коливань (амплітуда у виразі (11) з'являється тільки у чисельнику).

Ефективність роботи сенсора оцінюється за величиною різниці показників сенсора при фіксованому навантаженні: той сенсор більш ефективний, для якого цей показник більший при фіксованій інтенсивності p_0. Користуючись формулою (11), легко показати, що при розміщенні центра сенсора розмірами $c \times d$ у точці в центрі пластини має місце формула

$$Q = \frac{(k_1^2 + p_1^2) w_{11}}{k_1 p_1 v_{10}} A \sin^2 \frac{\pi l}{2L}. \qquad (12)$$

Звідси випливає, що робота сенсора буде найбільш ефективною при повному покритті за умови збігу центра актуатора з центром пластини. При вказаному виборі центра актуатора залежність величини $Y = Qk_1 p_1 v_{10} / [(k_1^2 + p_1^2) w_{11}]$ від довжини діагоналі актуатора $s = l/L$ (l, L – довжини діагоналей актуатора та пластини відповідно) визначається виразом :

$$Y = \sin^2(\pi s/2). \qquad (13)$$

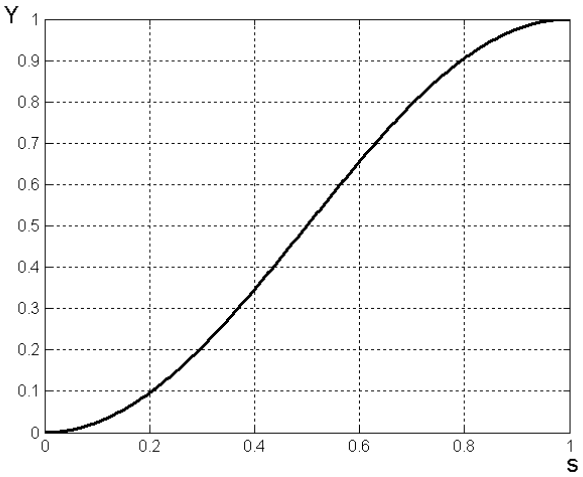


Рис. 1. Залежність величини (13) від довжини діагоналі актуатора

Як видно з цього графіка, спочатку спостерігається різке збільшення заряду, а потім – незначна його зміна. В області повільної зміни різниці потенціалів можна розмістити декілька сенсорів для демпфірування та виявлення інших мод коливань. При повному покритті пластини сенсором і при резонансних коливаннях по першій моді (9) для випадку незалежних від температури властивостей п'єзоматеріалів і постійної інтенсивності поверхневого тиску формула (12) дає:

$$Q = \frac{(k_1^2 + p_1^2) w_{11} A}{k_1 p_1 v_{10}}. \qquad (14)$$

Як відомо, у багатьох випадках залежність п'єзоконстанти d_{31} від температури може бути апроксимована ступінчатою функцією, коли до точки Кюрі вона постійна, і дорівнює нулеві для температур, що перевищують точку Кюрі. При цьому з формули (12) випливає, що $Q \to 0$ при $T \to T_K$. Таким чином, при досягненні температурою точки Кюрі T_K сенсор втрачає своє функціональне призначення через втрату матеріалом п'єзоефекту. Якщо температура дисипативного розігріву розраховується без врахування залеж-

ності властивостей матеріалу від температури, то прирівнюючи її точці Кюрі, одержимо вираз для критичного значення параметра механічного навантаження:

$$p_0 = \sqrt{\frac{C_0(B_1^2 + B_2^2)T_K}{C_1}}\,. \qquad (15)$$

Якщо враховується тільки залежність від температури властивостей пасивного матеріалу, а властивості п'єзоматеріалу залежать від осередненої по площі температури, то з представлених вище формул одержуємо, що для короткозамкнутих електродів

$$K_{S1} = \frac{\left| V_S(\theta^0 C) \right|}{\left| V_S(20^0 C) \right|} = \frac{\gamma_{31}(\theta^0 C)}{\gamma_{31}(20^0 C)} \cdot \frac{\left| A(\theta^0 C) \right|}{\left| A(20^0 C) \right|}, \qquad (16)$$

а для розімкнутих електродів

$$K_{S2} = \frac{\gamma_{33}(20^0 C)}{\gamma_{33}(\theta^0 C)} \cdot K_{S1}\,. \qquad (17)$$

Якщо ж від температури залежать тільки властивості пасивного матеріалу, то

$$K_S = K_{S1} = K_{S2} = \frac{\left| A(\theta^0 C) \right|}{\left| A(20^0 C) \right|}\,. \qquad (18)$$

Для розрахунку цих коефіцієнтів, які характеризують вплив дисипативного розігріву на показники сенсора, необхідно при заданому навантаженні розрахувати температуру дисипативного розігріву шляхом розв'язання представлених [4] кубічних рівнянь, знайти осереднену по площі температуру, розрахувати величини, які фігурують у коефіцієнтах K_{S1}, K_{S2}, та побудувати графіки залежності цих коефіцієнтів від амплітуди механічного навантаження. Штрихові лінії відповідають випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, а суцільні – випадку, коли вони залежать від осередненої по площі температури. Як видно з цих графіків, при врахуванні залежності властивостей пасивного матеріалу від температури у широкому діапазоні значень параметра навантаження показники сенсора погіршуються.

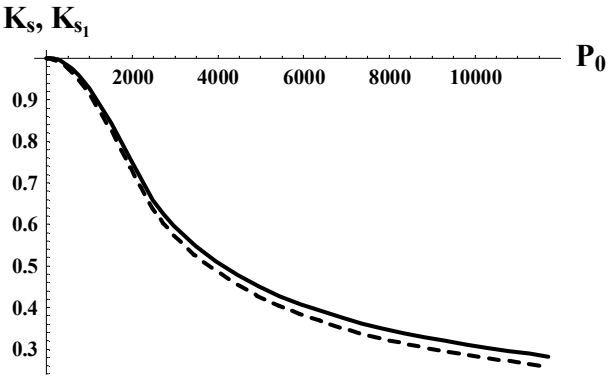


Рис. 2. Залежність K_{S1} від параметра навантаження

Висновок

Розглянуто задачу про вплив температури дисипативного розігріву на показники сенсора при вимушених згинних резонансних коливаннях тонкої в'язкопружної шарнірно закріпленої прямокутної пластини, враховуючи залежність властивостей матеріалів від температури. Подано числові результати, що ілюструють вплив розмірів сенсора і температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора при резонансних коливаннях пластини.

Список використаних джерел

1. *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F.* Mechanics of coupled fields in constructional elements. Electrotermoviscoelasticity. – V. 4. – Kyiv: Nauk. dumka, 1988. – 320 p. (in Russian).
2. *Karnaukhov V. G.* Termal damage of polymeric constructional elements by monoharmonic deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – V. 40, № 6. – P. 30-70.
3. *Karnaukhov V. G., Michaylenko V. V.* Nonlinear termomechanics of piezoelectric inelastic bodies by monoharmonic loading. – Zhitomir: ZhTTU, 2005. – 428 p. (in Russian).
4. *Karnaukhova T. V., Pyatetska O. V.* Fundamental relations of theory termoviscoelastic plates with distributed sensors // Int. Appl. Mech. – 2009. – V. 45, № 6. – P. 100-112.

Надійшла до редколегії 17.05.13

УДК 539.3

Реут В. В.[1], к. ф.-м. н., доцент,
Роговский С. Т.[1], студент

Неразрезная полосовидная пластинка, ослабленная трещиной

Построено эффективное приближённое решение задачи о напряжённом состоянии неразрезной полосовидной пластинки, лежащей на n опорах и ослабленной прямолинейной трещиной. С помощью обобщённой схемы метода интегральных преобразований и метода трёх моментов задача сведена к сингулярному интегральному уравнению, которое решалось методом ортогональных многочленов. Указана скорость сходимости метода.

Ключевые слова: неразрезная пластинка, трещина, коэффициент интенсивности напряжений.

[1] Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, 65082, г. Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: reut@onu.edu.ua,
stanislav.rogovskiy@gmail.com

V. V. Reut[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
S. T. Rogowski[1], student

Continuous band-shaped plate weakened by a crack

The effective approximate solution of the problem of the stress state of the continuous band-shaped plate supported with n fixed bearings and weakened by a crack. With the help of the generalized scheme of the integral transformation method and the method of the three moments the problem was reduced to a singular integral equation, which is solved by the orthogonal polynomials method. The rate of convergence of method is shown.

Key Words: continuous plate, crack, stress intensity factor.

[1] Odessa National University named after I. I. Mechnikov, 65082, Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: reut@onu.edu.ua,
stanislav.rogovskiy@gmail.com

Введение

Задачи о напряжённом состоянии конструкций с дефектами типа трещин и жёстких включений рассматривались в работах многих отечественных и зарубежных учёных [1, 2]. При расчётах элементов конструкций в машиностроении и строительных конструкций часто возникают задачи о неразрезных пластинках с промежуточными опорами и с дефектами типа трещин. К таким задачам сводится также расчёт коробчатых оболочек и складчатых конструкций [3, 4]. В настоящей работе с помощью обобщённой схемы метода интегральных преобразований и метода трёх моментов построено приближённое решение для неразрезной полосовидной пластинки при наличии трещины, перпендикулярной краям пластинки. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений типа Пуанкаре – Коха [2], допускающей применение метода редукции.

Постановка задачи

Рассматривается задача о напряжённом состоянии неразрезной полосовидной пластинки $a \le x \le b$, $-\infty < y < \infty$, шарнирно опёртой по краям $x = a$, $x = b$. Вдоль прямых $x = a_k$ ($a_k = a + kl$, $k = \overline{1, n-1}$, $l = (b-a)/n$, $n \ge 2$) пластинка также шарнирно опирается на $n-1$ неподвижную опору. На интервале $\{x \in (-1; 1), y = 0\}$ между m-ой и $(m+1)$-ой опорами пластинка имеет трещину, к берегам которой приложен изгибающий момент интенсивности $f(x)$.

Такая задача математически эквивалентна задаче отыскания решения бигармонического уравнения Софи Жермен

$$\Delta^2 w(x, y) = 0, \quad a < x < b, \quad x \ne a_k \quad (k = \overline{1, n-1}),$$
$$-\infty < y < \infty, \quad (x, y) \notin (-1; 1) \times \{0\}, \qquad (1)$$

удовлетворяющего условиям шарнирного опирания по краям пластинки

$$x = a, b: \quad w = M_x = 0, \qquad (2)$$

условиям на опорах

$$x = a_k \ (k = \overline{1, n-1}): \quad w = \langle \varphi_x \rangle = \langle M_x \rangle = 0, \qquad (3)$$

условиям затухания на бесконечности

© В. В. Реут, С. Т. Роговский, 2013

$$y \to \pm\infty: \quad w,\ \varphi_y,\ M_y,\ V_y \to 0 \qquad (4)$$

и условию на трещине

$$x \in (-1;1),\ y = 0:$$
$$\langle w \rangle = \langle V_y \rangle = 0, \quad M_y = f(x). \qquad (5)$$

При этом в (1) – (5) w – прогиб пластинки; φ_x, φ_y – углы поворота; M_x, M_y – изгибающие моменты; V_x, V_y – обобщенные перерезывающие силы; $\langle ... \rangle$ – скачки соответствующих величин на указанных линиях.

Сингулярное интегральное уравнение

Введём неизвестную функцию

$$y = 0: \quad \chi(x) = \left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle. \qquad (6)$$

Очевидно, $\chi(x) = 0$ $(|x| > 1)$.

Применяя к задаче (1) – (5) полное преобразование Фурье

$$w_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\lambda y} dy,$$
$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_\lambda(x) e^{-i\lambda y} d\lambda \qquad (7)$$

и обобщённую схему метода интегральных преобразований, следуя [2], сведем данную задачу к сингулярному интегральному уравнению

$$\int_{-1}^{1} K^*(x, \xi)\chi(\xi) d\xi = f(x) \quad (-1 < x < 1), \qquad (8)$$

где

$$K^*(x, \xi) = \mathbb{M}_y\, \mathbb{M}_\eta\, G^*(x, y, \xi, \eta)\Big|_{y=\pm 0,\ \eta=0}.$$

Здесь $G^*(x, \xi, y, \eta)$ – двумерная функция Грина краевой задачи (1) – (4), $\mathbb{M}_y$, $\mathbb{M}_\eta$ – дифференциальные операторы

$$\mathbb{M}_y = -D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \quad \mathbb{M}_\eta = -D\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right),$$

D – цилиндрическая жёсткость пластинки, ν – коэффициент Пуассона.

Как показано в [2], ядро интегрального уравнения (8) допускает представление

$$K^*(x, \xi) = -\frac{(1-\nu)(3+\nu)}{4\pi} \frac{d^2}{dx^2} \ln|x - \xi| + K(x, \xi),$$

где $K(x, \xi)$ – бесконечно дифференцируемая функция.

В дальнейшем, так же, как и в [5], мы используем другое представление ядра $K^*(x, \xi)$. Функция $G^*(x, \xi, y, \eta)$ на интервале $a_m < x < a_{m+1}$ может быть определена как сумма прогиба $G(x, \xi, y, \eta)$ шарнирно опёртой пластинки $\{a_m < x < a_{m+1}, -\infty < y < \infty\}$ под действием сосредоточенной в точке (ξ, η) силы и прогиба пластинки от действия распределенных на её краях $x = a_m$, $x = a_{m+1}$ моментов интенсивности $\mu_m(y, \eta)$, $\mu_{m+1}(y, \eta)$, компенсирующих согласно методу трёх моментов [6] влияние остальной части пластинки:

$$G^*(x, \xi, y, \eta) = G(x, \xi, y, \eta) +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[-\mu_m \frac{\partial G_\alpha}{\partial \xi}(x, a_m) + \right.$$
$$\left. + \mu_{m+1} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \xi}(x, a_{m+1}) \right] \cos\alpha(y - \eta) d\alpha,$$

где μ_m, μ_{m+1} – трансформанты Фурье компенсирующих моментов:

$$\begin{pmatrix} \mu_m \\ \mu_{m+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_\alpha}{\partial x}(a_m, \xi - a_m) \\ \dfrac{\partial G_\alpha}{\partial x}(a_{m+1}, \xi - a_m) \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Здесь $G_\alpha(x, \xi)$ – трансформанта Фурье функции Грина $G(x, \xi, y, \eta)$,

$$A = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} -1 + T_0 Q_2 & -T_0 \\ -T_0 & -1 + T_0 Q_1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = (1 + T_0)^2 Q_1 Q_2 - T_0^2, \quad T_0 = \frac{T}{2B},$$

$$Q_1 = \frac{q_2^{m-1} - q_1^{m-1}}{q_2^m - q_1^m}, \quad Q_2 = \frac{q_1^{m+2} q_2^n - q_2^{m+2} q_1^n}{q_1^{m+1} q_2^n - q_2^{m+1} q_1^n},$$

$$T = -\frac{l \operatorname{ch}\lambda l}{2 \operatorname{sh}^2 \lambda l} + \frac{1}{2\lambda \operatorname{sh}\lambda l},$$

$$B = -\frac{l \operatorname{ch}^2 \lambda l}{2 \operatorname{sh}^2 \lambda l} + \frac{\operatorname{ch}\lambda l + \lambda l \operatorname{sh}\lambda l}{2\lambda \operatorname{sh}\lambda l},$$

$$q_{1,2} = B/T \pm \sqrt{(B/T)^2 - 1}.$$

При этом $G(x, \xi, y, \eta)$ допускает представление

$$G(x,\xi,y,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_\alpha(x,\xi)\cos\alpha(y-\eta)d\alpha,$$

которое можно переписать, применяя конечное синус-преобразование Фурье по x, в виде

$$G(x,\xi,y,\eta)=\frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+\lambda_k|y-\eta|}{4\lambda_k^3}\times$$

$$\times\sin\lambda_k(x-a_m)\sin\lambda_k(\xi-a_m),\quad \lambda_k=\frac{\pi k}{l}.$$

Таким образом,

$$K^*(x,\xi)=-\frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2(b-a)}\times$$

$$\times\lim_{y\to0}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e^{-\lambda_k|y|}\sin\lambda_k(x-a)\sin\lambda_k(\xi-a)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big\{\rho_m(\xi-a_m)\Big[\nu\psi_0(x-a_m)-(1-\nu)\lambda^2\psi_1(x-a_m)\Big]+$$

$$+\rho_{m+1}(\xi-a_m)\Big[\nu\psi_2(x-a_m)-(1-\nu)\lambda^2\psi_3(x-a_m)\Big]\Big\}d\lambda,$$

где $\rho_i(\xi)=\mathbb{M}_\eta\mu_i(\xi)$ $(i=m,m+1)$ – функции, возникающие при применении метода трёх моментов и допускающие представление

$$\begin{pmatrix}\rho_m(\xi)\\ \rho_{m+1}(\xi)\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}\nu\psi_0(\xi)-(1-\nu)\lambda^2\psi_1(\xi)\\ \nu\psi_2(\xi)-(1-\nu)\lambda^2\psi_3(\xi)\end{pmatrix}.$$

При этом $\{\psi_i\}_{i=0}^3$ – фундаментальная базисная система решений следующей краевой задачи:

$$L^2u=F(x),\quad a_m<x<a_{m+1}\quad (Lu=u''-\lambda^2u);$$

$$x=0,l:\quad u=Lu=0,$$

имеющая вид

$$\psi_0(x)=-L\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_m)=\frac{\operatorname{sh}\lambda(a_{m+1}-x)}{\operatorname{sh}\lambda l},$$

$$\psi_1(x)=-\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_m)=$$

$$=-\frac{l\operatorname{ch}\lambda l}{2\lambda\operatorname{sh}^2\lambda l}\operatorname{sh}\lambda(a_{m+1}-x)+\frac{(l-x)\operatorname{ch}\lambda(a_{m+1}-x)}{2\lambda\operatorname{sh}\lambda l},$$

$$\psi_2(x)=L\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_{m+1})=\frac{\operatorname{sh}\lambda(x-a_m)}{\operatorname{sh}\lambda l},$$

$$\psi_3(x)=\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_{m+1})=$$

$$=-\frac{l\operatorname{ch}\lambda l}{2\lambda\operatorname{sh}^2\lambda l}\operatorname{sh}\lambda(x-a_m)+\frac{(x-a_m)\operatorname{ch}\lambda(x-a_m)}{2\lambda\operatorname{sh}\lambda l}$$

и обладающая свойством

$$L\psi_1=\psi_0,\quad L\psi_3=\psi_2.$$

Приближённое решение

Решение интегрального уравнения (8) будем искать с помощью метода ортогональных многочленов [2] в виде ряда по многочленам Чебышева второго рода

$$\chi(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\chi_k U_k(x),\qquad (10)$$

где χ_k – коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Подставляя (10) в (8), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\chi_k\int_{-1}^{1}K^*(x,\xi)\sqrt{1-\xi^2}U_k(\xi)d\xi=f(x)\quad(|x|<1).$$

Умножив последнее равенство на функцию $\sqrt{1-x^2}\,U_n(x)$ и проинтегрировав по переменной x в пределах от -1 до 1, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{kn}\chi_k=f_n\quad(n=\overline{0,\infty}).\qquad (11)$$

При этом

$$A_{kn}=A_{kn}^{(1)}+A_{kn}^{(2)},$$

где

$$A_{kn}^{(1)}=-\frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i T_{ki}T_{ni},$$

$$T_{ki}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}U_k(\xi)\sin\lambda_i(\xi-a)d\xi.$$

Как следует из формул 7.354 [7],

$$T_{ki}=\pi i(k+1)J_{k+1}(\pi/(b-a))\sin\left(\frac{\pi}{2}k-\frac{\pi i}{b-a}a\right).$$

Кроме того,

$$A_{kn}^{(2)}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=m}^{m+1}\int_0^\infty I_{ki}(\lambda)P_{ki}(\lambda)d\lambda.$$

Здесь $I_{ki}=\int_{-1}^{1}\rho_k(\xi)\sqrt{1-\xi^2}U_i(\xi)d\xi$ – решение системы линейных алгебраических уравнений, аналогичной (9):

$$\begin{pmatrix}I_{km}\\ I_{k,m+1}\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}P_{km}\\ P_{k,m+1}\end{pmatrix},$$

$$P_{km}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}U_k(\xi)\Big[\nu\psi_0(x)-(1-\nu)\lambda^2\psi_1(x)\Big]d\xi,$$

$$P_{k,m+1} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi) \left[\nu\psi_2(x) - (1-\nu)\lambda^2 \psi_3(x) \right] d\xi,$$

$$f_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sqrt{1-x^2}\, U_n(x) dx .$$

Как следует из формулы 1.4.8 [8], A_{kn} обладает асимптотикой

$$A_{kn} = -\pi^2 [(n+1)/2] \delta_{kn} + O(e^{-\omega(k+n)}),\ k+n \to \infty,$$

где ω – некоторая постоянная, а δ_{kn} – символ Кронекера.

Таким образом, полученная бесконечная система линейных алгебраических уравнений является системой Пуанкаре – Коха [2] и допускает численное решение методом редукции. При этом решение системы (11) $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ убывает при $k \to \infty$ экспоненциальным образом, что обеспечивает хорошую сходимость метода.

Как показано в [2], коэффициент интенсивности напряжений вблизи концов трещины определяется по формуле

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k ,$$

причём в силу вышесказанного

$$\left| K_{\mathrm{I}} - K_{\mathrm{I}}^{(N)} \right| = O(e^{-N}),\ \ N \to \infty,$$

где $K_{\mathrm{I}}^{(N)}$ – приближённое значение коэффициента интенсивности для размерности $N+1$ редуцированной системы уравнений (11).

Заключение

Найдено эффективное приближённое решение задачи для трещины в неразрезной полосовидной пластинке. Получена оценка скорости сходимости метода. Следует отметить, что этим способом можно построить решение и для произвольно ориентированной трещины.

Список использованных источников

1. *Ulitko A. F.* The vector's expansion in the space elasticity theory. – Kiev: Akademperiodika, 2002. – 341 p. (in Russian).
2. *Popov G. Ya.* Concentration of Elastic Stresses Near Stamps, Cuts, Thin Inclusions, and Reinforcements. – Moscow: Nauka, 1982. – 344 p. (in Russian).
3. *Grishin V. A., Popov G. Ya., Reut V. V.*, Analysis of box-like shells // J. Appl. Math. Mech. – 1980. – V. 44, No 1. – P. 151-160. (in Russian).
4. *Grishin V. A., Reut V. V.* The stressed state of a box-like shell reinforced by a pair of symmetric inclusions parallel to the edge of the shell // J. Appl. Math. Mech. – 1995. – V. 59, No 5. – P. 817-820. (in Russian).
5. *Reut V. V., Rogovskiy S. T.* The influence function for a continuous band-shaped plate // Bulletin of Odessa National State University: Mathematics and Mechanics. – 2012. – V. 17, No 3(15). – P. 126-133. (in Russian).
6. *Love A. E. H.* A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity. – Cambridge: Cambridge University Press, 1927. – 675 p. (in Russian).
7. *Gradsteyn I. S., Ryzhik I. M.* Tables of Integrals, Sums, Series and Products. 4th edition. – Moscow: Phys. math. lit., 1963. – 1100 p. (in Russian).
8. *Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.* Integrals and Series. Special Functions. – Moscow: Nauka, 1983. – 771 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13

УДК 539.3

Сенченков І. К.[1] д. ф.-м. н.,
Оксенчук Н. Д.[1], м. н. с.

Оцінка ефектів термоструктурно-механічної зв'язаності при імпульсному навантаженні півпростору

Розглядається півпростір з мікроструктурними перетвореннями під дією теплового та механічного імпульсів. Для опису нелінійної поведінки матеріалу використовується модель течії, узагальнена на випадок багатофазового складу матеріалу. Задача розв'язується чисельно методом покрокового неявного інтегрування по часу, ітераційного методу та МСЕ. Надаються кількісні оцінки температурних ефектів термоструктурно-механічної зв'язаності.

Ключові слова: імпульсне термомеханічне навантаження, модель течії, термоструктурно-механічна зв'язаність.

[1] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: term@inmech.kiev.ua

I. K. Senchenkov[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.),
N. D. Oksenchuk[1], jun. res.

An estimation of effects of thermostructural mechanical coupling under pulse loading of half-space

A halfspase with microstructural transformations under the influence of heat and mechanical pulses is considered. Nonlinear behavior of the material is described by unified flow model generalized for the case of multiphase material state. The problem is solved numerically by the time step integration method, iterative method and FEM. A quantitative estimations of temperature effects of thermostructural mechanical coupling is given.

Key Words: pulse thermomechanical loading, flow model, thermostructural mechanical coupling

[1] S. P. Timoshenko Institute of mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova str., 1
e-mail: term@inmech.kiev.ua

Вступ

Необхідність дослідження динамічних термоструктурно-механічно (ТСМ) зв'язаних процесів стимулюється розвитком сучасних методів обробки матеріалу і відображає сутність фізичних процесів, що протікають. Це вимагає розвинення нелінійних математичних моделей, постановок крайових задач і методик їх чисельної реалізації. Аналіз літературних джерел показує, що до цього часу такі моделі розвинуто недостатньо. Зокрема, широко відомі моделі течії не узагальнено на випадок врахування впливу фазового складу матеріалу на його непружну поведінку.

В роботі [3] досліджувались температурні ефекти термомеханічної зв'язаності, які зумовлені об'ємними термопружними ефектами та дисипацією механічної енергії. Причому мікроструктурні перетворення (МСП) не враховувались. В даній статті розглядається задача про імпульсне навантаження півпростору та проводиться аналіз ефектів ТСМ зв'язаності. МСП враховуються через термотрансформаційну об'ємну деформацію та залежність непружних характеристик від фазового складу матеріалу. В якості матеріалу вибирається сталь 35ХМА.

Постановка задачі

Постановка задачі термомеханіки включає кінематичні співвідношення Коші, рівняння руху, теплопровідності, а також початкові та граничні умови [1]. Нелінійна поведінка матеріалу описується рівняннями узагальненої моделі течії [2].

Рівняння теплопровідності має вигляд

$$\hat{c}\dot{\theta} = \Delta\left(\hat{k}\Delta\theta\right) + Q, \qquad (1)$$

де

$$Q = -\dot{\sigma}_{kk}\hat{\alpha}T + \chi\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} + \beta\rho\Delta i_{\xi}\dot{C}^{\xi}, \qquad (2)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum\limits_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi}\alpha^{\xi}}{\sum\limits_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi}}, \quad \alpha^{\xi} = \left(V^{\xi} - V_0^{\xi}\right)/3\left(\theta - \theta_0\right)V_0^{\xi},$$

де θ – температура, $\theta = T - 273^{\circ}C$; $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$; $\overline{c}_V$ і $\overline{k}$ – об'ємна теплоємність і коефіцієнт теплопровідності суміші фаз; $\hat{\alpha}$ – узагальнений коефіцієнт об'ємного розширення; $\dot{\sigma}_{kk} = \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{zz} + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ – тензор швидкостей непружної (inelastic) складової деформації; ρ – густина матеріалу; Δi_{ξ} –

© І. К. Сенченков, Н. Д. Оксенчук, 2013

прихована теплота МСП; $V^{\xi}(\theta)$ – питомий об'єм фази ξ для температури θ; C^{ξ} – об'ємна концентрація фази ξ, $\xi = a, f, p, b, m$, де a – аустеніт, f – ферит, p – перліт, b – бейніт, m – мартенсит; β – індикативний параметр, який приймає значення 0 або 1.

Перший доданок у (2) характеризує термопружний механізм зв'язаності; другий – дисипативний механізм і дорівнює частині розсіяної механічної потужності, яка переходить в тепло, нижче приймається $\chi = 0{,}8$; третій доданок визначає приховану (латентну теплоту), яка виділяється або поглинається при структурних перетвореннях.

Метод розв'язування

Задача розв'язується чисельно з використанням неявних часових схем з автоматичним вибором кроку, ітераційного методу та МСЕ для розв'язування лінеаризованої крайової задачі на кожній ітерації.

Термотрансформаційна деформація визначається через питомі об'єми та концентрації фаз [1].

Для дослідження рівня температурних ефектів зв'язаності та їх впливів на термомеханічний процес нижче розглядаються дві задачі. Перша з них – задача про силове імпульсне навантаження півпростору, а друга – про термічне збурення півпростору імпульсом теплового потоку.

Для порівняльного аналізу для кожної з двох задач розглядаються випадки:

1) термоструктурномеханічна зв'язаність відсутня ($\hat{\alpha} = 0;\ \chi = 0;\ \beta = 0$);

2) має місце лише термопружний механізм зв'язаності ($\hat{\alpha} \neq 0;\ \chi = 0;\ \beta = 0$);

3) має місце лише ефект внутрішньої дисипації ($\hat{\alpha} = 0;\ \chi = 0{,}8;\ \beta = 0$);

4) діють перші два механізми зв'язаності ($\hat{\alpha} \neq 0;\ \chi = 0{,}8;\ \beta = 0$);

5) діють всі механізми зв'язаності ($\hat{\alpha} \neq 0;\ \chi = 0{,}8;\ \beta = 1$).

В задачі про силове збурення структурні перетворення відсутні ($\beta = 0$), тому розглядаються випадки 2, 3, 4.

Результати розрахунків та висновки

Розподіли температури по глибині півпростору для декількох моментів часу показані на рис. 1, 2 для випадків 2 і 3.

Механізму 2 відповідає термічна затухаюча хвиля, яка розповсюджується разом з імпульсом напружень. У випадку 3 зміни температури локалізовані біля поверхні півпростору разом із змінними непружними деформаціями.

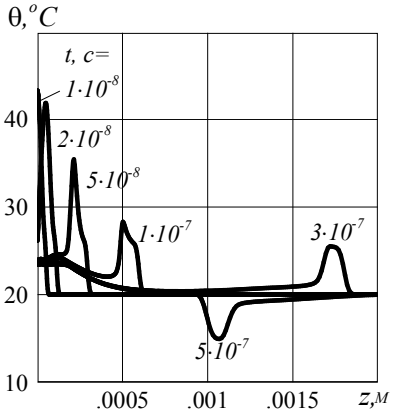


Рис. 1

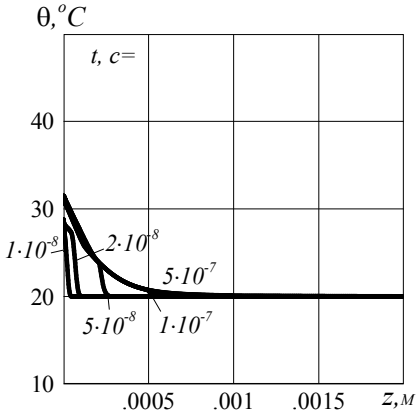


Рис. 2

На рис. 3 показано зміну за часом температури на поверхні півпростору для випадків 1, 2, 3 і 4 (цифри на кривих). Штрихова лінія відповідає зміні напруження σ_{zz} в імпульсі на поверхні. Максимальні підвищення температури складають

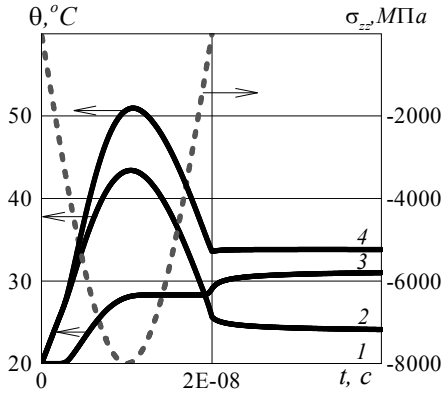


Рис. 3

$23^0 C$, $11^0 C$ і $30^0 C$ для задач 2, 3, 4, відповідно.

На рис. 4 показані розподіли інтенсивності непружних деформацій і напружень σ_{rr}, σ_{zz} для всіх чотирьох задач для одного моменту часу. Термомеханічна зв'язаність практично не змінює розподіли залишкових напружень. ЇЇ вплив на інтенсивність непружних деформацій незначний і не перевищує 3%.

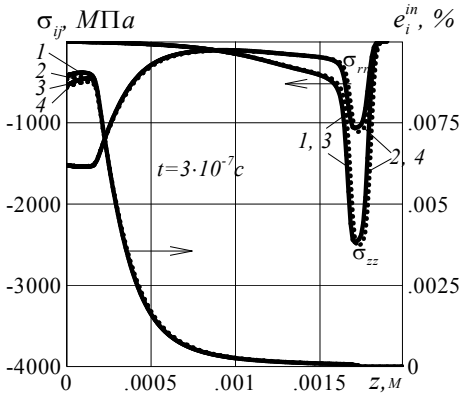


Рис. 4

В задачі про термічне збурення оцінюється вплив всіх трьох складових (2). Відповідно порівнюються наступні випадки:

1) немає термоструктурномеханічної зв'язаності ($\hat{\alpha}=0;\ \chi=0;\ \beta=1$);

2) діє лише термопружний механізм зв'язаності ($\hat{\alpha}\neq 0;\ \chi=0;\ \beta=0$);

3) має місце лише ефект внутрішньої дисипації ($\hat{\alpha}=0;\ \chi=0{,}8;\ \beta=0$);

4) має місце лише ефект прихованої теплоти при фазовому перетворенні ($\hat{\alpha}=0;\ \chi=0{,}8;\ \beta=1$);

5) діють всі механізми зв'язаності ($\hat{\alpha}\neq 0;\ \chi=0{,}8;\ \beta\neq 0$).

Для задачі 2 різниця по максимальній температурі, яка досягається на поверхні, складає $\sim 1^0 C$ в порівнянні із задачею 1.

На рис. 5 показано зміну за часом температури, напруження σ_{rr} та фаз на поверхні півпростору для всіх 5-ти випадків. Суцільні лінії, які відповідають варіантам 1, 2, 3, практично співпадають. Відмінності по максимальній температурі складають не більше $1^0 C$. Задачі 4, 5, де враховуються приховані теплоти фазових перетворень, дають дещо занижене значення температури в часовому інтервалі, де існує аустенітна фаза (на $50^0 C$), за рахунок поглинання тепла при переході початкової фази в аустеніт.

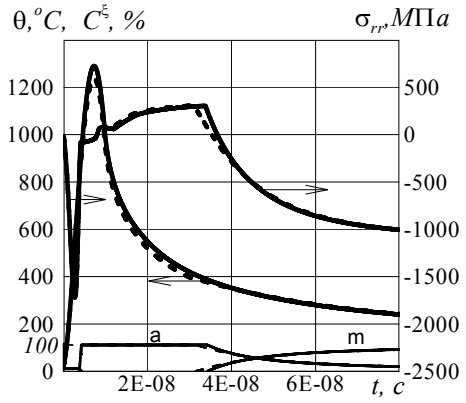


Рис. 5

Відповідно, для них характерний більш ранній вхід в зону температур перетворення аустеніту в мартенсит (злам кривої σ_{rr} відповідає початку перетворення).

В цілому в розглядуваних задачах при силовому та температурному збуренні температурними ефектами зв'язаності можна нехтувати. Але при підвищенні швидкостей термічного навантаження швидкості деформування і внутрішньої дисипації збільшуються, тому в цих випадках можна очікувати більш суттєвих температурних ефектів зв'язаності.

Список використаних джерел

1. *Senchenkov I. K.* Investigation of microstructure influence on the residual stress-strain state of viscoplastic halfspase under pulse thermomechanical loading / I. K. Senchenkov, N. D. Oksenchuk // Teor. ta prykl. mechanica. – Doneck, 2012. – V. 50, N 4. – P. 61-69. (in Ukrainian).
2. *Senchenkov I. K.* Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material / I. K. Senchenkov, N. D. Oksenchuk // J. Math. Sci. – 2013. – V. 190, N 6. – P. 796-803.
3. *Bojchuk O. V.* An Effect of thermo mechanical coupling under pulse loading of half-space / O. V. Bojchuk, N. D. Oksenchuk, O. P. Chervinko // Teor. tai prykl. mechanica. – Doneck, 2011. – V. 49, N 3. – P. 111-118. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Середницька Х. І.[1], аспірант,
Чумак К. А.[1], к. ф.-м. н.,
Мартиняк Р. М.[1], д. ф.-м. н., с. н. с.

Термопружна трансформація міжфазних щілин з теплопроникним заповнювачем, періодично розташованих у біматеріальних структурах

Сформульовано контактні задачі термопружності для біматеріалу з періодичною системою міжфазних тріщин та контактної пари з періодичною системою міжконтактних зазорів, зумовлених початковою регулярною текстурою поверхні одного з тіл. Міжфазні тріщини та міжконтактні зазори заповнені теплопроникним середовищем, вплив якого на теплообмін моделюється термоопором, залежним від висоти зазорів або розкриття тріщин. Кожну з поставлених контактних задач зведено до системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з ядром Гільберта. Числові результати наведені для випадку періодичної системи зазорів, коли форма регулярної текстури поверхні описується деякою неперервно-диференційованою функцією.

Ключові слова: контакт, тріщина, зазор, заповнювач, термоопір.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Kh. I. Serednytska[1], PhD student,
K. A. Chumak[1], PhD (Phys.-Math.),
R. M. Martynyak[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.

Thermoelastic transformation of interfacial separations with heat-permeable filler arranged periodically in bimaterial structures

The thermoelastic contact problems for a bimaterial with a periodic array of interfacial cracks and a contact pair with a periodic array of intercontact gaps due to initial regular surface texture of one of the solids are formulated. The interfacial cracks and the intercontact gaps are filled with a heat-permeable medium. Its influence on heat exchange is modeled by thermal resistance that is dependent on a height of the gaps or a opening of the cracks. Each of the stated contact problems is reduced to a system of non-linear singular integro-differential equations with Hilbert kernel. Numerical results are presented for the case of the periodic array of gaps when the shape of the regular surface texture is described by a certain smooth function.

Key Words: contact, crack, gap, filler, thermal resistance.

[1] Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Вступ

Середовище (газ, рідина) у щілинах, розташованих вздовж поверхонь розмежування компонент кусково-однорідних тіл, істотно впливає на їх термомеханічну поведінку. Раніше вивчено [1-5] контактні і приповерхневі напруження у біматеріальній композиції з урахуванням теплопровідності заповнювача поодинокої щілини, яка виникає у двох практично важливих випадках: 1) розкриття міжфазної тріщини та 2) виникнення зазору на поверхні спряження компонент внаслідок наявності на одній з них поверхневої виїмки.

У цій статті досліджено термопружну трансформацію періодичної системи міжфазних тріщин та інтерфейсних зазорів, що містять теплопроникне середовище.

Періодична система міжфазних тріщин

Розглянемо біматеріальне тіло, компоненти якого характеризуються однаковими модулями зсуву G та коефіцієнтами Пуассона ν і різними коефіцієнтами теплопровідності λ_1, λ_2 та коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1, α_2. На лінії з'єднання компонент біматеріалу з періодом d розташовані міжфазні тріщини однакової довжини $2a$ ($2a < d$) (рис. 1). Порожнини тріщин заповнені теплопроникним середовищем з коефіцієнтом теплопровідності λ_c. На ділянках поза тріщинами між компонентами біматеріалу реалізується ідеальний тепловий та механічний контакт. На безмежності біматеріал піддається дії розтягувальних зусиль p і теплового потоку q,

© Х. І. Середницька, К. А. Чумак, Р. М. Мартиняк, 2013

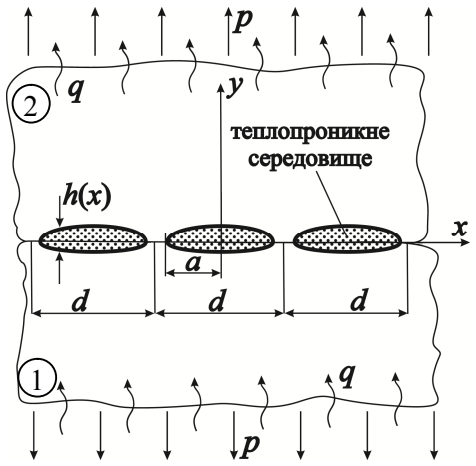


Рис. 1. Біматеріал з періодичною системою міжфазних тріщин

прикладених нормально до міжфазної границі.

В межах кожного періоду вплив тріщини з заповнювачем на температурне поле біматеріалу моделюватимемо термоопором [1, 5]

$$R(x) = h(x)/\lambda_c\,, \qquad (1)$$

де $h(x)$ – нормальне розкриття тріщини.

Узагальнюючи методику [1] на випадок періодичної системи тріщин, температурне поле і напружено-деформований стан у біматеріалі подаємо через нормальне розкриття $h(x)$, стрибок температури $\gamma(x)$ та стрибок дотичних переміщень $U(x)$ між поверхнями кожної з тріщин, для визначення яких отримуємо систему нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) з ядром Гільберта

$$\frac{1}{d}\int_{-a}^{a} h'(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d}dt + \frac{\lambda\eta^-}{2}\big(\gamma(x)-\gamma_{av}\big) = S(x)\,, \quad (3)$$

$$\lambda_c\frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2d}\int_{-a}^{a}\gamma'(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d}dt = q\,, \qquad (4)$$

$$\int_{-a}^{a} U'(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d}dt = \frac{\lambda\eta^+}{2}\int_{-a}^{a}\gamma(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d}dt\,, \quad (5)$$

де $S(x) = -Kp/2$, $|x|<a$, $\lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$, $K = 4(1-\nu)/G$, $\eta^{\pm} = \eta_2 \pm \eta_1$, $\eta_j = \alpha_j(1+\nu_j)/\lambda_j$ – термічна дистортивність [6] компонент біматеріалу ($j = 1, 2$), $\gamma_{av} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\gamma(x)dx$ – усереднений стрибок температури [7].

Шукані функції $h(x)$, $\gamma(x)$, $U(x)$ повинні задовольняти умови [8]

$$h(\pm a) = 0\,, \quad \gamma(\pm a) = 0\,, \quad U(\pm a) = 0\,. \qquad (6)$$

За допомогою заміни змінних $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$ система СІДР (3) – (5) з ядром Гільберта зводиться до системи СІДР з ядром Коші

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta + \frac{\lambda\eta^- d}{2}\frac{\gamma(\xi)-\gamma_{av}}{1+\xi^2} = S(\xi)\,, \qquad (7)$$

$$\lambda_c\frac{\gamma(\xi)}{h(\xi)} - \frac{\lambda(1+\xi^2)}{2d}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\gamma'(\eta)}{\eta-\xi}\frac{\gamma'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta = q\,, \qquad (8)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{U'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta = \frac{\lambda\eta^+ d}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\gamma(\eta)}{(1+\eta^2)(\eta-\xi)}d\eta + \frac{\lambda\eta^+ d}{2\pi}\frac{\xi}{1+\xi^2}\gamma_{av}\,, \qquad (9)$$

де

$$S(\xi) = -\frac{dKp}{2}\frac{1}{1+\xi^2}\,, \quad K = \frac{2(1-\nu_1)}{G_1} + \frac{2(1-\nu_2)}{G_2}\,.$$

До розв'язування системи СІДР (7) – (9) адаптовано ітераційну процедуру, розроблену в [1] для випадку поодинокої теплопроникної тріщини на лінії з'єднання компонент біматеріалу.

Періодична система міжконтактних зазорів

Розглянемо контакт двох півбезмежних тіл, матеріали яких характеризуються різними механічними і термічними властивостями. До контакту поверхня нижнього тіла є ідеально плоскою, а поверхня верхнього тіла має регулярний рельєф, утворений періодичною системою виїмок однакової форми $r(x)$ завдовжки $2b$ кожна, розташованих з періодом d.

Тіла контактують під дією стискальних зусиль p та теплового потоку q, нормальних до інтерфейсу між тілами. Внаслідок початкової регулярної текстури межі верхнього тіла між поверхнями, що контактують, утворяться періодично розташовані зазори (рис. 2), висота $h(x)$ і довжина $2a$ $(a<b)$ яких невідомі та залежать від прикладеного термомеханічного навантаження. Вважаємо, що кожен зазор містить теплопроникне середовище з однаковим коефіцієнтом теплопровідності λ_c. Його вплив на контактний теплообмін моделюватимемо термоопором (1), де $h(x)$ відповідає висоті зазору. На ділянках налягання поверхонь тіл сили тертя відсутні, а тепловий контакт є ідеальним.

Застосовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [9], сформульовану контактну задачу зво-

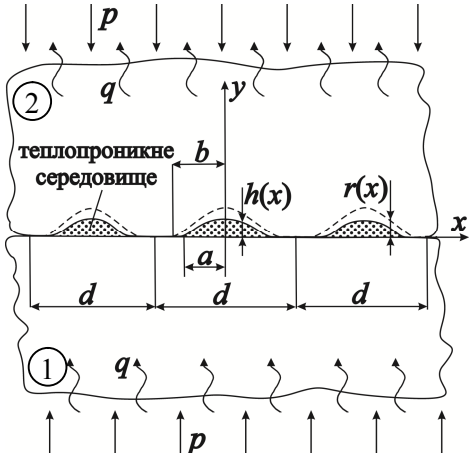


Рис. 2. Контакт тіл з періодичною системою міжконтактних зазорів

димо до системи нелінійних СІДР відносно висоти зазорів $h(x)$ та стрибка температури $\gamma(x)$ між їх поверхнями. Вона має вигляд (3), (4), де

$$S(x)=\frac{1}{d}\int_{-b}^{b} r'(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d}dt+\frac{Kp}{2}.$$

Шукані функції $h(x)$, $\gamma(x)$ задовольняють умови [3, 4]:

$$\gamma(\pm a)=\gamma'(\pm a)=0,\quad h(\pm a)=h'(\pm a)=0. \quad (10)$$

До розв'язування отриманої системи СІДР застосовано розроблену в [4] аналітично-числову методику для випадку поодинокого теплопроникного зазору на інтерфейсі між двома тілами, в основу якої покладено метод послідовних наближень та розвинутий в [3] аналітично-числовий підхід до розв'язування СІДР типу Прандтля у класі функцій, рівних нулю разом з їх першими похідними в кінцях відрізку інтегрування.

Приклад

Нижче наведено результати числових розрахунків для випадку періодичної системи заповнених зазорів на інтерфейсі між двома тілами, коли текстура поверхні одного з тіл описується неперервно-диференційованою функцією

$$r(x)=r_0\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2(\pi x/d)}{\operatorname{tg}^2(\pi b/d)}\right)^{3/2},\quad r_0<<b.$$

Для їх ілюстрації введено наступні безрозмірні параметри: висоту зазору $\tilde{h}=h/d$, стрибок температури $\tilde{\gamma}=\gamma/d$, коефіцієнт теплопровідності міжконтактного середовища $\tilde{\lambda}_c=\lambda_c/\lambda$, стискальні зусилля $\tilde{p}=Kp$, тепловий потік $\tilde{q}=b\eta_1 q$, максимальну висоту виїмок $\tilde{r}_0=r_0/d$, довжину виїмок $\tilde{b}=b/d$, термічну дистортивність $\tilde{\eta}_2=\eta_2/\eta_1$, контактний тиск $\tilde{P}=KP$.

Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що $\tilde{\eta}_2<1$, тобто термічна дистортивність матеріалу верхнього тіла є меншою, ніж термічна дистортивність матеріалу нижнього тіла. За такого припущення алгебраїчний знак $\tilde{q}$ вказує на напрям прикладеного теплового потоку: знак плюс означає, що тепловий потік напрямлений до матеріалу з меншою термічною дистортивністю; знак мінус – з більшою.

Числові розрахунки проведено для $\tilde{r}_0=0{,}001$, $\tilde{b}=0{,}3$ та $\tilde{\eta}_2=0{,}5$.

На рис. 3 – 5 зображено розподіли безрозмірних висоти зазору $\tilde{h}$, модуля стрибка темпера-

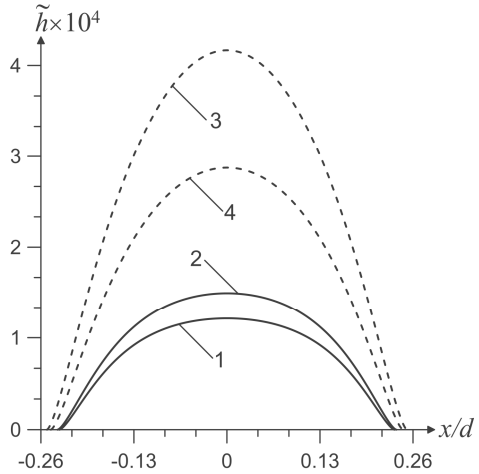


Рис. 3. Висота зазору

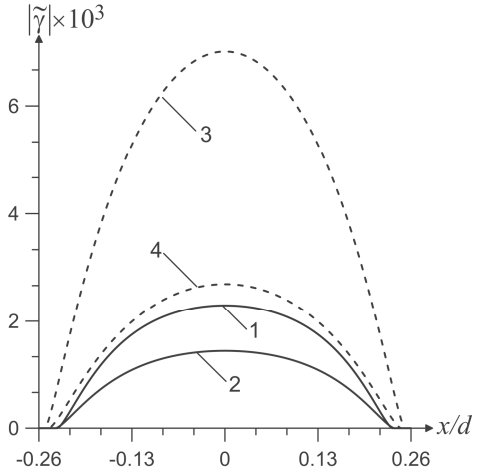


Рис. 4. Стрибок температури між берегами зазору

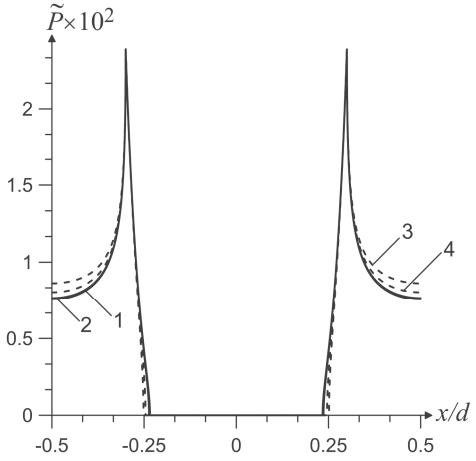


Рис. 5. Контактний тиск

тури $|\tilde{\gamma}|$ між берегами зазору та контактного тиску $\tilde{P}$ відповідно за фіксованого силового навантаження $\tilde{p} = 0{,}005$. На цих рисунках крива 1 відповідає $\tilde{q} = 0{,}1$, $\tilde{\lambda}_c = 0{,}005$; 2 – $\tilde{q} = 0{,}1$, $\tilde{\lambda}_c = 0{,}01$; 3 – $\tilde{q} = -0{,}1$, $\tilde{\lambda}_c = 0{,}005$; 4 – $\tilde{q} = -0{,}1$, $\tilde{\lambda}_c = 0{,}01$.

У разі теплового потоку до тіла з більшою термічною дистортивністю (штрихові криві) збільшення коефіцієнта теплопровідності заповнювача зумовлює зменшення максимальних значень висоти зазору (рис. 3) та модуля стрибка температури між його берегами (рис. 4). Якщо тепловий потік має протилежний напрям (суцільні криві), збільшення коефіцієнта теплопровідності середовища в зазорі зумовлює збільшення максимального значення висоти зазору (рис. 3) та зменшення абсолютного максимального значення стрибка температури (рис. 4). Як і у випадку термопружного контакту тіл за наявності поодинокого міжповерхневого зазору, зумовленого виїмкою на поверхні одного з тіл [2, 4], вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача зазору на розподіл контактного тиску проявляється незначно для двох напрямів теплового потоку (рис. 5).

Робота виконана за часткової фінансової підтримки НАН України (гранту 23-08-12) та ДФФД (проект № Ф 53.1/026).

Список використаних джерел

1. *Martynyak R. M., Honchar K. I.* Thermoelastic deformation of a bimaterial with an interface defect, filled with heat conductive substance // Theor. Appl. Mech. – 2005. – **41**. – P. 58-62 (in Russian).
2. *Martynyak R., Chumak K.* Interfacial gap filler heat conduction influence on thermoelastic contact of solids at heat flow directed to material of larger distortivity // Phys.-Math. Model. Inf. Technol. – 2009. – № 9. – P. 160-169.
3. *Martynyak R. M., Chumak K. A.* Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, № 3. – P. 355-370.
4. *Martynyak R. M., Chumak K. A.* Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids // Int. J. Heat Mass Transf. – 2012. – **55**, № 4. – P. 1170-1178.
5. *Martynyak R. M., Serednytska K. I.* Thermoelasticity of piecewise-homogeneous solid with heat-permeable interfacial crack // Theor. Appl. Mech. – 2012. – **50**, № 4. – P. 91-98. (in Russian).
6. *Dundurs J., Panek C.* Heat conduction between bodies with wavy surfaces // Int. J. Heat Mass Transf. – 1976. – **19**, № 7. – P. 731-736.
7. *Chumak K. A., Martynyak R. M.* Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // Int. J. Heat Mass Transf. – 2012. – **55**, № 21-22. – P. 5603-5608.
8. *Martynyak R. M., Honchar Kh. I., Nahalka S. P.* Simulation of thermomechanical closure of an initially open interface crack with heat resistance // Mater. Sci. – 2003. – **39**, № 5. – P. 672-681.
9. *Shvets R. N., Martynyak R. M.* Thermoelastic contact interaction of bodies in the presence of surface thermophysical irregularities // J. Math. Sci. – 1992. – **62**, № 1. – P. 2512-2517.

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Сидорчук О. А.[1], аспірант,
Черняков Ю. А.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Шнейдер В. П.[1], к. ф.-м. н.

Вплив текстури на пластичне деформування

Розглядається питання формування пластичної анізотропії металів за рахунок утворення кристалографічної текстури. Запропоновано варіант теорії мікродеформації, в якому враховано вплив текстури на пластичне деформування. В межах цього варіанту побудовані визначальні співвідношення початково анізотропного матеріалу. Показано, яким чином початкову анізотропію можна пов'язати з текстурою метала. Розглянуто приклад використання умови Хілла в теорії мікродеформації.

Ключові слова: початкова анізотропія, кристалографічна текстура, умова пластичності Хілла.

[1] Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
49000, м. Дніпропетровськ, просп. Гагаріна, 1
e-mail: shneider_vova@mail.ru

O. A. Sidorchuk[1], PhD student,
Yu. A. Chernyakov[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. P. Shneider[1], PhD (Phys.-Math.)

The Influence Of Texture On Plastic Deformation

The question of the formation of plastic anisotropy of metals at the expense of the formation of crystallographic texture is considered. A version of the theory of microdeformation, which takes into account the influence of the texture on plastic deformation is suggested. Under this option, the defining relationships of initially anisotropic material are constructed. It is shown, how the initial anisotropy can be associated with the texture of metal. The example of application of Hill condition in the microdeformation theory is considered.

Key Words: initial anisotropy, crystallographic texture, Hill condition of plasticity.

[1] Dnepropetrovsk National University of Oles Gonchar, Gagarina, 72, Dnepropetrovsk, 49010
e-mail: shneider_vova@mail.ru

1. Введение

В последнее десятилетие в литературе активно исследуется вопрос о развитии пластической анизотропии в поликристаллах, связанной с образованием текстуры в материале. Это исследование базируется на физических механизмах пластической деформации в кристаллах, основанных на скольжении и двойниковании, и процедурах усреднения по большому количеству зерен. Поскольку в моделях поликристалла можно определить вращение решетки каждого отдельного зерна, то представляется возможным проследить развитие текстуры в материале, что делает этот подход очень привлекательным. Однако его затруднительно применять для решения прикладных задач, в частности, при моделировании процессов обработки металла давлением, поскольку требует много времени для проведения вычислений.

В настоящем статье предлагается вариант теории микродеформации [1-3], в котором допускается наличие текстуры (неравномерное распределение направлений ориентационных тензоров), которая приводит к анизотропии материала. В качестве примера детально исследуется случай начальной анизотропии, отвечающей условию текучести Хилла [4], который часто используется для моделирования анизотропии, возникающей в прокатных листах.

2. Разрешающие уравнения теории

В теории пластичности, учитывающей микродеформации, элементарный представительный объем задается в виде некоторой совокупности N взаимосвязанных зерен. Однородное напряженно-деформированное состояние зерна с номером n определяется микронапряжениями $\boldsymbol{\sigma}_n$ и микродеформациями $\boldsymbol{\varepsilon}_n$. При этом микрочастица с номером n идентифицируется ориентационным тензором $\boldsymbol{\alpha}_n \in \Omega$, связанным с кристаллической структурой, и определяющим предпочтительное

© О. С. Сидорчук, Ю. А. Черняков, В. П. Шнейдер, 2013

направление однородной пластической деформации зерна подобно системам скольжения в кристаллах. В рассмотренных ранее вариантах теории $\boldsymbol{\alpha}_n \in \Omega$ принимался направляющим девиатором или тензором ($\boldsymbol{\alpha}_n : \boldsymbol{\alpha}_n = 1$) и, кроме того, все направления распределялись равномерно в девиаторном пространстве. В этом случае, как показано в работах [1-3], приходим к первоначально изотропному материалу и к начальному условию пластичности в форме Губера – Мизеса. В случае, когда поликристалл имеет определенную текстуру, то распределение направлений становится неравномерным, что приводит к изменению условий нормировки ориентационного тензора.

Учитывая указанные особенности обобщенного варианта теории микродеформации, представим разрешающие уравнения теории в следующем виде

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p = \dot{\lambda}_n \boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \tau_0 \boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\alpha}_n : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n = 1, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n = \dot{\boldsymbol{\tau}}_n + \dot{\boldsymbol{\rho}}_n, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p), \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{n=1}^{N} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p, \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_m = \sum_{n=1}^{N} R_{mn} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p, \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_n = a(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (6)$$

Здесь $\dot{\boldsymbol{\tau}}_n$ и $\dot{\boldsymbol{\rho}}_n$ – скорость изменения диссипативной и «упругой» составляющих сопротивления пластическим деформациям, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор макронапряжений, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор скорости макродеформации, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ – тензор скорости пластической макродеформации, $\mathbf{G}$ – тензор четвертого ранга, определяющий матрицу упругой жесткости поликристалла, τ_0 – локальный предел текучести n-го зерна, $\dot{\lambda}_n$ ($\dot{\lambda}_n = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pn} : \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pn}}$) – интенсивность скорости микропластической деформации, R_{mn} – матрица влияния, a – константа материала.

Записанные выше соотношения (1) имеют место при активном микропластическом деформировании, которое определяется условиями Куна – Такера:

$$\boldsymbol{\tau}_n : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n - \tau_0 \le 0, \quad \dot{\lambda}_n > 0,$$

$$[\boldsymbol{\tau}_n : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n - \tau_0]\dot{\lambda}_n = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем будет использоваться простейшее представление для матрицы влияния

$$R_{mn} = R_1 \delta(1 - \boldsymbol{\alpha}_m : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n) + R_2 \boldsymbol{\alpha}_m : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n + \\ + R_3 + R_4 \delta(1 + \boldsymbol{\alpha}_m : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n), \quad (8)$$

где $\delta(0) = 1$, а в остальных точках $\delta(x) = 0$.

Умножая правую и левую часть уравнения (6) скалярно на $\mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n$ и подставляя в полученное соотношение уравнения (2), (4) и (5), получаем (с учетом симметричности тензоров) для частиц, которые деформируются пластически

$$(R_1 + a)\dot{\lambda}_n + R_3 \dot{\Lambda} = \dot{\mathbf{r}} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n, \quad (9)$$

где обозначено

$$\dot{\Lambda} = \sum_{n=1}^{N} \dot{\lambda}_n, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (R_2 - a)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p. \quad (10)$$

Решение (9) имеет вид

$$\dot{\lambda}_n = \frac{1}{R_1 + a}\left[\dot{\mathbf{r}} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n - \frac{R_3}{R_1 + a - R_3 \omega} \dot{\mathbf{r}} : \mathbf{A} : \mathbf{F}\right] \quad (11)$$

и ω – суммарное количество зерен, в которых имеет место пластическое деформирование и

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (4), приходим к определяющим соотношениям теории микродеформации

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \mathbf{G}_p : \mathbf{A} : \dot{\mathbf{r}}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{G}_p = \frac{1}{R_1 + a}\left(\mathbf{G}_1 - R_3 \omega \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}\right), \quad \mathbf{G}_1 = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (14)$$

Легко показать, что начальное условие текучести теории микродеформации (1) – (6) представляется в виде

$$\mathbf{s} : \mathbf{A} : \mathbf{s} = \tau_0^2. \quad (15)$$

Построим девиатор четвертого ранга $\mathbf{A}_0$ такой, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 : \mathbf{A}_0$ или $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}^{1/2}$ и введем новые переменные

$$\boldsymbol{\alpha}_n' = \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\alpha}_n, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p' = \mathbf{A}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \quad \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{A}_0 : \dot{\mathbf{r}}. \quad (16)$$

Полученный таким образом девиатор $\boldsymbol{\alpha}'_n$ будет направляющим $\boldsymbol{\alpha}'_n : \boldsymbol{\alpha}'_n = 1$ и соотношения (1) в штрихованных переменных примут вид

$$\mathbf{A}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_n = \dot{\lambda}_n \boldsymbol{\alpha}'_n , \quad \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\tau}_n = \tau_n \boldsymbol{\alpha}'_n . \tag{17}$$

Если теперь умножить на $\mathbf{A}_0$ правую и левую часть (13), то получим

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'_p = \mathbf{G}'_p : \dot{\mathbf{r}}', \tag{18}$$

где

$$\mathbf{G}'_p = \frac{1}{R_1 + a}\left(\mathbf{G}'_1 - R_3 \Omega \mathbf{F}' \otimes \mathbf{F}'\right),$$

$$\mathbf{G}'_1 = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}'_n \boldsymbol{\alpha}'_n , \quad \mathbf{F}' = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}'_n . \tag{19}$$

Легко установить, что определяющие соотношения в штрихованных переменных совпадают с соотношениями для изотропного материала. Таким образом, если в модели с начальной анизотропией перейти к штрихованным переменным по формулам (17), то в искаженном девиаторном пространстве мы приходим к изотропному материалу с матрицей касательной жесткости, которая определяется по первой из формул (19).

3. Приложение к анизотропной функции Хилла

Рассмотрим в качестве примера деформацию стальных прокатных листов в условиях плоского напряженного состояния. Листы, как известно, имеют различные свойства в трех взаимно ортогональных направлениях: 1 – направление прокатки, 2 – поперек прокатки и 3 – перпендикулярно листу. Введем декартовую систему координат, направляющие оси которой совпадают с осями анизотропии $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ и матрицу поворотов четвертого порядка, которая определяет изменения ориентационных тензоров $\boldsymbol{\mu}_n$ по отношению к изотропному случаю. Ориентационный тензор считается связанным с кристаллической структурой зерна и в силу этого при возникновении текстуры он может быть представлен, как

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = {} & A_1 \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1 + A_2 \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2 + \\ & + A_3 \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2 + A_4 \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 .\end{aligned} \tag{20}$$

В таком случае начальное условие пластичности (15) примет вид

$$A_1 s_{11}^2 + A_2 s_{22}^2 + A_3 s_{11} s_{22} + A_4 s_{12}^2 = \tau_0^2 \tag{21}$$

или через компоненты тензора напряжений

$$(4A_1 + A_2 - 2A_3)\sigma_{11}^2 + (A_1 + 4A_2 - 2A_3)\sigma_{22}^2 -$$
$$-(4A_1 + 4A_2 - 5A_3)\sigma_{11}\sigma_{22} + 9A_4\sigma_{12}^2 = 9\tau_0^2 .$$

Если ввести обозначения

$$H = (2A_1 + 2A_2 - (5/2)A_3)/9\tau_0^2 ,$$
$$G + H = (4A_1 + A_2 - 2A_3)/9\tau_0^2 ,$$
$$F + H = (A_1 + 4A_2 - 2A_3)/9\tau_0^2 ,$$
$$N = A_4/(2\tau_0^2),$$

то из (21), очевидным образом, приходим к анизотропному критерию текучести Хилла [4], который имеет вид

$$\sqrt{(G+H)\sigma_{11}^2 + (F+H)\sigma_{22}^2 - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} + 2N\sigma_{12}^2} - 1 = 0 , \tag{22}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений и F, G, H, N – постоянные характеристики анизотропии, которые могут быть выражены через пределы текучести в соответствующем направлении, как и в работе [4]:

$$\begin{aligned} 2G &= \frac{1}{(\sigma_x^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_y^Y)^2} + \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \\ 2F &= \frac{1}{(\sigma_y^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_x^Y)^2} + \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \\ 2H &= \frac{1}{(\sigma_x^Y)^2} + \frac{1}{(\sigma_y^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \\ 2N &= \frac{1}{(\sigma_{xy}^Y)^2} = \frac{1}{(\sigma_{45}^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \end{aligned} \tag{23}$$

где σ_x^Y, σ_y^Y, σ_{45}^Y – пределы текучести при растяжении в продольном, поперечном и диагональном, по отношению к направлению прокатки, направлениях; σ_{xy}^Y – напряжение текучести при сдвиге, и σ_B^Y – напряжение текучести при двухосном растяжении.

На основании формулы (16), находим

$$A^0_{1111} = \sqrt{G+H}, \quad A^0_{2222} = \sqrt{F+H}, \qquad A^0_{1122} = \sqrt{H}, \quad A^0_{1212} = \sqrt{N}. \tag{24}$$

Таким образом, текстура, которая вызывает введенную выше деформационную анизотропию, определит

$$\alpha'_{11} = A^0_{1111}\alpha_{11} + A^0_{1122}\alpha_{22}, \qquad \alpha'_{22} = A^0_{2211}\alpha_{11} + A^0_{2222}\alpha_{22}, \qquad \alpha'_{12} = A^0_{1212}\alpha_{12}. \tag{25}$$

Остальные направления остаются неизменными. Записанные формулы (25) позволяют определить кристаллографическую текстуру, приводящую к начальной анизотропии.

Выводы

Полученные в работе результаты позволяют в рамках теории микродеформации по известной матрице первоначальной анизотропии построить начальную текстуру и, наоборот, по известной текстуре установить начальную анизотропию. Приведен пример построения текстуры соответствующей условию пластичности Хилла [5].

Список використаних джерел

1. *Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A.* Theory of plasticity, taking into account microstrain // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. – 1985. – **284**. – No. 4. – P. 821-823. (in Russian).
2. *Kadashevich Yu. I., Novozhilov V. V., Chernyakov Yu. A.* Theory of plasticity and creep, taking into account microstrain // Applied Mechanics and Mathematics. – 1986. – **50**. – No. 6. – P. 890-897.
3. *Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A.* Theory of plasticity, taking into account microstresses // Advances in Mechanics. – 1992. – **15.** – No. 3-4. – P. 3-39.
4. *Hill R.* A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. 1948, Proc. R. Soc. Lond. – **A 193**. – P. 281-297.
5. *Kadashevich Yu. I., Novozhilov V. V.* Theory of plasticity, taking into account residual microstresses Applied Mechanics and Mathematics. 1958. – **XXII**. – No. 1. – P. 78-89.
6. *Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I.* About the influence of the initial microstresses on macroplastic deformation of polycrystals // Applied Mechanics and Mathematics. – 1968. – **32.** – No. 5. – P. 908-922.
7. *Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I.* On the accounting of microstresses in the theory of plasticity // Mechanics of Solids. – 1968. – No. 3. – P. 82-91.
8. *Kroner E.* Zur plastischen Verformung des Vielkristalls // Acta Metallurgica. – 1961. – **9** (2). – S. 155-191.
9. *Ilyushin A. A.* Questions of the general theory of plasticity // Applied Mechanics and Mathematics. – 1963. – **24**. – No. 3. – P. 399-411.
10. *Taherizadeh A., Green D.E., Ghaei A., Yoon J.-W.* A non-associated constitutive model with mixed iso-kinematic hardening for finite element simulation of sheet metal forming // International Journal of Plasticity. – 2010. – **26**. – P. 288-309.

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Сулим Г. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Онишкевич В. М.[2], к. ф.-м. н., доц.

Взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором при теплоутворенні на ділянці контакту

Розглянуто осесиметричну контактну задачу про втискування циліндричного штампа, що обертається, у пружний півпростір з урахуванням теплоутворення на ділянці контакту. Розв'язок задачі термопружності для півпростору отримано за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля, а задачу теплопровідності для циліндра розв'язано методом прямих. Враховано можливість існування зон відриву півпростору від штампа із зміненим термоопором. Отримано розрахункові формули для температурних полів, теплових потоків та контактних напружень у взаємодіючих тілах.

Ключові слова: неідеальний контакт, термічна проникливість, контактні напруження.

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
[2] Національний лісотехнічний університет України, 79057, м. Львів, вул. Генерала Чупринки, 103
e-mail: vlodkoo@meta.ua

G. T. Sulym[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. M. Onyshkevych[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Interaction between a rigid cylinder and elastic haf-space subject to heat generation on the contact area

The axisymmetrical contact problem of pressure of the rotating cylindrical punch into an elastic half-space with heat generation on the contact area is considered. Solution of the problem of thermoelasticity for a half-space is obtained by means of the Hankel integral transformation and heat conduction problem for a cylinder is solved of the method of straight lines. The existence of the different half-space separation zones from the punch is established. The thermal fields, heat flows and contact stresses in the interacting bodies are determined.

Key Words: non-ideal contact, thermal resistance, contact stresses.

[1] Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
[2] National Forestry University of Ukraine,
79057, L'viv, General Chuprynka str., 103
e-mail: vlodkoo@meta.ua

Вступ

Дослідження з контактної взаємодії в термопружності розпочалося у працях [1, 2], але у них та більшості інших публікацій не бралося до відома випинання основи і, як наслідок, цілком можливе відставання деяких ділянок штампа від основи. Задачу неповного контакту плоскої основи штампа з пружним півпростором вперше було розглянуто у [3] за спрощених крайових умов. Пізніше дослідження цієї тематики знайшло продовження, наприклад, у [4, 5]. У [6] було вперше з'ясовано, що причиною термомеханічного розшарування тіл може бути ділянка недосконалого теплового контакту.

Постановка задачі

Розглядається жорсткий циліндричний штамп радіусу a і висоти H, який, обертаючись з кутовою швидкістю ω, втискується силою P в пружний півпростір. Тертя між взаємодіючими тілами спричиняється до утворення теплових потоків, направлених у півпростір і штамп. Верхній торець циліндра піддається конвективному нагріванню чи охолодженню, між бічними поверхнями і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона, через незавантажену поверхню півпростору відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Його температуру вважаємо нульовою, напружено-деформований і температурний стан контактуючих тіл – незалежним від кутової координати.

З урахуванням цього для розв'язання задачі необхідно зінтегрувати систему рівнянь

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} + k\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial r}, \quad \Delta u_z + k\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial r^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

де $k = (\lambda + \mu)/\mu = 1/(1-2\nu)$; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; ν – коефіцієнт Пуассона; λ, μ – коефіцієнти Ламе; α_T – температурний коефіцієнт лінійного розши-

© Г. Т. Сулим, В. М. Онишкевич, 2013

рення. При цьому треба врахувати температурні крайові умови

$$z=0:\quad \partial t^{(1)}/\partial z=\gamma_0 t^{(1)},\ r\le a; \tag{3}$$

$$r=a:\quad \partial t^{(1)}/\partial r=-\gamma_a t^{(1)},\ z\le H; \tag{4}$$

$$z=H:$$

$$\lambda^{(1)}\partial t^{(1)}/\partial z-\lambda^{(2)}\partial t^{(2)}/\partial z=-f_T\omega r\sigma_z(r),\ r<a; \tag{5}$$

$$\lambda^{(2)}\partial t^{(2)}/\partial z+\lambda^{(1)}\partial t^{(1)}/\partial z=h\left(t^{(2)}-t^{(1)}\right),\ r<a; \tag{6}$$

$$\partial t^{(2)}/\partial z=\gamma_H t^{(2)},\quad r>a \tag{7}$$

та силові крайові умови

$$z=H:\quad u_z=f,\quad r<a; \tag{8}$$

$$\sigma_z=0,\quad r>a; \tag{9}$$

$$\tau_{rz}=0,\quad r<\infty \tag{10}$$

у разі заданих γ_0, γ_a, γ_H – коефіцієнтів теплообміну відповідно між верхнім торцем циліндра, бічними поверхнями циліндра, незавантаженою поверхнею півпростору з одного боку і зовнішнім середовищем з іншого, коефіцієнта теплопроникності контакту h, величини осідання штампа f, коефіцієнтів теплопровідності циліндра і півпростору $\lambda^{(i)}$ ($i=1$ відноситься до циліндричного штампа, $i=2$ – до півпростору).

Розв'язок задачі для циліндра

Використовуючи скінченно-різницеву апроксимацію рівняння теплопровідності для циліндра і крайових умов (3), (4) за безрозмірною радіальною координатою $\rho=r/a$, розв'язок задачі для циліндра будується методом прямих в області $G=\{0\le\rho\le 1;\ 0\le\zeta\le 1\}$, де $\zeta=z/H$ і зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt_i^{(1)}}{d\zeta}=\tilde t_i^{(1)},\quad i=\overline{1,N};$$

$$\frac{d\tilde t_1^{(1)}}{d\zeta}=\frac{4H^2}{a^2\Delta\rho^2}\left(t_1^{(1)}-t_2^{(1)}\right);$$

$$\frac{d\tilde t_i^{(1)}}{d\zeta}=\frac{H^2}{a^2\Delta\rho^2}\left(-\frac{2i-3}{2(i-1)}t_{i-1}^{(1)}+2t_i^{(1)}-\frac{2i-1}{2(i-1)}t_{i+1}^{(1)}\right)$$

$$i=\overline{2,N-1};$$

$$\frac{d\tilde t_N^{(1)}}{d\zeta}=-\frac{2H^2}{a^2\Delta\rho^2}\left(t_{N-1}^{(1)}-t_N^{(1)}\right)+\frac{H^2\gamma_a}{a}\left(1+\frac{2}{\Delta\rho}\right), \tag{11}$$

де $\Delta\rho=\rho_i-\rho_{i-1}$, $i=\overline{1,N-1}$; N – кількість точок розбиття. Подаючи отриману систему у вигляді $d\vec v/d\zeta=B\vec v$, її розв'язок знаходимо за допомогою матричної експоненти [7] $\vec v(\zeta)=\exp(B\zeta)\vec d$, де $\vec d$ – сталий вектор, що визначається з (3) для кожної прямої.

Розв'язок задачі для півпростору

Застосовуючи до першого рівняння (1) інтегральне перетворення Ганкеля першого порядку, а до другого рівняння (1) і рівняння (2) при $i=2$ – нульового порядку, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок яких можна подати у вигляді [8]:

$$\overline{t}(\xi,\ \zeta_1)=B(\xi)\exp(-\xi\zeta_1),$$

$$\overline{u}_z(\xi,\zeta_1)=\frac{\Lambda B(\xi)}{2\xi}\left(1-\xi\zeta_1\right)\exp(-\xi\zeta_1)+$$

$$+\xi^2\left[kC_1(\xi)+2C_2(\xi)+k\xi\zeta_1C_2(\xi)\right]\exp(-\xi\zeta_1),$$

$$\overline{\sigma}_z(\xi,\zeta_1)=\mu\Lambda\xi\zeta_1B(\xi)\exp(-\xi\zeta_1)-$$

$$-2\mu\xi^3\left(kC_1(\xi)+C_2(\xi)+k\xi\zeta_1C_2(\xi)\right)\exp(-\xi\zeta_1),$$

$$\overline{\tau}_{rz}(\xi,\zeta_1)=-\mu\Lambda B(\xi)\left(1-\xi\zeta_1\right)\exp\left(-\xi\zeta_1\right)+2\mu\xi^3\times$$

$$\times\left[(k-1)C_2(\xi)-kC_1(\xi)-k\xi\beta\zeta_1C_2(\xi)\right]\exp(-\xi\zeta_1), \tag{12}$$

де

$$\zeta_1=z-H,\ \Lambda=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T=-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_T,$$

$B(\xi)$, $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ – невідомі функції.

Використовуючи формули обернення і задовольняючи силові крайові умови (8) і (9), у безрозмірних координатах $\rho=r/a$, $\eta=a\xi$ отримаємо при $\rho<1$:

$$\frac{1}{a^2}\int_0^\infty\eta\left[\theta_1\eta^2C_1(\eta)+\theta_3a^3\eta^{-1}C_3(\eta)\right]J_0(\eta\rho)d\eta=f;$$

при $\rho>1$:

$$\frac{1}{a^5}\int_0^\infty\eta\left[\sigma_1\eta^3C_1(\eta)+\sigma_3a^3C_3(\eta)\right]J_0(\eta\rho)d\eta=$$

$$=\sigma_z(\rho)H(1-\rho). \tag{13}$$

Температурні крайові умови (5) – (7) дадуть співвідношення

при $\rho<1$:

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\zeta}+\frac{\lambda^{(2)}}{a^3}\int_0^\infty\eta^2C_3(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=-af_T\omega\rho\sigma_z(\rho);$$

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\zeta}+ht^{(1)}=\frac{1}{a^2}\int_0^\infty\left(h+\frac{\lambda^{(2)}\eta}{a}\right)\eta C_3(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta;$$

при $\rho > 1$:

$$\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \eta\left(\eta + a\gamma_H\right)C_3(\eta)J_0(\eta\rho)\,d\eta = \\ = \chi(\rho)H(1-\rho). \quad (14)$$

У цій системі рівнянь для зручності її розв'язування довизначено праві частини рівнянь при $\rho > 1$ фіктивними контактними напруженнями $\sigma_z(\rho)$ і температурою $\chi(\rho)$, які з огляду на властивості функції Гевісайда $H(\cdot)$ суті крайових умов не змінюють. Подамо ці функції у вигляді скінчених сум ряду Фур'є – Бесселя

$$\sigma_z(\rho) = \sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\lambda_n\rho),$$

$$\chi(\rho) = b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} b_n J_0(\lambda_n\rho) \quad (15)$$

з наперед невідомими коефіцієнтами a_n та b_n. Після підстановки (15) у (13), (14) та використання формули обернення інтегрального перетворення Ганкеля отримаємо вирази для визначення невідомих функцій $C_1(\xi)$ і $C_3(\xi)$. Підставляючи ці вирази в систему (13), (14) і задовольняючи крайові умови (3) в рівновіддалених точках $\rho_i = (i-1)/(N-1)$, $i = \overline{1, N}$ отримано систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $a_i, b_{i-1}, d_j, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, 2N}$, яку розв'язано методом Ґаусса. Повертаючись у формулах (12) в простір оригіналів та використовуючи обчислені значення коефіцієнтів, отримано вирази для температури і теплових потоків у контактуючих тілах та переміщень пружного півпростору.

Числові результати

При числових розрахунках було отримано розподіл контактних напружень, який за різних значень параметрів задачі може дати два якісно різні випадки контактної взаємодії.

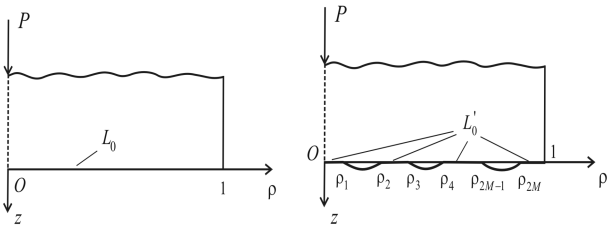
У першому випадку розраховані контактні напруження σ_z на всій ділянці $L_0 : \rho \in [0; 1]$ не є додатними (від'ємні або дорівнюють нулю). Це означає, що на всій цій ділянці штамп прилягає до основи (рис. 1, а), крайові умови (5), (6) і (8) виконані, а отримані контактні напруження та розподіл температури будуть остаточними. При цьому з умови рівноваги штампа обчислюється прикладена до нього сила, яка спричинила задане осідання f:

$$P = 2\pi a^2 \int_0^1 \sigma_z(\rho, 0)\rho\,d\rho = 2\pi a^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\lambda_n} J_1(\lambda_n),$$

де λ_n $(n = \overline{1, N})$ – нулі функції Бесселя нульового порядку.

Зазначимо, що на тих ділянках, де нормальні напруження дорівнюють нулю при виконанні умови $u_z = 0$, можна вважати, що існує дотиковий контакт. У подальшому відсутністю контакту вважатимемо умову, коли поверхня штампа перебуває на певній відстані від поверхні здеформованого півпростору. Відтак такі ділянки, де $\sigma_z = 0,\ u_z = 0$ будемо відносити до області контакту.

У другому випадку на певній ділянці $L_1 = \bigcup_{m=1}^{M} L^{2m}$, яка складається з сукупності M проміжків $L^{2m} = [\rho_{2m-1}; \rho_{2m}]$ $(0 = \rho_0 \le \rho_1,\ \rho_i < \rho_{i+1},\ \rho_{2M} \le \rho_{2M+1} = 1;\ m = \overline{1, M},\ i = \overline{1, 2M})$, розраховані значення напруження σ_z мають строго додатне значення. Це би означало, що на цих ділянках якісь зусилля мали би притягувати штамп до півпростору, а відтак отриманий розв'язок не є коректним розв'язком контактної задачі, оскільки існує велика ймовірність того, що штамп контактує з півпростором на ділянці $L_0' = L_0 - L_1 = \bigcup_{m=0}^{M} L^{2m+1}$, а на L_1 контакт відсутній (рис. 1, б).



а) б)

Рис. 1. Схема контактної взаємодії: а) повний контакт (область контакту $L_0 : \rho \in [0; 1]$); б) неповний контакт (область контакту $L_0' = L_0 - L_1$)

Тут $L^1 = [\rho_0; \rho_1)$, $L^{2m+1} = (\rho_{2m}; \rho_{2m+1})$ $(m = \overline{1, M-1})$, $L^{2M+1} = (\rho_{2M}; \rho_{2M+1}]$, причому проміжки L^1, L^{2M+1} кожен зокрема чи обидва разом можуть дорівнювати нулю. Відтак треба змінити первісне формулювання крайових умов (5), (6), (8). Інші умови залишаються у незмінному вигляді. У нульовому наближенні вважатимемо, що справджується припущення про контакт штампа на L_0', а тому замість L_0 тепер треба брати L_0', а для лінії L_1 умо-

ва відсутності контакту (навіть дотикового) запишеться так:

$$\zeta_1 = 0,\ \rho \in L_1: \qquad \sigma_z = 0,\ \ u_z > f;$$
$$\lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial z = \lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial z,$$
$$\lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial z + \lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial z = h_0\left(t^{(2)} - t^{(1)}\right), \qquad (16)$$

де h_0 – коефіцієнт теплопроникності контакту на ділянці L_1.

Зазначена зміна крайових умов змушує розв'язувати основну систему рівнянь вже лише на проміжку L_0', а на ділянці L_1 – систему рівнянь, яка забезпечує виконання крайових умов (16). У цьому разі з умови рівноваги штампа прикладена до нього сила дорівнює

$$P = 2\pi\rho_1^2\sum_{n=1}^{N_1}\frac{a_n}{\lambda_n}J_1(\lambda_n) + 2\pi(\rho_3-\rho_2)^2\sum_{n=1}^{N_3}\frac{a_n}{\lambda_n}J_1(\lambda_n) + \ldots + 2\pi(1-\rho_{2M})^2\sum_{n=1}^{N_{2M+1}}\frac{a_n}{\lambda_n}J_1(\lambda_n).$$

Тут N_{2m+1} – кількість точок розбиття проміжків L^{2m+1} $(m=\overline{0,M})$, у яких значення контактних напружень не додатні.

Числові розрахунки здійснено для випадку, коли матеріал циліндра – сталь, а матеріал півпростору – алюміній, $\gamma_0=\gamma_a=\gamma_H=10\ \text{м}^{-1}$, $f_T=0{,}01$, $f=0{,}2$ мм, $\alpha_T=22{,}9\times10^{-6}\ \text{K}^{-1}$, $h=1000$ кВт/(м^{2}К), $\omega=0{,}3\ \text{с}^{-1}$, $H=0{,}3$ м, $a=1$ м. За таких вхідних даних при використанні однакової для кожного проміжку розбиття L^i кількості точок розбиття $N_i=20$ після шести ітерацій було отримано другий випадок (відставання штампа) з однозв'язною областю контакту $L_0'=L^1=[0;\rho_1)$ при числовому значенні $\rho_1\approx0{,}65$. Відзначимо, що врахування теплоутворення на ділянці контакту суттєво впливає на результати: температура і теплові потоки в циліндрі та півпросторі збільшуються, з'являється їх чітко виражений максимум. Збільшення притискувальної сили спричиняє відповідне зростання шуканих величин, однак вертикальні переміщення границі півпростору зростають в напрямку, протилежному до дії сили (рис. 2). Крива 1 відповідає значенню сили P = 23 МН, а крива 2 – значенню 57 МН.

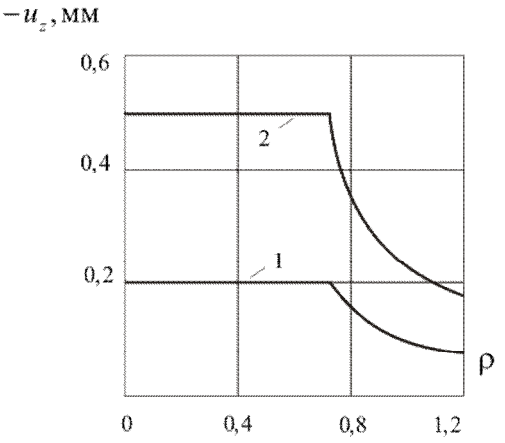


Рис. 2. Вертикальні переміщення границі півпростору

Список використаних джерел

1. *Borodachov N. M.* About solution of contact problem of thermoelasticity in the case of axis symmetry // Izv. AN SSSR, OTN. Mehanika i mashinostroyenie. – 1962. – № 5. – P. 86-90. (in Russian).
2. *George D. L.* The axisymmetric Boussinesq problem for a heat punch / D. L. George, I. N. Sneddon // J. Math. and Mech.– 1962.– **11**, № 5. – P. 665-689.
3. *Barber J. R.* Distribution of heat between sliding surfaces solids / J. R. Barber // J. Mech. Eng. Sci. – 1967. – **9**, № 5. – P. 351-354.
4. *Kulchytsky-Zhyhailo R.* Stress distribution in axi-symmetric contact problems with heat generation / R. Kulchytsky-Zhyhailo // J. Friction and Wear. – 2000. – **21**, № 3. – P. 238-245.
5. *Yevtushenko A. A.* Axi-symmetrical transient contact problem for sliding bodies with heat generation / A. A. Yevtushenko, R. D. Kulchytsky-Zhyhailo // Int. J. Solids Struct. – 1995. – **32**, № 16. – P. 2369-2376.
6. *Martyniak R. M.* Thermoelastic contact interaction of bodies with surface heatphysical nonhomogeneouses / Shvets R. N., Martyniak R. M. // Mat. met. i fiz.-meh. polya. – 1988. – **27**. – P. 23-28. (in Russian).
7. *Rakitskiy Yu. V., Ustinov S. M., Chernoruckiy I. G.* Numerical methods of solution of rigid systems. – Moscow: Nauka, 1979. – 208 p. (in Russian).
8. *Grylitskyi D. V., Shelestovskyi B. G.* Axi-symmetrical contact problems of thermoelasticity. – L'viv, Vyshcha shk., 1974. – 113 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 15.03.13

УДК 539.3

Сулим Г. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Турчин І. М.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Колодій В. О.[1], аспірант

Динамічна плоска задача теорії пружності для радіально-шаруватого циліндра

З використанням методу поліномів Лагерра одержано розв'язок динамічної задачі теорії пружності для кусково-однорідного циліндра. Розв'язок одержано у вигляді подвійного ряду за поліномами Лагерра та тригонометричними функціями.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, неоднорідне тіло, аналітичний розв'язок.

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

H. T. Sulym, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
I. M. Turchyn, PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
V. O. Kolodiy, PhD Student

Dynamic plane problem of elasticity for radially layered cylinder

Using the method of Laguerre polynomials the solution of the dynamic problem of elasticity theory for inhomogeneous cylinder is obtained. The solution is presented in the form of a double series of Laguerre polynomials and trigonometric functions.

Key Words: dynamic problem of elasticity, inhomogeneous cylinder, analytical solution.

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Вивчення динамічного поводження неоднорідних тіл, зумовленого локальним силовим навантаженням є актуальним завданням сучасних інженерних досліджень в механіці [3], [5].

Як відомо, пряме використання класичного аналітичного підходу до побудови розв'язків відповідних початково-крайових задач – методу інтегрального перетворення Лапласа у випадку неоднорідних чи кусково-однорідних тіл створює значні труднощі при переході від трансформант до оригіналів. Особливо це стосується двовимірних чи просторових випадків, коли виникає потреба у проведенні одночасного обернення інтегральних перетворень за часовою і просторовою змінними [6]. Навіть у випадку, коли інтегральне перетворення за просторовою змінною здійснюється із дискретним спектром [6], проведення математично обґрунтованого обернення інтегрального перетворення Лапласа викликає значні труднощі. Тому багато авторів вдаються до числових способів обернення або безпосередньо до числових схем розв'язування задач математичної фізики, що може суттєво спотворити не лише кількісні характеристики явища, що досліджується, а й якісну картину нестаціонарного процесу.

Нами пропонується застосовувати до таких задач метод поліномів Лагерра [4]. У зв'язку з цим розглядається композитне тіло, що складається з M циліндричних шарів з різними фізико-механічними властивостями. Внутрішньому циліндру відповідає індекс $i = 1$, а зовнішньому $i = M$. Циліндри припасовані один до одного таким чином, що впродовж усього процесу деформування між ними виконуються умови ідеального механічного контакту.

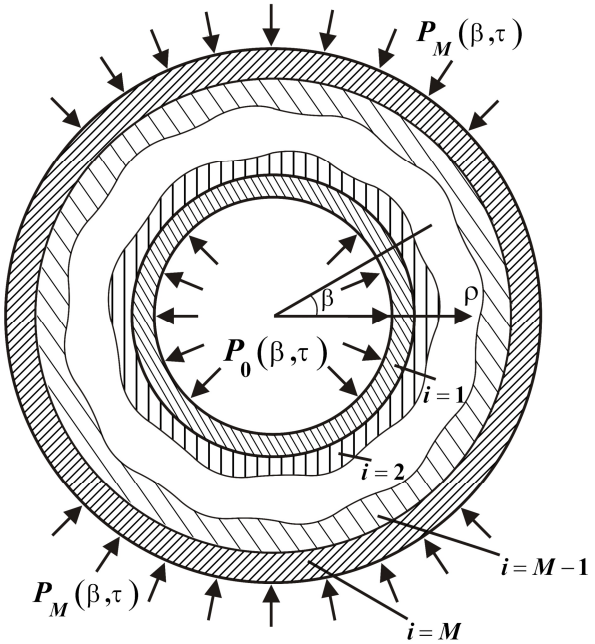


Рис. 1. Схема задачі

Джерелом нестаціонарних процесів вважається самозрівноважене нормальне навантаження внутрішньої та зовнішньої поверхні композитного циліндра, локально розподілене за кутовою змінною (рис. 1). Рівняння динамічної задачі теорії пружності

© Г. Т. Сулим, І. М. Турчин, В. О. Колодій, 2013

$$\frac{\partial^2\theta^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta^{(i)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta^{(i)}}{\partial\beta^2}=\tilde{c}_{1,i}^2\frac{\partial^2\theta^{(i)}}{\partial\tau^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\beta^2}=\tilde{c}_{2,i}^2\frac{\partial^2\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\tau^2}, \qquad (2)$$

сформульовані в термінах ключових функцій, що мають конкретний механічний зміст – об'ємного розширення

$$\theta^{(i)}(\rho,\beta,\tau)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u^{(i)})}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon^{(i)}}{\partial\varphi}$$

та компоненти вектора пружного повороту

$$\omega_\gamma^{(i)}(\rho,\beta,\tau)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\upsilon^{(i)})}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon^{(i)}}{\partial\varphi},$$

де $u^{(i)}(\rho,\beta,\tau)$ і $\upsilon^{(i)}(\rho,\beta,\tau)$ – радіальна та кутова компоненти вектора переміщення в i-му циліндрі.

Рівняння (1), (2) розглядаються з нульовими початковими умовами

$$\theta^{(i)}=\partial_\tau\theta^{(i)}=\omega_\gamma^{(i)}=\partial_\tau\omega_\gamma^{(i)}=0,\quad \tau=0, \qquad (3)$$

крайовими умовами для 1-го та M-го циліндрів

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_0,\beta,\tau)=P_0(\beta,\tau),\quad \sigma_{\rho\beta}^{(1)}(\rho_0,\beta,\tau)=0; \qquad (4)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(M)}(1,\beta,\tau)=P_M(\beta,\tau),\ \sigma_{\rho\beta}^{(M)}(1,\beta,\tau)=0 \qquad (5)$$

та умовами спряження циліндричних шарів

$$u^{(i)}=u^{(i+1)},\ \upsilon^{(i)}=\upsilon^{(i+1)},\quad \rho=\rho_i; \qquad (6)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(i)}=\sigma_{\rho\rho}^{(i+1)},\quad \sigma_{\rho\beta}^{(i)}=\sigma_{\rho\beta}^{(i+1)},\quad \rho=\rho_i, \qquad (7)$$

де $\rho=r/R_M$, $\tau=c_{1,0}t/R_M$, $\tilde{c}_{1,i}=c_{1,i}/c_{1,0}$, $\tilde{c}_{2,i}=c_{2,i}/c_{1,0}$, $\kappa_i^2=c_{1,i}/c_{2,i}$, $\rho_i=R_i/R_M$; R_M, R_0 – зовнішній та внутрішній радіуси композитного циліндра; R_i – радіус поверхні поділу матеріалів i-го та $(i+1)$-го циліндра; $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ – швидкості поширення хвиль розширення та зсуву у матеріалі i-го циліндра; $c_{1,0}$ – швидкість поширення хвиль розширення в деякому матеріалі (вибирається залежно від завдань числового аналізу); $P_0(\beta,\tau)$ і $P_M(\beta,\tau)$ – задані, відповідно, на внутрішній та зовнішній поверхнях композитного циліндра нормальні зусилля.

Застосування інтегрального перетворення Лагерра [4] за часовою змінною та скінченого інтегрального перетворення Фур'є [6] за кутовою змінною до рівнянь (1), (2) із урахуванням початкових умов (3), фізичних умов симетрії та періодичності призводить до послідовностей звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho}-\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\lambda^2\tilde{c}_{1,i}^2\right)\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}=\lambda^2\tilde{c}_{1,i}^2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)\overline{\theta}_{k,m}^{(i)}, \qquad (8)$$

$$\frac{d^2\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho}-\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\lambda^2\tilde{c}_{2,i}^2\right)\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}=\lambda^2\tilde{c}_{2,i}^2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)\overline{\omega}_{k,m}^{(i)}, \qquad (9)$$

де

$$\begin{bmatrix}\theta_n^{(i)}(\rho,\beta)\\ \omega_n^{(i)}(\rho,\beta)\end{bmatrix}=\int_0^\infty\begin{bmatrix}\exp(\lambda\tau)\theta^{(i)}(\rho,\beta,\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau\\ \exp(\lambda\tau)\omega_\gamma^{(i)}(\rho,\beta,\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau\end{bmatrix}$$

– зображення за Лагерром,

$$\begin{bmatrix}\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho)\\ \overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho)\end{bmatrix}=\int_0^\infty\begin{bmatrix}\theta_n^{(i)}(\rho,\beta)\cos\beta m\,d\beta\\ \omega_n^{(i)}(\rho,\beta)\sin\beta m\,d\beta\end{bmatrix}$$

– зображення за Фур'є, λ – масштабний множник.

Загальний розв'язок послідовностей (8), (9), як відомо [7], має вигляд алгебричної згортки

$$\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho)=\sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j,m}^{(i)}G_{j,m}\left(\eta_{1,i}\rho\right)+B_{n-j,m}^{(i)}W_{j,m}\left(\eta_{1,i}\rho\right)\right],$$

$$\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho)=\sum_{j=0}^{n}\left[C_{n-j,m}^{(i)}G_{j,m}\left(\eta_{2,i}\rho\right)+D_{n-j,m}^{(i)}W_{j,m}\left(\eta_{2,i}\rho\right)\right], \qquad (10)$$

де $\eta_{k,i}=\lambda\tilde{c}_{k,i}$, $A_{n-j,m}^{(i)}, B_{n-j,m}^{(i)}, C_{n-j,m}^{(i)}, D_{n-j,m}^{(i)}$ – набір сталих, а $G_{j,m}(x)$ та $W_{j,m}(x)$ – лінійно незалежні послідовності фундаментальних розв'язків рівнянь (8) чи (9), які з використанням методу невизначених коефіцієнтів можна подати у вигляді

$$G_{j,m}(x)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{\mathrm{I}_{k+m}(x)}{k!},$$

$$W_{j,m}(x)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}\left(-\frac{x}{2}\right)^k\frac{\mathrm{K}_{k+m}(x)}{k!}, \qquad (11)$$

де $\mathrm{I}_\nu(x)$ і $\mathrm{K}_\nu(x)$ – модифіковані функції Бесселя, а коефіцієнти $a_{j,k}$ визначаються із рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1} = \sum_{m=k}^{j-1} (j-m+1) a_{m,k}\,, \qquad (12)$$

де $a_{j,k} = 0$ при $k > j$ і $a_{j,0}$ – довільні.

Для подальших викладок за виглядом ключових функцій віднайдемо трансформанти компонент вектора переміщень $\overline{u}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ і $\overline{v}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ із використанням систем диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \overline{\theta}^{(i)}_{n,m} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho\overline{u}^{(i)}_{n,m})}{\partial\rho} + \dfrac{m}{\rho}\overline{v}^{(i)}_{n,m}, \\ \overline{\omega}^{(i)}_{n,m} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho\overline{v}^{(i)}_{n,m})}{\partial\rho} + \dfrac{m}{\rho}\overline{u}^{(i)}_{n,m}. \end{cases} \qquad (13)$$

Зокрема, це можна зробити, увівши в розгляд функції $\overline{P}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ і $\overline{Q}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ формулами

$$\overline{u}^{(i)}_{n,m} = \frac{\partial\overline{P}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho} + \frac{m}{\rho}\overline{Q}^{(i)}_{n,m}; \quad \overline{v}^{(i)}_{n,m} = -\frac{m}{\rho}\overline{P}^{(i)}_{n,m} - \frac{\partial\overline{Q}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho}. \qquad (14)$$

Безпосередня підстановка подань (14) у системи (13) призводить до двох відокремлених рівнянь

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\overline{P}^{(i)}_{n,m}\right) - \frac{m^2}{\rho^2}\overline{P}^{(i)}_{n,m} = \overline{\theta}^{(i)}_{n,m},$$

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\overline{Q}^{(i)}_{n,m}\right) - \frac{m^2}{\rho^2}\overline{Q}^{(i)}_{n,m} = -\overline{\omega}^{(i)}_{n,m},$$

розв'язки яких, враховуючи, що $\overline{\theta}^{(i)}_{n,m}$ і $\overline{\omega}^{(i)}_{n,m}$ задовольняють рівняння (8), (9), одержано у вигляді

$$\overline{P}^{(i)}_{n,m} = \frac{1}{\eta^2_{1,i}}\left[\overline{\theta}^{(i)}_{n,m} - 2\overline{\theta}^{(i)}_{n-1,m} + \overline{\theta}^{(i)}_{n-2,m}\right]; \qquad (15)$$

$$\overline{Q}^{(i)}_{n,m} = -\frac{1}{\eta^2_{2,i}}\left[\overline{\omega}^{(i)}_{n,m} - 2\overline{\omega}^{(i)}_{n-1,m} + \overline{\omega}^{(i)}_{n-2,m}\right]. \qquad (16)$$

При знаходженні розв'язків (15) і (16) було використано відому з дискретного аналізу формулу

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)\left(f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}\right) = f_n, \quad f_{-1} = f_{-2} \equiv 0.$$

Знаючи вирази для трансформант вектора переміщень $\overline{u}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ і $\overline{v}^{(i)}_{n,m}(\rho)$, можна знайти трансформанти компонент тензора напружень

$$\frac{\overline{\sigma}^{(i)}_{\rho\rho,n,m}}{\mu_i} = (\kappa_i^2 - 2)\overline{\theta}^{(i)}_n + 2\frac{\partial\overline{u}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho},$$

$$\frac{\overline{\sigma}^{(i)}_{\rho\beta,n,m}}{\mu_i} = \frac{1}{\rho}\left(-m\overline{u}^{(i)}_{n,m} - \overline{v}^{(i)}_{n,m}\right) + \frac{\partial\overline{v}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho}, \qquad (17)$$

де μ_i – модуль зсуву. Із використанням подань (17) і (14), задовольняючи трансформованим крайовим умовам і умовам спряження одержано послідовності рекурентних систем алгебричних рівнянь для визначення невідомих $A^{(i)}_{n-j,m}$, $B^{(i)}_{n-j,m}$, $C^{(i)}_{n-j,m}$, $D^{(i)}_{n-j,m}$:

$$\begin{pmatrix}
b^m_{1,1} & \dots & b^m_{1,4} & 0 & & \dots & \dots & & 0 \\
b^m_{2,1} & \dots & b^m_{2,4} & 0 & & \dots & \dots & & 0 \\
b^m_{3,1} & \dots & b^m_{3,4} & b^m_{3,5} & \dots & b^m_{3,8} & 0 & \dots & 0 \\
b^m_{4,1} & \dots & b^m_{4,4} & b^m_{4,5} & \dots & b^m_{4,8} & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \dots & & \ddots & & \dots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & b^m_{4M-3,4M-7} & \dots & b^m_{4M-3,4M-4} & b^m_{4M-3,4M-3} & \dots & b^m_{4M-3,4M} \\
0 & \dots & 0 & b^m_{4M-2,4M-7} & \dots & b^m_{4M-2,4M-4} & b^m_{4M-2,4M-3} & \dots & b^m_{4M-2,4M} \\
0 & & \dots & \dots & & 0 & b^m_{4M-1,4M-3} & \dots & b^m_{4M-1,4M} \\
0 & & \dots & \dots & & 0 & b^m_{4M,4M-3} & \dots & b^m_{4M,4M}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A^{(1)}_{n,m} \\ B^{(1)}_{n,m} \\ C^{(1)}_{n,m} \\ D^{(1)}_{n,m} \\ \vdots \\ A^{(M)}_{n,m} \\ B^{(M)}_{n,m} \\ C^{(M)}_{n,m} \\ D^{(M)}_{n,m} \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} H^{(1)}_{n,m} \\ H^{(2)}_{n,m} \\ H^{(3)}_{n,m} \\ H^{(4)}_{n,m} \\ \vdots \\ H^{(4M-3)}_{n,m} \\ H^{(4M-2)}_{n,m} \\ H^{(4M-1)}_{n,m} \\ H^{(4M)}_{n,m} \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

В системах (18) коефіцієнти матриці не залежать від n, а права частина із ростом n поповнюється одержаними при попередніх значеннях n розв'язками.

Блочно-теплицева структура матриці $\left(b^m_{k,l}\right)$ систем (16) дає змогу із використанням процедури Гаусса звести їх до трикутного вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}^m & b_{1,2}^m & b_{1,3}^m & b_{1,4}^m & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2}^m & \tilde{b}_{2,3}^m & \tilde{b}_{2,4}^m & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{3,3}^m & \tilde{b}_{3,5}^m & \dots & \tilde{b}_{3,8}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{4,4}^m & \dots & \tilde{b}_{4,8}^m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & & \ddots & & \dots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{4M-3,4M-3}^m & \tilde{b}_{4M-3,4M-2}^m & \tilde{b}_{4M-3,4M-1}^m & \tilde{b}_{4M-3,4M}^m \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{4M-2,4M-2}^m & \tilde{b}_{4M-2,4M-1}^m & \tilde{b}_{4M-2,4M}^m \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{4M-1,4M-1}^m & \tilde{b}_{4M-1,4M}^m \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{4M,4M}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n,m}^{(1)} \\ B_{n,m}^{(1)} \\ C_{n,m}^{(1)} \\ D_{n,m}^{(1)} \\ \vdots \\ A_{n,m}^{(M)} \\ B_{n,m}^{(M)} \\ C_{n,m}^{(M)} \\ D_{n,m}^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{n,m}^{(1)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(2)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(3)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4)} \\ \vdots \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M-3)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M-2)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M-1)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M)} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

де величини $\tilde{b}_{i,j}^m$ та $\tilde{H}_{n,i}^m$ пов'язані із відповідними $b_{i,j}^m$ та $H_{n,i}^m$ через рекурентні співвідношення. Трикутна структура систем (19) дає змогу одержати її точний рекурентний розв'язок для довільного числа складових циліндра M.

Знайшовши послідовно із систем (19) всі $A_{n-j,m}^{(i)}, B_{n-j,m}^{(i)}, C_{n-j,m}^{(i)}, D_{n-j,m}^{(i)}$, одержимо трансформанти $\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho)$ і $\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho)$, із використанням яких оригінали відповідних величин відновлюються за формулами

$$\theta^{(i)}(\rho, \beta, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho) \cos m\beta,$$

$$\omega_{\gamma}^{(i)}(\rho, \beta, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho) \sin m\beta. \quad (20)$$

Аналогічно до (20), із використанням співвідношень (14) – (17) відновлюються оригінали компонент вектора переміщень та тензора напружень.

Список використаних джерел

1. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. U.S. Govt. Print. Off., 1964. – 850 p.
2. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids // Appl. math. and mech. V.16. – Amsterdam, London: North-Holland publ. co., New York : Amer. Elsievier Publ. Co., 1973. – 425 p.
3. *Babayev A. E.* Nonstationary waves in solid media with the reflective surfaces. – Kiev: Naukova Dumka, 1990. – 176 p. (in Russian).
4. *Halazyuk* V. A. The method of Chebyshev – Laguerre polynomials in the mixed problem for a linear differential equation of second order with constant coefficients // Doklady Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A – 1981. – № 1. – P. 3-7.
5. *Sagomonyan A. Ya.* Stress Waves in Continuous Media. – Moscow: Moscow University, 1985. – 347 p. (in Russian).
6. *Slepyan L. I., Yakovlev Yu. S.* Integral Transforms in Unsteady Problems in Mechanics. – Leningrad: Sudostroenie, 1980. – 343 p. (in Russian).
7. *Timár I., Sulym H., Turchyn I., Shchukin V.* The Laguerre polynomials method in the dynamic problem of elasticity for a multilayered half-space // GÉP. – 2005. – No 6. – P. 5-9.

Надійшла до редколегії 15.03.13

УДК 539.3

Токовий Ю. В.[1], к. ф.-м. н.

Осесиметричні температурні напруження у пружному скінченному циліндрі за нагріву частини бічної поверхні

Запропоновано підхід до побудови аналітичного розв'язку осесиметричної задачі термопружності для суцільного циліндра скінченної довжини у випадку нагріву частини бічної поверхні. З використанням методу перехресної суперпозиції розв'язок задачі для напружень знайдено у вигляді сум рядів Фур'є та Бесселя – Діні. Для визначення коефіцієнтів цих рядів отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, для розв'язання якої застосовано модифікований метод редукції.

Ключові слова: скінченний циліндр, розривне навантаження, термонапруження.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-Б
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

Yu. V. Tokovyy[1], PhD (Phys.-Math.)

Axisymmetric themperature stresses in an elastic cylinder of finite length due to partial heating of its lateral surface

An approach for construction of an analytical solution to the axially symmetric thermoelasticity problem for a solid cylinder of finite length is presented for the case of partial heating of its lateral surface. By making use of the method of cross-wise superposition, the solution for stresses is constructed by decompositions into Fourier and Bessel – Dini series. For determination of the coefficients in these series, a infinite system of linear algebraic equations is obtained and then solved by means of an advanced reduction algorithm .

Key Words: finite cylinder, discontinuous loading, thermal stresses.

[1] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine,
79060, L'viv, 3-B Naukova st.
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

Вступ

Побудова розв'язків переважної більшості двота тривимірних крайових задач теорії пружності й термопружності зазнає ускладнення у випадку, коли крайові умови задано негладкими чи розривними функціями. Це пов'язано із повільним асимптотичним згасанням коефіцієнтів розвинень заданих на межі тіла функцій у ряди при використанні методу відокремлення змінних, що негативно позначається на ефективності отриманих розв'язків крайових задач, особливо для тіл скінченних розмірів з кутовими точками.

У цій статті розвинуто методику побудови аналітичного розв'язку осесиметричної задачі термопружності для суцільного скінченного циліндра з теплоізольованими торцями за нагріву бічної поверхні по рівновіддаленій від торців частині бічної поверхні. Уся поверхня циліндра є вільною від силових навантажень. У випадку безмежно довгого циліндра задачу про осесиметричний нагрів частини бічної поверхні розв'язано в [1] за сталого розподілу температурного поля у межах термічно навантаженої ділянки бічної поверхні. Для скінченного циліндра таку задачу із використанням методу суперпозиції розв'язано у роботі [2]. Для розв'язання отриманої у результаті застосування такого підходу нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь, яка відображає зв'язок наявних у виразах для шуканих компонент тензора напружень вільних сталих із крайовими умовами, використано алгоритм простої редукції, який не забезпечує прийнятної точності задоволення крайових умов для даної задачі внаслідок слабкого асимптотичного згасання відповідних коефіцієнтів розвинень крайових умов у ряди за радіальною та осьовою координатами. Тут для подолання цієї проблеми використано алгоритм покращеної редукції, який базується на теорії лімітант та законі асимптотичних виразів Б. М. Кояловича і розвинутий в роботах А. Ф. Улітка [3]. Цей підхід враховує асимптотичну поведінку невідомих нескінченної алгебричної системи рівнянь і значно підвищує ефективність розв'язку. У випадку силової задачі такий підхід використано, зокрема, у роботах [4, 5].

© Ю. В. Токовий, 2013

Постановка задачі

Розглянемо пружний суцільний циліндр скінченної довжини $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $|z| \le h$, віднесений до циліндричної системи координат (r, θ, z). Тут r, z – безрозмірні радіальна та осьова координати, a та $2h$ – відповідно безрозмірні радіус та довжина твірної циліндра. Торці циліндра вважаємо теплоізольованими

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h, \tag{1}$$

а на бічній поверхні підтримується температура, задана наступним законом:

$$T = \begin{cases} \tau(z), & z \in [-h_0, h_0], \\ 0, & z \in [-h, h] \setminus [-h_0, h_0], \end{cases} \quad r = a, \tag{2}$$

де $h_0 \le h$, а функція $\tau(z)$ є гладкою та непарною. Ставиться задача визначення напруженого стану циліндра внаслідок стаціонарного розподілу температури, спричиненого крайовими умовами (1), (2) за відсутності зовнішніх зусиль на поверхні циліндра.

Побудова розв'язку

Внаслідок крайових умов (1), (2) розподіл температури і, як наслідок, шуканий напружений стан є симетричними відносно осі циліндра. Температурне поле знайдемо зі стаціонарного рівняння теплопровідності [6] у вигляді розвинення в ряд Фур'є

$$T = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} T_n \cos k_n z, \tag{3}$$

де $\{T_0, T_n\} = \frac{1}{h}\int_0^{h_0} \tau(z)\{1,\ 2\cos k_n z\}dz$, $k_n = n\pi/h$, $I_m(r)$ – модифікована функція Бесселя першого роду m-го порядку.

Для визначення напруженого стану циліндра внаслідок дії температурного поля (3) використаємо класичний підхід [6, 7], який полягає у поданні компонентів тензора напружень у вигляді двох складових

$$\sigma_\beta = \sigma_\beta^* + \sigma_\beta^{(T)}, \ \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^* + \sigma_{rz}^{(T)}, \ \beta = \{r, \theta, z\}. \tag{4}$$

Складові з верхнім індексом (T), спричинені градієнтом температури (3), знайдено з використанням потенціалу Папковича – Гудьєра у вигляді

$$\sigma_r^{(T)}/K = -T_0/2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} + \frac{k_n^2 r^2 - 2}{k_n r}\frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)}\right) T_n \cos k_n z,$$

$$\sigma_\theta^{(T)}/K = -T_0/2 - \\ - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} - \frac{2}{k_n r}\frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)}\right) T_n \cos k_n z,$$

$$\sigma_z^{(T)}/K = -T_0 - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} + \frac{k_n r}{2}\frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)}\right) T_n \cos k_n z, \tag{5}$$

$$\frac{\sigma_{rz}^{(T)}}{K} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)} + \frac{k_n r}{2}\frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)}\right) T_n \sin k_n z,$$

де $K = \alpha E/(1-\nu)$; ν, α – коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення.

Напруження (5) спричинюють виникнення зусиль на бічній поверхні та торцях циліндра. Задля забезпечення умов вільної від напружень поверхні циліндра, скористаємося поданням (4), взявши для складових, позначених зірочкою, крайові умови у вигляді

$$\begin{aligned} &\sigma_r^* = -\sigma_r^{(T)}(a, z), \quad \sigma_{rz}^* = -\sigma_{rz}^{(T)}(a, z), \quad r = a, \\ &\sigma_z^* = -\sigma_z^{(T)}(r, \pm h), \quad \sigma_{rz}^* = 0, \qquad\qquad z = \pm h. \end{aligned} \tag{6}$$

Для визначення цих складових розв'язку використаємо метод перехресної суперпозиції [6, 7]. Скористаємось виразом [7] бігармонічної функції Лява

$$\chi(r, z) = B_0 z^3 + D_0 r^2 z + \chi_s + h\sum_{j=1}^{\infty} Y_j R_j(z)\frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 J_0(\lambda_j a)} + \\ + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n k_n^{-3} X_n S_n(r)\sin k_n z, \tag{7}$$

де

$$\chi_s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{s_n}{k_n^3}\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}\sin k_n z;$$

$$R_j(z) = \left(h\,\mathrm{cth}\,\lambda_j h + \frac{2\nu}{\lambda_j}\right)\frac{\mathrm{sh}\,\lambda_j z}{\mathrm{sh}\,\lambda_j h} - z\frac{\mathrm{ch}\,\lambda_j z}{\mathrm{sh}\,\lambda_j h};$$

$$S_n(r) = \left(2\frac{\nu - 1}{k_n} - a\frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)}\right)\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + r\frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)};$$

B_0, D_0, Y_j, X_n $(j, n = 1, 2, ...)$ – невідомі коефіцієнти; λ_j – додатні корені рівняння $J_1(\lambda a) = 0$; $J_0(r)$, $J_1(r)$ – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків, $s_n = (-1)^n T_n[k_n a/2 + I_1(k_n a)/I_0(k_n a)]$. Вирази для компонентів тензора напружень встановимо із використанням (7) та співвідношень

$$\sigma_r^* = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\right), \quad \sigma_z^* = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right),$$

$$\sigma_\theta^*=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\chi-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right),\quad \sigma_{rz}^*=\frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\nabla^2\chi-\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right).$$

Знайдені у такий спосіб дотичні напруження тотожно задовольняють умови (6) на повній поверхні циліндра, а радіальні та осьові напруження набувають вигляду

$$\sigma_r^* = 6\nu B_0 - 2(1-2\nu)D_0 -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n s_n\left[\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}-\frac{I_1(k_n r)}{k_n r I_1(k_n a)}\right]\cos k_n z +$$
$$+h\sum_{j=1}^{\infty}Y_j\left[\left(h\operatorname{cth}\lambda_j h-\frac{1}{\lambda_j}\right)\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}-z\frac{\operatorname{sh}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}\right]\frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}+$$
$$-h\sum_{j=1}^{\infty}Y_j\left[\left(h\operatorname{cth}\lambda_j h-\frac{1-2\nu}{\lambda_j}\right)\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}-z\frac{\operatorname{sh}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}\right]\frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)}+$$
$$+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k_n}X_n\left[\left(k_n a\frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)}+1\right)\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}-k_n r\frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)}-\right.$$
$$\left.-\left(2\frac{1-\nu}{k_n}+a\frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)}\right)\frac{I_1(k_n r)}{r I_1(k_n a)}\right]\cos k_n z,$$
$$\sigma_z^* = 6(1-\nu)B_0 + 4(2-\nu)D_0 + \qquad (8)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n s_n\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}\cos k_n z -$$
$$-h\sum_{j=1}^{\infty}Y_j\left[\left(h\operatorname{cth}\lambda_j h+\frac{1}{\lambda_j}\right)\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}-z\frac{\operatorname{sh}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}\right]\frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}+$$
$$+a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n X_n\left[\left(\frac{2}{k_n}-a\frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)}\right)\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}+r\frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)}\right]\cos k_n z.$$

Підстановкою виразів (8) у крайові умови (6), праві частини яких попередньо розвинуто у ряди Фур'є за осьовою та Бесселя – за радіальною координатою, приходимо до двох систем лінійних алгебричних рівнянь, перша з яких для елементарних частин напружень має вигляд

$$\begin{cases}6\nu B_0 - 2(1-2\nu)D_0 = f_0,\\ 6(1-\nu)B_0 + 4(2-\nu)D_0 = g_0,\end{cases} \qquad (9)$$

а друга є такою:

$$\begin{cases}X_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty}Y_j\frac{4k_n^2}{(k_n^2+\lambda_j^2)^2} = f_n^*, \quad n=1,2,\dots,\\ Y_j\Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty}X_n\frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2+\lambda_j^2)^2} = g_j^*, \quad j=1,2,\dots,\end{cases} \qquad (10)$$

де

$$P_n = a^2\left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)}-1\right)-2\frac{1-\nu}{k_n^2},\ \Delta_j=\frac{h}{\lambda_j}\operatorname{cth}\lambda_j h+\frac{h^2}{\operatorname{sh}^2\lambda_j h},$$
$$f_0=\frac{T_0}{2},\ g_0=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n T_n\left(1+\frac{2}{k_n a}\frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)}\right),$$
$$f_n^*=\frac{(-1)^n k_n a T_n}{2}\left(\frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)}-\frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)}\right),$$
$$g_j^*=-\frac{2\lambda_j^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n k_n T_n}{(k_n^2+\lambda_j^2)^2}\frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)}.$$

Побудова розв'язку системи рівнянь (9) не викликає ускладнень. Для розв'язання ж нескінченної системи рівнянь (10) скористаємося алгоритмом удосконаленої редукції [3, 6, 7], який ґрунтується на застосування закону асимптотичних виразів Б. М. Кояловича

$$\lim_{n\to\infty}X_n=\lim_{j\to\infty}Y_j=G=\text{const}\neq 0.$$

Слід зауважити, що ефективність такого підходу залежить від швидкості згасання вільних членів у рівняннях системи (10), які виражаються через коефіцієнти розвинень крайових умов у відповідні ряди. Внаслідок розривності чи негладкості крайових умов таке асимптотичне згасання є доволі повільним, що суттєво ускладнює побудову розв'язку системи (10). Для подолання цієї проблеми скористаємось підходом [3-5], згідно з яким перейдемо до нових змінних

$$X_n = G + x_n + \frac{(-1)^n k_n I_1(k_n a)T_n}{2aI_0(k_n a)},\quad Y_j = G + y_j, \qquad (11)$$

де $x_n = o(1),\ n\to\infty,\quad y_j = o(1),\ j\to\infty$. Внаслідок підстановки (11) в систему (10) остання набуває вигляду

$$\begin{cases}x_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{4k_n^2 y_j}{(k_n^2+\lambda_j^2)^2}+\frac{2(1+\nu)G}{k_n^2}=\psi_n,\\ y_j\Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\lambda_j^2 x_n}{(k_n^2+\lambda_j^2)^2}+\frac{2G}{\lambda_j^2}=0,\\ (1+\nu)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{k_n^4}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{y_j}{\lambda_j^4}+G\left(\frac{1+\nu}{90}h^4+\frac{a^4}{192}\right)=\gamma,\end{cases} \qquad (12)$$

де

$$\psi_n=(-1)^n\frac{1-\nu}{k_n^3 a}\frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)}T_n,$$
$$\gamma=\frac{1-\nu}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n T_n}{k_n^3}\frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)}.$$

Зауважимо, що вільні члени системи (12) згасають, принаймні, на порядок швидше, ніж у системі (10), внаслідок чого система (12) є регулярною і може бути розв'язаною з використанням алгоритму простої редукції, поклавши $x_n \equiv 0$ $(n > N)$ та $y_j \equiv 0$ $(j > J)$, де N та J – певні значення відповідних індексів. Після визначення наборів $\{x_1, \dots, x_N, 0, \dots\}$, $\{y_1, \dots, y_J, 0, \dots\}$ та сталої G із (12), на основі (11) знайдемо коефіцієнти напружень (8).

Числовий приклад

Розглянемо розрахунок напруженого стану циліндра $a = h = 1$ у випадку нагріву бічної поверхні (2), де 1) $\tau(z) = \tau_0 = \text{const}$ та 2) $\tau(z) = -3(z^2 - h_0^2)\tau_0/(2h_0^2)$ і $h_0 = 1/2$. Розподіли радіальних напружень за осьовою координатою наведено на рис. 1.

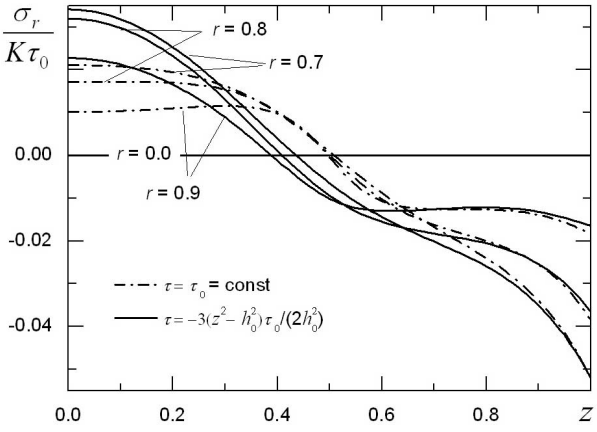


Рис. 1. Розподіл радіальних напружень у циліндрі за осьовою координатою

Розраховані напруження задовольняють однорідні крайові умови і з віддаленням від бічної поверхні чинять розтяг у межах нагрітої ділянки $z \in [-h_0, h_0]$ та стиск за її межами. При цьому напруження поблизу серединного поперечного перерізу циліндра є більшими у випадку функції нагріву 2), яка забезпечує ту ж середню температуру нагріву, що й 1), однак є розподіленою нерівномірно і зростає при наближенні до середини нагрітої ділянки поверхні. Поблизу торців різниця між випадками 1) та 2) є незначною. Для радіусів менших за $r = 0{,}5$ розподіл напружень зберігається практично таким же, як і для вказаного радіусу. Слід відзначити, що використання запропонованого підходу дозволило розрахувати напружений стан з похибкою 0,1% задоволення напруженнями (8) крайових умов (6) за $N = J = 5$.

Висновок

Методом удосконаленої редукції розв'язано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, до якої зводиться осесиметрична задача термопружності для суцільного циліндра скінченної довжини за негладкого та розривного температурного навантаження бічної поверхні. Використання такого підходу дозволяє здійснювати розрахунок напруженого стану у циліндрі з високою точністю задоволення крайових умов за застосування до розв'язання вказаної нескінченної системи алгоритму простої редукції з урахуванням невеликої кількості рівнянь та невідомих.

Список використаних джерел

1. *Ignaczak J.* Thermal stresses in a long cylinder heated in a discontinuous manner over the later surface // Arch. Mech. Stos. – 1958. – **10**. – P. 25-34.
2. *Sundara Raja Iyengar K. T., Chandrashekhara K.* Thermal stresses in a finite solid cylinder due to steady temperature variation along the curved and end surfaces // Int. J. Engng Sci. – 1967. – **5**, N 4. – P. 393-413.
3. *Ulitko A. F.* The vector's expansion in the spacial elasticity theory. – Kiev: Akademperiodika, 2002. – 341 p. (in Russian).
4. *Tokovyy Yu. V.* Axisymmetric stresses in a finite-length elastic cylinder due to normal pressure uniformly distributed over a part of its lateral surface // Prykl. Probl. Mekh. Mat. – 2010. – N 8. – P. 144-151. (in Ukrainian).
5. *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, N 1. – P. 143-166.
6. *Kovalenko A. D.* Thermoelasticity: basic theory and applications. – Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969. – 251 p.
7. *Meleshko V. V., Tokovyy, Yu. V., Barber J. R.* Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – **176**, N 5. – P. 646-669.

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Флячок В. М.[1], к. ф.-м. н., доц.

Термопружний аналіз шаруватих циліндричних оболонок з теплообміном

Для шаруватих ортотропних циліндричних оболонок антисиметричної структури записано рівняння руху і теплопровідності з відповідними граничними і початковими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок динамічної задачі термопружності для кінцевої шарнірно обпертої по краях оболонки за умови конвективного теплообміну з довкіллям.

Ключові слова: шарувата оболонка, термопружність, теплообмін.

[1] Українська академія друкарства,
79020, м. Львів, вул. Підголоско, 19
e-mail: flyachok@ukr.net

V. M. Flyachok[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Thermoelastic analysis of laminated cylindrical shells with convection

For layered orthotropic cylindrical shells of antisymmetrical structure, equations of motion and heat conduction with appropriate boundary conditions are derived. Solution of dynamic thermoelastic problem for finite simply supported shell with convection is obtained with making use of the integral Fourier and Laplace transformations.

Key Words: layered shell, thermoelasticity, convection.

[1] Ukrainian Academy of Printing,
79020, L'viv, Pidgolosko str., 19
e-mail: flyachok@ukr.net

Композитні оболонки, як важливі елементи багатьох сучасних конструкцій в процесі експлуатації часто піддаються нестаціонарному нагріванню, що може викликати відповідну динамічну реакцію. Тому важливо дослідити їхній напружено-деформований стан і динамічні характеристики. Відомі з літератури дослідження динамічної поведінки оболонок при нестаціонарному нагріванні проводилися, в основному, для однорідних ізотропних конструкцій [1-3]. Аналогічні дослідження для композитних і суттєво анізотропних конструкцій проводились недостатньо [4-5].

У цій роботі досліджується напружено-деформований стан кругової циліндричної оболонки шаруватої антисиметричної структури за умови конвективного теплообміну між лицевими поверхнями оболонки та довкіллям.

Постановка задачі та метод розв'язування

Розглянемо кругову циліндричну оболонку зі сталою товщиною $2h$ і довжиною l, складену зі скінченої кількості ідеально скріплених між собою однакових тонких ортотропних шарів, які антисиметрично розміщені відносно серединної поверхні. Осі ортотропії кожного шару орієнтовані під кутом 0^0 або 90^0 до осі оболонки. Точки простору оболонки віднесемо до ортогональної системи координат x, θ, z, де x – осьова, θ – кругова і z – радіальна координати. Початок координат помістимо у середній поверхні з радіусом R. Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1, 2, 3, а кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за аргументами x і θ відповідно.

Нехай поверхні $z = \pm h$ оболонки нагріваються довкіллям шляхом конвективного теплообміну, а краї $x = 0$ і $x = l$ підтримуються при нульовій температурі. Для дослідження термопружної поведінки такої оболонки використаємо математичну модель, яка базується на припущеннях про лінійний розподіл вектора переміщень і температури по товщині всього пакету оболонки [6]. Рівняння руху в узагальнених переміщеннях u_i, γ_i для цієї моделі запишемо в операторній формі

$$\sum_{p}^{6} L_{sp} y_p = b_s \quad (s, p = 1, 2, \dots, 6), \qquad (1)$$

де $y_i = u_i$, $y_{3+i} = \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$; u_1, u_2, u_3 – переміщення серединної поверхні; γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі; γ_3 – нормальна деформація.

Диференціальні оператори L_{rk} $(L_{rk} = L_{kr})$ і вільні члени b_r системи (1) мають вигляд

$$L_{11} = A_{11}\partial_{11}^2 + (A_{66}/R^2)\partial_{22}^2 - \rho_1\partial_{\tau\tau}^2,$$

$$L_{12} = [(A_{12} + A_{66})/R]\partial_{12}^2,$$

© В. М. Флячок, 2013

$$L_{13} = (A_{12}/R)\partial_1, \quad L_{14} = B_{11}\partial_{11}^2,$$
$$L_{15} = 0, \; L_{16} = A_{13}\partial_1,$$
$$L_{22} = A_{66}\partial_{11}^2 + (A_{22}/R^2)\partial_{22}^2 - k'A_{44}/R^2 - \rho_1\partial_{\tau\tau}^2,$$
$$L_{23} = [(A_{22} + k'A_{44})/R^2]\partial_2, \quad L_{24} = 0,$$
$$L_{25} = (B_{22}/R^2)\partial_{22}^2 + k'A_{44}/R - \rho_2\partial_{\tau\tau}^2,$$
$$L_{26} = [(B_{22} + k'B_{44})/R^2 + A_{23}/R]\partial_2,$$
$$L_{33} = -k'A_{55}\partial_{11}^2 - (k'A_{44}/R^2)\partial_{22}^2 + A_{22}/R^2 + \rho_1\partial_{\tau\tau}^2,$$
$$L_{34} = -k'A_{44}\partial_1, \quad L_{35} = (B_{22}/R^2 - k'A_{55}/R)\partial_2,$$
$$L_{36} = A_{23}/R - k'B_{44}\partial_{11}^2 + [(B_{22} - k'B_{55})/R^2]\partial_{22}^2 + \rho_2\partial_{\tau\tau}^2,$$
$$L_{44} = D_{11}\partial_{11}^2 + (D_{66}/R^2)\partial_{22}^2 - k'A_{44} - \rho_3\partial_{\tau\tau}^2,$$
$$L_{45} = [(D_{12} + D_{66})/R]\partial_{12}^2,$$
$$L_{46} = (D_{12}/R + B_{13} - k'B_{44})\partial_1,$$
$$L_{55} = D_{66}\partial_{11}^2 + (D_{22}/R^2)\partial_{22}^2 - k'A_{55} - \rho_3\partial_{\tau\tau}^2,$$
$$L_{56} = [D_{22}/R^2 + (B_{23} - k'B_{55})/R]\partial_2,$$
$$L_{66} = -k'D_{44}\partial_{11}^2 - k'(D_{55}/R^2)\partial_{22}^2 + D_{22}/R^2 + A_{33} + 2B_{23}/R + \rho_3\partial_{\tau\tau}^2,$$
$$b_1 = A_{11}^t\partial_1 T_1 + (B_{11}^t/h)\partial_1 T_2,$$
$$b_2 = (A_{22}^t/R)\partial_2 T_1 + [B_{22}^t/(hR)]\partial_2 T_2,$$
$$b_3 = (A_{22}^t/R)T_1 + [B_{22}^t/(hR)]T_2,$$
$$b_4 = B_{11}^t\partial_1 T_1 + (D_{11}^t/h)\partial_1 T_2,$$
$$b_5 = (B_{22}/R)\partial_2 T_1 + [D_{22}^t/(Rh)]\partial_2 T_2,$$
$$b_6 = (A_{33}^t + B_{22}^t/R)T_1 + [D_{22}^t/(Rh)]T_2.$$

Тут

$$\{A_{ii}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h}^{h} c_{ij}\{1, z, z^2\}dz,$$
$$\{A_{ii}^t, B_{ii}^t, D_{ii}^t\} = \int_{-h}^{h} \beta_{ii}^t\{1, z, z^2\}dz,$$
$$T_n = \frac{2n-1}{2h^n}\int_{-h}^{h} t\, z^{n-1}dz \quad (n = 1, 2),$$
$$\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} = \int_{-h}^{h} \rho(z)\{1, z, z^2\}dz,$$
$$\beta_{ii}^t(z) = c_{i1}\alpha_{11}^t + c_{i2}\alpha_{22}^t + c_{i3}\alpha_{33}^t,$$
$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial\tau},$$

$c_{ij}(z)$ – коефіцієнти пружності; $\alpha_{jj}^t(z)$ – коефіцієнти теплового лінійного розширення; t – приріст температури; $\rho(z)$ – густина матеріалу; k' – коефіцієнт зсуву. Інші позначення взяті з роботи [6].

Інтегральні характеристики температури T_1, T_2 що входять у вільні члени системи (1), повинні бути визначені з рівнянь теплопровідності

$$\Delta_{(1)}T_1 + \Delta_{(2)}T_2 + [\Lambda_{33}^{(1)}/(Rh)]T_2 - C^{(1)}\partial_\tau T_1 - C^{(2)}\partial_\tau T_2 = \varepsilon_1^t(T_1 - t_1^c) + \varepsilon_2^t(T_2 - t_2^c),$$
$$\Delta_{(2)}T_1 + \Delta_{(3)}T_2 - [\Lambda_{33}^{(1)}/h^2]T_2 + [\Lambda_{33}^{(2)}/(hR)]T_2 - C^{(2)}\partial_\tau T_1 - C^{(3)}\partial_\tau T_2 = \varepsilon_2^t(T_1 - t_1^c) + \varepsilon_1^t(T_2 - t_2^c), \qquad (2)$$

де

$$\Delta_{(k)} = \Lambda_{11}^{(k)}\partial_{11}^2 + \Lambda_{22}^{(k)}\partial_{22}^2,$$
$$\{\Lambda_{ij}^{(k)}, C^{(k)}\} = \int_{-h}^{h}\{\lambda_{ij}, c_\varepsilon\}(z/h)^{k-1}dz,$$
$$\varepsilon_n^t = \alpha_z^+ - (-1)^n\alpha_z^-; \quad t_n^c = \left(t_c^+ - (-1)^n t_c^-\right)/2,$$

$\lambda_{ij}(z)$ – коефіцієнти теплопровідності; $c_\varepsilon(z)$ – питома об'ємна теплоємність; $\alpha_z^\pm$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$; $t_c^\pm$ – температура довкілля.

Для однозначності розв'язку систем рівнянь руху (1) і теплопровідності (2) задамо такі граничні умови на краях $x = 0$ і $x = l$:

$$u_3 = u_2 = \gamma_3 = \gamma_2 = N_{11} = M_{11} = T_1 = T_2 = 0 \qquad (3)$$

і однорідних початкових умов.

Починаючи з часу $\tau = 0$, зовнішня поверхня $z = h$ нагрівається довкіллям з температурою

$$t_c^+(x, \theta, \tau) = t^* t_c(x, \theta)t^+(\tau),$$

а внутрішня поверхня $z = -h$ омивається довкіллям з нульовою температурою. Припустимо, що коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$ рівні між собою: $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$. Тут $t^* = \text{const}$, а функції $t_c(x, \theta)$ і $t^+(\tau)$ визначають спосіб розподілу температури довкілля від координат і часу відповідно. Зокрема, у випадку рівномірного розподі-

лу температури t^* по прямокутній області ($2d\times 2\eta$) з центром в точці (x_0, θ_0), функція координат набирає вигляду

$$t_c(x,\theta)=N(x)N(\theta),$$

а у випадку косинусоїдного розподілу маємо

$$t_c(x,\theta)=\cos\frac{\pi}{2d}(x-x_0)\cos\frac{\pi}{2\eta}(\theta-\theta_0)N(x)N(\theta).$$

Тут

$$N(x)=S_-(x-(x_0-d))-S_+(x-(x_0+d)),$$

$$N(\theta)=S_-(\theta-(\theta_0-\eta))-S_+(\theta-(\theta_0+\eta)),$$

де одиничні функції $S_\pm(x)$ мають вигляд

$$S_+(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\quad S_-(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Розглянемо тепер декілька можливих випадків залежності температури довкілля від часу $t^+(\tau)$.

1. Температура довкілля раптово піднімається до значення t^*, залишаючись надалі сталою:

$$t^+(\tau)=t^*S_+(\tau).$$

2. Температура довкілля раптово піднімається до значення t^*, залишаючись сталою лише протягом відрізка часу $0<\tau\le\tau_*$, а потім раптово падає до нуля:

$$t^+(\tau)=t^*\left[S_+(\tau)-S_+(\tau-\tau_*)\right].$$

3. Температура довкілля змінюється по експоненціальному закону

$$t^+(\tau)=t^*(a+b\exp(-k\tau)),$$

де a, b, k – сталі.

4. Температура довкілля протягом відрізка $0<\tau\le\tau_*$ змінюється по закону синуса

$$t^+(\tau)=t^*\sin(\pi\tau/\tau^*)[S_+(\tau)-S_+(\tau-\tau_*)].$$

Розв'язок систем диференціальних рівнянь (1) і (2) знаходимо методом скінчених інтегральних перетворень Фур'є за координатами x, θ і методом інтегрального перетворення Лапласа за часом τ відповідно до граничних умов (3) і однорідних початкових умов.

Аналіз числових результатів та висновки

Числові дослідження проводили для шаруватих циліндричних оболонок антисиметричної структури, а також однорідної оболонки (нескінчена кількість шарів). За матеріал шарів взято графітоепоксидний композит армований волокнами з такими фізико-механічними параметрами:

$$\lambda_{22}=\lambda_{33}=0{,}25\lambda_{11};$$

$$\nu_{21}=\nu_{31}=0{,}25;\ E_2=E_3=(0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}025)E_1;$$

$$\alpha^t_{22}=\alpha^t_{33}=(15;\ 20)\alpha^t_{11};\ \ G_{12}=G_{13}=0{,}5E_2;$$

$$G_{23}=0{,}2E_2.$$

Тут індексом 1 позначено властивості матеріалу у напрямку вздовж волокон, а індексами 2, 3 – у перпендикулярному напрямку. Геометричні параметри визначалися відношеннями $h/R=0{,}05$; $l/R=3$; $d/l=0{,}25$; $\eta=\pi/4$.

В таблиці 1 наведені значення максимальних безрозмірних прогинів $\bar w=w/(R\alpha^t_{11}t^*)$, напружень $\bar\sigma_i=\sigma_i/(E_1\alpha^t_{11}t^*)$, зусиль $\bar N_i=N_i/(E_1h\alpha^t_{11}t^*)$ та моментів $\bar M_i=M_i/(E_1h^2\alpha^t_{11}t^*)$, обчислених у центрі прямокутної області нагріву, за різних відношень модулів пружності E_1/E_3, коефіцієнтів лінійного теплового розширення $\alpha^t_{33}/\alpha^t_{11}$ та різних значень безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі Bi.

Із аналізу числових результатів і таблиці 1 слідує, що прогини шаруватих оболонок більші, а напруження менші, ніж відповідні прогини і напруження однорідної оболонки, що є наслідком меншої ефективної жорсткості неоднорідної оболонки. Величина цих відмінностей суттєво залежить від ступеня анізотропії матеріалу, кількості шарів в оболонці та значення коефіцієнта тепловіддачі (коефіцієнта Біо) – зі зменшенням кількості шарів, збільшенням ступеня анізотропії та збільшенням коефіцієнта тепловіддачі ця різниця зростає. Наприклад, різниця в межах розглянутих параметрів між прогинами двошарової ($0^0/90^0$) та однорідної оболонок при $E_1/E_3=40$, $\alpha^t_{33}/\alpha^t_{11}=$ $=20$ і $Bi=1$ дорівнює 3%, а при $Bi=10$ ця різниця вже дорівнює 12%. Неоднорідність та анізотропія матеріалу можуть суттєво змінювати не лише кількісну картину напруженого стану, але і якісну – за деяких значень фізико-механічних параметрів напруження можуть поміняти знак. Температурне поле слабо чутливе до неоднорідності матеріалу, але, як і напруження, суттєво залежить від коефіцієнта тепловіддачі.

Безрозмірні прогини, напруження, зусилля і моменти двошарової та однорідної оболонок Таблиця 1

$\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$		15	20	15	20	15	20	15	20
$Bi\rightarrow$		$Bi=1$		$Bi=10$		$Bi=1$		$Bi=10$	
$E_1/E_3\downarrow$		двошарова ($0^0/90^0$)				однорідна			
$\overline{w}$	10	1,486	1,790	1,792	2,201	1,451	1,762	1,712	2,088
	20	0106	1,152	1,326	1,569	0,996	1,149	1,224	1,420
	40	0,788	0,863	1,062	1,208	0,773	0,838	0,981	1,076
$\overline{\sigma}_1$	10	0,124	0,222	-0,0434	0,0499	0,160	0,252	-0,0260	0,0365
	20	0,00915	0,0651	-0,140	-0,0829	0,0549	0,106	-0,0789	-0,0410
	40	-0,0468	-0,0128	-0,186	-0,149	-0,0557	0,0214	-0,110	-0,0884
$\overline{\sigma}_2$	10	-0,546	-0,737	-0,746	-1,003	-0,530	-0,714	-0,729	-0,980
	20	-0,284	-0,384	-0,382	-0,515	-0,278	-0,375	-0,377	-0,506
	40	-0,145	-0,196	-0,194	-0,261	-0,143	-0,192	-0,192	-0,258
$\overline{N}_1$	10	0,0212	0,0265	0,0546	0,0700	0,0193	0,0235	0,0426	0,0525
	20	0,0114	0,0177	0,0298	0,0373	0,0122	0,0139	0,0234	0,0272
	40	0,00866	0,0102	0,0150	0,0182	0,00723	0,00766	0,0127	0,0139
$\overline{M}_1$	10	-0,485	-0,649	-0,630	-0,837	-0,143	-0,179	-0,279	-0,350
	20	-0,260	-0,347	-0,336	-0,444	-0,0846	-0,103	-0,166	-0,200
	40	-0,137	-0,181	-0,178	-0,233	-0,0557	-0,0636	-0,108	-0,124
$\overline{N}_2$	10	-0,00675	-0,0107	0,00111	0,000943	0,0184	0,0222	0,0315	0,0385
	20	-0,00265	-0,00465	0,00219	0,00134	0,00919	0,0102	0,0175	0,0201
	40	0,000104	0,000642	0,00341	0,00331	0,00438	0,00417	0,0100	0,0107
$\overline{M}_2$	10	0,208	0,287	0,0733	0,112	-0,0362	-0,0386	-0,164	-0,198
	20	0,118	0,164	0,0480	0,0735	0,00234	0,0128	-0,0743	-0,0791
	40	0,0667	0,0931	0,0287	0,0453	0,0196	0,0358	-0,0314	-0,0226

Список використаних джерел

1. *Ya. S. Podstrigach, R. N. Shvets*. Thermoelasticity of Thin Shells. – Kiev: Naukova dumka, 1978. – 344 p. (in Russian).
2. *Keene F. W., Hetnarsky R. B.* Bibliography on thermal stresses in shells // J. Thermal Stresses. – 1990. – **13**, No 4. – P. 341-531.
3. *Awrejcewicz J., Krysko V. A., Krysko A. V.* Thermo-Dynamics of plates and shells. (foundations of engineering mechanics). – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. – 2010. – 789 p.
4. *Brishetto S., Carrera E.* Heat conduction and thermal analysis in multilayered plates and shells // Mechanics Research Communications. – 2011. – **38**, No. 6. – P. 449-455.
5. *Ootao Y., Tanigawa Y.* Transient thermal stresses of cross-ply laminated cylindrical shells using a higher-order shear deformation theory // J. Thermal stresses. – 2010. – **33**, No 1. – P. 55-77.
6. *Kushnir R. M., Nykolyshyn M. M., Zhydyk U. V., Flyachok V. M.* Modeling of thermoelastic processes in heterogeneous anisotropic shells with initial deformations // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – **178**, No 5. – P. 512-530.

Надійшла до редколегії 31.03.13

УДК 539.3

Шворак М. А.[1], аспірант

Термонапружений стан товстостінного циліндра скінченної довжини у випадку гладкого контакту

Отримано аналітичний розв'язок осесиметричної задачі термопружності для товстостінного циліндра, що відповідає наперед заданому температурному розподілу. Термопружній потенціал знайдений за допомогою методу Фурьє. Розв'язок рівнянь Ламе знайдений як комбінація таких роз'язків, що задовільняють граничні умови окремо на кожній координатній поверхні.

Ключові слова: термопружність, скінченний циліндр, метод суперпозиції.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: mshvorak@gmail.com

M. A. Shvorak[1], PhD student

Thermostressed state of thick-walled cylinder of finite length in the case of smooth contact

The analytical solution of axially symmetric problem of thermo elasticity for thick wall cylinder, that corresponds to given temperature distribution, is received. Thermoelastic potential is found with the help of Fourier method. The solution of Lame equations is found as the combination of such solutions that satisfy boundary conditions separately on each coordinate surface.

Key Words: thermoelasticity, finite length cylinder, superposition method.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: mshvorak@gmail.com

В даній роботі розглядається осесиметрична задача термопружності для порожнистого кругового циліндра скінченної довжини. Температурне поле циліндра є наперед заданим. Механічні характеристики матеріалу циліндра не залежать від температури.

Постановка задачі

Розглянемо пружній циліндр, внутрішній радіус якого рівний ε, а зовнішній, не зменшуючи загальності, – 1, довжина циліндра рівна $2h$. В циліндрі сформоване стаціонарне осесиметричне температурне поле $T = T(r, z)$, де r – радіальна, а z – осьова координата циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром. Торці циліндра розташовані в площинах $z = \pm h$. Вважається, що температурне поле симетричне відносно площини $z = 0$, тобто $T(r, z) = T(r, -z)$. Крім того, вважається, що в процесі температурного деформування торці залишаються плоскими і вільними від дотичних напружень, а бічні поверхні – і від дотичних, і від нормальних напружень. Іншими словами, можна вважати, що розглядається задача про температурне навантаження циліндра, затиснутого між двома плоскими абсолютно твердими гладкими поверхнями.

У відповідності до [1] розв`язок сформульованої задачі будемо шукати у вигляді

$$\vec{u} + \operatorname{grad}\Phi,$$

де термопружний потенціал Φ є частинним розв`язком рівняння

$$\Delta\Phi = \frac{m+1}{m-1}\alpha T, \qquad (1)$$

а вектор переміщень $\vec{u}$ – розв`язком однорідного рівняння Нав`є

$$\Delta\vec{u} + \frac{m}{m-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = 0, \qquad (2)$$

що утримує достатню довільність для задоволення наступних граничних умов:

$$\sigma_r + \sigma_r^{(T)} = 0 \quad (r = \varepsilon, 1), \qquad (3)$$

$$\tau_{rz} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad (r = \varepsilon, 1), \qquad (4)$$

$$w = 0 \quad (z = h), \qquad (5)$$

$$\tau_{rz} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad (z = h). \qquad (6)$$

В (1) – (6) введені наступні позначення: m – число Пуассона, α – коефіцієнт лінійного розширення, σ_r – радіальні напруження, τ_{rz} – дотичні напруження, w – переміщення вздовж осі z, індексом (T) позначені складові, що відповідають термопружному потенціалу. Враховуючи симетрію, наявну в задачі, граничні умови (3) – (6) записані лише для верхньої половини циліндра, рівновагу якої і будемо розглядати.

© М. А. Шворак, 2013

Побудова розв'язків основних рівнянь

Частковий розв'язок рівняння (2) знайдемо шляхом розкладу температури по повній системі функцій, які в свою чергу можуть бути знайдені за допомогою методу Фур'є для однорідного рівняння, тобто:

$$\alpha T = b_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(z) N_0(\lambda_j r), \qquad (7)$$

де

$$N_0(\lambda_j r) = J_1(\lambda_j) Y_0(\lambda_j r) - Y_1(\lambda_j) J_0(\lambda_j r),$$

$$b_0(z) = \frac{2}{1-\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^{1} \alpha T r dr,$$

$$b_j(z) = \frac{1}{D_0(\lambda_j, \varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{1} \alpha T N_0(\lambda_j r) r dr,$$

$$D_0(\lambda_j, \varepsilon) = \frac{1}{2}\left[N_0^2(\lambda_j) - \varepsilon^2 N_0^2(\lambda_j \varepsilon) \right],$$

J_i, Y_i – функції Беселя 1-го та 2-го роду, λ_j – корені рівняння $J_1(\lambda_j) Y_1(\lambda_j \varepsilon) - Y_1(\lambda_j) J_1(\lambda_j \varepsilon) = 0$.

Підставивши (7) в (1), знаходимо

$$\Phi(r, z) = \frac{m+1}{m-1} \left\{ \int_0^z (z-\xi) b_0(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_0(\lambda_j r)}{\lambda_j} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\int_0^z b_j(\xi) \operatorname{sh} \lambda_j (z-\xi) d\xi - \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \int_0^h b_j(\xi) \operatorname{ch} \lambda_j (h-\xi) d\xi \right] \right\}.$$

Розв'язок рівняння (2) записується у вигляді суми розв'язків для шару в циліндричних координатах [4] та нескінченного циліндра [2]:

$$u = \frac{A_0}{r} + B_0 r - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_j \operatorname{ch} \lambda_j z + \frac{3m-4}{m\lambda_j} C_j \operatorname{ch} \lambda_j z + \right.$$

$$\left. + C_j z \operatorname{sh} \lambda_j z \right\} N_1(\lambda_j r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Gamma_1(k_n r) + r Q_0(k_n r) - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{k_n} \frac{m-1}{m} Q_1(k_n r) \right\} \cos k_n z,$$

$$w = D_0 z + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_j \operatorname{sh} \lambda_j z + C_j z \operatorname{ch} \lambda_j z \right\} N_1(\lambda_j r) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Gamma_0(k_n r) + r Q_1(k_n r) \right\} \sin k_n z, \qquad (8)$$

де

$$\Gamma_0(k_n r) = \gamma_n I_0(k_n r) + \delta_n K_0(k_n r),$$

$$Q_0(k_n r) = q_n I_0(k_n r) + p_n K_0(k_n r),$$

$$\Gamma_1(k_n r) = \frac{1}{k_n} \frac{d}{dr} \Gamma_0(k_n r), \quad Q_1(k_n r) = \frac{1}{k_n} \frac{d}{dr} Q_0(k_n r),$$

$$N_1(\lambda_j r) = -\frac{1}{\lambda_j} \frac{d}{dr} N_0(\lambda_j r), \quad k_n = \frac{n\pi}{h},$$

A_0, B_0, C_0, D_0, A_j, C_j, γ_n, δ_n, p_n, q_n – довільні сталі.

Напруження, що відповідають переміщенням (8), знаходяться з виразів [3]:

$$\frac{1}{2G}\sigma_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{m-2} e, \quad \frac{1}{2G}\sigma_\theta = \frac{1}{r} u + \frac{1}{m-2} e,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{m-2} e, \quad \frac{1}{2G}\tau_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Підставивши вирази для дотичних напружень у граничні умови (4) та (6) та використавши (5), отримаємо

$$A_j = C_j = 0,$$

$$k_n \Gamma_1(k_n) = -k_n Q_0(k_n) + 2\frac{m-1}{m} Q_1(k_n), \qquad (9)$$

$$k_n \Gamma_1(k_n \varepsilon) = -k_n \varepsilon Q_0(k_n \varepsilon) + 2\frac{m-1}{m} Q_1(k_n \varepsilon).$$

Використовуючи співвідношення (9), граничні умови (3) та виконавши перетворення аналогічні до[1], приходимо до співвідношень

$$\begin{cases} \dfrac{mB_0 + D_0}{m-2} - \dfrac{A_0}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{h} \dfrac{m+1}{m-1} \displaystyle\int_0^h b_0(\xi) d\xi, \\ \dfrac{mB_0 + D_0}{m-2} - A_0 = \dfrac{1}{h} \dfrac{m+1}{m-1} \displaystyle\int_0^h b_0(\xi) d\xi, \\ D_0 = -\dfrac{1}{h} \dfrac{m+1}{m-1} \displaystyle\int_0^h b_0(\xi) d\xi, \\ z_n(a_n b_n - d_n^2) = a_n \psi_{2n} (-1)^n - d_n \psi_{1n} (-1)^n, \\ y_n(a_n b_n - d_n^2) = b_n \psi_{1n} (-1)^n - d_n \psi_{2n} (-1)^n, \end{cases} \qquad (10)$$

де використані наступні позначення:

$$\begin{matrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \end{matrix} = \frac{2}{h} \frac{m+1}{m-1} \left\{ \int_0^h b_0(\xi) \cos k_n \xi d\xi + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{matrix} N_0(\lambda_j) \\ N_0(\lambda_j \varepsilon) \end{matrix} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{k_n^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} \int_0^h b_j(\xi) \cos k_n \xi d\xi, \right.$$

$$a_n = \frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} - 1 - \frac{2}{k_n^2} \frac{m-1}{m} - \frac{1}{k_n^2 \Delta^2}, \quad d_n = \frac{\Delta_1}{k_n \varepsilon \Delta^2} - \frac{\Delta_2}{k_n \Delta^2},$$

$$b_n = 1 - \frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} + \frac{2}{(k_n \varepsilon)^2} \frac{m-1}{m} - \frac{1}{(k_n \varepsilon)^2 \Delta^2},$$

$$y_n = -(-1)^n k_n Q_1(k_n), \quad z_n = (-1)^n k_n \varepsilon Q_1(k_n \varepsilon),$$

$$\Delta = K_1(k_n\varepsilon)I_1(k_n) - K_1(k_n)I_1(k_n\varepsilon),$$

$$\Delta_1 = K_1(k_n\varepsilon)I_0(k_n) + K_0(k_n)I_1(k_n\varepsilon),$$

$$\Delta_2 = K_1(k_n)I_0(k_n\varepsilon) + K_0(k_n\varepsilon)I_1(k_n).$$

Розв'язавши систему (10), отримаємо значення всіх невідомих сталих.

Результати розрахунків

Наведений аналітичний розв`язок порівнювався з чисельним, одержаним за допомогою методу скінченних елементів, для наступних значень параметрів: $m = 10/3$, $\varepsilon = 0.5$, $h = 1.5$, $\alpha = 16\times10^{-6}$ K^{-1}, $T(r,z) = 100(r+z^2)$. Відхилення в полях зміщень склали порядку 2%. На рис. 1-3 наведено розподіли полів відповідних напружень по поздовжнім перерізам циліндра. Звертає на себе увагу той факт, що максимальні дотичні напруження знаходяться на деякій відстані від торця циліндра.

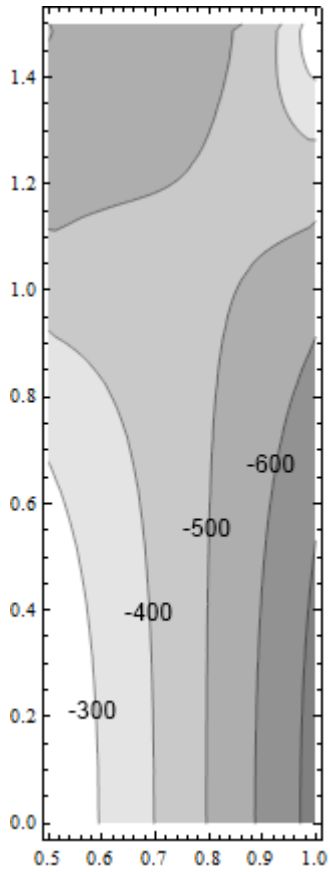


Рис. 1. σ_θ, МПа

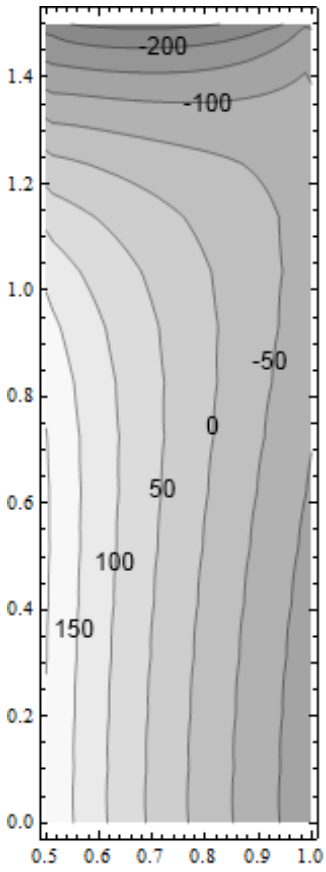


Рис. 2. σ_z, МПа

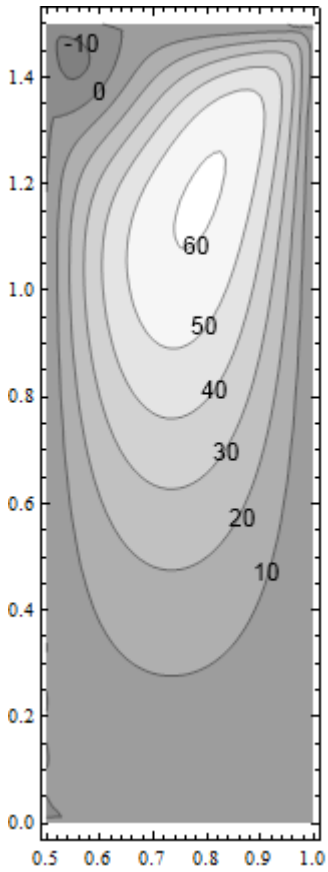


Рис. 3. τ_{xy}, МПа

Список використаних джерел

1. *Grinchenko V. T.* Thermal stress state of thick-walled cylinder of finite length // Thermal stresses in structural elements. – 1967. – N 7. – P. 147-154. (in Russian).
2. *Lure A. I.* Three-dimensional problems of the theory of elasticity – Moscow: State publishing technical and theoretical literature, 1955 – 492 p. (in Russian).
3. *Nowacki W.* Thermoelasticity – Moscow: Mir, 1975 – 872 p. (in Russian).
4. *Ulitko A. F.* The method of vector eigenfunctions in three-dimensional problems of elasticity theory. – Kyiv: Naukova dymka, 1979. – 264 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 16.05.13

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.862.

T.V. Kolianova[1], assistant

Influence of delay on character of stability of stationary points for mathematical model of purchased immunity.

A mathematical model of purchased immunity, which is described by a system of nonlinear differential equations with delay. Influence of delay is analyzed on stability of stationary points, and in the end, we give the biological consequences.

Keywords: system of nonlinear differential equations, the immune system, antigen, the stability of the stationary point.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

Статтю представив д. т. н., с. н. с. Кудін В.І.

Колянова Т.В.[1], асистент

Вплив запізнення на характер стійкості стаціонарних точок в математичній моделі надбаного імунітету.

Розглядається математична модель надбаного імунітету, яка описується системою нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням. Аналізується вплив запізнення на стійкість стаціонарних точок, наводяться біологічні наслідки.

Ключові слова: система нелінійних диференціальних рівнянь, імунітет, антиген, стійкість стаціонарного стану.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

To study the effect of reaction delay lymphocytes to change amount of infections we will consider a nonlinear system of ordinary differential equations describing the effect of purchased immunity:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(\mu_N - \gamma_1 L - \gamma_2 X), \\ \frac{dL}{dt} &= (L^* - L)(\mu_L - \gamma_3 N(t-\tau) - \gamma_4 G). \end{aligned} \tag{1}$$

The initial conditions are given by

$$\begin{aligned} &N(t_0) = N_0, L(t_0) = L_0, \\ &N(t) \equiv 0 \text{ for } t_0 - \tau < t < t_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Suppose the parameter τ small. Replace function $N(t-\tau)$ its linear approximation:

$$N(t-\tau) \cong N(t) - \tau \frac{dN(t)}{dt}.$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(\mu_N - \gamma_1 L - \gamma_2 X), \\ \frac{dL}{dt} &= (L^* - L)(\mu_L - \gamma_3 N(1 + \tau(\mu_N - \gamma_1 L - \gamma_2 X)) - \gamma_4 G). \end{aligned} \tag{3}$$

Stationary points found from the system:

$$\begin{aligned} &N(\mu_N - \gamma_1 L - \gamma_2 X) = 0, \\ &(L^* - L)(\mu_L - \gamma_3 N(1 + \tau(\mu_N - \gamma_1 L - \gamma_2 X)) - \gamma_4 G) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

The first stationary point

$$N_1 = 0,\ L_1 = L^*, \tag{5}$$

describes a healthy organism,
and the second stationary point

$$L_2 = \frac{\mu_N - \gamma_2 X}{\gamma_1},\ N_2 = \frac{\mu_L - \gamma_4 G}{\gamma_3}, \tag{6}$$

responds for a sick organism.

Investigate the stability of stationary points.

Theorem 1. *A stationary point* (5) *will be asymptotic stable at implementation of such condition* $\mu_N - \gamma_2 X < \gamma_1 L^*$, *if the condition* $\mu_N - \gamma_2 X > \gamma_1 L^*$, *the stationary point is unstable, and if* $\mu_N - \gamma_2 X = \gamma_1 L^*$, *the stationary point is stable.*

Proof:

Linearized system of differential equations (3) in around of this point (5) will look like

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (\mu_N - \gamma_1 L^* - \gamma_2 X) N, \\ \frac{d\tilde{L}}{dt} &= (\gamma_4 G - \mu_L) \tilde{L}, \end{aligned} \tag{7}$$

© Т.В. Колянова, 2012

where $\tilde{L} = L - L_1$.

We write the matrix coefficients for the linearized system

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu_N - \gamma_1 L^* - \gamma_2 X & 0 \\ 0 & \gamma_4 G - \mu_L \end{pmatrix}.$$

Characteristic equation $\det(A_1 - \lambda E) = 0$ will look like

$$\begin{vmatrix} (\mu_N - \gamma_1 L^* - \gamma_2 X) - \lambda & 0 \\ 0 & (\gamma_4 G - \mu_L) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

or

$$\left((\mu_N - \gamma_1 L^* - \gamma_2 X) - \lambda\right)\left((\gamma_4 G - \mu_L) - \lambda\right) = 0,$$

here received

$$\lambda_1 = \mu_N - \gamma_1 L^* - \gamma_2 X,$$
$$\lambda_2 = \gamma_4 G - \mu_L.$$

Clearly, that $\lambda_2 < 0$ always (due to the fact that $N_2 > 0$). As for the sign λ_1, then if $\lambda_1 < 0$ – singular point is asymptotic stable, if $\lambda_1 > 0$ – singular point is unstable, and if $\lambda_1 = 0$ – singular point is stable.

The theorem is proved.

Results. In the case of the stable node ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$), the existing population of lymphocytes in the body exceeds the speed of propagation of antigen and with it the content of corticosteroids G did not significantly affect the rate of reproduction and recovery of lymphocytes in the body [1]. Under this situation, the immune system described situation is stable and even a small perturbation of the steady state does not put it out of balance. Human remains healthy.

In the case of the saddle ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$), despite the fact that the content of corticosteroids does not substantially affect the reproduction rate and the recovery of lymphocytes in the body, yet the rate of reproduction and dissemination of antigen exceeds the lymphocyte population in the body (weak immune status), which can result in chronic disease.

Theorem 2. *For* $\tau > 0$, *if the condition is* $\gamma_1 L^* = \mu_N - \gamma_2 X$, *then a stationary point* (6) *is a type of unstable degenerate node, if* $\gamma_1 L^* < \mu_N - \gamma_2 X$, *then stationary point – is unstable focus, if* $\gamma_1 L^* > \mu_N - \gamma_2 X$, *then the stationary point* (6) *is a saddle.*

Proof:

Linearized system of differential equations (3) in around of the second point (6) will look like

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = \frac{\gamma_1}{\gamma_3}(\mu_L - \gamma_4 G)\tilde{L},$$
$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = -\gamma_3(L^* - \frac{\mu_N - \gamma_2 X}{\gamma_1})\tilde{N} + \tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X)\tilde{L},$$

where $\tilde{L} = L - L_2$, $\tilde{N} = N - N_2$.

Matrix coefficients for the linearized system has the form

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_3}(\mu_L - \gamma_4 G) \\ -\gamma_3(L^* - \frac{\mu_N - \gamma_2 X}{\gamma_1}) & \tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X) \end{pmatrix}$$

Characteristic equation $\det(A_2 - \lambda E) = 0$ will look like

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\gamma_1}{\gamma_3}(\mu_L - \gamma_4 G) \\ -\gamma_3(L^* - \frac{(\mu_N - \gamma_2 X)}{\gamma_1}) & \tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X) - \lambda \end{vmatrix}.$$

Then we have

$$\lambda^2 - \lambda\tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X) - $$
$$- \gamma_1(\mu_L - \gamma_4 G)(L^* - \frac{\mu_N - \gamma_2 X}{\gamma_1}) = 0.$$

Roots of this quadratic equation have the form

$$\lambda_1 = \frac{\tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X)}{2} + $$
$$+ \sqrt{\gamma_1(\mu_L - \gamma_4 G)(L^* - \frac{(\mu_N - \gamma_2 X)}{\gamma_1})},$$
$$\lambda_2 = \frac{\tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X)}{2} - \quad (8)$$
$$- \sqrt{\gamma_1(\mu_L - \gamma_4 G)(L^* - \frac{(\mu_N - \gamma_2 X)}{\gamma_1})}.$$

We must evaluate the sign

$$D_1 = \gamma_1(\mu_L - \gamma_4 G)(L^* - \frac{(\mu_N - \gamma_2 X)}{\gamma_1}).$$

Because of $\tau > 0$, then we have for $D_1 = 0$:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X)}{2} > 0$ – the roots are multiples and positive, so we have an unstable degenerate node;

for $D_1 < 0$

roots of the characteristic equation are

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau(\mu_L - \gamma_4 G)(\mu_N - \gamma_2 X)}{2} \pm \pm i\sqrt{\gamma_1(\mu_L - \gamma_4 G)(L^* - \frac{(\mu_N - \gamma_2 X)}{\gamma_1})}$$

and $\mathrm{Re}\lambda > 0$, therefore, we have an unstable focus;

for $D_1 > 0$, then $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ – stationary point is saddle, but if τ grows, we have ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$) an unstable node.

The theorem is proved.

Results. In the case of a singular point of saddle - the body or be able to overcome the disease, or may be lost. In the case where the singular point is the center, the body will have a chronic disease that periodically will escalate.

In the case of a singular point of the body of an unstable focus will continue to experience some "hesitation": the aggravation of the disease and a weakened immune system (including the reduction of hormones (corticosteroids)) that suppress the production of lymphocytes), and then will increase the production of lymphocytes and a slight weakening of the disease. With increasing content of lymphocytes increased hormone (G), which will result inhibit the production of lymphocytes and lead to a new outbreak. Such constant stress on the immune system result in an exhaustion [1, 2], whereby the body can not cope with the disease and die.

In the case where the singular point is an unstable node, depending on the state of the immune system (the system parameters and the ratio of (3)), or the body can overcome the disease or inhibit the growth of populations of antigen specific "long" period of time, or in the case of a weakened immune system - will be the rapid growth of the population of antigens, the body with the disease eventually can not cope and die [3, 4].

Список використаних джерел

1. *Bernet F.* Cellular immunology. M., «World», 1971. (in Russian).

2. *Hege J. S.* A mathematical model relating circulating antibody and antibody forming cells / J.S. Hege, G. Cole // J. Immunol. 1966. V. 97. P. 34-40. (in English).

3. *Khayrer E., Nerset P., Vanner G.* Decision of usual differential equalizations. Non-rigid tasks. Moscow, 1990. (in Russian).

4. *Pontryagin L.S.* Usual differential equalizations. L.S.Pontryagin. M.: Science, 1974. - 332 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 26.04.13

УДК 519.6

Vergunova I.M.[1], PhD, doct. habil., prof.

H-functions for the analysis of models of agritechnologies

This article examines the use of N-functions and H-matrices for the analysis of models of technology obtained in the form of functional networks.

Key Words: H-function, graph, costs, functional network, fuzzy subset, index quality.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: vergunova@bigmir.net

Вергунова І.М.[1], к.ф.-м.н., докт. габіл., проф.

H-функції для аналізу моделей агротехнологій

У статті розглядається застосування H-функцій та H-матриць для проведення аналізу моделей агротехнологій, що отримані у вигляді функціональних мереж.

Ключові слова: H-функція, граф, витрати, функціональна мережа, нечітка підмножина, показник якості.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: vergunova@bigmir.net

Статтю представив д. т. н., с.н.с. Кудін В.І.

The growing of agricultural crop in the contemporary world is a technology in which the values of approximate results pawned in advance. For this purpose, in practice, we are trying to get some possible estimates for main parameters of this technology, using a system of different indicators and various models.

Models in the form of algebraic functional networks on the basis of algorithmic algebras can be used for optimization and evaluation of agricultural technological processes [1, 2]. Such models use standard algorithmic (logical) functional structures. To obtain the corresponding estimates we make the transformation of initial algorithm to some (possibly unique) operator with equivalent characteristics.

Such probability models have been considered in [3, 4]. Moreover in [4] were considered functional models in which the costs of transitions from one technological operation to another were taken as random variables, and the corresponding probabilities as fuzzy values.

For the description of agricultural technologies in the present paper also used mathematical models constructed on the basis of algebraic functional networks. In them assumed that the cost of transition from one technological operation (or its element) to the other were the fuzzy variables that correspond to the practical situation, when such values, we can to know only approximately. The specified approach provides an opportunity to assess the quality of agro-technology and make it better.

Analog of H-function method for fuzzy models of agro-technological processes

Considered the analog of the method with the using of generating H-functions [3] for modeling agricultural technology as many iterative functional structure with random cycles. Structural functions and corresponding algebraic functional networks of the technological processes consist of a fixed set of technical operations [1, 2, 5]. Therefore, the obtained functional structure is a structure without memory and a structure in which resources are replenished and not replenished. We construct a certain functional network [5, 6] to describe the technological process. The whole process is considered in N points in time.

A graph corresponds to a functional network that was constructed. The weight arcs t_{ij} are the costs transition from the node i to node j, and they are elements of some fuzzy subsets with the membership functions μ_{ij}. Then for the costs $i \to j$ in some moments $l_z, l_{z+1}, ..., m_z$, that are possible for this state, we have

$$\{(t_{ij}(l_z), d_{ij}(l_z)), (t_{ij}(l_{z+1}), d_{ij}(l_{z+1})), ...,$$

© I.M. Вергунова 2013

$(t_{ij}(m_z), d_{ij}(m_z))\}$.

If the expression $H_{ij}(s,\cdot) = d_{ij}(\cdot)L[\mu_{ij}(t)]$ is a H-function of the arc (i,j), where $L[\mu_{ij}(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\mu_{ij}(t)dt$, then to replace some of the arcs on a smaller equivalent set we can to obtain following result.

Statement 1. 1. For replacement of two consecutive arcs (i,k), (k,j) on a single equivalent arc (i,j) we have

$$t_{ij} = t_{ik} + t_{kj},\ \mu_{ij}(t) = \int_0^t \mu_{ik}(t-\tau)\mu_{kj}(\tau)d\tau$$

and $H_{ij}(s,\cdot) = H_{ik}(s,\cdot)\cdot H_{kj}(s,\cdot)$.

2. For replacement two parallel arcs $(i,j)'$, $(i,j)''$ on a single equivalent arc (i,j) we have

$$t_{ij} = \frac{d'_{ij}t'_{ij} + d''_{ij}t''_{ij}}{d'_{ij} + d''_{ij}},$$

$$\mu_{ij}(t) = \mu'_{ij}(t) + \mu''_{ij}(t) - \frac{d'_{ij}(\cdot)\mu'_{ij}(t) + d''_{ij}(\cdot)\mu''_{ij}(t)}{d'_{ij}(\cdot) + d''_{ij}(\cdot)}$$

and

$$H_{ij}(s,\cdot) = H'_{ij}(s,\cdot) + H''_{ij}(s,\cdot).$$

3. For replacement of a graph fragment (i,j) with arc-loop (maximal number of cycles is *M*) on single equivalent arc (i',j) we have

$$t'_{ij} = \frac{t_{ij}d_{ij} + (t_{ii}+t_{ij})d_{ii}d_{ij} + \ldots + ((M-1)t_{ii}+t_{ij})d_{ii}^{M-1}d_{ij}}{d_{ij} + d_{ii}d_{ij} + \ldots + d_{ii}^{M-1}d_{ij}}$$

and

$$H'_{ij}(s,\cdot) = H_{ij}(s,\cdot)\frac{1-(H_{ii}(s,\cdot))^M}{1-H_{ii}(s,\cdot)}.$$

The proof. In a case of replacement of two consecutive arcs (i,k), (k,j) on a single equivalent arc (i,j) taking $t_{ij} = t_{ik} + t_{kj}$ we have $d_{ij} = d_{ik}\cdot d_{kj}$ correspondently. Then, using the multiplication as a convolution

$$\mu_{ij}(t) = \int_0^t \mu_{ik}(t-\tau)\mu_{kj}(\tau)d\tau,$$

we have

$$H_{ij}(s,\cdot) = d_{ij}(\cdot)L[\mu_{ij}(t)] =$$

$$= d_{ik}(\cdot)d_{kj}(\cdot)L[\int_0^t \mu_{ik}(t-\tau)\mu_{kj}(\tau)d\tau] =$$

$$= d_{ik}(\cdot)d_{kj}(\cdot)L[\mu_{ik}(t)]L[\mu_{kj}(t)].$$

Consequently we obtain

$$H_{ij}(s,\cdot) = H_{ik}(s,\cdot)H_{kj}(s,\cdot).$$

It is easy to get a similar result for a number of consecutive arcs $r \ge 2$, that is,

$$H_{1r+1}(s,\cdot) = H_{12}(s,\cdot)H_{23}(s,\cdot)\cdot\ldots\cdot H_{rr+1}(s,\cdot).$$

In a case of replacement of two parallel arcs $(i,j)'$, $(i,j)''$ on a single equivalent arc (i,j) using $t_{ij} = \frac{d'_{ij}t'_{ij} + d''_{ij}t''_{ij}}{d'_{ij} + d''_{ij}}$ and accordingly $d_{ij} = d'_{ij} + d''_{ij}$ (for $d_{ij} \le 1$) we can get

$$\mu_{ij}(t) = \mu'_{ij}(t) + \mu''_{ij}(t) - \frac{d'_{ij}(\cdot)\mu''_{ij}(t) + d''_{ij}(\cdot)\mu'_{ij}(t)}{d'_{ij}(\cdot) + d''_{ij}(\cdot)}.$$

Then

$$H_{ij}(s,\cdot) = d_{ij}(\cdot)L[\mu_{ij}(t)] =$$

$$= (d'_{ij}(\cdot) + d''_{ij}(\cdot))L[\mu'_{ij}(t) + \mu''_{ij}(t) -$$

$$- \frac{d'_{ij}(\cdot)\mu''_{ij}(t) + d''_{ij}(\cdot)\mu'_{ij}(t)}{d'_{ij}(\cdot) + d''_{ij}(\cdot)}] =$$

$$= (d'_{ij}(\cdot) + d''_{ij}(\cdot))L[\frac{d'_{ij}(\cdot)\mu'_{ij}(t) + d''_{ij}(\cdot)\mu''_{ij}(t)}{d'_{ij}(\cdot) + d''_{ij}(\cdot)}] =$$

$$= d'_{ij}(\cdot)L[\mu'_{ij}(t)] + d''_{ij}(\cdot)L[\mu''_{ij}(t)]$$

and we obtain

$$H_{ij}(s,\cdot) = H'_{ij}(s,\cdot) + H''_{ij}(s,\cdot).$$

For the larger set of parallel arcs ($r \ge 2$) easy to get the following result

$$H_{ij}(s,\cdot) = H'_{ij}(s,\cdot) + H''_{ij}(s,\cdot) + \ldots + H^{(r)}_{ij}(s,\cdot).$$

In the case of replacement of a graph fragment with arc-loop (maximal number of cycles is *M*) on single equivalent arc (i,j) we received the values of the transition costs and the view of functions $\mu_{ij}(t)$, $H_{ij}(s,\cdot)$ in complete agreement with the deployment of the cyclic process into series-parallel.

Then

$$t'_{ij} = \frac{d_{ij}t_{ij} + d_{ii}d_{ij}(t_{ii}+t_{ij}) + \ldots + d_{ii}^{M-1}d_{ij}((M-1)t_{ii}+t_{ij})}{d_{ij} + d_{ii}d_{ij} + \ldots + d_{ii}^{M-1}d_{ij}}, \quad (1)$$

$$d'_{ij} = d_{ij} + d_{ii}d_{ij} + \ldots + d_{ii}^{M-1}d_{ij} = d_{ij}\frac{1-d_{ii}^M}{1-d_{ii}}. \quad (2)$$

Therefore

$$\mu'_{ij}(t)=\frac{1}{d_{ij}(\cdot)+d_{ii}(\cdot)d_{ij}(\cdot)+...+d_{ii}^{M-1}(\cdot)d_{ij}(\cdot)}\times$$

$$(d_{ij}(\cdot)\mu_{ij}(t)+d_{ij}(\cdot)d_{ii}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau+$$

$$+...+d_{ij}(\cdot)d_{ii}^{M-1}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}^{M-1}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau)=$$

$$=\frac{1-d_{ii}(\cdot)}{1-d_{ii}^{M}(\cdot)}(\mu_{ij}(t)+d_{ii}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau+$$

$$+...+d_{ii}^{M-1}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}^{M-1}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau). \qquad (3)$$

Taking into account (1) – (3) we obtain

$$H'_{ij}(s,\cdot)=d'_{ij}(\cdot)L[\mu'_{ij}(t)]=$$

$$=d_{ij}\frac{1-d_{ii}^{M}}{1-d_{ii}}L[\frac{1-d_{ii}(\cdot)}{1-d_{ii}^{M}(\cdot)}(\mu_{ij}(t)+$$

$$+d_{ii}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau+...+$$

$$+d_{ii}^{M-1}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}^{M-1}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau)]=$$

$$=d_{ij}L[\mu_{ij}(t)+d_{ii}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau+$$

$$+...+d_{ii}^{M-1}(\cdot)\int_0^t\mu_{ii}^{M-1}(t-\tau)\mu_{ij}(\tau)d\tau]=$$

$$=d_{ij}(\cdot)L[\mu_{ij}(t)](1+d_{ii}(\cdot)L[\mu_{ii}(t)]+$$

$$+...+d_{ii}(\cdot)^{M-1}[L[\mu_{ii}(t)]]^{M-1}).$$

Consequently

$$H'_{ij}(s,\cdot)=H_{ij}(s,\cdot)\frac{1-(H_{ii}(s,\cdot))^{M}}{1-H_{ii}(s,\cdot)}.$$

H-matrix method for models of technological processes considering index of the quality

Considered the analog of the method with the using of H-matrix [3] for modeling agro-technology as functional structure. The multidimensional graph corresponds to a functional network that was constructed. All arcs of the graph are weighted matrices, which contain fuzzy information about the quality and cost of execution for elements of the process. The weights arcs (i,j) for some moments $h_z,...,h_{z+y}$ are

$$t^{ij}(h)=\begin{bmatrix} t_{11}^{ij} & ... & t_{1n}^{ij} \\ ..... & ... & \\ t_{n1}^{ij} & ... & t_{nn}^{ij} \end{bmatrix},$$

where t_{kl}^{ij} - are the cost transition from the node i to node j with the index quality at the input k and at the output l. All t_{kl}^{ij} are elements of some fuzzy subsets with the values of the membership function - d_{kl}^{ij}.

For H-matrix of the arc (i,j) as

$$H^{ij}(p,\cdot)=\begin{bmatrix} H_{11}^{ij} & ... & H_{1n}^{ij} \\ ..... & & \\ H_{n1}^{ij} & ... & H_{nn}^{ij} \end{bmatrix},$$

$$H_{kl}^{ij}=d_{kl}^{ij}(\cdot)L[\mu_{kl}^{ij}(t)],$$

$$L[\mu_{kl}^{ij}(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mu_{kl}^{ij}(t)dt$$

then to replace some of the arcs on a smaller equivalent set we can to obtain following result.

Statement 2. 1. For replacement of two consecutive arcs (i,m), (m,j) on a single equivalent arc (i,j) we have

$$d_{kl}^{ij}=\sum_{p=1}^{n}d_{kp}^{im}d_{pl}^{mj}$$

and

$$H_{kl}^{ij}=\sum_{p=1}^{n}H_{kp}^{im}H_{pl}^{mj}.$$

2. For replacement two parallel arcs $(i,j)'$, $(i,j)''$ on a single equivalent arc (i,j) we have

$$d_{kl}^{ij}=d_{kl}^{ij'}+d_{kl}^{ij''}\ (\text{for } d_{kl}^{ij}\le 1)$$

and

$$H_{ij}(s,\cdot)=H'_{ij}(s,\cdot)+H''_{ij}(s,\cdot).$$

The proof. Transition through two consecutive arcs (i,m), (m,j) gives an opportunity to highlight the following constituents:

- consistent, where the cost of the transition from vertex *i* to vertex *j* are participating with a fixed index of quality *k* at entry and index of quality *l* at the output, that is,

  $t_{kl_1}^{ij}=t_{k1}^{im}+t_{1l}^{mj}$, ..., $t_{kl_n}^{ij}=t_{kn}^{im}+t_{n}^{mj}$.

  For these we have

  $d_{kl_1}^{ij}=d_{k1}^{im}\cdot d_{1l}^{mj}$, ..., $d_{kl_n}^{ij}=d_{kn}^{im}\cdot d_{nl}^{mj}$.
- parallel, which is a sequence of elements after the replacement by an equivalent arc

with different indices of quality in the transition, namely, elements with the costs of transition $t^{ij}_{kl_1}$, ..., $t^{ij}_{kl_n}$. Here, we have

$$d^{ij}_{kl} = d^{ij}_{kl_1} + ... + d^{ij}_{kl_n},$$

$$t^{ij}_{kl} = \frac{d^{ij}_{kl_1} t^{ij}_{kl_1} + ... + d^{ij}_{kl_n} t^{ij}_{kl_n}}{d^{ij}_{kl_1} + ... + d^{ij}_{kl_n}}.$$

In accordance with the Statement 1, we have

$$H^{ij}_{kl_1} = H^{im}_{k1} \cdot H^{mj}_{1l}, \; ..., \; H^{ij}_{kl_n} = H^{im}_{kn} \cdot H^{mj}_{nl}. \quad (4)$$

Further, collecting parallel components

$$H^{ij}_{kl} = H^{ij}_{kl_1} + ... + H^{ij}_{kl_n},$$

and taking into account (4) we have

$$H^{ij}_{kl} = \sum_{p=1}^{n} H^{im}_{kp} H^{mj}_{pl}.$$

Therefore in a case of replacement of two consecutive arcs (i,m), (m,j) on equivalent arc (i,j) we received

$$d^{ij}_{kl} = \sum_{p=1}^{n} d^{im}_{kp} d^{mj}_{pl}$$

and

$$H^{ij}_{kl} = \sum_{p=1}^{n} H^{im}_{kp} H^{mj}_{pl}.$$

In a case of replacement of two parallel arcs $(i,j)'$, $(i,j)''$ on a single equivalent arc (i,j) in accordance with the Statement 1 we have $d^{ij}_{kl} = d^{ij'}_{kl} + d^{ij''}_{kl}$ (for $d^{ij}_{kl} \le 1$) and

$$H_{ij}(s,\cdot) = H'_{ij}(s,\cdot) + H''_{ij}(s,\cdot).$$

For the larger set of parallel arcs ($r \ge 2$) we got also the following result

$$H_{ij}(s,\cdot) = H'_{ij}(s,\cdot) + H''_{ij}(s,\cdot) + ... + H^{(r)}_{ij}(s,\cdot).$$

Conclusion

The analog of the method with the using of H-functions for modeling agricultural technology as many iterative functional structure with random cycles has been considered. The weight of arcs as the costs transition from the node *i* to node *j* are elements of some fuzzy subsets.

The analog of the method with the using of H-matrix for modeling agrotechnological processes considering index of the quality also has been considered. All arcs of the graph are weighted matrices, which contain fuzzy information about the quality and cost of execution for elements of the process.

List of used sources:

1. *Vergunov V.A.* Method instructions in the selection of optimal technologies for growing crops by their formalized descriptions / V.A. Vergunov, I.M. Vergunova. – K.: 2010. – 64 p. (in Ukrainian)
2. *Vergunova I.M.* Basics of mathematical modeling in plant protection / I.M. Vergunova. – K.: Nora-print, 2006. – 236 p. (in Ukrainian)
3. *Rothstein A.P.* Design of defect-free man-machine technologies / A.P. Rothstein, P.D. Kuznetsov. – K.: Technika, 1992. – 180 p. (in Russian)
4. *Rothstein A.P.* Fuzzy reliability of algorithmic processes / A.P. Rothstein, S.D. Shtovba. – Vinnitsa: Kontinent-PRIM, 1997. – 142 p. (in Russian)
5. *Vergunova I.* The algebraic functional structures for analyze of the agrotechnologies / I. Vergunova // The algebraic functional structures for analyze of the agrotechnologies: XX Int. Conf., (PDMU-2012), Sept. 17-21, 2012, Brno, Czech Republic: abstracts. – 2012. – P. 127-128.
6. *Vergunova I.M.* The functional structures for description the technological scheme growing crops / I.M. Vergunova // The functional structures for description the technological scheme growing crops: Int. scientific conf. «Computational and Applied Mathematics» (on the 90-th anniversary of the birth of acad. I.I. Lyashko), 10 – 11 September 2012 p: Materials. – K., 2012. – P. 42.

Надійшла до редколегії 26.04.13

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

Власюк А.П.[1], д.т.н., проф.,
Федорчук Н.А.[2], аспірант

Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта в процесі тепло-масоперенесення

В статті сформульовано постановку та проведено математичне моделювання задачі напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під плоским флютбетом в процесі тепло-масоперенесення. Отримано числовий розв'язок відповідної двовимірної крайової задачі методом скінченних різниць. Як приклад, досліджено задачу зміни напружено-деформованого стану ґрунтової основи прямокутної форми. Використовуючи створене програмне забезпечення, проведено серію числових експериментів та їх аналіз.

Ключові слова: напружено-деформований стан, гідротехнічний об'єкт, тепло-масоперенесення, метод скінченних різниць.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru
[2] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: N.A.Fedorchuk@mail.ru

A.P. Vlasyuk[1], Doctor of science, prof.,
N.A.Fedorchuk[2], PhD student

Mathematical modelling of stressed deformed state of soil base of hydrotechnical object under heat-mass transfer

In the article was formulated the statement and carried out the mathematical modelling of problems of stressed deformed state (SDS) of soil base of hydrotechnical object under flat flood bed during heat-mass transfer. There is obtained the numerical solution of respective two-dimensional boundary value problem by the method of finite differences. As an example, the SDS change of rectangular form soil base problem has been investigated. Using created software a series was conducted of numeral experiments and their analysis.

Key words: stressed deformed state, hydrotechnical object, heat-mass transfer, method of finite differences.

[1] National University of Water Management and Nature Resources Use, Soborna, 11, Rivne, 33000, Ukraine
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru
[2] National University of Water Management and Nature Resources Use, Soborna, 11, Rivne, 33000, Ukraine
e-mail: N.A.Fedorchuk@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ. Важливим етапом при проектуванні будь-якого гідротехнічного об'єкта (ГТО), його будівництві та подальшій експлуатації є врахування деформаційних властивостей ґрунтових основ та гідрогеологічних процесів, що відбуваються в таких ґрунтах. Зокрема, під дією процесів фільтрації підземних вод, масоперенесення, теплоперенесення та ін. може значно змінюватись напружено-деформований стан (НДС) ґрунтових масивів, а відповідно – призвести до осідання земної поверхні та виникнення аварійних ситуацій.

Розв'язанням задачі НДС ґрунтових масивів займались наступні вчені: Сергієнко І.В., Скопецький В.В., Дейнека В.С., Власюк А.П., Катерина Є.І., Кузло М.Т., Філатова І.А. та ін. [1-11]. Однак, в їхніх роботах не враховувався тепловий режим ґрунту, зокрема фільтрація підземних вод в неізотермічних умовах та тепло-масоперенесення.

Тому актуальною є задача дослідження НДС ґрунтових основ ГТО в процесі тепло-масоперенесення.

2. Постановка задачі. Розглянемо ґрунтову основу гідротехнічного об'єкта під плоским флютбетом, що займає область $\Omega = \{(x, y):\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2\}$ (див. рис.1). Флютбет E_1E_2 описується рівнянням межі $y = 0$, $x \in [l_1^1, l_1^2]$, $0 < l_1^1 < l_1^2 < l_1$.

© А.П. Власюк, Н.А. Федорчук, 2013

Ґрунтова основа вважається пружно-деформівною в межах лінійної теорії пружності з пружними параметрами (коефіцієнтами Ламе) $\lambda(c,T)$, $\mu(c,T)$, які залежать від концентрації сольового розчину та температури. На ґрунт діє сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

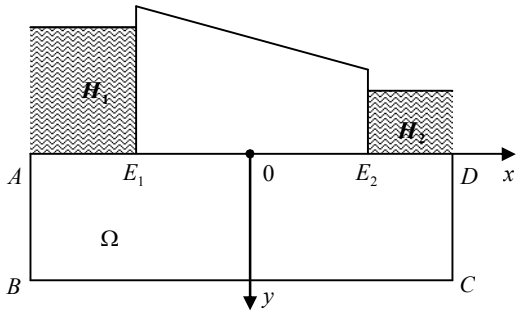


Рис.1. НДС ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта в процесі тепло-масоперенесення

Задані значення п'єзометричних напорів $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$, температур $\widetilde{T}_1$ та $\widetilde{T}_2$ у верхньому (AE_1) та нижньому (E_2D) б'єфах відповідно, причому $\widetilde{H}_1 > \widetilde{H}_2$, $\widetilde{T}_1 > \widetilde{T}_2$. У верхньому б'єфі задано значення концентрації солей $\widetilde{C}_1$, а у нижньому – умову швидкого виносу солей. Під впливом градієнтів напорів, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процес фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

ГТО вважається непроникним. Відповідно процеси фільтрації підземних вод відбуваються в ґрунтовій основі під флютбетом E_1E_2.

Потрібно розрахувати зміну напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під флютбетом в процесі тепло-масоперенесення.

3. Математична модель задачі. Математичну модель задачі НДС ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під флютбетом у процесі тепло-масоперенесення в двовимірному випадку можна описати наступною крайовою задачею [1-11]:

$$\mu(c,T)\Delta U + (\lambda(c,T)+\mu(c,T))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$
$$+\left[\frac{\partial\lambda(c,T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+2\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]-(2\lambda(c,T)+2\mu(c,T))\alpha_T\frac{\partial T}{\partial x}=X,$$
$$\mu(c,T)\Delta V + (\lambda(c,T)+\mu(c,T))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$
$$+\left[\frac{\partial\lambda(c,T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+2\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]-(2\lambda(c,T)+2\mu(c,T))\alpha_T\frac{\partial T}{\partial y}=Y, \quad (1)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{D}(c,T)\nabla c)-\boldsymbol{\upsilon}\nabla c-\gamma(c-C_m)+\nabla\cdot(\mathbf{D}_\mathbf{T}\nabla T)=n_p\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{T}\nabla T)-\rho c_\rho\boldsymbol{\upsilon}\nabla T=c_T\frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\upsilon}=-\mathbf{K}(c,T)\nabla h+\boldsymbol{\nu}_\mathbf{c}(c)\nabla c+\boldsymbol{\nu}_\mathbf{T}\nabla T,\ div\vec{\boldsymbol{\upsilon}}+\frac{\partial n_p}{\partial t}=0, \quad (4)$$

$$(\vec{\boldsymbol{\upsilon}},\vec{\mathbf{n}})\big|_{ABCD\cup E_1E_2}=0,\ h\big|_{AE_1}=\widetilde{H}_1,\ h\big|_{E_2D}=\widetilde{H}_2, \quad (5)$$

$$(\vec{\mathbf{q}}_\mathbf{c},\vec{\mathbf{n}})\big|_{ABCD\cup E_1E_2}=0,\ c\big|_{AE_1}=\widetilde{C}_1,\ \frac{\partial c}{\partial y}\bigg|_{E_2D}=0, \quad (6)$$

$$(\vec{\mathbf{q}}_\mathbf{T},\vec{\mathbf{n}})\big|_{ABCD\cup E_1E_2}=0,\ T\big|_{AE_1}=\widetilde{T}_1,\ T\big|_{E_2D}=\widetilde{T}_2, \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_\mathbf{c}=\boldsymbol{\upsilon}c-\mathbf{D}(c,T)\nabla c-\mathbf{D}_\mathbf{T}\nabla T,$$
$$\mathbf{q}_\mathbf{T}=\rho c_\rho\boldsymbol{\upsilon}T-\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{T}\nabla T,\ (x,y)\in\Omega, \quad (8)$$

$$U=0,\ \tau_{xy}=0,\ (x,y)\in AB\cup CD, \quad (9)$$

$$\vec{\mathbf{u}}=0,\ (x,y)\in BC\cup E_1E_2, \quad (10)$$

$$\sigma_n=0,\ \tau_s=0,\ (x,y)\in AE_1\cup E_2D, \quad (11)$$

$$c(x,y,0)=\widetilde{C}_0(x,y),\ T(x,y,0)=\widetilde{T}_0(x,y),\ (x,y)\in\Omega, \quad (12)$$

де $\vec{\mathbf{u}}=(U,V)$ –вектор зміщень; $c(x,y,t)$ - концентрація сольового розчину; $T(x,y,t)$ - температура; $h(x,y,t)$ - п'єзометричний напір; $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{T}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\nu}_\mathbf{c}$, $\boldsymbol{\nu}_\mathbf{T}$ - тензори відповідно коефіцієнтів конвективної дифузії, термодифузії, ефективної теплопровідності вологого ґрунту, фільтрації, хімічного та термічного осмосів; $\boldsymbol{\upsilon}$ – вектор швидкості фільтрації сольового розчину в неізотермічних умовах; $\mathbf{q}_\mathbf{c}$ – вектор потоку розчинених солей; $\mathbf{q}_\mathbf{T}$ – вектор потоку тепла; $\mathbf{n}$ – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області; X, Y - масові сили; $\lambda(c,T)$, $\mu(c,T)$ – коефіцієнти Ламе, що залежать від концентрації фільтруючого розчину та температури; γ – константа швидкості

масообміну; C_m – концентрація граничного насичення; n_p – пористість ґрунту; ρ, c_ρ – густина та питома теплоємність порового розчину; c_T – питома теплоємність ґрунту при сталому об'ємі; $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$, $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{T}_1$, $\widetilde{T}_2$, $\widetilde{C}_0(x,y)$, $\widetilde{T}_0(x,y)$, – задані функції; t – час.

Тут: (1) – це система рівнянь НДС ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під флютбетом, що знаходиться у водонасиченому стані при фільтрації підземних вод з врахуванням тепломасоперенесення; (2), (3) описують сольовий та тепловий режими ґрунту; (4) – це рівняння фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. Крайові умови для зміщень, концентрації солей, температури, а також для напору мають вигляд (5) – (12) відповідно.

4. Числовий розв'язок крайової задачі. Покриємо область $\overline{Q}_T = \overline{\Omega}\times[0,t_0]$ рівномірною сіткою $\overline{Q}^{(m_1,m_2,n_1)} = ([0;m_1h_1]\times[0;m_2h_2])\times[0;n_1\tau]$ з кроками h_1, h_2 та τ відповідно по змінних x, y та часу t, де m_1, m_2, n_1 – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Для числового розв'язання поставленої двовимірної крайової задачі використаємо метод скінченних різниць [6, 7]. Запишемо різницеву схему для рівняння (1), а для рівнянь (2), (3) використаємо монотонну різницеву схему Самарського [12]. В результаті отримуємо аналог системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді системи різницевих рівнянь

$$\begin{aligned}
&\mu_{i_1,i_2}\left(\frac{U_{i_1+1,i_2}-2U_{i_1,i_2}+U_{i_1-1,i_2}}{h_1^2}+\frac{U_{i_1,i_2+1}-2U_{i_1,i_2}+U_{i_1,i_2-1}}{h_2^2}\right)+\\
&+\left(\lambda_{i_1,i_2}+\mu_{i_1,i_2}\right)\frac{U_{i_1+1,i_2}-2U_{i_1,i_2}+U_{i_1-1,i_2}}{h_1^2}+\\
&+\left(\frac{\lambda_{i_1+1,i_2}-\lambda_{i_1,i_2}}{h_1}+2\frac{\mu_{i_1+1,i_2}-\mu_{i_1,i_2}}{h_1}\right)\frac{U_{i_1+1,i_2}-U_{i_1,i_2}}{h_1}+\\
&+\frac{\mu_{i_1,i_2+1}-\mu_{i_1,i_2}}{h_2}\frac{U_{i_1,i_2+1}-U_{i_1,i_2}}{h_2}=f^1_{i_1,i_2}(V,T),
\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_{i_1,i_2}\left(\frac{V_{i_1+1,i_2}-2V_{i_1,i_2}+V_{i_1-1,i_2}}{h_1^2}+\frac{V_{i_1,i_2+1}-2V_{i_1,i_2}+V_{i_1,i_2-1}}{h_2^2}\right)+\\
&+\left(\lambda_{i_1,i_2}+\mu_{i_1,i_2}\right)\frac{V_{i_1,i_2+1}-2V_{i_1,i_2}+V_{i_1,i_2-1}}{h_2^2}+\\
&+\left(\frac{\lambda_{i_1,i_2+1}-\lambda_{i_1,i_2}}{h_2}+2\frac{\mu_{i_1,i_2+1}-\mu_{i_1,i_2}}{h_2}\right)\frac{V_{i_1,i_2+1}-V_{i_1,i_2}}{h_2}+\\
&+\frac{\mu_{i_1+1,i_2}-\mu_{i_1,i_2}}{h_1}\frac{V_{i_1+1,i_2}-V_{i_1,i_2}}{h_1}=f^2_{i_1,i_2}(U,T),
\end{aligned}\tag{14}$$

де $f^1_{i_1,i_2}(V,T)$, $f^2_{i_1,i_2}(U,T)$ – відомі функції, $\lambda_{i_1,i_2}=\lambda_{i_1,i_2}(c^{(j)}_{i_1,i_2},T^{(j)}_{i_1,i_2})$, $\mu_{i_1,i_2}=\mu_{i_1,i_2}(c^{(j)}_{i_1,i_2},T^{(j)}_{i_1,i_2})$, $i_1=\overline{1,m_1-1}$, $i_2=\overline{1,m_2-1}$, $j=\overline{0,n_1-1}$.

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (2) запишеться у вигляді наступної системи різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned}
&n_p\frac{c^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}-c^{(j)}_{i_1,i_2}}{\tau}=\frac{(\eta_1)^{(j)}_{i_1,i_2}}{h_1}\left((d_1)^{(j)}_{i_1+1,i_2}\frac{c^{(j+0,5)}_{i_1+1,i_2}-c^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}}{h_1}-\right.\\
&\left.-(d_1)^{(j)}_{i_1,i_2}\frac{c^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}-c^{(j+0,5)}_{i_1-1,i_2}}{h_1}\right)+\frac{(\upsilon_1^+)^{(j)}_{i_1,i_2}}{(D_1)^{(j)}_{i_1,i_2}}\cdot(d_1)^{(j)}_{i_1+1,i_2}\frac{c^{(j+0,5)}_{i_1+1,i_2}-c^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}}{h_1}+\\
&+\frac{(\upsilon_1^-)^{(j)}_{i_1,i_2}}{(D_1)^{(j)}_{i_1,i_2}}\cdot(d_1)^{(j)}_{i_1,i_2}\frac{c^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}-c^{(j+0,5)}_{i_1-1,i_2}}{h_1}-\frac{\gamma}{2}(c^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}-C_m)+\\
&+\frac{1}{h_1}\left((d_{T_1})^{(j)}_{i_1+1,i_2}\frac{T^{(j+0,5)}_{i_1+1,i_2}-T^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}}{h_1}-(d_{T_1})^{(j)}_{i_1,i_2}\frac{T^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}-T^{(j+0,5)}_{i_1-1,i_2}}{h_1}\right),
\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&n_p\frac{c^{(j+1)}_{i_1,i_2}-c^{(j+0,5)}_{i_1,i_2}}{\tau}=\frac{(\eta_2)^{(j)}_{i_1,i_2}}{h_2}\left((d_2)^{(j)}_{i_1,i_2+1}\frac{c^{(j+1)}_{i_1,i_2+1}-c^{(j+1)}_{i_1,i_2}}{h_2}-\right.\\
&\left.-(d_2)^{(j)}_{i_1,i_2}\frac{c^{(j+1)}_{i_1,i_2}-c^{(j+1)}_{i_1,i_2-1}}{h_2}\right)+\frac{(\upsilon_2^+)^{(j)}_{i_1,i_2}}{(D_2)^{(j)}_{i_1,i_2}}\cdot(d_2)^{(j)}_{i_1,i_2+1}\frac{c^{(j+1)}_{i_1,i_2+1}-c^{(j+1)}_{i_1,i_2}}{h_2}+\\
&+\frac{(\upsilon_2^-)^{(j)}_{i_1,i_2}}{(D_2)^{(j)}_{i_1,i_2}}\cdot(d_2)^{(j)}_{i_1,i_2}\frac{c^{(j+1)}_{i_1,i_2}-c^{(j+1)}_{i_1,i_2-1}}{h_2}-\frac{\gamma}{2}(c^{(j+1)}_{i_1,i_2}-C_m)+\\
&+\frac{1}{h_2}\left((d_{T_2})^{(j)}_{i_1,i_2+1}\frac{T^{(j+1)}_{i_1,i_2+1}-T^{(j+1)}_{i_1,i_2}}{h_2}-(d_{T_2})^{(j)}_{i_1,i_2}\frac{T^{(j+1)}_{i_1,i_2}-T^{(j+1)}_{i_1,i_2-1}}{h_2}\right),
\end{aligned}\tag{19}$$

де

$$(d_1)^{(j)}_{i_1,i_2}=\frac{1}{2}\left((D_1)^{(j)}_{i_1,i_2}+(D_1)^{(j)}_{i_1-1,i_2}\right),\ (d_2)^{(j)}_{i_1,i_2}=\frac{1}{2}\left((D_2)^{(j)}_{i_1,i_2}+(D_2)^{(j)}_{i_1,i_2-1}\right),$$

$$(d_{T_1})^{(j)}_{i_1,i_2}=\frac{1}{2}\left((D_{T_1})^{(j)}_{i_1,i_2}+(D_{T_1})^{(j)}_{i_1-1,i_2}\right),\ (d_{T_2})^{(j)}_{i_1,i_2}=\frac{1}{2}\left((D_{T_2})^{(j)}_{i_1,i_2}+(D_{T_2})^{(j)}_{i_1,i_2-1}\right),$$

$$(\eta_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}=\frac{1}{1+\dfrac{h_{i_3}\left|(\upsilon_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}\right|}{2(D_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}}}=1-\frac{h_{i_3}\left|(\upsilon_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}\right|}{2(D_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}}+O(h_{i_3}^2),$$

$$(\upsilon^+_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}=\frac{-(\upsilon_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}+\left|(\upsilon_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}\right|}{2}\ge 0,\ (\upsilon^-_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}=\frac{-(\upsilon_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}-\left|(\upsilon_{i_3})^{(j)}_{i_1,i_2}\right|}{2}\le 0,$$

$i_1=\overline{1,m_1-1}$, $i_2=\overline{1,m_2-1}$, $i_3=1,2$, $j=\overline{0,n_1-1}$.

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (3) запишеться у вигляді наступної системи різницевих рівнянь:

$$c_T\frac{T_{i_1,i_2}^{(j+0,5)}-T_{i_1,i_2}^{(j)}}{\tau}=\frac{(\overline{\eta}_1)_{i_1,i_2}^{(j)}}{h_1}\left((\overline{\lambda}_{T_1})_{i_1+1,i_2}^{(j)}\frac{T_{i_1+1,i_2}^{(j+0,5)}-T_{i_1,i_2}^{(j+0,5)}}{h_1}-\right.$$

$$\left.-(\overline{\lambda}_{T_1})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{T_{i_1,i_2}^{(j+0,5)}-T_{i_1-1,i_2}^{(j+0,5)}}{h_1}\right)+\rho c_\rho\left(\frac{(\upsilon_1^+)_{i_1,i_2}^{(j)}}{(\lambda_{T_1})_{i_1,i_2}^{(j)}}\cdot(\overline{\lambda}_{T_1})_{i_1+1,i_2}^{(j)}\times\right. \quad (22)$$

$$\left.\times\frac{T_{i_1+1,i_2}^{(j+0,5)}-T_{i_1,i_2}^{(j+0,5)}}{h_1}+\frac{(\upsilon_1^-)_{i_1,i_2}^{(j)}}{(\lambda_{T_1})_{i_1,i_2}^{(j)}}\cdot(\overline{\lambda}_{T_1})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{T_{i_1,i_2}^{(j+0,5)}-T_{i_1-1,i_2}^{(j+0,5)}}{h_1}\right),$$

$$c_T\frac{T_{i_1,i_2}^{(j+1)}-T_{i_1,i_2}^{(j+0,5)}}{\tau}=\frac{(\overline{\eta}_2)_{i_1,i_2}^{(j)}}{h_2}\left((\overline{\lambda}_{T_2})_{i_1,i_2+1}^{(j)}\frac{T_{i_1,i_2+1}^{(j+1)}-T_{i_1,i_2}^{(j+1)}}{h_2}-\right.$$

$$\left.-(\overline{\lambda}_{T_2})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{T_{i_1,i_2}^{(j+1)}-T_{i_1,i_2-1}^{(j+1)}}{h_2}\right)+\rho c_\rho\left(\frac{(\upsilon_2^+)_{i_1,i_2}^{(j)}}{(\lambda_{T_2})_{i_1,i_2}^{(j)}}\cdot(\overline{\lambda}_{T_2})_{i_1,i_2+1}^{(j)}\times\right. \quad (23)$$

$$\left.\times\frac{T_{i_1,i_2+1}^{(j+1)}-T_{i_1,i_2}^{(j+1)}}{h_2}+\frac{(\upsilon_2^-)_{i_1,i_2}^{(j)}}{(\lambda_{T_2})_{i_1,i_2}^{(j)}}\cdot(\overline{\lambda}_{T_2})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{T_{i_1,i_2}^{(j+1)}-T_{i_1,i_2-1}^{(j+1)}}{h_2}\right),$$

де

$$(\overline{\lambda}_{T_1})_{i_1,i_2}^{(j)}=\frac{1}{2}\left((\lambda_{T_1})_{i_1,i_2}^{(j)}+(\lambda_{T_1})_{i_1-1,i_2}^{(j)}\right),\ (\overline{\lambda}_{T_2})_{i_1,i_2}^{(j)}=\frac{1}{2}\left((\lambda_{T_2})_{i_1,i_2}^{(j)}+(\lambda_{T_2})_{i_1,i_2-1}^{(j)}\right),$$

$$(\overline{\eta}_{i_3})_{i_1,i_2}^{(j)}=\frac{1}{1+\dfrac{h_{i_3}\rho c_\rho\left|(\upsilon_{i_3})_{i_1,i_2}^{(j)}\right|}{2(\lambda_{T_{i_3}})_{i_1,i_2}^{(j)}}}=1-\frac{h_{i_3}\rho c_\rho\left|(\upsilon_{i_3})_{i_1,i_2}^{(j)}\right|}{2(\lambda_{T_{i_3}})_{i_1,i_2}^{(j)}}+O(h_{i_3}^2),$$

$i_1=\overline{1,m_1-1}$, $i_2=\overline{1,m_2-1}$, $i_3=1,2$, $j=\overline{0,n_1-1}$.

Для значень компонент швидкості фільтрації отримаємо

$$(\upsilon_1)_{i_1,i_2}^{(j)}=-(K_1)_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{h_{i_1+1,i_2}^{(j)}-h_{i_1-1,i_2}^{(j)}}{2h_1}+$$

$$+(\nu_{c_1})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{c_{i_1+1,i_2}^{(j)}-c_{i_1-1,i_2}^{(j)}}{2h_1}+(\nu_{T_1})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{T_{i_1+1,i_2}^{(j)}-T_{i_1-1,i_2}^{(j)}}{2h_1}, \quad (24)$$

$$(\upsilon_2)_{i_1,i_2}^{(j)}=-(K_2)_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{h_{i_1,i_2+1}^{(j)}-h_{i_1,i_2-1}^{(j)}}{2h_2}+$$

$$+(\nu_{c_2})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{c_{i_1,i_2+1}^{(j)}-c_{i_1,i_2-1}^{(j)}}{2h_2}+(\nu_{T_2})_{i_1,i_2}^{(j)}\frac{T_{i_1,i_2+1}^{(j)}-T_{i_1,i_2-1}^{(j)}}{2h_2}, \quad (25)$$

$i_1=\overline{1,m_1-1}$, $i_2=\overline{1,m_2-1}$, $j=\overline{0,n_1}$.

Для знаходження наближених значень зміщень та напору з вищенаведених різницевих рівнянь використано ітераційний метод Гауса-Зейделя, а концентрації солей та температури – метод прогонки [12].

Деформації та напруження з врахуванням неізотермічного режиму в двовимірному випадку обчислюються за формулами

$$\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\sigma_x=\frac{\theta}{1+\nu}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right)-\alpha_T\overline{T}\theta,\ \sigma_y=\frac{\theta}{1+\nu}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right)-\alpha_T\overline{T}\theta,$$

де $\theta=\dfrac{E(c,T)}{1-\nu}$, $E(c,T)$ – модуль Юнга, що залежить від концентрації сольових розчинів та температури; ν – коефіцієнт Пуассона, $\overline{T}=T-T_0$.

Відповідно їх скінченнорізницеві аналоги мають вигляд

$$(\varepsilon_x)_{i_1,i_2}=\frac{U_{i_1+1,i_2}-U_{i_1-1,i_2}}{2h_1},\ (\varepsilon_y)_{i_1,i_2}=\frac{V_{i_1,i_2+1}-V_{i_1,i_2-1}}{2h_2},$$

$$(\sigma_x)_{i_1,i_2}=\frac{\theta}{1+\nu}\left((\varepsilon_x)_{i_1,i_2}+\nu(\varepsilon_y)_{i_1,i_2}\right)-\alpha\overline{T}_{i_1,i_2}^{(j)}\theta,$$

$$(\sigma_y)_{i_1,i_2}=\frac{\theta}{1+\nu}\left((\varepsilon_y)_{i_1,i_2}+\nu(\varepsilon_x)_{i_1,i_2}\right)-\alpha\overline{T}_{i_1,i_2}^{(j)}\theta,$$

$i_1=\overline{1,m_1-1}$, $i_2=\overline{1,m_2-1}$, $j=\overline{0,n_1-1}$.

5. Результати числових експериментів. Як приклад, розглянуто двовимірну задачу НДС масиву піщаного водонасиченого ґрунту прямокутної форми товщиною $l_2=20\,м$ при $l_1=80\,м$, $l_1^1=20\,м$ та $l_1^2=60\,м$ з наступними вхідними даними:

$n_p=0{,}4$, $\alpha_T=1\cdot10^{-6}\ \dfrac{1}{град}$, $\rho=1100\dfrac{кг}{м^3}$,

$c_\rho=4{,}2\cdot10^3\ \dfrac{Дж}{кг\cdot град}$, $c_T=2{,}137\cdot10^6\ \dfrac{Дж}{м^3\cdot град}$,

$D_1=D_2=2\cdot10^{-2}\ \dfrac{м^2}{доба}$, $D_{T_1}=D_{T_2}=2\cdot10^{-3}\ \dfrac{м^2}{доба}$,

$\nu_{c_1}=\nu_{c_2}=2{,}8\cdot10^{-5}\ \dfrac{м^{-5}}{кг\cdot доба}$, $\gamma=6{,}5\cdot10^{-5}\ доба^{-1}$,

$\nu_{T_1}=\nu_{T_2}=2{,}8\cdot10^{-6}\ \dfrac{м^2}{град\cdot доба}$, $\gamma_{р.}=1\cdot10^4\ \dfrac{Па}{м}$,

$\lambda_{T_1}=\lambda_{T_2}=108\cdot10^3\ \dfrac{Дж}{м\cdot град\cdot доба}$, $\gamma_{зв.}=1{,}3\cdot10^4\dfrac{Па}{м}$,

$\widetilde{T}_1(x,t)=30^0C$, $\widetilde{T}_2(x,t)=15^0C$, $\widetilde{T}_3(x,t)=5^0C$,

$\widetilde{H}_1(x,t)=10\ м$, $\widetilde{H}_2(x,t)=1\,м$,

$\widetilde{C}_1(x,t)=C_m(x,t)=350\ \dfrac{г}{літр}$,

$\widetilde{C}_2(x,t)=8\dfrac{г}{літр}$, $\widetilde{C}_0(x,y)=\begin{cases}C_m, & (x,y)\in AE_1,\\ \widetilde{C}_2, & (x,y)\notin AE_1;\end{cases}$

$$\widetilde{T}_0(x,y)=\begin{cases}\widetilde{T}_1, & (x,y)\in AE_1,\\ \widetilde{T}_2, & (x,y)\in E_2D,\\ \widetilde{T}_3, & (x,y)\notin AE_1\cup E_2D.\end{cases}$$

Значення залежностей $\lambda(c,T)$, $\mu(c,T)$ та $\mathbf{K}(c,T)$ взяті аналогічно, як і в роботі [6, 13, 14].

Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 рокам.

Проведено серію числових експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при $t = 1095$ діб.

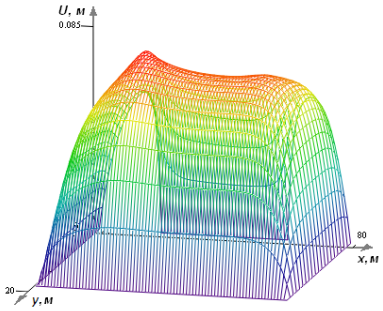


Рис.2. Графік розподілу поля зміщень по осі Ox з врахуванням тепло-масоперенесення

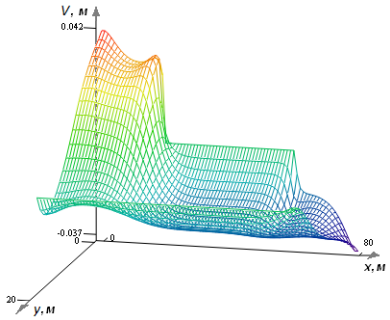


Рис.3 Графік розподілу поля зміщень по осі Oy з врахуванням тепло-масоперенесення

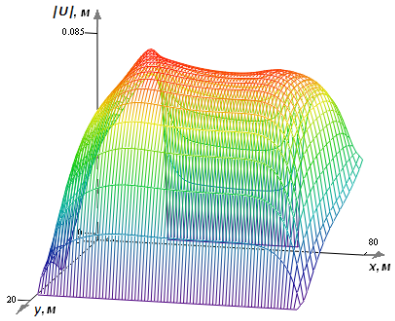


Рис.4. Графіки розподілу поля модуля зміщень з врахуванням тепло-масоперенесення

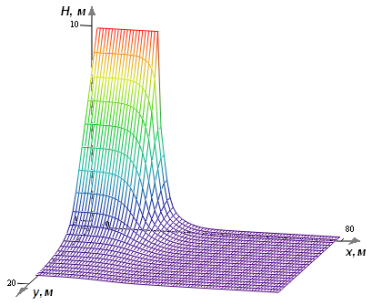


Рис.5. Графіки розподілу поля напорів з врахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

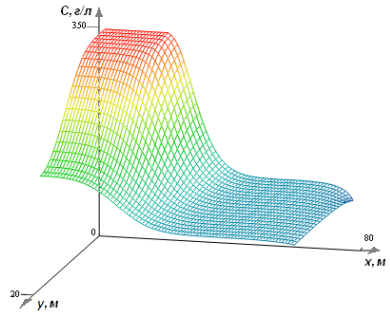


Рис.6. Графіки розподілу поля концентрації солей в неізотермічному режимі

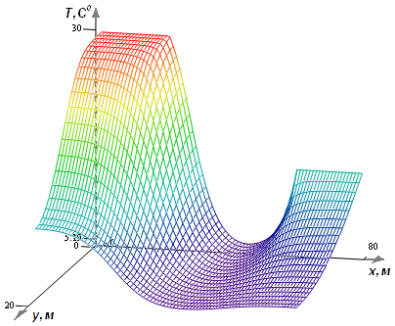


Рис.7. Графіки розподілу поля температури при фільтрації сольових розчинів

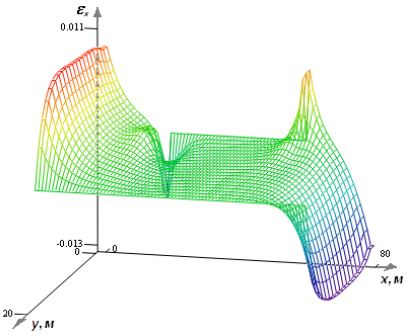


Рис.8. Графік розподілу поля деформацій по осі Ox з врахуванням тепло-масоперенесення

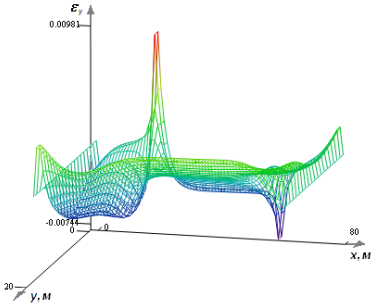


Рис.9. Графік розподілу поля деформацій по осі Oy з врахуванням тепло-масоперенесення

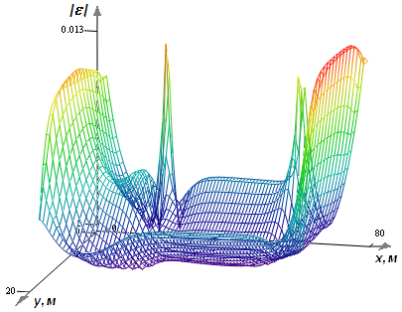


Рис.10. Графік розподілу поля модуля деформацій з врахуванням тепло-масоперенесення

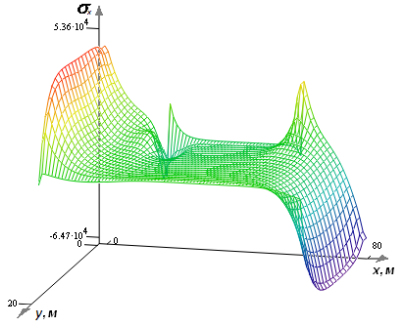


Рис.11. Графік розподілу поля напружень по осі Ox з врахуванням тепло-масоперенесення

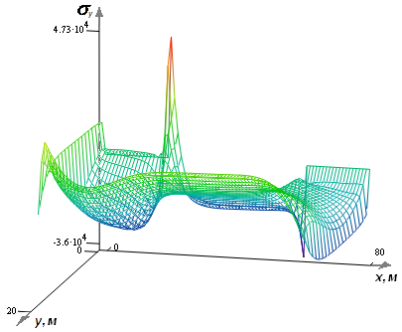


Рис.12. Графік розподілу поля напружень по осі Oy з врахуванням тепло-масоперенесення

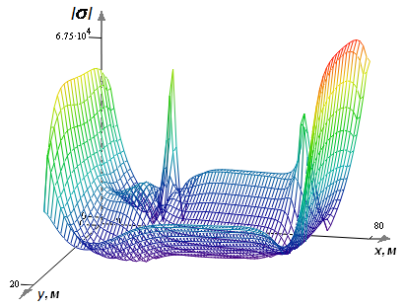


Рис.13. Графік розподілу поля модуля напружень з врахуванням тепло-масоперенесення

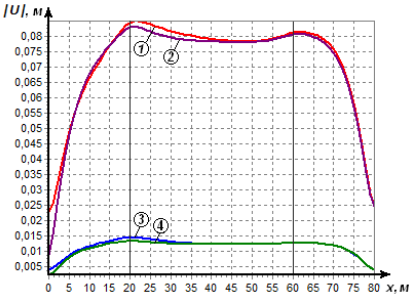


Рис.14. Графіки розподілу поля модуля зміщень при $y = 7\,м$: 1) під впливом тепло-масоперенесення; 2) під впливом масоперенесення; 3) під впливом теплоперенесення; 4) без тепло-масоперенесення

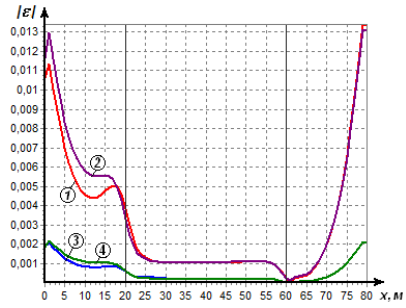


Рис.15. Графіки розподілу поля модуля деформацій при $y = 7\,м$: 1) під впливом тепло-масоперенесення; 2) під впливом масоперенесення; 3) під впливом теплоперенесення; 4) без тепло-масоперенесення

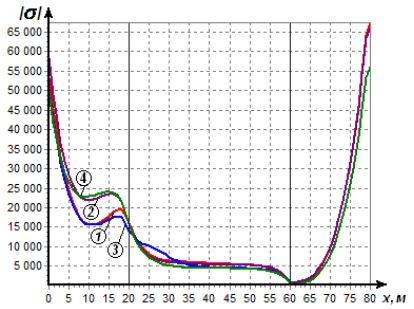


Рис.16. Графіки розподілу поля модуля напружень при $y = 7\,м$: 1) під впливом тепло-масоперенесення; 2) під впливом масоперенесення; 3) під впливом теплоперенесення; 4) без тепло-масоперенесення

6. Висновки. В роботі сформульовано постановку та розроблено відповідну математичну модель НДС ґрунтової основи ГТО в процесі тепло-масоперенесення. Отримано числовий розв'язок поставленої крайової задачі методом скінченних різниць. Проведено ряд числових експериментів з дослідження впливу

тепло-масоперенесення на НДС ґрунтової основи ГТО. Як видно з рис. 14, при врахуванні процесів тепло-масоперенесення значно змінюється картина НДС в порівнянні ніж з врахуванням тільки масоперенесення, з врахуванням тільки теплоперенесення та без врахування впливу тепло-масоперенесення. А саме: зміщення з врахуванням процесів тепло-масоперенесення значно збільшуються у порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масоперенесення. Теплоперенесення дещо впливає на розподіл поля зміщень в порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масоперенесення, а також масоперенесення в неізотермічних умовах дещо збільшує розподіл поля зміщень, ніж з врахуванням масоперенесення в ізотермічних умовах.

Отримані результати можуть бути використані для оцінки стану ґрунтових основ ГТО, їх несучої здатності, прогнозування стійкості, надійності та безпеки експлуатації ГТО.

References

1. *Sergienko I.V., Skopets'kyi V.V., Deyneka V.S.* Mathematical modeling and the research of processes in non-homogeneous media. – Kyiv: Naukova Dumka, 1991. – 432p. (in Russian)
2. *Deyneka V.S.* Models and methods for solving problems with transmission conditions / *V.S. Deyneka, I.V. Sergienko, V.V. Skopets'kyi*. – Kyiv: Naukova Dumka, 1998. – 615p. (in Russian)
3. *Vlasyuk A.P.* The solution of one-dimensional stationary problem of SDS of soil masses in conditions of mass transfer / *A.P. Vlasyuk, Ye.I. Kateryna* // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Informatics, 1999. – Issue 1. – Pp. 50-55. (in Ukrainian)
4. *Vlasyuk A.P.* On some new mathematical models of underground hydrodynamics / *A.P. Vlasyuk* // Visnyk RSTU – Rivne – Issue 3(5), Part 2. – 2000. – Pp. 57-62. (in Ukrainian)
5. *Kuzlo N.T.* On some mathematical models of SDS of soil mass in the process of the movement of free surface of ground waters / *N.T. Kuzlo, I.A. Filatova* // Visnyk NUWM – Rivne, 2005. – Issue. 2(30). – Pp. 282-287. (in Ukrainian)
6. *Kuzlo N.T.* The study of the influence of the concentration of salt solutions on deformation characteristics of soils / *N.T. Kuzlo, I.A. Filatova* // Visnyk NUWM – Rivne, 2006. – Issue 4(36), Part 2. – Pp. 209-214. (in Ukrainian)
7. *Filatova I.A.* Mathematical modelling of SDS of a multi-layered soil masses at presence of a level of subsoil waters / *I.A. Filatova* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Issue. 1. – 2008. – Pp. 161-165. (in Ukrainian)
8. *Fedorchuk N.A.* Mathematical modelling of one-dimensional problem of SDS of soil layer considering mass transfer during the filtration of salt solutions under non-isothermal conditions and the availability of ground waters level / *N.A. Fedorchuk* // Mathematical and computer modelling. Series: Technical Sciences: Collection Scientific Papers – Kamianets-Podilsky: Kamianets-Podilsky Ivana Ohienko National University, 2010. – Issue 4 – Pp. 204-215. (in Ukrainian)
9. *Filatova I.A.* Mathematical modeling of stressed deformed state of soil masses under complicated hydrogeological conditions / *I.A. Filatova, N.A. Fedorchuk* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Issue. 3. – 2011. – Pp. 218-226. (in Ukrainian)
10. *Vlasyuk A.P.* Mathematical modeling of one-dimensional problem of stressed deformed state of soil mass under heat-mass transfer conditions during the filtration of salt solutions / *A.P. Vlasyuk, N.A. Fedorchuk* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Issue. 1. – 2012. – Pp. 131-136. (in Ukrainian)
11. *Kovalenko A.D.* Thermoelasticity / *A.D. Kovalenko* // Kyiv: Vyshcha Shkola, 1975. – 216 p. (in Russian)
12. *Samarskii A.A.* Theory of Difference Schemes / *A.A. Samarskii* // Moscow: Nauka, 1989. – 616 p. (in Russian)
13. *Vlasyuk A.P.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation taking into account salt and heat transfer / *A.P. Vlasyuk, P.M. Martinyuk* // National University of Water Management and Natural Resources Use, Rivne, 2008. – 416 p. (in Ukrainian)
14. *Vlasyuk A.P.* Numerical solution of problems of consolidation and filtration destruction under salt and heat transfer conditions by radial basis function method / *A.P. Vlasyuk, P.M. Martinyuk* // National University of Water Management and Natural Resources Use, Rivne, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 30.03.2013

УДК 519.254

Жирицький В.П.[1]

Структура та реалізація тестового завдання «Область на малюнку» у системі дистанційного навчання «VITAVA»

У статті описано розроблену структуру тестового завдання «Область на малюнку», наведено технології, що використовуються для реалізації цього тестового завдання у системі дистанційного навчання «VITAVA».

Ключові слова: тестові завдання, алгоритм створення, алгоритм оцінювання, метод променя, область на малюнку.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: v.zhiritskiy@gmail.com

V.P. Zhyrytskyy[1]

Structure and implementation of a test task "Area in the figure" in distance learning system «VITAVA»

The article discusses the structure of test task "area in the picture", the technology, used in the implementation of the test task in the system of distance learning «VITAVA».

Keywords: test items, algorithm for creating, assessment algorithm, beam method, area on the figur

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: v.zhiritskiy@gmail.com

.

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ та постановка проблеми

Як відомо, забезпечення об‘єктивного контролю рівня знань студентів є одна з найважливіших і найважчих процедур для освітніх закладів, в яких відбувається масова верифікація знань великої кількості студентів. Перевірка знань традиційним способом має ряд недоліків – великі часові затрати, недостатню об’єктивність та інше[1].

Розвиток інформаційних технологій та впровадження дистанційних систем навчання привели до використання комп‘ютерного тестування для швидкого отримання оцінки рівня знань студентів. Такий спосіб оцінювання не залежить від втоми чи психічного стану екзаменатора, тобто є більш об‘єктивним, ніж традиційний.

В більшості випадків, у тестах використовуються тестові завдання «Вибір однієї вірної відповіді» та «Вибір декількох вірних відповідей». Іноді в тестах можна зустріти тестові завдання «Встановлення відповідності» та «Впорядкування». Тестові завдання, в яких передбачається взаємодія студента з графічним об‘єктом, практично відсутні у системах дистанційного навчання, при цьому, зауважимо, що вони є цікавими і дозволяють оцінювати рівень знань схем, карт, графічного розміщення об‘єктів. Тому, ми вважаємо доцільним розкрити у статті структуру, підхід до проектування та реалізацію тестового завдання «Область на малюнку».

Під час аналізу систем дистанційного навчання було виявлено, що тестове завдання «Область на малюнку» або не реалізоване в них, або реалізоване у примітивному вигляді: область на малюнку задається у вигляді простих геометричних фігур, таких як квадрат, круг, іноді прямокутник. Так, у системі дистанційного навчання «Прометей» область на малюнку задається у вигляді прямокутника. Система надає можливість задавати декілька областей прямокутної форми на малюнку та вказати вагу кожної області, що буде враховуватись під час відповіді[3]. Так моделюється більш складна область на малюнку. Підхід, коли застосовується проста геометрична фігура, дає можливість використовувати прості алгоритми оцінювання відповіді студента.

© В.П. Жирицький, 2013

Іноді необхідно задавати область на малюнку, використовуючи, наприклад, многокутники. Такий підхід реалізований у системі дистанційного навчання «VITAVA», де вірна відповідь на тестове завдання «Область на малюнку» задається у вигляді набору простих многокутників.

Під час формування тестових завдань виду «Вибір однієї вірної відповіді» та «Вибір декількох вірних відповідей» т‘ютор вводить зміст тестового завдання та відповіді, серед яких вказує вірну чи вірні відповіді відповідно. Цей процес не вимагає від системи складного інтерфейсу для т‘ютора. Формування тестового завдання «Область на малюнку» теж передбачає введення змісту та відповідей, але на відміну від попередніх типів тестових завдань, зміст тестового завдання «Область на малюнку» задається у вигляді деякого твердження та графічного об‘єкта, а вірна відповідь формується у вигляді деякої області на цьому графічному об‘єкті. Отже, для формування тестового завдання, система повинна надати можливість т‘ютору ввести твердження, завантажити графічний об‘єкт та вказати на ньому область, яка буде задавати вірну відповідь. Реалізація тестового завдання «Область на малюнку», сутності бази даних для зберігання параметрів тестового завдання та алгоритм створення тестового завдання буде викладено далі у статті.

Відповідаючи на тестове завдання, студент за допомогою миші повинен вказати точку на графічному об’єкті. Оцінювання відповіді студента на тестове завдання «Область на малюнку» вимагає вирішення задачі про приналежність точки деякій області. У випадку, коли точка належить області, відповідь студента – вірна, а коли точка не належить області – відповідь не вірна. Далі у статті запропоновано використання простих многокутників та методу променя для розв‘язання задачі про приналежність точки простому многокутнику в алгоритмі оцінювання відповіді студента.

Більшість систем дистанційного навчання розробляються як клієнт-серверні системи з тонким клієнтом. Це дозволяє студенту, в якості клієнта, обрати будь-який веб-браузер – Internet Explorer, Firefox, Opera, Chrome, Safari, доступний для його операційної системи. Як відомо, одна і та ж система у різних веб-браузерах може виглядати та працювати по різному. Таким чином, виникає проблема «крос-браузерності», тобто система дистанційного навчання повинна однаково працювати для різних веб-браузерів, більш того, для різних версій веб-браузерів. Для вирішення проблеми «крос-браузерності» розробники застосовують різні бібліотеки, які допомагають реалізувати функціонал, який однаково працює у різних веб-браузерах. Однією з таких бібліотек є бібліотека jQuery, яку у своїх проектах використовують такі компанії як WordPress, Google, Wikipedia. Основні можливості бібліотеки буде викладено далі у статті.

Формулювання цілі статті

Сьогодні актуальною науковою задачею є дослідження та розробка інструментів підготовки таких тестових завдань, які були б цікавими для студентів та надавали можливість т‘ютору швидко створювати, редагувати, аналізувати тестові завдання для покращення якості тесту як інструменту оцінювання рівня знань студентів.

Метою даної статті є:

- описати розроблену структуру тестового завдання та його представлення в системі дистанційного навчання «VITAVA»;
- навести діаграми, які демонструють особливості реалізації тестового завдання;
- навести огляд архітектури та технологій, які використовувались для реалізації тестового завдання у системі дистанційного навчання «VITAVA»;
- розкрити алгоритми створення тестового завдання;
- розробити алгоритм оцінювання відповіді студента на тестове.

Структура тестового завдання «Область на малюнку».

Кожне тестове завдання з деякою долею умовності можна віднести до однієї із п‘яти основних форм.

- **Закрита форма.** Тестове завдання належить до закритої форми, якщо для нього запропонований набір відповідей, серед яких одна чи декілька відповідей є вірними. Для тестових завдань закритої форми ознака вірної відповіді задається у системі в момент створення тестового завдання.
- **Відкрита форма.** Тестове завдання належить до відкритої форми, якщо воно сформульовано таким чином, що необхідно підрахувати, знайти вірну відповідь і вписати її у визначене для цього місце. Для тестових

завдань відкритої форми відповіді не задаються у системі заздалегідь.

- **Завдання на відповідність.** Тестове завдання відноситься до форми тестових завдань на відповідність, якщо у ньому необхідно елементам однієї множини поставити у відповідність елементи іншої множини;
- **Завдання на впорядкування.** Тестове завдання належить до форми тестових завдань на впорядкування, якщо у ньому необхідно встановити вірну послідовність дій, операцій, обчислень;
- **Змішана форма.** Тестове завдання належить до змішаної форми, якщо його неможливо віднести до перших чотирьох форм і воно може містити елементи перерахованих вище форм.

Розглянемо тестове завдання «Область на малюнку» і спробуємо його віднести до однієї із наведених форм. Зазвичай таке тестове завдання формулюється у вигляді: вкажіть область на малюнку, яка відповідає певному регіону або регіонам. Студенту пропонується малюнок, на якому необхідно за допомогою миші вказати точку, що належить області вірних відповідей. При цьому вірна відповідь задається у системі множиною координат (x, y).

Тестове завдання «Область на малюнку» не належить до закритої форми, оскільки студент не отримує набору відповідей для вибору вірної. Воно не належить і до відкритої форми, оскільки вірна відповідь вводиться в систему в момент створення тестового завдання. Тестове завдання неможна віднести і до завдань на відповідність та впорядкування, оскільки в ньому не задається дві множини для встановлення відповідності, чи множини елементів для впорядкування. Таким чином, тестове завдання «Область на малюнку» належить до змішаної форми.

Структуру тестового завдання «Область на малюнку» представимо у вигляді:

$$< z, W, B >, \qquad (1)$$

де z – твердження тестового завдання. Наприклад, вкажіть область на малюнку, яка відповідає певному регіону або регіонам.

W – множина відповідей на тестове завдання, тобто множина всіх точок з координатами (x, y) графічного об‘єкта. Множину W можна представити у вигляді:

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \cup D, \qquad (2)$$

де V_i – *i-та* множина вірних відповідей. Множину вірних відповідей будемо задавати координатами точок, що належать вершинам простого многокутника. Під простим многокутником будемо розуміти геометричну фігуру, окреслену замкнутим контуром без самоперетинів і «дірок». Для задання множини V_i необхідно послідовно вказати координати кожної вершини многокутника.

n – кількість множин вірних відповідей.

D - доповнення множини вірних відповідей до множини всіх точок малюнку – множина дистракторів.

B – дихотомічна функція оцінювання j-го тестового завдання:

$$B(w_j) = \begin{cases} 1, \textit{якщо } w_j \in \bigcup_{i=1}^{n} V_i, \\ 0, \textit{якщо } w_j \in D, \end{cases} \qquad (3)$$

де $w_j \in W$ – відповідь студента на j-те тестове завдання, яка задається точкою з координатами (x, y).

Інтерфейсне представлення тестового завдання «Область на малюнку».

Перейдемо до інтерфейсного представлення тестового завдання «Область на малюнку». В системі дистанційного навчання «VITAVA» діалог студента з системою відбувається через веб-інтерфейс, який передбачає найбільш зручне представлення тестових завдань «Область на малюнку» за допомогою графічних об‘єктів у форматі *.jpg, *.gif, *.png. Графічний об‘єкт завантажується на сервер під час створення тестового завдання, а параметри тестового завдання зберігаються у базі даних.

Тестове завдання «Область на малюнку» представлено на рис. 1.

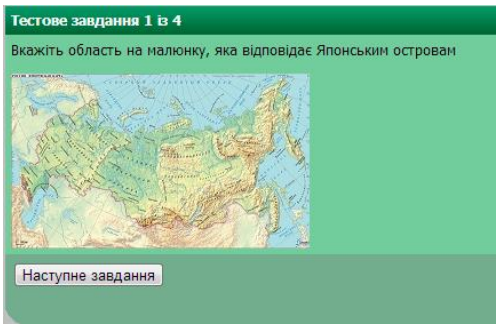


Рис. 1. Тестове завдання «Область на малюнку»

Діаграма прецедентів

Під час моделювання системи діаграма прецедентів (англ. Use Case Diagram) є першою діаграмою, яка концептуально описує предметну область, оскільки відображає варіанти використання системи (в даному випадку тестового завдання «Область на малюнку»), зовнішніх акторів та відношення між акторами і варіантами використання.

Зазвичай діаграма прецедентів дозволяє:

- визначити границю функціональності в контексті предметної області, яка моделюється;
- визначити вимоги до функціональної поведінки системи у формі варіантів використання;
- розробити концептуальну модель системи для її подальшої деталізації в формі логічних і фізичних моделей;

Основними зображеннями на діаграмі є актор, в даному випадку т‘ютор, варіанти використання, які зображаються у вигляді еліпсів і описують основні функціональні можливості системи. Між варіантами використання можуть відображатись два види зв‘язку: включення (<include>), та розширення (<extend>). Включення означає, що варіант використання є частиною більш загального варіанта використання. Наприклад, варіант використання «перегляд тестових завдань» включає варіант використання «вибір тесту». Розширення означає, що варіант використання виконується при певній умові. Наприклад, варіант використання «перегляд списку вірних відповідей» може бути розширений варіантом використання «вилучити відповідь».

ER-діаграма: сутності бази даних

Для опису параметрів тестового завдання будемо використовувати модель «сутність-зв‘язок» (англ. Entity-Relationship model) або ER - модель. Основною концепцією ER - моделі є:

- тип сутності (англ. entity type), який представляє групу об‘єктів реального світу з однаковими властивостями;
- тип зв‘язку (англ. relationship type) - набір асоціацій між одним (чи декількома) типами сутностей, які входять до цього зв‘язку. Кожному типу зв‘язку присвоюється ім‘я, яке описує призначення зв‘язку.

Розглянемо сутності, які спроектовані для зберігання параметрів тестового завдання у системі дистанційного навчання «VITAVA»: тестове завдання (sdn_question), відповідь на тестове завдання (sdn_answer) і довідник видів тестових завдань (sdn_dic_question_type). Всі сутності для зручного групування містять префікс «sdn_».

Атрибути, тип даних та коментар сутності «Тестове завдання»:

- id_question – bigint - унікальний ідентифікатор тестового завдання;
- id_test – bigint - унікальний ідентифікатор тесту, якому належить тестове завдання;
- id_question_type – int - вид тестового завдання. Посилання на сутність «довідник видів тестових завдань». Для тестового завдання «Область на малюнку» приймає значення 7;
- question – text - твердження тестового завдання;
- img_name – varchar - посилання на малюнок;
- cdate – timestemp - дата і час створення тестового завдання;
- udate – timestamp - дата і час модифікації тестового завдання;
- cid_user – bigint - ідентифікатор автора тестового завдання;
- uid_user – bigint - ідентифікатор автора останніх змін тестового завдання;
- is_del – int - ознака – «вилучене тестове завдання».

Атрибути, тип даних та коментар сутності «Відповідь на тестове завдання»:

- id_answer – bigint - унікальний ідентифікатор відповіді;
- id_question – bigint - унікальний ідентифікатор тестового завдання, якому належить відповідь;
- answer - text – відповідь;

Опис атрибутів cdate, udate, cid_user, uid_user, is_del відповідає опису відповідних атрибутів для сутності «Тестове завдання».

Атрибути, тип даних та коментар сутності «Довідник видів тестових завдань»:

- id – bigint - унікальний ідентифікатор виду тестового завдання;
- name – varchar - найменування виду тестового завдання

В атрибуті img_name сутності sdn_question зберігається посилання на малюнок, а файл із малюнком зберігається на жорсткому диску веб-сервера. Атрибут answer сутності sdn_answer містить символьний рядок у форматі $\{x_1,y_1\};\{x_2,y_2\};\{x_3,y_3\};\ldots\{x_n,y_n\}$. Даний формат представляє точки з координатами (x, y), які задають вершини многокутника - множину вірних відповідей.

На рис. 2 представлена ER-діаграма сутностей бази даних для тестового завдання «Область на малюнку»

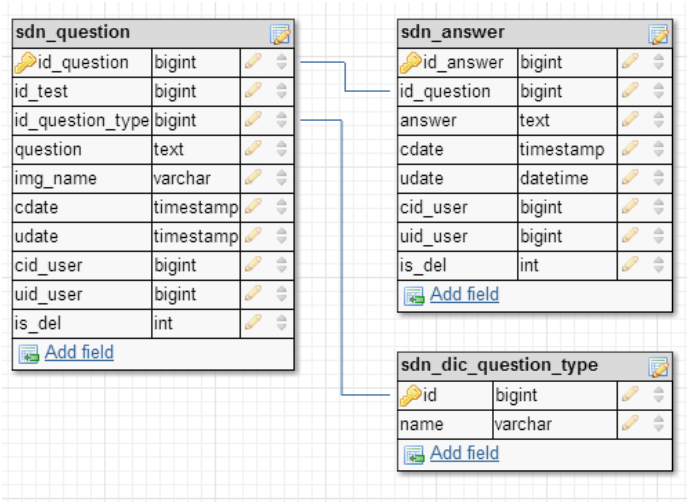


Рис. 2. ER-діаграма сутностей бази даних для тестового завдання «Область на малюнку»

Представлення класів для реалізації тестового завдання «Область на малюнку».

Для реалізації тестового завдання «Область на малюнку» були спроектовані і реалізовані активні та пасивні класи (таблиця 4). Активний клас (*active class*) – це клас, кожен екземпляр якого має свій власний потік управління. Пасивний клас (*passive class*) – це клас, кожен екземпляр якого виконується в контексті деякого іншого об'єкта. Класи для реалізації тестового завдання «Область на малюнку»:

- Активні класи
  - Question - клас інкапсулює роботу з сутністю «Тестове завдання»;
  - Answer - клас інкапсулює роботу з сутністю «Відповідь на тестове завдання»;
  - Poligon - клас інкапсулює алгоритм перевірки тестового завдання «Область на малюнку»;
  - Point - клас інкапсулює роботу з точкою з координатами x, y;
- Пасивні класи
  - Tlabel - клас інкапсулює роботу з елементом веб-форми «мітка»;
  - Tmemo - клас інкапсулює роботу з елементом веб-форми «текстова область»;
  - Tselect - Клас інкапсулює роботу з елементом веб-форми «випадаючий список».

Для представлення атрибутів та методів класів зручно використовувати діаграму класів.

Огляд архітектури та технологій, які використовуються для підтримки тестового завдання у системі дистанційного навчання «VITAVA»

Розглянемо архітектуру та технології, які використовуються для реалізації тестового завдання «Область на малюнку». Тестове завдання функціонує у системі дистанційного навчання «VITAVA», що використовує архітектуру клієнт/сервер.

Клієнтське програмне забезпечення для роботи з системою дистанційного навчання «VITAVA» представлено у вигляді веб-браузера

(Internet Explorer, Opera, Chrome, Firefox). Веб-браузер посилає запити і отримує відповіді від веб-сервера Apache, який в свою чергу взаємодіє з СУБД MySQL через PHP модулі.

Розглянемо детальніше технології реалізації клієнтського та серверного програмного забезпечення.

Інтерфейс системи дистанційного навчання реалізований за допомогою HTML5 та CSS. Для реалізації взаємодії т‘ютора з інтерфейсом використовується JavaScript. Клієнтське програмне забезпечення реалізоване з використанням бібліотеки JavaScript – jQuery[5]. Бібліотека jQuery фокусується на взаємодії JavaScript і HTML.

Переваги бібліотеки jQuery перед використанням «чистого» JavaScript закладені на рівні ядра:

- селектори (це вибір елементів об‘єктної моделі документу (DOM) web-сторінки);
- доступ до атрибутів елементів DOM;
- обхід дерева елементів, маніпуляція елементами;
- робота с CSS-властивостями елементів;
- обробка подій;
- візуальні ефекти;
- взаємодія з сервером за допомогою API для Ajax.

Бібліотека jQuery вирішує проблему «крос-браузерності»: сценарій, написаний за допомогою цієї бібліотеки, однаково працює в різних веб-браузерах. Методи бібліотеки повертають jQuery-об‘єкт, що дозволяє використовувати ланцюжкові функції до одного і того ж елемента по черзі, просто дописуючи їх імена через крапку.

На основі бібліотеки розроблено багато плагінів, які розширюють її базову функціональність. Зручна документація по бібліотеці дозволяє швидко її освоїти. Завдяки тому, що об‘єм програмного коду jQuery менший, ніж об‘єм стандартного коду JavaScript скорочуються часові затрати на розробку веб-сторінки, а програмний код стає більш зрозумілий, ніж код JavaScript.

Серверне програмне забезпечення реалізоване у вигляді класів, які зібрані у модулі на мові PHP. PHP – це скриптова мова програмування, яка створена для генерації HTML-сторінок на стороні веб-сервера. PHP є однією з поширених мов програмування, яка використовуються під час веб-розробки разом із Java, .NET, Perl, Python, Ruby. Наявність інтерфейсів до багатьох баз даних робить PHP гнучкою мовою програмування. В PHP вбудовані бібліотеки для роботи з MySQL, PostgreSQL, mSQL, Oracle, dbm, Hyperware, Informix, InterBase, Sybase.

Алгоритми створення тестового завдання та оцінювання відповіді

Кроки алгоритму створення тестового завдання «Область на малюнку» зручно представляти за допомогою діаграми діяльності. На діаграмі зображено три доріжки, які групують дії, що відповідають користувачу (т‘ютору), клієнтському програмному забезпеченню (КПЗ) та серверному програмному забезпеченню (СПЗ) відповідно.

На першому етапі т‘ютор ініціює відкриття екранної форми «Створення/Редагування тестового завдання», заповнює наступні поля та зберігає дані:

- зміст тестового завдання;
- вид тестового завдання;
- графічний об‘єкт;
- вага тестового завдання;
- час на відповідь;
- включити до тесту обов‘язково.

КПЗ передає введені дані СПЗ, яке здійснює перевірку введених даних. Якщо на цьому етапі дані введені не вірно, система відобразить інформацію про помилку, яку необхідно виправити та повторити попередні дії.

На наступному етапі т‘ютор переходить до екранної форми «Список відповідей», де ініціює відкриття екранної форми «Створення/Редагування відповіді». Розглянемо детально крок «Ввести послідовно вершини многокутника». Т‘ютор послідовно клікає мишкою на малюнку, а КПЗ записує координати мишки по кліку та відображає червону крапку. Для запису координат використовується бібліотека jQuery, яка спрощує роботу з атрибутами елементів:

```
$( “#answer” ).val( $( "#answer" ).val()
  + sep
  + "{"
  + Math.round( e.pageX - pos.left ) + ","
  + Math.round( e.pageY - pos.top )
  + "}");
```

де $(“#answer”) – об‘єкт jQuery, який надає доступ до поля форми <input type=”text” id=”answer” />, в яке КПЗ записує координати кліка мишкою.

$("#answer").val() – метод для отримання даних з цього ж поля,
e.pageX, e.pageY – координати кліка мишкою відносно лівого верхнього кута веб-сторінки,
pos.left, pos.top – зміщення малюнку відносно лівого верхнього кута веб-сторінки.
Зміщення pos.left, pos.top обчислюється за допомогою методу $("#img").position(). Додавання нової крапки відбувається за допомогою методу:

```
$("body").append("<div class='dot' style='left:"+
 e.pageX +"px; top:"+ e.pageY +"px;'></div>");
```

Після того, як всі вершини многокутника – множини вірних відповідей задані, т‘ютор ініцією збереження даних і КПЗ відсилає дані СПЗ.

Якщо є необхідність задати декілька многокутників, то попередній етап необхідно повторити. На цьому алгоритм створення тестового завдання «Область на малюнку» завершується.

Перейдемо до алгоритму оцінювання відповіді на тестове завдання. Відповідь будемо вважати вірною, якщо виконується наступна умова:

$$w_j \in \bigcup_{i=1}^{n} V_i \,. \qquad (4)$$

де $w_j \in W$ – відповідь студента на j-те тестове завдання, яка задається точкою $Z(x, y)$, V_i – множина вірних відповідей, що задається у системі у вигляді многокутника з вершинами у точках з координатами $(x_1, y_1),(x_2, y_2),...,(x_n, y_n)$. Для перевірки цієї умови необхідно розв‘язати задачу про приналежність точки одному із простих многокутників. У системі для розв‘язку цієї задачі використаний метод променя [6]. Застосуємо цей метод до кожного многокутника і отримаємо кількість перетинів. Якщо кількість перетинів нуль або парна, то точка не належить жодному многокутнику і відповідь студента вважається невірною.

Висновки

У статті представлена структура тестового завдання «Область на малюнку» та подано його інтерфейсне представлення у системі дистанційного навчання «VITAVA».

Наведено використання методу променя для розв‘язання задачі про приналежність точки простому многокутнику в алгоритмі оцінювання відповіді студента на тестове завдання «Область на малюнку».

Предметна область тестового завдання змодельована у вигляді сутностей бази даних та представлена за допомогою ER-діаграми. Спроектовані та реалізовані активні та пасивні класи, що підтримують роботу з даними сутностями. Класи представлені у вигляді діаграми класів.

Запропонована клієнт-серверна архітектура системи дистанційного навчання для підтримки тестового завдання «Область на малюнку», а також представлений алгоритм у вигляді UML діаграми активності, яка наглядно демонструє процес створення тестового завдання «Область на малюнку».

Список використаних джерел

1. *Avanesov V. S.* Theory and methodics of pedagogical measurement (materials publications). – M.: TST and MKOUGTU-UPI, 2005. – 98 p. (in Russian)
2. *Polyakova L. N.* Publisher: International University of Information Technology, 2004; 368 p. (in Russian)
3. Information site DLS «Prometheus» [Electronic Resource] Mode of access: http://www.prometeus.ru/ (in Russian)
4. *Wike, Woker, Kocks* PHP (Reference Book) — Diasoft 2001 448 p. (in Russian)
5. Information site of jQuery library [Electronic Resource] Mode of access: http://www.jquery.com (in Russian)
6. *Bouman J.S., Emerson S. L.* Proctical guide to SQL; 352 p. (in Russian)
7. *Shykin E. V.* Computer graphics. Polygonal models. / E. V. Shykin A. V. Boriskov. – M.: Dialog-MAFI, 2005. – 223 p. (in Russian)

надійшла до редколегії 10.03.13

УДК 519.852:519.876

Кудін В.І. [1], д.т.н., п.н.с.

Метод базисних матриць та матрична гра у змішаних стратегіях

Проаналізовано зв'язки метода базисних матриць для задачі лінійного програмування та матричної гри у змішаних стратегіях.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв'язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

V.I.Kudin [1], Dr. Sci.

The method of basic matrix and matrix game with mixed strategies

Analysis of basic matrix methods for linear programming problems and matrix game with mixed strategies is investigated.

Key Words:basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

В роботах [1-3] встановлено, як побудувати пару двоїстих задач лінійного програмування, розв'язок яких визначає оптимальні стратегії заданої матричної гри. Параметри задач лінійного програмування, що відповідають заданій матричній грі, вибираються в процесі конструктивного доведення основної теореми теорії ігор [1].

Можлива також побудова матричної гри за заданою задачею лінійного програмування.

Введення одного з найважливіших понять теорії ігор - поняття *стратегії* - дозволяє звести найрізноманітніші розгорнуті гри до єдиної стандартної форми, яка називається *нормальною* формою гри.

Стратегією гри [1-3] називається система правил, що однозначно визначають вибір поведінки гравця на кожному ході в залежності від ситуації, що склалася в процесі гри. Гравець, який вибрав стратегію, може не брати участь в грі. За складеною ним інструкцією гру може проводити нейтральна особа.

Кожна фіксована стратегія, яку може обрати гравець, називається його *чистою стратегією*. Чисті стратегії не вичерпують усіх можливостей гравців. Як ми побачимо далі, є ситуації, в яких гравцям доцільно вибирати не чисту стратегію, а частоту, з якою слід використовувати ту чи іншу чисту стратегію в грі. При двох учасниках гра в нормальній формі називається *прямокутною*.

Прямокутна гра з скінченним числом чистих стратегій називається *матричної* грою.

В роботі досліджено властивості методу базисних матриць [4] при аналізі матричної гри у змішаних стратегіях, як двоїстої пари задач лінійного програмування зі своїми структурними особливостями. Встановлено основні співвідношення для елементів методу базисних матриць в двох суміжних базисних матрицях та виявлено особливості обчислень за методом базисних матриць при розв'язанні матричної гри у змішаних стратегіях.

Постановка задачі.

Нехай перший гравець має m стратегій, а другий – n. При цьому вважається відомим, що якщо перший гравець вибере i-ю стратегію, а другий - j-ю, виграш першого (і отже програш другого) дорівнює $\|a_{ij}\|$. Матриця $A = \|a_i\|$ $A = \|a_{ij}\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ називається *платіжною матрицею* або *матрицею виграшів*.

Зауважимо, що складання платіжної матриці при формалізації реальних конфліктних ситуацій є складною задачею. Підстави для побудови платіжної матриці лежать, взагалі кажучи, поза

© В.І. Кудін, 2013

теорією ігор і відносяться до певного застосування, з яким пов'язана постановка задачі.

Означення 1. Вектор $U=(u_1,u_2,...,u_m)$, кожна компонента якого вказує відносну частоту (ймовірність), з якою відповідна чиста стратегія використовується в грі, називається *змішаної стратегією* першого гравця.

Набір чисел $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ - змішана стратегія другого гравця.

Ясно, що

$$u_i \ge 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1$$

$$w_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

Чиста стратегія може бути визначена як змішана стратегія, в якій всі складові, крім однієї, рівні нулю.

Надалі будемо позначати чисті стратегії обох противників у вигляді одиничних векторів

$$e_i = (\overbrace{\underbrace{0,0,...,0}_{i},1,0,...,0}^{m})$$

та $e_j = (\overbrace{\underbrace{0,0,...,0}_{j},1,0,...,0}^{n})$ відповідно.

Означення 2. Оптимальна стратегія гравця - це стратегія, що забезпечує йому максимально можливий гарантований середній виграш.

Будь-яка зміна інформації призводить до нової гри, для якої оптимальна лінія поведінки буде іншою.

Властивості оптимальних стратегій матричної гри випливають з основних теоретичних результатів лінійного програмування.

Теорема 1. (Основна теорема теорії ігор [1]). Кожна матрична гра з нульовою сумою має рішення в змішаних стратегіях, тобто існують такі стратегії U^0 та W^0 першого і другого гравця відповідно, що

$$M(U,W^0) \le v = M(U^0,W^0) \le M(U^0,W)$$

В процесі доведення основної теореми теорії ігор матричної гри з платіжною матрицею $A=\|a_{ij}\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ $(a_{ij}>0)$ приведена в відповідність наступна пара двоїстих задач лінійного програмування типу (1)-(3) та (4)-(6), які наведені нижче.

Пряма задача:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n}\ . \qquad (3)$$

де $C=(c_1,c_2,...,c_n)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $B=(b_1,b_2,...,b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)−(3) має матрицю обмежень A в якій кількість стовпців більш ніж рядків (“довга”).

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i\ , \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ ..... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (5)$$

$$u_i \ge 0,\ \ (i=\overline{1,m}) \qquad (6)$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4].

де $b_i=1,\ \ i=\overline{1,m},\ c_j=1,\ j=\overline{1,n}$.

Задача (4)-(6) є двоїстою або спряженою до задачі (1)-(3), яку називають прямою (основною, початковою).

Положення методу базисних матриць (МБМ)

Без обмеження загальності, при викладенні положень методу будемо розглядати задачу лінійного програмування у вигляді (4)-(6), а саме: ($\max Bu,\ A^Tu \le C^T,\ u \ge 0$).

Для визначеності, будемо вважати, що задача (1)−(3) має n>>m, матриця A обмежень витягнута горизонтально, ранг системи рівним m. Задача виду (4),(5) має n обмежень та m змінних, матриця A^T обмежень витягнута вертикально.

Метод базисних матриць може бути застосований як до задачі (1)-(3 так і до задачі (4)-(6). Виклад положень методу будемо

проводити з прив'язкою до структури задачі (4)-(6).

Визначення 2. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати базисною (БМ), а розв′язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C_б$, де $C_б = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T$ - підвектор С базисним (опорним) (БР).

Нехай: β_{ij}, $i, j \in I = \{1, 2, ..., m\}$ - елементи $A_б$; e_{ri} та $(A_б^{-1})_i$ елементи та i-й стовпець $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі $a_r u_1 \le c_r$ за рядками $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками $A_б$; $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5), а $\Delta_0 = B u_0^T$ - значення цільової функції в вершині u_0, які утворюють вектор $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$; $J_б, J_H$ - множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (5).

Всі означені елементи при переході до суміжної $\overline{A}_б$, яка утворюється із A_b заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_{ij}$, $\overline{\alpha}_r, \overline{L}_i$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}, (\overline{A}_b^{-1})_i$ $\overline{\alpha}_0$.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормалі, $a_j u^T \le c_j, j \in J_б$, де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють $A_б$, a_l - вектор-нормалі $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$, $a_l u \le c_l$ - вектор розвинення a_l за рядками $A_б$.

Теорема 2. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{0, n}; \ \ i = \overline{1, m}; \ \ i \ne k; \qquad (7)$$
$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{1, m}; \ \ i = \overline{1, m}; \ \ i \ne k; \qquad (8)$$
$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \ j = \overline{1, m}, \qquad (9)$$
$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,$$
$$r = \overline{1, n}; \quad r \ne k; \qquad (10)$$
$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad (11)$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \ne 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку - $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції - $\alpha_{0k} < 0$.

Про особливості елементів методу базисних матриць при дослідженні матричної гри у змішаних стратегіях

Твердження 1. Компоненти вектора розкладу цільової функції задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами

$$\alpha_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ji}, \ i = \overline{1, m}.$$

Твердження 2. Компоненти вектора розв'язків задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами $u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}, \ i = \overline{1, m}$.

Доведення. Справедливість тверджень 1,2 витікає з формул (7), (9) та співвідношень

$$A_б u_0 = C_б, \ C_б = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{m})^T,$$
$$u_0 = A_б^{-1} \times C_б, \ C_б = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{m})^T,$$
$$\alpha_0 \times A_б = B, \ B = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{m}),$$
$$\alpha_0 = B \times A_б^{-1}, \ B = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{m})$$

Наслідок 1. Сума елементів векторів стовпців оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору розкладу цільової функції за рядками базисної матриці.

Наслідок 2. Сума елементів рядків оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору проміжного розв'язку на ітераціях методу базисних матриць.

Доведення. Справедливість тверджень є наслідком властивостей розкладу елементів методу базисних матриць за рядками базисної матриці.

Твердження 3. Для суми елементів стовпців оберненої матриці в двох суміжних базисних матрицях виконуються такі рекурентні співвідношення

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jk}=\frac{\sum_{j=1}^{m}e_{jk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jr}=\sum_{j=1}^{m}e_{jr}-\frac{\sum_{j=1}^{m}e_{jk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$

$$r=\overline{1,m};\quad i=\overline{1,m};\quad i\neq k.$$

Доведення. Згідно співвідношення

$$\bar{e}_{rk}=\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \bar{e}_{ri}=e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r=\overline{1,m};$$

$i=\overline{1,m};\ i\neq k;$ витікає, що $\bar{e}_{k}=\frac{e_{k}}{\alpha_{lk}}$,

$$\bar{e}_{r}=e_{r}-\frac{e_{k}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r=\overline{1,m};\quad i=\overline{1,m};\quad i\neq k.$$

Після проведення по-елементного складання елементів стовпців отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jk}=\frac{\sum_{j=1}^{m}e_{jk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jr}=\sum_{j=1}^{m}e_{jr}-\frac{\sum_{j=1}^{m}e_{jk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$

$$r=\overline{1,m};\quad i=\overline{1,m};\quad i\neq k.$$

Твердження 4. Для суми елементів рядків оберненої матриці в двох суміжних базисних матрицях виконуються такі рекурентні співввідношення

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_{ri}=\sum_{i=1}^{m}e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}(\sum_{i=1,}^{m}\alpha_{li}-1),\ r=\overline{1,m};$$

Доведення. Згідно співвідношення

$$\bar{e}_{rk}=\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\bar{e}_{ri}=e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r=\overline{1,m};\quad i=\overline{1,m};\quad i\neq k;$$

витікає, що елементи рядків оберненої матриці знаходяться за співвідношенням для кожного $r=\overline{1,m};$

$$\bar{e}_{r1}=e_{r1}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l1},\ \bar{e}_{r2}=e_{r2}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l2},$$

$$\bar{e}_{rk-1}=e_{rk-1}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lk-1},\qquad \bar{e}_{rk}=\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},$$

$$\bar{e}_{rk+1}=e_{rk+1}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lk+1},\ \bar{e}_{rm}=e_{rm}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lm},$$

тобто для вектор рядка

$$\overline{E}_{r}=E_{r}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}(\alpha_{l1},\alpha_{l2},\alpha_{lk-1},\alpha_{lk}-1,\alpha_{lk+1},\alpha_{lm-1}\alpha_{lm})$$

. Після сумування елементів рядка отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_{ri}=\sum_{i=1}^{m}e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}(\sum_{i=1,}^{m}\alpha_{li}-1)$$

Висновок

Було встановлено, що сума елементів стовпців (невід‘ємність) вказує на властивість оптимальності розв’язків, а суми елементів рядків вказують на компоненти розв‘язку задачі. Згадані властивості можна врахувати при побудові алгоритмів на основі методу базисних матриць та встановити ряд властивостей, зокрема оптимальних розв’язків тощо.

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B., Thapa M.N.* Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997, − 435p.
3. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
4. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 05.04.13

УДК 627.324.2/3:532.72

Мартинюк П. М.[1], к. ф.-м. н., доц.

Порівняння чисельних розв'язків двовимірних крайових задач сітковими та безсітковими методами

Наведено схему чисельного розв'язання двовимірної нелінійної крайової задачі сітковими та безсітковими методами Запропоновано структуру класів при об'єктно-орієнтованому програмуванні вказаних методів. Наведено результати чисельних експериментів. Проаналізована залежність похибок наближених розв'язків від значень параметрів форми, видів радіальних базисних функцій та кількості вузлів в геометричній та вузловій сітках.

Ключові слова: похибка, клас, проекційний метод.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

P. M. Martinyuk[1], Candidate of physics and mathematics sciences

Comparison of mesh and mesh-free numerical solutions of two-dimensional boundary value problem

The numerical solutions of nonlinear two-dimensional boundary-value problem have been found by the finite element method and the radial basis function method. Classes for object-oriented programming have been offered. The results of numerical experiments have been presented. The influence of shape parameters, class of radial basis functions, and number of nodes in meshes on the values of errors has been analyzed.

Key Words: error, class, projection method.

[1] National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф. Г.

1. Вступ. Одна із складових процесу чисельного розв'язання крайової задачі – програмна реалізація запропонованих алгоритмів. Але досить часто дана складова в наукових публікаціях, що стосуються математичного моделювання та чисельних методів, залишається в стороні. Одна із цілей даної статті – запропонувати структури даних, які можуть використовуватись при програмній реалізації чисельних методів скінченних елементів (МСЕ) та радіальних базисних функцій (РБФ) в двовимірному випадку. Стаття є продовженням ряду робіт вказаного напрямку [1, 2]. Як і в попередніх публікаціях, викладки проведемо на прикладі нелінійної крайової задачі, якою описується математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу тепло-масопереносу [1, 2].

І МСЕ, і метод РБФ відносяться до одного класу проекційних методів [3]. Однак, між ними існує дві важливі відмінності. МСЕ відноситься до класу сіткових методів і дозволяє знаходити наближений узагальнений розв'язок крайової задачі [3, 4]. В той же час метод РБФ [5] є одним із цілої групи безсіткових проекційних методів і дозволяє шукати класичний наближений розв'язок, оскільки побудований на основі методу колокації в точці.

В роботах [1, 2] проведено порівняння наближених розв'язків крайових задач різними чисельними методами: методом скінченних різниць, МСЕ та методом РБФ. Однак у вказаних роботах для відображення похибок використовувалась або максимальна відносна похибка, або візуальне графічне представлення різниці двох чисельних розв'язків. Такі дані не в повній мірі відображають співвідношення наближених розв'язків. Дана стаття покликана ліквідувати вказану прогалину через застосування похибок інших видів.

2. Постановка задачі та її математична модель. Розглянемо процес фільтраційної консолідації масиву двофазного ґрунту під впливом миттєво прикладеного рівномірного зовнішнього навантаження інтенсивністю q в двовимірному випадку. Згідно [1, 2] математичну модель задачі фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах фільтрації сольових розчинів в

© П.М. Мартинюк, 2013

неізотермічному режимі при урахуванні повзучості скелета ґрунту можна описати наступною крайовою задачею:

$$a_0\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+(a_0+a_1)\beta_1\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma}\times$$
$$\times\nabla\cdot\Bigg(\beta_1(\mathbf{K_h}(c,T)\nabla h-\mathbf{K_c}\nabla c-\mathbf{K_T}\nabla T)\ +$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{K_h}(c,T)\nabla h-\mathbf{K_c}(c)\nabla c-\mathbf{K_T}\nabla T]\Bigg), \quad (1)$$
$$\mathbf{X}=(x,y)\in\Omega,\quad t>0,$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{D_c}(c,T)\nabla c)+\nabla\cdot(\mathbf{D_T}\nabla T)-\mathbf{u}\nabla c+$$
$$+\gamma_1(C_m-c)=n\frac{\partial c}{\partial t},\quad \mathbf{X}\in\Omega,\quad t>0, \quad (2)$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}\nabla T)-\rho c_\rho\mathbf{u}\nabla T=c_T\frac{\partial T}{\partial t},\quad \mathbf{X}\in\Omega,\quad t>0, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}-e\mathbf{v}=-\mathbf{K_h}(c,T)\nabla h+\mathbf{K_c}\nabla c+\mathbf{K_T}\nabla T, \quad (4)$$

$$\mathbf{q_c}=c\mathbf{u}-\mathbf{D_c}(c,T)\nabla c-\mathbf{D_T}\nabla T, \quad (5)$$

$$\mathbf{q_T}=\rho c_\rho T\mathbf{u}-\boldsymbol{\lambda}\nabla T, \quad (6)$$

$$h(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(h)}}=H_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(h)},\ (\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(h)}}=0, \quad (7)$$

$$c(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(c)}}=C_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(c)},\ (\mathbf{q_c},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(c)}}=0, \quad (8)$$

$$T(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(T)}}=T_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(T)},\ (\mathbf{q_T},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(T)}}=0, \quad (9)$$

$$h(\mathbf{X},0)=h_0(\mathbf{X}),\ c(\mathbf{X},0)=c_0(\mathbf{X}),\ T(\mathbf{X},0)=T_0(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}\in\overline{\Omega}, \quad (10)$$

$$\left.\frac{\partial h_0}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad \mathbf{X}\in\overline{\Omega}, \quad (11)$$

де $C_1(t)$, $T_1(t)$, $H_1(t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$ - задані функції; $\Gamma_1^{(h)}\bigcup\Gamma_2^{(h)}=\Gamma$, $\Gamma_1^{(h)}\bigcap\Gamma_2^{(h)}=\varnothing$; $\Gamma_1^{(c)}\bigcup\Gamma_2^{(c)}=\Gamma$, $\Gamma_1^{(c)}\bigcap\Gamma_2^{(c)}=\varnothing$; $\Gamma_1^{(T)}\bigcup\Gamma_2^{(T)}=\Gamma$, $\Gamma_1^{(T)}\bigcap\Gamma_2^{(T)}=\varnothing$. Тут використано такі позначення: $h(\mathbf{X},t)$ - надлишкові напори; $c(\mathbf{X},t)$ - концентрація порового сольового розчину; $T(\mathbf{X},t)$ - температура; $\mathbf{K_h}(c,T)=\left\{k_h^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{K_c}=\left\{k_c^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{D_c}(c,T)=\left\{D_c^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{D}_\mathrm{T}=\left\{D_T^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{K_T}=\left\{k_T^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\boldsymbol{\lambda}=\left\{\lambda^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$ – відповідно коефіцієнти фільтрації, хімічного осмосу, конвективної дифузії, термодифузії, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q_c}$, $\mathbf{q_T}$ – швидкості фільтрації сольового розчину та руху твердих частинок ґрунту, потоки розчинених солей і тепла, відповідно; a_0, a_1, β_1 - параметри повзучості скелета ґрунту; ρ, c_ρ - густина та питома теплоємність порового розчину; c_T - об'ємна теплоємність ґрунту за постійного об'єму; t – час; e – коефіцієнт пористості; ξ - коефіцієнт стисливості ґрунту; γ - питома вага сольового розчину; n – пористість ґрунту; γ_1 – константа швидкості масообміну; C_m – концентрація граничного насичення.

3. Чисельне розв'язання методом РБФ. При застосуванні методу РБФ існує проблема з недостатньою точністю апроксимації граничних умов другого та третього родів. Для вирішення вказаної проблеми в двовимірному випадку використаємо підхід, запропонований в [6]. Згідно вказаного методу множини вузлових та колокаційних точок є різними. Причому, вузлові точки є лише внутрішніми.

Для застосування методу РБФ покриємо область Ω вузловими точками $\mathbf{X}_j=(x_j^{(x)};y_j^{(x)})$, $j=\overline{1,N}$. Наближений розв'язок крайової задачі (1)-(11) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X},t)\approx\sum_{j=1}^{N}a_j(t)\varphi_j\left(r_j,\varepsilon_j^{(h)}\right),$$
$$c(\mathbf{X},t)\approx\sum_{j=1}^{N}b_j(t)\varphi_j\left(r_j,\varepsilon_j^{(c)}\right), \quad (12)$$
$$T(\mathbf{X},t)\approx\sum_{j=1}^{N}s_j(t)\varphi_j\left(r_j,\varepsilon_j^{(T)}\right),$$

де $a_j(t)$, $b_j(t)$, $s_j(t)$, $j=\overline{1,N}$, - невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; φ_j - відомі РБФ, причому $r_j=\left\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_j\right\|_2=\sqrt{\left(x-x_j^{(x)}\right)^2+\left(y-y_j^{(x)}\right)^2}$; $\varepsilon_j^{(h)}>0$, $\varepsilon_j^{(c)}>0$, $\varepsilon_j^{(T)}>0$ - параметри форми, які також залежать від координат вузлів $\mathbf{X}_j$, $j=\overline{1,N}$.

Замикання $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\Gamma$ області Ω покриємо колокаційними точками $\mathbf{Y}_i=(x_i^{(y)};y_i^{(y)})$, $i=\overline{1,M}$. Нехай $\omega=\{i:\ \mathbf{Y}_i\in\Omega\}$, $\gamma_1^{(h)}=\{i:\ \mathbf{Y}_i\in\Gamma_1^{(h)}\}$, $\gamma_2^{(h)}=\{i:\ \mathbf{Y}_i\in\Gamma_2^{(h)}\}$. Аналогічно визначаємо множини номерів колокаційних точок $\gamma_1^{(c)}$, $\gamma_2^{(c)}$, $\gamma_1^{(T)}$, $\gamma_2^{(T)}$.

Використовуючи метод колокації у точці, з рівнянь (1)-(3), граничних і початкових умов (7)-(11) отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь [2]

$$\mathbf{M}^{(3)}\cdot\frac{d\mathbf{S}}{dt}+\mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{S})\cdot\mathbf{S}=\mathbf{F}^{(3)},$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B},\mathbf{S}) \cdot \mathbf{A}(t) = $$
$$= \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{G'^{(1)}} \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \quad (14)$$
$$+ \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{F}^{(1)},$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{A}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{B}^{(0)},\mathbf{S}^{(0)}) \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \quad (15)$$
$$= \mathbf{G}^{(0)} \cdot \mathbf{B}^{(0)}(t) + \mathbf{G'^{(0)}} \cdot \mathbf{S}^{(0)}(t) + \mathbf{F}^{(0)},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \widetilde{\mathbf{F}}^{(1)},\ \widetilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \widetilde{\mathbf{F}}^{(2)},$$
$$\widetilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{S}^{(0)} = \widetilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad (16)$$

де $\mathbf{A}(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{B}(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{S}(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{A}^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{B}^{(0)} = \{b_i(0)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{S}^{(0)} = \{s_i(0)\}_{i=1}^N$, $\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^M$, $\widetilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\widetilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\widetilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\widetilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^M$, $k = \overline{0,3}$, $\mathbf{G}^{(k)} = \{g_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{G}'^{(k)} = \{g_{ij}'^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $k = \overline{0,2}$, $\mathbf{Q}^{(1)} = \{q_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^{M,N}$. Визначення елементів матриць вказаної задачі Коші є однотипним, але досить громіздким [2]. Так, наприклад для рівняння теплопровідності маємо

$$m_{ij}^{(3)} = c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),\ i \in \omega;\ \widetilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),$$
$$\widetilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i),\ i = \overline{1,M};$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot \left(\boldsymbol{\lambda} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)})\right) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),\ i \in \omega; \\ \left(\boldsymbol{\lambda} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}) - \rho c_\rho \mathbf{u} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}), \mathbf{n}\right),\ i \in \gamma_2^{(T)}; \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),\ i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases}$$

$$f_i^{(3)} = \begin{cases} 0,\ i \in \omega; \\ 0,\ i \in \gamma_2^{(T)}; \\ T_1(\mathbf{Y}_i, t),\ i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases} \qquad r_{ji} = \left\| \mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j \right\|_2.$$

4. Застосування МСЕ. Наближений узагальнений розв'язок задачі (1)-(11) згідно МСЕ шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^M a_j(t) \varphi_j(\mathbf{X}),\ c(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^M b_j(t) \varphi_j(\mathbf{X}),$$
$$T(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^M s_j(t) \varphi_j(\mathbf{X}), \quad (17)$$

де $\varphi_j(\mathbf{X})$ - базисні функції МСЕ. Використовуючи стандартний підхід [1, 3, 4], отримаємо задачу Коші (13)-(16), де, наприклад, для рівняння теплопровідності маємо

$$\widetilde{m}_{ij}^{(3)} = \int_\Omega \varphi_i(\mathbf{X}) \varphi_j(\mathbf{X}) d\mathbf{X},\ \widetilde{f}_i^{(3)} = \int_\Omega T_0(\mathbf{X}) \varphi_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X},$$

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} c_T \int_\Omega \varphi_i(\mathbf{X}) \varphi_j(\mathbf{X}) d\mathbf{X},\ i \in \omega \bigcup \gamma_2^{(T)}; \\ 0,\ i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \int_\Omega \left(\boldsymbol{\lambda} \nabla \varphi_i(\mathbf{X}) + \rho c_\rho \varphi_i(\mathbf{X}) \mathrm{u}\right) \nabla \varphi_j(\mathbf{X}) d\mathbf{X},\ i \in \omega \bigcup \gamma_2^{(T)}; \\ 1,\ i \in \gamma_1^{(T)}, i = j; \\ 0,\ i \in \gamma_1^{(T)}, i \neq j; \end{cases}$$

$$f_i^{(3)} = \begin{cases} T_1(\mathbf{X}_i, t),\ i \in \gamma_1^{(T)}; \\ 0,\ i \in \omega \bigcup \gamma_2^{(T)}. \end{cases}$$

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (13), (14) можна знайти, наприклад, за допомогою лінеаризованої повністю неявної різницевої схеми [7]. Детальніше можливі схеми дискретизації в часі наведено в роботах [1, 2].

5. Похибки. В роботах [1, 2] для оцінки якості співпадання двох наближених розв'язків $u_1(\mathbf{X},t)$, $u_2(\mathbf{X},t)$ (при $t = t_s = s \cdot \tau$) крайової задачі використана лише максимальна відносна похибка $\max\limits_{1 \le i \le M} \frac{|u_1(\mathbf{X}_i,t_s) - u_2(\mathbf{X}_i,t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i,t_s)|} 100\%$ (при умові $u_1(\mathbf{X}_i,t_s) \neq 0$). В якості дискретної множини точок $\mathbf{X}_i$ вибирались, як правило, вузли в МСЕ. Окрім вказаної, можна використати ще наступні оцінки для похибок: середня відносна похибка $\overline{\mathrm{v}}^{(s)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathrm{v}_i^{(s)}$, де $\mathrm{v}_i^{(s)} = \frac{|u_1(\mathbf{X}_i,t_s) - u_2(\mathbf{X}_i,t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i,t_s)|} 100\%$ - відносна похибка у вузлі $\mathbf{X}_i$ на часовому шарі під номером s; середньоквадратична відносна похибка $\mathrm{v}^{(s)} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \left(\mathrm{v}_i^{(s)}\right)^2}$.

6. Структури даних. В двовимірному випадку в МСЕ найчастіше використовуються трикутні скінченні елементи [3, 4, 8]. Тоді, при програмній реалізації МСЕ доцільно використати клас «трикутний скінченний елемент», який містить *властивості*

- номер скінченого елемента: натуральне число;
- степінь базисних функцій (від степеня залежить кількість вузлів): натуральне число s;
- координати вузлів: два двовимірні динамічні масиви розмірності $s \times k$, які складаються з дійсних чисел. Перший масив відповідає

координаті x, а другий - y. Для задання координат вузлів може бути використаний окремий клас «точка» та його об'єкти;
- номери вузлів: двовимірний динамічний масив розмірності $s \times k$, який складається з натуральних чисел. Нумерація вузлів є наскрізною;

методи
- конструктор: завдання конструктора – виділення пам'яті при створенні об'єкта під використовувані в класі динамічні масиви;
- базисна функція: функція, яка повертає дійсне число і вхідними параметрами якої є степінь, координати точки $\mathbf{X} = (x; y)$ (дійсні числа) та внутрішній номер номера вузла, який власне і вказує для якого вузла потрібно обчислювати базисну функцію. Для скінченого елемента степеня s внутрішні номери – це номери від 1 до k його вузлів у відповідному динамічному масиві в додатному напрямку обходу;
- перша частинна похідна базисної функції по x: аналогічний методу «базисна функція»;
- перша частинна похідна базисної функції по y: аналогічний методу «базисна функція»;
- другі частинні похідні базисної функції $\varphi_{xx}(x, y)$, $\varphi_{xy}(x, y)$, $\varphi_{yy}(x, y)$: аналогічні методу «базисна функція». Необхідність в других похідних обумовлюється можливістю застосування стабілізаційних схем МСЕ.

Задача розбиття області на трикутні скінченні елементи є самостійною складною проблемою. Вказана задача не є ціллю даної статті і ми рекомендуємо для читача [8].

Самі скінченні елементи являють собою динамічний масив, який складається із об'єктів відповідного класу.

В методі РБФ за основну структуру даних можна запропонувати клас «вузол», який містить

властивості
- номер вузла: натуральне число;
- координати вузла: два дійсних числа - x та y;
- параметр форми: дійсне додатне число;
- радіус компактного носія: дійсне додатне число;

методи
- радіальна базисна функція: функція, яка повертає дійсне число і вхідними параметрами якої є координати точки $\mathbf{X} = (x; y)$ (дійсні числа) та вид РБФ, який відображається натуральним числом або рядком символів;
- перша похідна РБФ: функція, аналогічна попередньому методу;
- друга похідна РБФ: функція, аналогічна методу «радіальна базисна функція».

Метод РБФ, який розглядається в даній статті, побудований на основі методу колокації в точці. Тому ще однією структурою даних, яка використовується в методі РБФ має бути клас «колокаційна точка», який містить

властивості
- номер колокаційної точки: натуральне число;
- координати колокаційної точки: два дійсних числа;
- показник належності до внутрішності області чи межі: ціле невід'ємне число або масив чисел. Необхідність в заданні даного показника полягає в наступному. У внутрішній колокаційній точці має виконуватись відповідне диференціальне рівняння. В граничній колокаційній точці має виконуватись гранична умова першого, другого або третього родів.

Також відмітимо, що обидва класи «вузол» і «колокаційна точка» можуть бути похідними від одного батьківського класу – «точка». Як властивості вказаного батьківського класу можна розглядати координати точки та її номер.

Із класу нескінченно-диференційовних радіальних базисних функцій (РБФ) найбільшого вжитку набула мультиквадратична $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ [5, 9]. Тут $\varepsilon > 0$ - константа, яку називають параметром форми; $r = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_c\|_2$ - відстань до зафіксованої точки-центру $\mathbf{X}_c = (x_c; y_c)$. Також останнім часом широко використовуються РБФ з компактним носієм [10].

7. Результати чисельних експериментів та висновки. Розглянемо двовимірну задачу фільтраційної консолідації масиву однорідного ізотропного ґрунту прямокутної форми при $a = 5м,\ b = 10м,\ l = 10м$ (рис. 1). Припустимо, що навантаження інтенсивністю $q = 10^5\ \text{Н}/\text{м}^2$ прикладене миттєво. Межі Γ_2 та Γ_5 непроникні, а межі Γ_1, Γ_3 дреновані. Межі Γ_4 та Γ_6 є межами симетрії.

Початковий розподіл концентрації солей візьмемо у вигляді

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m,\ (x, y) \in \Gamma_1; \\ 8\,г/л,\ (x, y) \notin \Gamma_1; \end{cases}$$

а температури

$$T_0(x, y) = \begin{cases} 30^\circ C, (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3; \\ 4^\circ C,\ (x, y) \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{cases}$$

Значення решти вхідних даних наступні:

$$k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба},\ e = 0{,}7,$$

$$\xi = 0{,}75,\ D_{11}^{(c)} = D_{22}^{(c)} = 0{,}02\ \text{м}^2/\text{доба},$$

$$k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2{,}8\cdot 10^{-6}\ \text{м}^2/\text{град}\cdot\text{доба},$$

$$\rho = 1100\ \text{кг}/\text{м}^3,\ \lambda_{11} = \lambda_{22} = 108\ \text{кДж}/\text{м}\cdot\text{град}\cdot\text{доба},$$

$$a_0 = 0\ \text{м}^2/\text{Н},\ a_1 = 5{,}12\cdot 10^{-7}\ \text{м}^2/\text{Н},$$

$$\beta_1 = 10^4\ \text{доба}^{-1},\ c_\rho = 4{,}2\ \text{кДж}/\text{кг}\cdot\text{град},$$

$$C_m = 160\ \text{г}/\text{л},\ c_T = 2137\ \text{кДж}/\text{м}^3\cdot\text{град}.$$

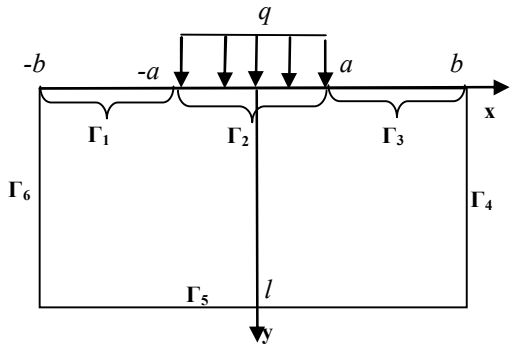


Рис.1. Фільтраційна консолідація масиву ґрунту

Коефіцієнт фільтрації чистої води при $T = 20^\circ C$ дорівнює $10^{-3}\ \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність коефіцієнта фільтрації $k_h = k(c,T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c,T)$ радіальними базисними функціями [9] за експериментальними даними, які наведені в [2].

Для дискретизації в часі використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [1, 2, 7] з кроком $\tau = 10$ діб.

Результати чисельних експериментів наведені на рис. 2 при $t = 300$ діб та у таблицях 2-4. В таблиці 1 наведено параметри чисельних експериментів. Рядки в таблиці 1 відповідають номеру чисельного експерименту. Номери стовпців мають наступні значення: 1 – використана РБФ (МКВ – мультиквадратична, КН – з компактним носієм, зокрема $\varphi^{[\alpha]}(r) = \left(1-\frac{r}{\alpha}\right)_+^6\left(35\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 18\frac{r}{\alpha} + 3\right),\quad \alpha > 0,$

$(1-r)_+ = \begin{cases} 1-r, 0 \le r \le 1; \\ 0, r > 1. \end{cases}$); 2 – кількість вузлів в МСЕ; 3 – кількість вузлів в методі РБФ; 4 – кількість колокаційних точок в методі РБФ. В МСЕ використано квадратичні базисні функції. В табл. 2-4 рядки відповідають номерам чисельних експериментів, а стовпці мають наступні значення: 1 – максимальна відносна похибка (%); 2 – середня відносна похибка (%); 3 – середньоквадратична відносна похибка (%).

Як видно з рис. 2, найбільші абсолютні похибки виникають в околах кутових точок прикладеного навантаження. В цих точках відбувається «стик» меж, на яких для шуканих функцій задаються граничні умови різних типів. Оскільки метод РБФ використаного типу (на основі методу колокації в точці) дозволяє шукати наближений класичний розв'язок, то, можливо, в околах кутових точок цей розв'язок не володіє потрібним запасом диференційованості. Саме цим можна пояснити найбільші похибки в околах вказаних точок.

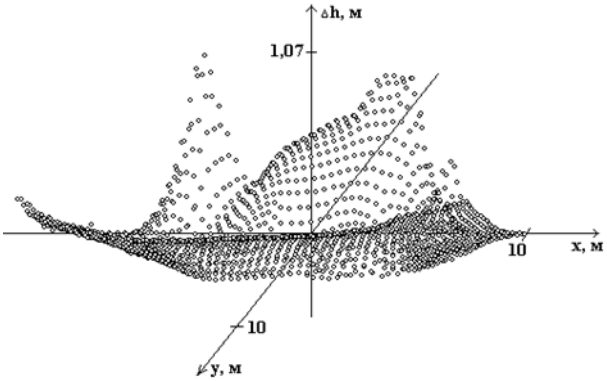


Рис.2. Розподіл різниці надлишкових напорів у масиві ґрунту

Таблиця.1.

Параметри чисельних експериментів

№	1	2	3	4
1	МКВ, $\varepsilon = 2$	1695	808	1695
2	МКВ, $\varepsilon = 2$	2139	1024	2139
3	МКВ, $\varepsilon = 1$	2139	1024	2139
4	МКВ, $\varepsilon = 3$	2139	1024	2139
5	КН, $\alpha = 10$	1695	808	1695
6	КН, $\alpha = 10$	2139	1024	2139
7	КН, $\alpha = 10$	2878	1017	2878

Як видно з табл. 2-4 на величини похибок значно впливає параметр форми (при використанні мультиквадратичної РБФ). При цьому максимальні відносні похибки можуть сягати значних величин. Тому при наявності кутових точок більш інформативними є середня відносна та середньоквадратична відносна похибки. Збільшення кількості вузлових та колокаційних точок не завжди приводить до зменшення похибки. В той же час, при використанні РБФ з компактним носієм спостерігається тенденція до зменшення похибок при зростанні кількості вузлових та колокаційних

точок. При збільшенні радіуса компактного носія – похибки зменшуються, а при зменшенні – збільшуються.

Таблиця.2.

Похибки для напорів

№	1	2	3
1	31,67	7,65	10,48
2	32,55	8,28	10,95
3	29,68	9,27	11,62
4	39,39	9,15	12,77
5	27,30	4,64	5,75
6	24,84	3,91	4,96
7	23,58	3,00	4,57

Отже, в даній статті порівняно чисельні розв'язки згідно методу РБФ та МСЕ. Показано, що максимальна відносна похибка не завжди може виступати критерієм для оцінки співпадання наближених розв'язків різними чисельними методами. Подальшого розвитку та розробки вимагають: 1) безсіткові методи для відшукання наближеного узагальненого розв'язку; 2) ефективні та стійкі методи розв'язання великих СЛАР.

Таблиця.3.

Похибки для концентрації солей

№	1	2	3
1	63,19	12,80	18,08
2	66,24	9,73	12,98
3	49,16	8,69	12,95
4	91,52	16,35	22,95
5	68,91	10,39	16,66
6	65,02	10,08	16,44
7	63,15	10,02	16,24

Таблиця 4.

Похибки для температури

№	1	2	3
1	20,39	4,98	6,10
2	19,65	5,03	5,99
3	19,90	7,69	9,23
4	19,67	5,28	6,51
5	30,22	12,43	13,93
6	27,63	11,66	13,13
7	26,34	11,28	12,66

Список використаних джерел

1. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. – Rivne: NUVGP, 2008. – 416 p. (in Ukrainian).
2. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M.* Numerical solution of consolidation problem and filtration destruction of soil in conditions of heat and mass transfer by radial basis functions method. – Rivne: NUVGP, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).
3. *Marchuk G. I., Agoshkov V. I.* Introduction to the projection meshes methods. - Moscow: Nauka, 1981. – 416 p. (in Russian).
4. *Savula Y. G.* Number analysis of mathematical physics problems by variation methods. – L'viv: Ivan Franko LNU, 2004. – 222 p. (in Ukrainian).
5. *Kansa E. J.* Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // Comput. Math. Appl. – 1990. - 19. – Pp. 147-161.
6. *Zhang X., Liu X.-H., Song K.-Z. , Lu M.-W.* Least-squares collocation meshless method // Int. J. Numer. Methods Engin. – 2001. - Vol.51. - P. 1089-1100.
7. *Samarskiy A. A., Gulin A. V.* Numerical methods of mathematical physics. – Moscow: Nauchniy mir, 2003. – 316 p (in Russian).
8. *Frey P. J.* Mesh generation / P. J. Frey, P.-L. George. – Wiley-ISTE, 2010. – 814 p.
9. *Iske A.* Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. –2003. -Vol. 61, 3.– Pp.247-284.
10. *Wendland H.* Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree // Adv. Comput. Math. - 1995. - Vol. 4. - P. 389-396.

Надійшла до редколегії 27.02.13

УДК 681.3

Олександр О. Марченко, к.ф.-м.н., доц.

Застосування алгоритму ієрархічної кластеризації слів у неевклідовому семантичному лексичному просторі для автоматизації побудови ієрархічних структур онтології

Стаття присвячена дослідженню моделі неевклідового семантичного лексичного простору та деталізації алгоритму ієрархічної кластеризації слів в даному просторі з ціллю побудови ієрархічних лінгвістичних структур онтологічного типу.

Ключові слова: семантична відстань, онтології, штучний інтелект.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: rozenkrans@yandex.ua

Oleksandr O. Marchenko, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Applying the algorithm of hierarchical clustering of words in lexical semantic non-Euclidean space to automate the construction of hierarchical structures of ontologies

The article describes researching of the model of non-Euclidean semantic lexical space and details the algorithm of hierarchical clustering of words in the space for the purpose of constructing hierarchical linguistic structures of ontological type.

Key words: semantic distance, ontologies, artificial intelligence.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail:*rozenkrans@yandex.ua*

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Визначення. Семантичним лексичним простором назвемо множину L точок – слів природної мови, з мірою семантичної близькості μ:L2 →R, яка двом словам ставить у відповідність дійсне число – значення семантичної близькості між ними.

Найважливішим питанням для визначення семантичного лексичного простору є вибір міри семантичної близькості між словами. Традиційно для цього використовуються два підходи: міри, які обчислюються на таксономічних ієрархічних мережах онтологічних систем типу WordNet [1] та міри, що обчислюються за допомогою лексичного перетину тлумачних та енциклопедійних статей, що представляють собою визначення або опис слів-понять *x* та *y* (по типу міри Леска [2]), а також шляхом частотної та спеціальної обробки текстових корпусів. Типовими представниками першого підходу є такі міри, як міра Рєзника [3], міра Ву-Палмера [4] та міра Лікока-Ходорова [5]. Другий підхід широко представлений в роботах Мілн и Віттен [6] (метод Wikipedia Link-based Measure - WLM), у Габриловича и Марковича [7] (метод Explicit Semantic Analysis - ESA) , у Ех, Рамадж, Маннинг та ін. [8] (метод WikiWalk) , а також у А.В. Анісімова и др. [9] (метод Estimated Weighted Overlap − EWO). Сучасні дослідження показали, що латентний семантичний аналіз LSA великих текстових корпусів різноманітного тематичного змісту дає можливість побудови ефективних мір семантичної близькості між словами-термінами, як у [10].

Згідно канонічного визначення метричним простором є пара *(X, d)*, яка

© О.О. Марченко, 2013

складається з деякої множини елементів X і відстані $d : X \times X \rightarrow R$, а саме однозначної, невід'ємної, дійсної функції $d(x,y)$, визначеної для $\forall\ x,y \in X$, яка задовольняє наступні 3 умови:

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$ (аксіома тотожності)
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (аксіома симетрії)
3. $d(x, z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ (нерівність трикутника)

В лінгвістичному просторі з вищезгаданими мірами близькості між словами можна впевнено гарантувати виконання перших двох вимог класичного визначення метричного простору. Що стосується нерівності трикутника, то в даному випадку очевидно існують випадки порушення третьої умови по менший мірі з двох причин: по-перше, існують загальновживані слова, які для більшості наведених мір є однаково близько розташованими майже до всіх слів; по-друге, існує велика кількість багатозначних слів (наприклад слово «коса» має три значення – 1. зачіска; 2. інструмент; 3. довга смужка-півострів), і через такі слова опосередковано можна отримати набагато ближчу відстань між деякими семантично далекими одне від одного словами x та y, аніж пряма відстань між ними. Стосовно загальновживаних слів, то їх можна виключити з розгляду даної моделі, виявивши їх множину шляхом застосування частотного аналізу до великих текстових корпусів різної тематичної спрямованості із обчисленням оцінок значень TF-IDF[11] для слів в корпусах. Слова, які мають різні значення, є більш складною проблемою в плані усунення проблеми порушення нерівності трикутника. Пропонується при формуванні лексичного семантичного простору перейти від слів до їх семантичних значень. Множина L у визначенні може бути представлена як множина семантичних значень слів. Таким чином, слово ***коса*** має бути розділено на три його семантичних значення – ***коса1***, ***коса2*** та ***коса3***. Доцільно дослідити можливість автоматичного розщеплення слів на їх різні семантичні значення та переходу в простір семантичних значень слів. З'ясуємо, чи можна застосувати для цього алгоритми кластеризації у неевклідових просторах.

Розглянемо задачу кластеризації на неевклідовому семантичному просторі слів, як він введений на початку статті. Вона формулюється стандартним чином – необхідно розбити множину точок-слів на кластери згідно міри семантичної близькості. Тобто всередині кластеру слова мають бути ближчими один до одного ніж до слів з інших кластерів. Розглянемо ієрархічний підхід до кластеризації точок-слів у просторі.

Алгоритм ієрархічної кластеризації[12] має наступний вигляд:

WHILE ***it is not time to stop***
DO
pick the best two clusters to merge;
combine those two clusters into one cluster;
END

Для конкретизації алгоритму треба з'ясувати наступні деталі:

1. Як представляються кластери (через центроїди, кластероїди чи інше).
2. Критерій підбору двох кластерів, найкращих для злиття на поточний момент часу.
3. Критерій зупинки алгоритму.

Так як в даному випадку йдеться про неевклідовий простір, то представлення кластерів центроїдами є неможливим, тобто в задачі потрібно використовувати кластероїди для представлення семантичного кластеру – множини точок-слів, близьких за смислом. Не маючи можливості об'єднувати точки в неевклідових просторах, єдиним способом стає підбір слова-точки з кластеру для його представлення. В ідеалі, ця точка лежить максимально близько до усіх інших точок кластеру, тому в деякому сенсі вона лежить у «центрі» кластера. Називатимемо таку точку «кластероїдом». Вибирати кластероїд можна декількома шляхами, кожен з яких призначений мінімізувати

відстань між кластероїдом та іншими точками в кластері. Зазвичай кластероїдом вибирають точку, що мінімізує:

a. Суму відстаней до усіх інших точок у кластері.

b. Максимальну відстань до іншої точки у кластері.

c. Суму квадратів відстаней до інших точок у кластері.

Стосовно критерію підбору двох кластерів, кращих для злиття, то можна об'єднати два кластера з найближчими кластероїдами. Також в якості критерію можна використовувати найменшу середню мінімальну відстань між усіма парами точок з цих кластерів.

Інший критерій пов'язаний із вимірюванням щільності кластера, яка основана на визначенні *радіуса* або *діаметра* кластера. Обидва варіанти мають місце у неевклідовому просторі. Діаметр − це максимальна відстань між двома будь-якими точками у кластері. Радіус може буди знайдений при використанні кластероїду. Це відстань від кластероїду до найвіддаленішої з точок кластера.

В якості критерію вибору двох кластерів до об'єднання можна також зазначити об'єднання кластерів за мінімальним радіусом результуючого кластера. Інший варіант – за мінімальною середньою відстанню між кластероїдом та точками результуючого кластера. Ще один варіант – використовувати суми квадратів відстаней між точками результуючого кластера та його кластероїдом.

Також можна об'єднувати кластери за критерієм мінімального діаметру результуючого кластера. Можливі варіації та аналоги цього правила.

Існує декілька можливих критеріїв зупинки процесу кластеризації. Потрібно зупинити процес, коли найкраще об'єднання існуючих кластерів не є адекватним. Можна скористатися критерієм, що будь-який кластер не повинен мати середню відстань від кластероїду до його точок більшу за якийсь визначений ліміт. Цей підхід має місце, якщо є гарантія , що кластер не розтягнутий на велику відстань.

Можна продовжити кластеризацію, доки не утвориться один кластер. Таким чином генерується дерево, яке відображає послідовність, згідно якої точки простору об'єднувались. В даній задачі кластеризації множини слів в семантичному лексичному просторі можна представити утворене єдине дерево кластеризації як ієрархічну мережу деякої онтології.

Розглянемо детальніше критерії зупинки об'єднання. Існує критерій «зупинитись, коли залишилось k кластерів» у випадку, коли заздалегідь задане число k. Інші критерії:

1. Зупинитись, коли діаметр результуючого кластера перевищує порогове значення. Це також можна робити для радіуса.

2. Зупинитись, коли щільність результуючих кластерів буде менше якогось зазначеного порогу. Щільність можна задати різним чином. Наприклад, щільність обчислюється як кількість точок, поділених на потужність діаметру або радіусу кластера.

3. Зупинитись, коли є підстави вважати результуючий кластер наступного об'єднання поганим. Наприклад, можна відстежувати середній радіус чи діаметр поточних кластерів. Якщо об'єднати два кластери, які не повинні об'єднуватись, тоді середній радіус/діаметр різко зросте відносно попередніх темпів росту радіусу/діаметру. При цьому відбудеться різке падіння щільності утвореного кластера відносно попередніх кластерів.

Як вже було зазначено, можна продовжити кластеризацію, доки не утвориться один кластер для утворення ієрархічної мережі об'єднання точок-слів, яку можна проінтерпретувати як ієрархію деякої онтології.

При цьому в процесі переобчислення кластероїдів та відстаней від них до всіх інших елементів цього кластеру можна відносно просто виявити такі слова, які одночасно однаково або майже однаково наближені до кількох кластероїдів

одночасно. Пряма відстань між кластероїдами є набагато довша, аніж сума відстаней між цими кластероїдами та таким проміжним словом. Таке порушення нерівності трикутника вказує на багатозначність проміжного слова. Воно має бути розділено на ту кількість значень, яка відповідає числу кластероїдів, квазірівно-наближених до цього слова. Тому до алгоритму ієрархічної кластеризації на кожній ітерації переобчислення кластероїдів додається спеціальна процедура перевірки та виявлення багатозначних слів з подальшим їх розщепленням та зарахуванням утворених різних значень до відповідних квазі-рівноблизьких кластерів. Потребує уточнення ще і критерій вибору кластероїду: кластероїдом можна обирати лише однозначне слово – тобто для нього має виконуватися нерівність трикутника в середині кластера: не може бути, щоб відстань між будь-якими двома словами з даного кластеру була більша, аніж сума відстаней між ними та кластероїдом.

Ієрархічна кластеризація може утворити каркас онтологічної мережі лінгвістичної бази знань. Очевидно, що для цього доцільно використовувати міри семантичної близькості, побудовані за допомогою методів дистрибутивної семантики – наприклад, шляхом застосування методу латентного семантичного аналізу LSA на великому текстовому корпусі з тематичним покриттям значної кількості напрямків.

Таким чином, дослідження показали значні перспективи розробки механізмів автоматичної побудови ієрархічних онтологічних структур лінгвістичних баз знань на основі алгоритмів ієрархічної кластеризації, застосованих до семантичного лексичного простору слів з мірами семантичної близькості, створеними методом латентного семантичного аналізу LSA на великих текстових корпусах.

Список використаних джерел

1. *G. A. Miller, R. Beckwith, C. D. Fellbaum, D. Gross, K. Miller* WordNet: An online lexical database. / G. A. Miller, R. Beckwith, C. D. Fellbaum, D. Gross, K. Miller //Int. J. Lexicograph. – 1990.-3, 4, pp. 235–244

2. *Lesk,M.* Automatic sense disambiguation using machine readable dictionaries: how to tell a pine cone from an ice cream cone. In SIGDOC '86: Proceedings of the 5th annual, 1986.

3. *Resnik, P.* Using information content to evaluate semantic similarity in a taxonomy. In International Joint Conference for Artificial Intelligence (IJCAI-95), 1995, pages 448-453.

4. *Wu, Z. and Palmer, M.* Verb semantics and lexical selection. In 32nd. Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, 1994, pages 133-138, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico.

5. *Leacock, C., Chodorow, M., and Miller, G. A.*. Using corpus statistics and wordnet relations for sense identification. Computational Linguistics, 1998, 24(1):147-165.

6. *Milne D., Witten I.H.* An effective, low-cost measure of semantic relatedness obtained from wikipedia links. Association for the Advancment of Artifical Intelligence, 2008

7. *Gabrilovich E., Markovitch S.* Computing semantic relatedness using Wikipedia-based explicit semantic analysis. Department of Computer Science Techion - Israel Institute of Technology. 2006.

8. *Yeh E., Ramage D., Manning C. D., Agirre E., Soroa A.* WikiWalk: Random walks on Wikipedia for Semantic Relatedness. ACL-IJCNLP TextGraphs-4 Workshop 2009.

9. *Anisimov, A.; Marchenko, O.; Kysenko, V.* A method for the computation of the semantic similarity and relatedness between natural language words:- Cybernetics and Systems Analysis, Volume 47, Number 4, July 2011 , pp. 515-522(8)

10. *Marchenko, O.* A method for automatic linking of Wikipedia entries as new nodes of Ukrainian ontological knowledge base UkrWordNet:- Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Series Physics & Mathematics:-№1:-2013

11. *Salton, G. and Buckley, C.* 1988 Term-weighting approaches in automatic text retrieval. *Information Processing & Management* 24(5): 513—523

12. *Anand Rajaraman, Jeffrey David Ullman* Mining of Massive Datasets:- Cambridge University Press:-2012:-p.328

Надійшла до редколегії 18.04.2013

УДК 519.925.51

Рутицька В.В.[1], к.т.н.

Про гарантовану множинну оцінку параметрів математичної моделі

Розглядається задача про побудову гарантованої множинної оцінки параметрів математичної моделі динамічного процесу.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, інвестиційний портфель, банківські активи

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: vlarut@gmail.com

V.V.Rutytska[1], Ph.D.

On guaranted multiple estimation of parameters of mathematical model

The problems of constructing a guaranted multiple parameters estimation of mathematical models of dynamic process are investigated.

Key Words: mathematical model, identification of parameters, portfolio management, bank assets

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d

e-mail: vlarut@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

При розв'язанні задач моделювання динаміки траєкторій складних систем часто доводиться зустрічатись із проблемами, пов'язаними з тим, що рівняння руху відомі з точністю до параметрів. Очевидно, що перш ніж перейти до розв'язання задач із побудови траєкторій руху системи, необхідно визначити значення параметрів таких моделей, або множин, яким вони належать.

Сучасне прикладне математичне моделювання оперує різними підходами до обчислення параметрів при визначеній структурі математичних моделей. До найбільш відомих та поширених методів ідентифікації параметрів дискретних та неперервних моделей відносять:

- кореляційно – дисперсійний аналіз;
- підходи, що ґрунтуються на принципах теорії стійкості;
- підходи, що ґрунтуються на методах аналізу чутливості розв'язків.

Разом з тим, в силу складності структури моделі, нелінійного характеру процесів, що моделюються, а також інших факторів, часто доводиться звертатись до комп'ютерного моделювання, яке дає можливість шляхом перебору великої кількості моделей – претендентів будувати комп'ютерні образи моделей методами самоорганізації або імітаційного моделювання. Під складністю параметрично заданої моделі будемо розуміти розмірність вектора параметрів, а основним принципом моделювання, пов'язаного із самоорганізацією моделі є: «чим складніша модель, тим вона точніша», на відміну від основного принципу імітаційного моделювання про «існування моделі оптимальної складності».

Такі підходи, до яких можна віднести методи типу нейромереж або групового урахування аргументів, часто застосовують і при розв'язанні задач моделювання складних та взаємопов'язаних економічних процесів, у тому числі математичних задач фондового ринку та банківського сектору економіки.

Як показано в роботах [1] та [2], математична модель формування ринкової вартості акції та портфеля акцій мають вигляд

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_0, \qquad (1)$$

$t \in (t_0, T),\ i = \overline{1,n}.$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t). \qquad (2)$$

відповідно, і є заданими параметрично. Тут

© Рутицька В.В., 2013

r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

При розв'язанні задач прогнозування або керування у наведених вище прикладних сферах є необхідність розробляти алгоритми та методи для отримання гарантованих фінансових результатів. Прикладом такого підходу може бути розробка методології Value at Risk, а підтвердженням актуальності – її загальне визнання як надійного математичного інструменту при прийнятті інвестиційних рішень.

Розглянемо детально задачу про побудову гарантованої множинної оцінки параметрів математичної моделі. Таку оцінку побудуємо у класі еліпсоїдальних множин.

Задача про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його прибутковості у статичному випадку має вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x .$$

При практичному інвестуванні вона розглядається у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \to \max_x$$

і полягає у побудові оптимального за прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля.

Праві частини рівнянь системи (1) є лінійними і залежать від параметрів. Для забезпечення можливості інтегрування системи (1) побудуємо процедуру визначення параметрів α.

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \alpha_3 r_j(t)),$$

$$i, j = \overline{1, n}.$$

При різних постановках задачі за вектор параметрів можна розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ або $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Скористаємось при цьому відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних акцій $\overline{r}_i(t)$.

На основі цієї динаміки розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для i – тої акції і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Далі з метою отримання оптимального значення параметра α_1^* сформулюємо оптимізаційну задачу

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} (r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r}_i(t))^2. \qquad (3)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, можемо визначити оптимальне, у розумінні критерія якості (3), значення параметрів моделі (1) на першому інтервалі. Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура розрахунку оптимальних значень параметрів динамічної моделі є такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}), \quad r_i(t_{k-1}) = r_{i_{k-1}} \quad t \in (t_{k-1}, t_k),$$

$$i = \overline{1, n}.$$

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.
3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_{k-1}^* = arg \min_{\alpha} (r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^*) - \overline{r}_{k-1}(t))^2 \qquad (4)$$

Розв'язком задач (4) для вибраного k кожної із них буде значення параметра α_{k-1}^*, що переводить систему із точки r_{k-1} у точку r_k.

Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі, яка дозволяє моделювати поведінку та прогнозувати очікувану прибутковість акції r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу.

Варто відмітити, що при розбитті інтервалу інтегрування необхідно враховувати також значення складових вектора станів системи для коректного застосування знайдених параметрів при розв'язанні відповідних траєкторних задач.

Перейдемо до задачі про побудову гарантованої множинної оцінки параметрів для математичної моделі загального вигляду (1). Сформулюємо процедуру побудови оптимальної еліпсоїдальної оцінки параметрів математичної моделі (1) у просторі R^n параметрів α.

1. Алгоритм 1 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Вектор параметрів моделі розглянемо у вигляді $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ за умови $x(t_0) = x_0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів $\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$.

І нехай це значення параметрів буде розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Нові значення параметрів α, які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0.$$

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Таким чином, отримано нове положення значення параметра $\alpha_N \in A$, де A – обмежена замкнута множина параметрів математичної моделі $\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2})$.

Наведемо деякі критерії якості для перевірки належності параметра допустимій множині

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t_i))^2 < \varepsilon, \qquad (5)$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t)) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \qquad (6)$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних наведених вище критеріїв. Виконавши такі кроки для кожної із визначених раніше точок, отримаємо нове положення точок α у просторі параметрів математичної моделі.

2. Алгоритм 2 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Після побудови та аналізу розв'язків задачі ідентифікації параметрів визначимо точку, що найбільш віддалена від точки $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координати якої визначимо за допомогою формул

$$\alpha_1^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_1^j, \quad \alpha_2^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_2^j.$$

Для цього розв'яжемо задачу одномірної оптимізації

$$R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c),$$

де $L(p, q)$ – функція відстані між точками p та q.

На границі кола $S(1, D)$ радіусу 1, із центром у точці $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. В кожному вузлі y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\bar{n}_{e_i}$ до кола за правилами, описаними вище, і розв'яжемо допоміжну задачу з побудови нових значень параметрів α аналогічно підходу, описаному в Алгоритмі 1.

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів $n_i, i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишемо еліпсоїд найменшого об'єму (еліпс найменшої площі у площині) навколо таким чином побудованих точок, який будемо називати гарантованою еліпсоїдальною оцінкою

параметрів моделі (1) при застосуванні критеріїв (5) або (6).

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B,d):\{(B(\alpha-d),\alpha-d)\le 1\}, \qquad (7)$$

де B - симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α, $\alpha\in R^n$; $d-$ геометричний центр еліпсоїда, $d\in R^n$. Множину (7) будемо називати гарантованою множинною оцінкою, якщо кожне значення параметра α, отримане для довільних спостережень, належить $Q(B,d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0=E,$ а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d^0=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\ ,$$

де $k-$ кількість точок.

На $k+1-$ кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1}=B^k+\lambda_1^{k+1}\nabla_B\{(B^k(\alpha-d^k),\alpha-d^k)\},$$

$$d^{k+1}=d^k+\lambda_2^{k+1}\nabla_d\{(B^k(\alpha-d^k),\alpha-d^k)\},$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(\alpha_{\bar i}-d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}),\alpha_{\bar i}-d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}))<$$
$$(B^k(\alpha_{\bar i}-d^k),\alpha_{\bar i}-d^k),$$

де $\bar i=\arg\max_i(B(\alpha_i-d),\alpha_i-d).$

$$(B^j(\alpha-d^j),\alpha-d^j)<1,$$

На границі сфери $S(1,d^j)$ з центром у точці d^j, ($j-$ номер кроку процедури такий, що $(B^j(p-d^j),p-d^j)<1,$ сформуємо довільну $\delta-$ сітку $\{y_i\}_{i\in K_s}$ з вузлами y_i. В кожному вузлі сформуємо довільну $\delta-$ сітку $\{y_i\}_{i\in K_s}$ з вузлами y_i. У кожному вузлі за допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок знаходимо гарантовану множинну оцінку параметрів, яка, як і побудована за допомогою Алгоритму 1, забезпечує адекватну роботу системи. Побудована таким способом множина дозволяє сформувати допустиму множину параметрів і gпри подальшій оптимізації цієї множинної оцінки логічним наступним кроком є формулювання та розв'язання задачі про побудову ефективної оцінки.

Запропонована в даній роботі математична процедура дає можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачу параметричної та гарантованої множинної ідентифікації параметрів і на основі розроблених алгоритмів визначення допустимої множини параметрів математичної моделі знайти розв'язок задач побудови траєкторії ринкової вартості для математичних моделей (1) та (2) та оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів.

Список використаних джерел

1. Bublik B.N.,Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural and self-reactance optimization and stability of dynamics of bunches. -Kyiv, Naukova dumka, 1985. –304p. (in Russian).
2. Garashchenko F.G., Kulyan V.R., Rutitskaya V.V. Quality analysis of mathematical models of investment management. –Kyiv, //Cybernetics and computing engineering. – 2005. –N 148. –p.3-10. (in Russian).
3. Krylov I.A., Chernousko F.L. Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems. – Moskow, Nauka, 1971. –247p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.04.2013р.

УДК 519.682.1

Сільвейструк Л.М.[1], к.ф.-м.н.,
Шишацька О.В.[2]

Обмеження атрибутів в моделях даних

Метою статті є огляд обмежень в моделях даних. Розглянуто обмеження атрибутів в моделі «сутність-зв'язок». Проаналізовано логічні зв'язки між обмеженнями на атрибутах.

Ключові слова: модель «сутність-зв'язок», атрибут, домен, обмеження кардинальності, ключ.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: slm-klm@ukr.net
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: oshyshatska@gmail.com

L.M. Silveistruk[1], PhD,
O.V. Shyshatska[2]

Constraints of attributes in data models

The purpose of the article is review constraints of data models. Constraints of attributes in the model «entity-relationship» are considered. Logical relationships between different types constraints of attributes are analyzed.

Key Words: entity-relationship model, attribute, domain, cardinality constraints, primary key.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: slm-klm@ukr.net
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: oshyshatska@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

При розгляді процесу проектування розглядаються семантичні об'єкти. Інформація про об'єкти реального світу може бути представлена також у вигляді обмежень (constrants). Для цього в різних моделях використовуються обмеження цілісності, що виражають обмеження, які накладаються предметною областю, визначаються зв'язки між компонентами і описується поведінка системи. В роботі наведено класифікації обмежень та розглянуто обмеження в моделі «сутність-зв'язок».

Класифікація обмежень

Модель програмної системи – це набір тверджень, що математично строго визначає структурні властивості об'єктів системи, їх поведінку. При аксіоматичному підході вона задається описом структури і операторів. Властивості структур задаються аксіомами – формальними твердженнями, достатньо простими, щоб бути самоочевидним. Семантика задається аксіомами, або обмеженнями цілісності, що описують допустимі стани і послідовності станів системи. Загальний систематизований вступ до теорії обмежень цілісності в базах даних наведено в [1].

Обмеження цілісності можна поділити на: *статичні обмеження цілісності* – представляють семантику усіх можливих станів системи; *динамічні обмеження цілісності* – описують поведінку системи в часі, тобто коректність послідовності її станів.

Статистичні обмеження цілісності можуть бути розподілені на наступні класи: *структурні обмеження* (використовуються при проектуванні системи і накладаються на її структуру, наприклад включення, виключення, функціональні залежності); *семантичні обмеження* (використовуються при проектуванні системи і накладаються на її семантику, наприклад, функціональні, багатозначні залежності); *обмеження реалізації* (використовуються для представлення системи, наприклад, включення, об'єднання, залежності, породжені кортежами); *обмеження проектування* (використовуються для побудови зручного інтерфейсу, наприклад, загальні функціональні і узагальнені функціональні залежності).

© Л.М. Сільвейструк,
О.В. Шишацька, 2013

Можна показати, що ці типи обмежень можуть бути використані і для динамічних обмежень цілісності. Динамічні обмеження використовують для підтримки структури даних. Немає загального підходу до використання динамічних обмежень цілісності. За своїм значенням вони можуть бути розподілені на *обмеження переходу* (описують операції над системою, зміну її станів, наприклад, перед- і післяумови, що накладаються на операції зміни даних) та *тимчасові формули* (обмеження на послідовності станів).

Ця класифікація включає і приховані і явні обмеження. Різниця між цими типами обмежень залежить від використовуваної моделі. В реляційній моделі всі обмеження представлені разом. Це приводить до складнощів в їх класифікації. Однак, для деяких типів обмежень цілісності таких як функціональні залежності і залежності включення, аксіоматизація можлива лише в рамках логіки першого порядку. При ER-підході структурні обмеження моделюються внутрішніми обмеженнями, такими як залежності включення, які задані в структурі схеми. Більшість розширень ER-моделі підтримують різні типи функціональних залежностей, такі як один-до-одного, один-до-багатьох та кардинальні обмеження. Перевагою таких обмежень є простота опису при проектуванні системи.

Обмеження в моделі «сутність-зв'язок»

У роботах [2, 3] було розглянуто обмеження, що накладаються на типи зв’язків у моделі «сутність-зв’язок». Розглянемо типові обмеження, що накладаються на атрибути: ключ, обмеження домена, обмеження кардинальності.

Одне з базових понять, яке використовується при проектуванні програмних систем, – це *атрибут* (*attribute*). За допомогою атрибутів визначаються властивості об’єктів. Так, типу сутності та типу зв’язку відповідає певний набір атрибутів. Тип сутності може характеризуватися принаймні одним атрибутом, а тип зв’язку може і не мати атрибутів.

Має місце поняття множини значень, які може приймати атрибут – *домен атрибуту* (*domain*). Домен визначає всі потенціальні значення, що можуть бути присвоєні атрибуту. Зрозуміло, що різні атрибути можуть використовувати один домен.

Як зазначалось вище, можна розміщувати атрибути на типі зв’язку, але не потрібно зловживати такою можливістю; в якості альтернативи використовують наступне: вводять в модель новий тип сутності з тими ж атрибутами та з’єднують його з типом зв’язку (знищуючи його атрибути), отримуючи новий тип зв’язку, який має арність на одиницю більше (див., наприклад, [4]).

Сутності та зв’язки характеризуються значеннями своїх атрибутів. Розглядаючи типи сутностей та типи зв’язків на рівні атрибутів і доменів, вони уточнюються наступним чином.

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ атрибути типу сутності E або типу зв’язку R, а D – універсальний домен (для спрощення позначень розглядається один домен для всіх атрибутів).

Типом сутності E називається множина відображень вигляду $e:\{A_1, A_2, ..., A_n\} \to D$, де e – це сутність типу сутності E.

Типом зв’язку R називається множина відображень вигляду $r:\{A_1, A_2, ..., A_m\} \to D$, причому множина атрибутів $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ містить атрибути типу зв’язку R та атрибути всіх сутностей-учасниць даного типу зв’язку, де r – це зв’язок типу зв’язку R [5]. У роботі [5] Чен уточнює атрибут як функцію, що відображає тип сутності (тип зв’язку) в домен.

Розрізняють різні класи атрибутів: *прості* (*simple*) та *складові* (*composite*) *атрибути* (*attributes*), *однозначні* (*single-valued*) та *багатозначні* (*multivalued*) *атрибути*, *базові* (*stored*) та *похідні* (*derived*) *атрибути*, *ключі* (*keys*).

Простий атрибут – атрибут, який складається з одного компонента з незалежним існуванням. Складовий атрибут – атрибут, який складається з декількох компонентів, кожен з яких характеризується незалежним існуванням.

Прості атрибути іноді називають *атомарними*. Складовий атрибут представляє деяку композицію простих (або складових) атрибутів. Такі взаємозв’язки вказують на ієрархію атрибутів.

Рішення про моделювання атрибута у вигляді простого чи складового залежить лише від проектанта.

Однозначний атрибут – атрибут, який містить одне значення для будь-якої сутності типу сутності (будь-якого зв’язку типу зв’язку). Багатозначний атрибут – атрибут, який може містити декілька значень для сутності типу сутності (зв’язку типу зв’язку).

В більшості реалізацій моделі «сутність-зв’язок» багатозначний атрибут необхідно знищувати шляхом створення нових слабкого типу сутності та бінарного типу зв’язку виду

«один до багатьох» (слабкий тип сутності та бінарний тип зв'язку виду «один до багатьох» розглядаються у наступних розділах).

Похідний атрибут – атрибут, який представляє значення, похідне від значення зв'язаного з ним атрибута або деякої множини атрибутів, які належать деякому (не обов'язково даному) типу сутності (типу зв'язку) або множині типів сутностей (типів зв'язків). Базовими атрибутами вважаються атрибути, які не є похідними.

Серед похідних атрибутів потрібно розрізняти атрибути, що використовують значення декількох атрибутів однієї сутності, та атрибути, що використовують значення декількох атрибутів всіх сутностей в межах одного типу сутності. В другому випадку похідний атрибут є атрибутом типу сутності, так як використовує всі значення сутностей цілого типу (ситуація аналогічна використанню агрегатних функцій).

Також похідні атрибути можуть обраховуватися на основі декількох взаємопов'язаних атрибутів різних типів сутностей; при цьому необхідно уточнити типи зв'язків між даними типами сутностей.

Виділяють особливий вид атрибутів – ключі. *Ключ* – атрибут або підмножина атрибутів, яка унікальним чином визначає сутність в складі типу сутності (зв'язок в складі типу зв'язку); іншими словами, дві різні сутності (два різних зв'язка) у межах типу сутності (типу зв'язку) не можуть мати однакові значення всіх атрибутів, які складають ключ.

У термінах реляційного підходу ключ K функціонально обумовлює всі атрибути A_i типу сутності (типу зв'язку), які не входять до ключа $\langle K \to A_i \rangle$ (див., наприклад, [4, с. 108]).

Дане твердження можна уточнити за допомогою поняття обмеження відношення P (зокрема, функції) за множиною $\mathbf{X}$ – $\mathbf{P}|\mathbf{X}$ [6].

Множина атрибутів K є ключем, якщо виконується твердження $\forall e_1 \, \forall e_2 \, (e_1, e_2 \in \mathbf{E} \wedge e_1|\mathbf{K} = e_2|\mathbf{K} \Rightarrow e_1 = e_2)$.

Виділяють наступні види ключів:

– *потенційний ключ* (*candidate key*) – атрибут або набір атрибутів, які унікально ідентифікують сутності типу сутності (зв'язки типу зв'язку);

– *первинний ключ* (*primary key*) – деякий вибраний потенціальний ключ типу сутності (типу зв'язку) для спрощення роботи з сутностями (зв'язками);

– *альтернативний ключ* (*alternative key*) – потенціальний ключ, який не є первинним ключем.

Зрозуміло, що тип сутності або тип зв'язку має один первинний ключ, а потенційних ключів може бути декілька.

Для отримання додаткової інформації про об'єкти моделі на них накладаються обмеження. Одне з обмежень, яке застосовують до атрибутів типу сутності (типу зв'язку), це визначення ключа.

Інше обмеження – це обмеження на значення елементів схеми (структури) даних – *обмеження домену* (*domain constraint*), яке являє собою явне задання множини допустимих значень, а також співвідношення між значеннями атрибутів, які повинні виконуватися. Множину значень можна задавати декількома способами, у тому числі перерахуванням допустимих значень, завданням стандартних типів (int, float, string і т.п.) або завданням умови приналежності. При описі функцій приналежності та при визначенні допустимих відношень можливо застосовувати операції порівняння, логічні зв'язки та інші засоби мови, що використовується для визначення обмежень цілісності.

На атрибути може накладатися також *обмеження кардинальності* (*cardinality constraints*), яке відображає найменшу та найбільшу можливу кількість значень атрибуту для сутності (зв'язку) і задається у вигляді відповідного діапазону.

Мінімальна кардинальність атрибута показує кількість екземплярів атрибуту, що повинні існувати, щоб об'єкт був допустимий. Зазвичай – це значення рівне 0 або 1. Якщо воно рівне 0, атрибут не зобов'язаний мати значення, а якщо 1, то атрибут зобов'язаний мати значення.

Максимальна кардинальність атрибута показує максимальну кількість екземплярів атрибуту, які може мати об'єкт. Зазвичай значення рівне 1 або N. Якщо воно рівне 1, атрибут може мати не більш одного екземпляра, якщо воно рівне N, то гранична кількість екземплярів не задана.

Особливість даного обмеження в моделі «сутність-зв'язок» є те, що значення мінімальної та максимальної кардинальності атрибута може бути деякими натуральними числами, тоді в моделі чітко регламентується як мінімальна так і максимальна кількість екземплярів атрибута.

Кардинальність атрибута зображається у вигляді пари значень (M, N), де M – значення мінімальної кардинальності, а N – значення максимальної кардинальності.

При побудові моделі даних одне з базових питань – це коректність побудови моделі. Тому встановлення логічних взаємозв'зків між об'єктами моделі та їх обмеженнями – важливе питання проектування.

При розгляді атрибутів можна встановити наступні зв'язки:

- якщо атрибут ключовий, то мінімальна та максимальна кардинальність атрибуту дорівнюють 1;
- якщо атрибут однозначний, то максимальна кардинальність атрибуту дорівнює 1;
- якщо атрибут многозначний, то максимальна кардинальність атрибуту більше 1 або N.

Висновки

В роботі розглянуто обмеження в моделі «сутність-зв'язок». В подальшому планується уточнити вище викладенні логічні зв'язки для перевірки коректності побудови атрибутів та їх обмежень у моделі.

Список використаних джерел

1. *Thalheim B.* Overview of semantic constraints for database models / B. Thalheim // Intelligent systems. – 1998. – T.3. – Vol. 3-4. – P. 307-351. (in Russian).

2. *Buy D.* Formalization of model entity-relationship / D. Buy, L. Silveystruk // Kyiv: Publishing center «Kyiv University», 2011. – 176 p. (in Ukrainian).

3. Silveistruk L. Generalized participation cardinality in entity-relationship model / L. Silveistruk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2011. – No. 2. – P. 142-146. (in Ukrainian).

4. *Garcia-Molina H.* Database Systems / G. Garcia-Molina, J. Ullman, J. Widom. - Moscow: "Williams", 2004. - 1088 p. (in Russian).

5. *Chen P.P.* The entity-relationship model – towards a unified view of data / P.P. Chen // ACM Transactions on Database Systems. – March 1976. – Vol. 1, No. 1. – P. 9-36.

6. *Buy D.B.* Properties of set-theoretic constructions full image and restrictions / D.B. Buy, N.D. Kahuta // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2005. – No.2. – P. 232-240. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 17.05.13

УДК 519.852:519.876

Тодоріко Б.Д.[1], аспірант,

Аналіз матричної гри у змішаних стратегіях як прямої задачі лінійного програмування методом базисних матриць

Проаналізовано властивості прямої задачі лінійного програмування, як аналог матричної гри у змішаних стратегіях. Застосовано положення методу допустимих базисних матриць при встановленні властивостей чистих стратегій платіжної матриці.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв'язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: t1to@list.ru

Todorico B.D., postgraduate student

The analysis of matrix game (mix strategies) how linear programming problems with application method of basic matrix

Analysis of matrix game (mix strategies) as prime linear programming problems of basic matrix metheds is reseatch.

Key Words: basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: t1to@list.ru

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

Вступ

Одним з підходів до дослідження матричної гри у змішаних стратегіях є зведення до аналізу спеціальним чином побудованої двоїстої пари задач лінійного програмування [1-4]. Як методи розв'язання даної задачі, найчастіше обирають сімплекс методи, що застосовані до прямої або до двоїстої задачі ("стовпцеві" [4] та "порядкові" [5] схеми). Оскільки, при застосуванні, перші дають інформацію про стовпці, а інші про рядки матриці обмежень, тобто про стратегії ігроків матричної гри.

В даній роботі досліджено структурні властивості прямої задачі (матричної гри) та застосовано ідеологію "стовпцевих" та "рядкових" методів при аналізі платіжної матриці (стратегій ігроків).

Постановка задачі

Введемо в розгляд двоїсту пару задач лінійного програмування [1], де *пряма задача*

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$

$$(\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \le B \quad) \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \tag{3}$$

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \ , \tag{4}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \tag{5}$$

$$u_i \ge 0, \quad (i = \overline{1, m}) \tag{6}$$

© Б.Д. Тодоріко, 2013

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [1,2], де $b_i = 1,\ i = \overline{1,m},\ c_j = 1,\ j = \overline{1,n}$.

Пасивність та неактивність стовпців моделі лінійного програмування (1)-(3).

Нехай

$$X = \left\{ x / \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \le B,\ x \ge 0 \right\}$$

$$X_r = \left\{ x / \sum_{j=1, j\ne r}^{n} A_j x_j \le B,\ x \ge 0 \right\}$$

$$X^0 = \{ x_0 / Cx_0 = \max_{x \in X} Cx, x \in X \}$$

$$X_r^0 = \{ x_0 / Cx_0 = \max_{x \in X_r} Cx, x \in X_r \}.$$

Визначення 1. Стовпець A_r $(x_r = 0)$ задачі (1)-(3) пасивний , якщо $X = X_r$.

Визначення 2. Стовпець A_r $(x_r = 0)$ задачі (1)-(3) неактивний, якщо $X^0 = X_r^0$.

Визначення 3. Стовпець A_r $(x_r \ne 0)$ задачі (1)-(3) оптимально-активний, якщо $X^0 \ne X_r^0$.

Нехай $X = \{ x / a_j x \le b_j,\ j \in I \}$

$X_r = \{ x / a_j x \le b_j \quad j \in I, \quad j \ne r \}$

Визначення 4. Обмеження $a_r x \le b_r$ задачі (1)-(3) пасивне, якщо $X = X_r$.

Теорема 1. (друга теорема двоїстості для симетричних задач або з однотипними обмеженнями [5]). Для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j \right) = 0,\ j = \overline{1,n}$$

$$u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Очевидніший взаємозв’язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок 1. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність, то *i*-та компонента оптимального плану (відповідна стовпцю A_i) спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо *i*-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна (при стовпцю A_i), то відповідне *i*-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Оскільки оптимальні стратегії матричної гри визначаються через компоненти розв‘язки задач (1)-(3) та (4)-(6) [1-3], саме складові оптимальних стратегій $u_i^{'}$ та $w_i^{'}$ ігри пов'язані з компонентами u_i та x_j оптимальних планів двоїстих задач лінійного програмування формулами

$$w_j^{'} = x_j / \sum_{j=1}^{n} x_j ,\ u_i^{'} = u_i / \sum_{i=1}^{m} u_i \ .$$

Означення 4. Чиста стратегія $e_k = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{k},1,\underbrace{0,...0}_{m} \right)$ першого гравця називається *істотною (суттєвою)*, якщо існує така оптимальна змішана стратегія $u' = \left(u_1, u_2, ..., u_{k-1}, \underbrace{u_k}_{k}, u_{k+1}, ..., u_m \right)$, в якій k-а її складова u_k додатня. В іншому випадку стратегія e_k неістотна (несуттєва).

Аналогічно визначаються суттєві і несуттєві стратегії другого гравця.

Мають місце такі властивості оптимальних стратегій матричної гри:

Необхідною і достатньою умовою того, щоб чиста стратегія e_k першого гравця була суттєвою, є виконання рівності $e_k A w = v$ для всіх оптимальних стратегій другого гравця, де v ціна ігри.

Наслідок 2. З наведених вище означень пасивності та неактивності стовпців та обмежень (1)-(3) витікає несуттєвість відповідних чистих стратегії ігроків матричної гри.

Це вказує на потребу проведення аналізу структурних властивостей системи обмежень (2)-(3) задачі.

При розв’язуванні задачі сімплексним методом [5-6] необхідно звести задачі до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач необхідно ввести m невід’ємних змінних. Оптимальний розв‘язок знаходиться послідовними вводами-виводами стовпців в опорну базисну матрицю (відповідну опорному розв‘язку) – “стовпцева” процедура. Встановлення властивості пасивності стовпця

буде вказувати на несуттєвість відповідної чистої стратегії (наслідок теореми 1).

При розв'язуванні задачі (без додаткових перетворень) методом базисних матриць як задачі з однотипними обмеженнями [4] встановлюються властивості пасивності обмеження (2), що вказує на несуттєвість (відповідної обмеженню нормалі, рядку платіжної матриці) чистої стратегії (наслідок теореми 1).

Відомо, що існує зв'язок умов оптимальності, формул зв'язків елементів методу (методів) поміж задачами з різною формою запису [3], типом обмежень, напрямком оптимізації умовами пасивності (неактивності) рядків одної з задач та стовпців двоїстої, що витікає з умов теорем двоїстості [3].

Положення методу базисних матриць.

Без обмеження загальності, при викладенні положень методу будемо розглядати як базову задачу лінійного програмування з однотипними обмеженнями (4)-(6) на "$\le$" та на "max" з використанням методу базисних матриць.

Визначення 5. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (5), будемо називати базисною, а розв′язок відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$ базисним. Дві базисні матриці з відмінними одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай β_{ij}, $1, j = 1,2,...,m,$ елементи базисної підматриці $A_б$, $e_{ri,}$ - елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$.- стовпець оберненої матриці. Розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02},..., u_{0m})^T$ системи рівнянь $A_б u = c^0$, де c^0 - підвектор C - компоненти якого складаються з правих частин обмежень (5), нормалі, яких утворюють базисну матрицю $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2},..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі обмеження $a_r u_1 \le c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02},..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками базисної матриці $A_б$, $.\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5) в вершині u_0; $J_б$, J_H, $J = J_б \cup J_H$ - множини індексів базисних і небазисних обмежень (5).

Теорема 2. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\bar{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \quad \bar{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{0,n}; \quad i = \overline{1,m}; \quad i \ne k; \qquad (7)$$
$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \quad \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}; \quad i \ne k; \qquad (8)$$
$$\bar{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (9)$$
$$\bar{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \quad \bar{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,$$
$$r = \overline{1,n}; \qquad r \ne k\ ; \qquad (10)$$
$$\bar{Bu}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad (11)$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \ne 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку - $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції - $\alpha_{0k} < 0$.

Встановлено [4], що якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \ge 0, k = \overline{1,m}$, то базисна матриця та відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $\alpha_{ok} > 0, \quad k = \overline{1,m}$, розв'язок єдиний, при $\exists i_0 \in I, \alpha_{0i0} = 0$, розв'язок неєдиний.

Теорема 2. (Критерій пасивності [4]) Для того, щоб обмеження $a_r u \le c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування базисної матриці, $A_б$ відносно якої розвинення $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх k.

Про структурні властивості задачі (1)-(3.)

Задача (1)-(3) має свої особливості структури, що "позначається" на вигляді формул зв'язку елементів методу базисних матриць в двох суміжних базисних матрицях та в специфіці побудови та застосування алгоритмів. Неважко переконатись, що $0 \in E^n$ допустимий

розвязок задачі (1)-(3). Множина обмежень задачі являється обмеженою.

Твердження 1. Множина точок з координатами $x_{j(H)} = (0,0,....,\underbrace{\lambda_{j(H)}}_{j},0,...,0),\ j \in J$,

де $\lambda_{j(H)} = \min\limits_{\substack{a_{ij}>0,\\ i\in I}} \dfrac{1}{a_{ij}},\ j \in J$ є допустимими для (2).

Доведення. Розглянемо додатні координатні осі множини обмежень в E^n, тобто промені, які можна представити у вигляді $OX_j = \left\{ \begin{matrix} x = (x_1, x_2, ..., x_n) / x_i = 0, \\ i \neq j,\ x_j = \lambda_j,\ 0 < \lambda_j < +\infty,\ i = j \end{matrix} \right\}$.

Найдемо перетин кожної з гіперплощин обмежень (півпросторів) з $OX_j,\ j \in J$ (опуклих множин). Підставимо кордината точок променя $OX_j,\ j \in J$ в рівняння гіперплощини відповідній

$a_i x \le b_i,\ i \in I,\ \ a_i x = b_i,\ i \in I,$

$a_i x = 1,\ i \in I,\ \lambda_{j(i)} = 1/a_{ij},\ i \in I,$

Відрізок $\left[0,\ \lambda_{j(i)}\right]$ допустимий для $a_i x \le b_i,\ i \in I$ (оскільки $0 \in E^n$ та $(0,0,...,\lambda_{j(i)},0,...,0)$ допустимі). Знайдемо перетин відрізків, тобто відрізок $\left[0,\ \lambda_{j(H)}\right],\ \lambda_{j(H)} = \min\limits_{i\in I} \lambda_{j(i)}$. Точка з координатами $x\ x_{j(H)} = (0,0,...,\lambda_{j(H)},0,...,0),\ j \in J$ буде допустимою для всіх обмежень.

Наслідок 2. Точки простору E^n : $0 \in E^m\ x_{j(H)} = (0,0,...,\lambda_{j(H)},0,...,0),\ j \in J$ є допустимими для (1)-(3), а точка $x_{d(H)} = (0,0,...,\lambda_{d(H)},0,...,0),\ \lambda_{d(H)} = \max\limits_{j\in J} \lambda_{j(H)}$ нижньою допустимою оцінкою за цільовою функцією (1) задачі (1)-(3), тобто $cx \ge cx_{d(H)}$.

Доведення цього факту є очевидне, якщо врахувати властивість цільової функції (1) (координати вектора одиничні) та додатність компонент ($cx_{d(H)} = \lambda_{d(H)}$).

Теорема 3. Параллелепіпед змінних вигляду

$\Pi_{X(B)} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) / 0 \le x_j \le x_{j(B)},\ j \in J \right\}$, де

$x_{j(B)} = (0,0,...,\lambda_{j(B)},0,...,0),\ j \in J,$

$\lambda_{j(B)} = \max\limits_{i\in I} \lambda_{j(i)},\ \lambda_{j(i)} = 1/a_{ij},\ i \in I,$

є обмежена замкнена множина-апроксимуюча для обмежень (2)-(3), тобто $X \subseteq \Pi_x$.

Доведення. Введемо в розгляд допоміжні задачі вигляду

$\max x_k,$

$a_i x \le b_i,\ i \in I\ \ (a_i x \le 1,\ i \in I)$

$x_j \ge 0,\ j \in J,\ k \in J$

та $\min x_k,\ k \in J$ при тих же обмеженнях.

Неважко переконатись, що верхніми оцінками розв‘язків наведених оптимізаційних задач на максимум будуть

$x_{j(B)} = (0,0,...,\lambda_{j(B)},0,...,0),\ j \in J,$

$\lambda_{j(B)} = \max\limits_{i\in I} \lambda_{j(i)},\ \lambda_{j(i)} = 1/a_{ij},\ i \in I,$

а на мінімум $x_{j(H)} = (0,0,...,0,...,0),\ j \in J$. Розв‘язки наведених задач визначають апроксимацію допустимої області паралелепіпедом вигляду

$\Pi_X = \left\{ \begin{matrix} x = (x_1, x_2, ..., x_n) / \\ 0 \le x_j \le x_{j(0)},\ j \in J \end{matrix} \right\}$,

де $\left\{ x_{j(0)},\ j \in J \right\}$- оптимальні розв‘язки введених задач на максимум.

Півпростори $x_j \le \lambda_{j(B)},\ x_j \ge 0,\ j \in J$ будуть містить множину X, що описується (2)-(3). Це вказує на обмеженість множини X та виконання умови $X \subseteq \Pi_{x(B)}$.

Оптимальне значення на $\Pi_{x(B)}$ цільової функції (1) досягається в точках $x_{\Pi(\max)} = (\lambda_{1(B)}, \lambda_{2(B)}, ..., \lambda_{j(B)}, ..., \lambda_{n(B)})$,

$x_{\Pi(\min)} = (0,0,...,0,...,0)$

і набувають, відповідно, значень

$cx_{\Pi(\max)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{j(B)},\ F_{x(B)} = cx_{\Pi(\max)},\ cx_{\Pi(\min)} = 0,\ F_{x(H)} = 0$

які є верхньою та нижньою оцінками за цільовою функцією.

Нехай $d_i = \dfrac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}}$ - відстані гіперплощин обмежень (2) від початку координат $0 \in E^m$, $d = \min\limits_{i\in I} d_i$.

Твердження 2. Множина X_r, що описується співвідношеннями вигляду

$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le d^2$, $x_j \ge 0,\ j \in J$ є внутрішньою апроксимацією множини (2)-(3), тобто $X_r \subseteq X$, оптимальне значення (1) на множині X_r досягає в точці $x_{0(r)} = \left(\underbrace{\frac{d}{\sqrt{n}}, \frac{d}{\sqrt{n}}, ..., \frac{d}{\sqrt{n}}}_{n} \right)$, $cx_{0(r)} = \frac{nd}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}d$.

Доведення. Відстань від точки $x_0 = 0$ простору до гіперплощини можна визначити за формулою $d_i = \frac{|a_i x_0 - b_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}}$. Оскільки, $x_0 = 0, b_i = 1$, то $d_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}}, i \in I$. Точки $0 \in E^n$ та точки сфери радіуса d_i з додатнього ортанту) належать одному півпростору (негативному), тобто для них виконується $a_i x - b_i \le 0, i \in I$. Звідси витікає, що точка $0 \in E^n$ та точки сфери мінімального радіуса $d = \min_{i \in I} d_i$ з додатнього ортанту належать всім півпросторам (негативним), тобто виконується $a_i x - b_i \le 0,\ \forall i \in I$ та умова додатності змінних . Зокрема для точок, що задовольняють умовам $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le d^2$ та $x_j \ge 0,\ j \in J$**.** Це означає, що $X_r \subseteq X$. Для оптимального розв‘язку задачі (1) при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le d^2$ та $x_j \ge 0,\ j \in J$ врахуємо вигляд цільової функції та обмежень $x_{0(r)} = \left(x_{0(r),1}, x_{0(r),1}, ..., x_{0(r),n} \right)$

$$x_{0(r),1} = x_{0(r),1} = ... = x_{0(r),p} = ... = x_{0(r),n},$$

$n \times x_{0(r),p}^2 = d^2,\ x_{0(r),p}^2 = d^2 / n,\ x_{0(r),p} = \sqrt{d^2 / n} = d / \sqrt{n}$. тобто $cx_{0(r)} = \frac{nd}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}d$.

Наслідок 3. Нижня допустима границя значень цільової функції (1) визначається із співвідношення

$$x_{d(H)} = \arg\max \left(cx_{j(H)},\ j \in J,\ 0,\ cx_{0(r)} \right),$$

$$F_{x(H)} = cx_{d(H)} = ma\,x \left(cx_{j(H)},\ j \in J,\ 0,\ cx_{0(r)} \right)$$

Наслідок 4. Множини (області) оптимальних значень задачі (1)-(3) та задачі (1)-(3) з додатковим обмеженням на цільову функцію у вигляді $cx \ge cx_{d(H)} \left(-cx \le -cx_{d(H)} \right)$ співпадають.

Обмеження (стовпці) пасивні (несуттєві) для даної множини будуть неактивними для (1)-(3).

Наслідок 5. Відповідні стовпці двоїстої задачі (стовпці платіжної матриці) будуть неактивними.

Висновок

Врахування структурних властивостей обмежень задачі (2)-(3) дозволяє: побудувати двосторонні оцінки значень змінних та цільової функції (1), локалізувати область належності оптимальних значень, додатково ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження (стовпці), застосувати другу теорему двоїстості (про умови доповнюючої нежорсткості) для виявлення суттєвих та несуттєвих стратегій.

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B., Thapa M.N*. Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997, − 435p.
3. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
4. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 05.04.13

УДК 004.42:510.69

Шкільняк С.С., д. ф.-м. н.

Семантичні властивості логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями

Досліджено семантичні властивості нових класів першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів із композиціями розширеної реномінації. Це дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен. Описано властивості відношення логічного наслідку для множин формул, що є семантичною основою побудови секвенційних числень цих логік.

Ключові слова: логіка, предикат, реномінація, квантор, логічний наслідок.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

S.S. Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.).

Semantic properties of logics of partial predicates with extended renominations

Semantic properties of new classes of first-order composition-nominative logics of partial quasiary predicates with extended renomination composition are investigated. This gives possibility to indicate explicitly the absence of the value of subject variables. Properties of relation of logical consequence for sets of formulas are described. The specified properties are the semantic basis for construction of sequent calculi for such logics.

Key words: logic, predicate, renomination, quantifier, logical consequence.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Розширення сфери застосування математичної логіки в інформатиці й програмуванні зумовило створення різноманітних логічних систем. Такі системи зазвичай базуються на апараті класичної логіки предикатів. Проте класична логіка має принципові обмеження, що робить актуальною проблему побудови нових логічних формалізмів на єдиній для логіки й програмування концептуальній основі. Програмно-орієнтовані логічні формалізми, збудовані на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу, названо композиційно-номінативними логіками (КНЛ). Такі логіки базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Побудовано низку КНЛ (див., напр., [1–4]), що знаходяться на різних рівнях абстрактності й загальності.

Нові класи першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів запропоновано в [5]. Характерною особливістю таких логік є використання композицій розширеної реномінації (перейменування), що дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен. За допомогою розширеної реномінації визначаються композиції розширеної квантифікації (розширені квантори).

Дана стаття є є безпосереднім продовженням роботи [5], її метою є дослідження семантичних властивостей чистих першопорядкових КНЛ з розширеними реномінаціями (ЧКНЛРР). Сформульовано та доведено критерій строго неістотності предметного імені, записаний з використанням розширених кванторів, описано властивості відношення логічного наслідку для множин формул мови ЧКНЛРР. Такі властивості є семантичною основою побудови для ЧКНЛРР числень секвенційного типу.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [1, 2, 5]. Дотримуємось позначень роботи [5].

1. Композиції розширеної реномінації та розширеної квантифікації

Композиції розширеної реномінації для квазіарних предикатів задаємо за допомогою операцій розширеної реномінації для іменних множин.

Нагадаємо, що V-іменна множина (V-ІМ) над A – це однозначна функція $\delta : V \to A$. Тут V і A – множини предметних імен і предметних значень.

V-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$.

Для V-ІМ вводимо [1, 5] операцію ∇ накладки, операції $\|_{-x}$ та $\|_{-X}$ видалення компоненти з іменем $x \in V$ та видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$.

Операцію $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp} : {}^V A \to {}^V A$ розширеної реномінації задамо так:

© С.С. Шкільняк, 2013

$$r^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m}_{x_1,\dots,x_n,\perp,\dots,\perp}(\delta) =$$

$$= \delta\|_{-\{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m\}} + [v_1\mapsto\delta(x_1),\dots,v_n\mapsto\delta(x_n)].$$

Зокрема, $r^x_\perp(\delta) = \delta\|_{-x}$.

Тут $\perp$ – спеціальний символ, який вказує на відсутність значення для відповідного верхнього імені.

Ввівши позначення $\bar y$ для $y_1,\dots,y_n$, будемо також скорочено писати $r^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ замість $r^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m}_{x_1,\dots,x_n,\perp,\dots,\perp}$.

Операція $r^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}$ монотонна:

$$d_1\subseteq d_2 \;\Rightarrow\; r^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(d_1)\subseteq r^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(d_2).$$

V-квазіарним предикатом на A назвемо функцію вигляду $P: {}^VA\to\{T, F\}$.

Тут ${}^VA$ – множина всіх *V*-ІМ над A, $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Область істинності та область хибності предиката $P: {}^VA\to\{T, F\}$ – це множини

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d)\downarrow = T\},$$
$$\boldsymbol{F}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d)\downarrow = F\}.$$

Композицію *розширеної реномінації* (розширену реномінацію) $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ визначаємо так:

$$\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)(d) = P(r^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(d)) \text{ для всіх } d\in {}^VA.$$

Ім'я $x\in V$ строго неістотне для $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u,x}_{\bar y,\perp,\perp}(P)$.

Справді, для всіх $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо:

$$\mathrm{R}^{\bar v,\bar u,x}_{\bar y,\perp,\perp}(P)(d\nabla x\mapsto a) = \mathrm{R}^{\bar v,\bar u,x}_{\bar y,\perp,\perp}(P)(d\|\text{-}x).$$

Властивості композицій $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ аналогічні відповідним властивостям композиції $\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}$ (див. [5]).

Похідні композиції *розширеної квантифікації* (розширені квантори) $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$, які враховують відсутність значення для квантифікованого імені, визначаються так:

$$\exists_\perp xP = \exists xP\vee \mathrm{R}^x_\perp(P);$$
$$\forall_\perp xP = \forall xP\,\&\,\mathrm{R}^x_\perp(P).$$

Із визначення випливає, що для $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ виконуються наступні співвідношення:

$$\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP)\supseteq \boldsymbol{T}(\exists xP);\;\; \boldsymbol{F}(\exists_\perp xP)\subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP);$$
$$\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP)\subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP);\;\; \boldsymbol{F}(\forall_\perp xP)\supseteq \boldsymbol{F}(\forall xP).$$

Композиції $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar y,\perp}$, $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ зберігають [5] еквітонність предикатів.

Для еквітонних предикатів маємо (див. [5]):

1) $\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{F}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P))\subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

2) $\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{T}(R^x_\perp(P))\subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$;

$\boldsymbol{F}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Основні властивості композицій $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ в цілому аналогічні (див. [5]) відповідним властивостям композицій $\exists x$ та $\forall x$. Розглянемо детальніше властивості, пов'язані з неістотністю імен.

Нагадаємо, що ім'я $x\in V$ строго неістотне для *V*-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d\|_{-x})$.

Для довільних $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо:

$$\exists_\perp xP(d\nabla x\mapsto a) = (\exists xP\vee \mathrm{R}^x_\perp(P))(d\nabla x\mapsto a) =$$
$$= (\exists xP\vee \mathrm{R}^x_\perp(P))(d\|_{-x}) = \exists_\perp xP(d\|_{-x});$$
$$\forall_\perp xP(d\nabla x\mapsto a) = (\forall xP\,\&\,\mathrm{R}^x_\perp(P))(d\nabla x\mapsto a) =$$
$$= (\forall xP\,\&\,\mathrm{R}^x_\perp(P))(d\|_{-x}) = \forall_\perp xP(d\|_{-x}).$$

Таким чином, ім'я $x\in V$ строго неістотне для $\exists_\perp xP$ та $\forall_\perp xP$.

Твердження 1. Нехай $x\in V$ строго неістотне для P; тоді $P = \mathrm{R}^x_\perp(P)$.

Якщо x строго неістотне для P то для довільних $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо

$P(d) = P(d\|_{-x}) = \mathrm{R}^x_\perp(P)(d)$. Отже, $P = \mathrm{R}^x_\perp(P)$.

Твердження 2. Нехай $x\in V$ строго неістотне для P; тоді $P = \exists xP$ та $P = \forall xP$.

Припустимо супротивне: $x\in V$ строго неістотне для P, проте $P\neq\exists xP$. Тоді для деякого $d\in {}^VA$ маємо $P(d)\neq\exists xP(d)$. Нехай $\exists xP(d) = T$, тоді $P(d\nabla x\mapsto a) = T$ для деякого $a\in A$. Але x строго неістотне для P, тому $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d)$, звідки $P(d) = T = \exists xP(d)$ – суперечність із $P(d)\neq\exists xP(d)$. Нехай $\exists xP(d) = F$, тоді $P(d\nabla x\mapsto a) = F$ для всіх $a\in A$. Але x строго неістотне для P, тому для кожного $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d)$, звідки $P(d) = F = \exists xP(d)$, що суперечить $P(d)\neq\exists xP(d)$. Нехай $\exists xP(d)\uparrow$, тоді $P(d\nabla x\mapsto a)\uparrow$ принаймі для одного $a\in A$. Але x строго неістотне для P, тому маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d)$, звідки $P(d)\uparrow$ – суперечність із $P(d)\neq\exists xP(d)$.

Подібним чином доводиться, що при x строго неістотному для P маємо $P = \forall xP$

Твердження 3. Якщо ім'я $x\in V$ строго неістотне для P, то $P = \exists_\perp xP$ та $P = \forall_\perp xP$.

Якщо x строго неістотне для P, то в силу твердження 2 маємо $P = \exists xP$ та $P = \forall xP$. Але в силу твердження 1 тоді $P = \mathrm{R}^x_\perp(P)$. Звідси отримуємо $P = \exists xP\vee \mathrm{R}^x_\perp(P) = \exists_\perp xP$ та $P = \forall xP\,\&\,\mathrm{R}^x_\perp(P) = \forall_\perp xP$.

Твердження 4. $P = \exists_\perp xP \Rightarrow x$ строго неістотне для P.

Припустимо супротивне: $P=\exists_{\perp}xP$, проте для деяких $d\in {}^{V}A$ та $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a)\neq P(d\|_{\neg x})$. В силу $P=\exists_{\perp}xP$ тоді маємо $P(d\|_{\neg x})=\exists_{\perp}xP(d\|_{\neg x})=$ $=\exists xP(d\|_{\neg x})\vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)(d\|_{\neg x})$. Водночас $\exists xP(d\|_{\neg x})=$ $=\exists xP(d\nabla x\mapsto a)$ та $\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)(d\|_{\neg x})=\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)(d\nabla x\mapsto a)$, тому отримуємо $\exists xP(d\|_{\neg x})\vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)(d\|_{\neg x})=$ $=\exists xP(d\nabla x\mapsto a)\vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)(d\nabla x\mapsto a)=\exists_{\perp}xP(d\nabla x\mapsto a)=$ $=P(d\nabla x\mapsto a)$. Отже, $P(d\|_{\neg x})=P(d\nabla x\mapsto a)$, що суперечить припущенню..

Звідси отримуємо: $P=\forall_{\perp}xP \Rightarrow \neg P=\neg\forall_{\perp}xP \Rightarrow$ $\Rightarrow \neg P=\exists_{\perp}x\neg P \Rightarrow x$ строго неістотне для $\neg P \Rightarrow$ $\Rightarrow x$ строго неістотне для P. Враховуючи цей факт, із тверджень 3 і 4 дістаємо критерій строго неістотності предметного імені, записаний з використанням розширених кванторів:

Теорема 1. $P=\exists_{\perp}xP \Leftrightarrow x$ строго неістотне для $P \Leftrightarrow P=\forall_{\perp}xP$.

Мова ЧКНЛ з розширеними реномінаціями. ЧКНЛ з розширеними реномінаціями (ЧКНЛРР) можна трактувати як підрівень ЧКНЛ.

З формального погляду мова ЧКНЛРР відрізняється лише дещо відмінними параметрами (парами імен) символів реномінації (нижнім іменем може бути спеціальний символ $\perp$). Визначення формули та відображення інтерпретації задаються аналогічно випадку традиційних ЧКНЛ. Те саме стосується визначень істинної (неспростовної) формули, виконуваної формули, тавтології, відношень тавтологічного наслідку, логічного наслідку, слабкого логічного наслідку, тавтологічної еквівалентності, логічної еквівалентності, строгої логічної еквівалентності. Для ЧКНЛРР справджується теорема еквівалентності, вона теж формулюється (див. [5]) у двох формах – для відношення ~ та відношення $\sim_{TF}$.

Для семантичних моделей ЧКНЛРР, як і для семантичних моделей ЧКНЛ, маємо умову наявності нескінченної множини V_T тотально строго неістотних [3, 4] імен.

Специфічні властивості формул ЧКНЛРР пов'язані з композиціями розширеної реномінації та квантифікації, вони відображають відповідні властивості цих композицій. Такі властивості описано в [5], а в даній роботі далі зосередимося на властивостях відношення логічного наслідку для множин формул мови ЧКНЛРР.

2. Відношення логічного наслідку для множин формул

Нехай $\Gamma\subseteq Fr$ та $\Delta\subseteq Fr$ – множини формул.

Δ є логічним наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma_A|=\Delta$), якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma}T(\Phi_A)\cap\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta}F(\Psi_A)=\varnothing$.

Δ є логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma|=\Delta$), якщо $\Gamma_A|=\Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Теорема 2 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi\sim_{TF}\Psi$. Тоді:

$\Phi,\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow \Psi,\Gamma|=\Delta$ та $\Gamma|=\Delta,\Phi \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta,\Psi$.

Наведемо основні властивості відношення $|=$ для множин формул ЧКНЛРР. Властивості пропозиційного рівня такі ж, як і для ЧКНЛ:

C) Якщо $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$, то $\Gamma|=\Delta$.

U) Нехай $\Gamma\subseteq\Lambda$ та $\Delta\subseteq\Sigma$, тоді $\Gamma|=\Delta \Rightarrow \Lambda|=\Sigma$.

$\neg_{|-}$) $\neg\Phi,\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta,\Phi$;

$\neg_{-|}$) $\Gamma|=\Delta,\neg\Phi \Leftrightarrow \Phi,\Gamma|=\Delta$;

$\vee_{|-}$) $\Phi\vee\Psi,\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow \Phi,\Gamma|=\Delta$ та $\Psi,\Gamma|=\Delta$;

$\vee_{-|}$) $\Gamma|=\Delta,\Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta,\Phi,\Psi$.

Наведені нижче властивості індуковані відповідними однойменними властивостями композицій роширеної реномінації із використанням теореми заміни еквівалентних. Від аналогічних властивостей відношення $|=$ для множин формул ЧКНЛ вони відрізняються лише використанням символів $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ замість символів $R^{\bar v}_{\bar x}$.

Зліва від символа $\Leftrightarrow$ у записі такої властивості – виділена формула, справа – її спрощення.

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}_{|-}$) $R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Gamma|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}_{-|}$) $\Gamma|=\Delta,R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta,R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)$;

$\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{|-}$) $R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Gamma|=\Delta$;

$\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{-|}$) $\Gamma|=\Delta,R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta,R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)$.

Для $\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{|-}$ та $\Phi_{\perp}\mathrm{N}_{-|}$ умова $y\in\nu(\Phi)$.

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}_{|-}$) $R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)),\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ{}^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)),\Gamma|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}_{-|}$) $\Gamma|=\Delta,R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma|=\Delta,R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ{}^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi))$;

$\mathrm{R}_{\perp}\neg_{|-}$) $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi),\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Gamma|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\neg_{-|}$) $\Gamma|=\Delta,R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta,\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)$;

$\mathrm{R}_{\perp}\vee_{|-}$) $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi),\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi),\Gamma|=\Delta$;

$\mathrm{R}_{\perp}\vee_{-|}$) $\Gamma|=\Delta,R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\Gamma|=\Delta,R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi)$;

$\mathrm{R}_{\perp}\exists\mathrm{R}_{|-}$) $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists x\Phi),\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\Gamma|=\Delta$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists x\Phi),\Gamma|=\Delta \Leftrightarrow R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi),\Gamma|=\Delta$;

$R_{\perp}\exists R_{\dashv})\ \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$.

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$.

Властивості типу $R_{\perp}\exists R$ можна узагальнити для розширених кванторів:

$R_{\perp}\exists_{\perp}R_{\dashv})\ R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists_{\perp} x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp} x\Phi), \Gamma \models \Delta$ та

$R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists_{\perp} x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp} x\Phi), \Gamma \models \Delta.$

$R_{\perp}\exists_{\perp}R_{\dashv})\ \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists_{\perp} x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp} x\Phi)$ та

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists_{\perp} x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_{\perp} x\Phi).$

Для властивостей типу $R_{\perp}\exists R$ та $R_{\perp}\exists_{\perp}R$ неявно маємо умову $x \notin \{\bar{u}, \bar{w}\}$, яка випливає з визначення композицій реномінації $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}$.

Для опису властивостей, пов'язаних з елімінацією кванторів, використаємо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z.

Предикати-індикатори εz задаємо [4, 6] так:

$\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \notin asn(d)\};$

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \in asn(d)\}.$

Теорема 3. Для ЧКНЛРР справджуються наступні співвідношення:

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP))$ (TR$_{\perp}\exists$R)

$\boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P))$ (FR$_{\perp}\exists$R)

Доведення. Доводимо TR$_{\perp}\exists$R. Нехай $d \in \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z)$, тоді $d(z)\downarrow$ та $\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)(d) = T$, звідки $d(z)\downarrow a$ для деякого $a \in A$ та $P(d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto d(z)) = T$. Отже, $P(d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A$, звідки $(\exists xP)(d(r^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(d)) = T$, тому отримуємо $\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)(d) = T$, що дає $d \in \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP))$. Отже, $\boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP))$.

Доводимо співвідношення FR$_{\perp}\exists$R. Нехай $d \in \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z)$, тоді маємо $d(z)\downarrow$ та $\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)(d) = F$. Із останнього отримуємо $(\exists xP)(d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w}\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v})) = F$, тому для всіх $b \in A$ маємо $P(d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto b) = F$. Згідно з $d(z)\downarrow$ маємо $d(z)\downarrow a$ для деякого $a \in A$, тоді $P(d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto d(z)) = F$, звідки $\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P)(d) = F$, що дає $d \in \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P))$. Таким чином, $\boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z) \subseteq \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(P))$.

Із використанням теореми 3 отримуємо властивості елімінації кванторів під реномінацією.

$\exists\mathbf{R}_{\perp\dashv}$) За умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi))$ маємо:

$R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z.$

Доводимо $\Rightarrow$) Нехай $R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$, тоді $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) = \varnothing$.

Згідно теореми 3 маємо $\boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$.

Отже, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$.

Доводимо $\Leftarrow$) Нехай $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$, звідси $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$. Покажемо, що $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) = \varnothing$, звідки випливає $R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$.

Припустимо супротивне:

$\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$ та існує d таке: $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)$.

Маємо $d \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$, $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $d \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із умови $d \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$ тоді маємо $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w}\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi_A)$, звідки для деякого $a \in A$ маємо $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Але $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi))$ та $z \in V_T$, тому $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x,z\}} + \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із першого отримуємо $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz маємо $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, тому $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, що суперечить припущенню $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap (R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$.

$\exists\mathbf{R}_{\perp}\mathbf{f}_{\dashv}$) За умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi))$ маємо:

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\ R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi), \varepsilon z.$

Доводимо $\Rightarrow$) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, то згідно U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)$, εz.

Доводимо $\Leftarrow$) Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)$, εz, водночас маємо $\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$. Із останнього маємо, що існує $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$. Тоді $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$ та $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$.

Із умови $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$ маємо $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w}\}} +\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$, звідки для всіх $a \in A$ маємо $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} +\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$

Але $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi))$ та z тотально строго неістотне, тому для всіх $a \in A$ отримуємо:

$d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$,

$d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$ та

$d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x,z\}} +\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

Із останнього маємо

$d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz тоді $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in F(\varepsilon z_A)$, тому для всіх $a \in A$ маємо $d\,\|_{-z} + z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap$ $\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$. Це суперечить припущенню $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi)$, εz.

$\exists \mathbf{R}_\perp \mathbf{v}_{\dashv}$) За умови $x \notin \{\bar{u}, \bar{w}\}$ маємо:

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)$, εy.

Доводимо $\Rightarrow$) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \varepsilon y$, то згідно U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)$, εy.

Доводимо $\Leftarrow$) Згідно теореми 3 маємо $\boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)_A) \cap$ $\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)$. Отже, з умови $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap$ $\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) = \varnothing$ випливає $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) = \varnothing$, тобто $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)$, $\varepsilon y \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi), \varepsilon y$.

$\exists \mathbf{R}_\perp \mathbf{d}_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)$, εy.

Доводимо $\Rightarrow$) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, то згідно U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)$, εy та $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$.

Доводимо $\Leftarrow$) Припустимо супротивне: $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)$, εy, проте $\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$. Тоді маємо $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \neq \varnothing$, звідки існує d таке, що $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$.

Можливі 2 випадки: $d(y)\uparrow$ та $d(y)\downarrow$.

Якщо $d(y)\uparrow$, то $d \in T(\varepsilon y)$, звідки $d \in \boldsymbol{T}(\varepsilon y) \cap \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$, що суперечить умові $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$.

Якщо $d(y)\downarrow$, то $d \in \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$; нехай $d(y) = a$.

Із умови $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A)$ тоді отримуємо $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w}\}} +\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$. Звідси маємо $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} +\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto b \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$ для всіх $b \in A$, зокрема, $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} +\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, тому $d\,\|_{-\{\bar{u},\bar{w},x\}} +\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) + x \mapsto d(y) \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, звідки $d \in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)_A)$. Отже, $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap$ $\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, що суперечить $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi)$, εy.

Окремими випадками властивостей $\exists R_{\perp|\dashv}$, $\exists R_\perp f_{\dashv}$, $\exists R_\perp v_{\dashv}$, $\exists R_\perp d_{\dashv}$ є відомі [4] властивості елімінації кванторів $\exists_{\vdash}$, $\exists f_{\dashv}$, $\exists v_{\dashv}$, $\exists d_{\dashv}$.

Секвенційні числення ЧКНЛРР. Властивості відношення логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови числень секвенційного типу для ЧКНЛРР. Назвемо їх $Q_\perp SC$-численнями.

Базовими секвенційними формами числення $Q_\perp SC$ є $\vdash R_\perp T$, $\dashv R_\perp T$, $\vdash \Phi_\perp N$, $\vdash \Phi_\perp N$, $\vdash R_\perp \exists R$, $\dashv R_\perp \exists R$, $\vdash R \exists p$, $\dashv R \exists p$, $\vdash \neg$, $\dashv \neg$, $\vdash \vee$, $\dashv \vee$, $\vdash R_\perp R$, $\dashv R_\perp R$, $\vdash R_\perp \neg$, $\dashv R_\perp \neg$, $\vdash R_\perp \vee$, $\dashv R_\perp \vee$, $\vdash \exists$, $\vdash \exists R_\perp$, $\dashv \exists f$, $\dashv \exists R_\perp f$, $\dashv \exists v$, $\dashv \exists R_\perp v$, $\dashv \exists d$, $\dashv \exists R_\perp d$.

Форми $\vdash R \exists p$, $\dashv R \exists p$, $\vdash \neg$, $\dashv \neg$, $\vdash \vee$, $\dashv \vee$, $\vdash \exists$, $\dashv \exists f$, $\dashv \exists v$, $\dashv \exists d$ такі ж, як для QSC-числень (див. [4]).

Форми $\vdash R_\perp T$, $\dashv R_\perp T$, $\vdash \Phi_\perp N$, $\vdash \Phi_\perp N$, $\vdash R_\perp \exists R$, $\dashv R_\perp \exists R$, $\vdash R_\perp R$, $\dashv R_\perp R$, $\vdash R_\perp \neg$, $\dashv R_\perp \neg$, $\vdash R_\perp \vee$, $\dashv R_\perp \vee$, $\vdash \exists R_\perp$, $\dashv \exists R_\perp f$, $\dashv \exists R_\perp v$, $\dashv \exists R_\perp d$ відрізняються від відповідних форм числення QSC лише наявністю розширених реномінацій.

Наведемо тут зазначені форми з розширеними реномінаціями.

$$\vdash\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}\ \frac{\vdash R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\vdash R^{z,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma};\qquad \dashv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{T}\ \frac{\dashv R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\dashv R^{z,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma};$$

$$\vdash\Phi_{\perp}\mathrm{N}\ \frac{\vdash R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\vdash R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma},\qquad \dashv\Phi_{\perp}\mathrm{N}\ \frac{\dashv R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\dashv R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma},$$

де $y\in\nu(\Phi)$;

$$\vdash\mathrm{R}_{\perp}\exists\mathrm{R}\ \frac{\vdash R^{\bar{z},\bar{u}}_{\bar{v},\perp}(\exists xA),\Sigma}{\vdash R^{\bar{z},\bar{u},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists xA),\Sigma};\qquad \dashv\mathrm{R}_{\perp}\exists\mathrm{R}\ \frac{\dashv R^{\bar{z},\bar{u}}_{\bar{v},\perp}(\exists xA),\Sigma}{\dashv R^{\bar{z},\bar{u},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$\vdash\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{\vdash R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}\circ^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\vdash R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(R^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)),\Sigma};\qquad \dashv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{\dashv R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}\circ^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\dashv R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(R^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)),\Sigma};$$

$$\vdash\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{\vdash\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\vdash R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\neg\Phi),\Sigma};\qquad \dashv\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{\dashv\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\Sigma}{\dashv R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\neg\Phi),\Sigma};$$

$$\vdash\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{\vdash R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)\vee R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi),\Sigma}{\vdash R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};$$

$$\dashv\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{\dashv R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)\vee R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi),\Sigma}{\dashv R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};$$

$$\vdash\exists\mathrm{R}_{\perp}\ \frac{\vdash R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\Sigma},$$

де $z\in V_T$, $z\notin nm(\boldsymbol{\Sigma}, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$;

$$\dashv\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{f}\ \frac{\dashv R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\ \dashv R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,z}(\Phi),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\Sigma},$$

де $z\in V_T$, $z\notin nm(\boldsymbol{\Sigma}, R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$;

$$\dashv\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{v}\ \frac{\dashv R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\ \dashv R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}.$$

Секвенційна форма $\dashv\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{d}$ має такий вигляд:

$$\frac{\vdash\varepsilon y,\ \dashv R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\Sigma\qquad \dashv R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\ \dashv R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\Phi),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi),\Sigma}.$$

Можна додатково ввести похідні секвенційні форми, де фігурують похідні композиції розширеної квантифікації. Наприклад, враховуючи, що $\exists_{\perp}x\Phi$ – це скорочення для $\exists x\Phi\vee\mathrm{R}^{x}_{\perp}(\Phi)$, отримуємо форму елімінації розширеного квантора

$$\vdash\exists_{\perp}\ \frac{\vdash R^{x}_{z}(\Phi),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma\qquad \vdash R^{x}_{\perp}(\Phi),\Sigma}{\vdash\exists_{\perp}x\Phi,\Sigma}.$$

Дослідження секвенційних числень ЧКНЛРР буде продовжене в наступних роботах.

Висновки

В роботі досліджено семантичні властивості нових класів першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних квазіарних предикатів. Характерною особливістю цих логік є використання композицій розширеної реномінації та розширеної квантифікації. Це дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен, тобто вилучати з вхідних даних компоненти з певними іменами. Сформульовано та доведено критерій строго неістотності предметного імені, записаний з використанням розширених кванторів. Описано властивості відношення логічного наслідку для множин формул, що є семантичною основою побудови для таких логік числень секвенційного типу. Секвенційні форми цих числень, в яких фігурують композиції розширеної реномінації, наведено в роботі.

Проведене дослідження планується продовжити в плані побудови логік часткових неоднозначних предикатів із композиціями розширеної реномінації та розширеної квантифікації.

Список використаних джерел

1. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
2. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* First-Order Composition-Nominative Logics // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – №4. – P. 176–185 (in Ukrainian).
3. *Shkilniak S.S.* First-Order Logics of Quasi-ary Predicates // Cybernetics and Systems Analysis. – 2010. – №6. – P. 32–49 (in Russian).
4. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Special Sequent Calculi of Pure First-order Composition-nominative Logics// Visnyk, Ser. Kibernetyka, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – V. 12. – P. 38–45 (in Ukrainian).
5. *Nikitchenko M.S., Shkilniak O.S., Shkilniak S.S.* Logics of partial predicates with extended renominations and quantifier // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – №2. – P. 210–215 (in Ukrainian).
6. *Nikitchenko M., Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347. – P. 89–110.

Надійшла до редколегії 28.03.2013

РАДІОФІЗИКА

UDC 546.26+539.24:621.315.59:519.17

O. M. Ivaniuta, Ph.D.

Features cells based on modifying carbon nanotubes.

In this paper I reviewed the process of designing structures for the formation of integrated elements based on carbon nanotubes. I measured the response of such structures that are based on different types of nanotubes for toxic substances.

Key Words: spectroscopy, modification carbon nanotube, band gap, conductivity.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: iva@univ.kiev.au.

Іванюта О.М., к.ф.-м.н.

Особливості елементів на основі модифікованих вуглецевих нанотрубок.

У роботі я розглянув процес конструювання інтегральних структур для формування елементів на основі вуглецевих нанотрубок. Була виміряна реакція подібних структур, створених на основі різних типів нанотрубок для токсичних речовин.

Ключові слова: спектроскопія, модифікована вуглецева нанотрубка, заборонена зона, провідність.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: iva@univ.kiev.au.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Modification carbon nanotubes (MCNT) are unique carbon supramolecules show a remarkable electrical properties that could potentially find wide application in various fields of science and engineering applications. In general, the MCNT are rolled into a seamless cylinder graphene sheet plane (the plane of the hexagonally arranged carbon atoms) is illustrated in Fig 1 [1, 3].

MCNT properties can be used in various devices, such as integrated molecular electronics elements. These devices can be used in various functional applications: such as physical, chemical and biological sensors in security devices and control of the environment, health and clinical diagnostics, biotechnology for gene mapping and detection of drugs. In particular, MCNT taking into account environmental and political situation in the world today, detecting the presence of toxic substances in the environment is a prerequisite for both personal safety and the prevention of mass releases of hazardous substances. Thus, the need to develop improved prototypes of chemical sensors that provide early and rapid detection and prevention of dangerous situations for humans. [1, 3].

The distinctive characteristics of sensors MCNT are fast response, high sensitivity with a high signal transducer response, high selectivity, large dynamic range, reusable regeneration, the simultaneous detection and identification of maximum possible number of substances, low temperature operation, small size combined with ease of use. The achievement of these characteristics is a relatively time-consuming task for traditional touch application requires a trained work environment. For example, conventional electronic sensors provide advanced functionality at temperatures above 300°C, and the resistive response is not sufficient to provide the desired level of molecular detection. [1, 2].

In the manufacture of MCNT is the most common method of thermal spraying graphite electrodes in plasma arc. This is an intensive thermal evaporation of the anode to the cathode end surface to form a precipitate, which formed MCNT. The maximum number MCNT with a length of 40 microns formed when the plasma current is minimal, and its density is about 100 A/cm^2. They grow on a flat surface perpendicular to the cathode side of the building and self-assembled into bundles diameter 50 microns. Also has a MCNT capillary property. To open MCNT, it is necessary to remove the upper part - the cap. One way is to remove the MCNT annealing at a temperature of 8500°C for several hours in a stream of carbon dioxide. As a result of oxidation of about 10 % of MCNT are open. Another way to end the destruction of closed MCNT - excerpt
in concentrated nitric acid for 5 hours at 2500°C. As a result of this treatment, 80 % of the MCNT is open [1].

The presence of cylindrical cavity inside MCNT can implement various elements, including lawn metals. In all these cases should proceed with new material and yet experimentally studied properties.

© О.М. Іванюта, 2013

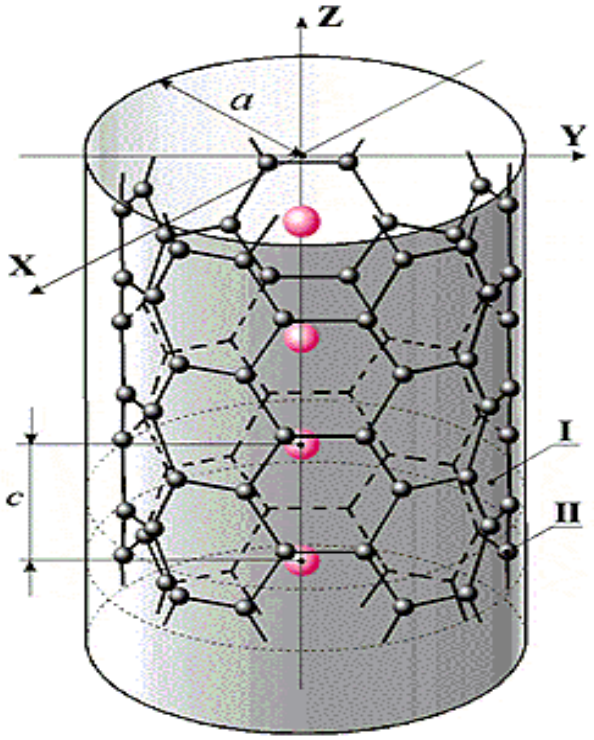


Fig. 1. Alloy metal carbon nanotube inside a cylindrical potential barrier (MCNT). I - constant area interatomic potential, II - Region atomic potential. [1].

For example, when converting electrical oscillations into mechanical vibrations necessary to excite the MCNT under an electric field to fix one of the two electrodes at an angle to the other electrode. When applying voltage to the electrodes and the tube is charged by the electrostatic attraction is diverted to the second electrode. When applying voltage to the electrodes and the tube is charged by the electrostatic attraction is diverted to the second electrode. If the electrodes apply a variable voltage, whose frequency coincides with the frequency of natural oscillations of MCNT, depending on its thickness and length, any mechanical vibrations of MCNT. Spectroscopic methods of determining the frequency of natural oscillations and attach it to the sample, we can determine the frequency of oscillation loaded MCNT. This frequency will be less than the free vibration frequency MCNT because of increased weight and stiffness remained unchanged [1, 2].

Calculations metallic MCNT require the development of new quantum chemical method (method associated linearized cylindrical waves). In this method made the assumption that the system is inserted into the impenetrable cylindrical potential barrier, where atom in a spherically symmetric potential *E* (practically coincides with atomic), and interatomic space constant (Fig. 1). Then the electronic spectrum of the system is determined by the free movement of electrons in the interatomic space and nuclear scattering centers [1].

MCNT with different indices (n, m) - are polymers of different structure, so they must have different electrical properties. Dependence of the electrical properties MCNT geometrical parameters were predicted on the basis of quantum-chemical calculations of the band structure. Introduction metals in MCNT leads to a sharp increase in conductivity as semiconductor MCNT due to the appearance in the bandgap electronic states of the metal and metal by increasing the density of states near the Fermi level. Introduction to these metals with the formation of structures of the type that is shown in Fig. 1 leads to the formation of the metal band structure of the system. Introduction metals in nanotubes leads to a sharp increase in conductivity. If one half of semiconductor MCNT filled with metal, and the other left intact, will again molecular heterojunction metal-semiconductor on which you can build nanodiodes and other elements that can operate over a wide temperature range. Stoichiometric control and p-electronic interactions in the calculation of the total energy of the modified MCNT showed that the joining of atoms on the outside MCNT profitable than domestic. In this case, the atoms must first join to the open ends of MCNT, and then align along of creating. In MCNT F - (n, n) and F - (n, 0) is quite long, so you can ignore the final effect of the latter type of mount would be a major. By adding metal to the outer surface of the varies mesh p - contacts, so – electrical and other physical properties. Therefore, all the MCNT F - (n, n) - semimetals in which the edge of the Brillouin zone and there is no gap, because all nanotubes (n, n) metal, half MCNT are molecular heterojunction metal-semimetal, regardless of their diameter. According to calculations, the crack gap in nanotube type F - (n, 0) vanishes if the (n + 1) three fold (Fig. 2). In other cases, modified tube - Semiconductor. As in the original, pure carbon nanotubes (n, 0), the Fermi surface is absent if n multiple of three, then the half-modified nanotubes (n, 0) will, depending on the diameter, to form heterojunction types. If (n - 1) three fold ($n = 3\ell + 1$, $\ell = 1, 2.$) It will heterojunction semiconductor-semiconductor, and gap width of the slit in the MCNT is approximately two times less than in the initial (Fig. 2). For other values of n heterojunction formed metal-semiconductor, but n, three f old, corresponding unmodified metal end of MCNT, and when $n = 3\ell + 2$ - modified. In Fig. 3 shows the

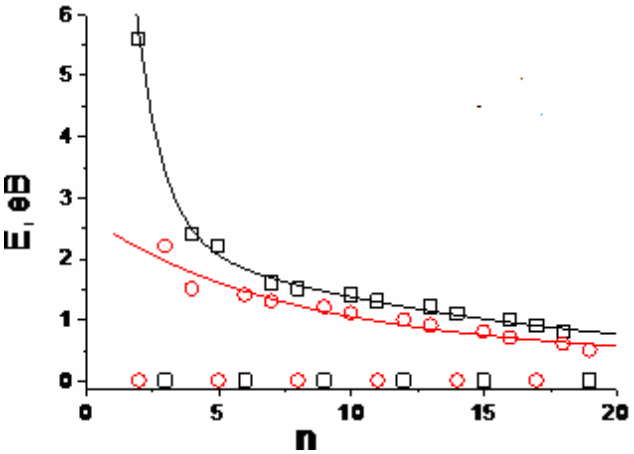


Fig. 2. The dependence of the energy gap for the initial and MCNT of type (n, 0) on the parameter of diameter n. □- with modification, ○ - without modification [1].

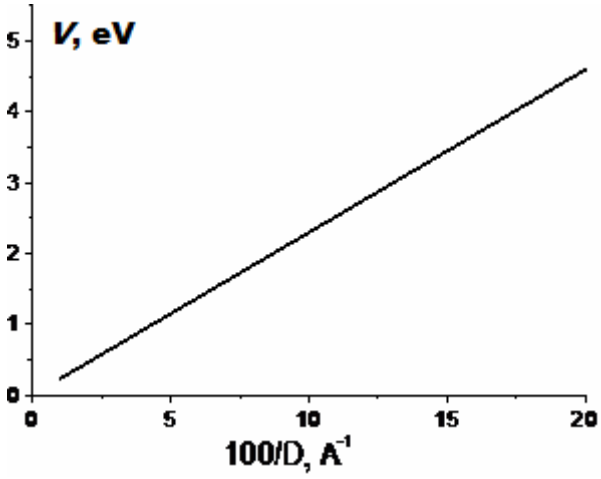


Fig. 3. The dependence of the band gap of the inverse MCNT diameter.

dependence of the width of the gap semiconductor nanotube diameter on their feedback, which shows that increasing the diameter of the tube gap decreases. To study the electronic structure MCNT used scanning tunneling microscopy (STM) using the local electron spectroscopy. Hence, the position of the probe was fixed MCNT and recorded the dependence of the tunneling current on the voltage *U*, applied between the tip and MCNT. I find thus conductance $G = I / U$ is directly related to the local density of electronic states, which is a measure of how close the energy levels are to each other.

MCNT are exceptionally durable material as stretching and bending. Moreover, under mechanical stress, which exceeds the critical, nanotubes do not "rush" and rebuilt [1, 3]. Due to the small size of the nanotubes was only directly measure their electrical resistivity four probe method (Fig. 5). On the polished surface of sapphire in a vacuum deposited gold stripes. Between them sprayed MCNT length 2÷3 mm. Then one of the selected measuring 4 MCNT deposited tungsten wire thickness of 50 nm. Each tungsten wires had contact with one of the gold bars. The distance between the contacts to the MCNT ranged from 0,1 to 0,6 microns. The results of direct measurements showed that the resistivity of MCNT can vary considerable range - from $5{,}1*10^{-6}$ to 0,8 Ohm/cm. Minimum order of magnitude lower resistance than graphite. Most of the MCNT has metallic conductivity and smaller shows properties of the semiconductor band gap from 0,1 to 0,3 eV. Features of the charge transfer in MCNT significantly different from those of the conventional conductors and probably due to one-dimensional character of the charge transfer [1, 3].

Creating semiconductor heterostructures, ie structures of metal / semiconductor junction or two different semiconductors can be used in nanoelectronics. During nanotube growth it creates structural defects (replacement of a carbon hexagons and pentagons heptagon (see Fig. 1, 4). Then one part MCNT is metallic and the other - a semiconductor. In Fig. 5 and Fig. 6 STM measurements show - spectroscopy as depending normalized differential conductance (dI/dV)/(I/V) of applied between MCNT and the probe voltage V. To the left of the spectrum (dI/dV) / (I/V) = 1 in a wide range of V, which means the performance of Ohm's law. With energy gap in the story. It is located in the energy region corresponding to small increments of power. Width of the field voltage is a measure of the value gap. For semiconductor indications on the left graph, it is 0,7 eV.

With a large voltage V observed sharp peaks in the density of states characterizing the low

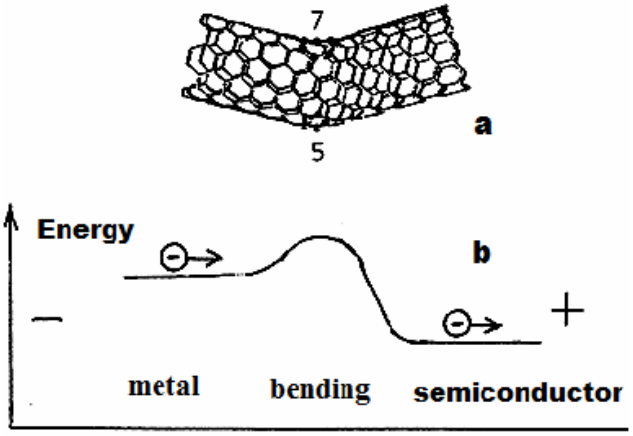


Fig. 4. Effect of pentagon-heptagon defect on the nanotube geometry (a) and the energy of moving electrons (b) [2].

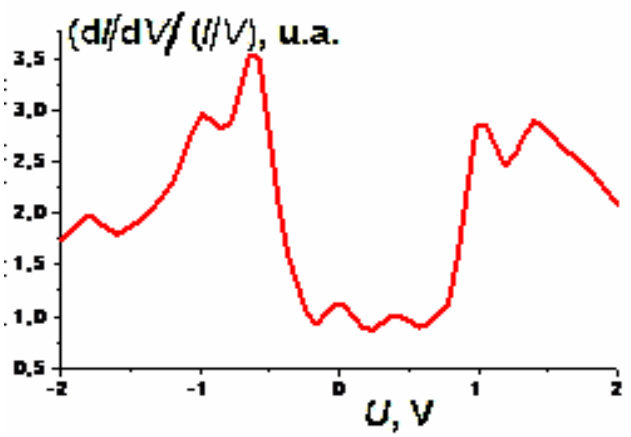


Fig. 5. The results of STM spectroscopy as depending normalized differential conductance (dI / dV) / (I / V) of applied between the tube and the probe voltage V for a metal MCNT.

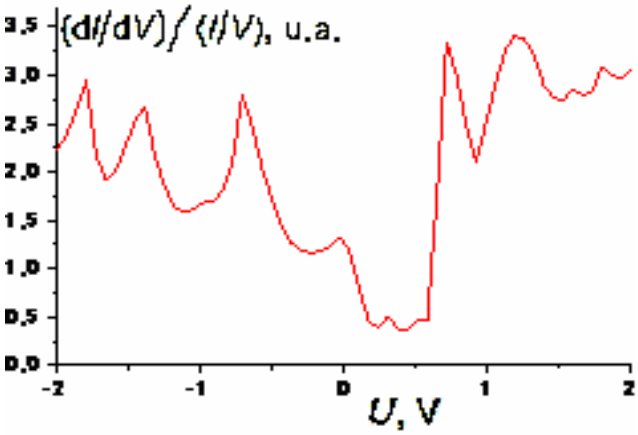


Fig. 6. The results of STM spectroscopy as depending normalized differential conductance (dI/dV) / (I/V) of applied between the tube and the probe voltage V for a semiconductors MCNT.

conductivity material dimension. Spears appeared on the bottom shelf and set subzones. If electrons in quantum theory can be regarded as a wave. then the wavelength of the electron does not fit an integer times the circumference tube is interfering with itself with dissipation, so that allowed only those wavelengths of electrons that fit an integer number of times around the perimeter MCNT. This greatly limits the number of states eligible for conductivity around the cylinder. The dominant conduction direction is the direction along the tube, which makes functional MCNT -dimensional quantum wire. Electronic states MCNT do not form a continuous broad energy band, and split into one-dimensional subband (see Fig. 5). Such states can be modeled quantum well as well with a depth equal to the length MCNT [1].

Transport of electrons on single-walled MCNT is determined by the quantum size effect. For metal nanotube, which lies between two metal electrodes can be seen especially in the form of steps to bios characteristic (see Fig. 6). Steps appear at a voltage that depends on the voltage applied to the third electrode electrostatically associated with the nanotubes. It resembles the construction of FET on MCNT. Steps to CVC is the result of electron and resonant tunneling through individual molecular orbitals. Electronic transfer is blocked at low voltages. With the gradual increase of the gate voltage, electrons alone can penetrate MCNT.

Electron transfer in the tube occurs through tunneling between discrete electronic states. Changing the current at each step (see Fig. 5, 6) associated with the addition of one molecular orbital. This means that the electrons in MCNT is highly localized, and located at a distance along the tube. The usual presence of a defect in the system is one-dimensional localization of electrons, but a defect in MCNT does not lead to localization, because its effect is averaged around the perimeter of the tube. This is due to toroidal shape of the wave function. In the metallic state conductivity of MCNT is very high, MCNT can pass very large currents without significant heating. One reason for the high conductivity MCNT is very small defects that cause electron scattering and thus a very low resistance.

References

1. *Scharff P., Tsamis C., Ivanyuta O. add. all,* DNA, DNA / metal nanoparticles, DNA / nanocarbon and macrocyclic metal complex/fullerene molecular building blocks for nanosystems: electronics and sensing //In Book Frontiers of multifunctional integrated nanosystems, Eds: E. Buzaneva and P. Scharff, NATO Science Series II, Mathematics, Physics and Chemistry – NAII, V 152, Kluwer Akademic Publishers, Dordrecht, - 2004.- P. 251-276
2. Daraio C., *Raney J.R., Craig A.C.*, Effect of density variation and non-covalent functionalization on the compressive behavior of carbon nanotube arrays // Nanotechnology.- 2011. -**22**- P. 425705-425710.
3. *Misra A., Raney J.R., Craig A.C. add all,* Synthesis and characterization of carbon nanotube-polymer multilayer structures. // *ACS Nano.*- **5**(3) - P. 2237-2245

Надійшла до редколегії 7.05.13

УДК 535.3:681:7

Данько В.П.[1], пров. інж.
Поданчук Д.В.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.,
Піденко С.С.[1], студент

Визначення аберацій короткофокусних лінз сенсором Шека-Хартмана

Експериментально досліджено метод вимірювання аберацій короткофокусних лінз, який грунтується на використанні точкового джерела світла та сенсора Шека-Хартмана з масштабуючою оптичною системою. Проведена оцінка достовірності отриманих результатів та виміряні сферичні аберації короткофокусних лінз.
Ключові слова: сенсор Шека-Хартмана, аберації, короткофокусна лінза.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, радіофізичний факультет, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13
e-mail: wlad@univ.kiev.ua.

V. P. Dan'ko[1], adv. engineer,
D. V. Podanchuk[1], Ph.D., senior staff scientist
S. S. Pidenko[1], student

The measurement of short-focus lens aberrations by Shack-Hartman sensor

The method of measuring aberrations of short-focus lenses, which is based on the use of a point light source and Shack-Hartman sensor with scaling optical system, was experimentally investigated. The evaluation of the reliability of the obtained results was performed and the short-focus lens spherical aberrations were measured.
Key Words: Shack-Hartmann sensor, aberrations, short-focus lens.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Radiophysics, 64/13, Volodymyrska st., Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: wlad@univ.kiev.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Данилов В.В.

Останні роки характеризуються розповсюдженням методів вимірювання фази оптичного хвильового фронту, відомих з адаптивної оптики та астрономії, в інші галузі науки та техніки [1]. Зокрема, відомі застосування сенсорів Шека-Хартмана для дослідження спотворень хвильового фронту в передавальній оптиці [2], контролю якості оптичних елементів та приладів [3], дослідження хвильових фронтів зі значними аберраціями [4]. Сенсор Шека-Хартмана застосовується також для дослідження поверхонь [5]. Проте він має недолік, який обмежує його застосування: чим більша фокусна відстань матриці мікролінз, тим вища чутливість сенсора, але тим менший максимальний кут локального нахилу хвильового фронту, який можна виміряти [6]. Ці властивості сенсора Шека-Хартмана зумовлюють ускладнення алгоритмів вимірювань значних аберацій хвильового фронту, в тому числі і при визначенні параметрів короткофокусних лінз та об'єктивів. Такі лінзи утворюють хвильовий фронт зі значною кривизною, що приводить до необхідності використання в сенсорі матриць мікролінз з малою фокусною відстанню. Але аберації правильно спроектованої та виготовленої лінзи можуть бути досить малі, що вимагатиме збільшення кутової чутливості сенсора а отже і фокусної відстані матриці. Один з шляхів вирішення цього протиріччя був запропонований в [4] для визначення кривизни відбиваючих поверхонь. Для компенсації надмірної кривизни поверхня освітлювалася розбіжною сферичною хвилею від вторинного джерела світла, а відбитий хвильовий фронт аналізувався сенсором Шека-Хартмана.

В даній роботі розглядається модифікація цього методу для визначення аберацій короткофокусних лінз малого діаметру. Ідея методу полягає в застосуванні точкового джерела світла для компенсації оптичної сили лінз та масштабуючої оптичної системи, яка служить для узгодження досліджуваної апертури з розміром фотоприймача в сенсорі.

Оптична схема установки

Оптична схема установки для вимірювання аберацій короткофокусних лінз зображена на рис. 1. В установці використовується плоский розширений пучок He-Ne лазера (λ=632,8 нм). Точкове джерело утворене об'єктивом 1 та точковою діафрагмою 2 діаметром 2 мкм. За

© В.П.Данько, Д.В.Поданчук, С.С.Піденко 2013

діафрагмою 2 розповсюджується розбіжна сферична хвиля. Після проходження через досліджувану лінзу 3, яка розміщена на фокусній відстані від точкового джерела, сферична хвиля перетворюється на квазіплоску, в якій відсутнє дефокусування, але присутні інші аберації, внесені лінзою. Сенсор Шека-Хартмана складається з матриці мікролінз 6 з фокусною відстанню F=24 мм і розміром елементарної лінзи 0,4×0,4 мм та ПЗЗ-камери 7 з розміром піксела 6,45×6,45 μ та робочим полем 1024×1024 пікселі.

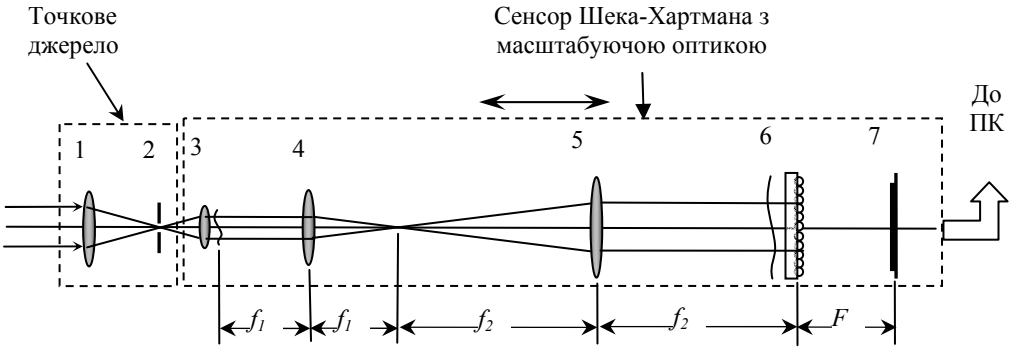


Рис. 1 – Оптична схема установки для вимірювання аберацій короткофокусних лінз: 1, 4, 5 - об'єктиви; 2 - точкова діафрагма 2 μ; 3 - досліджувана лінза; 6 - матриця мікролінз; 7 - ПЗЗ камера. f_2/f_1 = 2.143; F=24 мм

Хвильовий фронт, утворений лінзою 3, проектується на сенсор Шека-Хартмана за допомогою масштабуючої оптичної системи 4, 5 з коефіцієнтом збільшення 2,143. Масштабуюча система служить також для узгодження досліджуваної апертури лінзи 3 з розміром матриці в ПЗЗ-камері 7. Сенсор Шека-Хартмана, масштабуюча оптична система та тримач досліджуваної лінзи утворюють єдину конструкцію, яка може рухатися вздовж оптичної осі системи за допомогою мікрометричного гвинта для точного суміщення фокусу досліджуваної лінзи з точковою діафрагмою.

Відновлення хвильового фронту проводилося модальним методом в базисі функцій Церніке.

Кутова чутливість сенсора, розрахована по ансамблю з 10 гартманограм, становила 3.5×10^{-5} радіан, що відповідає мінімальному набігу фази $\lambda/40$ на апертурі 0,4×0,4 мм при λ=0,6328μ.

Вимірювання аберацій за допомогою описаної установки проводилося в кілька етапів.

1. Калібровка сенсора за допомогою лінз з відомими параметрами.
2. Отримання еталонної гартманограми за допомогою високоякісної лінзи з відомою фокусною відстанню.
3. Вимірювання аберацій досліджуваних лінз.

Калібровка сенсора

Для калібровки були використані астигматичні лінзи з відомими параметрами, які встановлювалися в оптичну схему рис. 1 на місце лінзи 3. При цьому вимірювання проводились за допомогою плоского пучка. Їх результати наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Результати вимірювання параметрів еталонних лінз для діаметра вхідної апертури 1,9 мм.

Лінза	Паспортні дані					Результати вимірювань				
	S (дптр)	C (дптр)	M (дптр)	Дефокус. (од. λ)	Аст. (од. λ)	Дефокус. (од. λ)	Аст. (од. λ)	M (дптр)	S (дптр)	C (дптр)
1	0.75 ±0.09	-0.25 ±0.12	0.625	0.436	0.174	0.438 ±0.006	0.16 ±0.01	0.63 ±0.01	0.74 ±0.02	-0.23 ±0.02
2	1.00 ±0.09	-0.25 ±0.12	0.875	0.611	0.174	0.626 ±0.006	0.17 ±0.01	0.90 ±0.01	1.02 ±0.02	-0.24 ±0.02
3	2.00 ±0.12	0.50 ±0.12	2.25	1.57	0.349	1.48 ±0.01	0.32 ±0.02	2.12 ±0.01	1.89 ±0.02	0.46 ±0.03

Сферична (S) та циліндрична (C) оптична сила розраховувалась за формулами [7]:

$$\begin{aligned} S_{(-)} &= M + J \\ C_{(-)} &= -2J \end{aligned} \qquad (1)$$

для перших двох лінз (від'ємна циліндрична оптична сила) та

$$\begin{aligned} S_{(+)} &= M - J \\ C_{(+)} &= 2J \end{aligned} \qquad (2)$$

для третьої лінзи (додатна циліндрична оптична сила). Тут

$$\begin{aligned} M &= \frac{\lambda}{2\pi}\frac{4}{a^2}C_2^0 \\ J &= \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2}{a^2}\sqrt{\left(C_2^{-2}\right)^2 + \left(C_2^2\right)^2} \end{aligned}, \qquad (3)$$

де C_2^0 - коефіцієнт дефокусування; C_2^{-2} та C_2^2 - коефіцієнти астигматизму; a – радіус апертури.

Слід зазначити, що виміряні та паспортні значення оптичної сили лінз співпадають в межах похибки сенсора, яка становила ~0,02 дптр. Величина коефіцієнтів аберацій вищих порядків виявилися меншою від розрахованої чутливості сенсора $\lambda/40$.

Отримання еталонної гартманограми

Вимірювання аберацій в описаній установці проводиться шляхом порівняння гартманограм хвильових фронтів, створених досліджуваними лінзами, з гартманограмою хвильового фронту, створеного високоякісною еталонною лінзою з фокусною відстанню f_0=26.9 мм. При цьому фактично вимірюється різниця між аберраціями цих лінз. Оскільки точне суміщення точкового джерела з фокальною площиною лінзи було утруднене, проводилася реєстрація гартманограм під час переміщення сенсора вздовж оптичної осі системи та їх порівняння з гартманограмою плоского хвильового фронту. Далі будувався графік залежності положення сенсора від виміряного значення дефокусування і розраховувалось положення сенсора z_{inf}^0, яке відповідає плоскому хвильовому фронту за еталонною лінзою (рис. 2). За отриманими експериментальними точками будувалось наближення кривої поліномом 2-го ступеня, з якого визначалося необхідне положення сенсора.

Для застосованої еталонної лінзи $z_{\text{inf}}^0 = 14.8$ мм. При встановленні вимірювальної системи в дане положення за еталонною лінзою розповсюджувався плоский хвильовий фронт, гартманограми якого використовувались при вимірюванні аберацій.

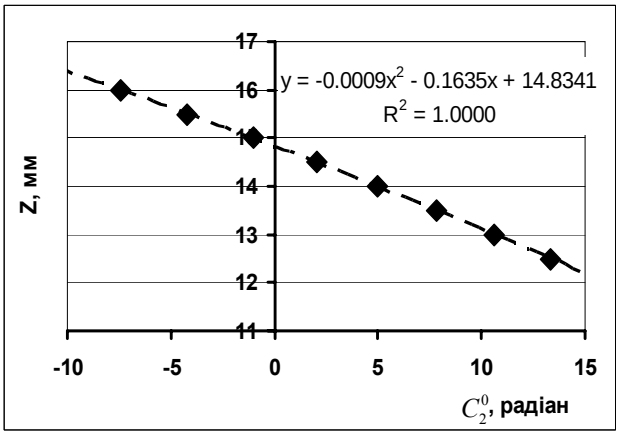


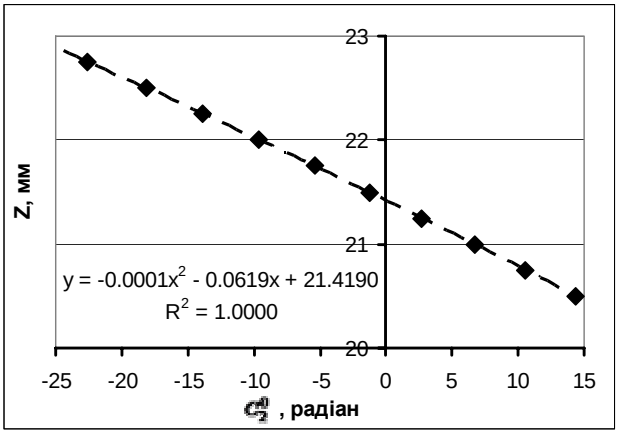
Рис. 2 – Визначення z_{inf}^0 для еталонної лінзи

Вимірювання фокусної відстані та аберацій короткофокусних лінз

Для вимірювання аберацій вимірювальна система з досліджуваною лінзою повинна встановлюватись в положення z_{inf}^i, в якому за лінзою розповсюджується квазіплоский хвильовий фронт з нульовим дефокусуванням. При цьому відповідні положення знаходились способом, описаним вище. Якщо відома фокусна відстань еталонної лінзи, можна визначити і фокусні відстані досліджуваних лінз f_i:

$$f_i = f_0 - \left(z_{\text{inf}}^i - z_{\text{inf}}^0\right), \qquad (4)$$

Відповідну залежність для одної з досліджуваних лінз наведено на рис. 3.



б) $z_{\text{inf}}^1 = 21.4$ мм, f_1=20.3 мм

Рис. 3 – Визначення z_{inf}^i та f_i для досліджуваної лінз

Одночасно з визначенням дефокусування визначалися і коефіцієнти інших аберацій. Графік для сферичної аберації наведено на рис. 4.

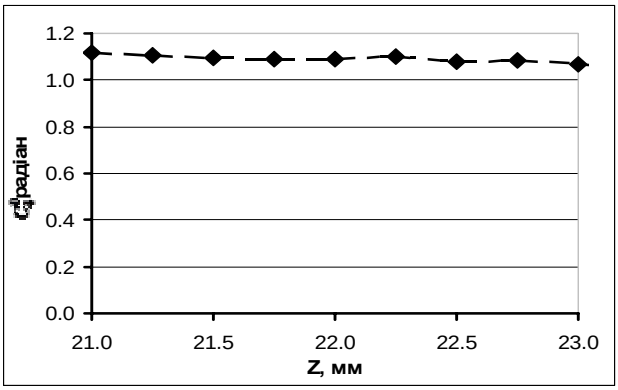


Рис. 4 – Залежність сферичної аберації від положення вимірювальної системи

Видно, що сферична аберація слабо залежить від невеликих зміщень вимірювальної системи відносно z^1_{inf}. Виміряний коефіцієнт сферичної аберації при $z = z^1_{\text{inf}}$ становив 1,15 радіана, що відповідає різниці фаз $0{,}36\lambda$ в апертурі діаметром 3 мм.

На рис. 5 представлено тривимірну модель хвильових фронту, що пройшов через лінзу.

Видно, що досліджувана лінза має значну сферичну аберацію, яка спотворює хвильовий фронт.

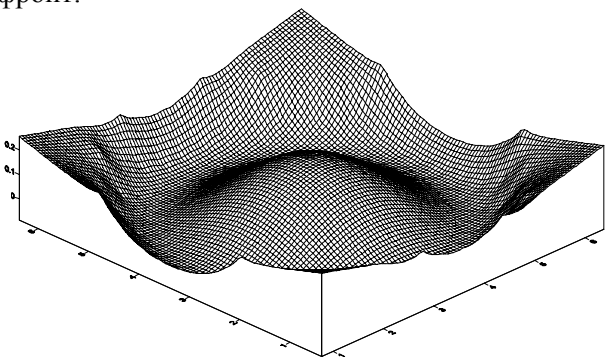


Рис. 5 – Тривимірна модель хвильового фронту, що пройшов через досліджувану лінзу

Висновки

Запропоновано та експериментально досліджено метод вимірювання аберацій короткофокусних лінз за допомогою точкового джерела світла та сенсора хвильового фронту Шека-Хартмана з масштабуючою оптичною системою. Кутова чутливість сенсора становить 3.5×10^{-2} мрад при коефіцієнті збільшення оптичної системи 2,143.

Список використаних джерел

1. *Tyson R.* Principles of Adaptive Optics: 3rd ed. / *R. Tyson*. - CRC Press, 2010.
2. *Mansell J.D.* Evaluating the effect of transmissive optic thermal lensing on laser beam quality with a Shack-Hartmann wave-front sensor / *Justin D.Mansell, Joseph Hennawi, Eric K.Gustafson* [et al.] // Appl. Opt. – 2001. – **40**, No.3. – P.366 – 374.
3. *Mercère P.* Hartmann and Shack–Hartmann Wavefront Sensors for Sub-nanometric Metrology / *Pascal Mercère, Dr. Mourad Idir, Johan Floriot, Xavier Levecq* // Modern Developments in X-Ray and Neutron Optics: Springer Series in optical science. - 2008. - **137**. - P 219 – 232.
4. *Podanchuk D.V.* Wave-front sensor for metrological applications / *Podanchuk D.V., Dan'ko V.P., Kisil A.V.* [et al.] // Bulletin of the University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2001. – **3**. - P. 392–399 [in Ukrainian].
5. *Goloborodko A.* Determination of local surface defects using a Shack-Hartmann wavefront sensor / *Goloborodko A., Grygoruk V., Kurashov V.* [et al] // Ukr. J. Phys. – 2008.– **53**. – P. 946 – 951.
6. *Southwell W.H.* Wave-front estimation from wave-front slope measurements / *W.H.Southwell* // JOSA. - 1980. - **70**, No 8. - P. 998 - 1006.
7. *Thibos L.N.* Power Vectors: An Application of Fourier Analysis to the Description and Statistical Analysis of Refractive Error / *Larry N. Thibos, William Wheeler and Douglas Horner* // Optometry & Vision Science. – 1997. – **74**, No 6. – P. 367 – 375.

Надійшла до редколегії 30.04.13

УДК 519.9

Колєнов С. О., к. ф.-м. н.

Про складові фази диференційно-фазового фотоелектричного відгуку при скануванні площини перерізу p-n переходу в поперечному напрямку

Побудовано теоретичну модель формування фотоелектричного відгуку від p-n переходу при скануванні площини його перерізу двома лазерними променями. Вказані фізичні ефекти, що дають внески у фазу фотовідповідного сигналу. Проведено експериментальні дослідження випромінюючої ділянки лазерних діодів методом диференційно-фазового фотоелектричного відгуку. Отримано експериментальні залежності фази фотовідгуку від координати скануючих променів. Проаналізовано можливості методу диференційно-фазового фотоелектричного відгуку для дослідження напівпровідникових структур з p-n переходом при скануванні переходу в поперечному напрямку.

Ключові слова: диференційно-фазовий, p-n перехід, фотоелектричний відгук, фазові виміри.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: ksa@univ.kiev.ua

S. O. Kolenov, PhD

About phase components of differential-phase LBIC from p-n junction transversal plane scanning

Theoretical model of how LBIC signal from p-n junction being scanned by two laser beams is formed was proposed. Physical effects which make impact in overall phase of the LBIC signal were pointed out. Experimental research of illuminating surface of laser diode was conducted. Experimental dependencies of the phase of LBIC signal on the coordinate of scanning laser beams were obtained. Possibilities of how differential-phase method can be used to inspect semiconductor surfaces with p-n junctions were analyzed.

Key Words: differential-phase, p-n junction, LBIC, phase measurements.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: ksa@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Данилов В. В.

Вступ

Сучасна промисловість та наука потребують швидкого та неруйнівного методу дослідження напівпровідникових структур. LBIC (Light Beam Induced Current method) – безконтактний неруйнівний метод дослідження поверхонь напівпровідникових структур, основним джерелом інформації для якого є характеристики фотоструму, що виникає при скануванні досліджуваної напівпровідникової структури сфокусованим лазерним променем. Цей фотострум обумовлений народженням нерівноважних носіїв заряду (дірок та електронів) в приповерхневому шарі напівпровідникової структури.

Розрізняють дві методики цього методу – амплітудна та фазова. В першому випадку сканування поверхні відбувається одним променем, а джерелом інформації слугує амплітуда наведеного фотоструму, яка в загальному випадку може містити інформацію про розподіл потенціалів, ступінь легування та інші параметри напівпровідникової структури. Ця методика зазвичай використовується для контролю якості виготовлення сонячних елементів [3,4]. Але, як і будь які інші амплітудні методики, ця має значний недолік – генеровані світлом біля поверхні носії заряду при розповсюдженні в об’ємі напівпровідника «розпливаються», що призводить до зменшення загальної амплітуди струму и відповідного зменшення контрастності отримуваних зображень. На відміну від цієї методики, друга методика в якості джерела інформації використовує фазу фотоструму, що генерується одним (фазова методика) або двома (диференційно-фазова методика) променями. В

© С. О. Колєнов, 2013

роботі [10] описано можливості методу фазового фотоелектричного відгуку. Зокрема вказано, що набіг фази струму, що знімається з досліджуваного зразка при його скануванні одним лазерним променем, залежить від часу життя неосновних носіїв, їхньої дифузійної швидкості та інших часових затримок, що виникають у досліджуваному зразку. У роботах [5] та [6] вказано на недоліки фазового методу LBIC та показано переваги диференційно-фазової методики. Також у роботі [6] описано можливість використання диференційно-фазового фотовідповідного методу для сканування напівпровідникових зразків з p-n переходом, в яких площина переходу розташована паралельно площині сканування. Метою даної роботи є дослідження можливостей цього методу при скануванні p-n переходу в поперечному напрямку.

Теоретична частина

Диференційно-фазовий LBIC метод передбачає сканування поверхні об'єкта двома сфокусованими лазерними пучками, що мають різні частоти та рознесені на деяку відстань. Зробити це можна різними способами, проте, найбільш привабливим є спосіб з використанням акустооптики [7]. Принцип формування зондуючих лазерних променів та їх фокусування на поверхні напівпровідникової платівки показаний на рисунку 1.

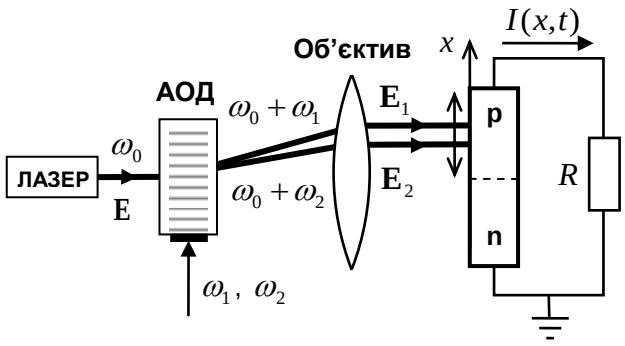


Рис. 1 Принцип формування та фокусування лазерних променів на поверхні напівпровідникової платівки

Лазерний промінь з кутовою частотою ω_0 розщеплюється за допомогою акустооптичного дефлектора (АОД), що керується двома сигналами з кутовими частотами ω_1 та ω_2, на два променя різної частоти $\omega_0+\omega_1$ та $\omega_0+\omega_2$, рознесені у просторі на невеликий кут, що залежить від різниці частот $\Delta\omega=|\omega_1-\omega_2|$. Ці два променя фокусуються на поверхні напівпровідникової платівки та сканують її шляхом зміни частот ω_1 та ω_2 таким чином, що їх різниця підтримується постійною. Внаслідок фотоефекту в електричному колі, до якого приєднано досліджуваний зразок, з'являється змінний струм з частотою $\Delta f=\Delta\omega/2\pi$, амплітуда та фаза якого будуть залежати від координати x променів на поверхні напівпровідника.

Розглянемо p-n перехід, площина перерізу якого, сканується двома паралельними лазерними променями, просторово рознесеними на наперед задану відстань d, частоти яких відрізняються на невелику наперед задану величину $\Delta\omega$ (рис. 2).

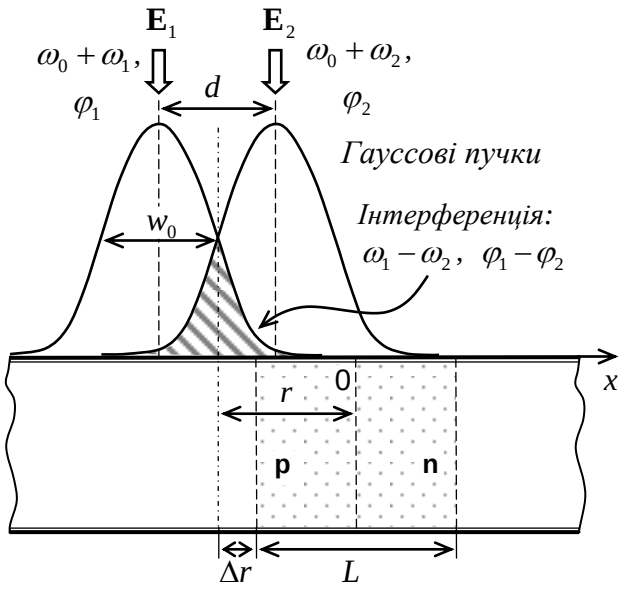


Рис. 2 Розташування променів на поверхні напівпровідникового зразка

Якщо світловий пучок має гауссівський розподіл амплітуди, то розподіл електричного поля для нього описується виразом [2]:

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{1+\frac{z^2}{z_0^2}}}\cdot\exp\left\{-i\left(kz-arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{w_0^2\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right)}+\frac{ik}{2z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right)}\right)-\alpha z\right\}, \quad (1)$$

де вісь z-координати спрямована вздовж напрямку розповсюдження світлового пучка, $\mathbf{E}_0$ – амплітуда поля, k – хвильове число, w_0 – ширина пучка в області перетяжки, $z_0 = \pi w_0^2 / \lambda$ – відстань від області перетяжки до області, де кривизна хвильового фронту є найбільшою, λ – довжина хвилі світла, α – коефіцієнт, що враховує поглинання світла в напрямку розповсюдження. Разом з тим відомо, що поглинання в напівпровіднику є істотним. Так, наприклад, у Si на глибині 3 *мкм* інтенсивність випромінювання на довжині хвилі 0.63 *мкм* згасає в e раз [8]. Оцінка z_0 для тієї ж самої довжини хвилі та ширини сфокусованого пучка 5 мкм дає значення $z_0 = 124 мкм$. Таким чином, реально можна говорити про ефекти на відстанях $z << z_0$. В цих межах хвильовий фронт можна вважати плоским. Тоді вираз (1) значно спрощується і, якщо досліджуваний зразок на рисунку 2 знаходиться у фокальній площині об'єктива, то розподіл електричних полів для кожного з променів на поверхні зразка можна записати у вигляді:

$$\mathbf{E}_{1,2}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0 \cdot \exp\Big\{-i[kz + (\omega_0 + \omega_{1,2})t + \varphi_{1,2}] - \frac{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{w_0^2} - \alpha z\Big\}, \quad (2)$$

де $\varphi_{1,2}$ – фази пучків. Взаємодія сумарного поля $\mathbf{E}_1(x,y,z,t) + \mathbf{E}_2(x,y,z,t)$ в області перетину пучків з матеріалом напівпровідника викличе появу в ньому надлишкових (нерівноважних) носіїв – дірок та електронів, що, у свою чергу, призведе до виникнення фотоелектричного відгуку на різницевій частоті $\Delta\omega$. Цей сигнал несе інформацію про стан досліджуваної поверхні та характеристики напівпровідника в приповерхневому шарі досліджуваного зразка.

Згідно з [5], LBIC сигнал, який буде реєструватися при скануванні поверхні зразка двома лазерними променями, що віддалені на відстань r від центру області p-n переходу, матиме вигляд:

$$I(r,t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + \left(x+\frac{d}{2}\right)^2}{w_0^2}} \eta(x-r) \times \times Sin\big(\Delta\omega t + \Delta\varphi(x-r)\big)dx, \quad (3)$$

де $\eta(x)$ – функція, що описує залежність квантового виходу від координати на поверхні напівпровідника, $\Delta\varphi(x)$ – залежність фазового внеску у сигнал LBIC від кожної точки поверхні досліджуваного зразка. У формулі (3) для зручності розглядається випадок, коли зразок переміщується під нерухомими променями. Таким чином, для теоретичного розрахунку LBIC сигналу необхідно визначити амплітудну та фазову складові підінтегральної функції у виразі (3).

Якщо в межах p-n переходу квантовий вихід $\eta(x)$ прийняти за одиницю, то за межами області p-n переходу він буде спадати за експотенційним законом і вираз для нього можна записати наступним чином [1]:

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \frac{L}{2}; \\ e^{-\frac{|x| - \frac{L}{2}}{l_D}}, & |x| > \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (4)$$

де l_D – довжина дифузії носіїв заряду, що визначається ефективним часом їх життя, L – ширина області p-n переходу.

Внесок у загальну фазу фотоелектричного відгуку у зовнішньому колі дають неосновні носії народжені в області p-n переходу та ті носії, що були народжені за її межами, але дифундували в цю область. Припустимо, що носії, народжені в області p-n переходу дають деякий постійний внесок $\delta\varphi$ у загальну фазу LBIC сигналу, в той час, як інші носії дають внесок, що залежить від часу, який необхідний цим носіям, щоб дістатись від місця їх утворення до області p-n переходу. Згідно з [1], цей фазовий внесок можна розрахувати наступним чином:

$$\Delta\varphi_\tau = arctg(\Delta\omega \cdot \tau), \quad (5)$$

де τ – ефективний час життя неосновних носіїв, який в нашій моделі розраховується, як час, необхідний для того, щоб носії дифундували від місця народження до області p-n переходу. Цей час можна оцінити, використовуючи коефіцієнт дифузії D, наступним чином [1]:

$$\tau \approx \frac{\Delta r^2}{D}, \quad (6)$$

де $\Delta r = |x| - \frac{L}{2}$ – найближча відстань від місця падіння лазерного променя до області p-n переходу.

Таким чином, фазовий внесок кожної точки поверхні напівпровідникової платівки при скануванні p-n переходу в поперечному напрямку можна представити у вигляді виразу:

$$\Delta\varphi(x) = \Delta\varphi_{pn}(x) + \Delta\varphi_{\tau}(x), \qquad (7)$$

де $\Delta\varphi_{pn}(x) = \delta\varphi \cdot \Pi_L(x)$ – фазовий внесок носіїв заряду, що народилися в області p-n переходу, $\Pi_L(x) = H(x + L/2) - H(x - L/2)$, $H(x)$ – функція Хевісайда,

$$\Delta\varphi_{\tau}(x) = arctg\left(\Delta\omega \cdot \frac{\left(|x| - L/2\right)^2}{D}\right) \cdot \left(1 - \Pi_L(x)\right) -$$

фазовий внесок носіїв заряду, що народилися на відстані Δr від області p-n переходу.

Числове інтегрування (3) з врахуванням фазової залежності (7) та виділення фази з отриманого результату, дає залежність фази LBIC сигналу, отриманого диференційно-фазовим методом, від положення лазерних променів (рис. 3). При цьому для здійснення числового інтегрування були використані наступні значення параметрів: $D = 40\ см^2/с$, $l_D = 1\ мкм$, $\delta\varphi = \pi/2$, $\Delta f = 100\ кГц$, $L = 10\ мкм$, $d = 5\ мкм$, $w_0 = 10\ мкм$.

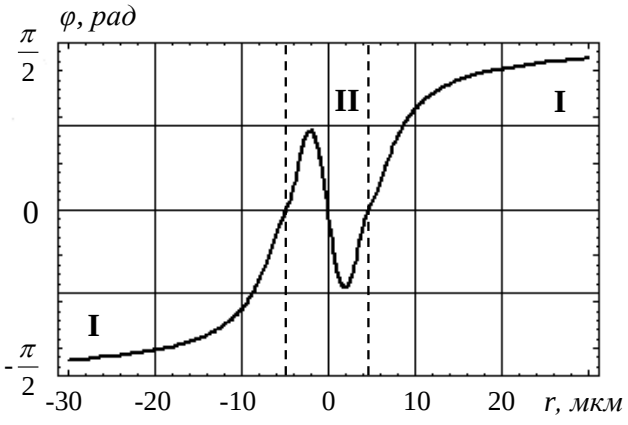


Рис. 3 Теоретично розрахована фазо-координатна залежність фотоелектричного відгуку для диференційно-фазового методу

Отриману залежність можна розбити на дві основні ділянки, відокремлені пунктирною лінією на рисунку 3:

I ділянка – фаза, основний вклад у яку дають носії заряду, що народилися поза межами області p-n переходу. Відповідно ця фаза обумовлена часовою затримкою, необхідною носіям для того, щоб дифундувати від місця падіння лазерних променів до межі p-n переходу. Фазова залежність у цій ділянці може бути використана для дослідження поверхневого розподілу коефіцієнта дифузії, який є дуже чутливим до зміни різних параметрів напівпровідника зокрема його легування.

II ділянка – фаза, обумовлена скануванням області p-n переходу двома променями. Вона аналогічна фазо-координатним залежностям, отриманим в роботі [5]. Фазова залежність на цій ділянці може бути використана для оцінки ширини p-n переходу, за умови якщо відстань між променями, що сканують, менша за реальну ширину p-n переходу.

Експериментальні результати

Для проведення досліджень використовувався диференційно-фазовий лазерний скануючий мікроскоп [7], який працював в режимі фотовідповіді (коли як інформаційний сигнал використовувався фотострум, наведений скануючими променями, що реєструвався безпосередньо с досліджуваного зразка).

Як об'єкт дослідження було використано випромінюючу ділянку лазерного діоду фірми SDL, що являє собою різкий p-n перехід, яку попередньо було досліджено тим самим мікроскопом, але в режимі на відбиття. Це дослідження показало, що шорсткість поверхні в межах ділянки, що досліджувалась, не перевищувала 5 *нм*, тому при дослідженні зразку методом LBIC впливом рельєфу поверхні на отримувані результати можна було знехтувати.

Отже, було досліджено поверхню лазерного діоду SDL з використанням амплітудної та диференційно-фазової методики LBIC. При цьому довжина хвилі лазера становила 0,65 *мкм*, частота розщеплення дорівнювала $\Delta f = 130\ кГц$. Розмір площадки сканування становив 250×250 *мкм*. Ширина сфокусованого променя на поверхні об'єкта дослідження становила 1,2 *мкм*.

На рисунку 4 представлені залежності фази (пунктирна крива) та амплітуди (суцільна крива) фотоелектричного відгуку, отримані відповідно диференційно-фазовим та амплітудним методами.

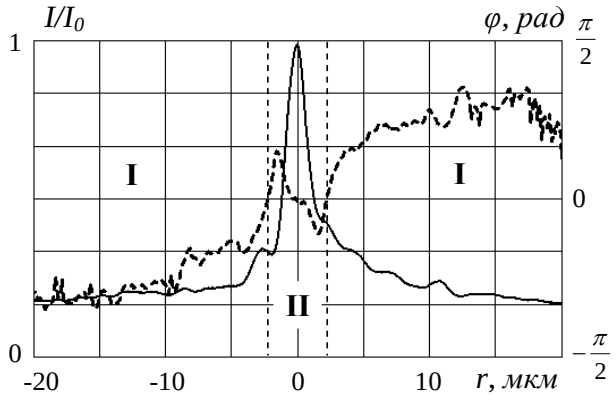


Рис. 4 Амплітудний (суцільна крива) та фазовий (пунктирна крива) фотоелектричні відгуки від випромінюючої ділянки поверхні лазерного діоду фірми SDL, отримані при його скануванні лазерними променями відповідно амплітудним та диференційно-фазовим методами

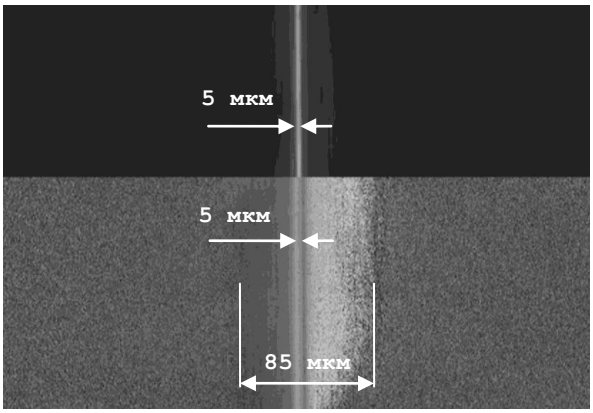


Рис. 5 Двовимірні амплітудне (згори) та фазове (знизу) зображення фотоелектричного відгуку випромінюючої ділянки поверхні лазерного діоду фірми SDL, отримані відповідно амплітудним та диференційно-фазовим методами

Аналіз фазової залежності на рисунку 4 вказує на те, що її можна умовно поділити на дві ділянки, аналогічно тому, як це зроблено на рисунку 3.

Аналізуючи ділянку I на рисунку 4, можна помітити, що абсолютне значення фази на ній у середньому зростає та прямує до певного максимального значення, що якісно відповідає ходу теоретичної залежності на рисунку 3.

Тим не менш, ця залежність не є строго монотонною, що може свідчити про неоднорідність фізичних властивостей напівпровідника за межами p-n переходу. Згідно з теоретичною моделлю, параметром, що може обумовлювати такі неоднорідності є коефіцієнт дифузії, який співвідношенням Ейнштейна пов'язаний з рухливістю носіїв, яка, в свою чергу, пов’язана з хімічним складом напівпровідника, ступенем його легування, тощо, та може змінюватись в широких межах.

Ділянка II з рисунку 4, точка перегину на якій, співпадає з максимумом амплітудної залежності, свідчить про наявність на поверхні зразка фото поглинаючої ділянки – p-n переходу. Відстань між максимумом та мінімумом на фазовій залежності має визначати ширину цієї ділянки. Але, згідно з критеріями розробленим в роботі [5] це можливо лише за умови, якщо ширина лазерних пучків є вдвічі меншою за ширину об’єкту, що вимірюється.

На рисунку 5 наведено суміщені двовимірні зображення досліджуваної поверхні лазерного діоду, отримані в амплітудному (згори) та диференційно-фазовому (знизу) режимах:

Аналізуючи отримані результати, необхідно брати до уваги відповідність між характерними розмірами p-n переходу та шириною лазерного променя. Як показано в роботі [5], для того, щоб отримані в процесі дослідження результати були достовірними, необхідно, щоб ширина променя була принаймні вдвічі меншою за розмір найменшої особливості досліджуваного об’єкта. В іншому випадку, лазерні промені будуть «сканувати» p-n переходом, як детектором, а отримані зображення будуть результатом дифракції світла на щілині. Як було вказано вище, ширина променів, що сканували зразок, в експерименті склала 1,2 *мкм*, в той час як ширина p-n переходу лазерного діоду може становити ~ 0,3-3 *мкм* [9]. Також, ширина випромінюючої ділянки p-n переходу може бути меншою за половину довжини хвилі скануючи лазерних променів, що є межею роздільної здатності оптичних приладів. А тому можна зробити висновок, що поточні параметри експериментальної установки не дозволяють визначити ширину p-n переходу. В той же час експеримент показав, що диференційно-фазовий LBIC сигнал містить корисну інформацію щодо особливостей напівпровідника поза межами області p-n переходу.

Висновки

Таким чином, в даній роботі було побудовано теоретичну модель формування диференційно-фазовим методом фотоелектричного відгуку від напівпровідникового зразка з p-n

переходом, при умові, що p-n перехід розташовано поперечно напряму сканування. При цьому вказано на фізичні ефекти, які дають внесок у фазу фотоелектричного відгуку.

Було проведено дослідження випромінюючої поверхні лазерного діоду, що являє собою різкий p-n перехід, переріз якого розташований в площині сканування. В ході порівняння диференційно-фазового та амплітудного методів LBIC отримано відповідні двовимірні зображення фотоелектричного відгуку поверхні напівпровідника, а також експериментальні залежності фази (для диференційно-фазового методу) та амплітуди (для амплітудного методу) LBIC сигналу від координати сканування. Експериментальна залежність фази якісно відповідає теоретично розрахованій.

Аналіз отриманих експериментально залежностей показав, що диференційно-фазовий метод LBIC має перспективи щодо його використовування для дослідження напівпровідникових поверхонь з p-n переходом, переріз якого, розташовано в площині сканування. Зокрема, вказано на можливість дослідження розподілу по поверхні деяких параметрів напівпровідника, таких як коефіцієнт дифузії, пов'язану з ним рухливість носіїв та ступінь легування, що є досить важливим в напівпровідниковій промисловості та наукових дослідженнях напівпровідників.

Список використаних джерел

1. *Ryvkin S. M.* Photoelectric phenomena in semiconductors. – Moscow: Physmatgiz, 1963. – 496 p. (in Russian)
2. *Yariv A, Yeh P.* Optical Waves in Crystals. – Moscow: Mir, 1987. – 308 p. (in Russian)
3. *Ilchenko L., Kaminski A., Kolenov S., Laugier A., Smirnov E., Litvinenko S., Skryshevsky V., Strikha V.* Investigation of the solar cell quality by LBIC-like image techniques // Materials Science and Engineering. – 2000. – Vol. B71. – P. 238-243.
4. *Acciarria M., Binnetia S., Racza A., Pizzinia S., Aggostinellib G.* Fast LBIC in-line characterization for process quality control in the photovoltaic industry // Solar Energy Materials & Solar Cells – 2002. – Vol. 72. – P. 417-424.
5. *Ilchenko L. M., Kolenov S. O., Litvinenko S. V., Molochko P. V., Smirnov E. M.* Formation of phase-differential LBIC // Bulletin of the University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. – 2005. – № 4. – P. 284 – 293. (in Ukrainian)
6. *Ilchenko L. M., Kolenov S. O., Litvinenko S. V., Molochko P. V., Vinogradov Y. V.* About phase impacts in differential-phase LBIC // Bulletin of the University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. – 2009. – № 1. – P. 180 – 183. (in Ukrainian)
7. *Molebny V.V., Kamerman G.W., Ilchenko L.M., Kolenov S.O., Goncharov V.O., Smirnov E.M.* Three-beam scanning laser radar profilometer // Proceedings of SPIE. – 1998. – Vol. 3380. – P. 280-283.
8. *Ilchenko L. M., Litvinenko S. V., Kilchitska S. S.* Investigation of the emitter resistance layers distribution of solar cells by means of the laser beam scanning // Bulletin of the University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. – 1997. – № 4. – P. 263 – 269. (in Ukrainian)
9. *Behringer M.* High-Power Diode Laser Technology and Characteristics // Springer Series in Optical Sciences. – 2007. – Vol. 128. – P. 5-74.
10. *Pernau Th.* Phase-sensitive LBIC analysis / Th. Pernau, P. Fath, E. Bucher // Photovoltaic Specialists Conference, 2002, Konstanz: Fachbereich Phys. – 2002. – P. 442-445.

Надійшла до редколегії 22.05.13

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 530.145

Барабаш О.В. [1], к.ф.-м.н., асистент.

Класичний аналог спіну в релятивістській теорії

В роботі досліджуються дві класичні теорії спіну: векторна та тензорна. Показано, що в усіх розглянутих випадках результати квантово-механічних обрахунків співпадають з теорією Баргмана-Мішеля-Телегді.

Ключові слова: *спін, теорія БМТ, рівняння Дірака.*

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: obar@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

O. V. Barabash[1], PhD

Classical analogue of the spin in relativistic theory.

Two classical spin theories: vector and tensor are investigated in the paper. It is shown that in all considered cases, the results of quantum-mechanical calculations coincide with the theory Bargmann-Michel-Telehdi.

Key Words: *spin, BMT theory, Dirac equation.*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: obar@univ.kiev.ua

Класичний аналог квантового спіну

В класичній механіці спін частинки можна означити як її кутовий момент в системі відліку, де частинка знаходиться у спокої. Якщо частинка зі спіном ***s*** має ненульовий магнітний момент **μ**, то в присутності магнітного поля ***H*** виникає прецесія Лармора, яка в системі спокою частинки описується рівнянням (ми використовуємо систему одиниць, де *c=1*)

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = 2[\vec{\mu}\times\vec{H}], \quad \vec{\mu} = \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{s} \qquad (1)$$

g – множник Ланде. Релятивістське узагальнення рівняння (1) було зроблено Баргманом, Мішелем та Телегді (БМТ) [1]. В цій теорії спін описується 4-вектором S^μ, який визначається за своїм виглядом в системі спокою частинки

$$v = 0: \qquad S^\mu = (0, \vec{S}_0) \qquad (2)$$

де $\vec{S}_0$ – спін нерухомої частинки. В довільній системі відліку, де швидкість частинки дорівнює ***v*** вектор S^μ буде мати вигляд

$$S^\mu = ((\vec{s}\vec{v}), \vec{s})$$

причому $S^\mu u_\mu = 0$, де $u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ – 4-вектор швидкості, τ – власний час. При такому описі коваріантний запис рівняння (1) має вигляд [1]

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{eg}{2m}F^{\mu\nu}S_\nu + \eta(A^\nu S_\nu)u^\mu, \qquad (3)$$

де $A^\mu = (e/m)F^{\mu\nu}u_\nu$ – 4-вектор прискорення, $\eta = g/2 - 1$.

Проте, опис спіну 4-вектором (2) не є єдиним можливим. Наприклад, можна описати спін за допомогою антисиметричного тензора другого рангу, який в системі спокою частинки визначається як

$$v = 0: \qquad S^{\mu\nu} = (\vec{0}, \vec{S}_0) \qquad (4)$$

тобто $S^{0i} = 0$, $S^{ij} = \varepsilon_{ijk}(S_0)_k$. Зауважимо, що опис спіну за допомогою антисиметричного тензора не є чимось неприродним. Навпаки, в квантовій механіці оператор спіну $\vec{\Sigma}$ представляє собою просторові компоненти антисиметричного тензора $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$:

$$\sigma^{\mu\nu} = (i\vec{\alpha}, \vec{\Sigma}) = (2[\vec{\Sigma}\times\vec{\alpha}], \vec{\Sigma}),$$

де $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$ – оператор швидкості.

Вигляд тензора $S^{\mu\nu}$ в системі відліку, де частинка рухається зі швидкістю ***v*** отримується з (4) застосуванням перетворення Лоренца

$$S^{\mu\nu} = ([\vec{S}\times\vec{v}], \vec{S}), \quad S^{\mu\nu}u_\nu = 0.$$

© О.В. Барабаш, 2013

З означень (2) та (4) випливає зв'язок між 4-вектором S^μ та тензором $S^{\mu\nu}$

$$S^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_\alpha u_\beta , \qquad (5а)$$

$$S^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta} u_\gamma \qquad (5б)$$

Використовуючи (5) та рівняння (3) можна отримати рівняння руху на $S^{\mu\nu}$

$$\frac{dS^{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m}(S^{\alpha\mu}F_\alpha{}^\nu - S^{\alpha\nu}F_\alpha{}^\mu) - $$

$$-\eta(S^{\alpha\mu}u^\nu - S^{\alpha\nu}u^\mu)A_\alpha .$$

В теоретичному плані опис спіну за допомогою будь-якого з векторів ***s***, ***S*** чи $\boldsymbol{S_0}$ є задачею цілком еквівалентною, оскільки будь-який з них можна виразити через інший, зокрема

$$\vec{S} = \gamma\vec{S}_0 - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})\vec{v},$$

$$\vec{s} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})\vec{v} + \vec{S}_0, \qquad (6)$$

де $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}$ – релятивістський множник. В тривимірному вигляді рівняння руху на ***s*** та ***S*** в постійному однорідному магнітному полі ***H*** будуть мати вигляд

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{eg}{2\gamma m}[\vec{s}\times\vec{H}] - \eta\gamma^2(\vec{a}\vec{s})\vec{v} \qquad (7)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{eg}{2\gamma m}[\vec{S}\times\vec{H}] + \eta\gamma^2(\vec{v}\vec{S})\vec{a} \qquad (8)$$

де $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{e}{m\gamma}[\vec{v}\times\vec{H}]$ – вектор прискорення.

В нерелятивістському випадку вектори ***s*** та ***S*** співпадають, в той час як в протилежному, ультрарелятивістському випадку вони відрізняються як за модулем, так і по напрямку. Тому виникає питання: який саме з векторів (***s***, ***S*** чи якійсь інший) вимірює експериментатор?

Експерименти з ультрарелятивістськими електронами (γ=25000) проводились ще в кінці 70-х років [2] з метою прецизійного вимірювання аномального магнітного моменту електрона (фактор η). Суть експерименту полягає в тому, що при русі електрона по колу в площині, що перпендикулярна до напрямку магнітного поля, вектор магнітного моменту (а значить і спіну) обертається по відношенню до напрямку швидкості з кутовою частотою $\omega = \eta\dfrac{eH}{m}$. Таким чином, знаючи з експерименту частоту прецесії ω можна порахувати η. Обраховане за цією схемою значення η співпало з аналогічним значенням, отриманим спін-резонансним методом, в якому електрон тривалий час утримується в електромагнітній пастці (і тому є нерелятивістським).

Наведене вище значення ω було отримано з рівняння (7). В той же час, неважко переконатися, що рівняння (8) приводить до точно такого ж значення частоти прецесії. Таким чином, обидві теорії (векторна та тензорна) однаково гарно можуть пояснити результати вищезгаданих експериментів і тому вибір між теоріями за цими даними зробити неможливо. В даній роботі це питання розглядається теоретично на основі рівняння Дірака.

Квантовий спін.

Як відомо, в релятивістській квантовій механіці правильну одночастинкову інтерпретацію має лише парна частина оператора фізичної величини. При наявності зовнішніх полів обрахунок парної частини оператора викликає, як правило, значні математичні труднощі. Тому, ми застосували інший підхід, оснований на тому, що середнє значення парної частини оператора співпадає з середнім значенням повного оператора, якщо усереднення проводити на чистих зарядових станах. Нижче розглянуто три випадки: 1) вільна частинка, 2) частинка в однорідному магнітному полі та 3) частинка в електричному полі. В кожному з цих випадках обраховується значення вектора спіну та порівнюється з векторною та тензорною теоріями.

Вільна частинка.

В системі відліку де частинка знаходиться у спокої її хвильова функція має вигляд:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix}\varphi_0\\0\end{pmatrix} e^{-(i/\hbar)mt}, \qquad \psi_0{}^+\psi_0 = 1.$$

В цій системі відліку

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\psi_0{}^{+}\vec{\Sigma}\psi_0 = \frac{\hbar}{2}\varphi_0{}^{+}\vec{\sigma}\varphi_0 \equiv \vec{S}_0 .$$

Перейдемо тепер в систему відліку, де частинка рухається зі швидкістю $\boldsymbol{v}$. Відповідну хвильову функцію позначимо ψ.

$$\psi = L(v)\psi_0 = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \dfrac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{E+m}\varphi_0 \end{pmatrix} e^{i/\hbar(px-Et)},$$

де $L(v)$ – оператор лоренцевого бусту. При цьому

$$\psi^{+}\psi = \gamma , \qquad (9)$$

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\psi^{+}\vec{\Sigma}\psi = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})\vec{v} + \vec{S}_0 .$$

Порівнюючи отриманий вираз з (6) бачимо, що він узгоджується з теорією БМТ і не узгоджується з тензорною теорією.

Постійне магнітне поле.

Розглянемо рух частинки в однорідному магнітному полі. Виберемо вісь *z* вздовж напрямку поля. Хвильова функція вільної частинки в циліндричних координатах (аксіальне калібрування) має вигляд

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = e^{il\varphi}e^{ip_z z/\hbar}R(\rho)\varphi_0 ,$$

$$\chi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})}{E+m}\varphi ,$$

де $R(\rho)$ – радіальна частина хвильової функції, значення якої для нас не суттєве, φ_0 – власний вектор оператора σ_z з власним значенням λ: $\sigma_z\varphi_0 = \lambda\varphi_0$.

Обрахуємо спочатку середнє значення проекції спіну на напрямок магнітного поля.

$$\left\langle \Sigma_z \right\rangle = \lambda(\varphi,\varphi) + (\chi,\sigma_z\chi) = \lambda(\varphi,\varphi) + \frac{1}{(E+m)^2}\times$$

$$\times[(2\lambda p_z^2 + e\hbar H)(\varphi,\varphi) - \lambda(\varphi,\pi^2\varphi)].$$

Для подальшого спрощення скористаємось рівнянням руху

$$\pi^2\varphi = (e\hbar(\vec{\sigma}\vec{H}) + E^2 - m^2)\varphi ,$$

з якого знаходимо

$$(\varphi,\pi^2\varphi) = (e\hbar\lambda H + E^2 - m^2)(\varphi,\varphi).$$

Умова нормування (9) дає

$$(\psi,\psi) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(\varphi,\varphi) = \gamma$$

звідки отримуємо

$$(\varphi,\varphi) = \frac{\gamma+1}{2}.$$

Збираючи все разом знаходимо

$$\left\langle \Sigma_z \right\rangle = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})v_z + (S_0)_z ,$$

де $\vec{S}_0 = \lambda\vec{e}_z$. Середні значення від поперечних (до напрямку магнітного поля) компонент спину дорівнюють нулю.

$$\left\langle \Sigma_{x,y} \right\rangle = \frac{2\lambda p_z}{(E+m)^2}(\varphi,\pi_{x,y}\varphi) =$$

$$= \frac{2\lambda p_z}{(E+m)^2}(\varphi,\hat{p}_{x,y}\varphi) = 0 .$$

В результаті знову приходимо до рівності

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{S}_0\vec{v})\vec{v} + \vec{S}_0 ,$$

що співпадає з теорією БМТ.

Постійне електромагнітне поле. Друге релятивістське наближення.

Як відомо, в електричному полі стає можливим процес народження пар частинка-античастинка. Тому хвильова функція втрачає свій одночастинковий смисл і розглянута вище схема усереднення оператора спіну стає некоректною. Тому поступимо інакше. Застосуємо друге релятивістське наближення до теорії Паулі. Перевага такого підходу полягає в тому, що при описі електрона двокомпонентним спінором ефекти народження пар відсутні (в будь-яком порядку по *v/c*). Це пов'язано з тим, що в двокомпонентній теорії відсутні розв'язки з від'ємною енергією. Гамільтоніан частинки (з

g=2) в електромагнітному полі має вигляд [3]

$$H_2 = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \frac{e\hbar}{2m}(\vec{\sigma}\vec{H}) - \frac{\vec{p}^4}{8m^3} - \\ - \frac{e\hbar}{4m^2}(\vec{\sigma},[\vec{E}\times\vec{\pi}]).$$

Двокомпонентну хвильову функцію (яка є власним вектором гамільтоніану H_2) будемо позначати φ_s. Означимо квазірелятивістський оператор спіну $\hat{s}$ рівністю

$$(\varphi_s, \hat{s}\varphi_s) = (\psi, \gamma\vec{\Sigma}\psi), \quad (\psi,\psi) = 1. \qquad (10)$$

Множник γ в (10) необхідний для виконання умови нормування (9). Спінор φ_s пов'язаний з біспінором ψ співвідношеннями [3]

$$\varphi_s = \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right)\varphi,$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x},t) \\ \chi(\vec{x},t) \end{pmatrix} e^{-(i/\hbar)mt},$$

$$\chi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{2m}\varphi.$$

Підставляючи ці вирази в означення (10) після перетворень знаходимо

$$\hat{s} = \gamma\left(\vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p} - \vec{p}^2\vec{\sigma}}{2m^2}\right) = \\ = \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\left(\vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p} - \vec{p}^2\vec{\sigma}}{2m^2}\right) = \vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p}}{2m^2}.$$

Цей оператор задовольняє рівнянню руху

$$\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{s}, H_2] = \frac{e}{m^2}\vec{E}(\vec{\sigma}\vec{p}) + \frac{e}{m}[\vec{\sigma}\times\vec{H}]$$

яке в другому порядку по *v/c* співпадає з рівнянням на спін в теорії БМТ:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{\gamma m}((\vec{s}\vec{v})\vec{E} + [\vec{s}\times\vec{H}]).$$

Висновки

В рамках класичної механіки релятивістське узагальнення спіну можна проводити по-різному: спін можна розглядати як просторові компоненти 4-вектора (псевдовектора) або як просторові компоненти антисиметричного тензора (та іншими способами). Ці описи нееквівалентні між собою – величина спіну та його динаміка в різних теоріях буде різною. Надати перевагу якійсь одній теорії в рамках класичної механіки неможливо. В той же час, в квантовій механіці поняття спіну є добре означеним і допускає квазикласичний опис. В роботі досліджуються три випадки: вільна частинка, частинка в однорідному магнітному полі та частинка в електромагнітному полі. В усіх трьох випадках було знайдено, що квазикласичний вектор спіну описується теорією БМТ.

Список використаних джерел

1. Bargmann V., Michel L., Telegdi V.L. Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field // Phys. Rev. Lett. – 1959. – Vol. 2. – P. 435–436.
2. Combley F., Farley F.J. M., Field J.H., Picasso E. g – 2 Experiments as a Test of Special Relativity // Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 42. – P. 1383–1385.
3. *Davydov A.S.* Quantum mechanics. – Moscow: Fizmatgiz, 1963. – 543 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.04.13

УДК 535.37

Гоменюк О.В.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Неділько С.Г.[2], д.ф.-м.н., ст..н.сп.
Бойко В.В.[3], к.ф.-м.н., доц.,
Шелудько В.І.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Вірко С.В.[4] , к.ф.-м.н., н.с.

Механізми дисипації енергії збудження Cr^{3+} - центрів люмінесценції в кристалах подвійного фосфату калію-алюмінію

В роботі досліджено особливості процесів втрати енергії збудження центрами люмінесценції кристалів $KAlP_2O_7$, легованих іонами хрому, Cr^{3+}, при збудженні світлом із діапазонів вакуумного ультрафіолету, ультрафіолету або видимого випромінювання.

Ключові слова: *центри люмінесценції, загасання, іони хрому.*

[1]Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка, 41400, м. Глухів, вул. Києво-Московська, 24,
e-mail: gomenyuk@gmail.com
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д,
e-mail: SNedilko@univ.kiev.ua
[3]Національний університет природокористування і біоресурсів України, 03041, м. Київ, вул. Героїв Оборони, 15,
e-mail: techphis_chair@twin.nauu.kiev.ua.
[4]Інститут фізики напівпровідників імені В.Є.Лашкарьова НАН України,
03028, м. Київ, пр. Науки, 41.
e-mail: virko@email.com.ua

O. V. Gomenyuk[1], PhD,
S. G. Nedilko[2], Dr. Sci,.
V. V. Boyko[3], PhD,
V. I. Sheludko[1], PhD,
S. V. Virko[4] , PhD.

The mechanisms of excitation energy dissipation in Cr^{3+} - luminescence centers of double potassium-aluminum phosphate

Peculiarities of dissipation excitation energy for Cr^{3+} luminescence centers in doped with Cr^{3+} ions $KAlP_2O_7$ crystals under excitation with vacuum ultraviolet, ultraviolet or visible radiation were investigated.

Key Words: *luminescence centers, quenching, chromium ions.*

[1]Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv national pedagogical university, 41400, Hlukhiv, Kyyevo-Moskovs'ka str., 24,
e-mail: gomenyuk@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: SNedilko@univ.kiev.ua
[3]National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, 03041**,** Kyiv, Heroyiv Oborony st., 15,
e-mail: techphis_chair@twin.nauu.kiev.ua
[4]V.Ye. Lashkaryov Institute of Semiconductor Physics of NAS of Ukraine,
03028, Kyiv, pr. Nauki, 41.
e-mail: virko@email.com.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Основні властивості фотолюмінесценції (ФЛ) іонів Cr^{3+} в кристалах $KAlP_2O_7$ (далі $KAlP_2O_7$-Cr) описано нами раніше [1–3]. В спектрах ФЛ $KAlP_2O_7$-Cr при низьких температурах (4,2–8 К) спостерігаються дві широкі смуги з максимумами в околі 756 та 771 нм. Проведений аналіз, однак, показав, що температурно-залежні спектри ФЛ з високою точністю можуть бути розкладені на три гаусові компоненти: **a**, **b** та **c** (рис. 1). Вигляд залежності інтегральної інтенсивності ФЛ від температури, I(T), суттєво визначається діапазоном довжин хвиль збудження: вакуумний ультрафіолет (ВУФ), ультрафіолетовий діапазон (УФ) чи діапазон видимого світла (рис. 2).

В температурному інтервалі 4,2–80 К при ВУФ збудженні, λ_{ex} = 114 нм, спостерігається зростання інтегральної інтенсивності приблизно в 2 рази, а для більших довжин хвиль (збудження, діапазон 160–310 нм, ступінь зростання інтенсивності зменшується: при λ_{ex} = 310 нм інтенсивність зростає в 1,8 рази. При УФ збудженні, λ_{ex} = 337,1 нм, I(T) зростає тільки в 1,1 рази причому температурний інтервал зростання інтенсивності звужується: T = 4,2–20 К. При λ_{ex} = 473 нм, замість зростання, в температурному інтервалі 4,2 – 45 К

© О.В. Гоменюк, С.Г. Неділько, В.В. Бойко, В.І. Шелудько, С.В. Вірко, 2013

спостерігається поличка. Нарешті, для λ_{ex} = 632,8 нм I(T) починає падати вже з температури 4,2 К.

Різною, в залежності від λ_{ex}, є поведінка I(T) і при більш високих температурах. Так, при збудженні видимим світлом та світлом із діапазону ближнього УФ, описане вище зростання інтенсивності свічення змінюється лінійним (в логарифмічному масштабі) падінням інтенсивності при підвищенні температури.

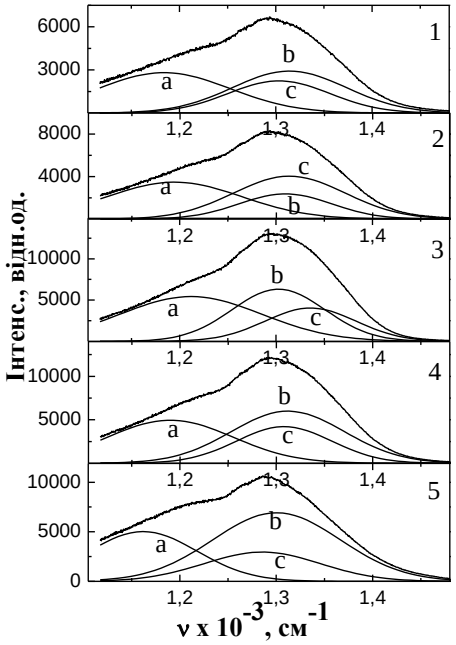


Рис. 1. Спектри ФЛ кристала $KAlP_2O_7$:Cr та їх розклад на компоненти **a, b** та **c**; T = 10 (1), 40 (2), 80 (3), 160 (4) та 300 К (5). λ_{ex} = 114 нм.

При цьому, із зменшенням λ_{ex} скорочується інтервал падіння: для λ_{ex} = 632,8 нм – ln{I(T)} лінійно падає до температури близької до 375 К, тоді як для λ_{ex} = 473 нм лінійність має місце до T = 340, а для λ_{ex} = 337,1 нм – лінійна залежність ln{I(T)} завершується при T = 270 К (рис. 2в, криві 1–3). Швидкість загасання D (нахил прямої $\ln I = \ln I_s - D$, де I_s інтенсивність, що відповідає початку прямолінійної ділянки ln{I(T)), падає із зменшенням λ_{ex}: D = 7,2; 3,2 та 3,1 для λ_{ex} = 632,8, 473 та 337,1 нм, відповідно. При більш короткохвильовому УФ збудженні, λ_{ex} = 310 нм, ділянка спаду I(T) практично відсутня: деяке зменшення інтенсивності можна помітити лише в діапазоні 80–160 К. Нарешті при ВУФ збудженні описане вище низькотемпературне зростання інтенсивності виходить на поличку і інтенсивність люмінесценції залишається незмінною до температур близьких до кімнатних.

При температурах вищих за кімнатну, інтервал 300–600 К, залежності I(T), на відміну від описаного вище, є подібним для всіх використаних довжин хвиль збудження із діапазону ВУФ та УФ світла: з підвищенням температури інтенсивність падає і при T ~ 600 К люмінесценція зникає повністю. Певні зміни у характері кривих, все ж таки, мають місце при переході від видимого світла до УФ (λ_{ex} = 337,1 та 310 нм) збудження (рис. 2в).

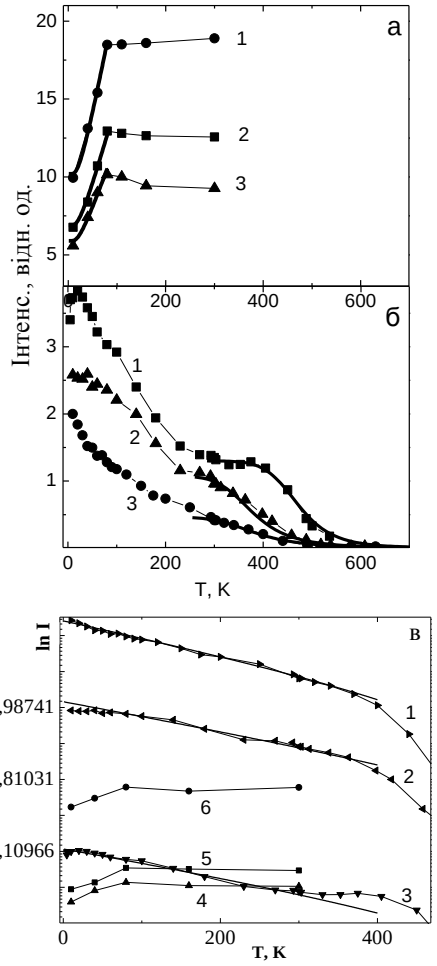


Рис. 2. Вплив температури на інтегральну інтенсивність ФЛ кристалів $KAlP_2O_7$:Cr в залежності від довжини хвилі збудження. а) короткохвильове збудження: λ_{ex} = 114 (1), 160 (2) і 310 нм (3); б) довгохвильове збудження: λ_{ex} = 337,1 (1), 473 (2) та 632,8 нм (3). в) Ті ж самі криві, але зведені до однакової інтенсивності збудження: λ_{ex} = 632,8 (1), 473 (2), 337,1 (3), 310 (4), 160 (5) і 114 нм (6).

Легко помітити, що характер залежностей інтенсивності свічення в області температур 4,2–300 К, визначається «способом» передачі енергії збудження до центра свічення. Дійсно, довжини хвиль збудження 114–190 нм відповідають зонозонним переходам, збудження центрів свічення

світлом із довжинами хвиль 310–340 нм відбувається за участі дефектів гратки, а при довжинах хвиль 470–640 нм відбувається безпосереднє збудження домішки – іонів Cr^{3+}.

При температурах вище кімнатної поведінка температурних кривих є типовою для внутрішнього температурного загасання люмінесценції локальних центрів. З вигляду залежностей, наведених на рис. 2, можна також стверджувати, що довгохвильові внутрішньоцентрові збудження (λ_{ex} = 632,8 та 473 нм) та короткохвильові зонна-зонні збудження (λ_{ex} = 114–190 нм) є «крайніми» випадками, де чітко виявлено особливості релаксаційних та безвипромінювальних переходів, характерних для різних способів переводу ЦЛ у збуджений стан. Температурні залежності інтенсивності свічення при «проміжних» збудженнях, λ_{ex} = 250–350 нм, очевидно, є результатом сукупної дії процесів, характерних для «крайніх» випадків.

Описані температурні зміни відповідають відомим уявленням щодо поведінки широкосмугових спектрів випромінювальних переходів в локальних ЦЛ [4, 5].

Отже, наведені дані показують, що найбільш ефективним в люмінесценції є безпосереднє пряме збудження d-електронів іонів Cr^{3+} (рис. 2в, криві 1 та 2). При таких збудженнях, стрімке температурне загасання, яке при збудженні 632,8 нм починається вже від гелієвої температури, може бути результатом наближення збудженого стану, безпосередньо після збудження, до точки перетину **C** кривих основного $^4A_2$ та збудженого $^4T_2$ станів. В цьому випадку можуть проявитися два механізми загасання люмінесценції – оптичне загасання та теплове термодинамічне рівноважне загасання.

Оптичне загасання може зумовлювати, як дисипацію енергії збудження між збудженими станами, без переходу центру в основний стан, так і перехід в основний стан із втратою енергії збудження до встановлення теплової рівноваги в системі. Оптичне загасання є проявом вібронної взаємодії збуджених E і $^4T_2$ станів та основного $^4A_2$ стану. Дійсно, відповідно до схеми конфігураційних кривих збуджених станів (див. рис. 3), збудження з λ_{ex} = 632,8 та 473 нм переводять центр у стан $^4T_2$. Далі, центр швидко втрачає надлишок нерівноважної коливальної енергії, досягає точки перетину із основним станом $^4A_2$ внаслідок чого має можливість залишитися в стані $^4T_2$ або без випромінювання перейти в основний стан.

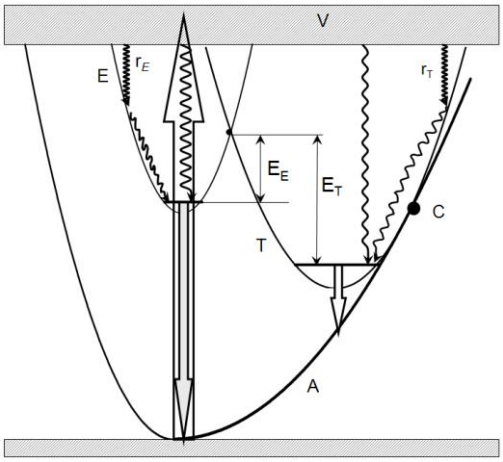


Рис. 3. Схема люмінесцентних процесів в кристалах $KAlP_2O_7$: Cr

Імовірність оптичного загасання безпосередньо не залежить від температури твердого тіла [6]:

$$\omega = \omega_0 \Phi^2 \left[-(E - E_c)\left(\frac{2\mu}{h^2}\right)^{1/3} \left| \frac{1}{F_{II}} - \frac{1}{F_I} \right|^{2/3} \right] \qquad (1)$$

В цій формулі

$$\omega_0 \equiv \frac{2\omega V^2 (2\mu)^{2/3}}{h^{4/3}(F_I F_{II})^{1/3}|F_I - F_{II}|};$$

$\Phi(x)$ – функція Ейрі, E – енергія, E_c – енергія в точці перетину кривих, F_I, F_{II} – нахили апроксимаційних прямих в точці перетину ($F_i \equiv \left.\frac{dE(x)}{dx}\right|_{x=x_C}$), μ – зведена маса центра.

З формули (1) видно, що імовірність оптичного загасання є найбільшою при проходженні точки перетину, а інтегральна за процесом релаксації імовірність оптичного загасання зростає з віддаленням від точки перетину в бік більш високих енергій.

Оптичний безвипромінювальний перехід відбувається всього лиш за «один прохід» вздовж потенціальної кривої [6], однак, на наш погляд і цього досить, щоби при зростанні температури зростала його імовірність. Дійсно, з підвищенням температури зростає середня амплітуда «одного» періоду коливань ансамблю центрів свічення, що можна розглядати як зростання ефективної відстані енергії збудження від точки перетину в бік більш високих енергій. Крім того, з підвищенням температури зростають середні числа заселення коливань центра свічення в основному стані, що, при тій же λ_{ex} буде

викликати перехід у найбільш високий коливальний рівень збудженого стану. З підвищенням температури основний внесок у загасання визначають термодинамічно рівноважні безвипромінювальні переходи. Сукупність всіх описаних процесів буде визначати хід кривої 1 на рис. 2в.

При λ_{ex} = 473 нм переходи з поглинанням відбуваються у більш високий збуджений стан $^4T_1$. В цьому випадку значна доля центрів втрачає енергію ще до переходу в люмінесцентний стан $^4T_2$, що обумовлює зменшення інтенсивності свічення. Однак, при λ_{ex} = 473 нм, на відміну від випадку з λ_{ex} = 632,8 нм, діапазон стрімкого падіння інтенсивності не спостерігається, що може бути наслідком того, що в стан $^4T_2$ центри попадають на високі коливальні рівні, для яких залежність імовірності оптичного загасання від відстані до точки перетину практично відсутня. Тому хід кривої I(T) на ділянці 100–300 К відповідає відомій кривій Мотта, яка характеризує надбар'єрне теплове загасання люмінесценції.

В побудованій нами моделі процеси люмінесценції розглядаються в схемі із чотирьох станів: основний, $^4A_2$, на рис. 3 і далі в тексті позначено літерою А; збуджений синглетний стан, ^2E, позначено – Е; триплетний люмінесцентний стан $^4T_2$ – Т; стан V – це деякий віртуальний «резервуар» в який іони Cr^{3+} переходять із основного стану А в результаті збудження. В «резервуарі» V центр протягом малого проміжку часу знаходиться у змішаному стані, який характеризує міжконфігураційну та вібронну взаємодію.

Частина центрів люмінесценції із стану V із імовірністю p_V безвипромінювально покидає систему, а інша частина, до встановлення теплової рівноваги, переходить в один із станів ^2E або $^4T_2$, із імовірностями r_E та r_T відповідно. Кількість збуджених центрів, що опиняються в станах ^2E чи $^4T_2$ (початкові заселенності рівнів), визначається характеристиками «резервуару». Для спрощення вважаємо, що p_V не залежить від енергії збудження та температури, а r_E та r_T, якщо і залежать від λ_{ex} і Т, то тільки як параметри. В такому випадку можна покласти, що $r_E + r_T = 1$. Зазвичай вважається, що γ_E та γ_T від Т також не залежать. Переходи з поглинанням (імовірність – α) чи з випромінюванням позначено прямими стрілками, релаксаційні процеси – хвилястими, а безвипромінювальні переходи – похилими стрілками (рис. 3).

Система кінетичних рівнянь в цій моделі:

$$\begin{cases} \frac{dn_E}{dt} = r_E n_V + p_{TE} n_T - \gamma_E n_E - d_E n_E - p_{ET} n_E \\ \frac{dn_T}{dt} = r_T n_V + p_{ET} n_E - p_{TE} n_T - \gamma_T n_T - d_T n_T \\ N = n_A + n_T + n_E + n_V \\ F_{TE} = p_{ET} \left(\frac{g_E}{g_T} \right) e^{-(E_T - E_E)/kT} = p_{ET}\, g e^{-\varepsilon/kT} \end{cases}$$

де N – кількість центрів люмінесценції, n_E та n_T – заселеності рівнів Е та Т, p_{ET} та p_{TE} – імовірності теплових надбар'єрних безвипромінювальних переходів із стану Е в стан Т, і навпаки, з висотою бар'єрів E_E та E_T відповідно, g_E та g_T – вагові фактори, $g = g_E/g_T$; $\varepsilon = E_E - E_T$, d_E та d_T – імовірності теплових безвипромінювальних переходів із станів Е та Т в основний стан:

$$d_E = C_{EO} e^{-E_E^a/kT}, \qquad d_T = C_{TO} e^{-E_T^a/kT},$$

При стаціонарному збудженні

$$\gamma_E n_E + \gamma_T n_T = n_V = const,$$

Інтенсивність свічення є сталою, незалежною від температури величиною: $I_{\hat{A}}(\dot{O}) + {}^2\dot{O}(\dot{O}) = n_V = Const$.

Експериментально, незалежність інтенсивності свічення від температури спостерігалася для кристалів $KAlP_2O_7$:Cr при ВУФ та УФ збудженні (λ_{ex} = 80–310 нм) в температурному інтервалі 80–300 К (рис. 2) Для температур нижчих 80 К при зміні температури інтенсивність люмінесценції може як зростати, так і зменшуватися а для більш високих температур завжди має місце загасання люмінесценції (рис. 2).

В загальному випадку, заселеності збуджених рівнів та інтенсивності свічення визначаються легко:

а) для рівня Т та радіаційного переходу з нього:

$$n_T = \frac{r_T D_E + p_{ET} r_E}{(D_T D_E - p_{ET} p_{TE})} n_V$$

$$I(T) = \gamma_T n_T = \frac{\gamma_T r_T D_E + \gamma_T r_E p_{ET}}{(D_T D_E - p_{ET} p_{TE})} n_V$$

б) для рівня Е та радіаційного переходу з нього:

$$n_E = \frac{r_E D_T + r_T p_{TE}}{D_T D_E - p_{ET} p_{TE}} n_V \quad ,$$

$$I_E = \gamma_E \frac{r_E D_T + r_T p_{TE}}{D_T D_E - p_{ET} p_{TE}} n_V$$

де введено позначення:

$$D_E = \gamma_E + p_{ET} + d_E$$
$$D_T = \gamma_T + p_{TE} + d_T$$

Для з'ясування можливих причин складної поведінки інтенсивності випромінювання в залежності від температури розв'язки системи знаходять покроково, від наднизьких температур – до високих, за виконання певних умов щодо температурного інтервалу, в якому цей розв'язок має силу.

Наднизькі температури. Це температури для яких за умов: $E_E \ll E_T \ll E_E^a;\ E_T^a$ виконується:

$kT \sim E_E;\ kT \ll E_T;\ kT \ll E_E^a;\ kT \ll E_T^a;$ тобто

температури є настільки низькими, що окрім безвипромінювальних переходів з рівня Е на рівень Т, всіма іншими можна нехтувати. За цих умов для інтенсивності випромінювання із станів Т та Е отримаємо:

$$I_T(T) = r_T n_V + \frac{r_E A e^{-E_E/kT}}{1 + A e^{-E_E/kT}} n_V = I_T(0) + \frac{r_E A e^{-E_E/kT}}{1 + A e^{-E_E/kT}} n_V$$
$$I_E(T) = \frac{r_E}{1 + A e^{-E_E/kT}} n_V = \frac{I_E(0)}{1 + A e^{-E_E/kT}} \qquad (2)$$

де, $C_E g_T / \gamma_E = A$.

З формули 2 видно, що $I_T(T)$ складається із температурно незалежної складової $(I_T(T\to 0)\to r_T n_V)$ $(I_T(T=0)=I_T(0))$, та іншого доданка, який визначає поведінку I_T.

З підвищенням температури інтенсивність випромінювальних переходів з рівня Е, внаслідок збіднення заселеності рівня Е, зменшується від значення $I_E(T\to 0)\to r_E n_V$ $(I_E(T=0)=I_E(0))$ до величини $I_E(0)/(1+A)$. При подальшому підвищенні температури зростає інтенсивність зворотних Т→Е надбар'єрних переходів результатом чого може бути уповільнення спаду і, навіть, зростання інтенсивності випромінювання з рівня Е при подальшому підвищенні температури.

Описаний розгляд було застосовано для аналізу залежностей інтенсивності випромінювання в інтервалі температур 4,2–100 К. На рис. 4 наведено модельні залежності $I_T(T)$ та $I_E(T)$ при значеннях параметрів: r_T = 0,8; r_E = 0,2; n_V= 100; E_E = 30 см$^{-1}$, A = 100,0.

Видно, що зростання інтенсивності ФЛ в діапазоні від 4,2 до 100 К, в принципі, могло би бути наслідком підживлення рівня Т за рахунок збіднення заселеності рівня Е. Однак, за таких обставин, абсолютна величина зростання інтенсивності свічення, зумовленого переходом $^4T_2 \to {}^4A_2$, має дорівнювати величині зменшення інтенсивності свічення на переході $^2E \to {}^4A_2$, що в нашому випадку не реалізується на експерименті.

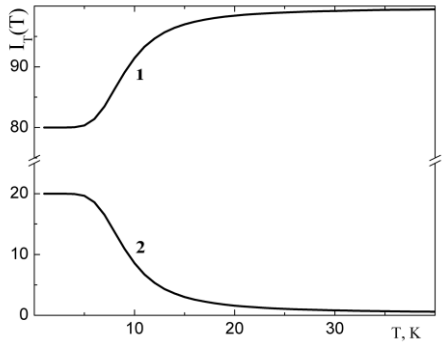


Рис. 4. Залежності $I_T(T)$ (1) та $I_E(T)$ (2).

Поведінку $I_T(T)$ в діапазоні 4,2 K<T<100 K можна пояснити проявом динамічної взаємодії електронного переходу в поглинанні (збудженні) із непарними коливаннями решітки. Дійсно зняти заборону на електродипольні переходи може як статична взаємодія, зумовлена пониженням симетрії оточення іона хрому, так і динамічна взаємодія, пов'язана із взаємодією із низько симетричними коливаннями решітки. Тобто імовірність переходу можна записати як суму:

$$W = W_{st} + W_{dyn}.$$

Статична складова, W_{st}, на відміну від динамічної, W_{dyn}, з точністю до неізотропного теплового розширення решітки, не повинна залежати від температури. Імовірність W_{dyn} можна записати як:

$$W_{dyn} = W_d cth(h\nu/2kT), \qquad (3)$$

де W_d – імовірність переходу із народженням одного непарного коливального кванту. Експериментальні криві $I_T(T)$ (рис. 2а) в частині їх зростання можна задовільно описати формулою 3 за умови різного внеску статичної складової для різних довжин хвиль збудження і участі в цих процесах ефективного коливання з частотою 44 см$^{-1}$. Інші параметри формули 3 різних значеннях $W_{ст}$ для кривих 1–3 з рис. 2 є такими: 1. $W_{ст}$ = 0,34, $W_д$ = 0,35; 2. $W_{ст}$ = 0,51, $W_д$ = 0,51; 3. $W_{ст}$ = 0,31, $W_д$ = 0,28.

Співвідношення 3 можна врахувати і в описаній вище теоретичній моделі рівнів, якщо в формулі 2 покласти: $r_T \sim cth(h\nu/2kT)$. Отже ці два описи експериментальних даних є

еквівалентними. Коли температура досягає значень 100 K і вище, зростання імовірності переходу внаслідок взаємодії з коливаннями, нівелюється безвипромінювальними переходами. В нашій моделі їх дія «включається» зростанням імовірності безвипромінювального переходу p_V.

Середні температури. Криві температурних залежностей інтенсивності люмінесценції в діапазоні 80–250 K також задовільно описуються наведеною розрахунковою моделлю. Однак, в цьому діапазоні діють декілька механізмів, які конкурують між собою, а тому смисл параметрів, стає невизначеним.

Високі температури:

$$kT >> E_E;\ kT >> E_T;\ \ kT \sim E_E^a;\ \ kT \sim E_T^a;$$

Врахувавши, що при цих температурах між рівнями E та T має місце динамічна рівновага заселеності, а інтенсивність випромінювання із стану E і при таких температурах незначна порівняно із інтенсивністю ФЛ із стану T, можемо покласти: $p_{ET} >> \gamma_E$. За таких умов, для інтенсивності свічення із рівня T одержимо:

$$I_T(T) = \frac{\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_E \left(\frac{g_E}{g_T} \right) e^{-\varepsilon / kT}} n_V$$

Як видно, ця формула, де $\varepsilon = \left| E_T^a - E_E^a \right|$: має смисл ефективної енергії активації безвипромінювальних переходів, є аналогом відомої формули Мотта для надбар'єрних теплових безвипромінювальних переходів. Опис кривих з рис. 2б за допомогою останньої формули дозволив визначити величини ε: 4300, 2500 та 3200 $см^{-1}$ для кривих 1, 2 та 3, відповідно. Як видно, значення ε залежать від довжин хвиль збудження, що узгоджується із викладеними вище міркуваннями стосовно ролі змішування електронно-коливальних станів.

Висновки

1) Ефективність вібронної взаємодії в центрах люмінесценції Cr^{3+} в кристалах $KAlP_2O_7$ залежить від умов передачі енергії збудження від матриці до іона хрому, що призводить до зміни внеску динамічної складової імовірності переходу збудження. Одержане співвідношення ($W_{дин}/W_{ст}$ ~ 1,0) показує, що навіть при низьких температурах переходи із збудженням іонів Cr^{3+} майже повністю зумовлено взаємодією із непарними коливаннями.

2) Значення ефективної енергії активації безвипромінювальних переходів, ε, залежать від довжин хвиль збудження люмінесценції, що є проявом ролі змішування збуджених електронно-коливальних станів іонів хрому.

Список використаних джерел

1. *Chukova O. V., Gomenyuk O. V., Nedilko S. G., Stus N. V.* Luminescence properties of $KAlP_2O_7$ crystals doped with chromium ions // Semiconductor Physics and Quantum Electronics. – 2004. – V. 7. – P. 72–76.

2. *Nedilko S., Gomenyuk O., Slobodyanik N., Stus' N.* Luminescence centers generated by chromium ions in potassium-aluminum (indium) diphosphates // Physics of the Solid State. – 2005. – V. 47, № 8. – P. 1576–1578.

3. *Nedilko S., Gomenyuk O., Slobodyanik N., Stus' N.* Luminescence spectroscopy of KMP_2O_7 diphosphate crystals (M = Al, In) doped with chromium ions // Ukr. J. Phys. – 2005. – V. 50, № 10. – P. 1168 –1174. (in Ukrainian).

4. *Pekar S. I.* Research of the electron theory of crystals. – Moscow: Gostehizdat, 1951. – 256 p. (in Russian).

5. *Lubchenko A. F.* Quantum transitions in impurity centers in solids – Kyiv: Naukova dumka, 1978. – 294 p. (in Ukrainian).

6. *Rebane K. K.* The criterion occurrence of luminescence // Research of luminescence / Tartu. – 1958. – V. 7. – P. 62–84. (in Russian).

Надійшла до редколегії 25.04.13

УДК 621.378.325

Захарченко І.В.[1], к. ф.-м. н., с. н. с.,
Крилов О.В. [1], аспірант,
Неділько С.Г. [1], д. ф.-м. н., зав. НДЛ
Робур Л.Й. [1], к. ф.-м. н., доцент.

Модельний розрахунок спектра повздовжніх мод лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка

Побудовано модель лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка. Розраховано частотний спектр випромінювання такого лазера для найнижчих повздовжніх мод TEM_{00q} в околі максимуму коефіцієнта підсилення активного середовища.

Ключові слова*: твердотільний лазер, інтерферометр Саньяка, модельний розрахунок.*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03022, м. Київ, пр-т. Глушкова 4б,
e-mail: olexandr.krylov@univ.kiev.ua

I.V. Zakharchenko[1], PhD, Sen. Sci. Res.,
O.V. Krylov[1], PhD stud.,
S.G. Nedilko[1], Dr. Sci., Head of R&D Lab.,
L.I. Robur[1], PhD, Sen. Lect.

Simulation of the longitudinal modes spectrum for the laser resonator based on Sagnac interferometer

A model of laser resonator based on Sagnac interferometer was constructed. Emission frequency spectrum of the lowest longitudinal modes TEM_{00q} of the laser in the vicinity of the maximum gain of the active medium had been calculated.

Key Words: *solid state laser, Sagnac interferometer, model calculation.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03022, Kyiv, Hlushkova ave., 4b,
e-mail: olexandr.krylov@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Резонатор на базі інтерферометра Саньяка (IS) (кільцевий резонатор) відомий тим, що забезпечує одномодову генерацію та жорстко наведену лінійну поляризацію випромінювання [1 - 3]. Необхідність розрахунку повздовжніх мод лазерного резонатора зумовлена тим, що такий резонатор може забезпечити не лише одномодовий але, водночас, і одночастотний режим генерації випромінювання [1]. В згаданій роботі, в моделі генерації динамічної гратки в пасивному модуляторі добротності резонатора, проведено якісний аналіз умов забезпечення одночастотного режиму. В цій моделі одночастотність забезпечується значним, на декілька порядків, перевищенням товщини модулятора добротності над періодом наведеної гратки [1]. Нещодавно нами експериментально показано можливість реалізації одночастотного режиму генерації такого лазера з пасивним модулятором добротності резонатора товщиною лише ~30 ÷ 50 мкм, що і викликало потребу розробки іншого обґрунтування умов одночастотної генерації.

В цій роботі запропоновано модель опису процесів поширення випромінювання в резонаторі на базі інтерферометра Саньяка, що пояснює одночастотний режим генерації лазера без залучення ідеї наведеної динамічної гратки.

Схему досліджуваного резонатора при парній кількості поворотних дзеркал наведено на рис. 1, а при непарній – на рис. 2.

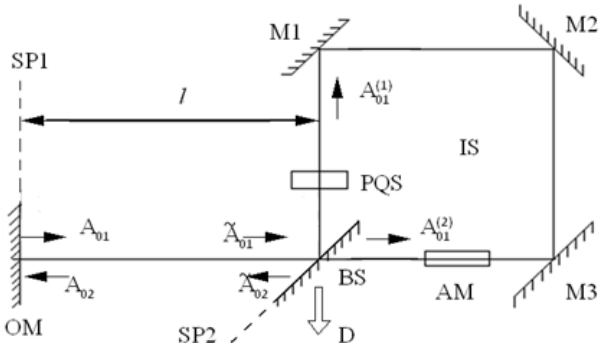


Рис. 1. Оптична схема резонатора на базі інтерферометра Саньяка при парній кількості дзеркал в кільці резонатора.

© Захарченко І.В., Крилов О.В., Неділько С.Г., Робур Л.Й. 2013

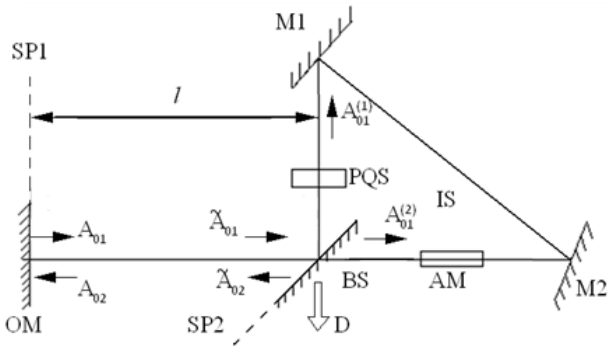


Рис. 2. Оптична схема резонатора на базі інтерферометра Саньяка при непарній кількості дзеркал в кільці резонатора.

На рис. 1 та рис. 2: OM – вихідне дзеркало резонатора (output mirror), BS (beam splitter) – світлоподільне дзеркало; M1, M2, M3 – поворотні дзеркала, PQS (passive quality switcher) – пасивний модулятор добротності резонатора, AM (active medium) – активне середовище лазера. Такий резонатор є складеним. Його можна представити у вигляді частини LR, що включає елементи OM, BS, M1, M2 і M3 у випадку парної (рис.1) та елементи OM, BS, M1 і M2 у випадку непарної кількості дзеркал в кільці інтерферометра Саньяка (рис. 2). Інша частина – це, власне, саме кільце інтерферометра Саньяка, IS, яке впливає як на інтенсивність, так і на фазу хвилі, що виходить з кільця в напрямку вихідного дзеркала OM.

Мала кутова розбіжність лазерного випромінювання у випадку використання оптичних елементів з плоскими поверхнями та майже нормальне падіння хвилі на вихідне дзеркало OM дозволяє використовувати наближення плоских хвиль при розгляді питання розповсюдження випромінювання в таких резонаторах.

Позначимо SP1 – стартову площину, що співпадає з поверхнею вихідного дзеркала OM, а SP2 – стартову площину, що лежить на поверхні світлоподільного дзеркала BS. Нехай A_{01} - амплітуда хвилі, що стартує з площини SP1, а A_{02} - амплітуда хвилі після **одного повного обходу** резонатора LR. Тоді справедливо (рис.1)

$$\begin{aligned} A_{02} &= A_{01}\exp\left(-i2\pi l\tilde{\lambda}\right)r_{BS}\exp\left(-i2\pi L^{*}\tilde{\lambda}\right)\times \\ &\times r_{M1}r_{M2}r_{M3}\tilde{t}_{BS}\exp\left(-i2\pi l\tilde{\lambda}\right)+A_{01}\times \\ &\times\exp\left(-i2\pi l\tilde{\lambda}\right)t_{BS}\exp\left(-i2\pi L^{*}\tilde{\lambda}\right)r_{M1}r_{M2}r_{M3}\times \\ &\times\tilde{r}_{BS}\exp\left(-i2\pi l\tilde{\lambda}\right)=A_{01}r_{M1}r_{M2}r_{M3}\times \\ &\times\exp\left[-i2\pi\left(2l+L^{*}\right)\tilde{\lambda}\right]\left[r_{BS}\tilde{t}_{BS}+t_{BS}\tilde{r}_{BS}\right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут: l - відстань між елементами OM та BS, L^{*} - оптична довжина кільця IS інтерферометра Саньяка, r_{BS} - амплітудний коефіцієнт відбивання світлоподільного дзеркала для хвилі зі сторони вихідного дзеркала OM, t_{BS} - амплітудний коефіцієнт пропускання для тієї ж хвилі. Величини $\tilde{r}_{BS}$ та $\tilde{t}_{BS}$ - амплітудні коефіцієнти відбивання та пропускання світлоподільного дзеркала для хвилі, що розповсюджується від кільця IS до вихідного дзеркала OM.

За означенням $r_{BS}=|r_{BS}|\exp(-i\pi)$, $t_{BS}=|t_{BS}|$, $\tilde{r}_{BS}=|\tilde{r}_{BS}|\exp(-i\pi)$, $\tilde{t}_{BS}=|\tilde{t}_{BS}|$.

Якщо світлоподільну пластину BS встановлено під кутом $\theta=45°$ до падаючого випромінювання, а **втратами на елементі BS можна знехтувати**, то виконуються наступні співвідношення:

$$|r_{BS}|=|\tilde{r}_{BS}|=|t_{bs}|=|\tilde{t}_{BS}|=\sqrt{2}/2 \quad (2)$$

Амплітудні коефіцієнти відбивання поворотних дзеркал M1, M2, M3 можна записати наступним чином

$$\begin{aligned} r_{M1}&=|r_{M1}|\exp(-i\pi), \\ r_{M2}&=|r_{M2}|\exp(-i\pi), \\ r_{M3}&=|r_{M3}|\exp(-i\pi), \end{aligned} \quad (3)$$

де $|r_{M1}|=|r_{M2}|=|r_{M3}|=1$, якщо знехтувати як **втратами** випромінювання на цих дзеркалах, так і незначною **неконтрольованою** зміною фази хвилі в околі точки $-\pi$.

З урахуванням (2) та (3) співвідношення (1) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A_{02} &= A_{01}\exp\left[-i2\pi\left(2l+L^{*}\right)\tilde{\lambda}\right]|r_{N}|\times \\ &\times\left[|r_{BS}||\tilde{t}_{BS}|+|t_{BS}||\tilde{r}_{BS}|\right]\exp\left[-i2\pi\left(N+1\right)\right], \end{aligned} \quad (4)$$

при цьому величина r_N є

$$r_N = |r_N| \exp(-i\pi N), \quad (5)$$

де ***N*** - число поворотних дзеркал в кільці IS без урахування світлоподільної пластини BS. Тоді величина ***(N+1)*** - **загальна кількість дзеркал** в інтерферометрі IS.

За умови неперервності тангенціальних складових електромагнітного поля при відбиванні хвилі від дзеркал резонатора LR, на стартовій площині SP1 повинна виконуватись рівність

$$A_{02} = -kA_{01}, \quad (6)$$

незалежно від загальної кількості $(N+1)$ дзеркал в кільці IS інтерферометра Саньяка. Одночасно ця рівність (6) визначає умови виникнення **набора стоячих хвиль** в резонаторі. Коефіцієнт k визначається величиною втрат випромінювання за один повний обхід резонатора хвилею A_{01}.

Якщо число ***(N+1)*** - **парне**, то співвідношення (4) з урахуванням (2), (3) має вигляд

$$A_{02} = \frac{1}{2} A_{01} \exp\left[-i2\pi\left(2l + L^*\right)\tilde{\lambda}\right]. \quad (7)$$

Тоді, з урахуванням (6), рівняння для визначення набору стоячих хвиль, що можуть існувати в резонаторі LR, є наступним

$$\exp\left[-i2\pi\left(2l + L^*\right)\tilde{\lambda}\right] = -1. \quad (8)$$

Загальний розв'язок рівняння (8) визначається співвідношенням

$$\varphi_n \equiv 2\pi\left(2l + L^*\right)\tilde{\lambda}_n + \pi = 2\pi n, n = 1, 2, 3... \quad (9)$$

Тут позначено, величина φ_n - фаза хвилі A_{02} на стартовій площині SP1 відносно хвилі A_{01}, n - індекси стоячих хвиль, які можуть існувати в резонаторі LR з **парним числом *(N+1)*** дзеркал в кільці IS, $\tilde{\lambda}_n$ - відповідні хвильові числа.

Якщо число дзеркал ***(N+1)*** в кільці резонатора LR1 є **непарним**, то рівняння (8) буде мати наступний вигляд

$$\exp\left[-i2\pi\left(2l + L^*\right)\tilde{\lambda}\right] = 1, \quad (10)$$

а загальним розв'язком буде

$$\varphi_n^{(odd)} \equiv 2\pi\left(2l + L^*\right)\tilde{\lambda}_n^{(odd)} = 2\pi n, n = 1, 2, 3... \quad (11)$$

де величина $\varphi_n^{(odd)}$ - фаза хвилі A_{02} на площині SP1 відносно хвилі A_{01}, а $\tilde{\lambda}_n^{(odd)}$ - відповідні величини хвильових чисел.

Співвідношення (5) виконується у тому випадку, коли світлоподільна пластинка BS не поглинає випромінювання і не вносить неконтрольований зсув фаз в ті хвилі, що взаємодіють з BS. Але в загальному випадку кільце інтерферометра Саньяка вносить втрати в лазерне випромінювання з наступних причин. По-перше, в кільці інтерферометра розташовується як активне лазерне середовище AM, так і модулятор добротності резонатора (активний чи пасивний); по-друге, діелектричні покриття поворотних дзеркал кільця IS вносять неконтрольований зсув фаз при відбиванні в околі величини $-\pi$ в ті хвилі, що поширюються назустріч одна одній в кільці. При інтерференції таких хвиль на світлоподільній пластині BS, частина випромінювання залишає резонатор у напрямку D, як показано на рис. 1. Крім того, на світлоподільному дзеркалі BS існує ще один канал втрат для хвиль $A_{01}^{(1)}$, які виходять з кільця IS у напрямку вихідного дзеркала OM. Втрати складають величину ½ для таких хвиль, і виходять з резонатора також в напрямку D. По цій причині з'являється коефіцієнт ½ у співвідношенні (7). Такі втрати, що відрізняються за фізичними причинами, можуть бути об'єднані одним терміном – внутрішні втрати γ_0 кільця резонатора IS. Визначимо величину внутрішніх втрат γ_0 кільця IS як [3]

$$\gamma_0 = -\ln T_0, \quad (12)$$

де величина T_0 – **енергетичний** коефіцієнт пропускання випромінювання на довжині хвилі генерації лазера. У цьому випадку величина r_N в співвідношеннях (4), (5) визначається наступним чином

$$r_N^2 = T_0 \quad (13)$$

Тоді для інтенсивності випромінювання на площині SP1 з урахуванням (4), (5), (13) та визначення

$$I = A^* A \quad (14)$$

де величина A - комплексна амплітуда хвилі, а A^* - величина, комплексно спряжена величині A, отримаємо співвідношення

$$I_{02} = I_{01}T_0. \qquad (15)$$

При цьому зауважимо, що рівність (15) виконується для довільного числа дзеркал в кільці інтерферометра IS.

Розглянемо хвилі в кільці інтерферометра Саньяка IS. Виберемо стартову площину SP2 в площині світлоподільної пластини BS. Позначимо, як показано на рис. 1 та рис. 2, $\tilde{A}_{01}$ – амплітуда хвилі, що входить в кільце IS зі сторони дзеркала OM; величина $\tilde{A}_{02}$ – амплітуда хвилі, що виходить з кільця IS в сторону дзеркала OM. Врахуємо, що хвиля $\tilde{A}_{01}$ ділиться світлоподільною пластиною BS на дві хвилі з рівними амплітудами $A_{01}^{(1)}$ та $A_{01}^{(2)}$ відповідно на стартовій площині SP2. Тоді

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{02} &= A_{01}^{(1)} r_{BS} r_N \exp\left[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}\right]\tilde{t}_{BS} + \\ &+ A_{01}^{(2)} r_{BS} r_N \exp\left[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}\right]\tilde{r}_{BS} = \\ &= \tilde{A}_{01} \exp\left[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}\right]\left[r_{BS}\tilde{t}_{BS} + t_{BS}\tilde{r}_{BS}\right] r_N .\end{aligned} \qquad (16)$$

Зауважимо, що $\tilde{A}_{01} = A_{01}^{(1)} + A_{01}^{(2)}$. Якщо врахувати співвідношення (5), тоді у випадку **парної** кількості дзеркал в кільці IS справедливо

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{02} &= \tilde{A}_{01} \exp\left[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}\right]\times \\ &\times \exp\left[-i4\pi\right]|r_N|\left[|r_{BS}||\tilde{t}_{BS}| + |t_{BS}||\tilde{r}_{BS}|\right]\end{aligned} \qquad (17)$$

Величина $|r_N|$, як і у випадку резонатора LR, визначається рівністю (13).

Фаза φ_m хвилі $\tilde{A}_{02}$ на стартовій площині SP2 після **одного повного обходу кільця** інтерферометра IS визначається рівнянням $\exp\left[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}\right] = 1$, звідки випливає

$$\varphi_m \equiv 2\pi L^* \tilde{\lambda}_m = 2\pi m, m = 1, 2, 3, ... \qquad (18)$$

При цьому зауважимо, що **фази** хвиль $A_{01}^{(1)}$ та $A_{01}^{(2)}$ на площині SP2 повинні співпадати **завжди**, незалежно від величини ***(N+1)***, для забезпечення **умови мінімального рівня** порогу генерації.

У випадку **непарної** кількості дзеркал в кільці IS (рис.2) співвідношення (17) перетворюється в наступне за умови $\exp\left[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}_m\right] = -1$. Звідки випливає

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{02} &= -\tilde{A}_{01} \exp\left[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}\right]\times \\ &\times |r_N|\left[|r_{BS}||\tilde{t}_{BS}| + |t_{BS}||\tilde{r}_{BS}|\right]\end{aligned} \qquad (19)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (19) має вигляд за умови $\tilde{A}_{02} = \tilde{A}_{01}$

$$\varphi_m^{(odd)} \equiv 2\pi L^* \tilde{\lambda}_m^{(H)} + \pi = 2\pi m, m = 1, 2, 3, ... \qquad (20)$$

За визначенням $I = A^* A$, для інтенсивностей хвиль $\tilde{A}_{01}$ і $\tilde{A}_{02}$ з урахуванням (13) та (17) виконується співвідношення

$$\tilde{I}_{02} = \tilde{I}_{01} T_0. \qquad (21)$$

Таким чином, резонатор на базі інтерферометра Саньяка, що показано на рис.1, виявляється можливим представити у вигляді двох зв'язаних між собою резонаторів, на основі розглянутого поширення хвиль в такому резонаторі: LR, IS. Розраховані амплітудні та фазові співвідношення наборів стоячих хвиль, що можуть існувати в таких резонаторах. При цьому розглядались лише найнижчі повздовжні моди вигляду TEM_{00q}. Очевидно, що частотний спектр випромінювання $I\left(\tilde{\lambda}\right)$, який виходить з такого резонатора, є добутком величин

$$I\left(\tilde{\lambda}\right) = I_{LR} \cdot I_{IS} \cdot K\left(\tilde{\lambda}\right), \qquad (22)$$

де величини I_{LR}, I_{IS} – інтенсивності випромінювання, що формуються в частинах LR та IS – відповідно; $K\left(\tilde{\lambda}\right)$ – частотний коефіцієнт підсилення активного лазерного середовища AM.

Для розрахунку величин із співвідношення (22) використаємо наступну процедуру. Поставимо у відповідність резонатору LR інтерферометр Фабрі – Перо (FP) і розрахуємо пропускання такого інтерферометра в залежності від частоти випромінювання. При цьому роль дзеркал FP виконує вихідне дзеркало резонатора OM, відстань між дзеркалами інтерферометра відповідає оптичній довжині резонатора, а поглинання випромінювання в FP визначається внутрішніми втратами γ_0 резонатора LR. Причиною для такої відповідності є той факт, що кути падіння лазерного випромінювання на кінцеві дзеркала резонатора близькі до нормальних, тому для опису процесу розподілу хвиль в плоскому резонаторі можуть бути використані методи багатохвильової інтерференції [4, 5].

В інтерферометрі IS процеси поширення хвиль описуються в термінах двопроменевої інтерференції [4, 5].

Для розрахунку частотного спектру випромінювання повздовжніх мод резонатора LR скористаємося формулами Ейрі для інтерферометра FP [4]. Тоді справедливо (в нормованих величинах)

$$I_{LR} = \frac{T_0\left(1-R_{OM}\right)}{1+R_{OM}^2T_0^2-2T_0R_{OM}\cos\varphi_n}, \qquad (23)$$

де φ_n визначаться із (9) і (11), R_{OM} – енергетичний коефіцієнт відбивання вихідного дзеркала ОМ. Для інтерферометра IS, як випливає із [4, 5],

$$I_{IS} = T_0\cos^2\varphi_m, \qquad (24)$$

де фаза хвилі на виході із інтерферометра IS $\varphi_m = 2\pi L^*\tilde{\lambda}_m$, для **парного**, і $\varphi_m^{(odd)} = 2\pi L^*\tilde{\lambda}_m + \pi$ - для **непарного** значення *(N+1)*.

Спектр смуги люмінесценції активного середовища описується формулою Лоренца:

$$K(\tilde{\lambda}) = \frac{\left(0.5\Delta\tilde{\lambda}\right)^2}{\left(\tilde{\lambda}-\tilde{\lambda}_0\right)^2+\left(0.5\Delta\tilde{\lambda}\right)^2}, \qquad (25)$$

де $\Delta\tilde{\lambda}$ – півширина контуру лінії люмінесценції; $\tilde{\lambda}_0$ – положення максимуму лінії люмінесценції. У нашому випадку як АМ використовується $Y_3Al_5O_{12}-Nd^{3+}$, для якої $\Delta\tilde{\lambda}$ = 6.5 см$^{-1}$, а величина $\tilde{\lambda}_0$ = 9396.55 см$^{-1}$ [6]. Очевидно, що контур люмінесценції АМ співпадає з контуром коефіцієнта підсилення активного середовища, який позначений величиною $K\left(\tilde{\lambda}\right)$.

Отримані співвідношення дозволяють розрахувати частотний спектр найнижчих повздовжніх мод TEM_{00q} лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка. При цьому фазові співвідношення для хвиль в кільці IS з **парною** та **непарною** кількістю дзеркал в кільці – є різними.

На рис. 3 та рис. 4 показано спектри пропускання T_{IFP} мультиплекса інтерферометрів, що моделює резонатор на базі інтерферометра Саньяка з довільним числом дзеркал в кільці IS в околі максимуму $\tilde{\lambda}_0$ коефіцієнта підсилення $K\left(\tilde{\lambda}_0\right)$ активного лазерного середовища АМ. В цих спектрах проявляється суттєве розрідження спектра повздовжніх резонаторних мод. При зміні кількості дзеркал в кільці резонатора з **парної** на **непарну** відбувається зміщення спектра, як цілого, на величину ~ 0,02 см$^{-1}$ при l = 7,3 см (рис. 4а) та 0,1 см$^{-1}$ при l = 13 см (рис. 4б).

Варіацією енергії накачування активного середовища можна виділити одну повздовжню моду, інтенсивність якої є максимальною. Як видно, інтенсивність цієї моди помітно перевищує за значенням інтенсивність сусідніх мод. Саме тому є можливість за рахунок деякого перевищення інверсії над її пороговим рівнем отримати генерацію лише на одній повздовжній резонаторній моді.

На рис. 3. показано спектр пропускання мультиплекса інтерферометрів при парній кількості дзеркал в IS при величині l = 7,3

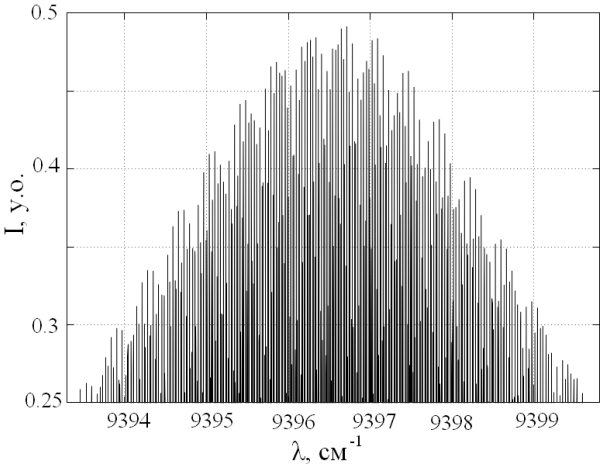


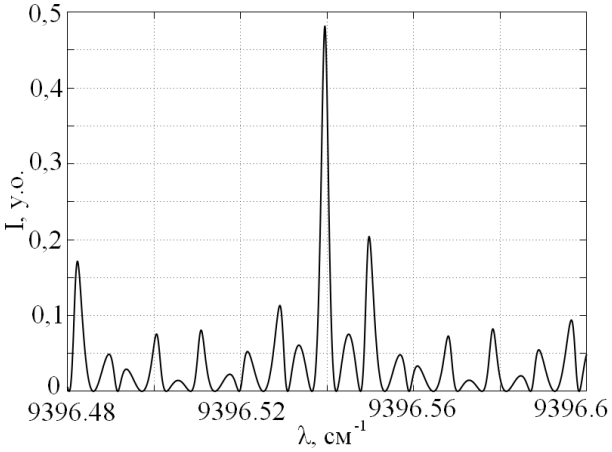
Рис. 3. Спектр пропускання мультиплекса інтерферометрів при парній кількості дзеркал в IS при величині l = 7,3 при різних масштабах.

Висновки

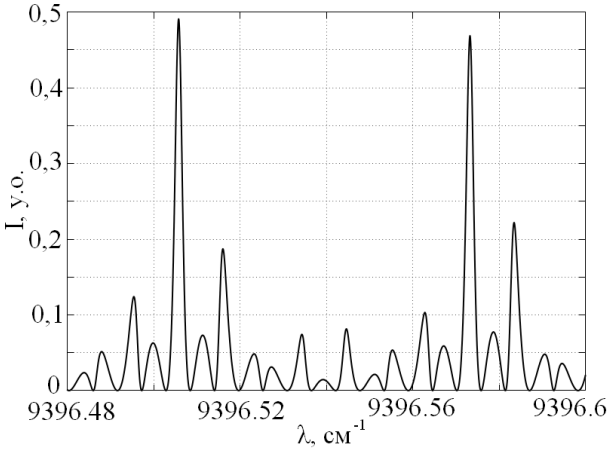
Побудовано модель мультиплексу інтерферометрів, яка визначає селективні можливості лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка.

З'ясовано можливість суттєвого розрідження спектра найнижчих повздовжніх резонаторних мод без застосування додаткових оптичних елементів.

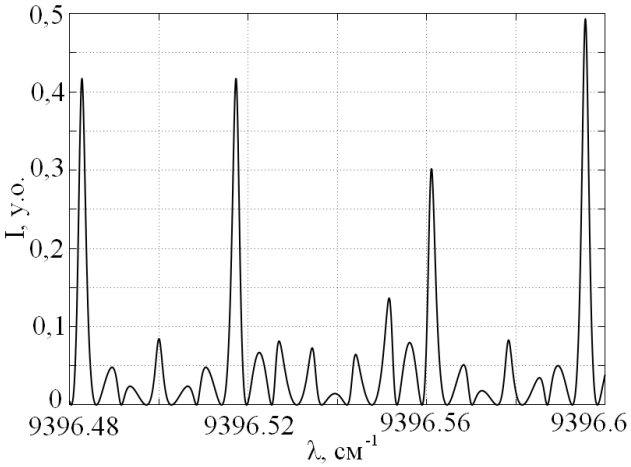
Розроблена теоретична модель пояснює можливість реалізації одночастотного режиму генерації лазера з резонатором на базі інтерферометра Саньяка.



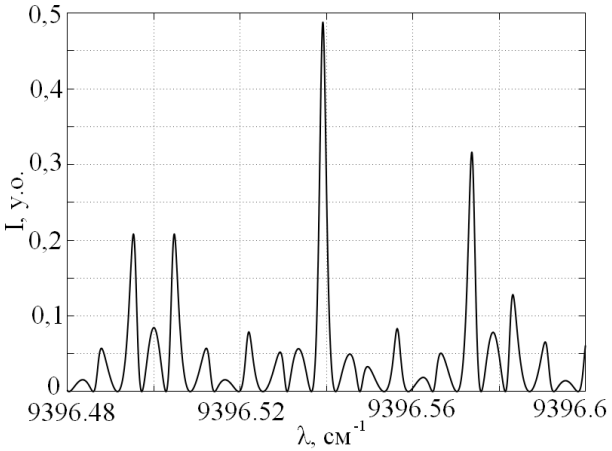
1*а*



2*а*



1*б*



2*б*

Рис. 4. Спектри пропускання мультиплекса інтерферометрів при парній (а) та непарній (б) кількості дзеркал в IS при величині l = 7,3 (1) та 13 см (2).

Список використаних джерел

1. *Grabovsky V. V. , Prokhorenko V. I. , Jatskiv D. Y. .* Features of single-frequency generation of laser with resonator based on Sagnac interferometer // Quantum electronic, 22, №4, 1995. – p.361 – 364. (in Russian)
2. *Zakharchenko I. V. , Krylov O. V. , Nedilko S. G. , Robur L. J. .* Optimization of parameters of lasers with resonator based on Sagnac interferometer // Visn., Ser. Fiz. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011, №12, p. 15 – 19. (in Ukrainian)
3. *Koshelenko V. P. , Krylov O. V. , Zakharchenko I. V. , Nedilko S. G.* Experimental determination of internal losses of solid state pulse laser // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2010., №3; p.261 -264. (in Ukrainian)
4. *Born M. , Wolf E.* Principles of optics. // New York, Pergamon press - 1968. – 856p. (in English)
5. *Borbat A. M. , Gorban I. S. , Okhrimenko B. A. …* Optical measurements // Kyiv, Tekhnika - 1967. – 419p. (in Russian)
6. *Zverev G. M. , Holyaev J. D. , Shalaev E. A. and other.* YAG lasers with neodymium // Moskow: Radio i svyaz - 1985–144 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 24.03.2013

УДК 536

Мороз К.О., к.ф.-м.н., доц.

Вплив тиску на калоричні властивості *н*-парафінів та ароматичних вуглеводнів

Досліджений вплив тиску на калоричні термодинамічні властивості рідких н-парафінів та ароматичних вуглеводнів. Експериментально визначені прирости теплоємності співставлено із внесками знайденими на базі теоретичних припущень з врахуванням заморожування трансляційних, коливальних та обертальних ступенів вільності молекул.

Ключові слова: термодинамічні властивості, тиск, теплоємність, ступені вільності

K.O. Moroz, Ph.D., Assoc. Prof.

The influence of pressure on caloric properties of *n*-alkanes and aromatic hydrocarbons

Investigated is the influence of pressure on caloric properties of liquid n-alkanes and aromatic hydrocarbons. The experimental isochoric deviations of heat capacities are compared to those found in theoretical models taking into account freezing of transitional, rotational and vibrational degrees of freedom.

Keywords: magnetic liquid system, water, hydrogen bonding, thermodynamic properties

*E-mail: morozko@univ.kiev.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Встановлення зв'язку між фізичними властивостями рідин та їх молекулярною будовою в широкому інтервалі зміни термодинамічних параметрів є однією з фундаментальних задач молекулярної фізики. Проте, через відсутність можливості коректно розрахувати міжмолекулярну взаємодію та через математичні труднощі розв'язку інтегральних рівнянь, які не усуваються повністю застосуванням числових методів, цей зв'язок можна точно встановити лише в обмеженій кількості випадків, зокрема, для простих рідин (ізотропних або слабко анізотропних). Для переважної більшості практично важливих молекулярних рідин, теорія перебуває на стадії розвитку, що приводить до необхідності пошуку вказаних зв'язків експериментальним шляхом [1, 2]. Метою даної роботи є визначення впливу тиску на трансляційні, обертальні та коливальні рухи молекул в поліциклічних рідких вуглеводнях. Для розв'язку цієї задачі було здійснені експериментальні дослідження калоричних властивостей пінану, α-пінену, 1-3-диметиладамантану. P-V-T вимірювання досліджених рідин були проведені методом сільфонного п'єзометра з диференціальним трансформаторним датчиком лінійних зміщень в інтервалі тисків від 0.1 до 165 МПа та температур від 313 К до 453 К. Оцінка впливу тиску на трансляціні, обертальні та коливальні ступені вільності молекул знайдена на базі проведеного експерименту та теоретичних припущень.

Ізобарична молярна теплоємність C_P каркасних вуглеводнів, була отримана за експериментальними даними густини згідно виразу:

$$C_P = C_{P,0} - \int_{P,0}^{P} T\left(\frac{d^2V}{dT^2}\right)_P dP\,, \qquad (1)$$

де $C_{P,0}$ – величина ізобаричної молярної теплоємності при атмосферному тиску, яка визначалась методом групових складових Бенсона [3]. Результати розрахунку C_P для пінану α-пінену і 1-3-диметиладамантану представлені на рисунку. Похибка визначення теплоємностей C_P та C_V складала 7%.

Для того, щоб з'ясувати який вплив на теплофізичні властивості має структура досліджених молекулярних рідин при різному тиску були проаналізовані значення ізобаричної теплоємності C_P та ізохоричної теплоємності C_V на ізохорах. Ізохоричну теплоємність C_V рідин можна представити як суму наступних складових [4]:

$$C_V = C_{V\,ІГ} + C_{V\,стр} \qquad (2)$$

$$C_V = C_{V\,тр} + C_{V\,кол} + C_{V\,об} \qquad (3)$$

де $C_{V\,ІГ}$ — теплоємність в розрідженому газоподібному стані, $C_{V\,стр}$ — внесок в теплоємність, пов'язаний з утворенням структури в речовині при переході із стану ідеального газу в рідкий стан, $C_{V\,тр}$ = 3/2 R — внесок від трансляційних ступенів вільності, $C_{V\,кол}$ = 2 *i*/2 R

© Мороз К.О., 2013

— внесок від коливальних ступенів вільності, $C_{V\,об} = i_{об}/2\,\mathrm{R}$ — внесок від обертальних ступнених вільності, де $i_{кол}$ та $i_{об}$ — кількість відповідно коливальних та обертальних ступенів вільності в молекулі. Теплоємність $C_{V\,ІГ}$ може бути визначена експериментально або розрахована теоретично за відомою будовою молекул речовини [3].

Тоді ізобаричну теплоємність $C_{P\,ІГ}$ можна представити у вигляді наступних складових:

$$C_P = C_{P\,ІГ} + C_{P\,стр}\,, \quad (4)$$

$$C_{P\,ІГ} = C_{V\,ІГ} + R. \quad (5)$$

В роботі були досліджені прирости $C_{P\,стр}$ та $C_{V\,стр}$ при зміні тиску від 0.1 МПа до 165 МПа. Результати цих досліджень приведені в таблиці та на графіку. Теплоємність C_V для двооксиду вуглецю CO_2 та нормальних парафінів була знайдена за швидкістю поширення ультразвуку та густиною взятими з міжнародних довідкових таблиць [5] та роботи [2]. Як випливає з проведених розрахунків, зростання тиску в рідкому двооксиді вуглецю CO_2 від 6 до 136 МПа відповідає зменшенню значення $C_{V\,стр}$ на 4.4 Дж/(моль К), що складає близько ½ R. Причину такої зміни структурного внеску в теплоємність можна шукати в заморожуванні одного із ступенів вільності молекул внаслідок зростання тиску. На рисунку 1 поданий структурний внесок в ізобаричну молярну теплоємність $C_{P\,стр}$ на ізохорі 650 *кг/м*^{3}. Як випливає з таблиці 1 та рисунка 1, для молекулярних рідин більш складної будови, таких, що мають більшу кількість ступенів вільності молекул, залежність молярних

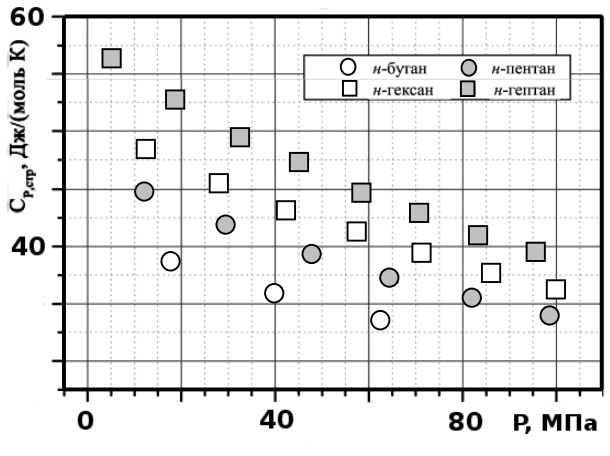


Рис. 1. Структурний внесок $C_{P\,стр}$ в ізобаричну молярну теплоємність *н*-парафінів

Таблиця 1

Структурний внесок $C_{P\,стр}$ в ізобаричну молярну теплоємність *н*-парафінів та полі-циклічних ароматичних вуглеводнів

Речовина	$C_{P\,стр}$ Дж/(моль К 100 МПа)
н-бутан	-10.0
н-пентан	-14.5
н-гексан	-16.0
н-гептан	-18.5
3-циклопентилтолуол	-59.0
3-циклогексилтолуол	-55.0

теплоємностей від тиску стає іще більш вираженою: приріст структурного внеску в молярну теплоємність $C_{P\,стр}$ зростає до –18 Дж/(моль К) для нормальних парафінів та до –59 Дж/(моль К) для ароматичних поліциклічних вуглеводнів при зростанні тиску від 0.1 МПа до 100 МПа, що відповідає заморожуванню не менше чим 7 ступенів ступенів вільності в молекулах цих речовин.

Таким чином, на основі проведеного аналізу можна зробити наступний підсумок. Зростання тиску в досліджених вуглеводнях супроводжується зменшенням структурного внеску в молярні теплоємності $C_{V\,стр}$ та $C_{P\,стр}$, що можна пояснити зменшенням кількості ступенів вільності молекул рідин. Для речовин з більш складною молекулярною будовою залежність внеску $C_{P\,стр}$ від тиску стає більш вираженою і відповідає заморожуванню не менше 3 ступенів вільності молекул в досліджених *н*-парафінах та не менше 7 ступенів вільності в циклопентил- та циклогексил-толуолі при зростанні тиску на 100 МПа.

Список використаних джерел

1. Adamenko I.I., Bulavin L.A. Physics of liquids and liquid systems. - К.: «ASMI», 2006. – 663р.

2. I.Adamenko, Ya. Skirda Scaled particle models and thermodynamic properties of *n*-alkanes // Cond. Matter Phys. (1997) No 9, 13-18.

3. N. Cohen, S. W. Benson Estimation of heats of formation of organic compounds by additivity methods // Chem. Rev.; 1993; 93(7); 2419-2438; Scott Gronert *in* J. Org. Chem. (2006) 71(3) P.1209

4. Yunus A. Cengel and Michael A. Boles, Thermodynamics: An Engineering Approach 7th Edition, , McGraw-Hill, 2010

5. R. Span, W. Wagner *in* J. Phys. Chem. Ref. Data 25 (1996) 1509-1596.

Надійшла до редколегії 8.04.2013

УДК 538.911:54.057

Семенько М.П.[1], д. ф.-м. н.,проф.,
Захаренко М.І. [1], д. ф.-м. н.,проф.,
Калниш Т.В. [1], аспірант.

Метод синтезу нанокомпозиційних матеріалів ТРГ-перехідний метал

Представлено новий метод синтезу нанокомпозиційних матеріалів на основі терморозширеного графіту, що дозволяє отримати в структурі композиту наночастинки перехідного металу (а саме, Ni, Co, Cu), уникаючи процедуру відновлення в потоці водню.

Ключові слова: *терморозширений графіт, нанокомпозит, наночастинки металу.*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д, e-mail: smp@ univ.kiev.ua

M.P. Semen'ko[1], Dr. Sci., Prof.,
M.I. Zakharenko[1], Dr. Sci., Prof.,
T.V. Kalnysh[1], PhD stud.

Method of synthesis of nanocomposite materials TEG-transition metal

A new method of synthesis of nanocomposite materials (NCM) based on the thermoexfoliated graphite (TEG) is described. It allows to obtain pure metallic nanoparticles (Ni, Co, Cu) in the structure of the composite without an additional reduction in a hydrogen flow.

Key Words: *thermoexfoliated graphite, nanocomposite, metal nanoparticles.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: smp@ univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Останнім часом науковий напрям, що пов'язаний із створенням нанокомпозиційних матеріалів (НКМ), які включають металеві наночастинки (МНЧ), набув великої популярності. Це пов'язано в першу чергу з тим, що введення МНЧ надає матеріалам нових властивостей. НКМ з МНЧ широко використовуються як каталітичні системи, а також як засіб здешевлення виробництва пристроїв, в яких раніше застосовувались чисті метали. Для таких матеріалів використовують полімерні [1,2], керамічні, різні вуглецеві [3] матриці.

Для виробництва каталітичних матеріалів найчастіше використовують активований вуглець, сажу, однак останнім часом активно ведеться пошук альтернативних вуглецевих носіїв для використання, як в класичному каталізі [4], так і в нових сферах (створення функціональних матеріалів з прогнозованими електро-магнітними властивостями [5,6]; виробництво паливних елементів, літій-йонних батарей). Перспективним матеріалом, що в останні роки використовується для цих цілей, є терморозширений графіт (ТРГ) [7], який завдяки своїй великій питомій поверхні представляє собою винятковий носій, що дає змогу отримувати НКМ з досить великим вмістом МНЧ.

Досить актуальним питанням залишається отримання на поверхні ТРГ наночастинок чистого металу. Найбільш поширеним методом для вирішення цієї проблеми є відновлення оксидів, що утворились в ході термічної обробки, в потоці водню [8, 9].

Нами розроблено альтернативний метод синтезу НКМ ТРГ-Ме (Ме=Ni, Co, Cu), що полягає в прямому відновленні металу з його нітрату або ацетату шляхом додаткового просочування шихти спиртовим розчином каніфолі та його термообробкою. Це дозволяє уникнути процедуру відновлення в потоці водню. Розглянемо цей метод більш детально.

Структуру та фазовий склад зразків досліджували методом рентгенівської дифракції за допомогою рентгенівського дифрактометру ДРОН-4,0 з використанням CoK_α випромінювання. Морфологію зразків досліджували на скануючому електронному мікроскопі JEOL JCM-5000.

Зазвичай стандартна процедура синтезу НКМ на першому етапі включає просочування ТРГ водним розчином солей та термообробку при T=800-900°С. В такому випадку утворюються оксиди відповідних металів. Так, для прикладу, на рис.1 наведено дифракційну картину, одержану від зразка після термічної обробки

© М.П. Семенько, М.І. Захаренко, Т.В. Калниш, 2013

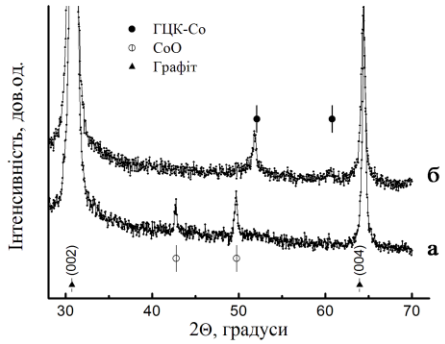


Рис.1. Дифрактограми зразків ТРГ, просоченого $Co(NO_3)_2$, після термоудару при 800°С протягом 3 хв: а – без додаткової обробки спиртовим розчином каніфолі; б – приготований за описаним методом

ТРГ, просоченого $Co(NO_3)_2$, при температурі *T*=800°С протягом 3 хв (дифрактограма *а*). Як видно, на цій дифракційній картині присутні лише дифракційні максимуми від графіту та оксиду CoO.

З метою структуризації ТРГ нами були апробовані різні органічні сполуки. Очікувалось, що термічна обробка просоченого ними ТРГ при їх швидкому вигоранні або розкладі призведе до додаткового диспергування частинок ТРГ. Серед органічних сполук нами було використано і спиртовий розчин каніфолі. Просочення ним шихти ТРГ+CoO та його термообробка дала не лише очікуваний ефект, але й призвела до відновлення CoO до практично чистого металу. Це підтверджують результати рентгенівської дифракції (рис.1, дифратограма *б)*. Як видно, на дифрактограмі наявні лише дифракційні

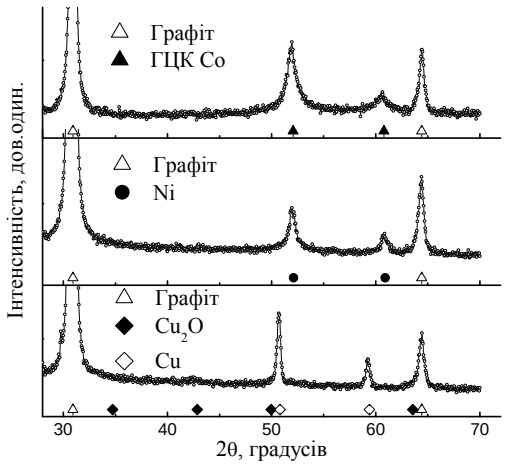


Рис. 2. Дифрактограми зразків на основі ТРГ після термоудару при 800°С протягом 3 хв: *а* – просочений $Co(NO_3)_2$; б – просочений $Ni(NO_3)_2$; в – просочений $Cu(NO_3)_2$.

максимуми від графіту та ГЦК-Co. Крім цього, порошок набував феромагнітних властивостей, що свідчило про „металічність" Co.

Подальші дослідження показали, що процедуру попереднього одержання шихти ТРГ-оксид можна уникнути, якщо просочувати розчином каніфолі висушену шихту ТРГ-нітрат (ацетат). В результаті термообробки такого прекурсору утворюються також металічні включення. Такий метод був апробований і для інших металів. Крім системи ТРГ-Co, було синтезовано і НКМ ТРГ-Ni та ТРГ-Cu.

На рис. 2 наведені дифракційні картини від НКМ ТРГ-Co, ТРГ-Ni та ТРГ-Cu, одержаних такою процедурою при термообробці *T*=800°С протягом 3 хв. Як видно, у всіх випадках формується структура, що складається з графіту та практично чистого металу. Оксид в такому випадку практично відсутній, або є в незначній кількості в сильно дисперсному стані. Виняток складає НКМ ТРГ-Cu, синтез якого при високих температурах призводив завжди до утворення досить незначної кількості оксиду CuO. Оскільки мідь має високу схильність до окислення, то, скоріш за все, цей оксид утворюється при охолодженні обробленого матеріалу.

З використанням рівняння Селякова-Шеррера за шириною дифракційних максимумів (111) та (200) металу була зроблена оцінка розміру металічних включень. Для зразків, дифракційні картини яких зображені на рис. 2., розмір металічних включень становить 20, 36 та 70 нм для НКМ ТРГ-Co, ТРГ-Ni та ТРГ-Cu, відповідно.

Кількість утворених металічних включень, як і слід було очікувати, визначається в першу чергу кількістю солі у шихті. Найбільш детально це питання було досліджено для НКМ ТРГ-Cu. Так, на рис. 3 зображено залежність відношення інтенсивностей ліній (111) Cu до лінії (002) графіту від відношення мас солі та ТРГ в шихті. Як видно, має місце зростаюча, практично лінійна залежність, що досить легко пояснюється на основі загальних принципів рентгеноструктурного аналізу, оскільки кількість утвореного металу пропорційна масі осадженої солі. Подібними залежностями характеризуються і інші НКМ. Кількість металу в НКМ можна було б оцінити лише за масою безводного нітрату, або нітрату з відомою кількістю гідратних груп. Але, насправді, кількість металічної компоненти визначається досить наближено, оскільки, наприклад, для нітрату міді відомо декілька типів кристалогідратів [10]. В такому випадку максимальна кількість осадженої міді в НКМ,

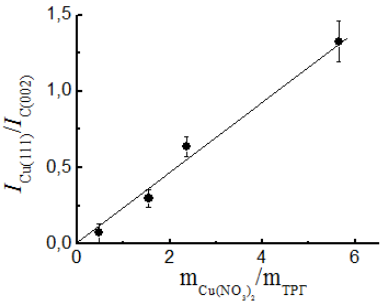
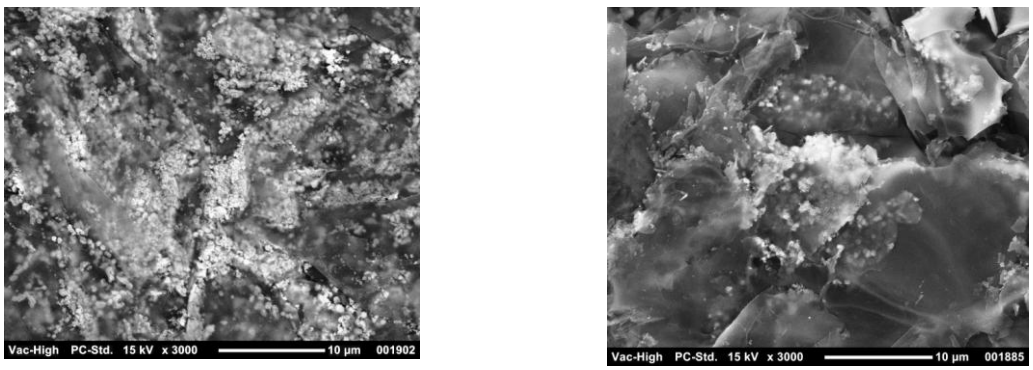


Рис. 3. Залежність відношення інтенсивностей лінії (111) Cu до лінії (002) графіту від відношення мас солі та ТРГ в вихідній шихті

150÷200 нм, а ТРГ, що був просочений розчином каніфолі та термооброблений при *T*=800°C, має розмір кристалітів 60÷90 нм. В такому випадку спостерігається і суттєва зміна його властивостей. Наприклад, питомий електроопір збільшується в 6-8 разів.

Результати, розглянуті вище, були одержані для НКМ, синтезованих при *T*=800°C. Але, як показали дослідження, температура відновлення металу може бути понижена аж до 350°C. Так, на рис. 5 наведено серію дифрактограм, одержаних від НКМ ТРГ-Cu, синтезованих з однієї й теї ж шихти, але при різних температурах (мінімальна



а б

Рис. 4. Електронно-мікроскопічні зображення поверхонь НКМ ТРГ-CoO (а) та ТРГ-Co (додатково просочений розчином каніфолі перед термоударом).

результати яких зображені на рис. 3, може бути оцінена в межах від 49 мас.% (якщо кристалогідратом є $Cu(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$) до 66 мас.% (якщо використовується безводний $Cu(NO_3)_2$).

В процесі синтезу мають місце і структурно морфологічні зміни як модифікатора, так і частинок ТРГ. За даними електронної мікроскопії при термообробці шихти ТРГ- $Co(NO_3)_2$, що не піддавалась додатковому просоченню розчином каніфолі, на поверхні частинок ТРГ формуються частинки CoO майже сферичної форми з розміром менше ніж 100 нм (рис. 4, *а*). Додаткове просочення розчином каніфолі цієї ж шихти призводить до істотних змін розподілу часток Co по поверхні графіту (рис. 4,б). Можливо, що така різниця в розподілах часток по поверхні зумовлена не тільки подрібненням часток Co при відновленні, але й частковим їх зануренням в кристаліти ТРГ.

Крім цього відбувається зміна структури та морфології і часток ТРГ. Як свідчать результати електронної мікроскопії та рентгенівської дифракції, має місце суттєва дефрагментація кристалітів графіту. Так, за даними рентгенівської дифракції, розмір кристалітів графіту в напрямі осі *c* у чистого ТРГ складає

450°C, але подібний результат одержується і для 350°C, але це вимагає більших часів термообробки). Як видно, на всіх дифрактограмах присутні чіткі відбиття графіту, міді та слабкі максимуми оксиду міді. Інтенсивність останніх знижується при пониженні температури синтезу. Подібні результати були одержані і для інших НКМ.

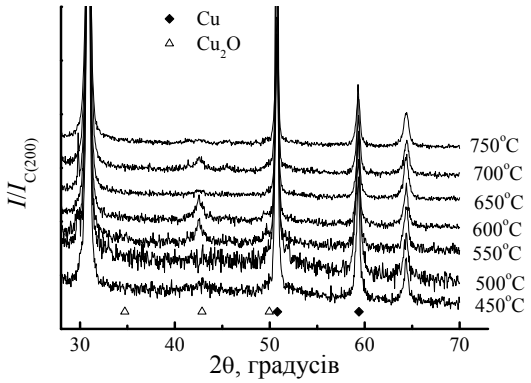


Рис. 5. Дифрактограми НКМ ТРГ-Cu, синтезованих при різних температурах (температура синтезу вказана біля дифрактограм)

Детально вплив температури синтезу на структуру в цій роботі аналізуватися не буде, але саме цей фактор досить важливий з технологічної точки зору, оскільки це дозволяє підвищити економічний аспект синтезу і суттєво розширити номенклатуру металічних компонент, що можуть бути осаджені на ТРГ.

Реакція відновлення оксиду металу до чистого металу полягає у взаємодії оксиду металу з відновлювачем, в результаті чого утворюються термодинамічно стійкі речовини, такі як H_2O (відновлювач H_2), CO_2 (відновлювач CO), тощо. Як правило, ці процеси протікають при досить високих температурах і проводяться в атмосфері відновлювача. В нашому випадку відновлювачем виступає каніфоль, основною складовою якої є абієтинова кислота ($C_{19}H_{29}COOH$). На жаль, точно реакцію взаємодії цієї сполуки з оксидом металу невідомо. Але її склад, очевидно, обумовлює утворення при взаємодії з оксидом металу як CO_2, так і H_2O. Слід передбачити і каталітичний вплив цього відновлювача, про що свідчить значне пониження температури синтезу НКМ. Детально ж механізм процесів, що відбуваються в такому випадку, вимагає проведення детальних хімічних досліджень.

Висновки

Показано, що після термічної обробки шихти ТРГ+нітрат металу, додатково просоченої спиртовим розчином каніфолі, має місце відновлення металічної компоненти. Це дає змогу уникати процедуру відновлення у потоці водню. Показано, що температура відновлення може бути знижена аж до 350°C, що значно підвищує економічний ефект методу і дає принципову можливість розширити номенклатуру металічних складових, що можуть бути осаджені на ТРГ.

Робота виконана при підтримці ДФФД України (проект № Ф53.2/041).

Список використаних джерел

1. *Trakhtenberg L. I., Gerasimov G. N., Potapov V. K., Rostovshchikova T. N., Smirnov V. V., Zufman V. Yu.* Nanocomposite Metal-Containing Polymer Films: Sensory, Catalytic, and Electrophysical Properties // Moscow University Chemistry Bulletin. – 2001. – **42**, No. 5 – P. 325-331. (in Russian).
2. *Muzalev, P. A.; Kosobudskii, I. D.; Ushakov, N. M.; Panova, L. G.* Metal nanoparticles in acrylic polymer matrices // Inorganic Materials: Applied Research. – 2011. – **2.** – P. 528-530.
3. *Komogortsev S.V., Iskhakov R.S., Shaikhutdinov K.A., Mal'tsev V.K., Okotrub A.V., Kudashov A.G., Shubin U.V.* Magnetic properties of NixCo1-x nanoparticles in carbon nanotubes // Physics of metals and metallographu. – 2006. – **102.** – P. S67-S70.
4. *Yatsimirsky V.K., Maksimov Yu.B., Suzdalev I.P., Ischenko E.V., Zakharenko N.I., Gayday S.V.* Phisicochemical properties and catalytic activity in CO oxidation of Fe-Co-Cu oxide systems // Abstracts of An the European Catalysis Forum, EuropaCat-VI., Innsbruck, Austria. –2003. – P.A2.049.
5. *Matzui L.Yu., Vovchenko L.L., Kapitanchuk L.M., Zakharenko M.I., Babich N.G.* C–Co Nanocomposite Materials // Inorganic Materials – 2003.- **39**, No. 11 – P. 1147-1153.
6. *Matzui L.Yu., Vovchenko L.L., Stelmakh O. I., Kapitanchuk L.M.* – III International Conf. MEE-2004. – P. 338.
7. *Vovchenko L., Matzui L., Zakharenko M., Babich M., Brusilovetz A.* Thermoexfoliated graphite as support for production of metal-graphite nanocomposites //Journ. Chem. Phys. Solids.- 2004. – **65.** – P. 171-175.
8. *Vovchenko L.L., Matzui L.Yu., Brusilovets A.I.* Synthesis of graphite-metal composite materials by salt thermolysis // Functional materials. – 2003. – **10,** No. 4. – P.747-753.
9. *Tsurul' M.F., Kharkov E. I.M, Matzui L.Yu., Vovchenko L.L., Morozovs'ka N.O.* Method of synthesis of metallized thermoexfoliated graphite. //Patent of Ukraine No. 40256, 02.011.2000.
10. *Lidin R.A., Molochko V.A., Andreeva L.L.* Reactivity of Inorganic Substances Handbook / ed. Lidin R.A.— 2nd ed., Rev. and add.— Moscow: Drofa, 2007. — P. 147. — 637 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 16.04.2013

УДК 519.9 669.25:535.32

Стащук В.С.[1], д.ф.н., проф.,
Бондар В.М.[1], асп.,
Полянська О.П.[1], інж.,
Кудін В.Г.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Філіпов Я.В.[1], інж.,
Чернуха Є.О.[1], студ.

Оптичні та електронні властивості багатих на нікель сплавів системи Ni-Al-B-C

Методами спектральної еліпсометрії виміряно показники заломлення n та поглинання χ сплавів $Ni_{79}Al_{15}B_6$ та $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ в широкому спектральному діапазоні 0,24–2,8 мкм (0,44–5,09 еВ) при кімнатній температурі. На основі цих даних розраховані оптична провідність σ та коефіцієнт дзеркального відбивання при нормальному падінні світла R. Детально проаналізовано дисперсійні залежності оптичної провідності σ(hν), яка пропорційна міжзонній густині електронних станів. Встановлено, що при додаванні домішок Al, C, B в електронному спектрі розчинника Ni утворюються нові домішкові зони, які відповідають за додаткове поглинання в цих сплавах. Висловлено припущення щодо локалізації домішкових енергетичних рівнів в цих сплавах при різних енергіях вище рівня Фермі.

Ключові слова: *електронна структура, домішкова зона, міжзонні переходи, густина електронних станів, спектр оптичної провідності.*

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: bond270587@i.ua

V.S. Stashchuk[1], Dr. Sci, Prof.,
V.M. Bondar[1], PhD stud.,
O.P. Polianska[1], Eng ,
V.G. Kudin[1] PhD,
Ya.V. Filipov[1], Eng,
Ie.O. Chernukha [1], stud.

Optical and electronic properties of the Ni-Al-B-C alloys rich by nickel.

The refractive n and absorption χ indices of $Ni_{79}Al_{15}B_6$ and $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ alloys were measured in wide spectral range of 0.23÷2.8 μm (0.44÷5.09 eV) at room temperature. Based on these data the optical conductivity σ and reflection coefficient R at normal incidence were calculated. The dispersion dependence of optical conductivity σ which is proportional to the interband density of electronic states has been analyzed. New impurity bands in the electronic spectrum of Ni solvent where founded when Al, C, B impurities are added. These bands are responsible for the additional absorption in the studied alloys. The localization of impurity energy levels above the Fermi level in these alloys is suggested.

Key Words: *electronic structure, impurity band, interband transition, electron density of states, optical conductivity spectrum*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: bond270587@i.ua

Статтю представив: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.. Макара В.А.

Інтерес до вивчення оптичних властивостей сплавів на основі Ni та Al надзвичайно великий. Це пов`язано з кількома обставинами: по-перше, сплави системи Ni-Al-B-C являються важливими технологічними матеріалами; по-друге, добре вивчена електронна зонна структура чистих Ni та Al; по-третє, Ni є типовим ферромагнетиком, а Al є типовим парамагнетиком в досить широкому температурному інтервалі. Досліджені в роботі сплави системи Ni-Al-B-C, багаті на нікель, можуть використовуватися, як керамічні матеріали для захисту від гамма-, нейтронного та інших типів випромінювання при експлуатації ядерних установок [1]. Також, потрійні сплави системи Ni–Al-B–C складу 63 ат.% Ni, 9 ат.% Al, 21 ат.% B, 7ат.% C можуть виступати каталізаторами синтезу алмазів [2].

Наскільки нам відомо, оптичні та електронні властивості сплавів системи Ni-Al-B-C, збагачених нікелем, іншими авторами не вивчалися. Саме тому в даній роботі ставилася задача дослідження оптичних властивостей та електронної структури сплавів Ni-Al-B-C за

© Стащук В.С., Бондар В.М., Полянська О.П., Кудін В.Г., Філіпов Я.В., Чернуха Є.О., 2013

допомогою високоточного методу спектральної еліпсометрії.

Оптичні властивості кристалічних сплавів $Ni_{79}Al_{15}B_6$ та $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ досліджено при кімнатній температурі на зразках, що отримувалися шляхом вакуумно-дугового плавлення чистих Ni, Al, B, C з відповідними вагами в атмосфері аргону шляхом багаторазового переплавлення. Для досягнення більшої однорідності зразки відпалювалися в цій же атмосфері при температурі 900 ^{0}C протягом 24 год. Дзеркальні поверхні зразків готувалися шляхом механічного полірування із застосуванням алмазних паст із подальшим рекристалізаційним відпалом та електрополіруванням (зразки полірувалися до класу чистоти 0-40). За допомогою рентгенівського дифрактометра ДРОН-3.0 проводився також рентгеноструктурний та фазовий аналіз зразків сплавів.

Оптичні характеристики дзеркальних поверхонь сплавів системи Ni-Al-B а також чистих Ni та Al, досліджувалися в спектральному інтервалі 0,23–2,8 мкм (0,44–5,09 еВ) за допомогою спектральної еліпсометрії, використовуючи метод Бітті [3]. На експерименті вимірювалися еліпсометричні параметри Δ і ψ поблизу головного кута падіння при різних довжинах хвиль та на їх основі розраховувались оптичні сталі n і χ. Похибки у визначенні показників заломлення n та поглинання χ суттєво залежали від області спектру, в якій проводилися вимірювання. Так, в ультрафіолетовій, видимій та ближній ІЧ областях спектру вони не перевищували 1,5 %, а в ІЧ діапазоні спектра зростали до 3–4 %. На основі оптичних сталих n і χ розраховувалися інші оптичні характеристики: діелектрична проникність $\varepsilon = \mathrm{n}^2 - \chi^2$, коефіцієнт відбивання $R = \dfrac{(\mathrm{n}-1)^2 + \chi^2}{(\mathrm{n}+1)^2 + \chi^2}$ при нормальному падінні світла та оптична провідність $\sigma = 4\pi\varepsilon_0 n\chi\nu$ (ν-частота світла, ε_0 – діелектрична проникність вакууму), яка пропорційна міжзонній густині електронних станів G(hν) [4].

Аналіз залежностей оптичних характеристик від енергії фотонів hν у досліджуваному спектральному інтервалі hν=0,44–5,09 еВ дозволяє отримати інформацію про зміну електронної структури Ni при додаванні Al, B, C. Спочатку проведено детальне дослідження дисперсії коефіцієнта відбивання R(hν) в області спектра 0,44-5,09 еВ (рис. 1). Із рисунка видно, що криві R(hν) досліджуваних сплавів $Ni_{79}Al_{15}B_6$ та $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$, а також чистих Ni та Al описуються монотонно спадаючими функціями. Крім того видно, що найбільші значення коефіцієнта відбивання в ІЧ області спектра мають зразки чистого Al в (~0,95), а найменші – чистого Ni (~0,72), значення R в ІЧ-діапазоні для досліджуваних сплавів $Ni_{79}Al_{15}B_6$ та $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ знаходяться в інтервалі 0,75-0,87.

Слід зазначити, що різкий мінімум кривої R(hν) в діапазоні 1,2-1,8 еВ, що відповідає кривій чистого алюмінія, зберігається і для сплаву $Ni_{79}Al_{15}B_6$, а на кривій R(hν) для сплаву $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ аномалій в цій області спектру не спостерігається. Характерний для Ni широкий мінімум відбивання в області 3,6-4,3 еВ, пов`язаний із міжзонними переходами електронів, спостерігається і в досліджуваних

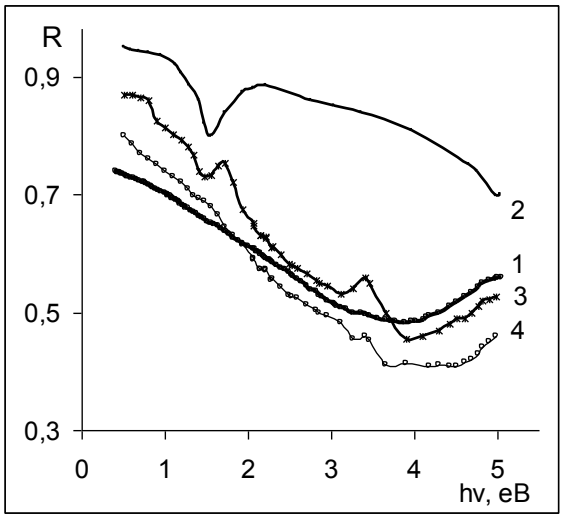


Рис. 1. Дисперсійні залежності коефіцієнта відбивання R(hν) Ni (1), Al (2) та сплавів $Ni_{79}Al_{15}B_6$ (3), $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ (4).

сплавах. Хоч в сплавах він зміщується на 0,5-0,7 еВ в короткохвильову область. Досить дивною є поведінка кривих в області 3,3-3,7 еВ, адже в цьому діапазоні на обох кривих R(hν) $Ni_{79}Al_{15}B_6$ та $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ спостерігаються незначні максимуми відбивання, які відсутні в чистих металах. Можна припустити, що поява цих незначних максимумів пов’язана з формуванням нових електронних станів в структурі нікеля.

Це припущення підтверджуються результатами вивчення дисперсійних залежностей оптичної провідності σ(hν)

досліджених сплавів $Ni_{79}Al_{15}B_6$ та $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$. Експериментальні криві залежностей σ(hν) сплавів, а також чистих Ni та Al наведено на рис. 2. Перш за все, зупинимося на характерних особливостях оптичних спектрів σ(hν) чистих Ni та Al. В спектрі поглинання чистого нікелю спостерігаються дві найбільш інтенсивні смуги поглинання із максимумами при 4,75 та 1,3 еВ та дві менш інтенсивні смуги з максимумами при 2,1 та 2,72 еВ. Характерні особливості кривої

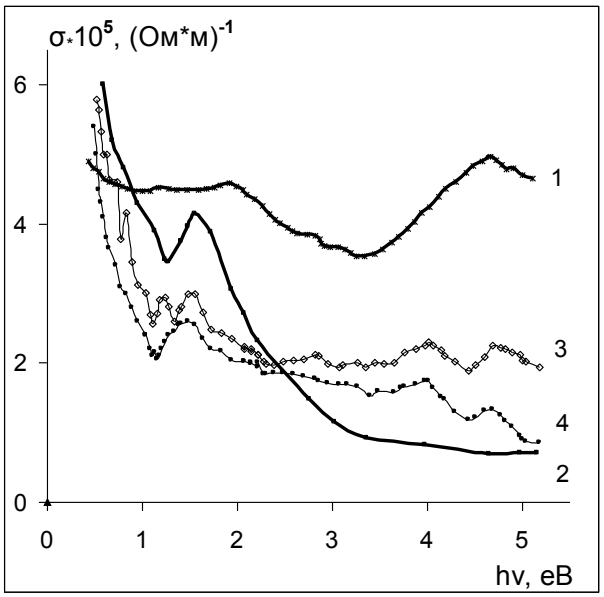


Рис. 2. Криві дисперсії оптичної провідності σ(hν) Ni (1), Al (2), а також сплавів сплавів $Ni_{79}Al_{15}B_6$ (3), $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ (4).

дисперсії оптичної провідності алюмінія – мінімум при 1,3 еВ та гострий пік при 1,9 еВ.

Із рис. 2 видно, що в області спектру hν=1,1–5,09 еВ поглинання світла зумовлене міжзонними переходами електронів як для чистих нікеля та алюмінія, так і для досліджуваних сплавів. А в ІЧ-діапазоні при hν < 1,1еВ домінують внутрішньозонні переходи; тут поглинання пов`язане із суперпозицією внесків від внутрішньозонних та міжзонних переходів. Тому, в області hν=0,44-1,1еВ особливості оптичних спектрів σ(hν), пов`язаних із міжзонними переходами, "змазуються" внаслідок сильного внутрішньозонного поглинання.

Видно, що в спектрах поглинання σ(hν) сплавів Ni-Al-B-C проявляються основні особливості оптичного спектра σ(hν) чистих Ni та Al. Це в першу чергу стосується інтенсивної смуги, яка в чистому Al знаходиться при 1.9 еВ, а також високоенергетичного максимума, який в спектрі σ(hν) чистого Ni, розташований при 4.7 еВ. Слід зазначити, що в досліджуваних сплавах положення максимуму Al дещо зміщується в довгохвильову область, і він розташований при 1,81 еВ для сплаву $Ni_{79}Al_{15}B_6$, та при 1,72 еВ для сплаву $Ni_{63}Al_9B_{21}C_7$ відповідно. Причому для сплаву $Ni_{79}Al_{15}B_6$ ця смуга має тонку структуру, і розщеплюється на дві смуги, які розташовані hν=1,25 еВ та 1,72 еВ. Можна припустити, що розщеплення пов`язане із обмінною взаємодією. Також в спектрах σ(hν) досліджених сплавів проявляється додаткова смуга поглинання при 4,0 еВ, яка не проявляється в спектрах чистих Ni та Al. Ці зміни пов'язані з суттєвою перебудовою енергетичного спектра Ni при додаванні домішок і виникненням в електронному спектрі сплавів резонансних домішкових станів [4]. Аналіз кривих σ(hν) свідчить про те, що оптичні спектри досліджуваних сплавів не можна отримати шляхом простої суперпозиції спектрів σ(hν) чистих Ni та Al у відповідності з кількісним співвідношенням цих фаз.

Детальне дослідження оптичних властивостей Ni та Al та співставлення основних особливостей оптичного спектра поглинання із прямими міжзонними переходами [4], дає можливість запропоновати єдину модель електронної структури сплавів системи Ni-Al-B-C, яка б найкращим чином описувала оптичні властивості цих сплавів. Зазначимо, що на основі результатів розрахунку енергетичного спектра чистих Ni з врахуванням матричних елементів переходів в оптичну провідність σ(hν) було виявлено, що спектр σ(hν) Ni формується в результаті накладання великої кількості смуг, які не описуються простими функціями типу лорентціанів чи гаусіанів [4].

На рис. 3. наведено криві дисперсії оптичної провідності σ(hν) сплаву $Ni_{79}Al_{15}B_6$ (1), а також розрахованих спектрів хімічних $NiAl_3$ (2) та Ni_3Al (3) [5, 6]. Видно, що міжзонне поглинання в сплаві $Ni_{79}Al_{15}B_6$ починається при малих енергіях фотонів (hν ≈ 0,7 еВ) і дуже швидко наростає при збільшенні енергії hν. Видно, що в спектрі σ(hν) поряд із розглянутими вище аномаліями проявляється цілий ряд смуг, які накладаючись одна на одну формують спектр поглинання в ІЧ області, визначити положення максимумів яких із отриманих спектрів практично неможливо. Для розділення поглинання σ(hν) на елементарні смуги можна використати аналітичні залежності, котрі описують форму окремих смуг поглинання у випадку простих металів [7], в яких на РФ не виходять d- зони, що характеризуються високими, порівняно із sp- зонами, густинами

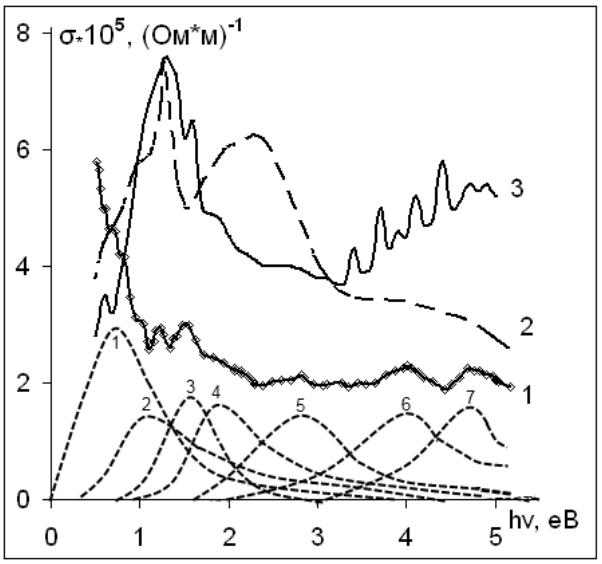


Рис. 3. Крива дисперсії оптичної провідності σ(hν) сплаву $Ni_{79}Al_{15}B_6$ (1), теоретично обрахованих спектрів $NiAl_3$ (2) та Ni_3Al (3) [5, 6]. Штриховими лініями показано елементарні смуги (1 - 7)

станів [8]. Звичайно, застосування результатів теорії, розвинутої для полівалентних металів, для 3d-перехідних металів не зовсім правомірне. Оскільки не існує інших кількісних теорій, які описують форму окремо взятих смуг поглинання, тому для отримання якісної картини внеску окремих смуг поглинання в експериментальний спектр σ(hν), спробуємо розділити спектр міжзонної провідності σ(hν) сплаву $Ni_{79}Al_{15}B_6$ на елементарні смуги за методикою, описаною в [7]. При розділенні смуг необхідно, перш за все, визначити положення максимумів цих смуг. Для цього використаємо аналітичні властивості комплексної функції $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$ [9]. В результаті сукупного аналізу залежностей $\varepsilon_2(h\nu)$, $\sigma(h\nu)$ та $\varepsilon_1 - \gamma_0 d\varepsilon_2/d\omega = f(h\nu)$ (γ_0 - деякий параметр) визначено положення максимумів найбільш інтенсивних смуг в шкалі енергії hν. Потім, за методом, описаним в [9], було проведено розділення смуг і результати такого розділення наведені на рис. 3. Видно, що в спектрі поглинання спостерігаються чотири найбільш інтенсивні смуги поглинання із максимумами при 0,81, 1,55, 4,05 та 4,81 еВ і три менш інтенсивні смуги з максимумами при 1,1, 1,75 та 2,92 еВ. Звичайно, до цих даних потрібно відноситися обережно. Однак, слід відзначити, що більшість із вказаних максимумів спостерігаються в спектрах чистих Ni та Al.

Таким чином встановлено, що при додаванні Al, C, B в електронному спектрі розчинника Ni відбувається формування нових домішкових зон, які відповідають за додаткове поглинання в цих сплавах. Показано, що електронні спектри сплавів Ni-Al-B-C являють собою суперпозицію густин електронних станів N(E) чистого нікеля з певною вагою, що дорівнює його концентрації в сплаві, та густини станів хрому в межах домішкової зони. Енергетичні зони, сформовані домішками Al, C, B, в сплаві відповідають незайнятим електронним станам внаслідок суттєвої ролі 3d-електронів в досліджених сплавах.

Список використаних джерел

1. Ansara I., Dupin N., Lukas H. L., Sundman B. Thermodynamic assessment of the Al-Ni system // J. Alloys and Comp. – 1997. – V. 247. – № 1. – P.66-70
2. Kudin V.G., Makara V.A., Sudavtsova V.S. Interaction in liquid alloys of aluminum-nickel-bor // Powder metallurgy. – 2001.– №1.– P. 79–83. (in Ukrainian).
3. H. Fujiwara. Spectroscopic Ellipsometry. Principles and Applications. – NY. – Atrium, Wiley, –2007. – 452p.
4. L.V. Poperenko, V.S. Stashcuk, I.A. Shaikevych, V.A. Odarych, *Diagnostics of surfase with polarised light*. – Kyiv: Kyiv University. – 2007. – 336p (in Ukrainian).
5. J. Y. Rhee. Optical and electronic structures of Ni_3Al alloy // *Phys. Rev.* B 55 (7), – 1997. – P. 354-358
6. Krasovskaya O.V., Yavorskiy B.Y., Kudriavtsev Y.V. Research of optical and electronic properties of Al_3Ni // Met. Phis. . – 1997. –№ 19. – P. 354-358 (in Russian).
7. Mash I.D., Motulevich G.P., Shubin A.A. Definition of energy cracks in metals by an optical method // JTEF letters. – 1978. – № 27. – P. 84-87 (in Russian).
8. Kuzmichev N.D., Motulevich G.P. Determination of electronic properties of niobium nitride by optical method // JTEF. – 1983. – № 84. – P.2316-2322 (in Russian).
9. Langlinais J., Callaway J. Energy bands in ferromagnetic nickel // Phys.Rev.B. – 1972. – V.5, №5. - P.124-134.

Надійшла до редколегії 30.04.13

УДК 538.9

Храпатий С.В.[1], к.ф.-м.н.

Вивчення властивостей фулеренових плівок на кремнієвій підкладці

Виміряно спектри оптичного поглинання та фотолюмінесценції структур, в яких фулеренові плівки наносились методом гарячої стінки. Методом багатокутової еліпсометрії досліджено оптичні константи фулеренових плівок. Отримані спектри пропускання містять характерні для фулеренів частоти, що вказує на високу структурну і оптичну досконалість плівок, та відсутність руйнації молекул при нанесенні методом гарячої стінки. Структури виявили фотолюмінесценцію в області 1.3-1.8 еВ при 290 К, зумовлену електронними переходами за участі екситонних станів фулеренів.

Ключові слова: *гетероструктури, оптичне поглинання, фотолюмінесценція, фулерени.*

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: khrapatiysv@ukr.net

Khrapatiy S.V.[1], PhD

Study of fullerene films on silicon substrates properties

Measured optical absorption and photoluminescence structures in which fullerene films deposited by hot wall method. Optical constants of fullerene films were determined by multiangle ellipsometry. Measured absorption spectra contain characteristic fullerene frequencies, indicating to high structural perfection and optical films, and absence of molecules destruction during hot wall deposition. Structures exhibit photoluminescence in the range 1.3-1.85 eV at 290 K, which was caused by electronic transitions involving exciton states of fullerene.

Key Words: *heterostructures, optical absorption, photoluminescence, fullerenes.*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: khrapatiysv@ukr.net

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін

Вступ

Чисельні модифікації вуглецю – фулурени різного складу, нанотрубки, фулерити, графени знаходять застосування в наноелектроніці та фотоніці. Актуальним питанням для ефективного застосування даних матеріалів в електроніці є можливість їх інтеграції з традиційною та добре розвиненою кремнієвою технологією.

Оптичні та електричні властивості плівок C_{60} та C_{70} детально вивчені. Показано, що для фулеренів характерною є напівпровідникова провідність електронного типу, яка швидко зростає зі збільшенням ступеня кристалічності плівок. Домінуючий механізм провідності визначається температурою [1-3]: при низьких температурах спостерігається стрибкова провідність, при $T > 260$K відбувається перехід від стрибкового до термічно активованого типу провідності з двома енергіями активації 0.389 еВ та 0.104 еВ, і лише при дуже високих температурах можна спостерігати провідність за участі делокалізованих станів.

Форма спектральних залежностей фотопровідності та фотолюмінесценції фулеренів переважно визначається екситонами [4,5]. Механізми фотогенерації носіїв включають розділення зарядів в об'ємі та на поверхні, екситон-екситону взаємодію, фотоіонізацію екситонів та вивільнення зарядів з пасток [1-3,6,7].

Мета даної роботи – вивчити оптичні властивості структур фулеренових плівок на SiO_2/Si підкладці методами спектроскопії фотолюмінесценції та багатокутової еліпсометрії.

Матеріали і методи

Шари фулеренів C_{60} та C_{70} методом гарячої стінки наносились на хімічно окислену поверхню кремнію КДБ-10 з кристалографічною орієнтацією (100), яка містила шар окислу товщиною 5 нм. Температура випарника з C_{60} складала 500 ºС, а підкладки підтримувалась 20 ºС. Осадження здійснювалось у вакуумі ~ 10^{-5} Тор зі швидкістю 20 нм/с. Товщини осаджених плівок фулеренів складали ~ 0.4 мкм, поверхня дзеркальна. Схема досліджуваних в роботі структур наведена на рис. 1.

Для контролю топології поверхні досліджуваних плівок та розміру утворених нанокластерів використовувався метод атомно-силової мікроскопії (АСМ). АСМ зображення отримано за допомогою мікроскопа Ntegra (NT-

© С.В. Храпатий, 2013

MDT) в напівконтактному режимі, використовуючи кремнієві кантелевери із радіусом заокруглення вістря ~ 10 нм.

Оптичні константи шарів (комплексний показник заломлення $\tilde{n} = n + ik$, де n - показник заломлення, k - коефіцієнт екстинції (показник поглинання)) та їх товщини d визначались методом нуль-еліпсометрії із використанням лазерного еліпсометра ЛЕФ-3М. Джерелом випромінювання слугував He-Ne лазер із довжиною хвилі 632.8 нм. Поляризаційні вимірювання проводились при різних кутах падіння світлового променя φ = 50-75 °. Аналіз здійснювався в моделі однорідного шару на поверхні структури SiO_2/Si з відомими оптичними параметрами для монокристалічного кремнію n = 3.882 та k = 0.02.

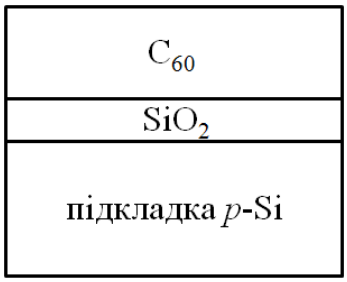
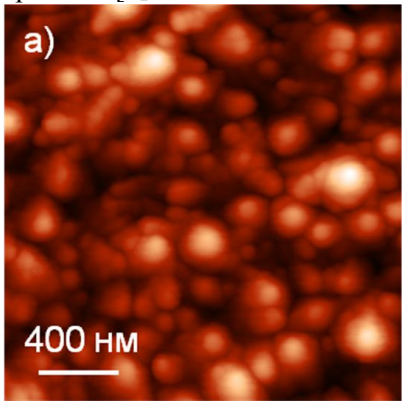


Рис. 1. Схема досліджуваних структур.

Результати та обговорення

На рис. 2. наведено АСМ зображення поверхонь плівок C_{70} (а) та C_{60} (б) на SiO_2/Si підкладці. Як бачимо, молекули C_{70} та C_{60} сформували неоднорідні за своєю товщиною шари, які містили кластери, діаметром до 200 нм. Поверхнева густина нанокластерів складала ~ 10^{10} см$^{-2}$. Причиною їх утворення при нанесенні молекул C_{70} та C_{60} на поверхню окислу кремнію можуть бути чисельні дефекти шару SiO_2, що є центрами зародкоутворення. Подібний ефект спостерігався при нанесенні металів на поверхню окислу кремнію [8].



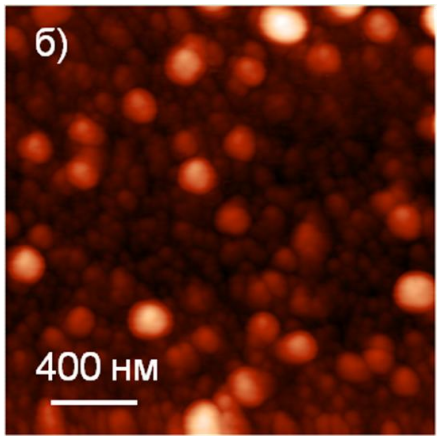


Рис. 2. АСМ зображення поверхні плівок C_{70} (а) та C_{60} (б) на SiO_2/Si підкладці.

На рис. 3 наведено спектри пропускання структур $C_{70}/SiO_2/Si$ та $C_{60}/SiO_2/Si$ при 290 К. Спектри структури $C_{60}/SiO_2/Si$ містять характерні для C_{60} частоти: 527; 576; 1183 та 1429 см$^{-1}$. Це вказує на високу структурну досконалість плівок, нанесених методом гарячої стінки.

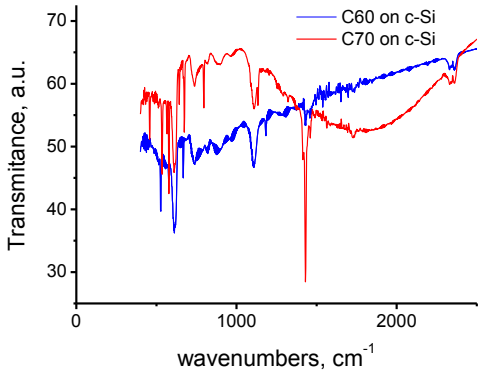


Рис. 3. Спектри пропускання плівок C_{70} та C_{60} на SiO_2/Si підкладці.

Виміряно спектри фотолюмінесценції (ФЛ) плівки фулерена C_{60} та C_{70} нанесених на окислену поверхню Si. Для збудження ФЛ використовувався аргоновий лазер (λ = 488 нм). Густина потужності збуджувального випромінювання складала 1 Вт/см^2. Спектри ФЛ, виміряні при температурі 80 К, наведено на рис. 3. Смуга ФЛ структур $C_{60}/SiO_2/Si$ в діапазоні 1.25–1.8 еВ нм зумовлена випромінювальними переходами за участі станів C_{60}. Її складна, несиметрична форма свідчить про наявність принаймні кількох компонент люмінесценції. У спектрі ФЛ досліджуваних плівок при

температурі 80 К можна виокремити чотири смуги з максимумами при 1.40 еВ, 1.53 еВ, 1.63 еВ та 1.69 еВ. Як відомо, люмінесценція плівок в основному зумовлена екситонними переходами за участі синглетних та триплетних станів. Смуга поблизу 1.69 еВ зумовлена екситонними переходами в об‘ємі плівки C_{60}.

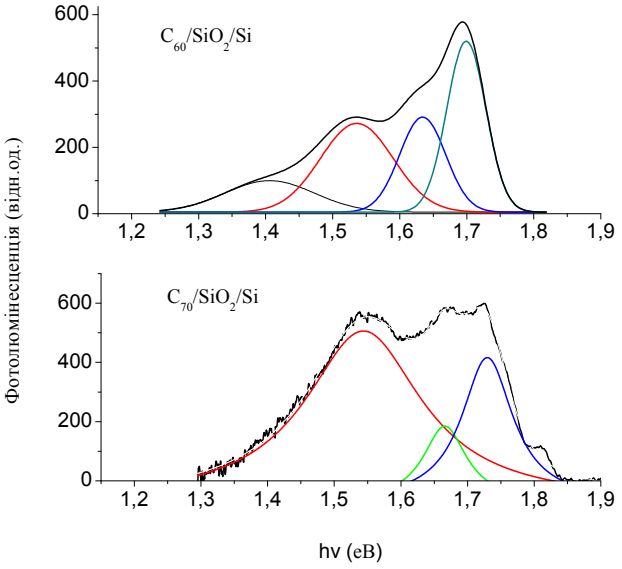


Рис. 4. Спектри ФЛ плівок C_{70} та C_{60} на SiO_2/Si підкладці.

Смуга ФЛ структур C_{70} складається з чотирьох смуг із максимумами поблизу 1.54 еВ; 1.67 еВ; 1.73 еВ та 1.81 еВ. Перші три смуги спостерігались також і при вимірах ФЛ плівок C_{60}. Внаслідок більш низької симетрії C_{70} у порівнянні з C_{60}, знімається виродження в електронних рівнях, що сприяє спостережуваному на експерименті збільшенню квантової ефективності C_{70}. Смуга 1.81 еВ обумовлена електронними переходами між основним та збудженим синглетним станами молекул C_{70}, а смуги спостережувані при менших енергіях – переходами за участі екситонних станів.

На рис.5 та рис.6 наведено кутові залежності еліпсометричних параметрів структур $C_{70}/SiO_2/Si$ та $C_{70}/SiO_2/Si$, відповідно. На основі виміряних залежностей еліпсометричних параметрів $\psi(\varphi)$, $\Delta(\varphi)$ розраховувались оптичні константи плівок за допомогою мінімізації цільової функції шляхом підгонки експериментальних і теоретичних залежностей. Отримані результати такого розв‘язку оберненої еліпсометричної задачі наведено в таблиці. 1.

Табл. 1.

Оптичні константи плівок C_{60} та C_{70}.

Парам.	n	k	d_2, nm
C_{60}	2.08	0.07	1100
C_{70}	2.70	0.08	300

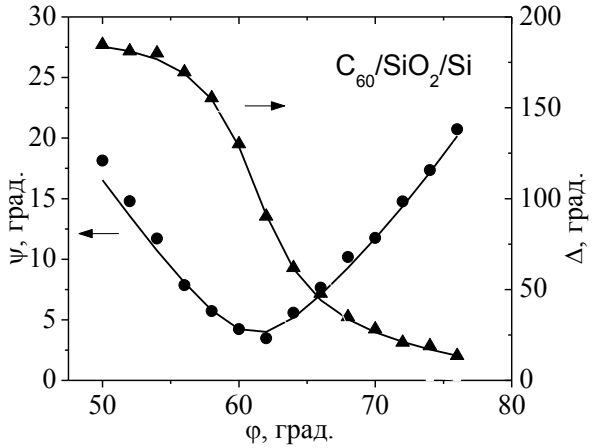


Рис. 5. Кутові залежності еліпсометричних параметрів плівки C_{60} на SiO_2/Si підкладці.

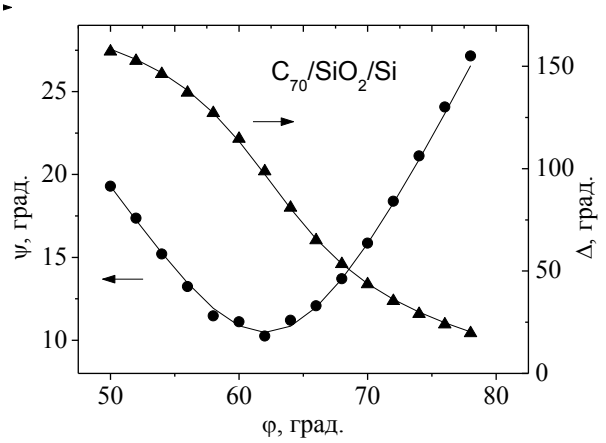


Рис. 6. Кутові залежності еліпсометричних параметрів плівки C_{70} на SiO_2/Si підкладці.

Таким чином, за даними еліпсометричних вимірів плівки C_{60} мають показник заломлення 2.08±0.05, що узгоджується с літературними даними 2.0-2.1 [9]. Це вказує на малу частку зруйнованих молекул C_{60}, оскільки їх руйнація мала б призводити до збільшення показника заломлення. Таким чином, з даних спектроскопії пропускання та багатокутової еліпсометрії

випливає, що шари C_{60} та C_{70} мають характерні для фулеренів оптичними властивостями.

Висновки

Досліджено форму спектрів оптичного поглинання та фотолюмінесценції плівок C_{70} та C_{60} на SiO_2/Si підкладці, в яких фулеренові плівки наносились методом гарячої стінки. Показано, що фотолюмінесценція шарів C_{60} та C_{70} зумовлена міжзонними електронними переходами за участі екситонних станів.

Виявилось, що спектри пропускання плівок C_{70} та C_{60} на SiO_2/Si підкладці містять характерні для фулеренів частоти, що вказує на високу структурну досконаліть плівок та відсутність руйнації молекул при нанесенні методом гарячої стінки.

Оптична якість сформованих плівок підтверджена багатокутовою еліпсометрією, за допомогою якої встановлено, що оптичні константи сформованих шарів C_{60} та C_{70} збігаються з табличними даними.

Список використаних джерел

1. *Eletsky A.V., Smirnov B.M.* Fullerenes and carbon structures. Advances in physics. - 1995. - Volume 165, № 9, p. 977-1009.
2. *Sobolev V.V., Busygina E.L.* // Opt. Optical constants of single crystals of fullerite - 1999. - Volume 86, № 3, p. 464-467.
3. *Mishori B., Shapira Y., Belu-Marian A., Manciu M., Devenyi A.* Studies of C_{60} thin films using surface photovoltage spectroscopy // Chem.Phys.Lett. – 1997. – Volume 264, p. 163-167.
4. *Katz E.A., Faiman D., Mishori B., Shapira Y., Shames A.I., Shtutina S., Goren S.* Changes in the photoelectrical properties and generation of photoinduced defects under light/air exposure of C_{60} thin films // Jornal of applied physics. – 1998. – Volume 84, №6, p. 3333-3337.
5. *Guss W., Feldmann J., Gobel E.O., Taliani C., Mohn H., Muller W., Haussler P., H.-U. ter Meer.* Fluorescence from X traps in C_{60} single crystals // Phys.Rev.Lett. – 1994. – Volume 72, № 6, p. 2644-2647.
6. *Mochizukiy S., Sasaki M., Ruppinz R.* An optical study on C_{60} vapour, microcrystal beam and film // J.Phys.: Condens. Matter. – 1998. – Volume 10, p. 2347-2361.
7. *Mishori B., Katz E.A., Faiman D., Shapira Y.* Studies of electron structure of C_{60} thin films by surface photovoltage spectroscopy // Solid State Communications. – 1997. – Volume 102, № 6, p. 489-492.
8. *Peng C.S., Huang Q., Cheng W.Q., Zhou J.M., Zhang Y.H., Sheng T.T. and Tung C.H.* Phys. Rev. B 57, 8805 (1998).
9. *Makarova T.L.* FTP. –2001. – Volume 35, №3, p. 257-293.

Надійшла до редколегії 28.04.13

Підписано до друку . Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. №__. Друк. арк. ____. Тираж _____. Зам. ____.
Друкарня _____.