КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2013

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №2, 2013
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНИТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.,
заступник головного редактора, відповідальний за видання;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Данилов Вадим Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Левитський Сергій Михайлович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Маципура Володимир Тимофійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Bondarenko I.V. Groups generated by bounded automata without finitary states 7

Mishura Yu.S., Rizhniak G. R. Objective Call Option Price Behaviour of the Bond with Interest Rate Driven by Geometric Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process 11

Oliynyk B.V. Metric realizable permutation groups 15

Orlovskyi R.Ya. Confidence intervals for parameter of covariance function of the Dagum family 19

Zatula D.V. Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval 23

Кочубінська Є.А. Максимальні нільпотентні піднапівгрупи напівгрупи часткових автоморфізмів кореневих дерев 29

Чайченко С.О. Найкращі наближення періодичних функцій у вагових просторах Орліча 33

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Konstantinov O.V. Forced oscillations of the system «reservoir – capillary liquid with a free surface» 43

Lavrenyuk M.V. The stress-strain of the plane containing rectangular multicoated inclusion 47

Голіченко О.Л., Малюга В.С. Рух рідини в скінченному, круговому циліндрі 51

Конаровська М.І. Загальна параболічна крайова задача без початкових даних для сингулярних рівнянь 57

Лимарченко В.О. Нелінійні коливання трубопроводу з рідиною при поздовжній вібрації основи трубопроводу 63

Семенович К.О., Лимарченко О.С. Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні 67

Яременко М.І. Максимальні напівгрупи стиску та максимальні дисипативні оператори в просторах Лебега 71

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Antosyak P.P. About one new principle of rational collective choice 77

Krak I., Korlyuk O. Addition of the training set for the classification of clustering methods 82

Laver V.O. Fuzzy generalizations for the proportional rule 85

Peschanenko V.S., Guba A.A., Shushpanov C. I. Mixed concrete-symbolic predicate transformer 89

Skobelev V.V. Satisfiability modulo linear arithmetic over a finite ring 95

Zub S.S., Zub S.I. Canonical Poisson structure on T*SE(3) in the quaternion variables 107

Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації з урахуванням просідань та повзучості скелета ґрунту 113

Власюк А.П., Цвєткова Т.П. Математичне моделювання перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених грунтах в лінійній постановці 118

Галкін О.В. Поліморфізм та класи в мові Haskell 125

Гаркуша Н.І. Про близькість моделей динаміки Вольтера та Гудвіна 131

Грунський І.С., Пряничникова О.О. Мови, що можуть бути представлені в повністю позначених графах 135

Гулаєва Н.М. Еволюційні алгоритми 141

Зубенко В.В. Про комунікативну інформатику 151

Івохін Є.В. Про підхід до використання нейронних мереж для прогнозування нечітких фінансових даних 157

Кійковська О.І., Чабанюк Я.М. Процедура стохастичної апроксимації в схемі дифузійної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу 161

Коляденко М.А. Підходи технічного аналізу при прогнозуванні фондових показників. Дослідження індикатора 52-week high 165

Кондрук Н.Е. Метод визначення кількісної міри переваги в колективному порядку 171

Королік Р.П., Пічкур В.В. Оцінка множини фазових обмежень множинної дискретної системи 175

Кудін В.І. Метод базисних матриць та розв'язки матричної гри у змішаних стратегіях 179

Кукурба В.Р., Чабанюк Я.М., Кінаш А.В. Асимптотична дифузійність флуктуацій неперервної оптимізаційної процедури в напівмарковському середовищі 184

Мащенко С.О., Саад М. Обзор развития многокритериальных моделей принятия решений 190

Мічута О.Р., Власюк А.П., Мартинюк П.М. R-вимірна задача впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів 198

Мулеса О.Ю. Послідовний аналіз варіантів в нечітких задачах кластеризації та ідентифікації 205
Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Логіки часткових предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами 210
Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та міжнародного стандарту Computer Science'2013 216
Татаринов Є.О. Спектр алгоритмів відновлення графів за допомогою блукаючого ним агентом 228
Терещенко В.М. Модифікація методу ланцюгів для задачі локалізації точки 233
Тодоріко Б.Д. Аналіз особливостей двоїстої задачі лінійного програмування матричної гри у змішаних стратегіях методом базисних матриць 237
Шатирко А.В., Хусаінов Д.Я. Стабілізація скалярних процесів прямого регулювання нейтрального типу 241

РАДІОФІЗИКА

Pavlyuk S.P., Gandziuk V.I. Features of the current-voltage characteristics of the resistors made by "silicon with dielectric isolation" technology at high densities of leaking current 247
Веклич А.М., Іванісік А.І., Борецький В.Ф., Лебідь А.В., Бондаренко Я.В., Фесенко С.О. Дослідження плазми електродугового розряду між композитними Cu–C електродами. Частина II: Лазерна абсорбційна спектроскопія 251
Висоцький В.І., Василенко В.Б., Василенко А.О. Періодичні режими теплопровідності в активних середовищах 255
Первак Ю.О., Федоров В.В. Просторово-спектральний розподіл електричного поля в одновимірних фотонних кристалах з трьома пів хвильовими резонаторами 261
Поданчук Д.В., Котов М.М., Петрів Д.А. Апертурні обмеження сенсора хвильового фронту на ефекті Талбота 265

СУЧАСНА ФІЗИКА

Авраменко Т.Г., Іваненко К.О., Михалюк О.В., Рево С.Л. Структура та міцність нанокомпозиції фторопласт-диспергований терморозширений графіт 271
Архіпов С.О., Булавін Л.А., Маркес К.М. Методика виготовлення гігантських везикул з поверхневим розподілом електростатичного заряду 275
Барабаш О.В. Динаміка народження частинок з вакууму в однорідних нестаціонарних просторах 279
Британ А.В, Коробко О.В, Вербінська Г.М, Гаврюшенко Д.А, Голініченко Б.О. Випаровування н-бутанолу в широкому інтервалі тисків 283
Власенко Т.С., Сисоєв В.М., Гаврюшенко Д.А. Зміна структурних характеристик рідинної системи під дією опромінення 287
Гаврюшенко Д.А. Розподіл концентрації бінарного розчину в циліндричній порі з неідеальними стінками 291
Горкавенко Т.В., Зубкова Л.М., Русіна Л.М. Чисельний розрахунок електронної структури в об'ємі та на поверхні кристалів методом самоузгодженого псевдопотенціалу (алгоритм та блок-схема) 295
Кирильчук В.В., Носенко В.К., Носенко А.В., Зелінська Г.М., Міка Т.М., Ярмощук Є.І. Вплив легування перехідними металами на стабільність та кінетику кристалізації аморфних сплавів системи Co-Si-B 301
Лазуренко Д.В., Горкавенко В.М., Тугай А.В. Можливість утворення конденсату скалярних полів в околі нейтронної зірки 307
Мороз К.О. Пружні властивості магнітної рідинної системи на основі води 313
Павленко О.Л. Першопринципні розрахунки електронної та коливної структури молекулярних комплексів C_{60}-Ti та C_{60}-Ti-C_{60} 315
Подолян А.О. Спрощена методика визначення часу життя носіїв заряду в кремнії 319
Семенько М.П. Кластерні особливості слабкої локалізації в аморфних сплавах на основі заліза 321
Терентьєва Ю.Г. До 100-річчя борівських орбіт 325
Чумаченко А.В. Розрахунок ефективності бездротової передачі енергії у системі з двома медіаторами 329
Ярмощук Є.І., Семенько М.П., Захаренко М.І. Термічна стабільність і магнітні характеристики складнолегованих аморфних сплавів на основі системи Co-Si-B 335

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.54

Є. В. Бондаренко[1], *к.ф.-м.н.*

Групи, породжені обмеженими автоматами без фінітарних станів

Встановлено алгоритмічний критерій скінченності груп, породжених обмеженими автоматами без нетривіальних фінітарних станів.

Ключові слова: автоматна група, обмежений автомат.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, e-mail: ibond.univ@gmail.com.

I. V. Bondarenko[1], *PhD*

Groups generated by bounded automata without finitary states

We establish an algorithmic criterium for finiteness of groups generated by bounded automata without non-trivial finitary states.

Key Words: automaton group, bounded automaton.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, vul.Volodymyrska, 64, e-mail: ibond.univ@gmail.com.

Communicated by Prof. V. V. Kirichenko.

Introduction

The fundamental problem of the theory of automaton groups is the connection between the combinatorial structure of an automaton and the algebraic properties of the group it generates. Most of the algorithmic problems for automaton groups are open (and probably undecidable). In particular, it is not known how to check whether a group generated by a finite automaton is finite. One can hope for a positive result dealing with certain classes of automaton groups.

Studying cyclic structure of automata, S. Sidki in [7] introduced several classes of automata, and one of the most important of them are bounded automata. Interestingly, most of the studied automaton groups are generated by bounded automata, in particular, the famous Grigorchuk group. Moreover, bounded automata naturally appear in connection with fractal geometry [1]: An automaton group has post-critically finite limit space if and only if the generating automaton is bounded.

In this paper we study groups generated by bounded automata without non-trivial finitary states. This class happens to be more amenable to investigation and still contains many interesting groups like the Basilica group [4], Hanoi Towers group on three pegs [3], groups studied by P. Neumann [6], iterated monodromy groups of quadratic polynomials with periodic kneading sequence [5], etc. We give an algorithmic method to check when a group generated by a bounded automaton without non-trivial finitary states is finite.

1 Automorphisms of regular rooted trees

Let X be a finite alphabet with at least two letters. Let X^* be the free monoid freely generated by X. The elements of X^* are finite words $x_1x_2\dots x_n$ over X together with the empty word. We consider the set X^* as a rooted $|X|$-ary tree, where the empty word is the root of the tree and every vertex $v \in X^*$ is connected by an edge to vx for each $x \in X$.

Every automorphism $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ induces an automorphism $g|_v \in \mathrm{Aut}(X^*)$ for every $v \in X^*$ by the rule

$$g|_v(x) = y \text{ if } g(vx) = g(v)y \text{ for all } x, y \in X^*.$$

This automorphism is called the *state of g at v*. The states of the product are computed as

$$(g \cdot h)|_v = g|_v \cdot h|_{g(v)}$$

(we are using right actions: $gh(v) = h(g(v))$).

The permutation $\pi_g \in Sym(X)$ induced by g on X and the states of g at the letters $x \in X$ uniquely determine g by the relation

$$g(xv) = \pi_g(x)g|_x(v) \text{ for } x \in X \text{ and } v \in X^*.$$

Therefore one can represent automorphisms in the form: If $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ then

$$g = (g|_{x_1}, g|_{x_2}, \dots, g|_{x_d})\pi_g,$$

which is the usual representation of elements of the permutational wreath product $\mathrm{Aut}(X^*) \cong$

© I. V. Bondarenko, 2013

$\mathrm{Aut}(X^*) \wr Sym(X)$. The multiplication of automorphisms written in this form is performed as follows

$$gh = (g|_{x_1}h|_{\pi_g(x_1)}, \dots, g|_{x_d}h|_{\pi_g(x_d)})\pi_g\pi_h.$$

An automorphism $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ is called *finite-state* if the set of its states $S(g) = \{g|_v : v \in X^*\}$ is finite. Every finite-state automorphism g can be represented by a finite input-output automaton $A(g)$ over the alphabet X. The state set of $A(g)$ is the set $S(g)$ and there is an arrow $g|_v \to g|_{vx}$ labeled by $x|g(x)$ for every $x \in X$ and $v \in X^*$. Starting at the state g, the automaton $A(g)$ transforms a word $x_1x_2\dots x_n$ into the word $g(x_1x_2\dots x_n)$.

2 Bounded automorphisms

For an automorphism $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ define the numerical sequence

$$\theta_k(g) = |\{v \in X^k : g|_v \neq e\}| \quad \text{for } k \in \mathbb{N}.$$

A finite-state automorphism g is called *bounded* if the sequence $\theta_k(g)$ is bounded. The set of all bounded automorphisms forms a subgroup of $\mathrm{Aut}(X^*)$ called the *group of bounded automata*. Groups generated by bounded automata are precisely groups generated by all states of a finite collection of bounded automorphisms.

Bounded automorphisms can be characterized by the cyclic structure of corresponding automata as shown by S.Sidki [7]: A finite-state automorphism g is bounded if and only if any two different cycles in the automaton $A(g)$ are disjoint and not connected by a directed path except for loops at the trivial state (bounded automaton).

This description can be used to describe the structure of bounded automorphisms more precisely as follows. First, we need the notion of a finitary automorphism. An automorphism $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ is called *finitary* if the sequence $\theta_k(g)$ is eventually zero; in other words, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $g|_v = e$ for all $v \in X^k$. A bounded automorphism $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ is *circuit* if there exists a non-empty word $v \in X^*$ such that $g|_v = g$, i.e., g lies on a cycle in $A(g)$. Now, for any bounded automorphism g there exists $n \in \mathbb{N}$ such that for every $v \in X^n$ the state $g|_v$ is either circuit or finitary. Moreover, if g is a circuit automorphism then there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $g|_v = g$ for a unique word $v \in X^m$ and $g|_u$ is finitary for every $u \in X^m$, $u \neq v$. Working with a finite collection of bounded automorphisms one can always assume that $n = m = 1$ by passing to a power of the alphabet.

In this paper we study the finiteness of groups generated by bounded automata without non-trivial finitary states. First, we make the following observation that reduces the problem to groups generated by all states of circuit automorphisms.

Lema 1. *Let $S \subset \mathrm{Aut}(X^*)$ be a finite collection of bounded automorphisms and S_c be all circuit states of automorphisms from S. Then the group generated by all states of elements from S is finite if and only the group generated by all states of elements from S_c is finite.*

Proof. Since the set S is finite, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that for every $s \in S$ and $v \in X^n$ the state $s|_v$ is a state of an automorphisms from S_c. The statement follows. □

If a circuit automorphism g does not have non-trivial finitary states, then there exist $n \in \mathbb{N}$ and a word $u \in X^n$ such that

$$g|_u = g \quad \text{and} \quad g|_v = e \text{ for all } v \in X^n, v \neq u.$$

Passing to a power of the alphabet $X \leftarrow X^n$, g can be represented in the form

$$g = (e, \dots, e, g, e, \dots, e)\pi, \tag{1}$$

where $\pi = \pi_g \in Sym(X)$ and the tuple on the right has precisely one non-trivial component equal to g.

Automorphisms of the form (1) we call *loop automorphisms*. More precisely, an automorphism $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ is a loop automorphism if there exists a letter $x = x_g \in X$ such that $g|_x = g$ and $g|_y = e$ for all $y \in X$, $y \neq x$. Every loop automorphism g is uniquely determined by the pair (x_g, π_g) using the rule: g acts on X as the permutation π_g and has states $g|_{x_g} = g$ and $g|_y = e$ for $y \in X, y \neq x_g$.

Remark 1. A group generated by all states of a finite collection of circuit automorphisms without non-trivial finitary states is isomorphic to a group generated by a finite collection of loop automorphisms (possibly over larger alphabet). Together with Lemma 1 this reduces the studied finiteness problem to groups generated by loop automorphisms.

The inverse of a loop automorphism is a loop automorphism, but the product of loop automorphisms may be not a loop automorphism, and therefore loop automorphisms do not form a group. Moreover, the product of loop automorphisms may be finitary.

Example 1. Consider the loop automorphisms

$$a = (e, e, e, a, e)(1, 2) \quad b = (e, e, e, e, b)(1, 3).$$

Then the product $abab$ is finitary:

$$abab = (e, e, e, e, e)(1, 3, 2).$$

The following examples demonstrate that many interesting groups are generated by loop automorphisms.

Example 2. The automorphism $a = (e, a)(0, 1)$ over the alphabet $X = \{0, 1\}$ is called the adding machine. The action of a on words over X corresponds to the addition of one in binary number system.

Example 3. The group over $X = \{1, 2, 3, 4\}$ generated by two automorphisms

$$a = (e, e, e, a)(1, 3)(2, 4) \quad b = (e, e, e, b)(3, 4)$$

is isomorphic to the Basilica group [4]. This group was the first example of an amenable but not subexponentially amenable group.

Example 4. The group over $X = \{1, 2, 3\}$ generated by automorphisms

$$a = (a, e, e)(2, 3)$$
$$b = (e, b, e)(1, 3)$$
$$c = (e, e, c)(1, 2)$$

is called the Hanoi Towers group on three pegs. This group models the classical Hanoi Towers game [3].

Example 5. Let $P < Sym(X)$ be a transitive permutation group. For every $x \in X$ and $\pi \in P$ with $\pi(x) = x$ define the loop automorphism associated to the pair (x, π):

$$g_{(x,\pi)} = (e, \dots, e, g_{(x,\pi)}, e, \dots, e)\pi.$$

The group generated by all such $g_{(x,\pi)}$ was studied by P.Neumann in [6] for the case when P is perfect.

3 Finiteness of groups generated by loop automorphisms

The next theorem gives an algorithmic method to check whether a group generated by loop automorphisms is finite.

Theorem 1. *Let $S \subset \mathrm{Aut}(X^*)$ be a finite set of loop automorphisms. The group $\langle S\rangle$ is finite if and only if for every non-empty subset $U \subset S$ the letters $\{x_s : s \in U\}$ do not belong to the same* ***non-trivial*** *orbit of the action of $\langle \pi_s : s \in U\rangle$ on X.*

Proof. The proof goes by induction on $n = |S|$.

In order to show the basis of induction ($n = 1$) we need to prove that a loop automorphism s has finite order if and only if x_s does not belong to a non-trivial orbit of π_s, i.e., $\pi_s(x_s) = x_s$. Indeed, if $\pi_s(x_s) = x_s$ then

$$s^k = (e, \dots, e, s^k, e, \dots, e)\pi_s^k$$

for all $k \in \mathbb{N}$ and the order of s is equal to the order of π_s. For the converse, let $\pi_s(x_s) \neq x_s$ and $k \geqslant 2$ be the length of the orbit of x_s. Then

$$s^k|_{x_s} = s \quad \text{and} \quad s^k(x_s) = x_s,$$

which imply that s has infinite order by standard inductive arguments. The case $n = 1$ is proved.

Suppose the statement holds for every system with $n - 1$ loop automorphisms and we consider a system S with n loop automorphisms. We can assume that every proper subset $U \subset S$ generates a finite subgroup; in particular, $s(x_s) = x_s$ for every $s \in S$. We need to prove that the group $G = \langle S\rangle$ is finite if and only if $\{x_s : s \in S\}$ does not belong to the same non-trivial orbit for $\langle \pi_s : s \in S\rangle$.

If all letters x_s for $s \in S$ belong to the trivial orbit $\{x\}$, then $x = x_s$ and $\pi_s(x) = x$ for all $s \in S$. Then the group G is finite as for the case $n = 1$ above.

Suppose $\{x_s : s \in S\}$ does not belong to the same orbit. Let y be any of x_s, $s \in S$, and let Y be the orbit of y. Then for every $x \in Y$ and $g \in G$ the state $g|_x$ is a product of generators $s \in S$ and their inverses such that $x_s \in Y$. The group generated by such generators is finite by our assumption. By the same reasons, every state $g|_x$ for $x \in X \setminus Y$ belongs to a finite group. Hence the group G is finite. The claim is proved in one direction.

For the converse, assume that $\{x_s : s \in S\}$ belongs to the same non-trivial orbit and let us

prove that G is infinite. Fix any letter $x_1 \in \{x_s : s \in S\}$. We will prove that for every generator $s \in S$ there exists $h \in G$ such that

$$h|_{x_1} = s \text{ and } h(x_1) = x_1.$$

This property holds for every generator $s \in S$ such that $x_s = x_1$ (just take $h = s$ and recall our assumption). There exists a letter $x_2 \in \{x_s : s \in S\} \setminus \{x_1\}$ and an element $\pi = \pi_{s_1}^{k_1}\pi_{s_2}^{k_2}\dots\pi_{s_m}^{k_m}$, $s_i \in S$, such that $\pi(x_1) = x_2$ and $\pi'(x_1) \notin \{x_s : s \in S\}$ for every prefix $\pi' = \pi_{s_1}^{k_1}\pi_{s_2}^{k_2}\dots\pi_{s_l}^{k_l}$, $l < m$. Construct the element $g = s_1^{k_1}s_2^{k_2}\dots s_m^{k_m}$ and notice that

$$g|_{x_1} = s_1^{k_1}|_{x_1}s_2^{k_2}|_{s_1^{k_1}(x_1)}\dots s_m^{k_m}|_{s_1^{k_1}\dots s_{m-1}^{k_{m-1}}(x_1)} = e.$$

Then for every generator $s \in S$ with $x_s = x_2$ we have

$$(gsg^{-1})|_{x_1} = s|_{x_2} = s \text{ and } (gsg^{-1})(x_1) = x_1.$$

In particular, for every $g \in \langle s : s \in S \text{ and } x_s \in \{x_1, x_2\}\rangle$ there exists $h \in G$ such that $h|_{x_1} = g$ and $h(x_1) = x_1$.

Further, there exists a letter $x_3 \in \{x_s : s \in S\} \setminus \{x_1, x_2\}$ and an element $\pi = \pi_{s_1}^{k_1}\pi_{s_2}^{k_2}\dots\pi_{s_m}^{k_m}$, $s_i \in S$, such that $\pi(x_1) = x_3$ and $\pi'(x_1) \notin \{x_s : s \in S\} \setminus \{x_2\}$ for every prefix $\pi' = \pi_{s_1}^{k_1}\pi_{s_2}^{k_2}\dots\pi_{s_l}^{k_l}$, $l < m$. Construct the element $g = s_1^{k_1}s_2^{k_2}\dots s_m^{k_m}$ and notice that $g|_{x_1}$ is a product of generators s with $x_s = x_2$ and their inverses. Take an element $h \in G$ such that $h|_{x_1} = (g|_{x_1})^{-1}$ and $h(x_1) = x_1$. Then for every generator $s \in S$ with $x_s = x_3$ we have

$$(h^{-1}gsg^{-1}h)|_{x_1} = s|_{x_3} = s \text{ and}$$
$$(h^{-1}gsg^{-1}h)(x_1) = x_1.$$

In the same way we process all letters. As a result, we get that for every $g \in G = \langle S\rangle$ there exists $h \in G$ such that $h|_{x_1} = g$ and $h(x_1) = x_1$. This means that the homomorphism

$$St_G(x_1) \to G,\ g \mapsto g|_{x_1} \qquad (2)$$

is surjective. Since $St_G(x_1)$ is a proper subgroup of G (the orbit of x_1 is non-trivial), the group G is infinite. The statement is proved. □

Remark 2. If for a group G the homomorphism in (2) is surjective, the group is called *self-replicating* or recurrent (one usually assumes transitive action on X). We proved in the theorem that every infinite group generated by loop automorphisms is self-replicating.

Problem 1. Does the class of groups generated by loop automorphisms contain infinite periodic groups?

Problem 2. Does the class of groups generated by loop automorphisms contain groups of intermediate growth?

Problem 3. Is it true that a group generated by loop automorphisms has exponential growth if and only if it contains a free subsemigroup on two generators?

References

1. *Bondarenko I.V., Nekrashevych V.V.* Post-critically finite self-similar groups // Algebra Discrete Math. — 2003. — Vol. 4. — P. 21–32.

2. *Grigorchuk R.I., Nekrashevych V.V., Sushchanskyy V.I.* Automata, dynamical systems, and groups // Proc. Steklov Inst. Math. — 2000. — Vol. 231. — P. 134–214.

3. *Grigorchuk R.I., Šuniḱ Z.* Asymptotic aspects of Schreier graphs and Hanoi Towers groups // C. R., Math., Acad. Sci. Paris — 2006. — Vol. 342. — P. 545–550.

4. *Grigorchuk R.I., Żuk A.* On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton // Internat. J. Algebra Comput. — 2000. — Vol. 12. — P. 223–246.

5. *Nekrashevych V.* Self-similar groups / Nekrashevych V. — American Mathematical Society: Providence, RI, 2005. — 231 pp. — (Mathematical Surveys and Monographs 117).

6. *Neumann P.M.* Some questions of Edjvet and Pride about infinite groups // Illinois J. Math. — 1986. — Vol. 30. — P. 301–316.

7. *Sidki S.* Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity // J. Math. Sci. (New York) — 2000. — Vol. 100. — P. 1925–1943.

Received: 10.11.2012

УДК 519.21

Ю.С. Мішура[1], *д.ф.-м.н., професор*
Г.Р. Ріжняк[2], *студентка*

Поведінка об'єктивної ціни опціона на облігацію з відсотковою ставкою, що керується дробовим геометричним процесом Орнштейна–Уленбека

У роботі досліджується поведінка об'єктивної ціни Європейського опціона купівлі на облігацію з відсотковою ставкою, що керується модифікованим дробовим геометричним процесом Орнштейна–Уленбека, як функції індекса Хюрста.

Ключові слова: опціон, дробовий процес Орнштейна–Уленбека.

[1],[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64.

Yu.S. Mishura[1], *DsC, Professor*
G. R. Rizhniak[2], student

Objective Call Option Price Behaviour of the Bond with Interest Rate Driven by Geometric Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process

The paper examines behavior of the European call option price of the bond with interest rate driven by modified geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process as a function of Hurst index.

Key words: option, fractional Ornstein–Uhlenbeck process.

[1],[2]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

E-mails: myus@univ.kiev.ua, galina.rizhniak@gmail.com

Communicated by Prof. Kozachenko Yu. V.

1 Introduction

Fractional calculus is extensively used in different modelling, including financial modelling. The paper [1] studies Doob's transformation of fractional Brownian motion, which is identical in law with the Ornstein–Uhlenbeck diffusion. The book [2] represents stochastic calculus for fractional Brownian motion. It contains financial models and statistical problems that involve fractional Brownian motion. The paper [3] studies financial markets with stochastic volatilities driven by fractional Brownian motion with Hurst index $H > \frac{1}{2}$. Current paper examines behavior of the European call option price of the bond with interest rate driven by modified geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process as a function of Hurst index.

2 Price of the Bond with Interest Rate Driven by Geometric Ornstein–Uhlenbeck Process with Wiener Process

The Ornstein–Uhlenbeck process $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ is a Gaussian and Markov process that satisfies the following stochastic differential equation:

$$dX_t = -aX_t dt + \gamma dW_t,\ X\Big|_{t=0} = X_0,$$

where $a > 0$ and $\gamma > 0$ are constants and $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ is the Wiener process. The solution of this stochastic differential equation has the following form $X_t = X_0 e^{-at} + \gamma e^{-at} \int\limits_0^t e^{as} dW_s$.

We suppose in what follows that $X_0 = 1$. The geometric Ornstein–Uhlenbeck process satisfies the following stochastic differential equation:

$$dX_t = X_t\Big\{ -ae^{-at}dt - a\gamma e^{-at}dt \int\limits_0^t e^{as}dW_s + \\ + \gamma dW_t + \frac{1}{2}\gamma dt\Big\}, \quad (1)$$

and the solution of equation (3) has the following form

$$X_t = x_0 \exp\Big\{e^{-at} + \gamma e^{-at} \int\limits_0^t e^{as} dW_s\Big\} = \\ = x_0 \exp\Big\{e^{-at} - a\gamma \int\limits_0^t e^{-as} \int\limits_0^s e^{au} dW_u ds + \gamma W_t\Big\}. \quad (2)$$

© Ю.С. Мішура, Г.Р. Ріжняк, 2013

Consider the following model of financial market. Suppose we have the European call option with an expiration date T. The bond interest rate is driven by the modified geometric Ornstein–Uhlenbeck process with the Wiener process. It satisfies the following stochastic differential equation

$$dX_t^{(1)} = X_t^{(1)}\Big\{ -\mu e^{-\mu t}dt - \mu\gamma e^{-\mu t}\times \\ \times \int_0^t e^{as}dW_s dt + \gamma e^{-\mu t+at}dW_t + \gamma e^{-2(\mu-a)t}dt\Big\}. \quad (3)$$

The solution of equation (3) has the following form

$$X_t^{(1)} = x_0 \exp\Big\{e^{-\mu t} + \gamma e^{-\mu t}\int_0^t e^{as}dW_s\Big\} = \\ = x_0 \exp\Big\{e^{-\mu t} - \gamma\mu\int_0^t e^{-\mu s}\int_0^s e^{au}dW_u ds + \\ + \gamma\int_0^t e^{-\mu s+as}dW_s\Big\}.$$

To find the price of this option we have to calculate the expectation value $E[X_T^{(1)} - K]^+$, where $K > 0$ is the strike price. Using indicator $I\{X_t^{(1)} > K\}$, we remove brackets in the expectation value

$$E[X_T^{(1)} - K]^+ = E[X_T^{(1)} - K]I\{X_T^{(1)} > K\} = \\ = EX_T^{(1)}I\{X_T^{(1)} > K\} - KI\{X_T^{(1)} > K\}. \quad (4)$$

We find both items of this equality. Ornstein–Uhlenbeck process is a Gaussian process, so

$$EX_T^{(1)}I\{X_T^{(1)} > K\} = \int_K^\infty e^x p(x)dx,$$

where $p(x)$ is a density function of normal distribution with parameters m and σ^2:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big\},$$

here m is the expectation and σ^2 is the variance of modified Ornstein–Uhlenbeck process

$$m = E[X_T^{(1)}] = e^{-\mu T},$$

$$\sigma^2 = Var[X_T^{(1)}] = \frac{\gamma^2 e^{-2\mu T}}{2a}(e^{2aT} - 1). \quad (5)$$

We continue to calculate the first item in (4)

$$EX_T^{(1)}I\{X_T^{(1)} > K\} = \int_K^\infty e^x p(x)dx = \\ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_K^\infty \exp\Big\{-\Big(\frac{x-\sigma^2-m}{\sqrt{2}\sigma}\Big)^2 + m + \frac{\sigma^2}{2}\Big\}dx = \\ = \frac{\exp\{m+\frac{\sigma^2}{2}\}}{\sqrt{2\pi}}\Big(1 - \Phi\Big(\frac{K-\sigma^2-m}{\sigma}\Big)\Big).$$

Consider the second item of (4). Evidently, $EI\{X_T^{(1)} > K\} = P\{X_T^{(1)} > K\}$ and

$$KEI\{X_T^{(1)} > K\} = K\int_K^\infty p(x)dx = \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times \\ \times\int_K^\infty \exp\Big\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big\}dx = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\Big(1-\Phi\Big(\frac{K-m}{\sigma}\Big)\Big).$$

As a result we obtain the price for the option

$$E[X_T^{(1)} - K]^+ = \frac{\exp\{m+\frac{\sigma^2}{2}\}}{\sqrt{2\pi}}\times \\ \times\Big(1-\Phi\Big(\frac{K-\sigma^2-m}{\sigma}\Big)\Big) - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\Big(1-\Phi\Big(\frac{K-m}{\sigma}\Big)\Big),$$

where the variance σ^2 is determined by (5).

3 Price of the Bond with Interest Rate Driven by Geometric Fractional Ornstein-Uhlenbeck Process

Now we consider a call option with the bond interest rate driven by geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process that satisfies the following stochastic differential equation

$$dX_t^{(2)} = X_t^{(2)}\Big\{ -\mu e^{-\mu t}dt - \\ - \mu\gamma e^{-\mu t}\int_0^t e^{as}dB_s^H dt + \gamma e^{-\mu t+at}dB_t^H\Big\}.$$

The solution of the stochastic differential equation has the following form

$$X_t^{(2)} = x_0 \exp\{e^{-\mu t} + \gamma e^{-\mu t}\int_0^t e^{as} dB_s^H\} =$$

$$= x_0 \exp\{e^{-\mu t} - \gamma\mu \int_0^t e^{-\mu s}\int_0^s e^{au} dB_u^H ds + \gamma\int_0^t e^{-\mu s + as} dB_s^H\}.$$

The expectation and the variance for the corresponding Ornstein-Uhlenbeck process $e^{-\mu t} + \gamma e^{-\mu t}\int_0^t e^{as} dB_s^H$ at the point T equal, respectively,

$$m = e^{-\mu T},$$

$$\sigma^2 = H(2H-1)\gamma^2 e^{-2\mu T}\int_0^T\int_0^T e^{as+au}|s-u|^{2H-2} du ds. \quad (6)$$

The price for such option equals

$$E[X_T^{(2)} - K]^+ = \frac{\exp\{m + \frac{\sigma^2}{2}\}}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times\Big(1-\Phi\Big(\frac{K-\sigma^2-m}{\sigma}\Big)\Big) - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\Big(1-\Phi\Big(\frac{K-m}{\sigma}\Big)\Big),$$

where the variance σ^2 is determined by (6).

4 Behavior of the Variance of Geometric Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process as a Function of Hurst Index

We already know that the variance of geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process equals

$$\sigma^2 = H(2H-1)\gamma^2 e^{-2\mu T}\int_0^T\int_0^T e^{as+au}|s-u|^{2H-2} du ds.$$

After some transformation we obtain the following form for the variance

$$\sigma^2 = H(2H-1)\gamma^2 e^{-2\mu T}\frac{1}{a}\Big(e^{2aT}\int_0^T e^{-az} z^{2H-2} dz - \int_0^T e^{az} z^{2H-2} dz\Big).$$

As $H \to \frac{1}{2}$, easily can be shown that $z^{2H-1} \to 1$,

$$\lim_{H\to\frac{1}{2}} (2H-1)\int_0^T e^{-az} z^{2H-2} dz = 1,$$

$$\lim_{H\to\frac{1}{2}} (2H-1)\int_0^T e^{az} z^{2H-2} dz = 1.$$

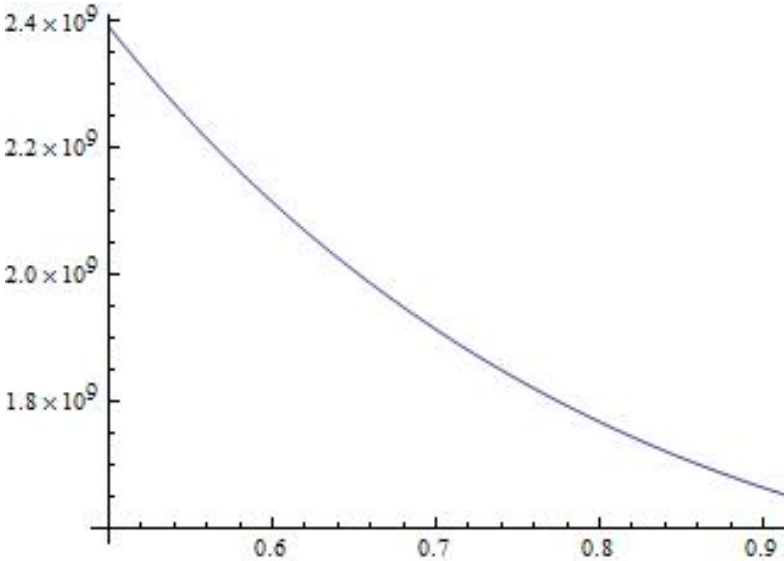
Now we can observe that the asymptotic behavior of the variance as $H \to \frac{1}{2}$ is following:

$$\lim_{H\to\frac{1}{2}} \sigma^2 = \frac{\gamma^2 e^{-2\mu T}}{2a}(e^{2aT} - 1).$$

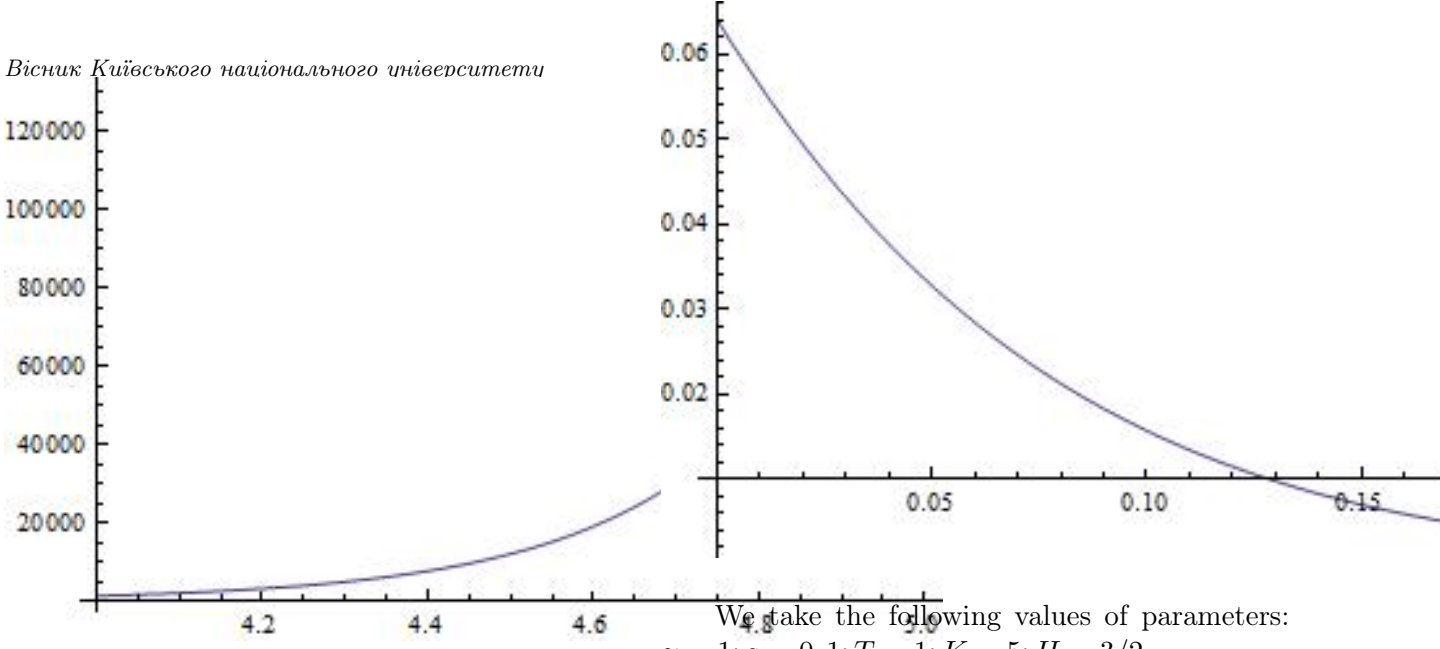
As $H \to 1$ we obtain:

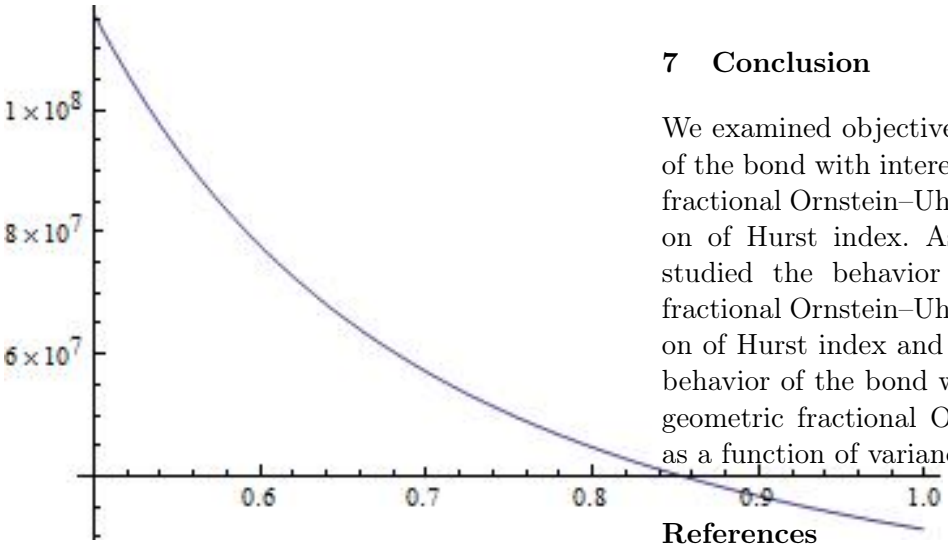
$$\lim_{H\to 1} \sigma^2 = \frac{\gamma^2 e^{-2\mu T}}{a}\Big(e^{2aT}\int_0^T e^{-az} dz - \int_0^T e^{az} dz\Big) = \frac{\gamma^2 e^{-2\mu T}}{a^2}(1 - e^{aT})^2.$$

5 Monotonicity of the Variance of Geometric Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process as a Function of Hurst Index. Monotonicity of Price of the Bond with Interest Rate Driven by Geometric Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process as a Function of



The price of the bond with interest rate driven by geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process is an increasing function of σ^2.





We take the following values of parameters: $\gamma = 1; \mu = 0,1; a = 2; T = 1; K = 5; m = 14$. A computational software program Mathematica is used.

6 Monotonicity of Price of the Bond with Interest Rate Driven by Geometric Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process as a Function of μ

Since we consider the modified geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process it is interesting to examine the monotonicity of price of the bond as a function of μ. Parameter μ can be considered as a discount interest rate.

We take the following values of parameters: $\gamma = 1; a = 0,1; T = 1; K = 5; H = 3/2$.

7 Conclusion

We examined objective call option price behavior of the bond with interest rate driven by geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process as a function of Hurst index. As an auxiliary result were studied the behavior of variance of geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process as a function of Hurst index and examined call option price behavior of the bond with interest rate driven by geometric fractional Ornstein–Uhlenbeck process as a function of variance.

References

1. Kaarakka T., Salminen P. *On fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*// Communications on Stochastic Analysis Vol. 5, No. 1 (2011) 121-133.

2. Mishura, Yu. *Stochastic calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

3. Mishura Y., Swishchuk A. *Modeling and Pricing of Variance and Volatility Swaps for Stochastic Volatilities Driven by Fractional Brownian Motion* Applied Statistics, Actuarial and Financial Mathematics,№ 1-2, 2010.

Received: 16.11.2013

УДК 512.54

Б. В. Олійник[1], *к.ф.-м.н.*

Метрично реалізовні групи підстановок

Группа підстановок називається метрично реалізовною, якщо вона ізоморфна як група підстановок групі ізометрій деякого скінченного метричного простору. Розглянуто деякі властивості реалізовних груп. Введено конструкцію прямої суми метричних просторів і показано, що пряма сума, прямий добуток і вінцевий добуток двох метрично реалізовних груп буде метрично реалізовною групою. Охарактеризовано всі групи підстановок, що реалізуються як групи ізометрій скінченних ультраметричних просторів.

Ключові слова: група підстановок, метричний простір, група ізометрій, ультраметричний простір.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, e-mail: bogdana.oliynyk@gmail.com.

B. V. Oliynyk[1], *PhD*

Metric realizable permutation groups

A permutation group is said to be metric realizable if it is isomorphic as a permutation group to the isometry group of a metric space. Some properties of metric realizable groups are discussed. We introduce a new construction of direct sum of metric spaces and show that direct sums, direct products and wreath products of two metric realizable groups are metric realizable. All permutation group realizable as isometry group of finite ultrametric space are characterized.

Key Words: permutation group, metric space, isometry group, ultrametric space.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, vul.Volodymyrska, 64, e-mail: ibond.univ@gmail.com.

Communicated by Prof. V. V. Kirichenko.

1. A well-known problem that sometimes called generalized Koenig's problem is formulated as follows. For a given permutation group (G, X) find a discrete structure X (e.g., graph, metric space, ordered set, etc.) such that the automorphism group $Aut(X)$ is isomorphic to (G, X) as a permutation group (see [1]). Research in this direction naturally include studying operations on groups which preserve their property to be realized as automorphism groups of discrete structures. In [2] and [3] it was investigated constructions of graphs to show that wreath products and direct sums of permutation groups are realizable as their automorphism groups. In [5] and [6] constructions of metric spaces were studied to show the realizability of wreath products and direct products of permutation groups as isometry groups.

In this paper we consider only finite permutation groups, finite simple graphs (non directed, without loops) and finite metric spaces. We introduce a new construction of direct sum of metric spaces. Using this construction we will show that if two permutation group are isomorphic (as permutation groups) to the isometry groups of some metric space, then the direct sum of these groups also isomorphic to the isometry group of a finite metric space. We also characterize all permutation groups that are isomorphic to the isometry groups of finite ultrametric spaces.

2. Let (G, X) and (H, Y) be permutation groups. We say that the groups G and H are isomorphic as permutation groups ([4]) if there exist an isomorphism $f : G \to Y$ and a bijective map $\delta : X \to Y$ such that $\delta(x^g) = \delta(x)^{f(g)}$, where x^g is the image of the element $x \in X$ under $g \in G$.

Definition 1. A permutation group (G, X) is called *metric realizable* if there exists a metric space (Y, d_Y) such that the group (G, X) and the isometry group $(IsomY, Y)$ are isomorphic as permutation groups. In this case we say that the group (G, X) is *realized* on the metric space (Y, d_Y).

A permutation group (G, X) is said to be *graph realizable* if there exists a simple graph $\Gamma = (V, E)$ such that the group (G, X) and the automorphism group $(Aut\Gamma, V)$ are isomorphic as permutation groups.

Note that arbitrary simple graph $\Gamma = (V, E)$ can be considered as a metric space. The distance

© B. V. Oliynyk, 2013

$d_\Gamma(v_1, v_2)$ between vertices $v_1, v_2 \in V$ is defined as the length of the shortest path between v_1 and v_2 in Γ. In this case the automorphism group of the graph Γ equals to the isometry group of the metric space (Γ, d_Γ).

We can formulate some properties of metric realizable and graph realizable groups which are not difficult to verify.

1) A multiply transitive group (G, X) is metric realizable iff (G, X) is isomorphic as a permutation group to the symmetric group $Sym(X)$ naturally acting on the set X.

2) The class of graph realizable groups is a subclass of the class of metric realizable group. Moreover, there exist finite permutation groups which are not isomorphic to automorphism groups of any graphs, but are metric realizable. For example, a trivial group acting on 3 points can not be realized as the automorphism group of any simple graph. But this group is the isometry group of the metric space with the following matrix of distances:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) The class of graph realizable groups coincides with the class of metric realizable groups on metric spaces such that their metrics takes only three values.

4) There exist transitive groups that are not isometry groups of any finite metric spaces. For example, the regular cyclic group $(C_n, \{1, 2, \dots, n\})$ of order $n \geqslant 3$ is not metric realizable.

5) If the permutation group (G, X) is metric realizable, then there exists a metric d on X such that the group (G, X) is realized on the space (X, d).

Every intransitive group can be decomposed in standard way into a semidirect product of its transitive components. Therefore, property (1) implies that it is sufficient to consider the problem of realization permutation groups as isometries of metric spaces for transitive groups only.

For a finite metric space (X, d) denote by $Distd$ the set of all possible values of metric d.

Lema 1. *If the isometry group $Isom(X, d)$ of the space (X, d) acts transitively on X, then*

$$Distd \leqslant |X|. \tag{1}$$

Proof. Let x, y be points of (X, d). Denote by D_x the set $\{d(u, x) \mid u \in X\}$. If f is an isometry of X and $f(x) = y$, then $D_x = D_y$. Hence, transitivity of $Isom(X, d)$ implies that for every $x \in X$ we have $Distd = D_x$. As $|D_x| \leqslant |X|$, the required inequality follows. □

For a two-point space the inequality (1) transforms into the equality. Assume that (X, d_X) is an n-point discrete space, i.e., for distinct points $u, v \in X$ we have $d_X(u, v) = 1$. Then $Distd_X = 2$. Hence, in this case we have the relation

$$\frac{Distd_X}{|X|} = \frac{2}{n}$$

which can be made arbitrarily small.

3. Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be finite metric spaces with $X \cap Y = \emptyset$. Assume that b, c are positive numbers such that the inequalities

$$diamX \leqslant c, \qquad \min_{x,y \in X} > b \cdot diamY \tag{2}$$

hold. Define a function $\rho_{c,b}$ on the union $X \cup Y$ by the rule:

$$\rho_{c,b}(x, y) = \begin{cases} d_X(x, y), & \text{if } x,\ y \in X \\ b \cdot d_Y(x, y), & \text{if } x,\ y \in Y \\ c, & \text{in other cases} \end{cases}.$$

The following proposition is clear.

Lema 2. *The function $\rho_{c,b}$ is a metric on the set $X \cup Y$.*

We call the metric space $(X \cup Y, \rho_{c,b})$ the *direct sum* of the metric spaces (X, d_X) and (Y, d_Y) and denote it by $X \boxplus_{c,b} Y$.

It is not difficult to verify

Proposition 1. *Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be finite metric spaces, b, c be positive numbers such that inequalities* (2) *hold. Then the space $X \boxplus_{c,b} Y$ is ultrametric iff both metric spaces (X, d_X) and (Y, d_Y) are ultrametric.*

Following [4], we call a permutation group $(G \times H, X \cup Y)$ the direct sum of permutation groups (G, X) and (H, Y) if every element $(g, h) \in G \times H$ acts on arbitrary $t \in X \cup Y$ by the rule:

$$t^{(g,h)} = \begin{cases} t^g, & \text{if } t \in X \\ t^h, & \text{if } t \in Y \end{cases}. \qquad (3)$$

Denote the direct sum of permutation groups (G, X) and (H, Y) by $(G, X) \oplus (H, Y)$.

Theorem 1. *Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be finite metric spaces, b, c be positive numbers such that inequalities (2) hold. Then the isometry group of the direct sum $X \boxplus_{c,b} Y$ of the metric spaces X and Y is isomorphic as a permutation group to the direct sum of isometry groups of these spaces:*

$$(Isom(X \boxplus_{c,b} Y), X \cup Y) \simeq \\ \simeq (IsomX, X) \cup (IsomY, Y).$$

Proof. Let (g, h) be an element of the group $(IsomX, X) \oplus (IsomY, Y)$. We shall show that $\varphi = (g, h)$ is an isometry of $X \boxplus_{c,b} Y$. The group $(IsomX, X) \oplus (IsomY, Y)$ acts on $X \cup Y$. Hence (g, h) is a bijective map on $X \boxplus_{c,b} Y$. Moreover, for arbitrary points x, y from $X \boxplus_{c,b} Y$ we have

$$\rho_{c,b}(\varphi(x), \varphi(y)) = \\ = \begin{cases} d_X(x^g, y^g), & \text{if } x, y \in X \\ \rho_{c,b}(x^h, y^h), & \text{if } x, y \in Y \\ \rho_{c,b}(x^g, y^h), & \text{if } x \in X,\ y \in Y \\ \rho_{c,b}(x^h, y^g), & \text{otherwise} \end{cases} = \\ = \begin{cases} d_X(x^g, y^g), & \text{if } x, y \in X \\ b \cdot d_Y(x^h, y^h), & \text{if } x, y \in Y \\ c, & \text{if } x \in X,\ y \in Y \\ c, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

As $g \in IsomX$, $y \in IsomY$, we obtain

$$\rho_{c,b}(\varphi(x), \varphi(y)) = \\ = \begin{cases} d_X(x, y), & \text{if } x, y \in X \\ b \cdot d_Y(x, y), & \text{if } x, y \in Y \\ c, & \text{otherwise} \end{cases} = \rho_{c,b}(x, y).$$

So φ preserves the metric $\rho_{c,b}$. Therefore φ is an isometry of $X \boxplus_{c,b} Y$.

Let now φ be some isometry of $X \boxplus_{c,b} Y$, x be a point of $X \boxplus_{c,b} Y$. Using inequalities (2) we have that if $x \in X$ then $\varphi(x) \in X$, if $x \in Y$ then $\varphi(x) \in Y$. Hence the isometry φ acts on each point $x \in X \cup Y$ as some pair $(g, h) \in IsomX \times IsomY$ by rule (3). The proof of the theorem is complete. □

Note that there are graph realizable groups such that the direct sum of these groups in not a graph realizable group (see [3]).

The proof of the following proposition follows from Proposition 1 and Theorem 1.

Corollary 1. *If permutation groups (G, X), (H, Y) are metric realizable as isometry groups of some ultrametric spaces, then the group $(G, X) \oplus (H, Y)$ is metric realizable as isometry group of some ultrametric spaces too.*

Definition 2. We say that a binary operation $*$ on the class of finite permutation groups *preserves realizability* if for arbitrary metric realizable finite permutation groups (G, X) and (H, Y) the group $(G, X) * (H, Y)$ is metric realizable as well.

Lema 3. *[5] The direct product of finite metric realizable permutation groups is metric realizable.*

Theorem 2. *The operations of direct sum, direct product and wreath product preserve realizability.*

Proof. From Theorem 1 and Lemma 3 it follows that the operations of direct sum and direct product preserve realizability. Using Theorem 4 from [6] we obtain that the wreath product of finite metric realizable permutation groups is metric realizable. □

Let $B = \{T_1, T_2, \ldots\}$ be some countable alphabet. Define a notion of a formula on the alphabet B in three steps.

1) For every i, $i \geqslant 1$, the letter T_i from the alphabet B is *formula*.

2) If H_1 and H_2 are formulas on alphabet B then $(H_1 \wr H_2)$, $(H_1 \oplus H_2)$, $(H_1 \times H_2)$ are *formulas* on the alphabet B.

3) There are no other formulas.

Let now (G_1, X_1), (G_2, X_2), …, (G_n, X_n) be permutation groups. For a formula $W(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ denote by

$$W((G_1, X_1), (G_2, X_2), \ldots, (G_n, X_n))$$

its value on a sequence (G_1, X_1), (G_2, X_2), …, (G_n, X_n).

Corollary 2. *Let $W(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ be a formula. Then for arbitrary metric realizable permutation groups (G_1, X_1), (G_2, X_2), ..., (G_n, X_n) the permutation group*

$$W((G_1, X_1), (G_2, X_2), \ldots, (G_n, X_n))$$

is metric realizable too.

4. A permutation group is said to be *u-metric realizable* if it is isomorphic as a permutation group to the isometry group of an ultrametric space.

Theorem 3. *A finite permutation group (G, X) is u-metric realizable iff there exist positive integers k and $n_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ such that the group (G, X) is isomorphic as a permutation group to the group $\oplus_{i=1}^{k}(\wr_{j=1}^{n_i} S_{m_j})$, where S_{m_j} is the symmetric group of degree m_j.*

Proof. It follows from [7] that for every finite ultrametric space (X, d) there exists a finite rooted tree $T = (V, E)$ such that (X, d) is isometric to the space (V, d_T). Then $(IsomX, X) \simeq (AutT, V)$. The automorphism group $(AutT, V)$ has a fixed point (root) and splits as a permutation group into the direct sums of transitive subgroups ([8]). A subgroup H of the automorphism group of a rooted tree is transitive iff H acts transitively on a spherically homogeneous rooted subtree of T. The automorphism group of a spherically homogeneous rooted tree is isomorphic as a permutation group to the wreath product $\wr_{j=1}^{n} S_{m_j}$ (for some n) of symmetric groups. Therefore, a finite permutation group (G, X) is u-metric realizable iff (G, X) is isomorphic to the direct sum of wreath products of symmetric groups. □

References

1. *Babai L.* Automorphism groups, isomorphism, reconstruction / Babai L. — In: *Graham R. L., Grotschel M., Lovasz L. (eds.)* Handbook of Combinatorics. — North-Holland, Amsterdam, 1995. — P. 1447–1540.

2. *Sabidussi G.* The composition of graphs // Duke Math J. — 1959. — Vol. 26. — P. 693–696.

3. *Peisert W.* Direct product and uniqueness of automorphism groups of graphs // Discrete Math. — 1999. — Vol. 207. — P. 189—197.

4. *Sushchansky V.I., Sikora V.S.* Operations on permutation groups. Theory and Applications / Sushchanskii V.I., Sikora V.S. — Chernivtsi: Ruta, 2003. — 256 pp.

5. *Oliynyk B. V.* Realizability of direct products of transformation groups by isometries of metric spaces // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. — 2011. — № 9. — P. 20–25.

6. *Oliynyk B.* Wreath product of metric spaces // Algebra Discrete Math. — 2007.— № 4. — P. 123–130.

7. *Oliynyk B.V.* Some properties of finite ultrametric spaces // Nauk. Zapysky NaUKMA. — 2006. — Vol. 51. — P. 17–19.

8. *Jordan C.* Nouvelles recherches sur la limite de transitivite' des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterne' // Journaux de Mathematiques. — 1895. — V. 1. — № 5. — P. 35–60

Received: 10.11.2012

УДК 519.21

Р. Я. Орловський[1], студент

Довірчі інтервали для параметра коваріаційної функції із сімейства Дегума

Описано побудову не асимптотичного довірчого інтервалу для параметра коваріаційної функції із сімейства Дегума.

Ключові слова: Довірчий інтервал, коваріаційна функція.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

Email: [1]r_orlovskiy@mail.ru

Communicated by Prof. Kozachenko Yu. V.

R. Y. Orlovskyi[1], student

Confidence intervals for parameter of covariance function of the Dagum family

Described the construction of non-asymptotic confidence interval for covariance function parameter of the Dagum family.

Key Words: Confidence interval, covariance function.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

1 Introduction

Estimation and finding confidence intervals for parameters of covariance function of the random processes is one of the developing areas of statistics. There are many methods of parameter estimation, in particular, using asymptotic normality.

We consider a slightly different approach using Baxter's statistics [1] and concentration inequality for quadratic forms [2], which allows to find non-asymptotic confidence interval for parameter of covariance function of the Dagum family.

2 Confidence interval for the parameter of covariance function

Consider a stationary Gaussian process $(X(t), t \in [0,1])$ with mean function $m(t) = EX(t) = 0$ and covariance function of Dagum's family [3]:

$$EX(t)X(s) = 1 - \left(\frac{|t-s|}{1+|t-s|}\right)^{\gamma},\ t,s \in [0,1],$$

where parameter $\gamma \in (0,1)$.
For all $\gamma \in (0,1)$ denote

$$r(t) = 1 - \left(\frac{t}{t+1}\right)^{\gamma}, t \in [0,1].$$

Assume that one observes $(X(t), t \in [0,1])$. The aim is to derive non-asymptotic confidence interval for parameter $\gamma \in (0,1)$.

For arbitrary $n \geqslant 1$ introduce the following notation:

$$\Delta X_k = \Delta X_{k,n} = X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right),$$

$k = 0, 1, .., n-1$.

$$R_n(k,l) = E\left(\Delta X_k \Delta X_l\right) =$$

$$= r\left(\frac{|k-l-1|}{n}\right) - 2r\left(\frac{|k-l|}{n}\right) + r\left(\frac{|k-l+1|}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{|k-l-1|}{n+|k-l-1|}\right)^{\gamma} - 2\left(\frac{|k-l|}{n+|k-l|}\right)^{\gamma} +$$

$$+ \left(\frac{|k-l+1|}{n+|k-l+1|}\right)^{\gamma},$$

where $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.

Lemma 1. *Consistent estimate of parameter $\gamma \in (0,1)$ is*

$$\hat{\gamma}_n = 1 - \frac{\ln S_n}{\ln(n+1)},\ n \geqslant 1, \qquad (1)$$

where $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta X_k)^2$.

Proof. Let us show that

$$\gamma - \hat{\gamma}_n \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$$

© Р.Я. Орловський, 2013

Consider

$$\gamma - \hat{\gamma}_n = \gamma - 1 + \frac{\ln S_n}{\ln(n+1)} =$$

$$= \log_{n+1}\left((n+1)^{\gamma-1}S_n\right)$$

Therefore it is necessary show that

$$\log_{n+1}\left((n+1)^{\gamma-1}S_n\right) \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$$

Denote $T_n := (n+1)^{\gamma-1}S_n$. Then,

$$ET_n = (n+1)^{\gamma-1}ES_n =$$

$$= (n+1)^{\gamma-1}E\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta X_k)^2 = 2\frac{n}{n+1}.$$

Applying Tchebychev's inequality:

$$P\left(|T_n - ET_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{DT_n}{\varepsilon^2}.$$

It remains to show that $DT_n \to 0, n \to \infty$.

$$DT_n = (n+1)^{2\gamma-2}DS_n =$$

$$= (n+1)^{2\gamma-2}\left(ES_n^2 - (ES_n)^2\right).$$

Isserlis theorem is used to calculate ES_n^2, that is,

$$E\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = E\xi_1\xi_2E\xi_3\xi_4 +$$

$$+E\xi_1\xi_3E\xi_2\xi_4 + E\xi_1\xi_4E\xi_2\xi_3.$$

Thus,

$$ES_n^2 = E\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta X_k^2\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{n-1}E\left(\Delta X_k^2\Delta X_l^2\right) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{n-1}\left(2\left(E\Delta X_k\Delta X_l\right)^2 + \left(E\Delta X_k^2\right)\left(E\Delta X_l^2\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{k,l=0}^{n-1}R_n^2(k,l) + \frac{4n^2}{(n+1)^{2\gamma}};$$

Compute also

$$(ES_n)^2 = \left(E\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta X_k^2\right)\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1}E\left(\Delta X_k^2\right)\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{(n+1)^{\gamma}}\right)^2 =$$

$$= \frac{4n^2}{(n+1)^{2\gamma}}.$$

Hence we obtain that

$$DT_n = 2(n+1)^{2\gamma-2}\sum_{k,l=0}^{n-1}R_n^2(k,l).$$

$$\sum_{k,l=0}^{n-1}R_n^2(k,l) = \sum_{k=l}R_n^2(k,l) + 2\sum_{k<l}R_n^2(k,l) =$$

$$= nR_n^2(0,0) + 2\sum_{k<l}R_n^2(k,l) =$$

$$= \frac{4n}{(n+1)^{2\gamma}} + 2\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{l-1}R_n^2(k,l) =$$

$$= \frac{4n}{(n+1)^{2\gamma}} + 2\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{l}R_n^2(0,m) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{20n}{(n+1)^{2\gamma}} + 2\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{m=2}^{l}R_n^2(0,m)$$

Consider

$$R_n(0,m) = r\left(\frac{m-1}{n}\right) - 2r\left(\frac{m}{n}\right) + r\left(\frac{m+1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}r''(\Theta_{m,n}),\ \text{де}\ \Theta_{m,n} \in \left(\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right),\ m \geqslant 2,$$

where we use formula for the finite differences ([4], p. 244). Let us to calculate derivatives of function $r(t)$.

$$r'(t) = -\gamma\frac{t^{\gamma-1}}{(t+1)^{\gamma+1}};$$

$$r''(t) = -\gamma(\gamma - 1 - 2t)\frac{t^{\gamma-2}}{(t+1)^{\gamma+2}}.$$

Then,

$$\left|r''(t)\right|^2 \leqslant 9t^{2\gamma-4},\ t > 0.$$

$$R_n^2(0,m) \leqslant \frac{9}{n^4}\Theta_{m,n}^{2\gamma-4} \leqslant \frac{9}{(m-1)^2n^{2\gamma}},\ m \geqslant 2.$$

$$\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{m=2}^{l}R_n^2(0,m) \leqslant \sum_{l=2}^{n-1}\sum_{m=2}^{l}\frac{9}{(m-1)^2n^{2\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{9}{m^2n^{2\gamma}} \leqslant \frac{3\pi^2}{2}n^{1-2\gamma}.$$

Thus,

$$DT_n = 2(n+1)^{2\gamma-2}\sum_{k,l=0}^{n-1}R_n^2(k,l) \leqslant$$

$$\leqslant 2(n+1)^{2\gamma-2}\left(\frac{20n}{(n+1)^{2\gamma}}+2\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{m=2}^{l}R_n^2(0,m)\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2(n+1)^{2\gamma-2}\left(\frac{20n}{(n+1)^{2\gamma}}+3\pi^2 n^{1-2\gamma}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{40+6\pi^2}{n}\to 0,\ n\to\infty$$

Therefore we get,

$$T_n-ET_n=(n+1)^{\gamma-1}S_n-2\frac{n}{n+1}\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty$$

and as a consequence

$$(n+1)^{\gamma-1}S_n\xrightarrow{P}2,\ n\to\infty$$

Function $\log_2 x$ is continuous and therefore ([5], p. 133)

$$\log_2\left((n+1)^{\gamma-1}S_n\right)\xrightarrow{P}1,\ n\to\infty\implies$$

$$\implies\frac{\log_2\left((n+1)^{\gamma-1}S_n\right)}{\log_2(n+1)}=$$

$$=\log_{n+1}(n+1)^{\gamma-1}S_n\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty$$

□

Let us describe how to build a confidence interval for parameter $\gamma\in[0,1]$ of covariance function $r(t)$. Consider a finite centered Gaussian family $X=(X_k)_{k=0}^{n-1}$ and denote $R(k,l)=EX_kX_l$. Let us consider two quadratic forms associated with X and some real coefficient c:

$$Q_1(c,X)=c\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_k^2-R(k,k)\right)$$

$$Q_2(c,X)=2c^2\sum_{k,l=0}^{n-1}X_kX_lR(k,l).$$

Theorem 1. *([2], Theorem 2.1). Assume $Q_1(c,X)$ is not a.s. zero and suppose there exist $\alpha\geqslant 0$ and $\beta>0$ such that:*

$$Q_2(c,X)\leqslant\alpha Q_1(c,X)+\beta\ \text{a.s.}$$

Then, for all $z>0$, we have:

$$P\left(Q_1(c,X)\geqslant z\right)\leqslant\exp\left(-\frac{z^2}{2\alpha z+2\beta}\right);$$

$$P\left(Q_1(c,X)\leqslant -z\right)\leqslant\exp\left(-\frac{z^2}{2\beta}\right).$$

In particular,

$$P\left(|Q_1(c,X)|\geqslant z\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{z^2}{2\alpha z+2\beta}\right).$$

Theorem 2. *Let $(X(t),t\in[0,1])$- stationary centered Gaussian process with covariance given by*

$$r(t)=1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\gamma},\quad t\in[0,1],$$

$$\gamma\in[\gamma_*,\gamma^*],\ 0<\gamma_*<\gamma^*<1.$$

For arbitrary $z\in(1,2)$ let us write

$$m(z):=\frac{\ln\left((2+z)\frac{n}{n+1}\right)}{\ln(n+1)};$$

$$I_n(z):=\left[\hat\gamma_n+m(-z);\hat\gamma_n+m(z)\right],$$

where $\hat\gamma_n$- consistent estimate (1). Then γ belongs to $I_n(z)\cap[0,1]$ with probability at least

$$p\geqslant\left(1-2\exp\left(-\frac{n^{\gamma_*}z^2}{4Cc_n(\gamma^*)(z+2)}\right)\right)_+,$$

where $c_n(\gamma^*):=\frac{(n+1)^{\gamma^*}}{n}$ and $C=12+3\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2-\gamma^*}}$.

Proof. Let $Y=(\Delta X_k)_{k=0}^{n-1}$ be a finite centered Gaussian family and consider two quadratic forms:

$$Q_1(c_n(\gamma),Y)=c_n(\gamma)\sum_{k=0}^{n-1}\left((\Delta X_k)^2-R_n(k,k)\right);$$

$$Q_2(c_n(\gamma),Y)=2c_n^2(\gamma)\sum_{k,l=0}^{n-1}\Delta X_k\Delta X_lR_n(k,l).$$

It easily seen that

$$Q_2(c_n(\gamma),Y)=2c_n^2(\gamma)\sum_{k,l=0}^{n-1}\Delta X_k\Delta X_lR_n(k,l)\leqslant$$

$$\leqslant c_n^2(\gamma)\sum_{k,l=0}^{n-1}\left((\Delta X_k)^2+(\Delta X_l)^2\right)|R_n(k,l)|=$$

$$=2c_n^2(\gamma)\sum_{k=0}^{n-1}\left((\Delta X_k)^2\sum_{l=0}^{n-1}|R_n(k,l)|\right).$$

Fix k in $\{0,..,n-1\}$ and using formula for the finite differences let us estimate sum:

$$\sum_{l=0}^{n-1}|R_n(k,l)|\leqslant\sum_{m=-n+1}^{n-1}|R_n(m,0)|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{m=0}^{n-1}|R_n(m,0)| \leqslant \frac{12}{(n+1)^\gamma}+2\sum_{m=2}^{n-1}|R_n(m,0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{12}{(n+1)^\gamma}+\frac{3}{n^2}\sum_{m=2}^{n-1}\left(\frac{m-1}{n}\right)^{\gamma-2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{12}{(n+1)^\gamma}+\frac{3}{n^\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2-\gamma^*}} \leqslant \frac{C}{n^{\gamma_*}}$$

Hence,

$$Q_2(c_n(\gamma),Y) \leqslant 2c_n^2(\gamma)\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta X_k)^2\sum_{l=0}^{n-1}|R_n(k,l)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C}{n^{\gamma_*}}c_n^2(\gamma)\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta X_k)^2 =$$

$$= \frac{2C}{n^{\gamma_*}}c_n(\gamma)\sum_{k=0}^{n-1}\Big((\Delta X_k)^2-R_n(0,0)\Big)+$$

$$+\frac{2C}{n^{\gamma_*}}c_n^2(\gamma)nR_n(0,0) =$$

$$= \frac{2C(n+1)^\gamma}{n^{1+\gamma_*}}Q_1(c_n(\gamma),Y)+\frac{4C(n+1)^\gamma}{n^{1+\gamma_*}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C(n+1)^{\gamma^*}}{n^{1+\gamma_*}}Q_1(c_n(\gamma),Y)+\frac{4C(n+1)^{\gamma^*}}{n^{1+\gamma_*}}.$$

Denote

$$\alpha_n := \frac{2C(n+1)^{\gamma^*}}{n^{1+\gamma_*}},\ \beta_n := \frac{4C(n+1)^{\gamma^*}}{n^{1+\gamma_*}}$$

Therefore following inequality holds:

$$Q_2(c_n(\gamma),Y) \leqslant \alpha_n Q_1(c_n(\gamma),Y)+\beta_n$$

One applies Theorem 1 to get

$$P\left(|Q_1(c_n(\gamma),Y)| \leqslant z\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1-2\exp\left(-\frac{z^2}{2\alpha_n z+2\beta_n}\right)\right)_+ =$$

$$= \left(1-2\exp\left(-\frac{n^{\gamma_*}z^2}{4Cc_n(\gamma^*)(z+2)}\right)\right)_+$$

Consider the following chain of implications

$$|Q_1\left(c_n(\gamma),Y\right)| \leqslant z \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -z \leqslant Q_1\left(c_n(\gamma),Y\right) \leqslant z \Longleftrightarrow$$

$$-z \leqslant \frac{(n+1)^\gamma}{n}\left(S_n-\frac{2n}{(n+1)^\gamma}\right) \leqslant z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-z \leqslant \frac{(n+1)^\gamma}{n}S_n \leqslant z+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(n(2-z)\right)-\ln S_n}{\ln(n+1)} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\ln\left(n(2+z)\right)-\ln S_n}{\ln(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\gamma}_n+m(-z) \leqslant \gamma \leqslant \hat{\gamma}_n+m(z)$$

Therefore, $\hat{\gamma}_n$ belongs to $I_n(z)$ with probability at least

$$p \geqslant \left(1-2\exp\left(-\frac{n^{\gamma_*}z^2}{4Cc_n(\gamma^*)(z+2)}\right)\right)_+.$$

□

References

1. *Kurchenko O. O.* One strong consistency estimate of the Hurst parameter of the fractional Brownian motion // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2003. – Vol. 67, 45-54.

2. *Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics. – 2009. – Vol.3, pp. 416-425.

3. *Berg C., Mateu J., Porcu E.* The Dagum class of isotropic corelation functions // Bernouli journal. – 2008. – Vol 14(4), pp. 1134-1149.

4. *Fihtengol'c G. M.* Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija, tom 1. // M., 1966 g., 608 p.

5. *Gihman I. I., Skorohod A. V., Jadrenko M. I.* Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika // Kiev, "Vyshcha shkola", 1979, 408 p.

Received: 14.11.2012

УДК 519.21

Д.В. Затула[1], студент

Модулі неперервності випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, визначених на інтервалі

Доведено теорему про модулі неперервності випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, визначених на інтервалі. Наведено приклади її застосування.

Ключові слова: простори Орліча, випадковий процес.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

E-mail: [1]dm_zatula@mail.ru

Communicated by Prof. Kozachenko Yu. V.

D.V. Zatula[1], student

Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval

A theorem about modules of continuity of random processes from the Orlicz spaces of random variables was proved. Examples of its application are presented.

Key words: Orlicz spaces, random process.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

1 Introduction

The article deals with modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables. There are given conditions under which the sample paths of these random processes satisfying Lipschitz condition. The results improve the estimates obtained in the monograph [1] in the general case, and in article [2]. The article specified space of random variables (considered the segment of axis of real numbers $[0, T]$).

2 Modules of continuity of random processes

Definition 1. A continuous even convex function $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ is called a $\mathbb{C}$–function if U is monotone increasing for $x > 0$ and $U(0) = 0$.

By Definition 1, the function $U(x)$, $x \geq 0$, is invertible [1, p. 42-44].

Definition 2. A $\mathbb{C}$–function U satisfies Δ^2–condition if the functions U and U^2 are equivalent, that is there exist constants $x_0 \geq 0$ and $L > 1$ such that

$$U^2(x) \leq U(Lx). \tag{1}$$

for $x \geq x_0$.

Lemma 1. *Let U be a function satisfying Δ^2–condition. Then $\forall x \geq U(x_0)$:*

$$U^{(-1)}(x^2) \leq LU^{(-1)}(x).$$

Lemma 2. *[1, p. 55] Suppose that a $\mathbb{C}$–function U satisfies Δ^2–condition and constants x_0, L — from inequality (1). If $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — arbitrary random variables from the Orlicz space $L_U(\Omega)$, then for $k \geq 1$, $x \geq z_0 = \max\{x_0, L\}$, $n \geq U(z_0)$ and $m \geq n$ the inequality holds:*

$$\mathsf{P}\left\{\max_{j=1,\ldots,n} |\xi_j| > x \max_{j=1,\ldots,n} \|\xi_j\|_U L^k U^{(-1)}(m)\right\} \leq \leq \frac{1}{m^{2^k-1}U(x)}. \tag{2}$$

Consider a space $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$ with a metric

$$\rho(t, s) = |t - s|, \quad t, s \in \mathbb{T}.$$

Let $\{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ be a $\mathbb{C}$–function, such that satisfies Δ^2–condition. Corresponding space $L_U(\Omega)$ is the Orlicz space with a norm $\|\cdot\|_U$.

Consider a stochastic process $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ with $L_U(\Omega)$–increments. Let

$$\rho_X(t, s) = \|X(t) - X(s)\|_U, \qquad t, s \in \mathbb{T}$$

be the pseudometric generated by the prosess X. Suppose that the process X is separable on $(\mathbb{T}, \rho)$.

Let $N(u) = N_\rho(\mathbb{T}, u)$ be the metric massiveness of the space $(\mathbb{T}, \rho)$. And let $\sigma(u)$, $u > 0$ be some continuous function, such that $\sigma(u) \to 0$ as $u \to 0$. Introduce a condition on the pseudometric ρ_X:

© Д. В. Затула, 2013

$$\sup_{\rho(t,s)\le u} \|X(t)-X(s)\|_U \le \sigma(u), \quad \forall u>0. \quad (3)$$

Since the metric massiveness $N(u)$ denotes the smallest number of elements in an u–covering of the set $\mathbb{T}$ (in this case, the segment $[0,T]$), then $\frac{T}{2u} \le N(u) \le \frac{T}{2u}+1$. Or, for the inverse function $\sigma^{(-1)}(u)$ of the function $\sigma(u)$:

$$N(u) \le \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1.$$

Let us prove the following theorem.

Theorem 1. *Let* $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t,s\in\mathbb{T}} \rho(t,s) = T$;

$$f(\sigma(u)) = \int_0^{\sigma(u)} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(p)}+1\right)dp =$$

$$= [p=\sigma(t)] = \int_0^{u} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right)d\sigma(t),\ u>0;$$

$z_0 = \max\{x_0, L\}$, *where* x_0 *and* L *— constants from Definition 2; and let* $c = 3L(5+4L)$, $u_* = \sigma^{(-1)}(T)$. *The following statements are true:*
A) *There exist functions* $C(\sigma(u))$, $u\in(0,u_*)$ *and* $C_1(u)$, $u\in(0,T)$, *such that* $C(\sigma(u))>0$, $\forall\, u\in(0,u_*)$, $C_1(u)>0$ $\forall\, u\in(0,T)$, $C_1(u)\to 0$ *as* $u\to 0$, *and the inequality*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ 0<|t-s|\le u}} \frac{|X(t)-X(s)|}{C(\sigma(u))f(\sigma(|t-s|))} > x\right\} \le \frac{C_1(u)}{U(x)},$$

holds $\forall\, x\ge z_0$, $u\in(0,\sigma^{(-1)}(T))$. *If* u *is such that* $N(u)>U(z_0)$, *then* $C_1(u)\le 3+\sqrt{2}$ *and* $C(\sigma(u))\le c$.
B) *We have*

$$\limsup_{u\downarrow 0} \frac{\Delta(X;u)}{cz_0 f(\sigma(u))} \le 1$$

almost surely, where

$$\Delta(X;u) = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ 0<|t-s|\le u}} |X(t)-X(s)|.$$

Proof. If $f(u_*)=\infty$ or $\sup\limits_{u>0} N(u)<\infty$, then the claims of the theorem are clear. Assume that $f(u_*)<\infty$ and $N(u)\to\infty$, $u\to 0$. For simplicity of calculations, take u such that $N(u)>U(z_0)$.

Define a sequence $(\varepsilon_n, n\ge 0)$ by setting

$$\delta_n = 2\inf\{\varepsilon : N(\varepsilon) < 2N(\varepsilon_n)\},$$

$$\varepsilon_{n+1} = \min\left\{\frac{\varepsilon_n}{3}, \delta_n\right\},\ n\ge 0.$$

Then $\forall n\ge 0$:

$$\varepsilon_{n+1}\le\frac{\varepsilon_n}{3}, \qquad \varepsilon_n \le \frac{3}{2}(\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}); \qquad (*)$$

$$N(\varepsilon_{n+2}) \ge N\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{3}\right) \ge N\left(\frac{\delta_n}{3}\right) \ge 2N(\varepsilon_n);$$

$$N(\varepsilon_{n+1}) \ge 2\cdot 2N(\varepsilon_{n-3}) \ge \cdots \ge 2^{(n-1)!!}\cdot N(\varepsilon_1) \ge$$
$$\ge 2^{(n-1)!!+1} \ge 2^{n/2}. \quad (4)$$

Let us prove an auxiliary result.

Lemma 3. *Suppose that* $u\in(0,u_*)$ *is such that* $N(u)>U(z_0)$. *Take an integer* $k=k(u)\ge 0$, *such that the inequality* $\varepsilon_{k+1}<u\le\varepsilon_k$ *holds. Let* $c_l = \varepsilon_l L U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1}))$, $l=k+1,k+2,\ldots$, *and let* $b_k(u) = 4\sigma(u)LU^{(-1)}(N^2(\varepsilon_{k+1}))$, *where* x_0 *and* L *are the constants appearing in (1). Then*

$$2\sum_{l=k+1}^{\infty} c_l + b_k(u) \le cf(\sigma(u)), \quad (5)$$

where $c=3L(5+4L)$,

$$f(\sigma(u)) = \int_0^u U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right)d\sigma(t).$$

Proof of Lemma 3. Let us obtain a bound for the sum

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} c_l = L\sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})).$$

Put

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})) = A_1 + A_2,$$

where

$$A_1 = \sum_{l\in D_1(k)} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})),$$

$$A_2 = \sum_{l\in D_2(k)} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})),$$

$D_1(k) = \{l\ge k+1 : \varepsilon_{l+1} = \varepsilon_l/3\}$,
$D_2(k) = \{l\ge k+1 : \varepsilon_{l+1} = \delta_l\}$.

Inequalities $(*)$ imply that

$$A_1 = 3 \sum_{l \in D_1(k)} \varepsilon_{l+1} U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})) \leq$$

$$\leq 3 \sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_{l+1} U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})) \leq$$

$$\leq \frac{9}{2} \sum_{l=k+1}^{\infty} (\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_{l+2}) U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})) \leq$$

$$\leq \frac{9}{2} \sum_{l=k+1}^{\infty} \int_{\varepsilon_{l+2}}^{\varepsilon_{l+1}} U^{(-1)}(N(s)) ds =$$

$$= \frac{9}{2} \int_{0}^{\varepsilon_{k+2}} U^{(-1)}(N(s)) ds \leq$$

$$\leq \frac{9}{2} \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)}(N(s)) ds \leq$$

$$\leq \frac{9}{2} \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(s)} + 1 \right) ds = [s = \sigma(t)] =$$

$$= \frac{9}{2} \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2t} + 1 \right) d\sigma(t).$$

Since $U^{(-1)}(2x) \leq 2U^{(-1)}(x)$ (property of the inverse function of the $\mathbb{C}$–function [1, p. 44]), $N(\delta_l) \leq 2N(\varepsilon_l)$ and since $(*)$, we obtain:

$$A_2 = \sum_{l \in D_2(k)} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\delta_l)) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{l \in D_2(k)} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\varepsilon_l)) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\varepsilon_l)) \leq$$

$$\leq 3 \sum_{l=k+1}^{\infty} (\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}) U^{(-1)}(N(\varepsilon_l)) \leq$$

$$\leq 3 \sum_{l=k+1}^{\infty} \int_{\varepsilon_{l+1}}^{\varepsilon_l} U^{(-1)}(N(s)) ds =$$

$$= 3 \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)}(N(s)) ds \leq$$

$$\leq 3 \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(s)} + 1 \right) ds = [s = \sigma(t)] =$$

$$\leq 3 \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2t} + 1 \right) d\sigma(t).$$

Finally, from inequalities for A_1 and A_2, we obtain:

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l U^{(-1)}(N(\varepsilon_{l+1})) \leq$$

$$\leq \left(\frac{9}{2} + 3 \right) \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2t} + 1 \right) d\sigma(t).$$

And because $\varepsilon_{k+1} < u$, the following inequality holds:

$$2 \sum_{l=k+1}^{\infty} c_l \leq 15L \int_{0}^{\varepsilon_{k+1}} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2t} + 1 \right) d\sigma(t) \leq$$

$$\leq 15L \int_{0}^{u} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2t} + 1 \right) d\sigma(t).$$

Let us estimate $b_k(u)$. Lemma 1 imply that:

$$b_k(u) = 4\sigma(u) L U^{(-1)}(N^2(\varepsilon_{k+1})) \leq$$

$$\leq 4\sigma(u) L^2 U^{(-1)}(N(\varepsilon_{k+1})).$$

Since $\varepsilon_{k+1} = \min\{\varepsilon_k/3,\, \delta_k\}$, we have

$$\sigma(u) U^{(-1)}(N(\varepsilon_{k+1})) = \sigma(u) U^{(-1)}(N(\delta_k)) \leq$$

$$\leq \sigma(u) U^{(-1)}(2N(\varepsilon_k)) \leq 2\sigma(u) U^{(-1)}(N(\varepsilon_k)) \leq$$

$$\leq 2\sigma(u) U^{(-1)}(N(u)) \leq 2 \int_{0}^{\sigma(u)} U^{(-1)}(N(s)) ds \leq$$

$$\leq 2 \int_{0}^{\sigma(u)} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(s)} + 1 \right) ds = [s = \sigma(t)] =$$

$$= 2 \int_{0}^{u} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2t} + 1 \right) d\sigma(t)$$

for $\varepsilon_{k+1} = \delta_k$, and

$$\sigma(u)U^{(-1)}(N(\varepsilon_{k+1})) = \sigma(u)U^{(-1)}\left(N\left(\frac{\varepsilon_k}{3}\right)\right) \le$$

$$\le \sigma(u)U^{(-1)}\left(N\left(\frac{u}{3}\right)\right) \le \int\limits_0^{\sigma(u)} U^{(-1)}\left(N\left(\frac{s}{3}\right)\right) ds =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{s}{3} = p \\ ds = 3dp \end{matrix} \right| = 3 \int\limits_0^{\sigma(u)/3} U^{(-1)}(N(p))dp \le$$

$$\le 3 \int\limits_0^{\sigma(u)} U^{(-1)}(N(p))dp \le 3 \int\limits_0^{u} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) d\sigma(t)$$

for $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/3$. In any case, the following upper bound holds:

$$b_k(u) \le 12L^2 \int\limits_0^{u} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) d\sigma(t).$$

Finally, we have:

$$2\sum_{l=k+1}^{\infty} c_l + b_k(u) \le 15L \int\limits_0^{u} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) d\sigma(t) +$$

$$+12L^2 \int\limits_0^{u} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) d\sigma(t) =$$

$$= 3L(5+4L) \int\limits_0^{u} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) d\sigma(t).$$

Lemma is proved. □

Let us continue the proof of Theorem 1. First of all we give the definition of α–procedure.

Assume that (S, ρ) is a completely bounded pseudometric space, $(\varepsilon_k, k \ge 1)$ is a sequence of positive numbers monotone decreasing to zero, and $\varepsilon_0 = \operatorname{diam} S$. If S_k is an ε_k–net in the set S with respect to the pseudometric ρ, then the set $S_\infty = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} S_k$ is a countable everywhere dense subset of S.

Definition 3. An α_k–map $\alpha_k : S \to S_k$, $k \ge 0$, is defined as a map of S to S_k such that $\alpha_k(x) = x$ if $x \in S_k$, and $\alpha_k(x)$ is the point of S_k closest to x if $x \notin S_k$. If there is more than one closest point, then we may choose any of these points. The family of maps $\{\alpha_k, k \ge 0\}$ is called α–procedure for choosing points in S_∞.

Choose the same integer $k = k(u)$ as in Lemma 3: $\varepsilon_{k+1} < u \le \varepsilon_k$. Suppose that $\{S_m, m \ge k\}$ is the set of centers of balls that form a minimal ε_m–covering of the space $(\mathbb{T}, \rho_X)$, and let $V_m = \bigcup\limits_{m=k}^{\infty} S_m$. Since the process X is ρ_X–continuous in probability, the set V_k is a separant of the process X for any k.

Assume that $\alpha_l(t)$, $t \in V_k$, $l \ge k$, are the maps described in α–procedure (see Definition 3); that is, $\alpha_l(t)$ puts into correspondence a point $t \in V_k$ to a point belonging to S_l and satisfying $\rho_X(t, \alpha_l(t)) \le \varepsilon_l$. Set

$$\xi_l = \max_{t \in S_{l+1}} |X(t) - X(\alpha_l(t))|,$$

$$\eta_l(v) = \max_{\substack{t,s \in S_{l+1} \\ \rho_X(t,s) \le 4v}} |X(t) - X(s)|,\ l \ge k;\ v > 0.$$

The inequality

$$\sup_{\rho_X(t,s) \le v} |X(t) - X(s)| \le 2 \sum_{l=m+1}^{\infty} \xi_l + \eta_m(v) \quad (6)$$

holds with probability one for any v satisfying $\varepsilon_{m+1} < v \le \varepsilon_m$. Formula (6) and Lemma 3 imply that

$$\sup_{0 < \rho_X(t,s) \le u} \frac{|X(t) - X(s)|}{cf(\rho_X(t,s))} \le$$

$$\le \sup_{0 < \sigma(u) \le u} \left[\sup_{0 < \rho_X(t,s) \le \sigma(u)} \frac{|X(t) - X(s)|}{cf(\sigma(u))} \right] \le$$

$$\le \sup_{m \ge k} \sup_{\varepsilon_{m+1} < \sigma(u) \le \varepsilon_m} \frac{2\sum\limits_{l=m+1}^{\infty} \xi_l + \eta_m(\sigma(u))}{2\sum\limits_{l=m+1}^{\infty} c_l + b_m(u)}.$$

Therefore we obtain the inequality

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0 < \rho_X(t,s) \le u} \frac{|X(t) - X(s)|}{cf(\rho_X(t,s))} > x \right\} \le$$

$$\le \sum_{l=k+1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{ \frac{\xi_l}{c_l} > x \right\} +$$

$$+ \sum_{m=k}^{\infty} \mathsf{P}\left\{ \sup_{\varepsilon_{m+1} < \sigma(u) \le \varepsilon_m} \frac{\eta_m(\sigma(u))}{b_m(u)} > x \right\}$$

for any $x > 0$. By Lemma 2, for $m = N(\varepsilon_{l+1})$, $k = 1$ the following inequality holds:

$$\mathsf{P}\left\{ \frac{\xi_l}{c_l} > x \right\} \le \frac{1}{N(\varepsilon_{l+1})} \cdot \frac{1}{U(x)} \quad (7)$$

for $x \geq z_0$. Further, we have

$$\theta_m = \sup_{\varepsilon_{m+1}<\sigma(u)\leq\varepsilon_m} \frac{\eta_m(\sigma(u))}{b_m(u)} =$$

$$= \sup_{\substack{\sigma(u)\in \\ (\varepsilon_{m+1},\varepsilon_m]}} \max_{\substack{\rho_X(t,s)\in \\ (0,4\sigma(u)] \\ t,s\in S_{m+1}}} \frac{|X(t)-X(s)|}{4\sigma(u)LU^{(-1)}(N^2(\varepsilon_{m+1}))}$$

$$\leq \sup_{\substack{\sigma(u)\in \\ (\varepsilon_{m+1},\varepsilon_m]}} \left[\max_{\substack{0<\rho_X(t,s)\leq 4\sigma(u) \\ t,s\in S_{m+1}}} \frac{|X(t)-X(s)|}{\|X(t)-X(s)\|_U} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{LU^{(-1)}(N^2(\varepsilon_{m+1}))} \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{LU^{(-1)}(N^2(\varepsilon_{m+1}))} \max_{\substack{t,s\in S_{m+1} \\ t\neq s}} \frac{|X(t)-X(s)|}{\|X(t)-X(s)\|_U}$$

for any $m \geq k$. By the last inequality and Lemma 2, for $m = N^2(\varepsilon_{m+1})$, $k = 1$ we have:

$$\mathsf{P}\{\theta_m > x\} \leq \frac{1}{N^2(\varepsilon_{m+1})} \cdot \frac{1}{U(x)} \qquad (8)$$

for $x \geq z_0$. Then it follows from (7) and (8) that

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0<\rho_X(t,s)\leq u} \frac{|X(t)-X(s)|}{cf(\rho_X(t,s))} > x \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{U(x)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{N(\varepsilon_{l+1})} +$$

$$+ \frac{1}{U(x)} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{N^2(\varepsilon_{m+1})} = \frac{C_1(u)}{U(x)}$$

for $x \geq z_0$, where

$$C_1(u) = \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{N(\varepsilon_{l+1})} + \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{N^2(\varepsilon_{l+1})}.$$

Inequality (4) implies that

$$C_1(u) \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{l/2}} + \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{k/2}(\sqrt{2}-1)} + \frac{1}{2^{k-1}}$$

for all $k \geq 0$, and $C_1(u) \leq 3 + \sqrt{2}$. Part **A)** is proved.

To prove part **B)**, observe that the convergence of series $C_1(u)$, the Borel-Cantelli lemma, and inequalities (7) and (8) imply that $\xi_l \leq xc_l$ and $\theta_m \leq x$ almost surely for $x \geq z_0$ and for sufficiently large l, m. By (6) and (5), we conclude that

$$\sup_{\rho_X(t,s)\leq u} |X(t)-X(s)| \leq x\left(2\sum_{l=k}^{\infty} c_l + b_k(u)\right) \leq$$

$$\leq cxf(\sigma(u))$$

almost surely for sufficiently small u. □

3 Examples

Here are examples of applying of the proven theorem for particular functions $\sigma(u)$ and $U(x)$.

Example 1. *Let function* $\sigma(u) = bu^{\alpha}$, $u > 0$, $b > 0$, $\alpha \geq 1$.

The inverse function for the $\sigma(u)$ is $\sigma^{(-1)}(u) = \sqrt[\alpha]{u/b}$. In this case, the following inequality for the metric massiveness holds:

$$N(u) \leq \frac{T}{2\sqrt[\alpha]{\frac{u}{b}}} + 1 = \frac{T}{2}\sqrt[\alpha]{\frac{b}{u}} + 1.$$

Consider a process $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ with $L_U(\Omega)$–increments, which satisfies the condition (3), and $\rho_X(t,s)$ — the pseudometric generated by this process.

The function f is determined as:

$$f(\sigma(u)) = \int_0^u U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) d\sigma(t) =$$

$$= b\alpha \int_0^u t^{\alpha-1} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) dt.$$

Suppose that $N(u) > U(z_0)$, $\forall\, u \in (0,T)$. By the Theorem 1, the following inequality holds true

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T} \\ 0<|t-s|\leq u}} \frac{|X(t)-X(s)|}{cb\alpha \int_0^{|t-s|} t^{\alpha-1}U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) dt} > x \right\}$$

$$\leq \frac{3+\sqrt{2}}{U(x)}.$$

Moreover, we have

$$\limsup_{u\downarrow 0} \frac{\Delta(X;u)}{cz_0 b\alpha \int_0^{|t-s|} t^{\alpha-1}U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) dt} \leq 1$$

almost surely, where

$$\Delta(X;u) = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ 0<|t-s|\le u}} |X(t)-X(s)|.$$

Example 2. *Let the function $\sigma(u)$ is the same as in the Example 1. Consider a function $U(x) = e^x - 1$.*

The inverse function for the $U(x)$ is $U^{(-1)}(x) = \ln(x+1)$;

$$f(\sigma(u)) = b\alpha \int_0^u t^{\alpha-1} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) dt =$$

$$= b\alpha u^{1+\alpha} \cdot \frac{3+2\alpha+(1+\alpha)\ln(T/2u)}{(1+\alpha)^2}.$$

For simplicity of calculations, let $\psi(u) = 3 + 2\alpha + (1+\alpha)\ln(T/2u)$. In this case, by the Theorem 1, we have:

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ 0<|t-s|\le u}} \frac{|X(t)-X(s)|(1+\alpha)^2}{|t-s|^{1+\alpha}\psi(|t-s|)} > cb\alpha x \right\} \le \frac{3+\sqrt{2}}{e^x-1}$$

and

$$\limsup_{u\downarrow 0} \left[\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ |t-s|\in\\ (0,u]}} \frac{|X(t)-X(s)|(1+\alpha)^2}{|t-s|^{1+\alpha}\psi(|t-s|)} \right] \le cz_0 b\alpha$$

almost surely.

Example 3. *Consider a function $\sigma(u) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)\right)^{-1}$, $u > 0$.*

The inverse function for the $\sigma(u)$ is $\sigma^{(-1)}(u) = \left(e^{1/u}-1\right)^{-1}$. So, we have the inequality for metric massiveness:

$$N(u) \le \frac{T\left(e^{1/u}-1\right)}{2} + 1.$$

Consider a process $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ with $L_U(\Omega)$–increments, which satisfies the condition (3), and $\rho_X(t,s)$ — the pseudometric generated by this process.

The function f is determined as:

$$f(\sigma(u)) = \int_0^u U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) d\sigma(t) =$$

$$= \int_0^u \frac{1}{t(t+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{t}\right)} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right) dt.$$

For simplicity of calculations, let $\phi(t) = \left(t(t+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)^{-1}$. Suppose that $N(u) > U(z_0)$, $\forall\, u \in (0,T)$. By the Theorem 1, for the process X next inequality holds:

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ 0<|t-s|\le u}} \frac{|X(t)-X(s)|}{c\int_0^{|t-s|}\phi(t)\,U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right)dt} > x \right\} \le \frac{3+\sqrt{2}}{U(x)}.$$

Moreover,

$$\limsup_{u\downarrow 0} \frac{\Delta(X;u)}{cz_0\int_0^{|t-s|}\phi(t)\,U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t}+1\right)dt} \le 1$$

almost surely, where

$$\Delta(X;u) = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ 0<|t-s|\le u}} |X(t)-X(s)|.$$

4 Conclusion

In the article are given conditions under which sample paths of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval, satisfy the Lipschitz condition, and examples of application.

References

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. — Providence: American Mathematical Society, – 2000.

2. *Kozachenko Yu. V.* Stochastic processes in Orlicz spaces. II. // Theory Prob. and Mathem. Statistics. – 1984. – №31. – p. 44-50.

Received: 16.12.2012

УДК 512.53

Євгенія Кочубінська[1], к. ф.-м. н., асистент

Максимальні нільпотентні піднапівгрупи напівгрупи часткових автоморфізмів кореневого дерева

Дано опис максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи часткових авторморфізмів кореневого дерева.

Ключові слова: кореневе дерево, частковий автоморфізм, максимальна піднапівгрупа.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Eugenia Kochubinska[1], Ph.D., Assistant Prof.

Maximal nilpotent subsemigroups of semigroup of partial automorphisms of rooted tree

The description of maximal nilpotent subsemigroups of semigroup of partial automorphisms of rooted tree is given.

Keywords: rooted tree, partial automorphism, maximal subsemigroup.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. В.В.Кириченко

1 Вступ

Нільпотентні піднапівгрупи — один з природних об'єктів, який вивчається при дослідження будь-якої напівгрупи. Однією з причин є те, що серед скінченних напівгруп є величезна кількість нільпотентних. У статті дано опис максимальних піднапівгруп напівгрупи часткових автоморфізмів скінченного кореневого регулярного дерева. Також знайдено кількості та потужності таких піднапівгруп, варто зауважити, що тут з'являються відомі комбінаторні об'єкти, такі, як числа Стірлінга другого роду, многочлени Белла тощо.

2 Вінцевий добуток напівгруп

Нехай T — кореневе k-рівневе n-регулярне дерево.

Нехай $\mathrm{PAut}\, T$ — це напівгрупа часткових автоморфізмів дерева T, які визначені на зв'язному підграфі, який містить кореневу вершину дерева T, і які зберігають рівні вершин. Напівгрупа $\mathrm{PAut}\, T$ є інверсною напівгрупою.

Для напівгрупи S визначимо множину S^{PX} наступним чином

$$S^{PX} = \{f : \mathrm{dom}(f) \subseteq X \to S\}.$$

Для відображень $f, g \in S^{PX}$ задамо добуток fg за правилом:

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$x \in \mathrm{dom}(fg) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g).$$

Якщо $a \in \mathcal{IS}(X), f \in S^{PX}$, то визначимо f^a як

$$(f^a)(x) = f(x^a)$$

$$x \in \mathrm{dom}(f^a) = \mathrm{dom}(a) \cap \{x : x^a \in \mathrm{dom}(f)\}$$

Частковим вінцевим добутком напівгрупи S з напівгрупою (P, X) часткових перетворень множини X називається множина

$$\{(f, a) \in S^{PX} \times (P, X) \mid \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(a)\}$$

разом з операцією множення $(f, a) \cdot (g, b) = (fg^a, ab)$.

Частковий вінцевий добуток напівгруп є напівгрупою. Більше того, частковий вінцевий добуток інверсних напівгруп є інверсною напівгрупою.

Теорема 1. [2] *Нехай T — кореневе n-регулярне k-рівневе дерево. Тоді*

$$\mathrm{PAut}\, T \simeq \underbrace{\mathcal{IS}_n \wr_p \ldots \wr_p \mathcal{IS}_n}_{k} = \wr_p^k \mathcal{IS}_n.$$

© Є.А. Кочубінська, 2013

3 Нільпотентні піднапівгрупи в $\mathcal{IS}_n$

У цьому підрозділі зберемо результати, що стосуються нільпотентних піднапівгруп симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_n$, одержані в [1], які потім будуть корисними для опису нільпотентних піднапівгруп вінцевих добутків симетричних інверсних напівгруп.

Нехай S — напівгрупа з нулем 0. Елемент $a \in S$ називається *нільпотентним*, якщо для деякого $k \in \mathbb{N}$ виконується $a^k = 0$

Напівгрупа S називається *нільпотентною*, якщо для деякого $k \in \mathbb{N}$ $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = 0$ для довільних $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$. Зауважимо, що скінченна напівгрупа є нільпотентною тоді і лише тоді, коли кожний її елемент є нільпотентним.

Розрізняють два типи нільпотентних піднапівгруп. До першого типу відносяться ті нільпотентні піднапівгрупи, які містять нуль 0 напівгрупи S. У цьому випадку для нільпотентної піднапівгрупи $T \subset S$ маємо $T^k = \{0\}$ для деякого $k > 0$.

До другого — ті піднапівгрупи, які самі є нільпотентними, але їхній нульовий елемент відрізняється від напівгрупового нуля. У цьому разі для нільпотентної піднапівгрупи $T \subset S$ матимемо, що $T^k = \{e\}$ для деякого ідемпотента $e \neq \mathrm{id}$ і деякого $k \geqslant 1$. Такі напівгрупи називатимемо *власними* нільпотентними піднапівгрупами.

Нільпотентна піднапівгрупа $T \subset S$ називається *максимальною нільпотентною піднапівгрупою*, якщо вона не міститься в жодній іншій нільпотентній піднапівгрупі $T' \subset S$, $T \neq T'$.

Для напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ існує бієктивна відповідність між максимальними нільпотентними піднапівгрупами та розбиттями множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ в диз'юнктне об'єднання впорядкованих блоків.

Якщо e — ідемпотент, який є нульовим елементом піднапівгрупи $T \subset \mathcal{IS}_n$, а доповнення до області визначення має складається з елементів $\overline{\mathrm{dom}(e)} = \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$, тоді кожній максимальній нільпотентній піднапівгрупі зіставляється підстановка $b_1, b_2, \ldots, b_k$ елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, яка має вигляд:

$$T = \Big\{ \sigma \in \mathcal{IS}_n \,|\, \mathrm{dom}(e) \subseteq \mathrm{dom}(\sigma); \quad \sigma(x) = x \text{ для всіх } x \in \mathrm{dom}(e); \quad \text{з } \sigma(b_i) = b_j \text{ випливає } i < j \quad \forall\, b_i \notin \mathrm{dom}(e) \Big\}.$$

3.1 Нільпотентні піднапівгрупи часткового вінцевого добутку симетричних інверсних напівгруп

Розглянемо максимальні нільпотентні піднапівгрупи (ті, які містять напівгруповий нуль) у більш загальному випадку.

Нехай P — інверсна напівгрупа.

Лема 1. *Елемент $(f, a) \in P \wr_p \mathcal{IS}_n$ буде нільпотентним тоді і лише тоді, коли $a \in \mathcal{IS}_n$ є нільпотентним.*

Доведення. Нехай $(f, a) \in \wr_p^k \mathcal{IS}_n$ — нільпотентний елемент степеня m, тобто $(f, a)^m = (\tilde{f}, a^m) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Звідси випливає, що a — нільпотентний елемент напівгрупи $\mathcal{IS}_n$.

Нехай тепер a — нільпотентний елемент напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ степеня m. Тоді $\mathrm{dom}(a^m) = \varnothing$, а оскільки $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(a)$, то для елемента $(f, a)^m = (\tilde{f}, a^m)$ область значення $\mathrm{dom}(\widetilde{f}) = \varnothing$. Тому $(f, a)^m = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. □

Опис нільпотентних елементів напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ міститься в [1].

Теорема 2. *Нехай S — максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathcal{IS}_n$. Тоді напівгрупа $P \wr_p S$ буде максимальною нільпотентною піднапівгрупою напівгрупи $P \wr_p \mathcal{IS}_n$. Більше того, кожна максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $P \wr_p \mathcal{IS}_n$ має такий вигляд.*

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що $(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$ є напівгрупою. За лемою 1 кожний елемент цієї напівгрупи є нільпотентним, а оскільки напівгрупа скінченна, то вона є нільпотентною. З максимальності S випливає максимальність напівгрупи $(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$.

Нехай M — максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\wr_p^k \mathcal{IS}_n$. Визначимо $S = \{a \in \mathcal{IS}_n \mid (f, a) \in M\}$. Тоді $M \subset (\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$. З іншого боку, S є нільпотентною піднапівгрупою напівгрупи $\mathcal{IS}_n$. Тоді з максимальності M випливає, що $M = (\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$. Припустимо, що $S \subset \mathcal{IS}_n$ не є максимальною нільпотентною піднапівгрупою. Але тоді для будь-якої нільпотентної напівгрупи $S_1 \supset S$ вірно, що $M \subset (\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S_1$, що суперечить умові максимальності M. □

Наслідок 1. *Максимальними нільпотентними піднапівгрупами напівгрупи* $\wr_p^k \mathcal{IS}_n$ *є напівгрупи вигляду* $(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$, *де* S — *максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи* $\mathcal{IS}_n$.

Розглянемо тепер максимальні власні нільпотентні піднапівгрупи.

Нехай $\mathcal{M}$ — це власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T$ з нулем $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$. Позначимо через T_x максимальне піддерево дерева T, таке, що його коренем є вершина $x \in VT$, а жодне з ребер дерева T_x не належить $\mathrm{dom}(e)$.

Наступне твердження містить повний опис максимальних власних піднапівгруп напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T_x$.

Теорема 3. *Нехай* T — k*-рівневе* n*-регулярне кореневе дерево. Максимальна власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи* $\mathrm{PAut}\, T$ *з нулем* $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$ *(канонічно) ізоморфна напівгрупі*

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x,$$

де M_x *позначає максимальну нільпотентну піднапівгрупу напівгрупи* $\mathrm{PAut}\, T_x$.

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — максимальна власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T$ з нулем $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$ і нехай її степінь нільпотентності дорівнює k. Розглянемо відображення $\varphi : \mathcal{M} \to \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} \mathrm{PAut}\, T_x$, задане як $a \mapsto (a|_{T_x}, x \in \mathrm{dom}(e))$. Оскільки будь-який частковий автоморфізм $a \in \mathcal{M}$ діє тотожно на $\mathrm{dom}(e)$, то для кожного $x \in \mathrm{dom}(e)$ $a(T_x) \subset T_x$, а тому з задання φ маємо, що це відображення є гомоморфізмом.

Відображення φ також є мономорфізмом, бо для довільної вершини $v \in \mathrm{dom}(e)$ виконується $a(v) = a|_{\mathrm{dom}(e)} = b|_{\mathrm{dom}(e)} = v$. Якщо ж $v \notin \mathrm{dom}(e)$, то знайдеться така вершина $x \in \mathrm{dom}(e)$, що $v \in T_x$, з умови $\varphi(a) = \varphi(b)$ випливає, що для кожної вершини $v \in T_x$ $a|_{T_x}(v) = b|_{T_x}(v)$. Отже, з рівності $\varphi(a) = \varphi(b)$ випливає рівність $a = b$.

Позначимо $M_x = \{a|_{T_x} \mid a \in \mathcal{M}\}$. Якщо $a^k = e$, то $a^k|_{T_x} = e|_{T_x} = \mathrm{id}_{\{x\}}$, а $\mathrm{id}_{\{x\}}$ є нулем в $\mathrm{PAut}\, T_x$. Отже, M_x — нільпотентна піднапівгрупа $\mathrm{PAut}\, T_x$ для всіх $x \in \mathrm{dom}(e)$.

Покажемо, що M_x є максимальною нільпотентною піднапівгрупою для кожної вершини $x \in \mathrm{dom}(e)$. Припустимо, що це не так. Нехай існує така вершина $y \in \mathrm{dom}(e)$, що M_y не є максимальною нільпотентною піднапівгрупою в $\mathrm{PAut}\, T_y$. Нехай $M' \in \mathrm{PAut}\, T_y$ — така нільпотентна піднапівгрупа степеня m напівгрупи, що $M_y \subset M'$. Розглянемо напівгрупу

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' = \big\{ & a \in \mathrm{PAut}\, T \mid a|_{\mathrm{dom}(e)} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(e)}, \\ & \forall x \in \mathrm{dom}(e), x \neq y, \exists\, b \in \mathcal{M} : a|_{T_x} = b|_{T_x}, \\ & a|_{T_y} \in M' \big\}.\end{aligned}$$

Зрозуміло, що $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$. Покажемо, що $\mathcal{M}'$ є власною нільпотентною піднапівгрупою з нулем e. Візьмемо деякий частковий автоморфізм $a \in \mathcal{M}'$. Тоді для всіх $x \in \mathrm{dom}(e)$, крім $x = y$, маємо $(a|_{T_x})^n = (b|_{T_x})^n = \mathrm{id}_{\{x\}}$, що є нулем в $\mathrm{PAut}\, T_x$, $a|_{\mathrm{dom}(e)} = e$, а для вершини y маємо $(a|_{T_y})^m = \mathrm{id}_{\{y\}}$, що є нулем в $\mathrm{PAut}\, T_y$. Таким чином $a^{m \vee k} = e$ в $\mathcal{M}'$. Отже, $\mathcal{M}'$ є власною нільпотентною піднапівгрупою в $\mathrm{PAut}\, T$ з нулем e, яка містить напівгрупу $\mathcal{M}$, що суперечить максимальності $\mathcal{M}$.

Доведемо насамкінець, що $\varphi(\mathcal{M}) = \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x$. Розглянемо напівгрупу

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'' = \big\{ & a \in \mathrm{PAut}\, T \mid a|_{\mathrm{dom}(e)} = e, \\ & \forall x \in \mathrm{dom}(e)\ \exists\, b \in \mathcal{M} : a|_{T_x} = b|_{T_x} \big\}.\end{aligned}$$

Очевидно, що $\varphi(\mathcal{M}'') = \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x$. З визначення $\mathcal{M}''$ випливає, що для кожного $a \in \mathcal{M}''$ $a^k = e$, тобто $\mathcal{M}''$ є власною нільпотентною піднапівгрупою з нулем e, а також, що $\mathcal{M}'' \supset \mathcal{M}$. В силу максимальності $\mathcal{M}$ матимемо $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Таким чином, $\mathcal{M} \cong \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x$. □

Твердження 1. *Нехай* P — *інверсна напівгрупа. Кількість елементів максимальної нільпотентної піднапівгрупи* $P \wr_p \mathcal{IS}_n$ *дорівнює*

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, |P|^{n-k} = |P|^n\, B_n\left(\frac{1}{|P|}\right),$$

де $B_n(x)$ — *це* n*-й многочлен Белла.*

Доведення. За теоремою 2 максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $P \wr_p \mathcal{IS}_n$ має вигляд $P \wr_p S$, де S — максимальна нільпотентна піднапівгрупа $\mathcal{IS}_n$. Кількість елементів дефекту k в $\mathcal{IS}_n$ дорівнює $S(n,k)$, числу Стірлінга другого роду (див. [1, Наслідок 3]).

Кількість пар вигляду (f, a) для фіксованого елементу a дефекту k дорівнює кількості

відображень з $\mathrm{dom}(a)$ в P, їх буде $|P|^{n-k}$. Сумуючи по всіх k, одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,|P|^{n-k} = \\ = |P|^n \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,|P|^{-k} = |P|^n\, B_n\left(\frac{1}{|P|}\right).$$

□

Позначимо через $F^k(x) = \underbrace{F(F\ldots(F}_{k}(x))\ldots)$.

Наслідок 2. *Потужність максимальної нільпотентної піднапівгрупи $\wr_p^k \mathcal{IS}_n$ дорівнює*

$$\left|\wr_p^{k-1}\mathcal{IS}_n\right|^n B_n\left(\frac{1}{\left|\wr_p^{k-1}\mathcal{IS}_n\right|}\right).$$

Доведення. В [2] показано, що $|\wr_p^k \mathcal{IS}_n| = F^k(1)$, де $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 i! x^i$. Враховуючи це та твердження 1, отримуємо твердження. □

Твердження 2. *Нехай T — k-рівневе n-регулярне кореневе дерево. Кількість власних максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи* $\mathrm{PAut}\,T$ *з нулем $e \in E(\mathrm{PAut}\,T)$ дорівнює*

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(e)} (k_x)!,$$

де k_x — кількість вершин першого рівня дерева T_x.

Позначимо $l(x)$ — рівень дерева T, якому належить вершина x, а $h(x) = k - l(x) + 1$. Потужність кожної максимальної власної піднапівгрупи дорівнює

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(e)} \left|\wr_p^{h(x)}\mathcal{IS}_n\right|^{k_x} B_{k_x}\left(\frac{1}{\left|\wr_p^{h(x)}\mathcal{IS}_n\right|}\right)$$

Доведення. З теореми 3 випливає, що кількість максимальних власних нільпотентних піднапівгруп визначається різними максимальними піднапівгрупами M_x напівгрупи $\mathrm{PAut}\,T_x$, $x \in \mathrm{dom}(e)$. Нехай k_x — кількість вершин першого рівня дерева T_x, тоді $\mathrm{PAut}\,T_x \cong P \wr_p \mathcal{IS}_{k_x}$, де P — інверсна напівгрупа. За теоремою 2 максимальна власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathrm{PAut}\,T_x$ має вигляд $P \wr_p S_x$, де S_x — максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathcal{IS}_{k_x}$, тому кількість максимальних нільпотентних піднапівгруп M_x збігається з кількістю максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи $\mathcal{IS}_{k_x}$, яка дорівнює $k_x!$ (див. [1, Наслідок 4]).

Оскільки кореневі дерева T_x не перетинаються, то піднапівгрупи M_x обираються незалежно, тому шукана кількість власних максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи $\mathrm{PAut}\,T$ з нулем $e \in E(\mathrm{PAut}\,T)$ дорівнює

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(e)} (k_x)!,$$

де k_x — кількість вершин першого рівня дерева T_x.

Друга частина твердження випливає з теореми 3 та наслідку 2.

□

Список використаних джерел

1. *Ganyushkin O.* Combinatorics of Nilpotents in Symmetric Inverse Semigroups / Ganyushkin O., Mazorchuk V. // Annals of Combinatorics – 2006 – Vol. 8 – Issue 2 – P. 161–175.

2. *Kochubinska Ye.* Combinatorics of partial wreath power of inverese symmetric semigroup $\mathcal{IS}_d$/Kochubinska Ye.//Algebra and Discrete Mathematics – 2007 – No. 1 – P. 49–61.

3. *Meldrum J.D.P.* Wreath products of groups and semigroups / Meldrum J.D.P. Harlow, Essex: Longman Group Ltd., 1995 – xii+324 p. – (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 74.)

Надійшла до редколегії 20.12.2012

УДК 517.5

Станіслав О. Чайченко[1], к.ф.-м.н., доц.

Найкращі наближення періодичних функцій у вагових просторах Орліча

У вагових просторах Орліча отримано аналог відомої нерівності Бернштейна для норми похідної тригонометричного полінома та знайдено порядки найкращих наближень на класах $(\psi;\beta)$-диференційовних 2π-періодичних функцій.

Ключові слова: простори Орліча, найкращі наближення, нерівність Бернштейна, $(\psi;\beta)$-похідна

[1]Донбаський державний педагогічний університет, 84116, м.Слов'янськ, вул. Батюка, 19
e-mail: stolch@mail.ru

Stanislav O. Chaichenko, PhD

The best approximations of periodic functions in weighted spaces of Orlicz

We proof the analogue of well-known inequality of Bernshtain for norm of trigonometric polynomial and found the orders of the best approximations on the classes $(\psi;\beta)$-differentiable 2π-periodic functions in weighted spaces of Orlicz.

Key words: Orlicz spaces, best approximations, Bernshtain's inequality, $(\psi;\beta)$-derivative

Donbass State Teachers Training University, 84116, Slavyansk, Batyuka str., 19
e-mail: stolch@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Ю.В.Козаченко

1 Означення, допоміжні твердження та постановка задачі

Наведемо деякі відомості з теорії опуклих функцій і вагових просторів Орліча (див. [1, 2]).

Означення 1. Функція $\Phi = \Phi(x)$ називається функцією Юнга, якщо Φ є парною, неперервної і невід'ємною на $\mathbb{R}$, неспадаючою на $(0;\infty)$ і такою, що

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty.$$

Означення 2. Кажуть, що функція Φ задовольняє умову Δ_2 ($\Phi \in \Delta_2$), якщо існує стала $c > 0$ така, що

$$\Phi(2x) \leqslant c\ \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Означення 3. Дві функції Юнга Φ і Φ^* називаються еквівалентними, якщо існують сталі $c, C > 0$ такі, що для довільного $x > 0$ виконується нерівність

$$\Phi^*(cx) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi^*(Cx).$$

Означення 4. Невід'ємна функція $M = M(t)$, $t \geqslant 0$ називається квазіопуклою функцією Юнга, якщо існує опукла функція Юнга Φ і стала $c > 1$ така, що виконується нерівність

$$\Phi(x) \leqslant M(x) \leqslant \Phi(cx), \quad \forall x \geqslant 0.$$

Позначимо через $\mathcal{QC}$ множину всіх квазіопуклих функцій Юнга.

Означення 5. Нехай $M \in \mathcal{QC}$. Тоді через $\tilde{L}_{M,\omega}$ позначають клас 2π-періодичних вимірних за Лебегом функцій f, які задовольняють умову

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x)|)\omega(x)dx < \infty,$$

де $\omega(x)$ — 2π-періодична вимірна и майже скрізь додатна функція (вага), а через $L_{M,\omega}$ позначають лінійну оболонку класу $\tilde{L}_{M\omega}$.

Множина $\tilde{L}_{M\omega}$ стає нормованим простором, якщо

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup\left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\omega(t)\ dt : \right.$$
$$\left. : \quad \int_0^{2\pi} \tilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\ dt \leqslant 1 \right\},$$

де $\tilde{M}(y) := \sup\limits_{x\geqslant 0}(xy - M(x)),\ y \geqslant 0.$

Відомо, що в разі, коли M є квазіопуклою і $\tilde{M}$ — додаткова до M, то справджується нерівність Юнга

$$xy \leqslant M(x) + \tilde{M}(y), \quad x, y \geqslant 0. \tag{1}$$

Кажуть, що вагова функція $\omega = \omega(t)$ належить класу Макенхаупа A_p, $1 < p < \infty$, якщо ω є 2π-періодичною і

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \omega(t)\ dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\ dt\right)^{p-1} \leqslant c,$$

© С.О. Чайченко, 2013

де $c = \text{const}$, $[a; b]$ довільний відрізок з $[0, 2\pi]$.

Для квазіопуклої функції M визначимо величину

$$\frac{1}{\wp(M)} := \inf\{\wp : \quad \wp > 0,\ M^{\wp} \in \mathcal{QC}\},$$

$$\wp'(M) := \frac{\wp(M)}{\wp(M) - 1},$$

яка вперше була введена в роботі [3]. Якщо $\omega \in A_{\wp(M)}$, то $L_{M,\omega} \in L$, где L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій і $L_{M,\omega}$ стає банаховим простором з нормою Орліча. Банахів простір $L_{M,\omega}$ називають ваговим простором Орліча.

Через $\mathcal{QC}_2^{\theta}$ позначають клас функцій $M = M(t)$, які задовольняють умову Δ_2 і таких, що M^{θ} є квазіопуклою для довільного $\theta \in (0; 1)$.

Нехай $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \tag{2}$$

— ряд Фур'є функції f,

$$S_n(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos\ kx +$$

$$+ b_k(f)\sin\ kx), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

— частинні суми Фур'є порядку n цієї функції.

Сформулюємо твердження з книги [4, с. 278], яке носить допоміжний характер і буде використовуватися при доведенні основних результатів цієї роботи.

Теорема 1. *Якщо $M \in \mathcal{QC}_2^{\theta}$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$, то для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ виконуються нерівності*

$$\int_0^{2\pi} M(|S_n(f; t)|)\omega(t)\ dt \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \tag{4}$$

і

$$\int_0^{2\pi} M(|\tilde{f}(t)|)\omega(t)\ dt \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \tag{5}$$

в яких $\tilde{f}(\cdot)$ — функція, тригонометрично спряжена до $f(\cdot)$ і C — деяка додатна стала.

З теореми 1, зокрема, випливає, що оператор Фур'є і оператор тригонометричного спряження є обмеженими в просторах $L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^{\theta}$, $\omega \in A_{\wp(M)}$, тобто

$$\|S_n(f)\|_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega}, \tag{6}$$

$$\|\tilde{f}\|_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega}. \tag{7}$$

Позначимо через

$$E_n(\varphi)_{M,\omega} := \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{M,\omega}, \quad \varphi \in L_{M,\omega},$$

— найкраще наближення функції φ за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометричних поліномів порядку, не вище за $n-1$. У роботі [5, лема 3] показано, що для даної функції $f \in L_{M,\omega}$ і довільного $\varepsilon > 0$ завжди знайдеться тригонометричний поліном $T(x)$, для якого

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x) - T(x)|)\omega(x)\ dx < \varepsilon.$$

Це з урахуванням (1) означає, що

$$\|f - T\|_{M,\omega} < \varepsilon,$$

звідки отримуємо

$$E_n(f)_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

На підставі нерівностей (6), (7) і (8) одержуємо, що в умовах теореми 1 виконуються співвідношення

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{9}$$

і

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} = \mathcal{O}(1)E_n(f)_{M,\omega} =$$

$$= \mathcal{O}(1)E_n(\tilde{f})_{M,\omega}, \tag{10}$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величини, рівномірно обмежені по n.

Далі нам знадобитися визначення $(\psi; \beta)$-похідної та множин L_{β}^{ψ}, яке належить О.І. Степанцю [6, с. 142 – 143].

Означення 6. Нехай $f \in L$ і (2) — її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і $\beta \in \mathbb{R}$.Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \Big(a_k(f) \cos\big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\big) + b_k(f) \sin\big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\big) \Big) \tag{11}$$

є рядом Фур'є деякої функції з L. Цю функцію позначають через $f_\beta^\psi(\cdot)$ (або $(D_\beta^\psi f)(\cdot)$) і називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, які задовольняють такій умові, позначають через L_β^ψ.

В цій роботі, через $L_{\beta,M}^{\psi,\omega}$ будемо позначати класи $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій $f \in L$, у яких $f_\beta^\psi \in L_{M,\omega}$.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина послідовностей дійсних чисел $\psi(k) > 0$, які задовольняють умовам:

1) $\psi(k) - \psi(k+1) \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$;

3) $\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) > 0, \quad k \in \mathbb{N}$;

а $\mathfrak{M}'$ — підмножина функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty$.

Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$, то як показано в монографії [6, с. 143 – 144], завжди знайдеться функція $f_\beta^\psi \in L^0$, $L^0 := \{\varphi \in L : \ \varphi \perp 1\}$, ряд Фур'є якої збігається з (11). Відзначимо при цьому, що якщо $f_\beta^\psi \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$, то на підставі співвідношення (9) в сенсі збіжності в метриці просторів $L_{M,\omega}$ виконується рівність

$$f_\beta^\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \Big(a_k(f) \cos(kx + \frac{\beta\pi}{2}) + b_k(f) \sin(kx + \frac{\beta\pi}{2}) \Big). \tag{12}$$

З зображення (12) випливають формули зв'язку між коефіцієнтами Фур'є функцій f_β^ψ і f:

$$\frac{a_k(f)}{\psi(k)} = a_k(f_\beta^\psi) \cos\frac{\beta\pi}{2} - b_k(f_\beta^\psi) \sin\frac{\beta\pi}{2}, \tag{13}$$

$$\frac{b_k(f)}{\psi(k)} = a_k(f_\beta^\psi) \sin\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f_\beta^\psi) \cos\frac{\beta\pi}{2}, \tag{14}$$

і

$$a_k(f_\beta^\psi) = \frac{a_k(f)}{\psi(k)} \cos\frac{\beta\pi}{2} + \frac{b_k(f)}{\psi(k)} \sin\frac{\beta\pi}{2}, \tag{15}$$

$$b_k(f_\beta^\psi) = \frac{b_k(f)}{\psi(k)} \cos\frac{\beta\pi}{2} - \frac{a_k(f)}{\psi(k)} \sin\frac{\beta\pi}{2}. \tag{16}$$

В цій роботі доводиться твердження, яке є аналогом відомої нерівності Бернштейна для максимуму модуля похідної тригонометричного поліному, а також, знаходяться порядки найкращих наближень в метриці просторів $L_{\beta,M}^{\psi,\omega}$ на класах $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій.

2 Основні результати

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $f \in L_{\beta,M}^{\psi,\omega}$, причому $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і $\psi \in \mathfrak{M}'$. Тоді для довільного натурального n існує константа $K = K_M$, яка залежить тільки від функції $M = M(x)$ і така, що виконується нерівність*

$$E_n(f)_{M,\omega} \leqslant K\psi(n) E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega}. \tag{17}$$

Відзначимо, що твердження теореми 2 в більшості випадків є добре відомим. При $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ оцінка (17) отримана в роботі [7]. Якщо $M = t^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то такі результати належать О.І. Степанцю і О.К. Кушпелю [8, 9]. Якщо ж $1 < p < \infty$ і $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, $n, r \in \mathbb{N}$, нерівність (17) була доведена О.П. Тіманом [10, с. 316].

Доведення. На основі співвідношення (9) можна стверджувати, що в метриці просторів $L_{M,\omega}$, для довільної функції $f \in L_{\beta,M}^{\psi,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$, за умови $\psi \in \mathfrak{M}'$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконуються рівності

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x), \quad f_\beta^\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f_\beta^\psi;x).$$

Враховуючи тепер формули зв'язку між коефіцієнтами функцій f і f_β^ψ (рівності (13) – (14)), знаходимо

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx+b_k(f)\sin\ kx)=$$

$$=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi(k)\left[a_k(f_\beta^\psi)\cos\frac{\beta\pi}{2}-\right.\right.$$

$$\left.-b_k(f_\beta^\psi)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right]\cos kx+\psi(k)\left[a_k(f_\beta^\psi)\sin\frac{\beta\pi}{2}+\right.$$

$$\left.\left.+b_k(f_\beta^\psi)\cos\frac{\beta\pi}{2}\right]\sin kx\right)=\frac{a_0(f)}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left[a_k(f_\beta^\psi)\cos kx+\right.\right.$$

$$\left.+b_k(f_\beta^\psi)\sin kx\right]+\psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[a_k(f_\beta^\psi)\sin kx-\right.$$

$$\left.\left.-b_k(f_\beta^\psi)\cos kx\right]\right)=\frac{a_0(f)}{2}+$$

$$+\cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)A_k(f_\beta^\psi;x)+$$

$$+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)A_k(\tilde f_\beta^\psi;x).\qquad(18)$$

Беручи до уваги співвідношення (3) і (18), отримуємо

$$f(x)-S_{n-1}(f;x)=\sum_{k=n}^{\infty}A_k(f;x)=$$

$$=\cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(f_\beta^\psi;x)+$$

$$+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(\tilde f_\beta^\psi;x).\qquad(19)$$

Далі маємо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(f_\beta^\psi;x)=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\left[\left(S_k(f_\beta^\psi;x)-f_\beta^\psi(x)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(S_{k-1}(f_\beta^\psi;x)-f_\beta^\psi(x)\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\left(S_k(f_\beta^\psi;x)-f_\beta^\psi(x)\right)-$$

$$-\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\left(S_{k-1}(f_\beta^\psi;x)-f_\beta^\psi(x)\right)=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k)-\psi(k+1)]\left[S_k(f_\beta^\psi;x)-f_\beta^\psi(x)\right]-$$

$$-\psi(n)\left[S_{n-1}(f_\beta^\psi;x)-f_\beta^\psi(x)\right].\qquad(20)$$

Аналогічно одержуємо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(\tilde f_\beta^\psi;x)=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k)-\psi(k+1)]\left[S_k(\tilde f_\beta^\psi;x)-\tilde f_\beta^\psi(x)\right]-$$

$$-\psi(n)\left[S_{n-1}(\tilde f_\beta^\psi;x)-\tilde f_\beta^\psi(x)\right].\qquad(21)$$

Використовуючи властивості норми і співвідношення (10), на підставі рівностей (19) – (21) знаходимо

$$E_n(f)_{M,\omega}\leqslant\|f-S_{n-1}(f)\|_{M,\omega}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k)-\psi(k+1)]\left\|S_k(f_\beta^\psi)-f_\beta^\psi\right\|_{M,\omega}+$$

$$+\psi(n)\left\|S_{n-1}(f_\beta^\psi)-f_\beta^\psi\right\|_{M,\omega}+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k)-\psi(k+1)]\left\|S_k(\tilde f_\beta^\psi)-\tilde f_\beta^\psi\right\|_{M,\omega}+$$

$$+\psi(n)\left\|S_{n-1}(\tilde f_\beta^\psi)-\tilde f_\beta^\psi\right\|_{M,\omega}\leqslant$$

$$\leqslant K\left(\psi(n)E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega}+\psi(n)E_n(\tilde f_\beta^\psi)_{M,\omega}\right)\leqslant$$

$$\leqslant K\psi(n)E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega},$$

де $K=K_M$ — константа, яка залежить тільки від функції $M=M(x)$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай $f\in L_{\beta,M}^{\psi,\omega}$, причому $M\in\mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega\in A_{\wp(M)}$ і $\psi\in\mathfrak{M}'$. Тоді*

$$E_n(f)_{M,\omega}\leqslant K\psi(n),$$

де $K=K_M$ — константа, яка залежить тільки від функції $M=M(x)$.

Позначимо через $\mathfrak{M}^*$ множину послідовностей $\psi(k) > 0$, які задовольняють тільки першим двом умовам з означення множини $\mathfrak{M}$, тобто:

$$\mathfrak{M}^* = \{\psi(k) : \quad \psi(k) - \psi(k+1) \geqslant 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Нам знадобитися наступне твердження, яке носить допоміжний характер, але й не позбавлене самостійного інтересу.

Лема 1. *Нехай $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$. Тоді для довільного тригонометричного полінома T_n порядку n виконується нерівність*

$$\|D_\beta^\psi T_n\|_{M,\omega} \leqslant \frac{K}{\psi(n)}\|T_n\|_{M,\omega}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{22}$$

де $1/\psi(0) := 0$, а K — додатна стала.

Співвідношення (22) є аналогом класичної нерівності для максимуму модуля похідної тригонометричного полінома, отриманої С.Н. Бернштейном в роботі [11]. Надалі ця нерівність уточнювалася і узагальнювалася в роботах багатьох авторів. З основними результатами щодо нерівності С.Н. Бернштейна і коментарями до них можна ознайомитися, наприклад, у книзі М.П. Корнєйчука, В.Ф. Бабенка і А.О. Лигуна [12] (див., також, монографії О.П. Тімана [10], Н.І. Ахієзера [13]). Відзначимо також, що у випадку, коли $\psi(n) = n^{-\alpha},\ \beta = \alpha,\ \alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}$, лему 1 доведено в роботі [7]. Якщо $M(t) = t^p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $\omega(t) \equiv 1$, нерівність (22) отримана А.І. Степанцем і О.К. Кушпелем в статті [9].

Доведення. Якщо

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— тригонометричний поліном порядку n, то згідно рівності (12)

$$(D_\beta^\psi T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi(k)} a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\Big(a_k \cos kx +$$

$$+ b_k \sin kx\Big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\Big(a_k \sin kx -$$

$$- b_k \cos kx\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(T_n; x)$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(\tilde{T}_n; x) = \cos\frac{\beta\pi}{2}(D_0^\psi T_n)(x) -$$

$$- \sin\frac{\beta\pi}{2}(D_0^\psi \tilde{T}_n)(x). \tag{23}$$

Покладемо

$$R_m^\psi(\varphi; x) := \sum_{k=0}^{m-1}\left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] A_k(\varphi; x), \tag{24}$$

$$m = 1, 2, \ldots\ ,$$

де $1/\psi(0) := 0$.

З рівності (23) випливає, що функція

$$\varphi_1(x) := \psi(n)(D_0^\psi T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(T_n; x),$$

є тригонометричним поліномом порядку, не вище за n (тобто $A_k(\varphi_1; x) \equiv 0, \quad k > n$). Враховуючи це, використовуючи перетворення Абеля, для довільного натурального числа $m \geqslant n$ отримуємо

$$R_m^\psi(\varphi_1; x) = \sum_{k=0}^{m-1}\left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] A_k(\varphi_1; x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right]\frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(T_n; x) =$$

$$= \psi(n)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right]\sum_{i=0}^{k}\Bigg[1 -$$

$$- \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\Bigg] A_i(T_n; x) + \sum_{i=0}^{n}\left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x) =$$

$$= \psi(n)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right] r_k^{\psi,m}(T_n; x) +$$

$$+ r_n^{\psi,m}(T_n; x), \tag{25}$$

де

$$r_k^{\psi,m}(T_n; x) := \sum_{i=0}^{k}\left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n.$$

Знову скориставшись перетворенням Абеля, будемо мати

$$r_k^{\psi,m}(T_n;x)=\psi(m)\sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{\psi(i+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\psi(i)}\right]\sum_{j=0}^{i}A_j(T_n;x)+$$

$$+\psi(m)\left[\frac{1}{\psi(m)}-\frac{1}{\psi(k)}\right]\sum_{j=0}^{k}A_j(T_n;x),$$

звідки, враховуючи монотонність послідовності $\psi(k)$ і співвідношення (6), випливає

$$\|r_k^{\psi,m}(T_n;\cdot)\|_{M,\omega}\leqslant K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}. \tag{26}$$

Застосовуючи тепер оцінку (26) до рівності (25), для довільного натурального числа $m\geqslant n$ знаходимо

$$\|R_m^{\psi}(\varphi_1;\cdot)\|_{M,\omega}\leqslant K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}. \tag{27}$$

Аналогічно, для функції

$$\varphi_2(x):=\psi(n)(D_0^{\psi}\tilde{T}_n)(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(n)}{\psi(k)}A_k(\tilde{T}_n;x),$$

враховуючи співвідношення (7), для довільного натурального числа $m\geqslant n$ отримуємо

$$\|R_m^{\psi}(\varphi_2;\cdot)\|_{M,\omega}\leqslant K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}. \tag{28}$$

Покладемо

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi;x):=\frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)}R_{m_2}^{\psi}(\varphi;x)-$$

$$-\frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)}R_{m_1}^{\psi}(\varphi;x), \tag{29}$$

де $m_1<m_2\in\mathbb{N}$, а $R_m^{\psi}(\varphi;x)$ — величина, яка визначається у співвідношенні (24).

Вважаючи, що послідовності $\psi(k)$ з множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множину натуральних чисел неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t\geqslant 1$, відповідно до [6, с. 159] через $\eta(t)=\eta(\psi;t)$ позначимо функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t))=\frac{1}{2}\psi(t),\quad t\geqslant 1.$$

Звідси, внаслідок суворої монотонності і спадання до нуля ψ, функція $\eta(t)$ для всіх $t\geqslant 1$ визначається однозначно

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \tag{30}$$

де ψ^{-1} — функція, обернена до ψ.

Нехай тепер $m_1=n$ і $m_2=[\eta(n)]$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді справджуються співвідношення

$$\frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)}=\mathcal{O}(1),$$

$$\frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)}=\mathcal{O}(1). \tag{31}$$

На основі співвідношень (27) – (31), знаходимо

$$\|Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_i;\cdot)\|_{M,\omega}\leqslant K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \tag{32}$$

$$n=1,2,\ldots,\ i=1,2.$$

Оскільки виконується рівність

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi;x)=\frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)}\sum_{k=0}^{m_2-1}\left(\frac{1}{\psi(m_2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\psi(k)}\right)A_k(\varphi;x)-\frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{m_1-1}\left(\frac{1}{\psi(m_1)}-\frac{1}{\psi(k)}\right)A_k(\varphi;x),$$

яка за допомогою перетворення Абеля приймає вигляд

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi;x)=\frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)}\times$$

$$\times\sum_{k=m_1}^{m_2-1}\left(\frac{1}{\psi(k+1)}-\frac{1}{\psi(k)}\right)S_k(\varphi;x),$$

то для довільного тригонометричного полінома T_m, порядок якого не перевищує m_1, матимемо

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(T_m;x)=T_m(x). \tag{33}$$

Беручи тепер до уваги те, що

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(c\varphi;x)=cQ_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi;x),\quad c=\text{const},$$

на основі співвідношень (23), (32) і (33), знаходимо

$$\|(D_{\beta}^{\psi}T_n)(\cdot)\|_{M,\omega}\leqslant\|(D_0^{\psi}T_n)(\cdot)\|_{M,\omega}+$$

$$+\|(D_0^\psi \tilde{T}_n)(\cdot)\|_{M,\omega} = \left\| \frac{1}{\psi(n)} Q^\psi_{n,[\eta(n)]}(\varphi_1;\cdot) + \right\|_{M,\omega}$$

$$+\left\| \frac{1}{\psi(n)} Q^\psi_{n,[\eta(n)]}(\varphi_2;\cdot) \right\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\psi(n)} \|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{34}$$

що й потрібно було довести. Теорему доведено.

Зауважимо, що нерівність (22) є непокращуваною за порядком, оскільки для тригонометричного полінома $t_n^*(x) = \cos nx$ будемо мати

$$(D_0^\psi t_n^*)(x) = \frac{1}{\psi(n)} \cos nx$$

і

$$\|D_0^\psi t_n^*)\|_{M,\omega} = \|\frac{1}{\psi(n)} \cos nx\|_{M,\omega} = \frac{1}{\psi(n)} \|t_n^*\|_{M,\omega}.$$

Використовуючи лему 1, можна довести наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $f \in L_{M,\omega}$, де $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$. Тоді*

$$\|f_\beta^\psi - (D_\beta^\psi S_n(f))\|_{M,\omega} \leqslant K E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{M,\omega}, \tag{35}$$

де $K = K_M$ — стала, яка залежить тільки від функції $M = M(x)$.

Зауважимо, що у випадку $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, твердження теореми 3 збігається з теоремою 5 роботи [7].

Доведення. Покладемо для зручності $[\eta(0)] := 1$ і позначимо через

$$V_{n,[\eta(n)]}(f) = V_{n,[\eta(n)]}(f;x) :=$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} S_k(f;x), \quad n = 0,1,\ldots, \tag{36}$$

— середні Валле Пуссена функції f.

Відзначимо деякі властивості величин $V_{n,[\eta(n)]}(f;x)$. Очевидно, що для довільного тригонометричного полінома $P_n(x)$ порядку, не вище за n, виконується рівність

$$V_{n,[\eta(n)]}(P_n;x) = P_n(x). \tag{37}$$

Крім того, беручи до уваги співвідношення (6), отримуємо оцінку

$$\|V_{n,[\eta(n)]}(f)\|_{M,\omega} \leqslant \frac{1}{[\eta(n)] - n} \times$$

$$\times \sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \|S_k(f;\cdot)\|_{M,\omega} \leqslant c_p \|f\|_{M,\omega}, \tag{38}$$

Позначивши через $t_n(x)$ — поліном найкращого наближення суми Валле Пуссена $V_{n,[\eta(n)]}(f)$ функції f в просторі $L_{M,\omega}$ порядку n, а через $T_n(x)$ — поліном найкращого наближення функції f порядку n, використовуючи нерівність(6), отримуємо

$$E_{n+1}(V_{n,[\eta(n)]})_{M,\omega} = \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - t_n\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - T_n\|_{M,\omega} =$$

$$= \frac{\left\| \sum\limits_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \Big(S_k(f;\cdot) - T_n(\cdot) \Big) \right\|_{M,\omega}}{[\eta(n)] - n} =$$

$$= \frac{\left\| \sum\limits_{k=n}^{[\eta(n)]-1} S_k(f - T_n;\cdot) \right\|_{M,\omega}}{[\eta(n)] - n} \leqslant$$

$$\leqslant K \|f - T_n\|_{M,\omega} = K E_{n+1}(f)_{M,\omega}. \tag{39}$$

Далі маємо

$$\|f_\beta^\psi - (D_\beta^\psi S_n)\|_{M,\omega} \leqslant \|f_\beta^\psi - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\|_{M,\omega} +$$

$$+\|(D_\beta^\psi t_n) - (D_\beta^\psi S_n)\|_{M,\omega} +$$

$$+\|V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi) - (D_\beta^\psi t_n)\|_{M,\omega} =:$$

$$=: R_1(f_\beta^\psi) + R_2(f_\beta^\psi) + R_3(f_\beta^\psi). \tag{40}$$

Позначивши ще через $T_n^*(x)$ поліном найкращого наближення похідної f_β^ψ порядку n, на підставі співвідношень (37) і (38), знаходимо

$$R_1(f_\beta^\psi) = \|f_\beta^\psi - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\|_{M,\omega} \leqslant \|f_\beta^\psi - T_n^*\|_{M,\omega} +$$

$$+\|T_n^* - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\|_{M,\omega} = E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{M,\omega} +$$

$$+\|V_{n,[\eta(n)]}(T_n^* - f_\beta^\psi)\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{M,\omega} + K\|f_\beta^\psi - T_n^*\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant K E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{M,\omega}. \tag{41}$$

На підставі (10), для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$, отримуємо оцінку

$$\|V_{n,[\eta(n)]}(f) - f\|_{M,\omega} =$$

$$= \frac{\left\| \sum\limits_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \Big(S_k(f;\cdot) - f(\cdot) \Big) \right\|_{M,\omega}}{[\eta(n)] - n} = \mathcal{O}(1) E_{n+1}(f)_{M,\omega}. \quad (42)$$

Застосовуючи нерівність (22), і беручи до уваги співвідношення (39) і (42), знаходимо

$$R_2(f_\beta^\psi) = \|(D_\beta^\psi t_n) - (D_\beta^\psi S_n)\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\psi(n)} \|t_n - S_n\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\psi(n)} \Big(\|t_n - V_{n,[\eta(n)]}(f)\|_{M,\omega} +$$

$$+ \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - f\|_{M,\omega} + \|f - S_n\|_{M,\omega} \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\psi(n)} E_{n+1}(f)_{M,\omega}. \quad (43)$$

Нарешті, враховуючи рівність

$$V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi) = (D_\beta^\psi V_{n,[\eta(n)]}(f)),$$

означення функції $\eta(n) = \eta(\psi; n)$, знову застосовуючи нерівність (22) і оцінку (39), одержуємо

$$R_3(f_\beta^\psi) = \|(D_\beta^\psi V_{n,[\eta(n)]}(f)) - (D_\beta^\psi t_n)\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\psi([\eta(n)]-1)} \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - t_n\|_{M,\omega} =$$

$$= \frac{K}{\psi([\eta(n)]-1)} E_{n+1}(V_{n,[\eta(n)]})_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2K}{\psi(n)} E_{n+1}(f)_{M,\omega}. \quad (44)$$

Об'єднуючи тепер співвідношення (17), (40) – (41) і (43) – (44), отримуємо твердження теореми. Теорему доведено.

Литература

1. Genebashvili I., Gogatishvili A., Kokilashvili V.Krbec M. Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — 1998.
2. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.
3. Gogatishvili A., Kokilashvili V. Criteria of weighted inequalities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces // Georgian Mathematical Journal. — 1994.— **1,** № 6. — P. 641– 673.
4. Genebashvili I., Gogatishvili A., Kokilashvili V., Krbec M. Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 1998.
5. Khabazi M. The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. — 2002. — **129.** — P. 65 -– 75.
6. Степанец А.И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. — 427 с.
7. Akgün R. Approximating polynomials for functions of Weighted Smirnov-Orlicz spaces // Jorn. of funct. spacas and applic. — 2012. — P. 1 – 41.
8. Степанец А.И., Кушпель А.К. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. — Киев, 1984. — 44 с. — (Препр./ АН УССР, Ин-т математики; 84.15).
9. Степанец А.И., Кушпель А.К. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39,** № 4. — С. 483 – 492.
10. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.
11. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912). — Собрание сочинений, Изд. АН СССР. — т. I. (1952) — С. 11 – 104.
12. Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. — Киев: Наукова думка, 1992. — 304 с.
13. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука 1965. — 407 с.

Надійшла до редколегії 02.11.2012

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 539.595

Константінов О.В.[1], к.ф.-м.н.

Вимушені коливання системи «резервуар – капілярна рідина з вільною поверхнею»

Досліджується задача виходу механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» на усталений режим. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу при гармонічному збудженні руху системи періодичною силою, прикладеною до резервуара. Рух системи відбувається в полі слабкої гравітації з урахуванням сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини. Показано, що тільки в деяких окремих випадках можливий вихід системи на режим, близький до усталеного.

Ключові слова: нелінійна динаміка, слабка гравітація, вільна поверхня рідини, вихід на усталений режим.

[1] Інститут математики НАН України, 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3
e–mail: akonst.im@mail.ru

O.V. Konstantinov [1], Ph.D.

Forced oscillations of the system «reservoir – capillary liquid with a free surface»

The problem of attainment of the mechanical system «cylindrical reservoir – liquid with a free surface» on stationary mode is under consideration. Behaviour of the system is considered within the framework of nonlinear model on durable time interval under periodic force, applied to the reservoir. The system performs motion in a weak gravitational field with considering capillary forces on a free surface of liquid. It was shown that only rarely system attains mode of oscillations closed to stationary one.

Keywords: nonlinear dynamics of liquid, weak gravity, free surface of liquid, attainment of stationary mode.

[1] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01601, Kyiv, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: akonst.im@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.Т. Маципура

Introduction

We consider the problem of dynamics of liquid with a free surface in the cylindrical reservoir. Mechanical system performs motion in weak gravity field with considering capillary forces. We stated the problem of investigation of attainment of the system on steady mode within the framework of multimode nonlinear model.

In theoretical publications only low-dimensional models were used for investigation of steady oscillations. Such investigations were done under the assumption that oscillations of the system are performed only with frequencies multiple to the frequency of forced oscillations. However, experimental investigations [2, 3] showed that on disturbance of oscillations with respect to main mode excitation of oscillations of higher normal modes with their normal frequencies, which can be not multiple with frequency of system disturbance, are by all means take place. In publication [3] for the reservoir of rectangular shape it was shown that under real conditions attainment of the system to steady mode of oscillations does not manifested in pure form in resonant and above resonant frequency range.

For investigation of the stated problem we make use the model [1], which was examined by the examples of transient processes for problems of dynamics of cylindrical reservoirs with free surfaced liquid. We state the problem of studying behavior of the system on durable time interval under disturbance of the system motion system by harmonic force applied to reservoir. System behavior was considered for frequencies in below and above resonance range as well as in a vicinity of resonance frequency.

Discrete model of the mechanical system

Let us consider the problem about oscillations of the mechanical system “cylindrical reservoir and free surfaced liquid”. We consider the reservoir as absolutely rigid body, which can perform translational motion under action of active forces. Liquid is supposed to be ideal, incompressible, homogeneous and its initial motion is irrotational. The

© О.В. Константінов, 2013

system is considered under the conditions of weak capillarity, when free falling acceleration is smaller than the ground-based one 1000 times, so, it is necessary to take into account action of capillary forces on a free surface of liquid.

We construct the discrete model of the mechanical system "reservoir – liquid with a free surface" on the basis of the Hamilton-Ostyrogradskiy variation al principle, method of modal decomposition and the method [1], which enables analytical elimination of kinematic boundary condition on free surface of liquid. This model includes the following independent parameters, a_i are coefficients of decomposition of elevation of a free surface of liquid ξ with respect to normal modes of oscillation of a free surface of liquid ψ_i, ε_i are components of the vector of displacement of the reservoir (center of undisturbed free surface of liquid)

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}\ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r, \quad r = \overline{1, N+3},$$

here p_{rn} is quadratic matrix and q_r is vector, which depend on a_n, $\dot{a}_n$, ε_n, $\dot{\varepsilon}_n$ and the vector of active external forces $\vec{F}$. The obtained discrete model describes dynamics of combined motion of the system "reservoir – free surfaced liquid" for different types of kinematic perturbations and dynamic disturbances of liquid free surface and reservoir.

Results of numerical modeling

We consider the circular cylindrical reservoir with vertical longitudinal axis *Oz*, which performs translational motion in the coordinate plane *Oy*. The reservoir of radius R = 0.3 m and the mass M_T is partially filled by liquid with the mass M_F tile the depth H=R. In numerical experiments we accepted M_T = 0,1M_F, physical constants (surface tension σ and density ρ) were accepted for water, values of contact angular θ_1 varies within the range $70^o \div 90^o$, we accept the value g = 0,001g_0 for free falling acceleration, where g_0 = 9,81 m/s^2 pis free falling acceleration on the Earth surface. Motion of the system occurs due to action of horizontal force $F = F_y \cos pt$, applied to the reservoir walls, initial elevation of a free surface of liquid is supposed to be absent. For all below considered cases values of the amplitude of external horizontal force, applied to the reservoir, were selected such that oscillations of a liquid free surface occur in nonlinear range of variation of wave amplitudes, namely, amplitudes of liquid free surface near reservoirs walls were within the range $(0{,}2 \div 0{,}25)R$.

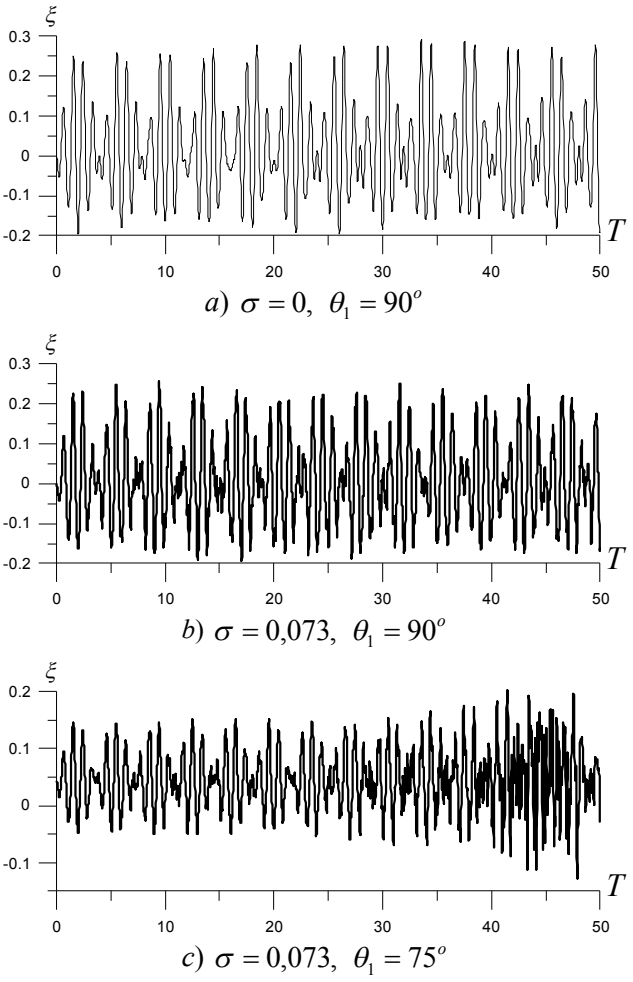


Fig. 1. Elevation on liquid free surface near reservoir walls for below resonance frequency of motion disturbance

Let us consider nonlinear oscillations of liquid free surface when frequency of external force is in below resonance range, namely, $p = \omega_1$, where ω_1 is partial frequency of the first antisymmetric normal mode. Normal (resonance) frequency of the mechanical system for the specified ratio of masses M_T = 0,1M_F is equal to $\omega_e = 1{,}2834\omega_1$.

Amplitudes of elevation of liquid free surface is shown in Fig. 1 for three cases of considering of capillary forces, namely, the absence of capillary forces (Fig. 1 *a*), the presence of capillary forces on a free surface of liquid (Fig. 1 *b*), the presence of capillary forces o both liquid free surface and contour of contact "liquid-gas-reservoir walls" (Fig. 1 *c*).

As it is seen from Fig. 1 account of capillary forces (Fig. 1 *b,c*) results in manifestation of decays and kinks on graphs, moreover, on decrease of contact angle oscillations tends to irregular character,

which is the result of deepening of internal nonlinear constraints between normal modes and strengthening of contribution of highest normal modes.

We can also see from the graph that on the absence of surface tension (Fig. 1 *a*) and under the presence of surface tension on a free surface (Fig. 1 *b*) oscillations occur with noticeable modulation with practically immutable mean value of amplitudes. However, under the presence of surface tension on the contour of three phase contact (Fig. 1 *c*) contribution of high modes so considerable that two dominating frequencies disappear and the phenomenon of amplitude modulation is not manifested at all.

In general in the below resonance range of external disturbance of reservoir motion the system attains the mode close to steady one only under the absence of surface tension (Fig. 1 *a*). For this mode of the system motion noticeable amplitude modulation with practically immutable mean value of amplitudes is typical. Introduction of capillary forces into the system results in considerable increase of contribution of higher normal modes of oscillations and transition onto steady mode is not observed at all (Fig. 1 *b, c*).

Let us consider nonlinear oscillations of a free surface of liquid, when frequency of the external force is in a vicinity of resonance, namely $p = 1{,}25\omega_1$ (Fig. 2). As it is seen from the graph, on excitation of motion in a vicinity of resonance and under the absence of capillary forces (Fig. 2 *a*) rand under the presence of capillary forces on a free surface (Fig. 2 *b*) oscillations are performed with noticeable modulation of amplitude, but mean value of amplitude considerably varies in time. If we reduce contact angle (Fig. 2 *c*) amplitudes of highest normal modes increase and tends to the values of amplitudes of oscillations of two dominations harmonics with external and normal frequency, and character of oscillations become irregular.

Moreover, if we disturb system motion in a vicinity of resonance in the case of absence of capillary forces (Fig. 2 *a*) and under the presence of capillary forces on a free surface of liquid (Fig. 2 *b*) phenomenon of antiresonance is character, when for intervals of time comparable with several periods of oscillations with normal frequencies of the first antisymmetrical normal mode amplitudes of elevateon of a free surface of liquid reduces to the level $\xi \approx (0{,}01 \div 0{,}015)R$, so for certain time amplitudes reduced considerably (10–15 times). At the same time phenomenon of antiresonance is not manifested in the case of motion disturbance for below and above range of variation of frequencies. This phenolmenon differs from well-known beatings, because in the considered case we observe behavior of the multifrequency (but not double-frequency) system.

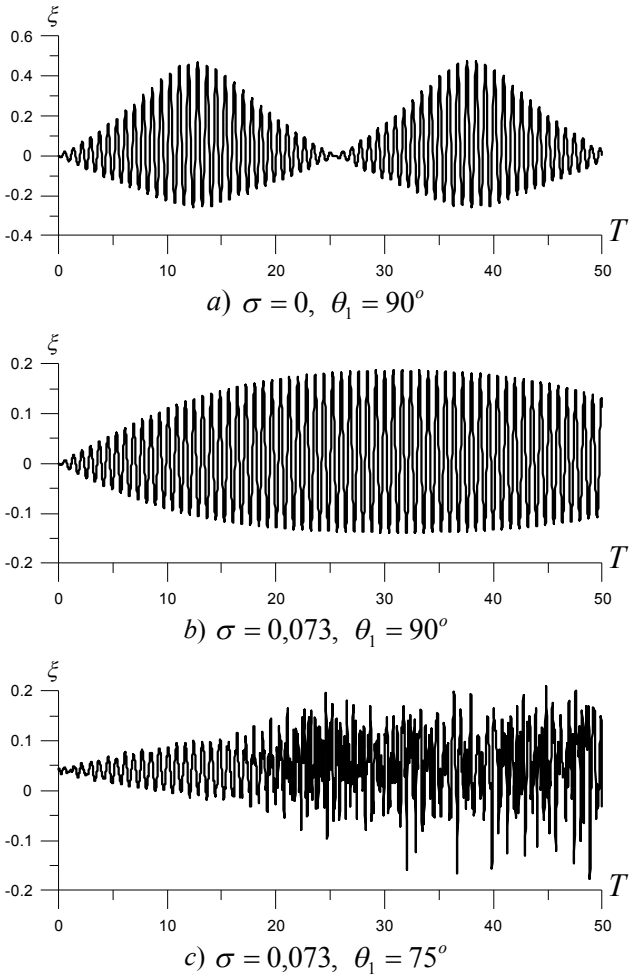


Fig. 2. Elevation on liquid free surface near reservoir walls for near resonance frequency of motion disturbance

On disturbance of system motion in a vicinity resonant frequency transition to the mode, close to steady one, occurs in the case, when capillary forces are absent (Fig. 2 *a*) of in the case of presence of capillary forces on a free surface of liquid (Fig. 2 *b*). Reduction of contact angle results in the effect that steady modes in the system are not manifested at all, and law of oscillations is considerably distorted by higher harmonic of spectrum (superharmonica and double-peaks are significantly manifested).

Let us consider nonlinear oscillations of a free surface of liquid, when frequency of the external force is in the above range, for example, $p = 1{,}5\omega_1$ (Fig. 3). As it is seen from Fig. 3 *a*, for oscillations in the above resonance range of motion disturbance under the absence of capillary forces oscillations of a free surface occur with noticeable amplitude modulation and time variable mean value, moreover,

shape of the amplitude envelope is essentially distorted by higher harmonics of spectrum.

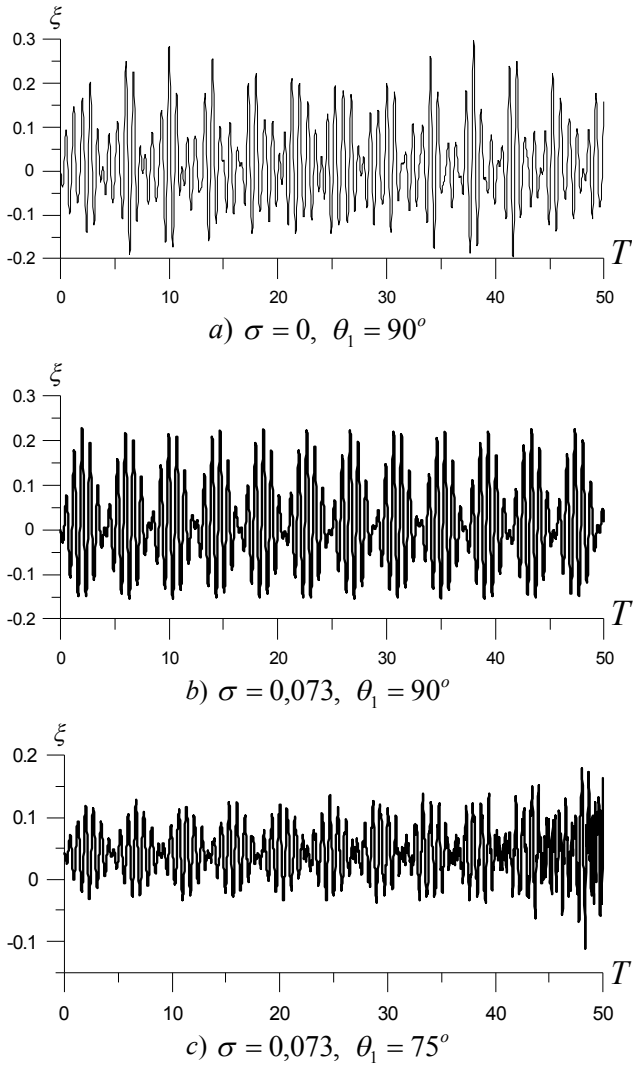


Fig. 3. Elevation on liquid free surface near reservoir walls for above resonance frequency of motion disturbance

In contrast to below resonance range of disturbances, where taking into account capillary forces on a free surface results in increase of contribution of high modes of oscillations (Fig. 1 *b*), in resonant and above resonance modes of disturbance the presence of capillary forces on a free surface of liquid on the contrary leads to the effect, when manifestation of of high modes of spectrum is practically absent, and harmonics with two frequencies (normal and forced) dominate (Fig. 2 *b*, 3 *c*). This means that capillary forces on a free surface of liquid act similar to selective filter, which restricts harmonics on combined and high frequencies and conserves only harmonics with normal and forced frequencies.

Taking into account capillary forces on the contour of three-phase contact (Fig. 3 *c*), for both below resonance and resonance range of excitation results in irregular oscillations, when on oscillations practically all harmonics manifest.

Conclusions

For the problem of dynamics of liquid with a free surface in the cylindrical reservoir with considering capillary forces we investigate potential of transition of the system to steady mode of oscillations. Behavior of the system is considered for frequency range below resonance, in a small vicinity of resonance and above resonance. In all cases transition to the mode of steady oscillations in classical sense does not occur.

The considered examples showed that the presence of capillary forces leads to increase of contribution of high modes of oscillations and, therefore, does not promote transition of the system to steady mode of oscillations.

Analysis showed that the main reason of difference of the obtained results from the obtained before ones is usage of multimodal model of the system and refuse from the hypothesis about potential of neglect of oscillations with normal frequencies of modes, which is valid only for systems with one degree of freedoms.

Список використаних джерел

1. *Limarchenko O.S., Yasinsky V.V.* Nonlinear dynamics of constructions with liquid. – Kiev: Kiev Polytechnic Inst., 1997. – 338 p. (in Russian).
2. *Mikishev G.N., Rabinvich B.I.* Dynamics of rigid body with cavities partially filled with liquid. – Moscow: Mashinostroenie., 1968. – 532 p. (in Russian).
3. *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N.* Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth/ Physics of fluids 18. – 2006. – P. 1–14.

Надійшла до редколегії 12.03.13

УДК 539.9

Lavrenyuk M.V.[1], phD.

The stress-strain state of the plane containing rectangular multicoated inclusion.

Modified boundary element method (MBEM) has been proposed, to solve the problem of defining stress-strain state of plane with multicoated inclusion of rectangular shape. Modification allows simultaneous defining of all the components of stress-strain state on the boundary of inclusion and each layer by means of using two-dimensional approximation of displacements and stresses on every element of discretization. The approach exposed allows generalization for the cases of inclusion of an arbitrary shape, the pair of two interacting multicoated inclusions, etc. The numerical examples presented demonstrate high accuracy as well as numerical efficiency of the MBEM.

Key words: multicoated inclusion, BEM, layer.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: mykolalav@ukr.net

М. В. Лавренюк[1], к. ф.-м. н.

Напружено-деформований стан платівки з прямокутним багатошаровим включенням

Запропоновано модифікований метод граничних елементів (ММГЕ) для розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану платівки з багатошаровим включенням прямокутної форми. Модифікація методу дозволяє визначати одночасно всі компоненти напружено-деформованого стану на границі включення та кожного прошарку за допомогою двовимірної апроксимації складових вектора переміщень та тензора напружень на кожному елементі дискретизації. Запропонований підхід можна узагальнити на випадок включення довільної форми, пари двох взаємодіючих багатошарових включень, тощо. Наведені результати чисельного розрахунку вказують на високу точність та ефективність ММГЕ.

Ключові слова: прошарок, включення, метод граничних елементів.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: mykolalav@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Маципура В.Т.

Introduction

In recent years, the use of composite materials has increased in many areas of technology especially in aerospace, automotive, and civil engineering. Composites usually consist of two or more materials that are combined to form a new material that exhibits a number of desired properties. Such composites can be often presented as matrix containing multicoated fibers. If the surface load and the stress field do not vary in fiber direction, the problem can be reduced to two-dimensional elasticity problem, namely, an elastic plane containing multicoated inclusions. To solve such kind of problems conventional computational methods with boundary (BEM [1]) discretizations are usually [2], [3] utilized.

The two-dimensional approximation of displacements on the boundary of inclusions [4] allows simultaneous defining of all the components of stress-strain state on the boundary of inclusion and each layer. Let us consider the problem of elastic equilibrium of space containing rectangular multicoated single fiber. The author's contribution to related problems can be found for example in [5], [6]. Also, in authors PhD degree diploma the problem of defining stress-strain of inclusion with single coating in elastic plane was considered. In the last Section, the results of numerical investigation are presented and possible ways to improve computational efficiency of the method are discussed.

Statement of the problem

Lets consider infinite plane with multicoated inclusion in it (Fig. 1). On the infinite boundary of plate distributed forces p_i is applied and on the infinity body is also subjected to the action of mass load X.

© М.В. Лавренюк, 2013

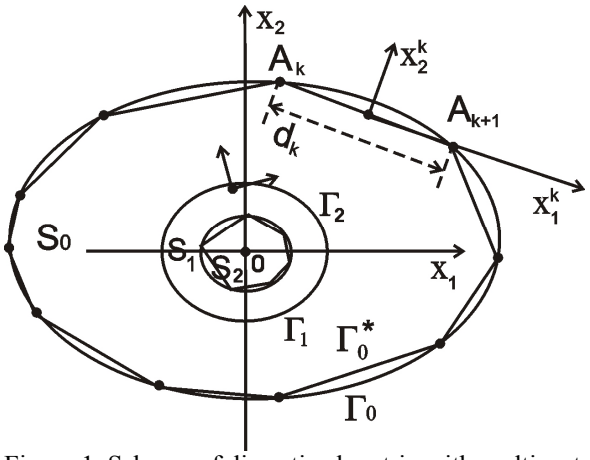


Figure 1. Scheme of discretized matrix with multicoated inclusion

The system of equilibrium equations can be written down as follows:

$$\begin{cases} \left(\lambda_0 u_{l,l}\delta_{ij} + \mu_0\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right)_{,j} + X_i = 0 \\ \left(\lambda_p u_{l,l}\delta_{ij} + \mu_p\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right)_{,j} + X_i = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

$i,j = 1,2$, $p = 1,...,N$

The ideal contact conditions on the edge of neighboring layers are:

$$\sigma_{ij}^{p} n_j^{p}\,|_{\Gamma_p} = \sigma_{ij}^{p+1} n_j^{p+1}\,|_{\Gamma_p}, u_i^{p}\,|_{\Gamma_p} = u_i^{p+1}\,|_{\Gamma_p}, \quad (2)$$

$i,j = 1,2$, $p = 1,...,N$

Multiplying both parts of each equation (1) on the correspondent fundamental solutions $U_i^{k(0)}$ and $U_i^{k(p)}$, $p = 1,...,N$ and integrating over the domains of plane, inclusion and layers, we have for matrix:

$$\int\limits_{S_0\setminus S_1} \left(\mu_0 u_{l,l}\delta_{ij} + \mu_0\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right)_{,j} U_i^{k(0)} dS -$$

$$- \int\limits_{S_0\setminus S_1} X_i U_i^{k(0)} dS = 0,$$

for every layer

$$\int\limits_{S_p\setminus S_{p+1}} \left(\mu_p u_{l,l}\delta_{ij} + \mu_p\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right)_{,j} U_i^{k(p)} dS_p = 0,$$

and for inclusion domain

$$\int\limits_{S_N} \left(\mu_N u_{l,l}\delta_{ij} + \mu_N\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right)_{,j} U_i^{k(N)} dS_N = 0.$$

At last we will have Somigliano identity for plane:

$$\chi(S) u_k^{(0)}(\xi) = \int\limits_{\Gamma_1} \sigma_{ij}^{(0)} n_j^{(1)} U_i^{k(0)} d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1} g_i^{k(0)} u_i d\Gamma_1 +$$

$$+ \int\limits_{S_0\setminus S_1} X_i U_i^{k(0)} dS, \ \chi = \begin{cases} 1, \xi \in S_0 \setminus S_1 \\ 0, \xi \notin S_0 \setminus S_1 \end{cases} \quad (3)$$

for each layer:

$$\chi(S) u_k^{(p)}(\xi) = \int\limits_{\Gamma_{p+1}} \sigma_{ij}^{(p)} n_j^{(p)} U_i^{k(p)} d\Gamma_{p+1} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_p} g_i^{k(p)} u_i d\Gamma_p - \int\limits_{\Gamma_{p+1}} g_i^{k(p)} u_i d\Gamma_{p+1} +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_p} \sigma_{ij}^{(p)} n_j^{(p)} U_i^{k(p)} d\Gamma, \ \chi = \begin{cases} 1, \xi \in S_p \setminus S_{p+1} \\ 0, \xi \notin S_p \setminus S_{p+1} \end{cases} \quad (4)$$

and for inclusion:

$$\chi(S) u_k^{(N)}(\xi) = \int\limits_{\Gamma_N} \sigma_{ij} n_j U_i^{k(N)} d\Gamma_N -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_N} g_i^{k(N)} u_i d\Gamma_N, \ \chi = \begin{cases} 1, \xi \in S_N \\ 0, \xi \notin S_N \end{cases} \quad (5)$$

Lets discretize the contours of inclusion and layers using segments as elements of discretization (Fig. 1) and work in on these segments local coordinates system. Using boundary properties of single and double layer potentials we get the system of integral equations for defining displacements in zonal-homogeneous body. Let's carry out passage in integral representations, and direct (for every equation) the observation point step-by-step to the center of every segment of discretization. Thus we obtain the system of boundary integral equations for matrix:

$$\frac{1}{2}\delta_{kj} u_j^{(0)}(x) - u_k^{\infty} = \int\limits_{S_0} X_i U_i^{k(0)} dS_0 + \int\limits_{\Gamma_1} u_i^{(0)} g_i^{k(0)} d\Gamma_1 -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_1} U_i^{k(0)}(x,\xi)\sigma_{ij}^{(0)} n_j^{(0)} d\Gamma_1, \ x \in S_0 \setminus S_1, \quad (6)$$

for every layer:

$$\frac{1}{2}\delta_{kj} u_j^{(p)}(x) = \int\limits_{\Gamma_p} U_i^{k(p)}(x,\xi)\sigma_{ij}^{(p)} n_j^{(p)} d\Gamma_p -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_p} u_i^{(p)} g_i^{k(p)} d\Gamma_p, \ x \in S_p \setminus S_{p+1}, p = 1,...,N \quad (7)$$

and for inclusion:

$$\frac{1}{2}\delta_{kj} u_j^{(N+1)}(x) = \int\limits_{\Gamma_{N+1}} U_i^{k(N+1)}(x,\xi)\sigma_{ij}^{(N+1)} n_j^{(N+1)} d\Gamma_{N+1} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_{N+1}} u_i^{(N+1)} g_i^{k(N+1)} d\Gamma_{N+1}, \ x \in S_N, \quad (8)$$

Here u_i^{∞} are displacements on the infinity defined as the solution of the problem of infinite plate subjected to loading on the infinity. Further unknown densities of potentials of double layer on the boundaries of inclusions can be represented as functions of two unknowns along the segments of discretization. Such representation allows after solving the system of boundary integral equations to define all the components of both displacements and stresses σ_{ij} on the boundary of inclusion and every layer. In the case of linear approximation the components of

displacements on every segment of discretization can be written as follows:

$$u_1^{i(p)}(x') = a_{1i}^p x_1' + a_{2i}^p x_2' + a_{3i}^p,$$
$$u_2^{i(p)}(x') = a_{4i}^p x_1' + a_{5i}^p x_2' + a_{6i}^p, \quad (9)$$
$$p = 1,...,N, i = 1,...,M_p.$$

Using Hooke's law, we get correspondent expression for σ_{ij} on every segment of discretization:

$$\sigma_{11}^{i(p)}(x') = (\lambda_p + 2\mu_p)a_{1i}^p + \lambda_p a_{5i}^p$$
$$\sigma_{22}^{i(p)}(x') = (\lambda_p + 2\mu_p)a_{5i}^p + \lambda_p a_{1i}^p \quad (10)$$
$$\sigma_{12}^{i(p)}(x') = \mu_p(a_{2i}^p + a_{4i}^p), p = 1,...,N, i = 1,...,M_p$$

It is obvious, that in considered case of linear approximation the components of tensor σ_{ij} (10) will be constant along every segment of integration. After substituting the expressions for displacements (9) and stresses (10) into boundary integral equations (6)-(8), and contact conditions (2) we have the system of linear algebraic equations, which must be made closed by adding to system the equations of continuity of displacements on every segment of discretization, that have the following form:

$$\frac{1}{2}(a_{1i}^p d_i^p + a_{3i}^p)\cos\alpha_i^p - \left(\frac{1}{2}a_{4i}^p d_i^p + a_{6i}^p\right)\sin\alpha_i^p =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}a_{1i+1}^p d_{i+1}^p + a_{3i+1}^p\right)\cos\alpha_{i+1}^p -$$
$$-\left(-\frac{1}{2}a_{4i+1}^p d_{i+1}^p + a_{6i+1}^p\right)\sin\alpha_{i+1}^p,$$
$$\left(\frac{1}{2}a_{1i}^p d_i^p + a_{3i}^p\right)\sin\alpha_i^p + \left(\frac{1}{2}a_{4i}^p d_i^p + a_{6i}^p\right)\cos\alpha_i^p =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}a_{1i+1}^p d_{i+1}^p + a_{3i+1}^p\right)\sin\alpha_{i+1}^p +$$
$$+\left(-\frac{1}{2}a_{4i+1}^p d_{i+1}^p + a_{6i+1}^p\right)\cos\alpha_{i+1}^p,$$
$$p = 0,...,N,\ i = 1,...,M_p$$

Here d_i^p — the length of i-th segment of p-th layer, M_p — the number of segments on p-th inclusion, and α_i^p — the angle at normal of i-th segment of p-th layer with respect to OX of global coordinates system. So we have the closed system of linear algebraic equations, which produce as solution vector unknown coefficients of approximation (9) or (10), and thus, all the components σ_{ij} and displacements on the contours of matrix and inclusions. Lets change the coordinate system to local for every discretization system, and change the densities of potentials on their expression using (9) and (10). Further using Somigliano formulas (3)-(5), we define displacements, and differentiating these formulas, also deformations. Then, on the base of Hooke's law we can define stresses in every internal point of the plane. And thus the elastic problem is solved.

Numerical results

There were considered the number of numerical examples to evaluate stress state of considered bodies, especially stresses concentration for composites with multicoated fibers. It was studied the influence of geometrical characteristic of inclusion ($r:a$ ratio), physical characteristics of material and geometrical characteristics of layers coating inclusion (thickness of layers h_i) on the stress concentration on the contour of inclusion.

In all solved problems the infinite plate is subjected to onelateral loading in vertical direction (along the axis OY). All results are obtained with respect to the value of distributed forces on the infinity.

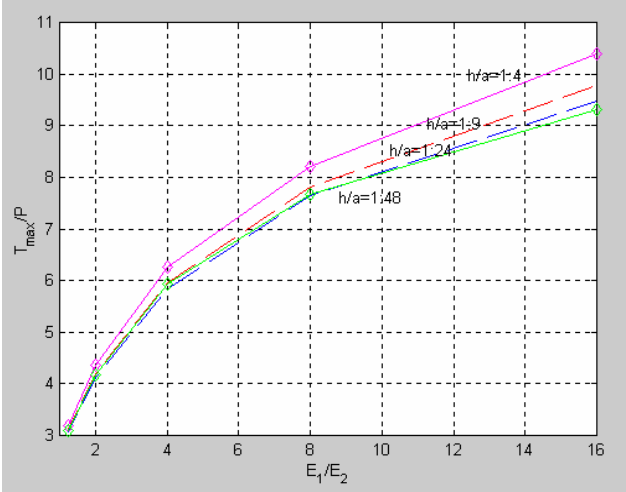
The form of rectangular inclusion was set with the help of Schwarz–Christoffel mapping. For example mapping function for quadrangle has the form:

$$\omega(\varsigma) = R\left(\frac{1}{\varsigma} - \frac{1}{6}\varsigma^3 + \frac{1}{56}\varsigma^7 - \frac{1}{176}\varsigma^{11} + ...\right) \quad (11)$$

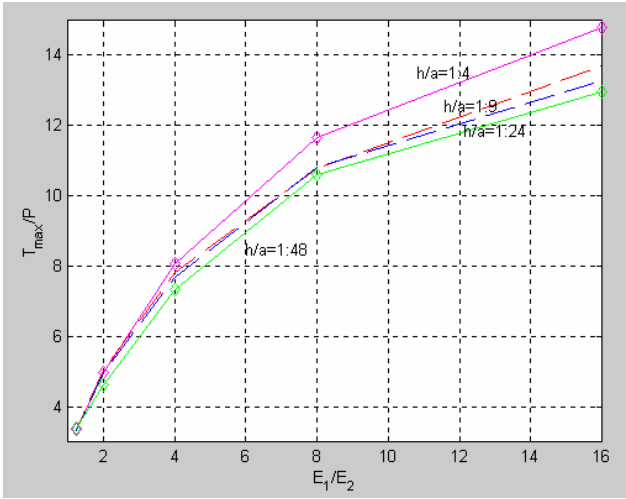
Varying the number of terms in (11) we will have the quadrangles with different radiuses of rounded corners, e.g. at 2 terms we have $r:a = 0.06$ and for 3 terms we have $r:a = 0.0245$, and so on.

There were considered cases of inclusion in infinite matrix with 1 and 2 layers of different thickness, having different physical characteristics. The shape of inclusions was considered to be rectangular in above mentioned sense.

To provide the desired accuracy at high rates of $a:r$ and low thickness h of coating layers it is necessary to increase the number of discretized elements on the contour of inclusion, the less the thickness (or the greater $r:a$), the bigger this number. It is completely predicted result. In other words we must satisfy $d_{el} \le \min\{h_i\}$ condition. Lets roughly estimate the value d_{el} — the average size of discretization element, for $R_{incl} = 1$, N_{incl} being the number of segments on contour of inclusion. For circular inclusion, for instance, we have $d_{el} = 2\pi R_{incl}/N_{incl} \approx 3R_{incl}/N_{incl}$. So, if we want to



Graph 1. Maximal intensity for 2-terms rectangular single coated inclusion



Graph 2. Maximal intensity for 3-terms rectangular single coated inclusion

consider problem with $h = 0.01$ and $R_{incl} = 1$ we must guarantee that $N_{incl} \geq 300$.

Conclusions

An highly accurate numerical-analytical variation of boundary element method has been used to solve the problem of defining stress state of plane with multicoated inclusion of rectangular shape. Due to two dimensional approximation of unknown densities of potential on the boundary of considered discretized body it is possible to obtain simultaneously all the components of stress-strain state.

It was ascertained that there are three quite predictable factors influence the level of stresses concentration on the contour of coated inclusion, namely the thickness of layer (ratio $h_i : R_{incl}$), the ratio $r : a$ of rectangular inclusion and the difference of mechanical characteristics of matrix, layers and inclusion ($E_0 : E_i : E_{incl}$).

The problem can be generalized to problem of multicoated inclusion of an arbitrary shape in finite or infinite plane and pair of two interacting multicoated inclusions in plane. The proposed approach exhibits both high accuracy and numerical efficiency and thus can be effectively used for solving the problems of stress-strain state for the variety of composite materials, containing multicoated fibers.

References

1. *Brebbia K., Telles J., Wrobel L.* Boundary element techniques: Theory and applications in engineering. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 464 p.
2. *Dong, C.Y.; Lo, S.H.; Cheung, Y.K.* Application of the boundary-domain integral equation in elastic inclusion problems // [J] Eng. Anal. Bound. Elem. 2002, 26, No.6, P. 471-477
3. *Vasanth S Kothnur, Subrata Mukherjee, Yu Xie Mukherjee*. Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method // International Journal of Solids and Structures, 1999, 36, P. 1129-1147.
4. *Lavrenyuk V.I.* On the assessment of stress-strain state of matrix with inclusion using BEM // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 1993. – N 2. – P. 27-35. (in Ukrainian)
5. *Lavrenyuk M.V.* Investigation of influence of contact conditions on stress-strain state of infinite elastic plate with two eliptical inclusions // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 1998. – N 2. – P. 63-69. (in Ukrainian)
6. *Lavrenyuk M.V.* Analysis of stress-strain state of infinite elastic plate with rectangular inclusions at ideal and nonideal contact conditions // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 1998. – N 4. – P. 17-26. (in Ukrainian)

Received on 27.03.13

УДК 532.5

Голіченко О.Л.,[1] аспірант,
Малюга В.С.,[2] к.ф.-м.н.

Рух рідини в скінченному, круговому циліндрі

В статті розглянутий рух однорідної, в'язкої, нестисливої рідини в середині скінченного кругового циліндра при малих числах Рейнольдса. Рух рідини в циліндрі відбувається за рахунок руху верхньої і нижньої границь циліндра. Для опису руху рідини використовується наближення Стокса. В статті розглянуті три випадки руху верхньої і нижньої границь циліндра, показані швидкості рідини в середині циліндра. Зроблена оцінка в'язких і нелінійних членів рівняння Нав'є-Стокса біля обода циліндра, наведені графіки перевірки виконання граничних умов.

Ключові слова: Скінченний циліндр, наближення Стокса, метод суперпозиції.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

[2]Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова 8/4, e-mail: V_S_Malyuga@ukr.net

O. L.Golichenko,[1] PhD student,
V. S. Malyuga,[2] PhD (Phys.-Math)

Fluid flows in the finite circular cylinder

The paper considers flows of a homogeneous, viscous, incompressible fluid inside the finite circular cylinder at low Reynolds numbers. Flow of fluid in the cylinder is due to the movement of the upper and lower boundaries of the cylinder. To describe the fluid flow Stokes approximation is used. The paper deals with three cases of motion of the upper and lower boundaries of the cylinder, liquid velocity in the middle of the cylinder are shown. The estimation of nonlinear viscous and members of the equation Navier-Stokes equations near the rim of the cylinder are obtained, graphs of fulfillment of boundary conditions are shown.

Key words: Finite cylinder, Stokes approximation, method of superposition.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

[2]Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabov st., 8/4,
e-mail: V_S_Malyuga@ukr.net

Статтю представив член редколегії професор, д.ф.-м.н. Маципура В.Т.

Постановка задачі

В даній статті розглядається гранична задача стаціонарного руху нестисливої, в'язкої рідини в кінцевому циліндрі з круговим перерізом при малих числах Рейнольдса (Рис. 1a). В циліндричних координатах циліндр з рідиною займає область $r \in [0,1]$, $z \in [-h,h]$. Вважається, що бічна поверхня циліндра $r = 1$ залишається нерухомою, в той час як торцеві поверхні $z = \pm h$ рухаються рівномірно і прямолінійно з постійною швидкістю. Для опису руху рідини використовується наближення Стокса. Рівняння руху рідини всередині циліндра задається системою рівнянь:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = \nabla p, \quad \nabla \vec{u} = 0 \qquad (1)$$

де $\vec{u}$ – векторне поле швидкості, p – скалярне поле тиску, μ – динамічна в'язкість. Граничні

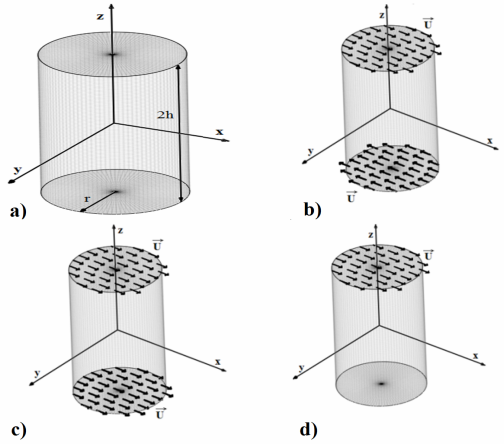


Рис. 1. Геометрія циліндричної області a), та граничні умови, що розглядаються b) - d).

© О.Л.Голіченко, В.С.Малюга, 2013

умови мають вигляд (2):

$$\begin{cases} u_r(\theta,z)=0 \\ u_\theta(\theta,z)=0 \\ u_z(\theta,z)=0 \end{cases} \quad r=1 \quad \begin{cases} u_r(r,\theta)=u_r^{\pm}(r,\theta) \\ u_\theta(r,\theta)=u_\theta^{\pm}(r,\theta) \\ u_z(r,\theta)=0 \end{cases} \quad z=\pm h \qquad (2)$$

Оцінка в'язких і нелінійних членів біля ободу циліндра

При такій постановці задачі допускається розрив швидкості на верхньому і нижньому ободах циліндра $r=1 \cap z=\pm h$. Тому окремо було розглянуте питання допустимості наближення Стокса поблизу обода. Для оцінки внеску нелінійних і в'язких членів рівняння Навье-Стокса поблизу обода, введемо локальну циліндричну систему координат $r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}$ прив'язану до тригранника Френе $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ (Рис. 2), побудованого

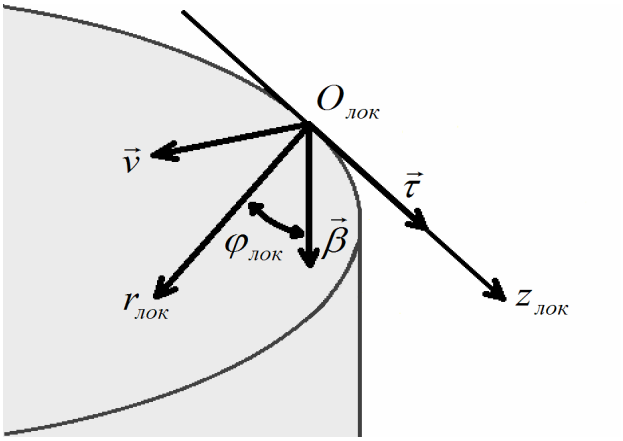


Рис. 2. Локальна система координат $r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}$ на ободі циліндра.

на ободі циліндра, з центром в точці біля якої ми оцінюємо в'язкі і нелінійні члени. Розташуємо локальну систему координат таким чином, щоб координата $z_{лок}$ лежала вздовж обода циліндра. При цьому розрив швидкостей буде лежати в площині $O_{лок} r_{лок} \varphi_{лок}$. Завдяки лінійності рівнянь Стокса (1) компоненти швидкості рідини в циліндрі можна розкласти на складові. Розкладемо швидкості в ряд по $r_{лок}$ поблизу точки, що досліджується. $U_i(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} r_{лок}^{\lambda} u_{\lambda i}(\varphi_{лок}, z_{лок}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} U_{\lambda i}(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок})$. Ми маємо право це робити, оскілки швидкості мають розрив по $\varphi_{лок}$, а по $r_{лок}$ залишаються неперервними для кожного фіксованого $\varphi_{лок}$. Оскільки швидкості обмежені, то $\lambda \geq 0$ і $U_i(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{ki}(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок})$. Для кожного члена розкладу виду $U(r,\varphi,z) = r^n u(\varphi,z)$ справедливі оцінки $U \cdot gradU = O(A^2 \cdot r^{2n-1} \cdot u^2)$, $\nu \cdot \Delta U = O(\nu \cdot A \cdot r^{n-2} \cdot u)$. Тобто відношення нелінійних членів рівняння Нав'є-Стокса до в'язких оцінюється виразом $\mathrm{Re} = U \cdot gradU / \nu \cdot \Delta U = O(A \cdot u \cdot r^{n+1}) \to 0$ при $r \to 0$. А отже число Рейнольдса прямує до нуля при наближенні до ободу циліндра, і застосування наближення Стокса біля ободу є цілком правомірним. Аналогічні оцінки числа Рейнольда поблизу двовимірних і тривимірних кутів зустрічаються в роботах [1,2,3]

Метод розв'язку

Для чисельних розрахунків, був використаний загальних розв'язок задачі Стокса в кінцевому циліндрі, представлений в [4]. Цей розв'язок був отриманий за допомогою методу суперпозиції, а задоволення граничних умов зводиться до нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих коефіцієнтів розв'язку. Ця система розв'язувалась методом покращеної редукції. Щоб застосувати метод покращеної редукції необхідно дослідити асимптотичну поведінку невідомих коефіцієнтів розв'язку. Дослідження асимптотичної поведінки було проведено за допомогою перетворення Мелліна. В роботах [5,6] техніка перетворень Мелліна використовувалась для дослідження асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів розв'язку бігармонічної задачі для прямокутника. В статті [7] ця техніка адаптована для дослідження асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів задачі Стокса в скінченному круговому циліндрі. За допомогою асимптотичного розкладу для невідомих коефіцієнтів розв'язку, була покращена точність розрахунків поля швидкості поблизу границі. Покращення збіжності рядів в полі швидкості проводилось

окремо поблизу кутової кромки (перетину бічної поверхні та плоскої кришки) та поблизу осі циліндра. В першому випадку асимптотичні розклади для невідомих коефіцієнтів підставлялися в поля швидкості і ряди, що містили невідомі величини, перетворювалися в скінчені суми. В другому випадку, на основі теореми про лишки, ряди замінялися інтегралами, підрахунок яких не складав ніякої технічної проблеми.

Перевірка виконання граничних умов

При кожному розрахунку виконувалася чисельна перевірка виконання граничних умов на кожній з сторін циліндра і будувалися графіки відхилень чисельно розрахованих компонент швидкості на границі від їх точних значень. Приклад таких графіків наведений на Рис. 3. Графіки побудовані для першого випадку руху границь (опис кожного з розглянутих випадків наведено нижче). Відношення висоти до діаметру рівне $h = 2$. Швидкість кришки $U_{кр} = 1$. Розрахунки проводилися для різної кількості перших членів ряду n. Будувалися як двовимірні (Рис. 3a-c) так і тривимірні графіки (Рис. 3d). На графіках чітко видно коливання компонент швидкості біля границі. Такі коливання спостерігаються по кожному з розрізів. При збільшені членів ряду зростає кількість коливань, проте зменшується амплітуда, а значить зростає точність. Навіть при 25 членах ряду похибка не перевищує десятих частин відсотка. При 100 членах, вона вже не перевищує соті відсотка. Аналогічна поведінка швидкості на границі спостерігалась і у інших випадках.

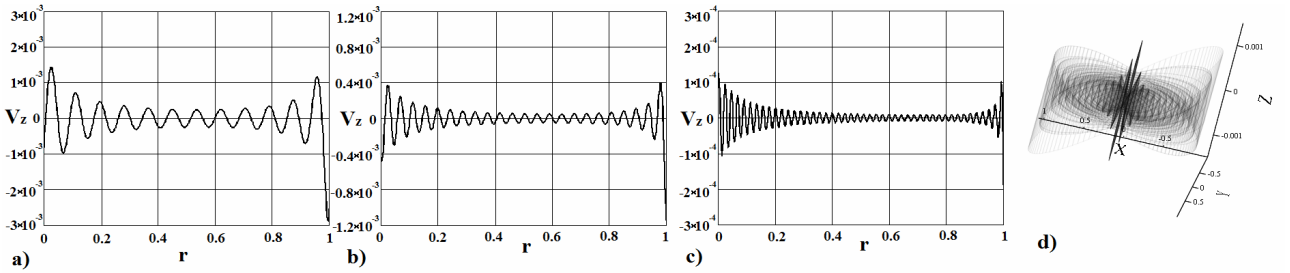


Рис. 3. Компонента швидкості U_z на нижній кришці циліндра, при різній кількості членів ряду a) n=25, b) n=50, c) n=100, d) n =28.

Результати розрахунків

В статті розглянуті три випадки руху верхньої і нижньої поверхонь циліндра. Для зручності швидкості задавалися в декартовій систем координат $Oxyz$. В першому випадку (Рис. 1b) верхня і нижня кришки циліндра рухаються вздовж осі Ox з однаковими за величиною але протилежними за напрямком швидостями $(U_{кр},0,0)$ та $(-U_{кр},0,0)$. В другому випадку (Рис. 1c) верхня і нижня границі циліндра рухаються з однаковою швидкістю $(U_{кр},0,0)$ в напрямку збільшення координати x. В третьому (Рис. 1d) випадку рухається лише верхня границя циліндра с постійною швидкістю $(-U_{кр},0,0)$ в напрямку зростання x, а нижня границя залишається нерухомою. Оскільки поле швидкості, що викликає течію рідини в скінченому циліндрі є стаціонарним, то воно цілком визначається траєкторіями частинок рідини. Завдяки тому, що в площині симетрії $y = 0$ компонента швидкості $V_\theta = 0$, то точки рідини, що в початковий момент часу знаходилися в цій площині, не залишать її і в наступні моменти часу. Через це спочатку розглянемо, що відбувається з рідиною саме в цій площині. Поле течії в площині симетрії $y = 0$ для першого, другого та третього випадку зображені на Рис. 4, 5 та 6 відповідно.

Чисельний аналіз швидкостей показує, що на відстані $l \geq 3r$ від рухомої кришки циліндра швидкість точок рідини має порядок $\leq O\left(10^{-3} \cdot U_{кр}\right)$ і він швидко зменшується при збільшенні відстані до кришки циліндра. Тобто рух кришки циліндра має суттєвий вплив на рух рідини лише на глибину $\approx 3r$. Цей факт знайшов

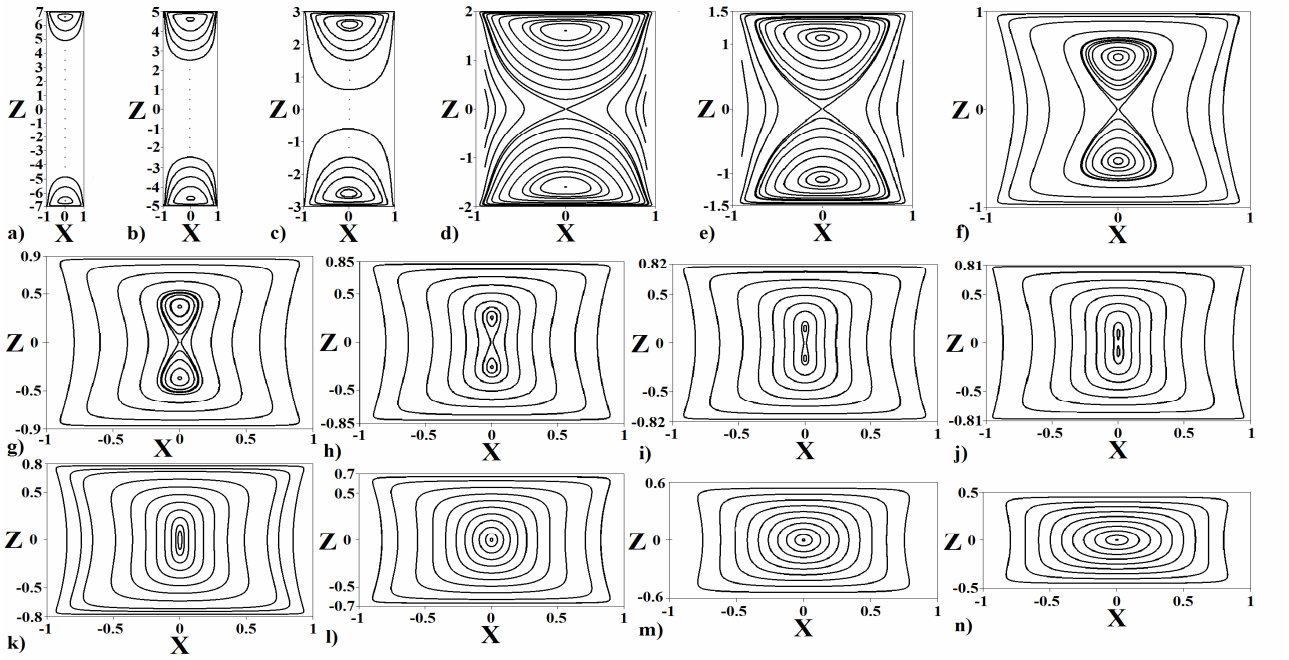


Рис. 4. Лінії току в площині симетрії $y = 0$. Випадок 1. a) h=7, b) h=5, c) h=3, d) h=2, e) h=1.5, f) h=1, g) h=0.9, h) h=0.85, i) h=0.82, j) h=0.81, k) h=0.8, l) h=0.7, m) h=0.6, n) h=0.5.

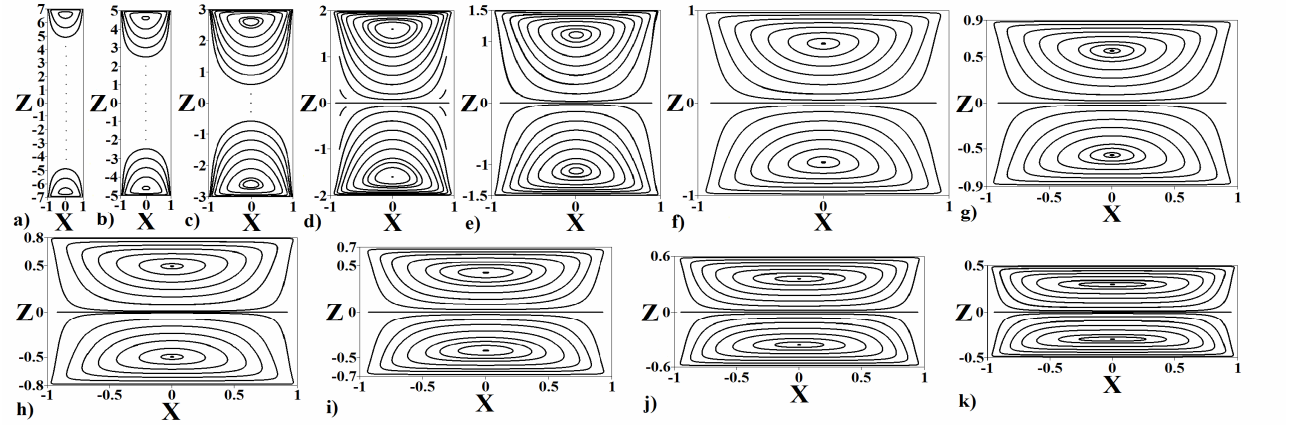


Рис. 5. Лінії току в площині симетрії $y = 0$. Випадок 2. a) h=7, b) h=5, c) h=3, d) h=2, e) h=1.5, f) h=1, g) h=0.9, h) h=0.8, i) h=0.7, j) h=0.6, k) h=0.5.

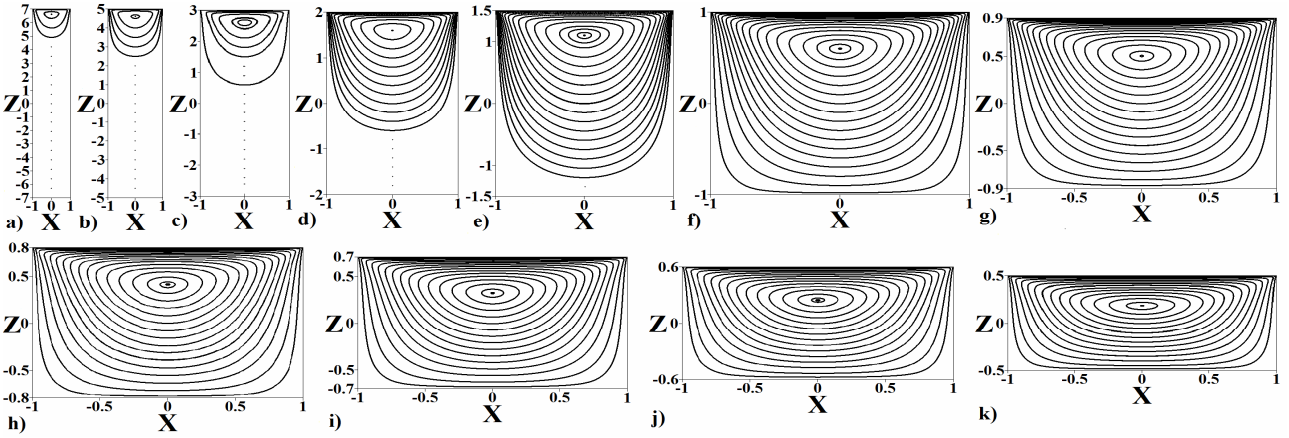


Рис. 6. Лінії току в площині симетрії $y = 0$. Випадок 3. a) h=7, b) h=5, c) h=3, d) h=2, e) h=1.5, f) h=1, g) h=0.9, h) h=0.8, i) h=0.7, j) h=0.6, k) h=0.5.

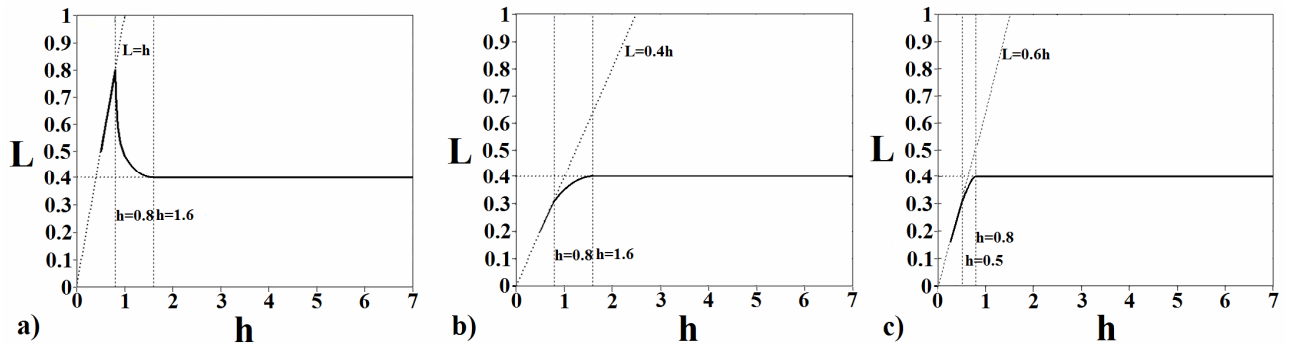


Рис. 7. Відстань особливої точки типу «центр» до кришки, рух якої створює цю особливу точку. a) Випадок 1, b) Випадок 2, c) Випадок 3.

відображення на картині ліній течії у всіх трьох випадках руху для висот циліндра $h \geq 3$.

У всіх трьох випадках в залежності від висоти циліндра можна виділити три характерні режими руху рідини. Ці режими добре видно якщо поглянути на залежність відстані особливої точки типу «центр» навколо якої обертається рідина від кришки циліндра завдяки руху якої утворилася ця точка (Рис. 7).

Для першого, другого та третього випадку ці режими встановлюються відповідно: Перший режим - $h \in (0,0.8)$, $h \in (0,0.8)$, $h \in (0,0.5)$. Другий режим - $h \in (0.8,1.6)$, $h \in (0.8,1.6)$, $h \in (0.5,0.8)$. Третій режим - $h \in (1.6,\infty)$, $h \in (1.6,\infty)$, $h \in (0.8,\infty)$.

Перший режим характерний для малих висот циліндра і відрізняється для кожного розглянутого випадку.

Для першого випадку в середній площині утворюється одна особлива точка типу «центр», що розташована по центру і вся рідина обертається навколо цієї точки. Зміна висоти циліндра лише «зплющує» або «розправляє» ці лінії.

Для другого випадку картина буде іншою. Тут утворюються дві однакові, замкнені області, кожна зі своєю особливою точкою. Якщо рідина в початковий момент знаходиться всередині однієї з областей, то вона буде залишатися всередині цієї області впродовж всього руху. Особлива точка типу «центр» завжди знаходиться на відстані $0.4h$ від кришки циліндра. Вся рідина всередині кожної з областей обертається навколо особливої точки.

В третьому випадку існує лише одна особлива «центральна» точка, кора знаходиться на відстані $0.6h$ від рухомої границі циліндра. Тут так само вся рідина обертається навколо особливої точки і зміна висоти циліндра впливає лише на «сплюснутість» траєкторій точок.

Третій режим руху, що відбувається при великих висотах циліндра, подібний у всіх трьох розглянутих випадках. В цьому режимі рухомі кришки збуджують деякий об'єм рідини на «глибину» до $3r$. Цей об'єм рухається навколо особливої «центральної» точки, що знаходиться на постійній відстані $0.4r$ від кришки. Вся інша рідина, що не потрапляє в збурену область рухається дуже повільно. Зміна висоти циліндра в цьому режимі ніяк не відображається на характері руху рідини, впливаючи лише на об'єм незбуреної рідин.

Другий режим руху в кожному з розглянутих випадків є перехідним від першого до третього.

При цьому в першому випадку особлива центральна точка розділяється на 3 особливі точки дві типу «центр» і одну типу «сідло». При цьому площина симетрії розділяється на 3 області, в кожній з яких рідина не змішується з рідиною з інших областей. В другому і третьому випадках характер руху рідини якісно не змінюється, лише особлива еліптична точка при збільшені висоти починає зміщуватися до рухомої кришки, доки не займе положення на відстані $0.4r$.

Щоб зрозуміти рух рідини за межами площини симетрії $y = 0$ наведемо траєкторії ліній течії для третього випадку руху (Рис. 8).

На рисунку зображені лінії течії, що проходять в площинах $y = -0.75$, $y = -0.25$, $y = 0.5$ та $y = 0.99$. Видно, що траєкторії частинок рідини, що лежать в площинах паралельних площині

$y = 0$ подібні до траєкторій в площині симетрії. Проте вони вже не є плоскими, а мають невелике викривлення по координаті y зумовлене циліндричністю резервуара. Всі траєкторії залежать від висоти циліндра таким же чином як і траєкторії в площині $y = 0$. Для них також будуть справедливі 3 режими руху, але дещо будуть відрізнятися висоти циліндра при яких відбуватиметься перехід від одного режиму до іншого і відстані особливої «центральної» точки до кришки циліндра. В усіх інших випадках руху кришок циліндру і для всіх висот циліндра картина буде аналогічною.

Таким чином, для всіх розглянутих випадків руху границь циліндра рух рідини всередині буде подібний до двовимірного. Рідина не перемішується між площинами паралельними площині симетрії $y = 0$. Перпендикулярно площині симетрії утворюються особливі лінії. Вони лежать в площині $x = 0$ і близькі до прямих, проте мають невелике викривлення вздовж z. Особливі центральні лінії виникають завжди. Особлива сідлова лінія виникає лише в першому випадку для висот циліндра $h \geq 0.8r$.

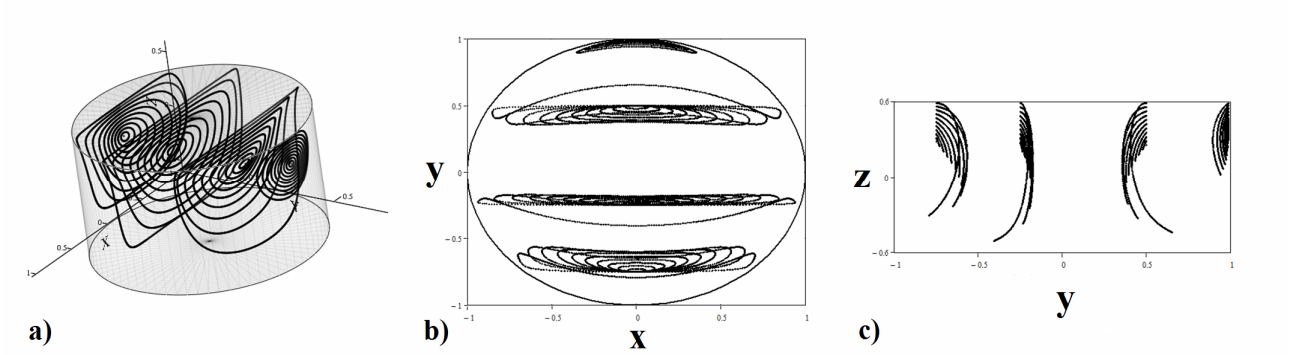


Рис. 8. Лінії течії всередині циліндру для третього випадку. h=0.6. a) тривимірне зображення ліній течії. b) проекція ліній течії на площину Oxy. c) проекція ліній течії на площину Ozy.

Список використаних джерел

1. Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics / G.K. Batchelor – Cambridge: Cambridge university press, 1967 – 1070.
2. Gomilko A.M. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner / A.M. Gomilko, V.S. Malyuga, V.V. Melehko // J. Fluid Mech. – 2003 – 476 – pp. 159-177.
3. Moffatt H.K. Viscou and resistive eddies near a sharp corner / H.K. Moffatt // J. Fluid Mech. – 1963 – 18 – pp. 1-18.
4. Meleshko V.V. Steady Stokes flow in a finite cylinder / V.V. Meleshko, V.S. Malyuga, A.M. Gomilko // Proc. R. Soc. Lond. A – 2000 – 456 – pp. 1741-1758.
5. Meleshko V.V. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle / V.V. Meleshko, A.M. Gomilko // Proc. R. Soc. Lond. A – 1997 – 453 – pp. 2139-2160
6. Meleshko V.V. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion / V.V. Meleshko, A.M. Gomilko // Proc. R. Soc. Lond. A – 1997 – 460 – pp. 807-819
7. Golichenko O.L. Asymptotic behavior of the coefficients of solution of the stationary Stokes flow problem in a finite cylinder / O.L. Golichenko, V.S. Malyuga, V.V. Meleshko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. Kyiv – 2012 – 1 – pp. 61-64. (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 22.03.13

УДК 517.954

М. І. Конаровська[1], аспірант

Загальна параболічна крайова задача без початкових даних для сингулярних рівнянь

Установлено коректність загальної крайової задачі без початкових даних для сингулярних параболічних рівнянь.

Ключові слова: крайова задача без початкових даних, оператори дробового інтегрування та диференціювання, функції типу ядер Пуассона.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2,
e-mail: mmi_marina@mail.ru

M. I. Konarovska[1], post-graduate student

General parabolic boundary problem without initial date for singular equations

Correctness of general boundary problem without initial date for singular parabolic equations is obtained.

Key words: boundary problem without initial date, operators of fractional integration and differentiation, the functions of Poisson type.

[1] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 58012, Chernivtsi, Kotsubinsky str., 2,
e-mail: mmi_marina@mail.ru

Статтю представив докт. фіз.-мат. н., проф., акад. НАНУ Перестюк М.О.

У даній статті розглядається загальна крайова задача без початкових даних для сингулярних параболічних систем. Для цієї задачі одержано зображення розв'язку та встановлено умови існування. При побудові розв'язку вивчається дія оператора дробового диференціювання, встановлюється зв'язок між операторами дробового інтегрування та диференціювання, вводяться класи функцій, на яких визначені дані оператори. Слід зауважити, що для рівняння теплопровідності такі задачі розглянуті у праці А.М. Тихонова [5], для параболічних систем − у праці С.Д. Ейдельмана [2], для нелінійних параболічних рівнянь − у праці В.П. Лавренчука, М.І. Матійчука [6]. При побудові розв'язку використовується алгоритм, описаний у праці [1].

Постановка задачі, означення та допоміжні твердження

У шарі $\Pi^+_{-\infty} \equiv (-\infty;T)\times E^+_n$, $E^+_n = (0,+\infty)\times \times E_{n-2}\times(0,+\infty)$ розглядається задача про знаходження розв'язку $u(t,x)$ системи B-параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t,x) D^{\tilde{k}}_{\tilde{x}} B^j_{x_n} u = F(t,x), \qquad (1)$$

який задовольняє умови

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{|k|+2j\le r_i} b^i_{kj}(t,x') D^{\tilde{k}}_{\tilde{x}} B^j_{x_n} u(t,x)\Big|_{x_1=0} = g_i(t,x'), \qquad (3)$$

де $x=(x_1,x')$, $x'=(x_2,\dots,x_n)$, $\tilde{x}=x_1,\dots,x_{n-1}$, $B_{x_n} = \partial^2/\partial x_n^2 + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\partial/\partial x_n$, $\nu \ge -1/2$, − оператор Бесселя, $|\tilde{k}| = \sum_{l=1}^{n-1} k_l$, $i=\overline{1,bN}$.

Означення 1. Система (1) називається B-параболічною, якщо характеристичне рівняння

$$\det\left\{\sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(t,x)(i\tilde{\sigma}_1)^{\tilde{k}}(-\sigma_n^2)^j - \lambda E\right\} = 0$$

має всі корені $\lambda = \lambda(t,x,\sigma)$, в яких $Re\lambda \le -\delta|\sigma|^{2b}$, $\delta>0$, $x,\sigma\in E^+_n$, $t\in(-\infty;T)$.

Означення 2. Простором $\tilde{C}^{(m,s)}_p(\Pi^+_{-\infty})$ називатимемо клас функції $\varphi(t,x)$, які неперервні за сукупністю змінних, мають в шарі $\Pi^+_{-\infty}$ похідні за t до порядку m і s похідних за x, які спадають степеневим чином при $t\to-\infty$ та задовольняють нерівності

$$|D^r_t D^k_x B^j_{x_n}\varphi(t,x)| \le C_{rkj}(1+|t|)^{-p}, |k|+2j\le s, r\le m,$$

сталі $C_{rkj}, p>0$ не залежать від t та x.

Через $\tilde{C}^{(m,s+\alpha)}_p(\Pi^+_{-\infty})$, $0<\alpha<1$, позначатимемо клас функцій із $\tilde{C}^{(m,s)}_p(\Pi^+_{-\infty})$, у яких похідні порядку s гельдерові за x з показником α та задовольняють нерівність

$$|\Delta_x D^k_x B^j_{x_n}\varphi(t,x)| \le C_{kj}|\Delta_x|^\alpha (1+|t|)^{-p},$$

© М.І. Конаровська, 2013

$|k|+2j=s$. Якщо $m=0$ і $s=0$, то в позначені класів верхні індекси опускатимемо і позначатимемо $\tilde{C}_p(\Pi^+_{-\infty})$, $\tilde{C}^{(\alpha)}_p(\Pi^+_{-\infty})$. Якщо $p=0$, то класи $\tilde{C}^{(m,s)}_0(\Pi^+_{-\infty})$ і $\tilde{C}^{(m,s+\alpha)}_0(\Pi^+_{-\infty})$ збігаються відповідно з класами $C^{(m,s)}_{t,x'}(\Pi^+_{-\infty})$ і $C^{(m,s+\alpha)}_{t,x'}(\Pi^+_{-\infty})$, причому норми в цим класах еквівалентні.

Нехай $\Pi'^+_{-\infty}\equiv(-\infty;T)\times E^+_{n-1}$, $E^+_{n-1}=E_{n-2}\times(0,\infty)$.

Означення 3. Через $\mathrm{A}^{(m)}_{\eta}(\Pi'^+_{-\infty})$, позначатимемо клас функцій $f(t,x')$, які визначені в області $\Pi'^+_{-\infty}$, мають похідні $D^k_{x'}B^j_{x_n}f$ до порядку $|k|+2j\le[m]$, які експоненціально спадають при $t\to-\infty$ і для яких справджуються оцінки

1) при $|k|+2j\le[m]$ $|D^k_{x'}B^j_{x_n}f|\le C_{kj}e^{\eta t}$, $\eta>0$;

2) при $|k|+2j=[m]$ $|\Delta_{x'}D^k_{x'}B^j_{x_n}f|\le C|\Delta x'|^{\{m\}}e^{\eta t}$;

3) при $|k|+2j\le[m]$ $|\Delta_t D^k_{x'}B^j_{x_n}f|\le C|\Delta t|^{\frac{m-(|k|+2j)}{2b}}e^{\eta t}$.

Означення 4 [1,с.72]. Через $C^{(m)}_{\mu}(\Pi'^+_{-\infty},\Pi'^+_{-\infty})$ позначатимемо клас функцій $f(t,x';M_0)$, які визначені в області $\Pi'^+_{-\infty}\times\Pi'^+_{-\infty}$, при $t>\tau$ мають похідні $D^k_{x'}B^j_{x_n}f$ до порядку $|k|+2j\le[m]$, для яких справджуються оцінки

1) при $|k|+2j\le[m]$ $|D^k_{x'}B^j_{x_n}f(t,x';M_0)|\le$

$$\le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{\mu+|k|+2j}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\},\ \mu>0;$$

2) при $|k|+2j=[m]$ $|\Delta_{x'}D^k_{x'}B^j_{x_n}f(t,x';M_0)|\le$

$$\le C|\Delta x'|^{\{m\}}(t-\tau)^{-\frac{m+\mu}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\};$$

3) при $|k|+2j\le[m]$ $|\Delta_t D^k_{x'}B^j_{x_n}f(t,x';M_0)|\le$

$$\le C|\Delta t|^{\frac{m-(|k|+2j)}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{m+\mu}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\},$$

де $T^{\xi_n}_{x_n}$ – оператор узагальненого зсуву, $\rho(t,\tau,x,\xi)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\xi_i|^q(t-\tau)^{-1/(2b-1)}$, $q=\frac{2b}{2b-1}$, $M_0=(\tau,\xi')\in\Pi'^+_{-\infty}$.

Далі введемо оператори дробового інтегрування та диференціювання

$$J^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1-\alpha}}\times$$

$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\beta,x',y')f(\beta,y';M_0)y_n^{\nu_0}dy', \qquad (4)$$

$$D^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0)=\Lambda(D)J^{(1-\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0). \qquad (5)$$

$0<\alpha<1$, $\nu_0=2\nu+1$, $G_0(t-\beta,x',y')$ – фундаментальний розв'язок рівняння

$$\Lambda(D)u\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+(-1)^b(\Delta_{x''}+B_{x_n})^b\right)u=0.$$

Інтегруючи частинами по змінній β рівність (5), оператор $D^{(\alpha)}_{x'}$ можна зобразити у вигляді

$$D^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times$$

$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\beta,x',y')(f(\beta,y';M_0)-$$

$$-f(t,x';M_0))y_n^{\nu_0}dy'. \qquad (6)$$

Оператор $J^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x')$ визначений на гельдерових функціях, які спадають при $t\to-\infty$, тобто $f\in\tilde{C}^{(\gamma)}_{\varepsilon}(\Pi'^+_{-\infty})$, де $\varepsilon>\alpha$, γ – показник Гельдера.

Твердження. *Якщо* $f\in\tilde{C}^{(\gamma)}_{\varepsilon}(\Pi'^+_{-\infty})$, *то*

$$D^{(\alpha)}_{x'}J^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x')=f(t,x').$$

Доведення. Розпишемо дію операторів $J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))$ та скористаємось формулою згортки [1, с.71]. Будемо мати

$$J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\alpha}}\times$$

$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\beta,x',y')\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\beta}\frac{d\beta}{(\beta-\tau)^{1-\alpha}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(\beta-\tau,y',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'\right)y_n^{\nu_0}dy'=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\alpha}(\beta-\tau)^{1-\alpha}}\times$$

$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\tau,x',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'=$$

$$=\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\tau,x',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'.$$

Застосовуючи оператор $\Lambda(D)$ до $J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))$ та використовуючи те, що $D^{(\alpha)}_{x'}(f)=\Lambda(D)J^{(1-\alpha)}_{x'}(f)$, будемо мати

$$\Lambda(D)J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))=$$

$$=\Lambda(D)\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\tau,x',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi',$$

$D^{(\alpha)}_{x'}J^{(\alpha)}_{x'}(f)=f$, що й вимагалося довести.

Надалі використовуватимемо позначення
$\mathrm{A}_{\eta}^{\left(\frac{s+\alpha}{2b},s+\alpha\right)}(\Pi'^{+}_{-\infty}) \equiv C_{t,x'}^{\left(\frac{s+\alpha}{2b},s+\alpha\right)}(\Pi'^{+}_{-\infty}) \cap \mathrm{A}_{\eta}^{(s)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$.

Теорема *(про дію оператора дробового диференціювання). Якщо функція* $f \in \mathrm{A}_{\eta}^{(m)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$, $\eta > 0$, *то* $D_{x'}^{(\alpha)}(f) \in \mathrm{A}_{\eta}^{(m-2b\alpha)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$.

Доведення. Продиференціюємо $D_{x'}^{(\alpha_m)} f$ з (6) та розіб'ємо інтеграл

$$D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left(D_{x'}^{(\alpha)}f(t,x')\right)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_{-\infty}^{t-1}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times\right.$$
$$\times\int_{E_{n-1}^{+}} D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left[G_0(t-\beta,x',y')\times\right.$$
$$\left.\times(f(\beta,y')-f(t,x'))\right]y_n^{\nu_0}dy'+$$
$$+\int_{t-1}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\int_{E_{n-1}^{+}}(...)dy'\equiv I_1+I_2.$$

Оцінимо кожен доданок. В інтегралі I_1 скористаємось властивістю 6.2 G_0 з [1, с.71]. Тоді I_1 перепишеться у вигляді

$$I_1=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_{-\infty}^{t-1}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}\frac{D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times\right.$$
$$\left.\times f(\beta,y')y_n^{\nu_0}dy'-C_{\alpha}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}f(t,x')\right)\equiv I_1^{(1)}-I_1^{(2)}.$$

В I_1 різницю оцінимо за модулем і врахуємо оцінки G_0 та умову 1) означення 3. Тоді

$$|I_1^{(1)}|\le\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{t-1}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}C(t-\beta)^{-\frac{n_\nu-1+2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}\times$$
$$\times T_{x_n}^{y_n}\left\{e^{-c\rho(t,\beta,x',y'')}\right\}e^{\eta\beta}y_n^{\nu_0}dy'\le$$
$$\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\beta)^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}e^{\eta\beta}d\beta.$$

Проводячи заміну змінної $t-\beta=h$, $1\le h<\infty$, дістанемо

$$|I_1^{(1)}|\le Ce^{\eta t}\int_{1}^{\infty}h^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}e^{-\eta h}dh\le Ce^{\eta t}.$$

Аналогічна оцінка виконується і для $I_1^{(2)}$. Для оцінки I_2 розпишемо різницю

$$f(\beta,y')-f(t,x')=f(\beta,y')-f(t,y')+$$
$$+f(t,y')-f(t,x').$$

Тоді I_2 перепишеться у вигляді

$$I_2=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t-1}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}\frac{D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times$$
$$\times(f(\beta,y')-f(t,y'))y_n^{\nu_0}dy'+$$
$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t-1}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\int_{E_{n-1}^{+}}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left[G_0(t-\beta,x',y')\times\right.$$
$$\left.\times(f(t,y')-f(t,x'))\right]y_n^{\nu_0}dy'\equiv I_2^{(1)}+I_2^{(2)}.$$

Оцінимо $I_2^{(1)}$, користуючись умовою Гельдера функції $f(t,x')$ по першому аргументу

$$|I_2^{(1)}|\le C\int_{t-1}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}C(t-\beta)^{-\frac{n_\nu-1+2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}\times$$
$$\times T_{x_n}^{y_n}\left\{e^{-c\rho(t,\beta,x',y'')}\right\}(t-\beta)^{\frac{m}{2b}}e^{\eta\beta}y_n^{\nu_0}dy'\le$$
$$\le C\int_{t-1}^{t}(t-\beta)^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j-m}{2b}}e^{\eta\beta}d\beta.$$

Виконуючи заміну змінної $t-\beta=h$, $0\le h\le 1$, і враховуючи нерівність $e^{-\eta h}\le 1$, матимемо

$$|I_2^{(1)}|\le Ce^{\eta t}\int_{0}^{1}h^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j-m}{2b}}e^{-\eta h}dh\le$$
$$\le Ce^{\eta t}\left.h^{-\frac{2b\alpha+|k|+2j-m}{2b}}\right|_{0}^{1}\le Ce^{\eta t},\ |k|+2j\le[m-2b\alpha].$$

При оцінці інтеграла $I_2^{(2)}$ скористаємось формулою Тейлора-Дельзарта [4]

$$f(t,y')-f(t,x')=$$
$$=\sum_{|r|+2p=1}^{[m]-1}C_{rp}D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,x')(y'-x')^{r}y_n^{2p}+o(|x'-y'|^{[m]-1}).$$

Тоді $|I_2^{(2)}|\le C\int_{t-1}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}\frac{D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times$

$$\times\sum_{|r|+2p=[m]}C_{rp}|D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,\tilde{x}')-D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,x')|\times$$
$$\times|y'-x'|^{r}y_n^{2p}y_n^{\nu_0}dy',\ \tilde{x}'=x'+\theta(x'-y').$$

Далі використаємо умову Гельдера $D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,x')$ з показником $\{m\}$

$$|I_2^{(2)}|\le C\int_{t-1}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}C(t-\beta)^{-\frac{n_\nu-1+2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}\times$$
$$\times T_{x_n}^{y_n}\left\{e^{-c\rho(t,\beta,x',y'')}\right\}|y-x'|^{[m]+\{m\}}e^{\eta\beta}y_n^{\nu_0}dy'\le$$
$$\le C\int_{t-1}^{t}(t-\beta)^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j-m}{2b}}e^{\eta\beta}d\beta\le Ce^{\eta t}.$$

З оцінок інтегралів I_1 та I_2 випливає твердження теореми.

Побудова розв'язку загальної крайової задачі без початкових даних

Розв'язок задачі (1) – (3) відшукуємо у вигляді $u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x)$, де $u_1(t,x)$ – розв'язок задачі $L(t,x,D)u=F(t,x)$, $\partial u(t,x)/\partial x_n\,|_{x_n=0}=0$, $L(t,x,D)$ – оператор системи (1), а $u_2(t,x)$ – розв'язок крайової задачі $L(t,x,D)u=0$, $\partial u/\partial x_n\,|_{x_n=0}=0$, $\overline{B}_i(t,x',D)u(t,x)\big|_{x_1=0}=g_l(t,x')-$ $-B_i(t,x',D)u_1(t,x)\big|_{x_1=0}\equiv\overline{g}_l(t,x')$, B_i – крайовий оператор з (3), $i=\overline{1,bN}$.

Розв'язок $u_1(t,x)$ зображається у вигляді згортки фундаментальної матриці розв'язків $Z(t,\tau,x,\xi)$ системи (1) та неоднорідності $F(t,x)$. Якщо для $Z(t,\tau,x,\xi)$ справджується умова Λ_1 [2], то u_1 існує при $F\in\tilde{C}^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}(\Pi^+_{-\infty})$. Для знаходження $u_2(t,x)$ скористаємось алгоритмом, описаним в роботі [1, с.82-94]. Розглянемо відповідну модельну задачу

$$\tilde{L}(\tau,\xi,D)u_2(t,x)=0, \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=0,\ \overline{B}_i^{(0)}u_2(t,x)\,|_{x_1=0}=\overline{g}_1(t,x'), \qquad (8)$$

де $\tilde{L}(\tau,\xi,D)$ – оператор системи (1), $\overline{B}_i^{(0)}(\tau,\xi',D)$ – крайовий оператор. Оператори $\tilde{L}$ і $\overline{B}_i^{(0)}$ містять лише групу старших, коефіцієнти "заморожені" в точці (τ,ξ).

Далі розглянемо функції типу ядер Пуассона

$$T^{\xi_n}_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x_1,x''-\xi'',x_n;\tau,\xi')\equiv$$

$$\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')=J^{(\alpha_m)}_{x'}\mathsf{G}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')$$

де $J^{(\alpha_m)}_{x'}$ – оператор дробового інтегрування, що відповідає оператору $\Lambda(D)$, $\lambda_m\in(0;1)$, $m=\overline{1,bN}$. Функції типу ядер Пуассона $\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m$ задовольняють нерівність [1, с.85]

$$|D^k_x B^j_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')|\le$$

$$\le C_{kjm}(t-\tau)^{-\frac{n_V-1+2b-r_m-2b\alpha_m+|k|+2j}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\} \qquad (9)$$

Візьмемо $\alpha_m=(2b-r_m-\varepsilon)/2b$ і розглянемо об'ємний потенціал

$$W_m(t,\tau,x,\xi')=\int_\tau^t d\beta\int_{E^+_n}Z(t,\beta,x,y)\times$$

$$\times L(\beta,y,D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(\beta-\tau,y-\xi'';\tau,\xi')y_n^{\nu_0}dy, \qquad (10)$$

де Z – фундаментальна матриця розв'язків, яку можна побудувати, якщо продовжити коефіцієнти системи в півпростір $x_1<0$, наприклад, парним чином зі збереженням гладкості. Оскільки $\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m$ – функції типу ядер Пуассона задачі (7) – (8), то

$$L(t,x,D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m=\sum_{|k|+2j=2b}[A_{kj}(\tau,\xi)-A_{kj}(t,x)]\times$$

$$\times D^k_{\tilde{x}}B^j_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m-\sum_{|k|+2j<2b}A_{kj}(t,x)D^k_{\tilde{x}}B^j_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m.$$

Використовуючи умову Гельдера коефіцієнтів A_{kj}, $|k|+2j=2b$, та оцінки похідних функцій типу ядер Пуассона (9), дістанемо оцінку щільності об'ємного потенціала (10)

$$|L(t,D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi)|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\frac{n_V-1+2b-\alpha+\varepsilon}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\}, \qquad (11)$$

$0<\varepsilon<\alpha$. На основі леми 3.1 [1, с.36] визначається порядок особливості W_m, який на α менший від порядку особливості $\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m$. В результаті застосування оператора $L(t,x,D)$ до $W_m(t,\tau,x,\xi')$ одержимо щільність $L(t,D_x)G^{(\alpha_m)}_m$.

Розв'язок крайової задачі відшукуємо у вигляді поверхневого потенціалу

$$u_2(t,x)=\sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^t d\tau\int_{E^+_{n-1}}\mathrm{E}^{(\alpha_m)}_m(t,\tau,x,\xi')\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi',$$

де $\mathrm{E}^{(\alpha_m)}_m=\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m-W_m$, $\mu_m(t,x')$ – шукані функції, які спадні при $t\to-\infty$. Для визначення функцій $\mu_m(t,x')$ задовольнимо крайові умови $\overline{B}_iu_2(t,x)\,|_{x_1=0}=\overline{g}_i(t,x)$. В результаті дістанемо систему інтегральних рівнянь Вольтера-Фредгольма першого роду

$$J^{(\alpha_l)}_{x'}\mu_l(t,x')+\sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^t d\tau\int_{E^+_{n-1}}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')\times$$

$$\times\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'=\overline{g}_l(t,x'), \qquad (12)$$

$$E_{lm}(t,\tau,x',\xi')=$$

$$=\overline{B}^{(0)}_i(t,x',D)\Big[\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')-$$

$$-\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';t,x')\Big]+$$

$$+\overline{B}^{(1)}_i(t,x',D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')-W_m(t,\tau,x,\xi').$$

де $\overline{B}^{(1)}_i(t,x',D)$ – крайовий оператор, який містить групу молодших. Зауважимо, що перший доданок в (12) має сенс при $\mu_l\in\tilde{C}_{\frac{2b-\eta-\varepsilon}{2b}+\varepsilon_1}(\Pi'^+_{-\infty})$.

Далі застосуємо до (12) оператор дробового диференціювання, враховуючи сформульоване вище твердження. В результаті будемо мати

$$\mu_l(t,x') = D_{x'}^{(\alpha_l)}\overline{g}_l(t,x') -$$

$$-\sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^{+}} D_{x'}^{(\alpha_l)}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'. \quad (13)$$

Якщо $b_{kj}^{(i)} \in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$, то на основі оцінок функцій типу ядер Пуассона $\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}$ маємо, що $E_{lm} \in C^{(2b-\eta+\alpha)}_{n_\nu-1+\eta+\varepsilon-\alpha}(\Pi'^{+}_{-\infty},\Pi'^{+}_{-\infty})$. Покажемо, що при дії оператора $D_{x'}^{(\alpha_m)}$ гладкість зменшується на $2b\alpha_m$, а особливість збільшується на $2b\alpha_m$, тобто

$$D_{x'}^{(\alpha_m)}E_{lm} \in C^{(\alpha+\varepsilon)}_{n_\nu-1-\alpha+2b}(\Pi'^{+}_{-\infty},\Pi'^{+}_{-\infty}).$$

Враховуючи зображення $D_{x'}^{(\alpha_m)}$ з (6), продиференціюємо $D_{x'}^{(\alpha_m)}E_{lm}$ та розіб'ємо на інтеграли

$$D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left(D_{x'}^{(\alpha_m)}E_{lm}\right) = \frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_m}}\times$$

$$\times\int_{E_{n-1}^{+}} D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left[G_0(t-\beta,x',y')\times\right.$$

$$\left.\times(E_{lm}(\beta,\tau,y',\xi')-E_{lm}(t,\tau,x',\xi'))\right]y_n^{\nu_0}dy' +$$

$$+\frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_m}}\int_{E_{n-1}^{+}}(\ldots)dy' \equiv H_1 + H_2.$$

Перепишемо H_1, користуючись властивістю 6.2 $G_0(t,x',y')$ з [1, с.71]

$$H_1 = \frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_m}}\times$$

$$\times\int_{E_{n-1}^{+}} D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')E_{lm}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{\nu_0}dy' -$$

$$-\frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}C_{\alpha_m}(t-\tau)^{-\alpha_m}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}E_{lm}(t,\tau,x',\xi').$$

Оскільки функції типу ядер Пуассона $\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau,x-\xi'') \equiv 0$ при $t<\tau$, то із зображення E_{lm} легко бачити, що $E_{lm}(t,\tau,x',\xi') \equiv 0$ при $t<\tau$, тому перший доданок з H_1 дорівнює нулеві. Оцінимо другий доданок з H_1, враховуючи оцінку 1) означення 4. В результаті дістанемо

$$|H_1| \le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{2b\alpha_m+\mu+|k|+2j}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\}.$$

Аналогічні оцінки одержуються для H_2. Для цього слід провести такі ж міркування, як і при доведенні теореми 6.2 з [1, с.73] про дію оператора дробового диференціювання.

Тоді інтеграл з (13) існуватиме при $\mu_m \in \tilde{C}_{\frac{\alpha}{2b}+\varepsilon_1}(\Pi'^{+}_{-\infty})$, $\varepsilon_1 > 0$.

Позначимо $K_{lm}(t,\tau,x',\xi') \equiv -D_{x'}^{(\alpha_l)}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')$. Розв'язок (13) шукаємо методом послідовних наближень. Для ядра K_{lm} правильна оцінка

$$|K_{lm}(t,\tau,x',\xi')| \le C(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho}\right\}.$$

Наступні ядра визначаються у вигляді

$$K_{lm}^{(p)}(t,\tau,x',\xi') = \int_{\tau}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}\sum_{s=1}^{bN}K_{ls}(t,\beta,x',y')\times$$

$$\times K_{sm}^{(p-1)}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{\nu_0}dy',$$

$l,s,m = \overline{1,bN}$, $p \in \mathbb{N}$, $K_{lm}^{(1)} \equiv K_{lm}^{(p)}$.

Ядра $K_{lm}^{(p)}(t,\tau,x',\xi')$ до індексу $p = \left[(n_\nu-1+2b)/\alpha\right]$ задовольняють оцінку

$$|K_{lm}^{(p)}(t,\tau,x',\xi')| \le C^{p+1}C(\varepsilon)^{p-1}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-p\alpha}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-(c-(p-1)\varepsilon)\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\},$$

а всі наступні ядра $K_{lm}^{(p)}$ задовольняють оцінку

$$|K_{lm}^{(p_0+s)}(t,\tau,x',\xi')| \le C^s A_{p0}^s(t-\tau)^{\frac{s\alpha+\gamma}{2b}}\times$$

$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p0}\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\}B\left(\frac{\alpha}{2b};\frac{\gamma}{2b}+1\right)\times$$

$$\times B\left(\frac{\alpha}{2b};\frac{\alpha+\gamma}{2b}+1\right)\ldots B\left(\frac{\alpha}{2b};\frac{s\alpha+\gamma}{2b}+1\right), \quad (14)$$

де $p_0 = p+1$, $A_{p0} = C^{p0+1}C(\varepsilon)^{p0-1}$, $\gamma > 0$, $c_{p0} = c-(p_0-1)\varepsilon$.

Розв'язок системи інтегральних рівнянь (13) визначається за допомогою резольвенти

$$R_{lm}(t,\tau,x',\xi') = K_{lm}(t,\tau,x',\xi') +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{bN}\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}K_{ls}(t,\beta,x',y')K_{sm}^{(j)}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{\nu_0}dy'.$$

Для того, щоб отримати оцінку резольвенти, позначимо праву частину з (14) через S та використаємо зв'язок між бетта- та гамма-функціями. В результаті отримаємо ряд

$$S = T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p0}\rho}\right\}\sum_{s=0}^{\infty}A^s(t-\tau)^{\frac{s\alpha}{2b}}\frac{\Gamma^s(\alpha/2b)}{\Gamma(s\alpha/2b+1)},$$

$A = CA_{p0}$. Для встановлення асимптотики отриманого ряду використаємо з [3, с.323] поведінку функції Міттаг-Лефлера

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \sim \frac{1}{\alpha}e^{z^{1/\alpha}}.$$

Тоді $S \le T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho}\right\} e^{\left(A(t-\tau)^{\alpha/2b}\Gamma(\alpha/2b)\right)^{2b/\alpha}} \le$

$$\le T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho}\right\} Ce^{c_1(t-\tau)}$$

і для $R_{lm}(t,\tau,x',\xi')$ правильною є оцінка

$$|R_{lm}(t,\tau,x',\xi')| \le C(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha}{2b}} \times$$

$$\times e^{(c_1+\varepsilon)(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho(t,\tau,x',\xi')}\right\}. \qquad (15)$$

Розв'язок системи (13) визначається формулою

$$\mu_m(t,x') = D_{x'}^{(\alpha_m)}\overline{g}_m(t,x') -$$

$$-\sum_{s=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^+} R_{ms}(t,\tau,x',\xi') D_{\xi'}^{(\alpha_m)}\overline{g}_s(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0} d\xi'. \qquad (16)$$

Якщо $\overline{g}_s \in \mathrm{A}_\eta^{(2b-r_s+\alpha)}(\Pi'^+_{-\infty})$, то згідно з теоремою про дію оператора дробового диференціювання $D_{x'}^{(\alpha_s)}\overline{g}_s \in \mathrm{A}_\eta^{(\varepsilon+\alpha)}(\Pi'^+_{-\infty})$. Оцінимо $\mu_m(t,x')$ з (16). Для цього позначимо другий доданок в (16) через $R(t,x')$ та оцінимо, враховуючи оцінку резольвенти. В результаті дістанемо

$$|R(t,x')| \le \sum_{s=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^+} (t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha}{2b}} \times$$

$$\times e^{(c_1+\varepsilon)(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho(t,\tau,x',\xi')}\right\} e^{\eta\tau}\xi_n^{\nu_0} d\xi' \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{bN} e^{(c_1+\varepsilon)t}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} e^{(\eta-(c_1+\varepsilon))\tau} d\tau.$$

Проводячи заміну змінної $t-\tau = h$, $0 \le h < \infty$, будемо мати

$$|R(t,x')| \le \sum_{s=1}^{bN} e^{\eta t}\int_0^\infty h^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} e^{-(\eta-(c_1+\varepsilon))h} dh \le Ce^{\eta t}.$$

Перший доданок з (16) задовольняє аналогічну оцінку,тому для $\mu_m(t,x')$ маємо $|\mu_m(t,x')| \le Ce^{\eta t}$. З останньої оцінки випливає, що всі обмеження по t на функції $\mu_m(t,x')$, які вимагалися при побудові розв'язку крайової задачі без початкових даних, будуть виконуватися. Підставляючи знайдені функції $\mu_m(t,x')$ у формулу для знаходження $u_2(t,x)$ і проводячи заміну порядку інтегрування, отримаємо, що

$$u_2(t,x) = \sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^+} \tilde{E}_m(t,\tau,x,\xi') \times$$

$$\times D_{\xi'}^{(\alpha_m)}\overline{g}_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0} d\xi',$$

де

$$\tilde{E}_m(t,\tau,x,\xi') = \mathrm{E}_m^{(\alpha_m)}(t,\tau,x,\xi') +$$

$$+\sum_{m=1}^{bN}\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_{n-1}^+} \mathrm{E}_s^{(\alpha_m)}(t,\beta,x,y') R_{ms}(\beta,\tau,y',\xi') y_n^{\nu_0} dy'.$$

Теорема. *Припустимо, що для задачі (1) − (3) виконуються умови: система рівнянь (1) B-параболічна в $\Pi_{-\infty}^+$, фундаментальна матриця розв'язків $Z(t,\tau,x\xi)$ задовольняє умову Λ_1, виконується умова Лопатинського для відповідної модельної задачі, коефіцієнти системи $A_{kj} \in C_{t,x}^{(\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+)$ та крайового оператора $b_{kj}^{(i)} \in C^{(2b-\eta+\alpha)}(\Pi'^+_{-\infty})$, функція $F \in \tilde{C}_{1+\varepsilon}^{(\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+)$, крайові функції $g_l \in \mathrm{A}_\eta^{\left(\frac{2b-\eta+\alpha}{2b},2b-\eta+\alpha\right)}(\Pi'^+_{-\infty})$.*

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) − (3), який належить класу $C_{x,t}^{(2b+\alpha,1)}(\Pi_{-\infty}^+)$ і справджується нерівність

$$|u|_{2b+\alpha} \le C\left(|F|_{1+\varepsilon}^{\alpha} + \sum_{l=1}^{bN}|g_l|_{2b-\eta+\alpha}\right),$$

де $|\cdot|_{1+\varepsilon}^{(\alpha)}$ − норма в $\tilde{C}_{1+\varepsilon}^{(\alpha)}$, $|\cdot|_{2b-\eta+\alpha}$ − норма в $\mathrm{A}_\eta^{(m,s)}$.

Список використаних джерел

1. Matiichuk M.I. Parabolic singular boundary value problems. − Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1999. − 176 p. (in Ukrainian).
2. Eidelman S.D. Parabolic systems. − Moscow: Nauka, 1964. − 442 p. (in Russian).
3. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Koshubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type. − Basel: Birdhouses, 2004. − 390 p.
4. Levitan B.N. Bessel function expansions in series and Fourier integrals // Uspekhi Mat. Nauk. − 1951. − Vol. 42, N 6. − P. 102-143. (in Russian).
5. Tikhonov A.N. Uniqueness theorems for the heat equation // Matematichesky sbornik. − 1935. − Vol. 42, N 2. − P. 199-216. (in Russian).
6. Lavrenchuk V.P., Matiichuk M.I. Global solvability of a quasilinear parabolic system and a problem without initial conditions // Ukr. Math. Zh. −1982. − Vol. 34, N 6. − P. 710-717. (in Russian).

Надійшла до редколегії 29.09.11

УДК 539.595

Лимарченко В.О., аспірант

Нелінійні коливання трубопроводу з рідиною при поздовжній вібрації основи трубопроводу

Досліджується задача коливань трубопроводу з рідиною на вібруючій основі. Система складається з труби кругового перетину, що консольно закріплена на рухомій основі. Розглядається поведінка системи при поздовжній вібрації основи трубопроводу в комбінації з малим початковим відхиленням по одній з форм коливань. Отримано графіки коливання кінця балки для різних частот вібрації основи. Проаналізовано умови, при яких система може приймати альтернативне положення рівноваги.

Ключові слова: трубопровід, швидкісна течія рідини, рухома основа, дискретна модель системи, сили взаємодії.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03187м. Київ, вул. Глушкова, 4-е
e–mail: vladimir_limarchenko@yahoo.com

Limarchenko V.O., postgraduate student

Nonlinear oscillations of pipeline with liquid under longitudinal vibration of the pipeline foundation

The problem of oscillations of pipeline with flowing liquid on vibrating foundation is under consideration. The system consists of tube of circular cross-section, attached as cantilever to a moving foundation. We consider behavior of the system for longitudinal vibration of pipeline foundation with a small initial deviation of one of the forms of pipeline oscillations. Graphs of motion of the free end of pipeline were obtained. The conditions under which the system can take alternative equilibrium have been analyzed.

Keywords: pipeline, high-speed liquid flow, moving foundation, discrete model of the system, forces of interaction.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03187, Kyiv, Glushkova str., 4-e
e–mail: vladimir_limarchenko@yahoo.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.Т. Маципура

Вступ

Розглядаємо механічну систему, яка складається з рухомої основи маси $M_{осн}$; трубопроводу, який описується за моделлю балки зі згинною жорсткістю EJ, площею поперечного перерізу F та масою $M_{TP} = \mu l$, де μ — лінійна густина, а l — довжина трубопроводу, й ідеальної, однорідної, нестисливої рідини, яка має масу $M_P = \rho l$ (ρ – лінійна густина рідини), та рухається в трубопроводі з заданою швидкістю $V(t)$. Вважаємо що рух системи відбувається в одні площині. Схематично така система зображена на Рис.1.

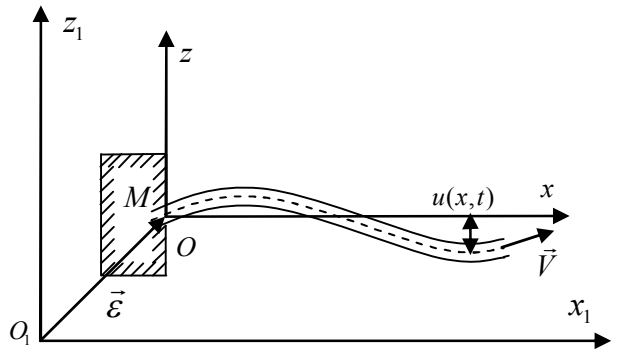


Рис.1. Трубопровід – рідина на рухомій основі

В більшості попередніх робіт [1–3] основа трубопроводу вважається нерухомою. Метою роботи є аналіз впливу вібрацій рухомої основи на коливання такої системи. Для цього на основі підходів робіт [1, 4, 5], було побудовано модель коливань системи з урахуванням впливу вібрації основи на рух трубопроводу з рідиною. Використовувався мішаний (ейлерово-лагранжевий) опис руху складових системи, що дозволило отримати дискретну модель руху системи на основі методу модальної декомпозиції.

Математична модель системи

Побудова моделі полягає в отриманні функції Лагранжа для подальшого складання рівнянь руху на основі рівнянь Лагранжа 2-го роду.

Функція Лагранжа системи має вигляд ($\varepsilon_x, \varepsilon_z$ – параметри, що відповідають за зміщення основи трубопроводу у відповідних напрямках):

$$L = T_P + T_{TP} + T_{OCH} - \Pi_P - \Pi_3 - \Pi_{CT} - \Pi_{OCH} =$$

$$= \frac{1}{2} M_{OCH}\left(\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2\right) - F_x\varepsilon_x - F_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\rho\int_0^l \left\{\left[V^2 + \dot{\varepsilon}_z^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial u}{\partial t}\dot{\varepsilon}_z + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[\frac{7}{2}V^2 - 2V\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 - \frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_z^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

© В.О. Лимарченко, 2013

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\left[2V\dot{\varepsilon}_z-2\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right]+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\left[4V-2\dot{\varepsilon}_x\right]+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\left[-4V\dot{\varepsilon}_z+5\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right]+\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[-3\dot{\varepsilon}_z\right]+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\left[-\frac{13}{8}V^2+4V\dot{\varepsilon}_z-\frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_x^2+\frac{27}{8}\dot{\varepsilon}_z^2\right]+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\left[3\dot{\varepsilon}_x\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Bigg\}dx+$$
$$+\frac{1}{2}\mu\int_0^l\Big\{\dot{\varepsilon}_x^2+\dot{\varepsilon}_z^2+2\frac{\partial u}{\partial t}\dot{\varepsilon}_z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[\dot{\varepsilon}_x^2+\dot{\varepsilon}_z^2\right]+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\dot{\varepsilon}_z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\left[\dot{\varepsilon}_x^2+\dot{\varepsilon}_z^2\right]\Big\}dx-\frac{1}{2}EJ\int_0^l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2dx-$$
$$-\frac{1}{4}EJ\int_0^l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx-\frac{1}{2}EF\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3u\,dx-\cdot$$
$$-\frac{1}{2}PF\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx.$$

Якщо прирівняти ε_x, ε_z до нуля, ця функція співпадає з результатами роботи [5].

Для побудови дискретної моделі системи виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича. Подамо зміщення точок трубопроводу у вигляді: $u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}A_i(x)c_i(t)$.

Тут N — кількість форм коливань трубопроводу.

Оскільки трубопровід розглядаємо у наближенні балки, то за $A_i(x)$ беремо форми коливань труби як балки з рідиною. В результаті дискретизації функції Лагранжа рівняння Лагранжа 2-го роду набудуть вигляду:

$$\ddot{c}_r=-\frac{EJ}{\rho+\mu}\kappa_r^4c_r+\frac{7}{2}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\,\beta_{ir}^2+$$
$$+\frac{2\rho V}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\left(\beta_{ri}^1-\beta_{ir}^1\right)-\frac{PF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\beta_{ir}^2-$$
$$-\frac{2\rho\dot{V}}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\beta_{ir}^2-\frac{1}{2N_r}\sum_{ijk}\ddot{c}_ic_jc_k\,d_{jkir}^2-$$
$$-\sum_{ijk}\dot{c}_i\dot{c}_jc_k\frac{1}{N_r}\left(d_{jkir}^2-\frac{1}{2}d_{krij}^2\right)-\frac{EJ}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_ic_jc_kd_{ijkl}^6-$$
$$-\frac{2EF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_ic_jc_kd_{ijkr}^3-\frac{13}{4}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk}c_ic_jc_kd_{ijkr}^4+$$
$$+\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\psi_r^1\left[V\dot{\varepsilon}_z-\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right]+$$
$$+\frac{1}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}c_i\beta_{ir}^2\left[-2\rho V\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_x^2\left(\rho+\frac{1}{2}\mu\right)+\dot{\varepsilon}_z^2\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{5}{2}\rho\right)\right]-$$
$$-\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\left(\beta_{ri}^1-\beta_{ir}^1\right)\dot{\varepsilon}_x+$$
$$+\frac{3\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N}c_ic_j\varphi_{ijr}^3\left[-2V\dot{\varepsilon}_z+\frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right]+$$
$$+\frac{\mu-3\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N}c_i\dot{c}_j\left(\varphi_{irj}^2-\varphi_{jir}^2\right)\dot{\varepsilon}_z+$$
$$+\frac{9\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_j\dot{c}_k\left(d_{ijrk}^3-d_{kjir}^3\right)\dot{\varepsilon}_x+$$
$$+\frac{2}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_jc_kd_{ijkr}^4\left[-4\rho V\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_x^2\left(-\frac{5}{2}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)+\right.$$
$$\left.+\dot{\varepsilon}_z^2\left(\frac{27}{8}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)\right]-\frac{1}{N_r}\psi_r^o\ddot{\varepsilon}_z+$$
$$+\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\beta_{ir}^1\dot{\varepsilon}_x+\frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\beta_{ir}^1\ddot{\varepsilon}_x-$$
$$-\frac{\mu-3\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N}c_ic_j\phi_{ijr}^2\ddot{\varepsilon}_z-\frac{3\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_jc_kd_{ijkr}^3\ddot{\varepsilon}_x.$$

Введені величини ψ_i^0, ψ_i^1, N_i, β_{ij}^1, β_{ij}^2, κ_i^4, φ_{ijk}^2, φ_{ijk}^3, d_{ijkl}^2, d_{ijkl}^3, d_{ijkl}^4, d_{ijkl}^6 є квадратурами від відомих форм коливань $A_i(x)$ по відомій області та визначаються чисельно.

Отримана система рівнянь описує рух системи при заданому законі вібрації основи. Для випадку сумісного руху трубопроводу з рідиною та його основи до попередньої системи рівнянь маємо додати ще два рівняння відносно зміщень $\varepsilon_x,\varepsilon_z$, які матимуть вигляд:

$$\ddot{\varepsilon}_x=-\frac{F_x}{M_{cuc}}+\frac{1}{M_{cuc}}\Bigg\{\rho\sum_{i=1}^{N}c_i\psi_i^1\ddot{\varepsilon}_z+\rho\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\psi_i^1\dot{\varepsilon}_z-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{N}c_ic_j\beta_{ij}^2\left[\ddot{\varepsilon}_x\left(\rho+\frac{1}{2}\mu\right)-\rho\dot{V}\right]-$$
$$-2\sum_{i,j=1}^{N}c_i\dot{c}_j\beta_{ij}^2\left[\dot{\varepsilon}_x\left(\rho+\frac{1}{2}\mu\right)-\rho V\right]+\rho\sum_{i,j=1}^{N}\dot{c}_i\dot{c}_j\beta_{ij}^1-$$
$$-\rho\sum_{i,j=1}^{N}c_i\ddot{c}_j\beta_{ij}^1--\rho\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_jc_k\phi_{ijk}^3\left[\frac{5}{2}\ddot{\varepsilon}_z\right]-$$
$$-3\rho\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_j\dot{c}_k\phi_{ijk}^3\left[\frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_z\right]-\frac{9}{2}\rho\sum_{i,j,k,l=1}^{N}c_ic_j\dot{c}_k\dot{c}_ld_{ijkl}^3-$$
$$-\frac{3}{2}\rho\sum_{i,j,k,l=1}^{N}c_ic_jc_k\ddot{c}_ld_{ijkl}^3-$$
$$-\sum_{i,j,k,l=1}^{N}c_ic_jc_kc_ld_{ijkl}^4\left[2\dot{V}\rho+\ddot{\varepsilon}_x\left(-\frac{5}{2}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)\right]-$$
$$-4\sum_{i,j,k,l=1}^{N}c_ic_jc_k\dot{c}_ld_{ijkl}^4\left[2V\rho+\dot{\varepsilon}_x\left(-\frac{5}{2}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)\right]\Bigg\};$$

$$\ddot{\varepsilon}_z = -\frac{F_z}{M_{сис}} - \frac{1}{M_{сис}}\left\{\rho\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\psi_i^1 V + \right.$$
$$+\rho\sum_{i=1}^{N}c_i\psi_i^1\dot{V} + (\rho+\mu)\sum_{i=1}^{N}\ddot{c}_i\psi_i^0 +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{N}c_ic_j\beta_{ij}^2\left[\ddot{\varepsilon}_z\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{5}{2}\rho\right)\right]+$$
$$+2\sum_{i,j=1}^{N}c_i\dot{c}_j\beta_{ij}^2\left[\dot{\varepsilon}_z\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{5}{2}\rho\right)\right]+$$
$$+\rho\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_jc_k\phi_{ijk}^3\left[-2\dot{V}+\frac{5}{2}\ddot{\varepsilon}_x\right]+$$
$$+3\rho\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_j\dot{c}_k\phi_{ijk}^3\left[-2V+\frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_x\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{N}c_ic_j\ddot{c}_k\phi_{ijk}^2(\mu-3\rho)+$$
$$+\sum_{i,j,k=1}^{N}c_i\dot{c}_j\dot{c}_k\phi_{ijk}^2(\mu-3\rho)+$$
$$+\sum_{i,j,k,l=1}^{N}c_ic_jc_kc_ld_{ijkl}^4\left[\ddot{\varepsilon}_z\left(\frac{27}{8}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)\right]+$$
$$\left.+4\sum_{i,j,k,l=1}^{N}c_ic_jc_k\dot{c}_ld_{ijkl}^4\left[\dot{\varepsilon}_z\left(\frac{27}{8}\rho-\frac{1}{8}\mu\right)\right]\right\}.$$

Систему рівнянь руху шляхом зниження порядку можна легко звести до форми Коші та інтегрувати чисельно методом Рунге-Кута. Для випадку сумісного руху трубопроводу з рідиною, необхідно вирішити лінійну алгебраїчну задачу, щоб всі рівняння системи містили другу похідну по змінній в лівій частині та вирази відносно змінних та їх перших похідних в правій частині. В цілому система рівнянь руху є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів деформації трубопроводу, а у випадку сумісного руху – ще й зміщень ε_x, ε_z.

Аналіз руху системи трубопровід – рідина при поздовжній вібрації основи

В результаті чисельного моделювання було отримано та проаналізовано дані про поведінку системи трубопровід – рідина для випадку руху основи в поздовжньому напрямку O_1x_1 відносно труби (Рис. 1). Труба довжиною 1 м, виготовлена з алюмінію. Швидкість руху рідини вздовж трубопроводу вважається постійною.

У випадку поздовжнього збурення, на відміну від випадку поперечного збурення, задати лише закон коливання основи виявляється недостатнім для ініціювання коливань трубопроводу. Необхідно також надати балці деяке відхилення від прямолінійної форми.

Зауважимо, що критична швидкість течії рідини $V_{кр} = 20{,}94\ m/c$, а власна частота першої форми коливань балки $\omega_1 = 40{,}27$. Відлік часу проводиться в періодах першої форми коливань $T_1 = 0{,}1567\ c$.

Надамо системі збурення за рахунок вібрації основи в напрямку O_1x_1: $\varepsilon_x = A\sin(\omega t)$. Водночас надамо трубі відхилення 2 см по першій формі коливань. Початкові умови задачі можна записати у вигляді:

$c_1(0) = 0{,}02, \quad c_i(0) = 0, \quad i = \overline{2,10}$;

$\dot{c}_i(x,0) = 0,\ i = \overline{1,10}.$

Для різних параметрів збурення A, ω та різних швидкостей рідини в трубі V знайдено графіки руху вільного кінця балки по осі Oz та порівняльні графіки впливу форм коливань на процес руху системи. Наведемо деякі з них.

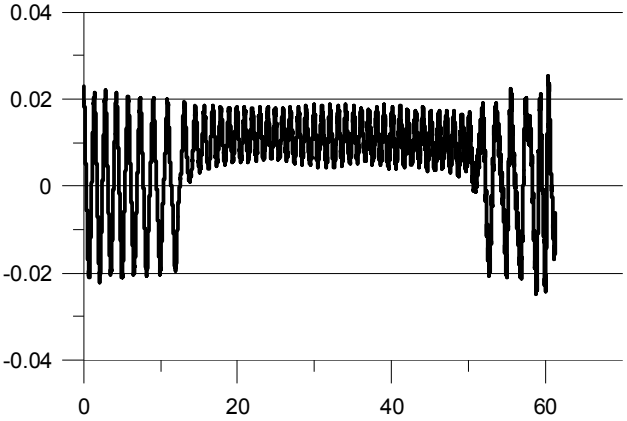


Рис. 2. Графік коливань кінця труби при V=15 *м/с*; $A_x = 0{,}002$; ω_x=40; $c_1(0)$=0,023

Випадки коливань, наведені на Рис. 2–4 відрізняються лише початковими відхиленнями по першій формі, але розміри цих відхилень близькі. З Рис. 2, 3 видно, що система переходить до коливань навколо альтернативного положення рівноваги, яке в першому випадку знаходиться над віссю Ox, а в другому випадку – під віссю Ox.

На Рис. 4 бачимо, що невелике збільшення початкового відхилення по першій формі призводить до якісної зміни характеру процесу коливань. Система вже не здійснює переходу до альтернативного положення рівноваги. Картина коливань регулярна та характеризується швидким збільшенням амплітуди коливань.

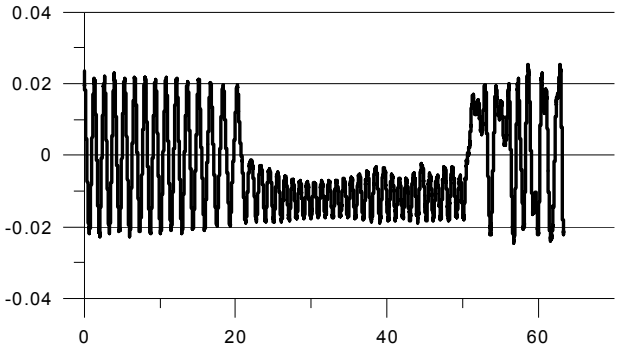


Рис. 3. Графік коливань кінця труби при V=15 *м/с*; $A_x = 0{,}002$; ω_x=40; $c_1(0)$=0,0235

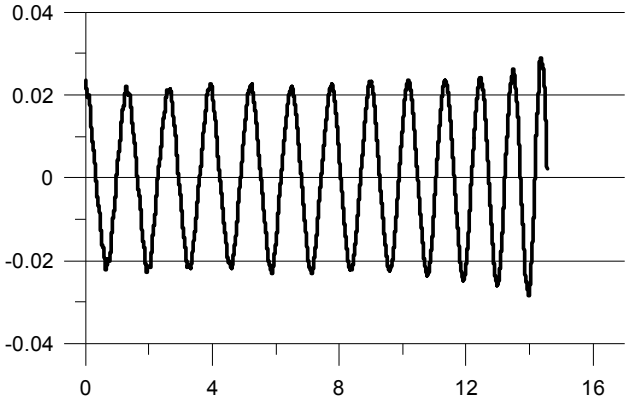


Рис. 4. Графік коливань кінця труби при V=15 *м/с*; $A_x = 0{,}002$; ω_x=40; $c_1(0)$=0,0237

Якщо збільшити частоту коливань, можливі процеси одночасного виходу на альтернативне положення та модуляції коливань (модуляція зазвичай пов'язана із збільшенням частоти). З Рис. 5 видно, що вихід на альтернативне положення рівноваги здійснюється за рахунок зміщення по першій формі, друга форма продовжує коливатись відносно прямолінійного положення.

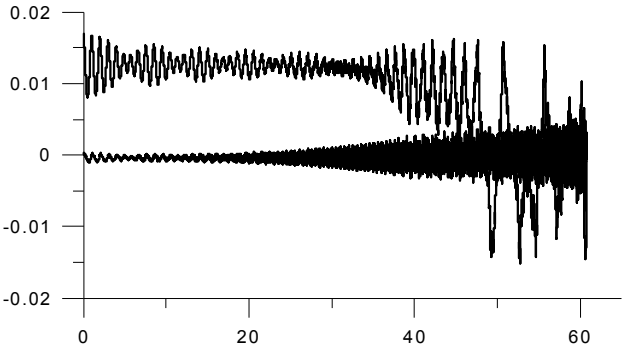


Рис. 5. Графік першої та другої форм коливань V=15 *м/с*; $A_x = 0{,}002$; ω_x=80; $c_1(0)$=0,017

У всіх розглянутих випадках коливання мають чітку тенденцію до зростання амплітуди, що обумовлено надходженням енергії за рахунок неперервної подачі рідини по трубі. Збільшення амплітуди початкового збурення призводить лише до пришвидшення цього процесу.

Висновки

В роботі розглянуто задачу динаміки трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Розроблено модель руху такої системи для випадку заданого руху основи та сумісного руху основи та трубопроводу. Проаналізовано поведінку системи при збудженні руху за рахунок заданої поздовжньої вібрації основи трубопроводу. Показано, що поведінка системи може якісно змінюватись при малих змінах початкових умов. У випадку поздовжнього збурення за рахунок додаткового зміщення по першій формі перехід до альтернативного положення рівноваги може спостерігатися одразу з початкового моменту розвинення коливань.

Список використаних джерел

1. *Bondar, N.G.* Nonlinear Autonomous Problems in Mechanics of Elastic Systems— Kyiv: Budivelnyk, 1971. — 140 p. (in Russian)
2. *Kuiper, G. L.* Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid // Journal of Fluids and Structures, 2008. — № 24. — P. 541-558.
3. *Paıdoussis, M. P.* A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram // Journal of Sound and Vibration, 2005. — № 280. — P. 141-157.
4. *Babakov, I. M.* Theory of vibrations— Moscow: Nauka, 1968. — 560 p. (in Russian)
5. *Vasilevskiy, Yu.E.* Nonlinear model of pipeline dynamics with high-speed fluid flow // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2006. — № 4. — P. 322-334. (in Ukrainian)
6. *Limarchenko, V.O.* Dynamics of pipeline with liquid on a vibrating foundation // Physico-mathematical modelling and informational technologies, 2012. — № 15. — P. 40-48 (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 12.03.13

УДК 539.595

Семенович К.О.[1], аспірант
Лимарченко О.С.[1], д.т.н., проф.

Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні

Досліджується кутовий рух циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною, на маятниковому підвісі при імпульсному моментному збудженні руху системи. Вивчається залежність поведінки системи від довжини підвісу. Отримані дані порівнюються з результатами експерименту.

Ключові слова: нелінійна динаміка рідини, вільна поверхня рідини, кутовий рух резервуара, циліндричний резервуар.

[1]Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 60
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com
Olelim2000@yahoo.com

Semenovych K.O.[1], postgraduate student
Limarchenko O.S.[1], doctor of eng., prof.

Combined motion of the reservoir on pendulum suspension and liquid under impulse excitation

Angular motion of cylindrical reservoir, partially filled by ideal incompressible liquid, on pendulum suspension for impulse moment excitation of the system is under consideration. Dependence of system dynamics on the length of the suspension is investigated and analyzed. The obtained data is compared with experimental results.

Key Words: nonlinear liquid dynamics, liquid free surface, angular motion of reservoir, cylindrical tank .

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 60, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com
Olelim2000@yahoo.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.Т. Маципура

Вступ

Розглядається рух системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею при маятниковому підвісі резервуару. Рух системи збуджується імпульсним моментом, прикладеним до стінки резервуару (початковий стан системи – спокій). Кутовий рух резервуару призводить до необхідності вводити до розгляду потенціал Стокса-Жуковського для опису динаміки рідини, до того ж рівняння кутового руху твердого тіла, на відміну від рівнянь поступального руху, є складнішими та нелінійними. Ці складності призвели до того, що задачі сумісного кутового руху резервуарів з рідиною до теперішнього часу є недостатньо вивченими.

Дослідженнями кутових рухів резервуарів з рідиною в нелінійній постановці займалися І.О. Луковський, О.С. Лимарченко, П.С. Ковальчук, Б.П. Ковальчук та інші автори [1-4]. В цих роботах були побудовані математичні моделі таких систем та вивчалися різні режими усталеного руху системи, а також процес зародження кругової хвилі на вільній поверхні рідини. Маятниковий підвіс резервуару використовується в дослідах по визначенню моментів інерції конструкцій, як засіб віброзахисту споруд, а також при транспортуванні рідких вантажів, особливо ці задачі актуальні при перевезенні рідин водним транспортом.

Неабиякий інтерес становить дослідження особливостей розвитку динамічних процесів в залежності від довжини підвісу резервуару.

Математична модель

Для дослідження задачі використаємо математичну модель системи [2, 3]. Рідина вважається ідеальною, однорідною, нестисливою, а її рух безвихровим. Метод ґрунтується на формулюванні задачі в формі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського та використанні методу Канторовича з попереднім виключенням кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини для побудови дискретної моделі системи [3]. До розгляду приймались 12 форм коливань рідини. Рух системи збуджується моментом у вигляді імпульсу прямокутної форми тривалістю

© К.О.Семенович, О.С.Лимарченко 2013

1 с, його амплітуда підбирається таким чином, щоб максимальні амплітуди коливань вільної поверхні знаходились в діапазоні розвинення хвиль з нелінійними властивостями $0{,}2R - 0{,}3R$, де R – радіус резервуару. Для побудови нелінійної дискретної моделі системи резервуар–рідина були введені наступні узагальнені координати: a_i – амплітуди збудження форм коливань рідини; α_i – кути відхилення резервуару; ε_i – параметри поступального руху резервуару. Рівняння руху системи в параметрах $a_i, \alpha_i, \varepsilon_i$ можна записати в наступному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}\ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn}\ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_r$$
$$r = \overline{1, N+6} \qquad (1)$$

де p_{rn} і q_r це квадратна матриця та вектор розмірності $N+6$ відповідно. Елементи матриці та вектору залежать від форм коливань ψ_i та векторного потенціалу Стокса-Жуковського, який у випадку циліндричного резервуару визначений у роботі [6]. За рахунок вибору системи координат з центром в точці підвісу в задачі, що вивчається, відсутні поступальні рухи резервуару, тому її розмірність скорочується до $N+3$.

Рух системи розглядався для довжин підвісу $0 - 25R$. Проаналізовано зміну амплітуди перших антисиметричної та вісесиметричної форм коливань рідини, а також кута відхилення резервуару від вертикалі. Зауважимо, що перша вісесиметрична форма фактично розглядається як міра збудження нелінійностей в системі і визначає несиметричність профілю хвиль на вільній поверхні.

Аналіз чисельних результатів

Дослідження показали, що в залежності від довжини підвісу фактично існує три діапазони поведінки системи.

Для довжин $10R - 25R$ і більше розвинення хвилеутворення в значній мірі подібне до випадку поступального руху резервуару, як описано в теоретичних [7, 8] та експериментальних [9] роботах. Так, як і у випадку поступального руху, для амплітуд коливань рідини на вільній поверхні суттєво проявляється модуляція, період якої не співпадає з періодом коливань резервуару, а, як показують дослідження [7], залежить від співвідношення маси рідини та резервуару. На Рис. 1 – 6 приведено зміни в часі амплітуд першої антисиметричної форми коливань рідини (пунктирна лінія), першої вісесиметричної форми коливань рідини (точкова лінія), а також кута відхилення резервуару від вертикалі (суцільна лінія) для різних довжин підвісу. Привертає увагу динаміка амплітуди першої вісесиметричної форми коливань рідини (Рис. 1, 2). З графіків видно, що коливання є суттєво нелінійними, відхилення вільної поверхні в центрі практично всюди додатні, що свідчить про несиметричність профілю хвиль з опусканням рівня рідини в серединній точці, коли висота горба хвилі більша за глибину впадини. На розглядуваному проміжку часу (25 с) амплітуди коливань рідини спадають приблизно в $2-3$ рази. Для цього діапазону безрозмірні амплітуди кутових коливань резервуару менші за безрозмірні амплітуди коливань рідини на вільній поверхні.

В другому діапазоні зміни довжин підвісу $1{,}5R - 5R$ амплітуди коливань вільної поверхні та кутових коливань резервуара мають однаковий порядок (Рис. 3, 4). В цьому діапазоні перша вісесиметрична форма коливань рідини також має характер сильного зміщення, що зумовлено несиметричністю профілю хвиль, але це проявляється не настільки яскраво, як для великих довжин підвісу. Для цього діапазону характерним є спадання амплітуди коливань на вільній поверхні з часом у $3-4$ рази.

В діапазоні коротких довжин підвісу резервуара $0R - 1{,}5R$ енергія коливань значною мірою зосереджується в квазітвердому русі системи, коливання вільної поверхні незначні, характер зміни амплітуди першої антисиметричної форми наближається до симетричного з малою ампулітудою, що вказує на те, що рух рідини є майже лінійним, зумовленим в значній мірі протифазним рухом резервуару і рідини, який визначається потенціалом Стокса-Жуковського (Рис. 5, 6).

Для всіх діапазонів характерним є те, що коливання рідини та рух резервуару відбуваються у протифазі, хоча для довгих підвісів рідина встигає виконати декілька коливань за один період коливання резервуару. Типовим для таких систем є суттєве затухання коливань вільної поверхні рідини з часом, що найбільше проявляється для коротких підвісів. Для всіх випадків значно помітний внесок вісесиметричних форм, які визначають несиметричність профілів хвиль. Середнє коливань вільної поверхні рідини є змінним в часі. Це зумовлене тим, що при русі резервуара коливання рідини відбуваються не навколо стану рівноваги, а навколо положення, зумовленого рухом рідини в неінерціальній системі відліку, яка визначається поперечним прискоренням.

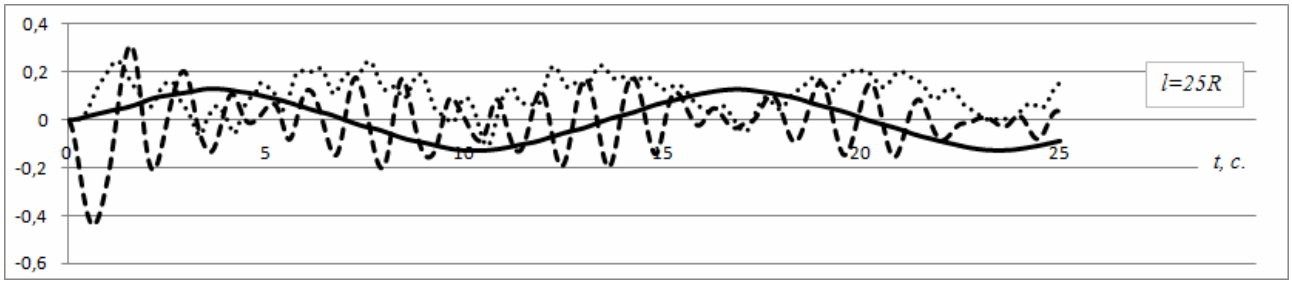


Рис. 1 Зміни амплітуд для довжини маятникового підвісу $l = 25R$

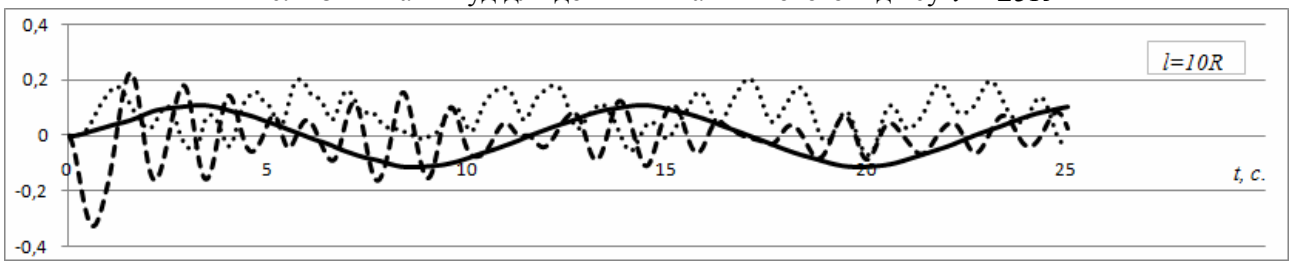


Рис. 2 Зміни амплітуд для довжини маятникового підвісу $l = 10R$

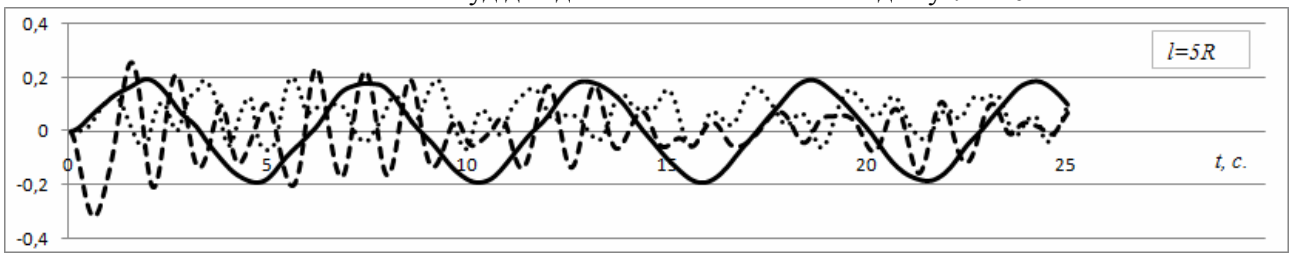


Рис. 3 Зміни амплітуд для довжини маятникового підвісу $l = 5R$

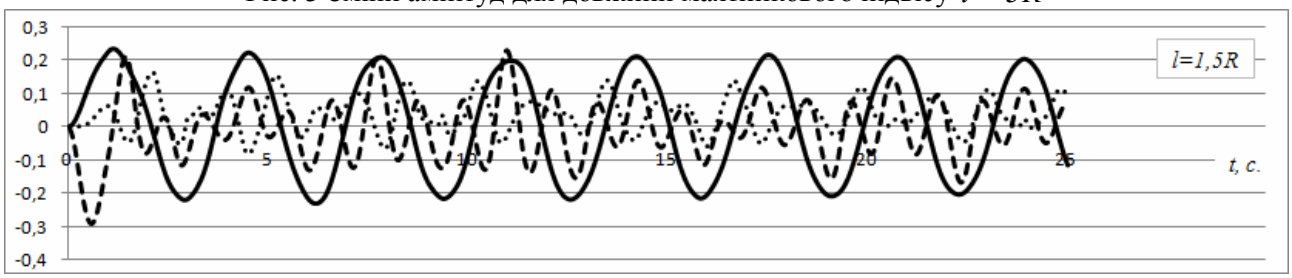


Рис. 4 Зміни амплітуд для довжини маятникового підвісу $l = 1{,}5R$

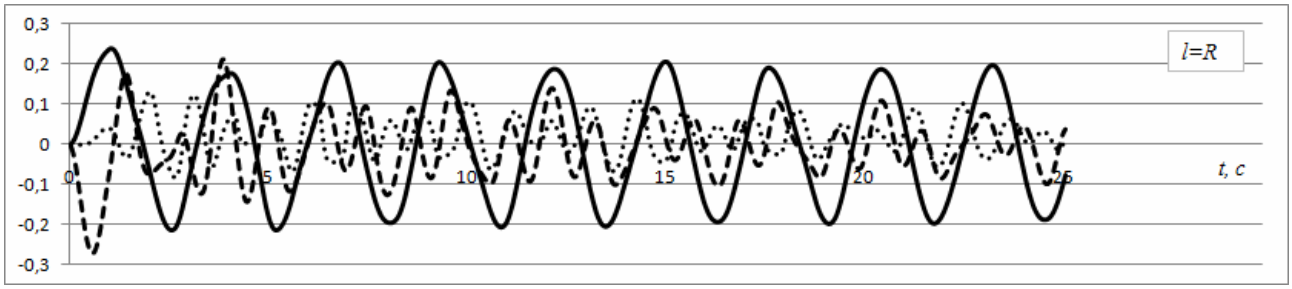


Рис. 5 Зміни амплітуд для довжини маятникового підвісу $l = R$

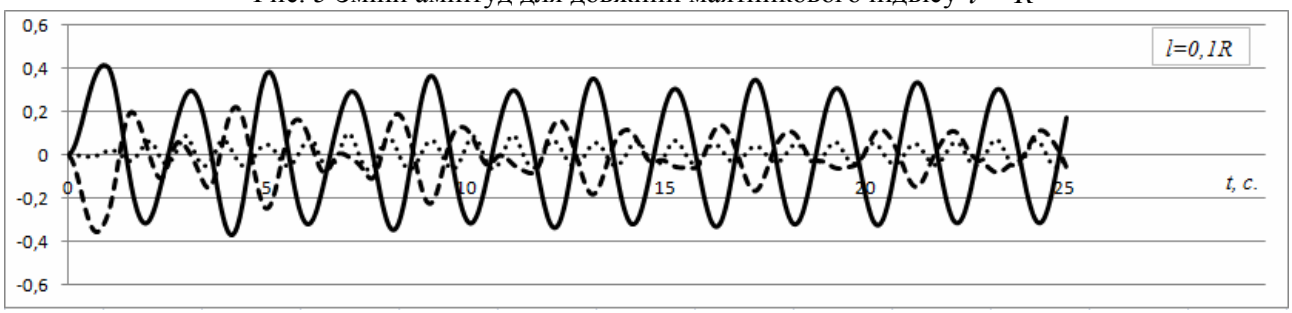


Рис. 6 Зміни амплітуд для довжини маятникового підвісу $l = 0{,}1R$

Експеримент

Для визначення ступеня достовірності результатів було проведено лабораторний дослід по вивченню поведінки резервуару на маятниковому підвісі. Установка представляє собою маятниковий підвіс, на якому закріплений циліндричний резервуар діаметром 15 см, заповнений водою до рівня 15 см. Аналізувалися випадки кінематичного збурення і імпульсного динамічного збудження руху. Спостереження за вільною поверхнею виконувалися з допомогою підфарбованого поплавка. Досліди показали, що за $5-7$ періодів коливань резервуару перехідні процеси на вільній поверхні рідини спадають, поверхня рідини практично залишається плоскою, і відбуваються лише коливання рівня рідини в протифазі з рухом резервуару, тобто тип рухів, який визначається потенціалом Стокса–Жуковського; хвильовий рух практично відсутній. Енергія хвильового руху рідини поступово передається квазітвердому руху системи. Таким чином, одержані теоретичні результати якісно підтверджуються експериментом.

Висновки

Побудовано та реалізовано модель дослідження коливань системи резервуар–рідина на маятниковому підвісі в залежності від довжини підвісу.

Проаналізовано характер збудження нелінійних механізмів в рамках моделі сумісного руху резервуару та рідини.

Показано, що на коротких довжинах підвісу хвильові рухи незначні, а визначальним є коливання рівня рідини, за що відповідає потенціал Стокса-Жуковського.

У випадку перехідних процесів хвильовий рух швидко згасає без наявності демпферів і встановлюється режим руху типу усталених коливань при відсутності хвильового руху на вільній поверхні рідини. Результати підтверджуються лабораторним дослідом.

Список використаних джерел

1. *Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovsky I.A.* Nonlinear dynamics of a spacecraft with liquid. Moscow: Mashinostroenie, 1977. – 208 p. (in Russian).
2. *Limarchenko O., Matarazzo G., Yasinsky V.* Rotational motion of structures with tanks, partially filled by liquid. – Kyiv: “FADA Ltd”, 2003. – 286 p.
3. *Limarchenko O.S., Yasinsky V.V.* Nonlinear dynamics of constructions with liquid. – Kiev: Kiev Polytechnic Institute, 1997. – 338 p. (in Russian).
4. *Lukovsky I.A.* Introduction to nonlinear dynamics of rigid body with cavities containing liquid. – Kiev: Naukova dumka, 1990. – 295 p. (in Russian).
5. *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 970 p.
6. *Abgaryan K.A., Rapoport I.M.* Dynamics of rockets. – Moscow: Mashinostroenie, 1969. – 378 p. (in Russian)
7. *Limarchenko O.S., Gubska V.V.* The problem of forced nonlinear oscillations of the reservoir of truncated conic shape, partially filled by liquid // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 1. – P. 73-76.
8. *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // Journal of Fluid Mechanics. Cambridge University Press. – 2000. – V.407, P. 201-234.
9. *Pal P.* Sloshing of Liquid in Partially Filled Container – an Experimental Study // International Journal Of Recent Trends in Engineering. – 2009. –Vol. 1, No. 6, P. 1–5.

Надійшла до редколегії 22.03.13

УДК 517.9

Яременко М.І.[1], к.ф.-м.н.

Максимальні напівгрупи стиску та максимальні дисипативні оператори в просторах Лебега

Досліджено властивості максимальних напівгруп стиску та їх генераторів в напівшкалі просторів Лебега .

Ключові слова: напівгрупа, дисипативність, локальний генератор,фільтр.

[1] ММЦ НАН України, Київ 4, вул. Терещенківська, 3.

N.I.Yaremenko[1], Ph.D

Maximum semigroups of contraction and maximal dissipative operators in Lebesgue spaces

Properties of infinitesimal generator maximum semi-group of contraction in Lebesgue spaces are investigated.

Key Words: semi-group, dissipative, infinitesimal generator, filter.

[1] IMC NAS of Ukraine, Kyiv 4, Tereshchenkivska st., 3.

*E-mail: math.kiev@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., М. О. Перестюк

1. Вступ. В роботі вивчаються нелінійні напівгрупи стиску в просторі $L^p(R^l,d^lx)$. Теорія напівгруп бурхливо розвивалася в другій половині 20-го століття в працях Хілле , Філліпса [3], Като [4-6], К.Іосіди, Браудера [1,2], Мінті [7], Комури [8] та інших і була пов'язана з потребами квантової механіки, де генератором напівгрупи є гамільтоніан деякої динамічної системи.

У випадку так званих "m -диссипативних" операторів стискуючим напівгрупам відповідають саме m -диссипативні оператори, теорія яких зараз є достатньо глибокою і багатою на результати, зокрема, стосовно застосування до задачі Коші.

В роботі показано, що максимальна напівгрупа стиску завжди має щільно визначений генератор і навпаки.

2. Постановка задачі. Мета роботи показати – що максимальна напівгрупа стиску $\{T_t\}$ має щільно визначений генератор і вона є породженою максимальним дисипативним оператором; якщо максимальний дисипативний оператор є однозначним, тоді напівгрупа породжена цим оператором є максимальною напівгрупою стиску.

3. Попередні відомості.

Означення 1. *Напівгрупа T_t називається максимальною напівгрупою стиску якщо не існує напівгрупи стиску з більш широкою областю визначення до якої вона може бути продовженою.*

Зауваження 1. Будь яка напівгрупа стиску може бути продовженою до максимальної напівгрупи. 2. Максимальний дисипативний оператор необов'язково породжує максимальну напівгрупу стиску.

4. Дослідження максимальних напівгруп стиску. Сформулюємо попередні твердження.

1. *Нехай* $\{B_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ *і* $\{B'_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ *дві системи сфер в* $L^p(R^l,d^lx)$ *:*

$B_\alpha=\{f\in L^p(R^l,d^lx):\|f-f_\alpha\|\le r_\alpha\}$,

$B'_\alpha=\{f\in L^p(R^l,d^lx):\|f-f'_\alpha\|\le r'_\alpha\}$.

Якщо $\|f_\alpha-f_\beta\|\ge\|f'_\alpha-f'_\beta\|$ *і* $r_\alpha\le r'_\alpha\ \ \forall\alpha,\beta\in\Gamma$ *тоді з того, що* $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\neq\phi$ *випливає* $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B'_\alpha\neq\phi$.

Наслідок. Нехай $f_\alpha\in L^p(R^l,d^lx)$ і $q_\alpha\in L^p(R^l,d^lx)$, $\alpha\in\Gamma$ і нехай f є довільний елемент з $L^p(R^l,d^lx)$. Якщо $\|f_\alpha-f_\gamma\|\ge\|q_\alpha-q_\beta\|\ \forall\alpha,\beta\in\Gamma$, тоді існує елемент $q\in L^p(R^l,d^lx)$ такий, що вірною є нерівність $\|f_\alpha-f_\gamma\|\ge\|q_\alpha-q_\beta\|$.

2. *Нехай* Ω *випукла замкнута оболонка* $D(T_t)$. *Для будь-якого фіксованого натурального числа* k *існує відображення* $U_k:\Omega\to\Omega$ *таке, що* $\|U_kf-U_kq\|\le\|f-q\|\ \ \forall f,q\in\Omega$ *і* $U_kf=T_{2^{-k}}f\ \ \forall f\in D(T_t)$.

Якщо f'_0 *і* f''_0 *із* Ω *задовольняють* $\|f''_0-_{2^{-k}}f\|\le\|f'_0-f\|$ $\forall f\in D(T_t)$, *тоді існує* U_k *розширення* $T_{2^{-k}}$ *таке, що* $U_kf'_0=f''_0$.

Розглянемо напівгрупи $T^\alpha=\left\{T^\alpha_t:t=\frac{j}{2^k},j=0,1,2,...\right\}$, де $T^\alpha_{2^{-k}}=U^\alpha_k$ і $T^\alpha_{t+s}=T^\alpha_tT^\alpha_s$

© М.І. Яременко, 2013

при $t=\frac{j}{2^k}$, $s=\frac{j}{2^k}$, а множина всіх відображень $\{U_k^\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ із твердження 2.

Позначимо через τ_k множину $\{T^\alpha:\alpha\}$ і визначимо канонічне відображення для $n\ge k$ $J_{n,k}:\tau_n\to\tau_k$ як $J_{n,k}T^\alpha=T^\beta$ при $T^\alpha_{\mathbf{2}^{-k}}=T^\beta_{\mathbf{2}^{-k}}$, де $T^\alpha\in\tau_k$, $T^\beta\in\tau_n$. Зауважуючи, що $J_{m,n}:J_{n,k}:\tau_m\to\tau_n\to\tau_k$, $J_{m,n}J_{n,k}T^\alpha=J_{m,n}J_{n,k}T^\beta=T^\gamma$, $T^\alpha_{\mathbf{2}^{-k}}=T^\beta_{\mathbf{2}^{-k}}=T^\gamma_{\mathbf{2}^{-k}}$, $T^\alpha\in\tau_k$, $T^\beta\in\tau_n$, $T^\gamma\in\tau_m$, одержуємо твердження:

$J_{m,n}J_{n,k}=J_{m,k}, D(J_{n,k})=\tau_n$.

А отже покладемо $A_k^\alpha=(T^\alpha_{\mathbf{2}^{-k}}-I)$ для $T^\alpha\in\tau_k$.

3. *При кожному фіксованому* $\varphi\in\Omega$ *множина* $\{T_t^\alpha\varphi:\alpha\}$ *неперервна по* t *в наступному сенсі* $\forall\varepsilon>\mathbf{0}\exists\delta>\mathbf{0}:\delta>\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^k}\Rightarrow\|T^\alpha_{\mathbf{2}^{-k}}\varphi-\varphi\|<\varepsilon$ *при* $\forall T^\alpha\in\tau_k$.

4. *Нехай* $q^\alpha_{k,n}=(I-\lambda A_k^\alpha)^{-1}f_n$ *для фіксованих* $f_j\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$. *Тоді множина* $F_k(\lambda)\le\left\{\left(q^\alpha_{k,n}\right)_{n=\mathbf{1}}^m\right\}\subset L^p(R^l,d^lx)\times\ldots\times L^p(R^l,d^lx)$ m*-раз для фіксованого* $\lambda>\mathbf{0}$ *є випуклою і замкненою і* $\sup\limits_{(q'_n)\in\bigcup F_k(\lambda)}\sqrt{\sum\|q'_n-f_n\|^2}\xrightarrow[\lambda\to\mathbf{0}]{}\mathbf{0}$.

Використовуючи твердження 4 одержуємо, що множина $\left\{\bigcap\limits_{n=\mathbf{1}}^{\infty}\{\text{задовольняє в слабкій топології }\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}F_k\}\right\}=F_\infty$ є не порожнюю множина.

Твердження 5. *Для всіх* $f\in F_\infty$ *існує послідовність* $\left\{f_{k_j}^{\alpha_j}\in F_{k_j}:j\in\mathrm{N}\right\}$ *така що* $\lim\limits_{j\to\infty}\|f_{k_j}^{\alpha_j}-f\|=\mathbf{0}$.

6. *Нехай множина* $\Phi\equiv\{\varphi\equiv\{(\alpha,k)\}\}$ *є ультрафільтром і* $\lim\limits_{(\alpha,k)\in\varphi\in\Phi}=\infty$, *тоді існує фільтр* $\psi\equiv\{\varphi\equiv\{(\alpha,k)\}\}$ *такий, що*

$$\lim_{\psi}(\mathrm{I}-\lambda A_k^\alpha)^{-\mathbf{1}}f=\omega-\lim_{\Phi}(\mathrm{I}-\lambda A_k^\alpha)^{-\mathbf{1}}f\forall\in\Omega.$$

7. *Для всіх* $f\in\Omega$ *і* $m=\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots$ *існує фільтр* Ψ_∞ *такий, що*

$q_m(f)=\lim\limits_{\Psi_\infty}(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-m}A_k^\alpha)^{-\mathbf{1}}f$.

8. *Нехай* A *максимальний дисипативний оператор, тоді*

$\lim\limits_{\lambda\downarrow\mathbf{0}}\|f-(\mathrm{I}-\lambda A)^{-\mathbf{1}}f\|=$

$=\inf\limits_{q\in D(A)\subset L^p}\|f-q\|\ \forall f\in L^p(R^l,d^lx)$.

Теорема 1. *Область визначення максимальної напівгрупи стиску* $\{T_t\}$ *є замкненою випуклою множиною, яка не міститься в будь які замкнені гіпер-площини.*

Доведення. Від супротивного, нехай $D(T_t)$ є власною підмножиною випуклої замкненої оболонки Ω.

Визначимо дисипативний оператор A щільно визначений в Ω, як

$Aq=\{\mathbf{2}^n(q-f):\exists_n,q_n(f)=q\}$, де $q_n(f)=\lim\limits_{\Psi_\infty}(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A_k^\alpha)^{-\mathbf{1}}f$ і Ψ_∞ - фільтр, що визначений раніше.

Множина A є об'єднанням множин A^n, де A^n оператор визначений раніше.

Внаслідок $D\left((\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^n)^{-\mathbf{1}}\right)=\Omega$, одержуємо

$D\left((\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^n)^{-\mathbf{1}}\right)\supset\Omega,n\in N\cup\{\mathbf{0}\}$.

Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t)\in Au(t),\\ u(t)\in\Omega,u(\mathbf{0})=q_o\in(\Omega\setminus D(T_t))\bigcap D(A)\end{cases}$$

її можна наблизити послідовністю задач Коші виду

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t)=A_nu_n(t),\\ u_n(t)\in\Omega,u_n(\mathbf{0})=q_o-\mathbf{2}^{-n}q_\mathbf{0}^\mathbf{0},q_\mathbf{0}^\mathbf{0}=\lim\limits_{\varphi_\infty}(\mathrm{I}-A_k^\alpha)^{-\mathbf{1}}f_\mathbf{0}-f_\mathbf{0}\end{cases},$$

де $f_\mathbf{0}$ є елементом $q_\mathbf{0}-Aq_\mathbf{0}$, а A_n є відображення:

$f-\mathbf{2}^{-n}f_\mathbf{1}\to f_\mathbf{1}$, $f\in D(A)$, $f_\mathbf{1}\in Af$.

Нехай $P:L^p(R^l,d^lx)\to\Omega$ є проекцією, тобто $Pf=q\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$ і $\|q-f\|=\inf\limits_{q^\mathbf{1}\in\Omega}\|q^\mathbf{1}-f\|$. Визначимо послідовність $u_n^m(t)$ покладаючи за індукцією

$u_n^\mathbf{0}(t)=q_\mathbf{0}-\mathbf{2}^{-n}q_\mathbf{0}^\mathbf{0}$, $u_n^{m+1}(t)=P(q_0+\int\limits_\mathbf{0}^t A_nu_n^m(s)ds)$.

Тоді $u_n^m(t)\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$, і

$$\left\|u_n^{m+1}(t)-u_n^m(t)\right\|=\left\|P\left(q_\mathbf{0}+\int\limits_\mathbf{0}^t A_nu_n^m(s)ds\right)-P\left(q_\mathbf{0}+\int\limits_\mathbf{0}^t A_nu_n^m(s)ds\right)\right\|\le$$

$$\le\int\limits_\mathbf{0}^t\|A_nu_n^m(s)-A_nu_n^{m-\mathbf{1}}(s)\|ds.$$

Внаслідок Ліпшецевості A_n, маємо $\sum\|u_n^{m+\mathbf{1}}(t)-u_n^m(t)\|<\infty$, отже існує $u_n(t)=\lim\limits_{m\to\infty}u_n^m(t)$.

Внаслідок теорем наведених раніше, $u_n(t)$ задовольняє рівняння в наближеній задачі Коші і $\{u_n(t)\}_{n=\mathbf{0}}^\infty$ прямує до функції $u_n(t)$ рівномірно за t на $[\mathbf{0},t_\mathbf{0}]$ і функція $u_n(t)$ задовольняє рівняння в початковій задачі Коші.

Покажемо, що

$$\tilde T_t(f)=\begin{cases}T_tf,npuf\in D(T_t)\\ u(t+s),npuf=u(s),s\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

є дійсно напівгрупою стиску.

Внаслідок дисипативності A із $\|U_kf-U_kq\|\le\|f-q\|$ $\forall f,q\in\Omega$ і $U_kf=T_{\mathbf{2}^{-k}}f$ $\forall f\in D(T_t)$, маємо

$\|u(s+t)-u(s_\mathbf{1}+t)\|\le\|u(s)-u(s_\mathbf{1})\|$, при $s,s_\mathbf{1},t\ge\mathbf{0}$, отже

$\|u(s+t)-T_tf\|\le\|u(s)-f\|$ при $f\notin D(T_t)$, $s,t>\mathbf{0}$.

Нехай $s,t,s+t\in[\mathbf{0},r]$, $r\in R_+$. Визначимо дискритивні напівгрупи:

$T^{\alpha,n}_{\mathbf{2}^{-k}}=\mathbf{2}^{-k}(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{n}A^{\alpha}_{k})^{-1}+\mathrm{I}$, $T^{\alpha,n}_{\mathbf{0}}=\mathrm{I}$, $T^{\alpha,n}_{t+s}=T^{\alpha,n}_{t}T^{\alpha,n}_{s}$, при $t=J\mathbf{2}^{-k}, s=J_1\mathbf{2}^{-k}$.

Внаслідок того, що $(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^{\alpha}_{k})^{-1}$ і $\mathbf{2}^{-k}A^{\alpha}_{k}=T^{\alpha}_{\mathbf{2}^{-k}}-\mathrm{I}$ є стиском, $\{T^{\alpha,n}_{t}: t=J\mathbf{2}^{-k}, J=\mathbf{0},\mathbf{1},...\}$ є напівгрупою стиску.

Оскільки $A^{\alpha,n}_{k}=\mathbf{2}^{-k}(T^{\alpha,n}_{\mathbf{2}^{-k}}-\mathrm{I})=A^{\alpha}_{k}(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^{\alpha}_{k})^{-1}$ є дисипативним, маємо

$\|A^{\alpha,n}_{k}T^{\alpha,n}_{t}f\|\le\|A^{\alpha,n}_{k}f\|$, $f\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$.

Покажемо, що $\|T^{\alpha,n}_{t}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha,m}_{t}u^{\alpha}_{m}\|\le\varepsilon$ для

$u^{\alpha}_{n}=q^{\alpha}_{k}-\mathbf{2}^{-n}q^{\alpha_1}_{k}$, $q^{\alpha}_{k}=(\mathrm{I}-A^{\alpha}_{k})^{-1}f_{\mathbf{0}}$, $q^{\alpha_1}_{k}=q^{\alpha}_{k}-f_{\mathbf{0}}=A^{\alpha}_{k}q^{\alpha}_{k}$,

при $n,m\ge n_{\mathbf{0}}$, $(\alpha,k)\in\varphi_{\mathbf{0}}\in\Psi_{\infty}$, $\mathbf{0}\le t\le J\mathbf{2}^{-k}\le r$.

Дійсно,

$$\|T^{\alpha,n}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha,m}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\|^p-\|u^{\alpha}_{n}-u^{\alpha}_{m}\|^p=$$

$$=\sum_{i=\mathbf{1}}^{j-\mathbf{1}}\left(\|T^{\alpha,n}_{(i+\mathbf{1})\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha,m}_{(i+\mathbf{1})\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\|^p-\|T^{\alpha,n}_{(i+\mathbf{1})\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha,m}_{(i+\mathbf{1})\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\|^p\right)=$$

$$=\sum_{i=\mathbf{0}}^{j-\mathbf{1}}\mathbf{2}^{\mathbf{1}-k}\langle A^{\alpha,n}_{k}T^{\alpha,n}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-A^{\alpha,m}_{k}T^{\alpha,m}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m},\left(T^{\alpha,n}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha,m}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\right)\left|T^{\alpha,n}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha,m}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\right|^{p-\mathbf{2}}\rangle+$$

$$+\sum_{i=\mathbf{0}}^{j-\mathbf{1}}\mathbf{2}^{\mathbf{1}-k}\|A^{\alpha,n}_{k}T^{\alpha,n}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-A^{\alpha,m}_{k}T^{\alpha,m}_{j\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\|^p.$$

Оскільки

$$\langle A^{\alpha,n}T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-A^{\alpha,m}_{k}T^{\alpha,m}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m},\left((\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^{\alpha}_{k})^{-1}T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-m}A^{\alpha}_{k})^{-1}T^{\alpha,m}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\right)$$

$$\left|(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^{\alpha}_{k})^{-1}T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-m}A^{\alpha}_{k})^{-1}T^{\alpha,m}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\right|^{p-\mathbf{2}}\rangle\le\mathbf{0}$$

і

$\|T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^{\alpha}_{k})^{-1}T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}\|\le\mathbf{2}^{-n}\|A^{\alpha,n}T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}\|$, маємо із $\|A^{\alpha,n}_{k}T^{\alpha,n}_{t}f\|\le\|A^{\alpha,n}_{k}f\|$, $f\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$, що $\|T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha,m}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{m}\|^p\le\mathbf{4}r\|q^{\alpha_1}_{k}\|^p(\mathbf{2}^{-n}+\mathbf{2}^{-m}+\mathbf{2}^{-k})$, при $j\mathbf{2}^{-k}\le\mathbf{2}$.

Позначимо $t_k=j_k\mathbf{2}^{-k}$, $j_k=[t\mathbf{2}^{k}], \mathbf{0}\le t\le r$, де n - довільне фіксоване число з N, і

$\rho_j=\|T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-u_n(j\mathbf{2}^{-k})\|$.

Внаслідок того,що

$T^{\alpha,n}_{(i+\mathbf{1})\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}=T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}+\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}^{-k}}A^{\alpha,n}T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}ds$,

$u_n\left((j+\mathbf{1})\mathbf{2}^{-k}\right)=u_n(j\mathbf{2}^{-k})+\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}^{-k}}A_nu_n(j\mathbf{2}^{-k}+s)ds$ і

$\lim_{\Psi_\infty}A^{\alpha,n}_{k}u_n(t)=A_nu_n(t)$, для $(\alpha,k)\in\varphi$,

маємо

$$\rho_{j+\mathbf{1}}\le\|u_n(j\mathbf{2}^{-k})-T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}+\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}^{-k}}\|\left(A_n-A^{\alpha,n}\right)u_n(j\mathbf{2}^{-k}+s)ds+$$

$$+\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}^{-k}}\|A^{\alpha,n}u_n(j\mathbf{2}^{-k}+s)-A^{\alpha,n}T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}\|ds\le$$

$$\le\rho_j+\mathbf{2}^{-k}\varepsilon+\mathbf{2}^{k}\mathbf{2}^{n}(\rho_j+\mathbf{2}^{-k}\|q^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0}}\|)\le$$

$$\le\rho_j(\mathbf{1}+\mathbf{2}^{n-k})+\mathbf{2}^{\mathbf{1}-k}\varepsilon,\exists\varphi\in\Psi_\infty$$

задовольняється нерівністю $\mathbf{2}^{n}\|q^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0}}\|<\mathbf{2}^{k}\varepsilon$.

Далі використовуючи індукцію, одержуємо

$\rho_j\le\rho_{\mathbf{0}}e^{r\mathbf{2}^{n}}+\mathbf{2}re^{r\mathbf{2}^{n}}\varepsilon\le(\|q^{\alpha}_{k}-q_{\mathbf{0}}\|\mathbf{2}^{-n}\|q^{\alpha_1}_{k}-q^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0}}\|)e^{r\mathbf{2}^{n}}+\mathbf{2}re^{r\mathbf{2}^{n}}\varepsilon$,

при $\mathbf{0}\le j\mathbf{2}^{-k}\le r$, отже маємо $\lim_{\Psi_\infty}T^{\alpha,n}_{t}u^{\alpha}_{n}=u_n(t)$.

Оскільки $\lim_{n\to\infty}A^{\alpha}_{k}(\mathrm{I}-\mathbf{2}^{-n}A^{\alpha}_{k})^{-1}q=A^{\alpha}_{k}q$ при $q\in D(A^{\alpha}_{k})=\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$, для фіксованого α, маємо $\lim_{n\to\infty}\|T^{\alpha,n}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha}_{i\mathbf{2}^{-k}}u^{\alpha}_{n}\|=\mathbf{0}$, отже $\{u^{\alpha}_{n}\}_{n=\mathbf{0}}^{\infty}$ відносно компактна множина в $\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$. При $s=i\mathbf{2}^{-k}, t=j\mathbf{2}^{-k}, s+t=(i+j)\mathbf{2}^{-k}\in[\mathbf{0},r]$, одержуємо

$$\|u(s+t)-T_tf\|\le\|u(s+t)-u_n(s+t)\|+\|u_n(s+t)-T^{\alpha,n}_{t+s}u^{\alpha}_{n}\|+$$

$$+\|T^{\alpha,n}_{t+s}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha}_{t+s}u^{\alpha}_{n}\|+\|T^{\alpha}_{t+s}u^{\alpha}_{n}-T_tf\|\le\|T^{\alpha}_{s}u^{\alpha}_{n}-f\|+\mathbf{3}\varepsilon\le\|u(s)-f\|+\mathbf{6}\varepsilon,$$

оскільки

$\|u(s)-T^{\alpha}_{s}u^{\alpha}_{n}\|\le\|u(s)-u_n(s)\|+\|u_n(s)-T^{\alpha,n}_{s}u^{\alpha}_{n}\|+\|T^{\alpha,n}_{s}u^{\alpha}_{n}-T^{\alpha}_{s}u^{\alpha}_{n}\|\le\mathbf{3}\varepsilon.$

Внаслідок рівномірної неперервності T_tf і $u(t)$, дійсно має місце нерівність

$\|u(s+t)-T_tf\|\le\|u(s)-f\|$ при $f\in D(T_t)$, $s,t,s+t\in[\mathbf{0},r]$.

Тобто $\{\tilde{T}_t\}$ є напівгрупою стиску, але це призводить до протиріччя з максимальністю напівгрупи $\{T_t\}$, тобто одержали протиріччя.

Покажемо, що область $D(T_t)$ не міститься в довільній якій замкненій гіперплощині в $L^p(R^l,d^lx)$.

Нехай $D(T_t)\subset\{f\in L^p(R^l,d^lx):\langle f,e\rangle=M\}$ при деяких $e\in L^p(R^l,d^lx)$ і $\|e\|=1$.

Нехай $S_t(f+e)=T_tf+e$ при $f\in D(T_t)$, тоді $\{S_t\}$ також напівгрупа стиску і область визначення S_t є множина $e\cup D(T_t)$, яка має порожній перетин з $D(T_t)$, отже

$$\tilde{T}_tf=\begin{cases}T_tf, при & f\in D(T_t),\\ S_tf, при & f\in e\cup D(T_t),\end{cases}$$

є розширенням $\{T_t\}$, але $\{\tilde{T}_t\}$ є напівгрупою стиску, тобто протиріччя з максимальністю $\{T_t\}$. Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Замикання множини $D(A)$, де A є максимальним дисипативним оператором є випуклою в $L^p(R^l,d^lx)$ множиною.*

Доведення. Доводити будемо від супротивного. Нехай $q,\Psi\in D(A)$ і $f=\mu q-(\mathbf{1}-\mu)\Psi$ при $\mathbf{0}<\mu<\mathbf{1}$.

Припустимо, що $f\notin[D(A)]$, тоді покладемо $q_\lambda=q-\lambda q_{\mathbf{1}}$ при $q_{\mathbf{1}}\in Aq$,

Використовуючи твердження 8, маємо

$\left\|(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-q\right\|=\left\|(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}q_\lambda\right\|\le\left\|f-q_\lambda\right\|$,

$\lim_{\lambda\downarrow\mathbf{0}}\|f-q_\lambda\|=\|f-q\|$, аналогічно

$\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}}\left\|(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-\Psi\right\|\le\| f-\Psi\|$,

оскільки

$\| q-\Psi\|\le\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}}\left(\left\|q-(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f\right\|+\left\|(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-\Psi\right\|\right)=$

$=\| q-f\|+\| f-\Psi\|=\| q-\Psi\|$ маємо, що

$\lim_{\lambda\downarrow 0}(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f=\sigma q-(\mathbf{1}-\sigma)\Psi,\sigma\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ і

$\lim_{\lambda\downarrow 0}(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-q=\| f-q\|$, тобто одержуємо, що $\lim_{\lambda\downarrow 0}(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f=f$, але це суперечить припущенню, що $f\notin[D(A)]$. Теорема 2 доведена.

5. Основна теорема.

1) Максимальна напівгрупа стиску $\{T_t\}$ має щільно визначений генератор і вона є породженою максимальним дисипативним оператором.

2) Якщо максимальний дисипативний оператор є однозначним, тоді напівгрупа породжена цим оператором є максимальною напівгрупою стиску.

Доведення. Твердження 1) є наслідком попередніх теорем і тверджень.

Твердження 2) доведемо від супротивного. Нехай оператор A породжує напівгрупу $\{T_t\}$ і $\{S_t\}$ максимальне розширення $\{T_t\}$. Припустимо супротивне $D(S_t)\supset D(T_t)$ і $D(S_t)\neq D(T_t)$, використаємо 1) генератор $\{S_t\}$ нехай $\tilde{A}$ є щільно визначеним в $D(S_t)$. Внаслідок замкнутості $D(T_t)$ існує елемент $f\in D(\tilde{A})$ і $f\notin D(T_t)\subset L^p(R^l,d^lx)$, застосовуючи максимальну дисипативність A одержуємо, що існує

$q_\lambda=(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f,\forall\lambda>\mathbf{0}$ і $\lim_{\lambda\downarrow 0}q_\lambda=q\in[D(A)]\subset L^p(R^l,d^lx)$.

Оскільки, $q_\lambda\in D(A)$, T_tq_λ слабо диференційована по t і $\omega-\lim_{h\downarrow 0}A_hq_\lambda=Aq_\lambda$, і $Aq_\lambda=\frac{q_\lambda-f}{\lambda}$, отже

$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\lambda}{h}\left\langle T_hq_\lambda-q_\lambda,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle=\| q_\lambda-f\|^p$,

$\left\langle S_hf-f,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle=\left\langle S_hf-T_hq,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle+$

$+\left\langle T_hq_\lambda-q,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle+$

$+\| q_\lambda-f\|^p\ge\left\langle T_hq_\lambda-q_\lambda,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle$, оскільки,

$\| T_hq_\lambda-S_hf\|=\| S_hq_\lambda-S_hf\|\le\| q_\lambda-f\|$.

Тобто, маємо

$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\left\langle S_hf-f,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle}{h}\ge\frac{\|q_\lambda-f\|^p}{\lambda}$, спрямовуючи λ до нуля, одержуємо протиріччя

$\lim_{h\downarrow 0}\left\langle\frac{S_hf-f}{h},(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle=$

$=\left\langle\tilde{A}f,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle\to\left\langle\tilde{A}f,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle$,

$\frac{\| q_\lambda-f\|^p}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\downarrow 0]{}\infty$. Теорема доведена.

6. Висновки. Одержано нові результати, щодо нелінійних максимальних напівгруп стиску, а саме, доведено, що будь-яка максимальна напівгрупа стиску $\{T_t\}$ має щільно визначений генератор і що вона породжена максимальним дисипативним оператором; крім того, якщо максимальний дисипативний оператор є однозначним, тоді напівгрупа породжена цим оператором є максимальною напівгрупою стиску.

Список використаних джерел

1. *Browder F.E.* Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution / F.E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1965. – V. 53. – P. 1100 – 1103.
2. *Browder F.E.* Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space / F.E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1965. – V. 54. – P. 1041 – 1044.
3. *Hille E., Phillips R.* Functional Analysis and Semi-Groups /*E.Hille, R.Phillips.* – Prov.: Amer. Math. Society, 1957. – 720 p.
4. *Kato T.* Nonlinear semi-groups and evolution equations / *T. Kato*// J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.
5. *Kato T.* Non-linear semigroups and evolution equations / *T. Kato* // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 508 – 520.
6. *Kato T.* Nonlinear semi-groups and evolution equations / *T. Kato* // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.
7. *Komura Y.* Nonlinear semi-groups in Hilbert space / *Y. Komura* // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493 – 507.
8. *Minty G.* Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / *G. Minty* // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341 – 346.

Надійшла до редколегії 29.10.2012

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.8

P.P. Antosyak, Ph.D.

About one new principle of rational collective choice

A new principle of rational group choice is proposed for the group choice problem in the Arrow's formulation. The question of consistence of some well-known collective choice rules was explored according to this principle.

Key Words: group decision making, Condorcet's principle, the group choice rules.

National University of Uzhgorod, 88000, Uzhgorod, Pidgirna str., 46,
e-mail: antosp@ukr.net

Антосяк П.П., к.ф.-м.н.

Про один новий принцип раціонального колективного вибору

Для задачі колективного вибору в постановці К.Ерроу запропоновано новий принцип раціонального колективного вибору. Вивчено питання обгрунтованості за цим принципом деяких відомих правил колективного вибору.

Ключові слова: колективне прийняття рішень, принцип Кондорсе, правила колективного вибору.

Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46,
e-mail: antosp@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Introduction. One of the main problems of group decision making is the problem of best alternative choosing. At the end of XVIII century French philosoper and matematician Condorcet was the first to draw attention to the failure of best alternative definition according to relative majority rule [1]. In return he offered his rule of the best alternative definition: the best is that alternative (Condorcet's alternative, the best alternative according to Condorcet, Condorcet winner), which outperforms all other alternatives according to relative majoity rule. The author himself noticed the existence of profiles for which there is no Condorcet winner. [illegible] until now the same name principle proposed by [illegible] in one way or other (in various variations) is included in all rational models of rational group decision making [1-3], and the rules that comply with this principle are called reasonable (wealthy) Condorcet. That is why one of the most critical problems is the problem to generalize the concept of reasonability according to Condorcet.

In this paper we propose a new principle for the best alternative choice in the group decision making, which is consistent with the already known generalizations of Condorcet principle. The research results of some well-known a group choice rules as to their consistency according to the proposed principle are also offered.

A group choice problem in the Arrow's formulation. Let a finite set of alternatives be $A=\{a_1,...,a_{n_A}\}$ (n_A – number of alternatives), and also a set (profile) $\Pi=\{P_1,...,P_{n_E}\}$ of estimations of alternatives set A, where P_l is strict linear order on a set A, given by individual l of collective (group) and which corresponds to their individual preferences on a set of alternatives A ($l\in N_E=\{1,...,n_E\}$, n_E – quantity of individuals). The problem of collective (group, resulting, etc.) order definition which in the "best" possible way displays the preferences on set A of group of individuals in general is set.

The only possible and correct solution on the set [illegible] the two alternatives is a collective choice according to the relative majority rule: the best alternative is that one which was given a strong preference for at least half of individuals. On the set of three or more alternatives arises a problem of constructing of collective choice rule, which would be adequate continuation of voting according to majority principle for a couple of alternatives.

Definition 1. Let's denote for any profile of individual $c_{ij}=Card\left(\left\{l\in N_E:(a_i,a_j)\in P_l\right\}\right)$, $\forall\, i,j\in N_A=\{1,...,n_A\}$. Value c_{ij} – is the number of individuals which gave strong prefernence to alternative a_i over alternative a_j in corresponding profile.

Definition 2. For any profile of individual preferences value $m_{ij}=c_{ij}-c_{ji}$ is called majority margin of alternatives a_i over aternative a_j,

© P.P. Antosyak, 2013

$\forall\, i, j \in N_A$, and matrix $M = \left(m_{ij}\right)_{i,\, j=1,\ldots,n_A}$ is called matrix of majority margin.

In the futher if you need to point out correspondence of mentioned notations to certain profile $\Pi \in \mathsf{P}$ (P – set of all possible profiles), then we will write down $c_{ij}(\Pi)$, $m_{ij}(\Pi)$ and $M(\Pi)$.

Definition 3. Relation of simpe majority (majority relation), which was generated by profile $\Pi \in \mathsf{P}$, is called connected binary relation $R_{M(\Pi)}$ on a set A, which is defined as following

$$(a_i, a_j) \in R_{M(\Pi)} \Leftrightarrow m_{ij}(\Pi) \geq 0, \quad \forall\, a_i, a_j \in A.$$

Prudent principle. For each alternative $a_i \in A$, $i \in N_A$ we introduce a set of indexes:

$$N_i^- = \{z \in N_A : m_{iz} < 0, z \neq i\},$$
$$N_i^+ = \{z \in N_A : m_{iz} > 0, z \neq i\}.$$

Taking into consideation the definition 1, 2 for each alternative a_i, $\forall\, i \in N_A$ the following interpretations are justified:

- m_{ij}, $j \in N_i^+$ – number of winning units or just winning of alternative a_i from alternative a_j;
- $|\, m_{ij} \,| = -m_{ij}$, $j \in N_i^-$ – number of loss units or just loss of alternative a_i from alternative a_j;
- $S_i^+ = \sum\limits_{z \in N_i^+} m_{iz}$ – total winning of alternative a_i;
- $-S_i^- = -\sum\limits_{z \in N_i^-} m_{iz}$ – total loss of alternative a_i.

The following principle of rational choice is suggested in the context of above mentioned interpretations.

- *if winning of alternative a_i from alternative a_j is more than its total loss, then in collective preference alternative a_i should be better than alternative a_j;*
- *if loss of alternative a_i from alternative a_j is more than its total winning, then in collective preference alternative a_i should be worse then alternative a_j.*

It is easy to see that the above mentioned principle is quite prudent and is not contrary to the well-known principle of Condorcet.

Let's consider the rules that are used in group decision making, most of which are classic, well-known, and often used in practice, others, according to some authors [4], are only theoretical. We formulate some of them on the language of binary relations which are necessary for further their analyzing concerning the satisfaction of principles suggested by us.

Kemeny rule. Let $R_1, R_2 \in \Omega$ (Ω –set of all connected, asymmetric, transitive binary relations) are two arbitrary strict linear orders. Let's define the distance between theese two relations as the distance beween the sets:

$$\delta(R_1, R_2) = \frac{Card\left((R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)\right)}{2}.$$

Binary relation R_{Kemeny} is called collective order of Kemeny (Kemeny's median) if and only if $R_{Kemeny} = arg \min\limits_{R \in \Omega} \sum\limits_{l=1}^{n_E} \delta(R, P_l)$.

Egalitarian Simpson's rule. To win according to this rule it is necessary that alternative does not collect against it a large majority according to this rule. Simpson's score of alternative $a_i \in A$ is called value $S(a_i) = \min\limits_{z \in N_i^-} m_{iz}$. (1)

Simpson's collective order is called ordening $R_{Simpson}$, which is defined as follows:

$$(a_i, a_j) \in R_{Simpson} \Leftrightarrow S(a_i) \geq S(a_j), \ \forall\, a_i, a_j \in A.$$

Utilitarian Tideman's rule. As alternative to the rule (1) it is possible to define the rule which is based on an utilitarian criterion. Utilitarian score of alternative $a_i \in A$ is called value $U(a_i) = \sum\limits_{z \in N_i^-} m_{iz}$.

Utilitarian collective order is called ordening R_{UC}, which is defined as follows:

$$(a_i, a_j) \in R_{UC} \Leftrightarrow U(a_i) \geq U(a_j), \quad \forall\, a_i, a_j \in A.$$

<u>*Prudent order*</u>. Suppose $\lambda \in \{-n_E, -n_E + 2, \ldots, n_E - 2, n_E\}$ and let's define relation $R_{>\lambda}$: $(a_i, a_j) \in R_{>\lambda} \Leftrightarrow m_{ij} > \lambda$, $\forall\, i, j \in N_A, i \neq j$. Prudent oreder is called strict linear order R_{PO}, which completes acyclic relation $R_{>\beta}$, that is $R_{>\beta} \subseteq R_{PO}$,

$\beta = min\{\lambda \in \{-n_E, -n_E + 2, \ldots, n_E - 2, n_E\}:$

$R_{>\lambda}$ – acyclic$\}$.

Theorem 1. *Strict Kemeny's median, egalitarian Simpson's rule and utilitarian Tideman's rule comply with the prudent principle. There is always a prudent order, which complies with the prudent principle.*

Proof. The problem of collective strict linear order finding in the form of Kemeny's median is equivalent to the problem of linear ordering of alternatives. [5] That is why the validity of the strict Kemeny's median according to the prudent principle is a special case of a more general result [6].

Let for some fixed (but arbitrary) profile $m_{ij} > -S_i^-$. Let's assume opposite, that is let $\min\limits_{z\in N_j^-} m_{jz} \geq \min\limits_{z\in N_i^-} m_{iz}$. From inequality $m_{ij} > -S_i^- = -\sum\limits_{z\in N_i^-} m_{iz}$ and property of matrix of majority margin it follows that $-m_{ji} = m_{ij} > -m_{iz}$, $\forall\, z \in N_i^-$. That is $m_{ji} < m_{iz} < 0$, $\forall\, z \in N_i^-$. Then inequality $\min\limits_{z\in N_j^-} m_{jz} \leq m_{ji} < m_{iz^*} = \min\limits_{z\in N_i^-} m_{iz}$ is obvious, where $z^* \in Arg \min\limits_{z\in N_i^-} m_{iz}$, which contradicts our assumption. For utilitarian Tideman's rule the opposite assumption would mean in particular that $0 > \sum\limits_{z\in N_j^-} m_{jz} \geq \sum\limits_{z\in N_i^-} m_{iz}$. Then from condition $m_{ij} > -S_i^- > 0$ and properties of matrix of majority margin it follows $m_{ji} < 0$, that is $i \in N_j^-$. Then from proposition we get $0 > m_{ji} + \sum\limits_{z\in N_j^-\setminus\{i\}} m_{jz} \geq \sum\limits_{z\in N_i^-} m_{iz}$, whence it follows that $0 \geq \sum\limits_{z\in N_j^-\setminus\{i\}} m_{jz} \geq \sum\limits_{z\in N_i^-} m_{iz} - m_{ji}$ or $0 \geq \sum\limits_{z\in N_j^-\setminus\{i\}} m_{jz} \geq S_i^- + m_{ij} > 0$. So we have $0 > 0$ – contradiction.

Let $m_{ij} > \beta$. Then for any prudent order: $(a_i, a_j) \in R_{>\beta}$ (it follows directly from the rule). And since every acyclic relation is asymmetric [1], then $(a_j, a_i) \notin R_{>\beta}$. Let's consider a case when $m_{ij} \leq \beta$. Then from $m_{ij} > -S_i^- \geq 0$ and $m_{ij} = -m_{ji}$ it follows $m_{ji} < 0 < m_{ij} \leq \beta$, whence $(a_i, a_j) \notin R_{>\beta}$ and $(a_j, a_i) \notin R_{>\beta}$. Let's take arbitrary $k \in N_A$, $k \neq i$, $k \neq j$. Let's schow that $(a_k, a_i) \notin R_{>\beta}$. Having assumed $(a_k, a_i) \in R_{>\beta}$ then we get $m_{ki} > \beta > 0$. From property $m_{ki} = -m_{ik}$ it follows that $k \in N_i^-$. Then estimation $m_{ij} \geq -S_i^- \geq -m_{ik} > \beta$ is valid, which contradicts the situation considered by us. So, in this case it is always possible to add strict partial order $R_{>\beta}$ to strict linear order $R_>$ so that $(a_i, a_j) \in R_>$, in particular, in order that a_i to be the best. The theorem is proved.

Borda's rule puts in order alternatives according to the sum of the ranks of alternatives in a profile of individual preferences. We use equivalent method of points calculation which is based on the majority margin. Borda's score of alternative $a_i \in A$ is called value $B(a_i) = \sum\limits_{z=1}^{n_A} w_{iz}$. Borda's collective order is called ordening R_{Borda}, which is defined as follows:

$$(a_i, a_j) \in R_{Borda} \Leftrightarrow B(a_i) \geq B(a_j),\ \forall\, a_i, a_j \in A.$$

Copland's rule. In order to defeat Copland's rule it is necessary to win on the basis of simple majority from the greatest number of other alternatives. Copland's score of alternative $a_i \in A$ is called value

$$C(a_i) = 2Card\big(\{z \in N_A \setminus \{i\} : w_{iz} > 0\}\big) + Card\big(\{z \in N_A \setminus \{i\} : w_{iz} = 0\}\big).$$

Copland's collective rule is called ordening $R_{Copeland}$, which is defined as follows:

$$(a_i, a_j) \in R_{Copeland} \Leftrightarrow C(a_i) \geq C(a_j),\ \forall\, a_i, a_j \in A.$$

Slater's rule is to find collective orders, which are closest to the corresponding relation of simple majority. Let R_M be relation of simple majority generated by some profile. Binary relation R_{Slater} is called Slater's collective order if and only if

$$R_{Slater} = arg \min_{R\in\Omega} \delta(R, R_M). \qquad (2)$$

Lemma 1 [7]. *Let given matrix $M = \left(m_{ij}\right)_{i,\,j=1,\ldots,n_A}$ is such, that $m_{ij} + m_{ji} = 0$, m_{ij} – is odd (even), $\forall\, i, j \in N_A$, $i \neq j$. Then there exists a profile $\Pi \in \mathsf{P}$ of strict linear orders n_A of alternatives, for which M is matrix of majority margin.*

Theorem 2. *Prudent principle is violated at the definition of collective preference according to Borda's rule, if* $n_A \geq 3$*; according to Copland's and Slater's rules, if* $n_A \geq 4$. *On the set of the three alternatives there is always a strict linear order, constructed according to Slater's rule that complies with the prudent principle.*

Proof. Let's construct integral matrix M, requiring odd or parity (in paticular equal zero) of all elements, according to the following rule:

$$m_{12} = r,\ m_{13} = -u,\ m_{23} = g,$$
$$r > u > 0,\ g > 2r - u,$$
$$m_{1j} = m_{2j} = x \geq 0,\ 3 < j \leq n_A,$$
$$m_{ij} - \text{arbitrary integer},\ \ 3 < i < j \leq n_A.$$

According to lemma 1 there exists a profile of individual preferenes, for which matrix M will be matrix of majority margin. For this profile of inequality $r = m_{12} > -S_1^- = u$ it is necessary to require compliance with the prudent principle for alternative a_1 relative to alternative a_2. On the other hand we have the following Borda's scores for alternatives a_1 и a_2: $B(a_1) = r - u + (n_A - 3)x$, $B(a_2) = g - r + (n_A - 3)x$, whence because of introduced restrictions on the value g, r, and u, we have $B(a_1) < B(a_2)$, that is $(a_1, a_2) \notin R_{Borda}$.

Let's consider matrix M with following elements: $m_{12} = r,\ m_{21} = -r,$

$$m_{1j} = -x,\ m_{2j} = x,\ x \geq 1,\ 3 \leq j \leq n_A,$$
$$r > (n_A - 2)x,$$
$$m_{ij} - \text{arbitrary integer},\ \ 3 \leq i < j \leq n_A.$$

For the corresponding profile from inequality $r = m_{12} > -S_1^- == (n_A - 2)x$ it is necessary to require compliance with the prudent principle for alternative a_1 relative to alternative a_2. The following Copland's scores for alternative a_1 and a_2: $C(a_1) = 2$, $C(a_2) = 2(n_A - 2)$ are valid, whence due to restriction $n_A \geq 4$ we have $(a_1, a_2) \notin R_{Copeland}$.

Let's define matrix M as follows:

$$m_{12} = r,\ m_{13} = -u,\ m_{14} = -g,$$
$$r > u + g > 0,\ u > 0,\ g > 0,$$
$$m_{23} > 0,\ m_{24} > 0,\ m_{34} > 0,$$
$$m_{1j} > 0,\ m_{2j} > 0,\ m_{3j} > 0,\ m_{4j} > 0,\ 4 < j \leq n_A,$$
$$m_{ij} - \text{arbitrary integer},\ \ 4 < i < j \leq n_A.$$

For alternative a_1 relative to alternative a_2 due to inequality $r = e_{12} > -S_1^- = u + g$ it is necessary to require compliance with the prudent principle. For the profile which corresponds to matrix M which is under consideration we have the following matrix of majority relations:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$	a_{n_A}
a_1	0	1	0	0	1	$\cdots$	1
a_2	0	0	1	1	1	$\cdots$	1
a_3	1	0	0	1	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_4	1	0	0	0	1	$\cdots$	1
a_5	0	0	$\cdots$	0			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\widetilde{R}_M$	
a_{n_A}	0	0	$\cdots$	0			

where $\widetilde{R}_M$ is matrix of majority relations on a set of alternatives $\{a_5, \ldots a_{n_A}\}$. The results of work [5] at $n_E = 1$ remain valid also for problem (2), according to which problem (2) is equivalent linear ordening problem of alternatives with the following matrix prices:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$	a_{n_A}
a_1	0	1	−1	−1	1	$\cdots$	1
a_2	−1	0	1	1	1	$\cdots$	1
a_3	1	−1	0	1	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_4	1	−1	−1	0	1	$\cdots$	1
a_5	−1	−1	$\cdots$	−1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\widetilde{E}$	
a_{n_A}	−1	−1	$\cdots$	−1			

where $\widetilde{E}$ is matrix prices on a set of alternatives $\{a_5, \ldots a_{n_A}\}$. According to decompositional procedures [6] for linear ordening problem of alternatives with matrix is needed decomposition $\{N^{(1)}, N_A \setminus N^{(1)}\}$, where $N^{(1)} = \{1,2,3,4\}$. The only solution for such problem on the set of indexes $N^{(1)}$ will be variant $p^* = (2,3,4,1)$, whence due to definition of necessity concept of analyzed decomposition [6], in particular we get $(a_1, a_2) \notin R_{Slater}$, $\forall R_{Slater} \in Arg \min_{R \in \Omega} \delta(R, R_M)$.

Let $n_A = 3$. Let's take arbitrary profile of individual preferences on a set of three alternatives.

Let's choose arbitrary alternative a_i, $i \in N_A = \{1,2,3\}$. If alternative a_i is the best according to Condorcet, then a_i is also the best according to Slater because Slater's rule is reasonable according to Condorcet [2]. Let's consider a case when a_i is not the best according to Condorcet and let $m_{ij} > -S_i^- > 0$, $j \in N_A \setminus \{i\}$. In this case following situations for matrix of majority margin are possible.

a)	a_i	a_j	a_k
a_i	0	r	$-u$
a_j	$-r$	0	g
a_k	u	$-g$	0

b)	a_i	a_j	a_k
a_i	0	r	$-u$
a_j	$-r$	0	0
a_k	u	0	0

c)	a_i	a_j	a_k
a_i	0	r	$-u$
a_j	$-r$	0	$-g$
a_k	u	g	0

at arbitrary even (odd) integers $r > 0$, $u > 0$, $g > 0$. We have the following matrixes of majority relations for these profiles.

a)	a_i	a_j	a_k
a_i	0	1	0
a_j	0	0	1
a_k	1	0	0

b)	a_i	a_j	a_k
a_i	0	1	0
a_j	0	0	1
a_k	1	1	0

c)	a_i	a_j	a_k
a_i	0	1	0
a_j	0	0	0
a_k	1	1	0

Whence we get the following strict preferences according to Slater.

a) $a_i \succ a_j \succ a_k$, $a_j \succ a_k \succ a_i$, $a_k \succ a_i \succ a_j$

b) $a_k \succ a_i \succ a_j$, $a_k \succ a_j \succ a_i$

c) $a_k \succ a_i \succ a_j$

The theorem is proved.

Conclusions. The new principle of rational collective choice is proposed in this paper for the problem of collective choice in the classical formulation of Arrow. If there is a strong Condorcet winner for some profile of individual preferences, this principle coincides with the very principle of Condorcet, and in the case of its absence it is its reasonable substitution (continuation). Study of the consistency question according to this principle of some well-known rules of collective choice proves once again the complexity and paradox of the theory of collective decision-making.

Bibliography

1. *Voloshin O.F.* Models and methods of making decision: / O.F. Voloshin, S.O. Maschenko.–K: Publisher center the «Kiev university», 2010. (in Ukrainian)
2. *Moulin H.* Axioms of cooperative decision making. – M.: Mir, 1991. – 464p. (in Russian)
3. *Totsenko V.G.* Methods and decision making system. – K.: Naukova Dumka, 2002. – 381 c. (in Russian)
4. *Larichev O.I.* Theory and methods of making decision.– M.: Logos, 2002. – 392 p. (in Russian)
5. *Antosyak P.P.* Generalization of median approach is in case of fuzzy individual preferences // Bulletin of Kyiv University. Series: Physical and Mathematical Sciences. – 2010. – № 2. – P. 81-86. (in Ukrainian)
6. *Antosyak P.P.* Decomposition procedures in the problem of finding a resultant strict ranking in a form of Kemeny-Snell's median // Scientific Bulletin of the Uzhgorod University. Series. Math. and inform. 2008. – Vol. 17. – P. 27-35. (in Ukrainian)
7. *Debord B.* Caracterisation des matrices des preferences nettes et methodes d'agregation associees // Mathematiques et Sciences Humaines. – 1987. – Vol. 97. – P. 5-17.

Надійшла до редколегії 12.03.2013

УДК 004.8

Крак Ю.В.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Корлюк О.С.[1], м.н.с.

Доповнення навчальної вибірки для класифікації засобами кластеризації

В даній статті розглядається підхід розширення навчальної вибірки засобами кластеризації. Даний підхід дозволяє підвищити якість класифікації на обмежених наборах даних навчальної вибірки.

Ключові слова: кластеризація, класифікація, тестова вибірка,навчання.

[1] Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова Національної академії наук України, 03680, МСП, м. Київ, пр-т. Глушкова 40,
e-mail: arheys@gmail.com

Iurii Krak, Ph. D., Prof.,
Olexandr Korlyuk[1], junior researcher

Addition of the training set for the classification of clustering methods

This article describes an approach of extending the training sample by clustering methods. This approach improves the quality of classification on a limited set of data the test sample.

Keywords: clustering, classification, training sample, training.

[1]Glushkov Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine, 40 Glushkova ave., Kyiv, Ukraine, 03680,
e-mail: arheys@gmail.com

This paper was presented by Fedir Garashcenko, Ph . D., Prof

Introduction

The number of documents in electronic form is steadily increasing, especially for web pages and e-mail. Systematization is necessary to facilitate the search in large volumes of data, for example, classification is identification as some comprehensible content.

The classification of full-text print documents is the process of determining the document belongs to one or more categories which are the most appropriate to its content.

The development of new methods of classification is an actual problem, due to the emergence of the new types of documents such as social networks websites and short messages (Twitter). The text classification needs to determine the list of named categories for classifying new documents as one of them. The quality of classification methods depends on the quality and the size of document sets which are pre-prepared for algorithm classification training. In the case of documents in Ukrainian, the verification of classification methods is complicated by the absence of significant document arrays as a training sample.

In case of a small number of documents for study, the accuracy of the classifier usually is not high. In practice, it's possible to prepare the minimum necessary training sample by hand, but considering the fact that the larger training sample the higher classification accuracy, it is necessary to develop automated methods of updating the training sample for classification problem. Some approaches of semiautomatic classification are posted in the papers [1- 4].

This paper presents a technique which allows to extend primary sample using the clustering of unnamed documents, which belong to the pre-formed clusters consisting of classified documents set.

Clustering-based classification

Let we have a set of named categories

$$D = 1...N \tag{1}$$

and certain document sets that are included to each of these categories by expert assessment

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x : x(i_l), l = \overline{1, n_1}\}, \\ D_2 &= \{x : x(j_s), s = \overline{1, n_2}\}, \ldots, \\ D_N &= \{x : x(k_r), r = \overline{1, n_m}\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Using the clustering method [5] with the use of special distance measure, let's form the clusters of extended training sample for the classification. For the set of clusters (2) determine the appropriate matrix $\tilde{X}(1), \tilde{X}(2) \ldots \tilde{X}(N)$ which are accordingly defined as

© Iu. Krak, O. Korlyuk, 2013

$$\tilde{\tilde{X}}(1) = (\tilde{\tilde{x}}(i_1)\vdots\ldots\vdots\tilde{\tilde{x}}(i_{n_1})),$$
$$\tilde{\tilde{X}}(2) = (\tilde{\tilde{x}}(j_1)\vdots\ldots\vdots\tilde{\tilde{x}}(j_{n_2})),\ldots, \quad (3)$$
$$\tilde{\tilde{X}}(N) = (\tilde{\tilde{x}}(k_1)\vdots\ldots\vdots\tilde{\tilde{x}}(k_{n_m})).$$

where

$$\tilde{\tilde{x}}(i_l) = x(i_l) - \hat{x}(1),$$
$$\tilde{\tilde{x}}(j_s) = x(j_s) - \hat{x}(2),\ldots,$$
$$\tilde{\tilde{x}}(k_r) = x(i_r) - \hat{x}(n),$$
$$l = \overline{1,n_1},\ s = \overline{1,n_2}, r = \overline{1,n_m}.$$

$$\hat{x}(1) = \tfrac{1}{n_1}\sum_{l=1}^{n_1} x(i_l),$$
$$\hat{x}(2) = \tfrac{1}{n_2}\sum_{s=1}^{n_2} x(j_s),\ldots, \quad (4)$$
$$\hat{x}(n) = \tfrac{1}{n_m}\sum_{r=1}^{n_m} x(k_r).$$

The distance from the new document to each cluster $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ will be calculated using the following formulas:

$$\rho(x,\Omega_1) = \tfrac{1}{d_1}((x-\hat{x}(1))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(1))(x-\hat{x}(1))^{\frac{1}{2}},$$
$$\rho(x,\Omega_2) = \tfrac{1}{d_2}((x-\hat{x}(2))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(2))(x-\hat{x}(2))^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$
$$\rho(x,\Omega_n) = \tfrac{1}{d_n}((x-\hat{x}(N))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(N))(x-\hat{x}(N))^{\frac{1}{2}}.$$

where

$$d_1 = \max_{l=1,n_1}(x(i_l)-\hat{x}(1))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(1))(x(i_l)-\hat{x}(1)),$$
$$d_2 = \max_{s=1,n_2}(x(j_s)-\hat{x}(2))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(2))(x(j_s)-\hat{x}(2)),..., \quad (6)$$
$$d_n = \max_{r=1,n_m}(x(k_r)-\hat{x}(N))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(N))(x(k_r)-\hat{x}(N)).$$

and accordingly

$$R(\tilde{\tilde{X}}^T(1)) = \tilde{\tilde{X}}^{+T}(1)\tilde{\tilde{X}}^{+}(1),$$
$$R(\tilde{\tilde{X}}^T(2)) = \tilde{\tilde{X}}^{+T}(2)\tilde{\tilde{X}}^{+}(2),\ldots,$$
$$R(\tilde{\tilde{X}}^T(N)) = \tilde{\tilde{X}}^{+T}(N)\tilde{\tilde{X}}^{+}(N).$$

This approach allows to reorganize points of the set of unnamed documents and high level of confidence to extend the document training sample for each category for the following classification.

So, we have extended documents training sample for applying of any classification algorithm. A new set of points represents, geometrically, ellipsoidal containers, therefore apply the verification of disjointness created containers to reduce the influence of distortion of formed training sample.

Considering (2) for the 1st, 2nd and N-grade appropriately, ellipsoidal containers can be represented as follows

$$V_1(x) = d_1^{-2}(x-\hat{\hat{x}}(1))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(1))(x-\hat{x}(1)) \le 1,$$
$$V_2(x) = d_2^{-2}(x-\hat{\hat{x}}(2))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(2))(x-\hat{x}(2)) \le 1, \quad (7)$$
$$V_N(x) = d_n^{-2}(x-\hat{\hat{x}}(N))^T R(\tilde{\tilde{X}}^T(N))(x-\hat{x}(N)) \le 1.$$

disjointness of these containers could be made with checking the following conditions

$$x(i_l)\bar{\in}\{x : V_2(x),\ldots,V_N(x) \le 1\}, l = \overline{1,n_1},$$
$$x(j_s)\bar{\in}\{x : V_1(x),V_3(x),\ldots,V_N(x) \le 1\}, s = \overline{1,n_2}, \quad (8)$$
$$x(k_r)\bar{\in}\{x : V_1(x),V_2(x),\ldots,V_{N-1}(x) \le 1\}, r = \overline{1,n_m}.$$

Correlation (8) is only the requirement of disjointness ellipsoidal containers (7), but if

$$V_1(x(j_s),x(k_r)) > \Delta, s = \overline{1,n_2}, r = \overline{1,n_m},$$
$$V_2(x(i_k),x(k_r)) > \Delta, k = \overline{1,n_1}, r = \overline{1,n_m}, \quad (9)$$
$$V_N(x(i_k),x(j_s)) > \Delta, k = \overline{1,n_1}, s = \overline{1,n_2}.$$

where Δ is much greater than 1, then these conditions almost provide the disjointness of containers. At this stage, expected that data in the training sample is complete, that is achieved including outlined above way,

$$\det R(\tilde{\tilde{X}}^T(D)) > 0, D = 1,2\ldots N.$$

Otherwise, should be applied in determining the functions $V_1(x), V_2(x), \ldots V_n(x)$ instead of matrix $R(\tilde{\tilde{X}}^T(D))$ regularized matrix. If the ellipsoidal containers cross, we can use the way of sequential filtration of the most similar objects using recurrence relations which are proposed in [6].

Taking into account foregoing, there is the following combined algorithm of the classification that is based on clustering.

Step 1.Clustering data sets, including both named and unnamed data. As a result, we have an extended set of named data (training sample).

Step 2. Classification using the extended training set.

This approach engaged to use positive aspects of clustering and classification, it can reduce the impact of small training sample on classification results.

A set of documents for testing

We have a set of documents that consists of collection of 8300 essays, each document is classified to one of 65 categories.

For classifier testing purpose, it can be used the part of the collection and compare the results of the classifier with the results that were obtained through essays.

To assess the classifier, we use several metrics:

P = kr / n – (precision) – the ratio of the number of documents that have been assigned to the correct category of the total number of documents which belongs to this category.

R = kr / r – (recall) – the ratio of the number of documents that have been assigned to the correct category of the total number of documents which belongs to a particular category by results of the classification.

In Figure 1 we can see this dependence of evaluation parameters of the classifier on the completeness of the training sample.

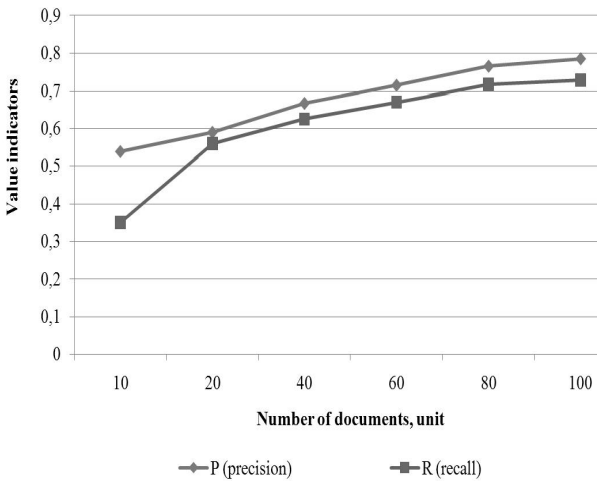


Fig.1.Test results of the classifier.

Conclusions

The test results show that the documents classification strongly depends on the quality and the size of the training sample. The proposed method combines the positive qualities of the ways of clustering and classification, which, at testing, have showed very good results of the classification of essays collection in ukrainian language. Considering almost the absence of training and test samples for printed documents in Ukrainian language the outlined approach can significantly improve the development and testing of new algorithms of classification. Further it's possible to apply this approach to the web pages, for this should be improved the automatic collection and pre-processing incoming web-documents.

References

1. *Nigam K.* Text Classification from Labeled and Unlabeled Documents using EM / Nigam K., Mccallum A., Thrun S., Mitchell T. // Machine Learning. – 1999. – P.103 –134.

2. *Wang J.* On transductive support vector machines / Wang J. Xiaotong S., Wei P. // Prediction and Discovery American Mathematical Society – 2007.– vol. 444 – P. 7 – 19.

3. *Zeng H.* CBC: Clustering Based Text Classification Requiring Minimal Labeled Data / Zeng H., Wang X., Chen Z., Ma W. // ICDM. Third IEEE International conference : Beijing. – 2003. – P. 443 – 450.

4. *Korlyuk A.* Hyperplane classifier of full-text documents / A. Korlyuk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics&Mathematics- 2012. - №4. - С. 136 – 138.

5. *Kirichenko M. F.* Method of K-hyperplane clustering of text information / M. F. Kirichenko, O. S. Korlyuk // USiM. – 2008. – № 5. – P. 79 –75 (in russian).

6. *Kirichenko M. F.* Container Funds clastering and classification of signals / M. F. Kirichenko, O.S. Korlyuk // Cybernetics and systems analysis. – 2009. – № 5. – P. 111–118 (in russian).

Arriving to an editorial board 03.02.13.

УДК 519.816 (075.8)

Лавер* В.О., аспірант

Нечіткі узагальнення пропорційного податку

В статті розглядається застосування теорії нечітких множин до класичної задачі розподілу витрат. Наводяться варіанти нечітких узагальнень пропорційного податку.

Ключові слова: розподіл витрат, нечіткі моделі і методи, пропорційний податок.

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46,
e-mail: v.laver@gmail.com

V.O. Laver*, postgraduate student

Fuzzy generalizations for the proportional rule

The application of the fuzzy sets theory to the classical rationing problem is being considered. Fuzzy generalizations of the proportional rule are given.

Key words: rationing, fuzzy sets, proportional rule.

National University of Uzhgorod, 88000,
Uzhgorod, Pidgirna str., 46,
e-mail: v.laver@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Introduction

Fair allocation of joint cost (or joint surplus) is one of the central themes in cooperative games theory. In particular, the distribution of some homogeneous good between agents according to some profile of claims was also a popular problem for axiomatic analysis. This distribution model is often referenced as "the bankruptcy problem [1].

The oldest formal principle of distributive justice is the proportional principle. It was mentioned even by Aristotle, who stated that "Equals should be treated equally and unequals, unequally in proportion to relevant similarities and differences" [2]. Many works are dedicated to the axiomatic characterization of the proportional method [1,3-5], there are even some probabilistic generalizations of this allocation method [6]. Some authors proposed a dynamic approach to the allocation problem with the generalizations of proportional method being considered [7].

All of the above-mentioned methods deal with crisp data. In this paper we consider the application of fuzzy sets theory to the classic rationing problems. In particular, fuzzy generalizations of the proportional method are proposed.

The formulation of the problem

Rationing problem is a triple (N,c,b), where N is a finite set of agents, the nonnegative real number c represents the amount of resources to be divided, the vector $b=(b_i)_{i\in N}$ specifies for each agent i a claim b_i, and these numbers are such that

$$0 \le b_i,\ \forall i \in N:\ 0 \le c \le \sum_{i\in N} b_i. \qquad (1)$$

A solution to the rationing problem is a vector $x=(x_i)_{i\in N}$, specifying a share x_i for each agent i, such that

$$0 \le x_i \le b_i,\ \forall i \in N : \sum_{i\in N} x_i = c. \qquad (2)$$

There are different ways of interpreting the rationing problem. One of the oldest interpretations is the inheritance problem (here c is the liquidation value of the bankrupt firm, b_i is the debt owed to creditor i [8]). Other important examples include taxation and cost sharing of the indivisible public good.

Rationing occurs in markets where the price of a commodity is fixed (for instance, at zero): c is the available supply and b_i is agent i's demand. Medical triage is an example: c measures the available medical resources and b_i is the quantity needed by agent i for full treatment.

Often the resources to be divided come in indivisible units: organs for transplants, seats in crowded airplanes or in popular sports events, visas to potential immigrants as well as cars allocated by General Motors to its car dealers. In this case b_i and c are integers (e.g. in the case of visas or organs b_i can only be 0 or 1) [1].

Without reducing the generality, let us consider the rationing problem as a cost sharing problem.

© В.О. Лавер, 2013

Thus, c is interpreted as the production cost of an indivisible public good, b_i are interpreted as initial amount of money of agent *i*. Both c and b_i are non-negative real numbers.

There are three main principles of cost allocation:

- Uniform gains: $x_i = b_i - \left(\sum_{i\in N} b_i - c\right)/n,$ $\forall i \in N$;
- Uniform losses : $x_i = \frac{c}{n},\ \forall i \in N$;
- Proportional principle.

In certain circumstances the inequality $x_i \le b_i$ may be violated by the decision maker. Also, we have to take in count the fuzziness of the real data. It is possible that some agent will try to drift from its share (or its real share will differ from the "theoretical" value due to rounding errors). This all leads to the fuzzy generalizations of the rationing methods.

Fuzzy generalizations of proportional method

Let us consider a rationing problem (*N*,*c*,*b*), where *N* is a set of agents, |*N*|=*n*, *c* is the value of the costs to be distributed, vector $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ is the vector of initial money amounts.

The proportional rationing method is defined as follows: $x = pr(N,c,b) = \frac{b_i}{b_N}\cdot c$, whenever $b_N > 0, b_N = \sum_{i\in N} b_i$ (whenever $b_N = 0$ all rationing methods select *x*=0).

Let us break the set *N* in two subsets. In the first subset, which we denote as N_1, we include all the agents for which $\frac{b_i}{b_N} < R$ (where the value of *R* is set by the decision maker). All other agents we include in the other subset - N_2. In general, the principle of breaking the subset N in two subsets is chosen by the decision maker.

Let denote $\hat{x}_i, i \in N$ the share, that proportional rule assigns to the agent *i*. We can set the threshold values: α_i – how many percents of his share agent *i* could pay without complaints; β_j – how many percents of his share agent *j* ($j \in N_2 = N \setminus N_1$) could overpay to cover the "deficit".

The shares of the agents will be right sided trapezoidal fuzzy numbers $x_i = (\underline{x}_i, \hat{x}_i)$, where $\underline{x}_i = \alpha_i \hat{x}_i$, $i \in N_1$, and $x_j = (\hat{x}_j, \bar{x}_j)$, $\bar{x}_j = (1+\beta_j)\hat{x}_j$, $j \in N_2$.

Let $\mu_i(\tilde{x}_i)$ denote the membership function of agent's *i* share. We introduce the function

$$\tau(x,c) = \begin{cases} 1, \sum_{i\in N} x_i = c; \\ 0, \sum_{i\in N} x_i \ne c. \end{cases}$$

We can consider $\tau(x,c)$ as membership function of the fuzzy goal and $\mu_i(\tilde{x}_i)$ as the membership function of the fuzzy constraints. Then, according to the Bellman-Zadeh approach, the decision's membership function will be

$$\mu_D(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_i \{\mu_i(x_i), \tau(x,c)\} \qquad (3)$$

We consider $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, on which the function (3) reaches its maximum, as the crisp solution of the fuzzy rationing problem.

Thus, the process of finding the optimal share is reduced to the following linear programming problem:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N, \\ &\sum_{i\in N} x_i = c, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N. \end{aligned}$$

If the obtained solution does not satisfy the decision maker, we need to change the threshold values.

The case of fuzzy costs

Let the costs is a triangular fuzzy number: $c = (\underline{c}, \hat{c}, \bar{c})$. In this case we need to consider two problems – the problem in optimistic case ($c \in [\underline{c}, \hat{c}]$) and the problem in pessimistic case ($c = [\hat{c}, \bar{c}]$).

In the optimistic case the fuzzy proportional rule will be reduced to a following linear programming problem:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N, \\ &\mu_c(c) \ge \lambda, \\ &\sum_{i\in N} x_i = c, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N, c \in [\underline{c}, \hat{c}]. \end{aligned}$$

$\mu_c(c)$ – the fuzzy costs membership function, the agents' membership functions are computed considering that the proportional rule is applied for $\hat{c}$.

For the pessimistic case we must recomputed the agents' shares for $\bar{c}$. The problem in this case will have similar look:

$$\lambda \to \max,$$
$$\bar{\mu}_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N,$$
$$\mu_c(c) \ge \lambda,$$
$$\sum_{i \in N} x_i = c,$$
$$0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N, c \in \left[\hat{c}, \bar{c}\right]$$

$\bar{\mu}_k(x_k)$ - new membership functions of the agents.

When the both problems are solved, we compare λ in both cases. The solution of the problem will be the share with maximal λ. In the case when λ is equal in both cases, the choice of the solution is left to the decision maker.

Example. Consider *n*=5 agents. We have to share among them *c*=30 units of costs. Initial money amounts are, respectively, 4, 12, 20, 24 and 30. Let α=25%, β=20%.

Let's find the ratio of each agent's money to the total amount: $\frac{b_1}{b_N} \approx 0{,}04$, $\frac{b_2}{b_N} \approx 0{,}13$, $\frac{b_3}{b_N} \approx 0{,}22$, $\frac{b_4}{b_N} \approx 0{,}27$, $\frac{b_5}{b_N} \approx 0{,}33$. Let *R*=0,2. In this case we can include agent 1 and agent 2 in the first group, all other agents will be included to the second group.

Agents' shares will be right sided trapezoidal fuzzy numbers, respectively, $(1;\frac{4}{3})$, (3;4), $(\frac{20}{3};8)$, (8;9,6), (10;12) with following membership functions:

$$\mu_{x_1}(x) = \begin{cases} 1, x \le 1; \\ 4 - 3x, 1 < x \le \frac{4}{3}; \\ 0, x > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

$$\mu_{x2}(x) = \begin{cases} 1, x \le 3; \\ 4 - x, 3 < x \le 4; \\ 0, x > 4. \end{cases}$$

$$\mu_{x_3}(x) = \begin{cases} 1, x \le \frac{20}{3}; \\ \frac{24-3x}{4}, \frac{20}{3} < x \le 8; \\ 0, x > 8. \end{cases}$$

$$\mu_{x_4}(x) = \begin{cases} 1, x \le 8; \\ \frac{9{,}6-3x}{1{,}6}, 8 < x \le 9{,}6; \\ 0, x > 9{,}6. \end{cases}$$

$$\mu_{x_5}(x) = \begin{cases} 1, x \le 10; \\ \frac{12-x}{2}, 10 < x \le 12; \\ 0, x > 12. \end{cases}$$

To find the optimal solution we have to solve the following linear programming problem:

$$\lambda \to \max;$$
$$3x_1 + \lambda \le 4;$$
$$x_2 + \lambda \le 4;$$
$$3x_3 + 4\lambda \le 24;$$
$$x_4 + 1{,}6\lambda \le 9{,}6;$$
$$x_5 + 2\lambda \le 12;$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 30;$$
$$0 \le \lambda \le 1, x_i \ge 0, i = \overline{1,5}.$$

The solution of this problem is vector $\left(\frac{151}{141}, \frac{151}{47}, \frac{980}{141}, \frac{392}{47}, \frac{490}{47}\right)$. $\lambda = \frac{37}{47} \approx 0{,}78$.

Let the cost value be a triangular fuzzy number: *c*=(29,30,31). All other conditions remain the same.

To find the optimal shares in optimistic case we need to solve the following problem:

$$\lambda \to \max;$$
$$3x_1 + \lambda \le 4;$$
$$x_2 + \lambda \le 4;$$
$$3x_3 + 4\lambda \le 24;$$
$$x_4 + 1{,}6\lambda \le 9{,}6;$$
$$x_5 + 2\lambda \le 12;$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_i - c = 0; \; c - \lambda \ge 29;$$
$$0 \le \lambda \le 1, x_i \ge 0, i = \overline{1,5}, 29 \le c \le 30.$$

The solution of this problem is the vector (1,061; 3,183; 6,911; 8,294; 10,367), $\lambda = \frac{89}{109} \approx 0{,}817$, costs are *c*=29,816.

Table 1. Comparison of the results

Number of agent	1	2	3	4	5	λ	*c*
Initial money ammount	4	12	20	24	30	-	
Proportional Rule (PrR)	4/3	4	20/3	8	10	-	30
Fuzzy PrR (FPrR)	1,071	3,213	6,95	8,34	10,426	0,78	30
FPrR+fuzzy c	1,061	3,183	6,911	8,294	10,367	0,817	29,816

Maximal costs value in the pessimistic case is 31, thus new shares will also be right sided trapezoidal fuzzy numbers: $x_1 = \left(\frac{62}{180}, \frac{62}{45}\right)$, $x_2 = \left(\frac{62}{60}, \frac{62}{15}\right)$, $x_3 = \left(\frac{62}{9}, \frac{124}{15}\right)$, $x_4 = \left(\frac{124}{15}, \frac{248}{25}\right)$, $x_5 = \left(\frac{31}{3}, \frac{62}{5}\right)$. Costs can vary from 30 to 31.

So, in this case we have to solve the following problem:

$$\lambda \to \max;$$
$$90x_1 + 93\lambda \le 124;$$
$$30x_2 + 93\lambda \le 124;$$
$$45x_3 + 62\lambda \le 372;$$
$$75x_4 + 124\lambda \le 744;$$
$$15x_5 + 31\lambda \le 186;$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_i - c = 0;$$
$$31 - c \ge \lambda;$$
$$0 \le \lambda \le 1, x_i \ge 0, i = \overline{1,5}, 30 \le x_i \le 31.$$

The solution of this problem is vector (0,695; 2,086; 7,357; 8,827; 11,035), where $\lambda = \frac{1372}{2077} \approx 0{,}66$ and costs c=30. λ is bigger on the first interval, so the corresponding share will be the solution. The obtained results are compared in Table 1.

Conclusion

The method, which was applied for fuzzification of the proportional rule, works well with other rationing methods (uniform gains, uniform losses, Talmudic method) too. The main idea is in breaking the set of agents in two subsets, where agents in the first subset pay less than their share, and the deficit is covered by the agents in the second subset, which pay more than their shares. This idea was inspired by the progressive tax system.

So, the fuzzy rationing methods, fuzzy proportional rule in particular, allow to take in count not only the fuzziness of real data, but also the unequality between the agents.

Also, the considered method can be applied to other problems (for example, it can be applied to the problem of public goods production) [9-11].

Bibliography

1. *Moulin, H.* Axiomatic Cost and Surplus-Sharing // Working Papers 2001-06, Rice University, Department of Economics, 2001.
2. *Deutsch, M.* Distributive Justice: A Social-Psychological Perspective // Yale University Press, New Haven, CT, 1985.
3. *Banker, R.* Equity considerations in traditional full cost allocation practices: An axiomatic perspective // S.Moriarty, ed., Joint Cost Allocations, (University of Oklahoma, Oklahoma City), 1981. – P. 110-130.
4. *Moulin, H.* Equal or proportional division of a surplus and other methods // International Journal of Game Theory, 16, 3, 1987. – P. 161-186.
5. *Chun, Y.* The proportional solution for rights problems // Mathematical Social Sciences,15, 1988. – P. 231-246.
6. *Tasnádi A.* On Probabilistic Rationing Methods // Mathematical Social Sciences 44, 2002 – P. 211-221.
7. *Marchant, T.* Rationing: dynamic considerations, equivalent sacrifice and links between the two approaches // Working Paper, Ghent University, May, 2004.
8. *Aumann, R.., Maschler M.,* Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud // Journal of Economic Theory, 36, 1985 – P. 195-213.
9. *Voloshin O., Laver V.* Collective Product Cost Sharing in Conditions of Managed Economy // International Book Series „Information Science and Computing, 2009. – V. 3/2009, N15. – P. 200-2005.
10. *Laver V.* Fuzzy cost sharing models of the public goods production. – Shid: Analytical and information journal.– 2010.- №7. – pg. 60-63. (in Ukrainian)
11. *Voloshin O., Laver V.* Fuzzy generalizations of the rationing problems // Information Models of Knowledge, ITHEA, Kiev – Sofia, 2010. – P.215-219. (in Russian)

Надійшла до редколегії 12.03.13

УДК 519.7

Песчаненко В. С.[1], к.ф-м.н., доцент
Губа А. А.[2], аспірант,
Шушпанов К. І., програміст[3]

Змішаний конкретно-символьний предикатний трансформер

Анотація

Представлена технологія, яка дозволяє у зазначених випадках замість класичного символьного моделювання використовувати пряме виконання C++ коду разом із символьним розв'язанням та доведенням. Описано обмеження на вхідні данні та доведено, що таке розділення задач не призводить до суперечностей, а результат знаходиться у виявлених обмеженнях.

Ключові слова: верифікація, символьне моделювання, інсерційне моделювання, генерація тестів.

[1] Херсонський державний університет, 73000, м. Херсон, вул. 40 Років Жовтня, 27,
e-mail: vladimirius@gmail.com
[2] Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова Національної академії наук України, відділ 100, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 40,
e-mail: antonguba@ukr.net
[3] ООО «Інформаційні програмні системи», 03680, м. Київ, вул. Боженка 15,
e-mail: costa@iss.org.ua

Peschanenko V. S.[1], PhD, associate professor,
Guba A. A.[2], PhD student,
Shushpanov C. I.[3], software developer

Mixed concrete-symbolic predicate transformer

Annotation

The technique that allows the use of direct execution of C++ code together with symbolic solving and proving instead of classical symbolic modeling is presented. The restrictions on incoming data are described and it is proved that defined separation of tasks does not lead to contradictions and corresponds to the detected constraints.

Key Words: verification, symbolic modeling, insertion modeling, test case generation.

[1] Kherson state university, 73000 Ukraine, Kherson, 40 Rokiv Zovtna street, 27,
e-mail: vladimirius@gmail.com
[2] Department 100 of Glushkov Institute of cybernetics NAS Ukraine, 03680, Kyiv, Glushkova ave., 40,
e-mail: antonguba@ukr.net
[3] LLC «Information software systems», 03680, Kyiv, str. Bozhenko 15,
e-mail: costa@iss.org.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012)

Introduction

Modern software is becoming increasingly complex and needs to be highly reliable. Testing is commonly used for ensuring the reliability of software but it does not guarantee a detection of all errors in the product. Considering that the volume and complexity of requirements of software are increasing, the problem of automatic verification of industrial projects is actual problem. The technique of symbolic verification of requirement specifications of software systems has shown good results in automatic detection of reachability of deadlocks and violation of user-defined properties [1]. In previous works [1-5], symbolic models of systems, which are transition systems with symbolic states represented by formulae of first order logic, were considered. A relation of transitions between the formulae is determined and marked by basic protocols, which are considered as actions performed in the system. A basic protocol is a formula of dynamic logic $\forall x(\alpha(x,r) \rightarrow < P(x,r) > \beta(x,r))$ and describes the local properties of a system in terms of pre- and postconditions α and β. Both are formulae of first order multisorted logic interpreted on a data domain, P is a process, represented by means of an MSC diagram, and describes the reaction of a system triggered by the precon dition, x is a set of typed data variables, and r is a set of environment and agent attributes. The general theory of basic protocols is presented in [2].

At transitions in the space of formulas, a postcondition is considered as an operator. As the

© V.S. Peschanenko, A.A. Guba, C.I. Shushpanov, 2013

operator transforms one formula to another, in [3] a term "predicate transformer" was used. Thus, to compute transitions between the states of such models, basic protocols are interpreted as predicate transformers: for a given symbolic state of a system and a given basic protocol, the direct predicate transformer generates the next symbolic state as its strongest postcondition and the backward predicate transformer generates the previous symbolic state as its weakest precondition. These concepts have been implemented in VRS (Verification of Requirement Specifications) system [4] and IMS (Insertion Modeling System) system [5].

Splitting formulae into concrete and symbolic parts

There are two main disadvantages of "classic" symbolic modeling [6]: expensive proving and solving processing during the modeling of a system behavior and inability of processing concrete run-time values, for example, when the decision procedure cannot handle the complex mathematical constraints that are generated or when code that uses native or external libraries shall be processed. Therefore, the formulae shall be split into two parts: concrete and symbolic. For this purpose, we split the formulae of initial state and both pre- and postconditions of each basic protocol into two parts.

Data types

Before talking about splitting formulae into symbolic and concrete parts let us see which data types could be supported by our models. User can use the APS [7] data types in the models:

a) simple data types: Boolean, integer, real, enumerated, and symbolic,

b) structured data types: uninterpreted functional symbols, arrays, and lists of simple date types.

Symbolic type is represented by expression in algebra of free terms. Enumerated type is a user-defined one contains symbolic constants (atomic expressions in algebra of free terms). Parameters and returned value of uninterpreted functional symbols are simple data types only. Let denote that if we are talking about functional, then we mean uninterpreted functional symbol. Arrays are considered as uninterpreted functional symbols with bound restrictions for values of parameters.

Concrete basic protocols technique

User requirements for formula splitting into symbolic and concrete parts can be defined by the following statements:

1. User should define a set of concrete attributes in project which always have concrete values in a model.

2. System should analyze this user's defined set of concrete attributes and split initial environment state and basic protocol into two parts: symbolic and concrete.

3. If this splitting is impossible, then it prints error message and finishes its work.

Set of concrete attributes

In general, it is hard to determine automatically which attribute has concrete values in model. From other point of view, user, who has created a model, knows which attributes always have concrete values in it. So, let *c* be a set of attributes, which always has concrete values in a model. This set is defined by user. *c* is called the set of concrete attributes.

Set c should be finite, because otherwise it is hard to understand what should be done for functionals with integer or real parameters. For example, we have next definition of functional: *f: (int) → int*, initial state: *f(0) = 0*. So, what should we say about formula $(f(i) = 0) \wedge (i \neq 0)$? All of them could have any integer value and the last formula is unsolvable in terms of concrete model, because it defines infinite set of attributes (…, *f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)*, …). Attribute of symbolic type can be handled as concrete if it consists only from concrete attributes, because, in general, it can have infinite set of values. Abstract lists, which have arbitrary number of values in their elements, cannot be used, because it is impossible to implement this with concrete values only. For example, we have a list: *l: list of int*, initial: *l = (Nil;Nil)*, where ";" marks abstract part, and basic protocol $(get\_from\_head(l)>0) \rightarrow <>1$, where *get_from_head* function returns head of the list. So, let's try to apply it to initial: $\exists x(x>0 \wedge l = (x,Nil;Nil))$. It is wrong to change this formula by concrete value of x, because it is just a property and we don't know any concrete value of x. So, attribute *l* can't be a concrete attribute.

Finally, we can define following restrictions for set *c*:

1) Each concrete attribute from *c* should always have one or finite number of concrete values.

2) Symbolic concrete attribute is allowed if it value is constructed from other concrete attributes from *c*.

3) Functional with integer, real or symbolic parameters could not be used as concrete attribute.

4) Abstract list are forbidden in *c*.

Algorithm of splitting environment state formulae and basic protocols conditions into symbolic and concrete parts.

Let *E(r)* be an environment state. Application of a basic protocol to an environment state looks like the following formula:

$$(\exists(x,r)(E(r)\wedge\alpha(x,r))\neq\varnothing)\Rightarrow$$
$$\exists x\ pt(E(r)\wedge\alpha(x,r),\beta(x,r)),$$

where *pt* is a function of predicate transformer [3]. In general, a postcondition of basic protocol can be considered as following conjunction:

$$\beta(x,r)=A(x,r)\wedge L(x,r)\wedge C(x,r)$$

where *A(x,r)* is a conjunction of assignments, *L(x,r)* is a conjunction of list operators *add_to_tail*, *add_to_head*, *C(x,r)* is a formula part of postcondition.

Let $E(r/c)\wedge E_c$ be an environment state, where *r/c* is the set of attributes, which have symbolic values, *c* is the set of concrete attributes defined by user, and E_c is a disjunction of conjunctions of concrete values of attributes from c. Any concrete attribute in *c* has corresponded concrete value in all conjunctions in E_c. For example, let

$r=\{x,y,z\}, c=\{y,z\},$

$E(r)=x>0\wedge((y=1)\wedge(z=1)\vee(y=2)\wedge(z=3))$

then

$E(r/c)=E(x)=(x>0),$

$E_c=(y=1)\wedge(z=1)\vee(y=2)\wedge(z=3)$.

User, who creates a specification, knows attributes, which have concrete values in a project. It means that it is always possible to split such environment into concrete and symbolic parts. From that point of view, the pre- and postconditions could be split in concrete and symbolic part too:

$\forall x(\alpha(x,r/c)\wedge\alpha_c\rightarrow<P_c(x,r/c)>\beta(x,r/c)\wedge\beta_c)$

where α_c is a concrete precondition, β_c is a concrete postcondition, $P_c(x,r/c)$ is obtained from $P(x,r)$ after substitution of concrete values from E_c.

Therefore, the restrictions for basic protocols are following:

5) α_c,β_c shouldn't depend on parameters of basic protocol x.

6) If $l\in c$ and *l* is a concrete list, then list operators *add_to_tail*, *add_to_head* can contain constant or expression with attributes from *c* only. It is possible to use an expression with attribute from *c* for calculation of its value after substitution of concrete values.

7) $\beta_c=A(c)\wedge L(c)$ can contain assignments and list operators only, because formula *C(c)* of postcondition expresses some property which should be true after application of basic protocol. It means that attributes from *C(c)* should lose their concrete values and should satisfy *C(c)*. In that case the restriction 1) is broken.

Let $E(r/c)\wedge E_c$ be an environment state, $B=\forall x(\alpha(r/c)\wedge\alpha_c\rightarrow<P_c(x,r/c)>\beta(x,r/x)\wedge\beta_c)$

Theorem 1.

$pt(E(r/c)\wedge E_c\wedge\alpha(x,r/c)\wedge\alpha_c,\beta(x,r/c)\wedge\beta_c)=$
$pt(E(r/c)\wedge\alpha(x,r/c),\beta(x,r/c))\wedge pt(E_c\wedge\alpha_c,\beta_c)$

Proving.

pt function builds lists r_{pt},s_{pt},z_{pt} from postcondition $\beta(x,r/c)\wedge\beta_c$ and formula $E(r/c)\wedge E_c\wedge\alpha(x,r/c)\wedge\alpha_c$, where r_{pt} is a set of attributes expressions from left part of assignment of postcondition, s_{pt} is a set of attributes expressions from formula part of postcondition, z_{pt} is a set of other attributes expressions from formula and postcondition. We know that sets of attribute expressions from pairs $E(r/c)\wedge\alpha(x,r/c)$ and $E_c\wedge\alpha_c$, $\beta(x,r/c)$ and β_c are not intersected. It means that we could split each set r_{pt},s_{pt},z_{pt} on two sets $r_{pt}=r_{r/c}\cup r_c, s_{pt}=s_{r/c}\cup s_c, z_{pt}=z_{r/c}\cup r_c$ and $r_{r/c}\cap r_c=\varnothing$, $s_{r/c}\cap s_c=\varnothing$, $z_{r/c}\cap z_c=\varnothing$, because $r/c\cap c=\varnothing$. Let's write formula which is built by *pt* function.

Let $D(r/c)=E(r/c)\wedge\alpha(x,r/c), D_c=E_c\wedge\alpha_c$, so

$q_i=\exists(x_{r/c},y_{r/c},x_c,y_c)(D(x_{r/c},y_{r/c},z_{r/c})\wedge$
$R_i(x_{r/c},y_{r/c},z_{r/c})\wedge L_i(x_{r/c},y_{r/c},z_{r/c})\wedge$
$E_i(x_{r/c},y_{r/c},z_{r/c})\wedge$
$(\vee_j D_c(x_c,y_c,z_c)\wedge$
$R_j(x_c,y_c,z_c)\wedge$
$L_j(x_c,y_c,z_c)\wedge$
$E_j(x_c,y_c,z_c)))\wedge$
$C(r_{r/c},s_{r/c})=$
$\exists(x_{r/c},y_{r/c})(D(x_{r/c},y_{r/c},z_{r/c})\wedge$
$R_i(x_{r/c},y_{r/c},z_{r/c})\wedge L_i(x_{r/c},y_{r/c},z_{r/c})\wedge$

where $x_{r/c},y_{r/c},x_c,y_c$ are variables which are obtained from $r_{r/c},s_{r/c},r_c,s_c$ sets accordingly, pt replaces attribute expressions from $r_{r/c},s_{r/c},r_c,s_c$ on these variables in $D(r/c),D_c$ and some part of

R_i, L_i, E_i, R_j, E_j. L_i is a symbolic list part of postcondition, L_j is a concrete list part of postcondition.

$R_i(x_{r/c}, y_{r/c}, z_{r/c}) =$

$(r_1 = t_1(x_{r/c}, y_{r/c}, z_{r/c})) \wedge (r_2 = t_2(x_{r/c}, y_{r/c}, z_{r/c})) \wedge ...)$

$R_j(x_c, y_c, z_c) = (r_1 = t_1(x_c, y_c, z_c)) \wedge$

$(r_2 = t_2(x_c, y_c, z_c)) \wedge ...)$

R_i (R_j) is obtained from after substitution of variables instead of attribute expressions from $r_{r/c}(r_c)$ in right-sides of assignments.

To describe the construction of $E_i(x_{r/c}, y_{r/c}, z_{r/c})$, we will consider the set *M* of all pairs of functional expressions of the form $(f(u), f(v)), u = (u_1, u_2, ...), v = (v_1, v_2, ...)$, where f(u) is chosen from list $r_{r/c}$, and f(v) – from lists $s_{r/c}, z_{r/c}$. These functional expressions must be equal, if their arguments were equal before application of basic protocol. Similarly for $E_j(x_c, y_c, z_c)$, $C(r_{r/c}, s_{r/c})$ is a formula part of postcondition. $C(r_c, s_c) = 1$, because of restriction 7.

So,

$pt(D(r/c) \wedge D_c, \beta(x, r/c) \wedge \beta_c) =$

$q_1^{r/c} \wedge (\vee_j q_j^c) \vee q_2^{r/c} \wedge (\vee_j q_j^c) ... =$

$= (q_1^{r/c} \vee q_2^{r/c} \vee ...) \wedge (\vee_j q_j^c) =$

$= pt(D(r/c), \beta(x, r/x)) \wedge pt(D_c, \beta_c)$

Theorem is proved.

Let $E(r/c) \wedge E_c$ be an environment state,

$B = \forall x(\alpha(x, r/c) \wedge \alpha_c(c) \rightarrow$

$< P_c(x, r/c) > \beta(x, r/c) \wedge \beta_c(c))$

Lemma 1.

If $E_c \wedge \alpha_c(c)$ satisfy restrictions 1-4 and basic protocol *B* satisfy restrictions 5-7 then new environment state $pt(E_c \wedge \alpha_c(c), \beta_c(c)) \neq 0$ satisfies restriction 1-4.

Proving.

Formula $pt(E_c \wedge \alpha_c(c), \beta_c(c))$ satisfies restrictions 2-4 because of monotony of *pt* function [2] (if $E_c \wedge \alpha_c(c)$ satisfies restrictions 2-4 then $pt(E_c \wedge \alpha_c(c), \beta_c(c))$ satisfies too). If basic protocol *B* satisfies restrictions 5-7 then $pt(E_c \wedge \alpha_c(c), \beta_c(c))$ satisfies the restriction 1, because it's impossible to make such transition that some attribute from *c* would obtain infinite number of concrete value without formulae part of postcondition, parameter of basic protocol and abstract lists.

So, lemma is proved.

This theorem and lemma mean that the application of a basic protocol which precondition, process, and postcondition are split into concrete and symbolic parts could be considered in the following way:

1) $E_c \wedge \alpha_c(c) \neq 0 \Rightarrow pt_c(E_c \wedge \alpha_c(c), \beta_c(c))$,

2) $(pt_c(E_c \wedge \alpha_c(c), \beta_c(c)) \neq 0) \wedge$
$(\exists x(E(r/c) \wedge \alpha(x, r/c)) \neq 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x\ pt((E(x, r/c) \wedge \alpha(x, r/c), \beta(x, r/c))) \wedge$
$pt_c(E_c \wedge \alpha_c(c), \beta_c(c))$

where pt_c is a concrete predicate transformer function that assigns the concrete values to the attributes from *c* set (sometimes it could create a disjunction of concrete values). This function could be easily translated into C++ language for each basic protocol with using of restrictions 1-7.

Implementation

In base language [2], we rely on the following types of functional symbols: integer, real, Boolean, symbolic, and a set of enumerated data types are defined as simple types. Functional symbols of arity 0 correspond to simple attributes; others correspond to the attributes of functional types or functional attributes. For list types, access functions are defined, and lists can change their values by adding or removing elements to (from) head or tail only. Thus, list types exhibit the behavior of queues. Attributes of array type are also possible. In separate C++ file concrete integer attributes could be represented as int attributes, concrete real attributes could be represented as double attributes, concrete Boolean attributes could be represented as bool attributes, concrete attributes of enumerated types could be represented as attributes of enum type with possible values. Functional attributes of aforementioned types could be represented as STL vector attributes of corresponding simple type. Attributes of list type could be represented as STL stack type. Attributes of array type could be represented as C++ array.

For each basic protocol, a separate C++ function shall be created. It should be defined with the help of the following pseudo code:

```
int apply_bp_name(CEnv *env, node_ptr &src, node_ptr &dst, int flag) {
    int f = 0;
    cv_ptr cv = fpl_get_user_data(src);
    if (cv.IsEmpty())
```

```
            return 0;
        if (concrete_precondition) {
            cv_ptr cv_r = cp_env_data(cv);
            concrete_postcondition;
            dst = fpl_mrg_or( fpl_make_user_data(cv_r), dst);
            f = 1;
        }
        return f;
    }
```

where *f* is returned value of status of application of basic protocol (1 – was applied, 0 – was not), *env* is current environment state, *src* is node of user data (concrete attributes), *dst* is node of user data for result (by default it has value 0), *cv* is current user data structure (a possible disjunction is unfolded inside applying of basic protocol function called apply_bp), *cv.IsEmpty()* is checking of pointer, *concrete_precondition* is checking precondition of concrete basic protocol, *concrete_postcondition* is applying postcondition of concrete basic protocol, name in function name is the name of basic protocol, the functions *fpl_make_user_data*, *fpl_get_user_data*, *fpl_mrg_or*, and *cp_env_data* are described below.

The function *fpl_make_user_data* translates user data structure in Clew [7] tree smart pointer node_ptr:

```
    node_ptr fpl_make_user_data(cv_ptr &cv) {
        long_ref_counter_ptr l;
        l.Attach((my_user_data*) *cv);
        return gfpl->make_user_data(l);
    }
```

where *cv* is a smart pointer to the user data, *l* – counter, *l.Attach* is a function for attaching smart pointers to the existent object, gfpl is a global main interpreter of STG (symbolic trace generator) [1], function make_user_data translates smart pointer into tree representation.

Function *get_user_data* translates a tree representation of user data to the smart pointer. It could return empty object if an input node t is not user data node:

```
    cv_ptr fpl_get_user_data(node_ptr &t) {
        if (t->get_mark() != gfpl-> userdatamrk)
            return cv_ptr();
        cv_ptr cv;
        cv.Attach((ConcreteValues*) *gfpl->get_user_data(t));
        return cv;
    }
```

where function *get_mark* returns a mark of APS node [7], *userdatamrk* is a mark for user data representation in the tree, *cv_ptr()* is an empty object, function *get_user_data* returns a smart pointer of *long_ref_counter_ptr*.

Function *fpl_mrg_or* is used to add a new conjunct into result in *concrete_apply_bp* functions:

```
    node_ptr fpl_mrg_or(node_ptr t1,node_ptr &t2) {
        return mrg(gfpl, gfpl->make_or(t1, t2));
    }
```

where function *make_or* makes a disjunction of two nodes and calls default canonizer for disjunction according to default APS function, *mrg* function constructs normal form using ac_local APS name.

The concrete_apply_bp functions should make a copy of current user data before making some changes in it. It is required because few protocols could be applied for one environment state and all next applications of basic protocols should have the corresponded values. The function *cp_env_data* should have the following pseudo code:

```
    cv_ptr cp_env_data(fpl_ptr& fpl, cv_ptr &prev) {
        cv_ptr cv;
        cv.New();
        …
        return cv;
    }
```

where *fpl* is the main interpreter, *prev* is a smart pointer of source user data, *cv* is a smart pointer of copy structure, *cv.New()* allocates memory for an object. The function should return *cv* object.

The pointer for each defined concrete_apply_bp function should be set into internal representation of apply_bp function:

```
    void init_bp_concrete() {
        std::map<std::string, CHashBP>& mp = dataLoader.get_bpMap();
        mp.find("MSC_name")->second.apply_bp_concrete = apply_bp_name;
        …
    }
```

where *CHashBP* is a class of loaded basic protocol (pre- and postcondition, parameters of basic protocols and its types, etc.), *dataLoader* is an object of project loader of apply_bp, mp is a hash of all loaded basic protocols.

If engine tries to apply a basic protocol with initialized concrete_apply_bp function then apply_bp calls first concrete_apply_bp. If concrete_apply_bp is applicable then apply_bp continues an application of the basic protocol with symbolic part of environment state. If concrete_apply_bp is not applicable, then apply_bp returns 0. The common scheme is presented below:

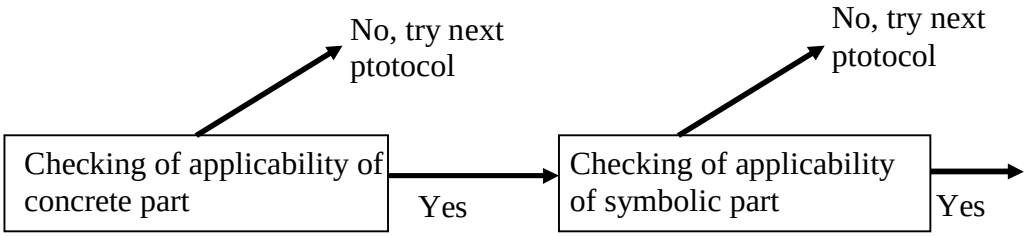


Fig. 1. Common scheme

Experiments

In this section, we present some results from our test suites. All projects were run on symbolic trace generator STG [2] and new mixed concrete-symbolic trace generator STG++.

The project test1 contains functional attribute of symbolic type with integer parameter, simple enumerated and simple integer attributes. All of these attributes initialize with concrete values and have concrete values all time during trace generation (basic protocols do not change those to symbolic ones).

The project test2 contains functional attribute of integer type with integer parameter, several simple enumerated and simple integer attributes, and Boolean attribute. Only functional attributes initialize with concrete values and have concrete values all time during trace generation.

The project test3 contains one functional attribute of integer type with integer parameter, one functional attribute of Boolean type with integer parameter, one functional attribute of symbolic type with two enumerated parameters, and three simple integer attributes. Only two integer and two functional attributes initialize with concrete values and have concrete values all time during trace generation.

Table 1

Comparison of the time on STG and STG++

Project	STG	STG++
test1	2h 30 min	1,8 sec
test2	332,6 sec	0,08 sec
test3	230,1 sec	0,07 sec

Conclusions

Symbolic modeling is a powerful technique for the automated reachability of deadlocks and violations of user-defined properties. We have proposed the technique that helps classical symbolic modeling gain in power in the cases where the proof of the symbolic part can be translated into a direct C++ code. Our technique uses direct execution of code together with symbolic solving and proving.

The nearest plans are investigation of dynamic separation formulae on concrete and symbolic parts, implementation of this technology for messages sending and receiving, timers setting, stopping, and expiration. Using of the technology to reduce interleaving in symbolic modeling and generation of specialized satisfiability and predicate transformer functions for each basic protocol.

References

1. *A. Letichevsky, J. Kapitonova, A. Letichevsky Jr., V. Volkov, S. Baranov, V. Kotlyarov, T. Weigert.* Basic Protocols, Message Sequence Charts, and the Verification of Requirements Specifications // Computer Networks. – 2005. – Vol. 47. – P. 662-675.
2. *A. Letichevsky, J. Kapitonova, V. Volkov, A. Letichevsky Jr., S. Baranov, V. Kotlyarov, T. Weigert.* System Specification with Basic Protocols // Cybernetics and System Analyses. – 2005. – Vol. 4. – P. 3-21.
3. *Letichevsky A. A., Godlevsky A. B., Letichevsky A. A. Jr., Potienko S. V., Peschanenko V. S.* Properties of Predicate Transformer of VRS System // Cybernetics and System Analyses. – 2010. – Vol. 4. – P. 3-16.
4. Verification for Requirement Specification (VRS): http://iss.org.ua/ISS_VRS_tool.htm.
5. *A. A. Letichevsky, O. A. Letychevskyi, V. S. Peschanenko.* Insertion Modeling System // PSI 2011, Lecture Notes in Computer Science. – 2011. – Vol. 7162. – P. 262-274.
6. Symbolic modeling, http://en.wikipedia.org/wiki/Model_checking
7. *A. A. Letichevsky, O. A. Letychevskyi, V. S. Peschanenko.* APS and Tools // Bulletin of Kharkiv National University V.N. Karazin. – 2010. – N. 890. – P. 145-153.

Надійшла до редколегії 03.12.2012.

УДК 12 2 1

d M

Satisfiability modulo linear arithmetic over a finite ring

There are developed mathematical methods intended for resolving the problem of analysis of satisfiability modular linear arithmetic over any finite associative (not necessary commutative) ring with non-zero multiplication. General schemes for solvers intended for analysis of satisfiability of formulae presented via any system of linear equations or linear disequalities are proposed. Time complexity of proposed solvers is estimated for finite fields and rings of residues.

Key Words: finite rings, linear arithmetic, satisfiability of formulae.

d M d M
r 3114 r r 4
e d

Скобелєв В.В., к.ф. м.н.

Виконання формул лінійної арифметики над скінченним кільцем

Розроблено математичний апарат, який призначено для розв'язання задачі дослідження виконання формул лінійної арифметики над скінченним асоціативним (не обов'язково комутативним) кільцем з операцією ненульового множення. Запропоновано загальні схеми, які призначено для дослідження виконання формул, які представлено системою лінійних рівнянь, або лінійних нерівностей. Досліджено часову складність запропонованих схем у випадках скінченого поля та кільця лишків.

Ключові слова: скінченні кільця, лінійна арифметика, виконання формул.

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, 83114, м. Донецьк, вул. Рози Люксембург, 74,
e d

Статтю представив чл. кор. НАН України, Анісімов А.В.

Introduction.

d r *SMT* r d d r d d r rd r r d r d d r rd r r *T* *SMT* *T*

r r 1 r rr d *DPLL* *T* 2 r d r r *SMT* *T* d r *SAT* r r d r d d d r r *T* r r d r r r *SMT* *T* d r r

r r r d r *SMT* r

r d *sat* r *unsat* r d r *T* r *T* r d d *sat* r d r d d *unsat* r d r

d r 3 d d r r

$S_1 \ldots S_n$

r r r d S_i $i = 1 \ldots n-1$ d d d d r T_i $T_i \subset T_{i+1}$ S_n d d d d r *T*

rd d d 4 d r d d *unknown* *T* *T* *DPLL* r

d d *SMT* *T* r r r 1 $T = LA\mathbf{Q}$ d r r

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \Diamond \quad \Diamond \in \le < \ne = \ge >$$

r r r r *LA*$\mathbf{Z}$ d r d $\Diamond \in \le =$ d d

r d r r r r $\mathrm{K} = K + \cdot$ $T = LA\mathrm{K}$ r r d r r r r

1. Typical structure of $LA(\mathbf{Z})$-solvers.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \lozenge 0$$

$$x_j = \sum_{i \neq j} a_{ji} x_i + c_j \quad (a_{ji}, c_j \in \mathbf{Z})$$

$$\sum_i a_{hi} x_i + b_h = 0$$

$$\sum_i a_{hi} x_i + b_h = 0$$

$$x_k = -\sum_{i \neq k} \alpha_{hk} a_{hi} x_i - \alpha_{hk} b_h \quad (\alpha_{hk} = a_{hk})^{-1}$$

$$a_{hk}\left(x_k + \sum_{i \neq k} a_{hi}^{(q)} x_i + b_h^{(q)}\right) + \sum_{i \neq k} a_{hi}^{(r)} x_i + b_h^{(r)} = 0$$

$$x_t = x_h + \sum_{i \neq k} a_{hi}^{(q)} x_i + b_h^{(q)}$$

$$x_j = \sum_{i \neq j} a_{ji} x_i + c_j$$

$$\sum_i a_i g^{-1} x_i + \lceil b g^{-1} \rceil \le 0$$

2. Preliminary analysis.

[illegible]

1) [illegible]

2) [illegible]

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' x_i a_i'' + b \neq 0$$

[illegible]

3) [illegible]

4) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

3. Some backgrounds of the ring theory.

[illegible]

Lemma 1. [illegible]

Proof [illegible]

[illegible]

[illegible]

Lemma 2. [illegible]

[illegible]

Lemma 3. [illegible]

[illegible]

[illegible]

$K^{l-zero} = \{a \in K \mid \forall x \in K \Rightarrow ax = 0\}$

$K^{r-zero} = \{a \in K \mid \forall x \in K \Rightarrow xa = 0\}$

[illegible]

1) [illegible]

2) [illegible]

3) [illegible]

[illegible]

1) [illegible]

2) [illegible]

3) [illegible]

4) [illegible]

[illegible] $C_{[illegible]}$ [illegible] $K = (K, +, \cdot)$ [illegible] $1_r \in K$ [illegible] $1_l \in K$ [illegible]

[illegible] $C_{[illegible]}$ [illegible] $K = (K, +, \cdot)$ [illegible] $1_l \in K$ [illegible] $1_r \in K$ [illegible]

Lemma 4. [illegible]

$$(C_1 \cup C_2) \cap D^{\alpha} = (C_1 \cup C_2) \cap D, \quad \alpha \in \{l, r\}. \quad (1)$$

Proof. [illegible] $D \subset D^l$ [illegible] $D \subset D^r$ [illegible]

$$(C_1 \cup C_2) \cap D^l \subseteq (C_1 \cup C_2) \cap D, \quad (2)$$

$$(C_1 \cup C_2) \cap D^r \subseteq (C_1 \cup C_2) \cap D. \quad (3)$$

[illegible] $K \in (C_1 \cup C_2) \cap D^l$ [illegible] $ax = b$ ($a \in K$, $b \in K$) [illegible]

[illegible] $K \in C_1 \cup C_2$ [illegible] $ax = b$ [illegible] $xa = b$ [illegible] $K \in (C_1 \cup C_2) \cap D^l$ [illegible] $xa = b$ ($a \in K$, $b \in K$) [illegible]

[illegible] $K \in (C_1 \cup C_2) \cap D$ [illegible]

$$(C_1 \cup C_2) \cap D \subseteq (C_1 \cup C_2) \cap D^l, \quad (4)$$

[illegible]

$$(C_1 \cup C_2) \cap D \subseteq (C_1 \cup C_2) \cap D^r$$

[illegible]

[illegible] 2 [illegible] 1 [illegible]

[illegible] 4 [illegible]

Corollary 1. [illegible]

$$(C_1 \cup C_2) \cap D^{\alpha} = (C_1 \cup C_2) \cap D, \quad \alpha \in \{l, r\}.$$

[illegible] 2 [illegible] $K \in C_4 \cup C_{[illegible]}$ [illegible]

[illegible] $K \in C_4$ [illegible]

+	[illegible]	a	b	c	$\cdot$	[illegible]	a	b	c
[illegible]	[illegible]	a	b	c	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
a	a	[illegible]	c	b	a	[illegible]	a	b	c
b	b	c	[illegible]	a	b	[illegible]	a	b	c
c	c	b	a	[illegible]	c	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible] $K \in C_{[illegible]}$ [illegible]

[illegible] $K = (K, +, \cdot)$ [illegible]

1) [illegible] $K \in C_1$ [illegible] K^{inv} [illegible] K [illegible] $(K^{inv}, \cdot)$ [illegible] K [illegible]

2) [illegible] $K \in C_3$ [illegible]

$$K^{l-inv} = \{u \in K \mid \exists v \in K : vu = 1\}$$

[illegible] K [illegible]

$$K^{r-inv} = \{u \in K \mid \exists w \in K : uw = 1\}$$

[illegible] K [illegible]

[illegible] $(K^{l-inv} \cap K^{r-inv}, \cdot)$ [illegible] K [illegible]

3) [illegible] $K \in C_4$ [illegible] $1_l \in K$

$$K^{l-inv}(1_l) = \{u \in K \mid \exists v \in K : vu = 1_l\}$$

[illegible] K [illegible] 1_l [illegible]

4) [illegible] $K \in C_{[illegible]}$ [illegible] $1_r \in K$

$$K^{r-inv}(1_r) = \{u \in K \mid \exists v \in K : uv = 1_r\}$$

[illegible] K [illegible] 1_r [illegible]

[illegible] $K = (K, +, \cdot) \in C_1$ [illegible] $< x > = K^{inv} x$ ($x \in K$) [illegible] K [illegible] $< [illegible] > =$ [illegible] $< \alpha > = K^{inv}$ ($\alpha \in K^{inv}$) [illegible]

$$< x > * < y > = < xy >$$

[illegible] $x, y \in K$ [illegible]

[illegible] 1 [illegible] $K = (K, +, \cdot) \in C_3$ [illegible]

[illegible] $K^{inv} = K^{l-inv} \cap K^{r-inv}$ [illegible] $< x >_l = K^{inv} x$ ($x \in K$) [illegible] l [illegible] $< x >_r = K^{inv} x$ ($x \in K$) [illegible] r [illegible] $y \in < x >_l$ ($x \in K$) [illegible] $z \in < x >_r$ ($x \in K$) [illegible] K^{inv} [illegible]

[illegible]

1) $< [illegible] >_l = < [illegible] >_r =$ [illegible]

2) $< \alpha >_l = < \alpha >_r = K^{inv}$ [illegible] $\alpha \in K^{inv}$ [illegible]

3) $< x >_l = < x >_r$ [illegible] $x \in K^{cntr}$ [illegible] K^{cntr} [illegible] K [illegible]

4) $x \in < x >_l \cap < x >_r$ [illegible] $x \in K$ [illegible]

[illegible] A [illegible] B [illegible] K [illegible]

$$A * B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

[illegible] 3 [illegible] $K \in C_3$ [illegible] $K^{inv} \subseteq K^{cntr}$ [illegible]

$$< x >_l = < x >_r = < x > \quad x \in K$$

[illegible]

$$< x > * < y > = < xy > \quad x, y \in K$$

[illegible]

[illegible] 1 [illegible]

Theorem 1. [illegible] $K \in C_3$

$$< xy >_l \subseteq < x >_l * < y >_l$$

$$< xy >_r \subseteq < x >_r * < y >_r$$

[illegible] $x, y \in K$.

Theorem 2. [illegible] $K \in C_3$

$$< x >_l * < y >_r = < xy >_l * K^{inv} = K^{inv} * < xy >_r$$

$$xy \in < x >_r * < y >_l$$

[illegible] $x, y \in K$.

4. Analysis of satisfiability of the simplest atoms.

[illegible] $K = (K, +, \cdot)$ [illegible] $ax \lozenge b$, $xa \lozenge b$ [illegible] $a_1 x a_2 \lozenge b$ [illegible] $a, a_1, a_2, b \in K$ [illegible] $\lozenge \in \{=, \neq\}$.

[illegible] 4 [illegible] $ax \lozenge b$, $xa \lozenge b$ [illegible] $a_1 x a_2 \lozenge b$ [illegible] K [illegible] $ax \lozenge b$ ($\lozenge \in \{=, \neq\}$) [illegible]

[illegible] $LA(K)$ [illegible] $S^{(1)}_{LA(K)}$ [illegible]

$$ax = b \qquad [illegible]$$

$$xa = b \qquad [illegible]$$

[illegible]

$$a_1 x a_2 = b \qquad [illegible]$$

[illegible] $a, a_1, a_2, b \in K$ [illegible]

[illegible] $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, M_3^{(1)}$ [illegible]

[illegible] $M_1^{(1)}$ [illegible]

[illegible] $a = 0$ [illegible] $a_1 = 0$ [illegible] $a_2 = 0$ [illegible]

[illegible] $a = 0$ [illegible] $a_1 = 0$ [illegible] $a_2 = 0$ [illegible] $b = 0$ [illegible] $M_1^{(1)}$ [illegible] sat [illegible] $S^{(1)}_{LA(K)}$ [illegible] sat [illegible] $M_1^{(1)}$ [illegible] $unsat$ [illegible] $S^{(1)}_{LA(K)}$ [illegible] $unsat$ [illegible]

[illegible] $a \neq 0$ [illegible] $a_1 \neq 0$ [illegible] $a_2 \neq 0$ [illegible]

[illegible] $a_1 \neq 0$ [illegible] $a_2 \neq 0$ [illegible] $K \in D^l \setminus D^r$ [illegible] $K \in D^r \setminus D^l$ [illegible]

1) [illegible] $K \in D^l$ [illegible] $K \in D^r$ [illegible] $K \in D$ [illegible]

[illegible] $M_1^{(1)}$ [illegible] sat [illegible] $S^{(1)}_{LA(K)}$ [illegible] sat [illegible]

2) [illegible] $K \notin D^l$ [illegible] $K \notin D^r$ [illegible] $K \notin D^l \cup D^r$ [illegible]

[illegible] $K \in C_1 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_{[illegible]}$ [illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible] $K \in C_2 \cup C_{[illegible]}$ [illegible] $M_3^{(1)}$ [illegible]

[illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible] $M_3^{(1)}$ [illegible]

1) [illegible] $K \in C_1 \setminus D$ [illegible] 4 [illegible]

[illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible] $a \in K^{inv}$ [illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible] sat [illegible] $S^{(1)}_{LA(K)}$ [illegible] sat [illegible] $M_3^{(1)}$ [illegible]

2) [illegible] $K \in C_3$ [illegible] $K \in C_3 \setminus D^l$ [illegible] $K \in C_3 \setminus D^r$ [illegible] $K \in C_3 \setminus D^l \cup D^r$ [illegible]

[illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible]

[illegible] $a \in K^{l-inv}$ [illegible] $a \in K^{r-inv}$ [illegible] $a_1 \in K^{l-inv}$ [illegible] $a_2 \in K^{r-inv}$ [illegible]

$M_2^{(1)}$ ... *sat* ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ... *sat* ... $M_3^{(1)}$ ...

3) $K \in C_4 \cap D^l$ ... $M_2^{(1)}$ ...

... $1_l \in K$ ... $a \in K^{l-inv}$ ... 1_l ... $M_2^{(1)}$ ... *sat* ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ... *sat* ... $M_3^{(1)}$ ...

... $M_3^{(1)}$ ...

... $1_l \in K$ ... $a_1 \in K^{l-inv}$ ... 1_l ... $M_3^{(1)}$ ...

4) $K \in C_? \cap D^r$ ... $M_2^{(1)}$ ...

... $1_r \in K$ ... $a \in K^{r-inv}$ ... 1_r ... $M_2^{(1)}$ ... *sat* ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ... *sat* ... $M_3^{(1)}$ ...

... $M_3^{(1)}$ ...

... $1_r \in K$ ... $a_2 \in K^{r-inv}$ ... 1_r ... $M_3^{(1)}$ ...

... $M_3^{(1)}$ ... K ...

... $K \in C_1 \cup C_3$ ...

... K ...

... $K \in C_1 \cap D$ ... 4 ...

... $<a> * <x> = <b>$ ... $\{<x> | x \in K\}$ ...

... $M_3^{(1)}$ ... *sat* ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ... *sat* ... $M_3^{(1)}$ ... *unsat* ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ... *unsat* ...

... K ...

... $K \in C_3$ ... $b \in <a>_r * <x>_l$ ... $b \in <x>_r * <a>_l$ ... $b \in <a_1>_r * <x>_r * <a_2>_l$ ...

... $M_3^{(1)}$ ... *sat* ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ... *sat* ... $M_3^{(1)}$ ... *unsat* ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ... *unsat* ...

... l ... r ... K ...

... $K \in C_2 \cup C_4 \cup C_? \cup C_?$ ... K ... $M_3^{(1)}$ ... $S \subseteq K$ ... K ...

... C_i ($i = 1, \ldots$) ...

Theorem 3. $LA(K)$ ... $S_{LA(K)}^{(1)}$ ...

... $LA(K)$ ... $S_{LA(K)}^{(2)}$ ...

$$ax \neq b \quad (1?)$$

$$xa \neq b \quad (1?)$$

...

$$a_1 x a_2 \neq b \quad (11?)$$

... $a, a_1, a_2, b \in K$ ...

... 4 ... K ...

LAK-structure S^{2}_{LAK} and a quantifier-free formula φ in the signature of S^{2}_{LAK}. Then there exist algorithms M_1^{2}, M_2^{2}, M_3^{2} such that

Algorithm M_1^{2} is constructed as follows. Let $a = 0$ and $a = 1$ be the only atoms of the sort 1 in the signature of S^{2}_{LAK}, and $a_1 = 0$ and $a_2 = 0$ be the only atoms of the sort 11 in the signature of S^{2}_{LAK}.

Let $a = 0$. Then for the sort 1 in the signature of S^{2}_{LAK} we have $a_1 = 0$ and $a_2 = 0$. Hence, the sort 11 in the signature of S^{2}_{LAK} is empty.

Let $b = 0$. Then algorithm M_1^{2} returns *unsat* if the algebra S^{2}_{LAK} is empty. Otherwise, algorithm M_1^{2} returns *sat* if the algebra S^{2}_{LAK} is not empty.

Let $a \neq 0$. Then for the sort 1 in the signature of S^{2}_{LAK} we have $a_1 \neq 0$ and $a_2 \neq 0$. Hence, the sort 11 in the signature of S^{2}_{LAK} is not empty.

Algorithm M_2^{2} is constructed for $b = 0$. Then algorithm M_2^{2} returns *sat* if the algebra S^{2}_{LAK} is not empty. Otherwise, algorithm M_2^{2} returns *unsat*.

Algorithm M_3^{2} is constructed as follows.

1. Let $a \in K^{l-zero}$. Then algorithm M_3^{2} returns *unsat* if the algebra S^{2}_{LAK} is empty. Otherwise, algorithm M_3^{2} returns *sat* if the algebra S^{2}_{LAK} is not empty.

2. Let $a \in K^{r-zero}$. Then algorithm M_3^{2} returns *unsat* if the algebra S^{2}_{LAK} is empty. Otherwise, algorithm M_3^{2} returns *sat* if the algebra S^{2}_{LAK} is not empty.

3. Let $a_1 \in K^{l-zero}$ or $a_2 \in K^{r-zero}$. Then algorithm M_3^{2} returns *unsat* if the algebra S^{2}_{LAK} is empty. Otherwise, algorithm M_3^{2} returns *sat* if the algebra S^{2}_{LAK} is not empty.

Let C_i $(i = 1...)$ be the set of all constants of the sort 1 in the signature of S^{2}_{LAK}.

Theorem 4. *LAK-structure* S^{2}_{LAK} *is decidable.*

4. Analysis of satisfiability of a system of linear equations.

Let us consider a quantifier-free formula φ in the signature of LAK-structure S^{3}_{LAK} consisting of a conjunction of equalities of the form

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1...m) \qquad (12)$$

$$x_1 a_{i1} + \ldots + x_n a_{in} = b_i \quad (i = 1...m) \qquad (13)$$

and

$$u_{i1} + \ldots + u_{in} = b_i \quad (i = 1...m) \qquad (14)$$

where u_{ij} $(i \in \mathbf{N}_m, j \in \mathbf{N}_n)$ are $a_{ij}x_j$, $x_j a_{ij}$ or $a'_{ij}x_j a''_{ij}$ and a_{ij}, a'_{ij}, a''_{ij} are constants of the sort 1 or 11.

Let us consider the following system of equations (see (4)) over the field K of real or complex numbers:

LAK-structure S^{3}_{LAK} is decidable. Moreover, there exist algorithms M_1^{3}, M_2^{3}, M_3^{3} such that

Algorithm M_1^{3} is constructed as follows. Let $a = 0$ and $a = 1$ be the only atoms of the sort 1 in the signature of S^{3}_{LAK}, and $a_1 = 0$ and $a_2 = 0$ be the only atoms of the sort 11 in the signature of S^{3}_{LAK}.

1. Let the system (12) consist of equations of the form

$$e_{i_h} x_{i_h} = \sum_{j \in \mathbf{N}_n \setminus \{i_1 \ldots i_r\}} c_{i_h j} x_j + d_{i_h} \quad (h \in \mathbf{N}_r \setminus \{1\})$$

where $e_{i_h} \neq 0$ $(h \in \mathbf{N}_r)$.

2. Let the system (13) consist of equations of the form

$$x_{i_h} e_{i_h} = \sum_{j \in \mathbf{N}_n \setminus \{i_1 \ldots i_r\}} x_j c_{i_h j} + d_{i_h} \quad (h \in \mathbf{N}_r \setminus \{1\})$$

where $e_{i_h} \neq 0$ $(h \in \mathbf{N}_r)$.

3. Let the system (14) consist of equations of the form

$$e'_{i_h} x_{i_h} e''_{i_h} = \sum_{j \in \mathbf{N}_n \setminus \{i_1 \ldots i_r\}} c'_{i_h j} x_j c''_{i_h j} + d_{i_h} \quad (h \in \mathbf{N}_r \setminus \{1\})$$

where $e'_{i_h}, e''_{i_h} \in K$ $(h \in \mathbf{N}_r)$.

Then algorithm M_1^{3} returns *unsat* if the algebra S^{3}_{LAK} is empty. Otherwise, algorithm M_1^{3} returns *sat* if the algebra S^{3}_{LAK} is not empty. Moreover, in the latter case algorithm M_1^{3} constructs a solution of the system (12), (13), (14). Algorithm M_2^{3} is constructed for $b = 0$. Then algorithm M_2^{3} returns *sat* if the algebra S^{3}_{LAK} is not empty. Otherwise, algorithm M_2^{3} returns *unsat*.

Algorithm M_3^{3} is constructed as follows.

[illegible] x_j $j \in \mathbf{N}$ $i_1 \ldots i_r$ [illegible]

[illegible] M_2^{3} [illegible]

[illegible] LA K [illegible] $S_{LA\,K}^{1}$ [illegible]

[illegible] x_j $j \in \mathbf{N}$ $i_1 \ldots i_r$ [illegible] K [illegible]

[illegible] x_j $j \in \mathbf{N}$ $i_1 \ldots i_r$ [illegible] x_j $j \in \mathbf{N}$ $i_1 \ldots i_r$ [illegible] M_2^{3} [illegible] *unsat* [illegible] $S_{LA\,K}^{3}$ [illegible] *unsat* [illegible]

[illegible] M_2^{3} [illegible] *sat* [illegible] $S_{LA\,K}^{3}$ [illegible] *sat* [illegible] M_2^{3} [illegible] *unsat* [illegible] $S_{LA\,K}^{3}$ [illegible] *unsat* [illegible] M_3^{3} [illegible]

[illegible] M_3^{3} [illegible] K [illegible] M_3^{3} [illegible] *sat* [illegible] $S_{LA\,K}^{3}$ [illegible] *sat* [illegible] M_3^{3} [illegible] *unsat* [illegible] $S_{LA\,K}^{3}$ [illegible] *unsat* [illegible]

[illegible] 3 [illegible]

Theorem 5. LA K [illegible] $S_{LA\,K}^{3}$ [illegible]

5. Analysis of satisfiability of a system of linear disequalities.

[illegible] LA K [illegible] $S_{LA\,K}^{4}$ [illegible]

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \neq b_i \quad i = 1 \ldots m \qquad 1$$

$$x_1 a_{i1} + \ldots + x_n a_{in} \neq b_i \quad i = 1 \ldots m \qquad 1$$

[illegible]

$$u_{i1} + \ldots + u_{in} \neq b_i \quad i = 1 \ldots m \qquad 2$$

[illegible] u_{ij} $i \in \mathbf{N}_m$ $j \in \mathbf{N}_n$ [illegible] $a_{ij}x_j$ [illegible] $x_j a_{ij}$ [illegible] $a'_{ij}x_j a''_{ij}$ [illegible]

[illegible] 1 [illegible] 2 [illegible] 21 [illegible]

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i + \alpha_i \quad i = 1 \ldots m \qquad 21$$

$$x_1 a_{i1} + \ldots + x_n a_{in} = b_i + \alpha_i \quad i = 1 \ldots m \qquad 22$$

[illegible]

$$u_{i1} + \ldots + u_{in} = b_i + \alpha_i \quad i = 1 \ldots m \qquad 23$$

[illegible] $\alpha_1 \ldots \alpha_m \in K$ [illegible]

[illegible]

1 [illegible] 1 [illegible] 21 [illegible]

2 [illegible] 1 [illegible] 22 [illegible]

3 [illegible] 2 [illegible] 23 [illegible]

[illegible] LA K [illegible] $S_{LA\,K}^{4}$ [illegible] M_1^{4} M_2^{4} M_3^{4} [illegible]

[illegible] M_1^{4} [illegible] M_2^{4} [illegible]

[illegible] M_2^{4} [illegible] LA K [illegible] $S_{LA\,K}^{3}$ [illegible]

[illegible] $\alpha_1 \ldots \alpha_m \in K$ [illegible] K [illegible]

[illegible] 1 [illegible] $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ [illegible] $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ [illegible] $M_2^{(4)}$ [illegible] *unsat* [illegible] $S^{(4)}_{LA(K)}$ [illegible] *unsat* [illegible]

[illegible] $M_2^{(4)}$ [illegible] *sat* [illegible] $S^{(4)}_{LA(K)}$ [illegible] *sat* [illegible] $M_2^{(4)}$ [illegible] *unsat* [illegible] $S^{(4)}_{LA(K)}$ [illegible] *unsat* [illegible] $M_3^{(4)}$ [illegible]

[illegible] $M_3^{(4)}$ [illegible] K [illegible] $LA(K)$ [illegible] $S^{(2)}_{LA(K)}$ [illegible]

[illegible] $M_3^{(4)}$ [illegible] *sat* [illegible] $S^{(4)}_{LA(K)}$ [illegible] *sat* [illegible] $M_3^{(4)}$ [illegible] *unsat* [illegible] $S^{(4)}_{LA(K)}$ [illegible] *unsat* [illegible]

[illegible] 4 [illegible]

Theorem 6. $LA(K)$ [illegible] $S^{(4)}_{LA(K)}$ [illegible]

6. Time complexity of $LA(K)$-solvers.

[illegible] $LA(K)$ [illegible] 11 [illegible]

[illegible] $LA(K)$ [illegible] $S^{(1)}_{LA(K)}$ [illegible]

Theorem 7. [illegible] p^k [illegible] $p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \in \mathbf{N}$ [illegible] $LA(\ldots p^k)$ [illegible] $S^{(1)}_{LA(\ldots p^k)}$ [illegible]

$$T = \begin{cases} O(\ldots p \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \ldots \\ O(k \ldots), & k \to \infty \text{ and } p \ldots \\ O(k \ldots p \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \to \infty \end{cases} \quad (24)$$

Proof. [illegible] p^k [illegible] $p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \in \mathbf{N}$ [illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible] $M_3^{(1)}$ [illegible]

[illegible] p^k [illegible] $p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \in \mathbf{N}$ [illegible] $M_1^{(1)}$ [illegible] (24) [illegible]

[illegible] $LA(\ldots p^k)$ [illegible] $S^{(1)}_{LA(\ldots p^k)}$ [illegible] (24) [illegible]

[illegible] $K \in C_1(D^l \cup D^r)$ [illegible] $Z_{p^k} = (\mathbf{Z}_{p^k}, +, \cdot)$ [illegible] $p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \geq 2$ [illegible]

Theorem 8. [illegible] $Z_{p^k} = (\mathbf{Z}_{p^k}, +, \cdot)$, $p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \geq 2$ [illegible] $LA(Z_{p^k})$ [illegible] $S^{(1)}_{LA(Z_{p^k})}$ [illegible]

$$T = \begin{cases} O(\ldots p \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \ldots \\ O(\ldots k \ldots), & k \to \infty \text{ and } p \ldots \quad (2\ldots) \\ O(\ldots pk \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \to \infty \end{cases}$$

Proof. [illegible] Z_{p^k} [illegible] $p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \geq 2$ [illegible] αp^i [illegible] $\alpha \in \mathbf{N}_{p-1}$ [illegible] $i \in \mathbf{Z}_p$ [illegible] Z_{p^k} [illegible] p [illegible]

[illegible] $\alpha p^i =$ [illegible] $\alpha =$ [illegible] $i =$ [illegible] $M_1^{(1)}$ [illegible]

$$T_1 = \begin{cases} O(\ldots p \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \ldots \\ O(\ldots k \ldots), & k \to \infty \text{ and } p \ldots \quad (2\ldots) \\ O(\ldots pk \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \to \infty \end{cases}$$

[illegible] $\alpha p^i \in \mathbf{Z}^{inv}_{p^k}$ [illegible] $\alpha \neq$ [illegible] $i =$ [illegible] $M_2^{(1)}$ [illegible]

$$T_2 = \begin{cases} O(\ldots p \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \ldots \\ O(\ldots k \ldots), & k \to \infty \text{ and } p \ldots \quad (2\ldots) \\ O(\ldots pk \ldots), & p \to \infty \text{ and } k \to \infty \end{cases}$$

[illegible] Z_{p^k} [illegible] $p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \geq 2$ [illegible] $C_1 = \mathbf{N}_{p-1}$ [illegible] $C_{i+1} = \{\alpha p^i \mid \alpha \in \mathbf{N}_{p-1}\}$, $i \in \mathbf{N}_{k-1}$ [illegible]

[illegible] $ax = b$ [illegible] $a \in C_i$ ($i \in \mathbf{N}_k$) [illegible] $b \in C_j$ ($j \in \mathbf{N}_k$) [illegible] $C_i * < x > = C_j$ [illegible] $i \le j$ [illegible] $M_3^{(1)}$ [illegible]

$$T_3 = \begin{cases} O(1) & [illegible]\ k\ [illegible] \\ O(k) & [illegible]\ k \to \infty \end{cases} \qquad (2[illegible])$$

[illegible] $T = T_1 + T_2 + T_3$ [illegible] (2[illegible]2[illegible]) [illegible]

[illegible] $\mathsf{K} \in C_2 \cup C_4 \cup C_{[illegible]} \cup C_{[illegible]}$ [illegible] K [illegible] $M_3^{(1)}$ [illegible] $S \subseteq K$ [illegible] K [illegible] $LA(\mathsf{K})$ [illegible] $\mathsf{S}^{(1)}_{LA(\mathsf{K})}$ [illegible]

[illegible] $LA(\mathsf{K})$ [illegible] $\mathsf{S}^{(2)}_{LA(\mathsf{K})}$ [illegible]

Theorem 9. [illegible] p^k ($p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \in \mathbf{N}$) [illegible] $LA([illegible]p^k)$ [illegible] $\mathsf{S}^{(2)}_{LA([illegible]p^k)}$ [illegible] (24).

Proof. [illegible] p^k [illegible] $M_1^{(2)}$ [illegible] $M_2^{(2)}$ [illegible] (24).

[illegible] p^k [illegible] $M_3^{(2)}$ [illegible] $K^{l-zero} = K^{r-zero} = \varnothing$.

[illegible] $LA([illegible]p^k)$ [illegible] $\mathsf{S}^{(2)}_{LA([illegible]p^k)}$ [illegible] (24).

[illegible]

Theorem 10. [illegible] $\mathsf{Z}_{p^k} = (\mathbf{Z}_{p^k}, +, \cdot)$ ($p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \ge 2$) [illegible] $LA(\mathsf{Z}_{p^k})$ [illegible] $\mathsf{S}^{(2)}_{LA(\mathsf{Z}_{p^k})}$ [illegible] (2[illegible]).

[illegible]

[illegible] $LA(\mathsf{K})$ [illegible] $\mathsf{S}^{(2)}_{LA(\mathsf{K})}$ [illegible] $M_3^{(2)}$ [illegible] $\alpha \in X$ ($X \in \{K^{l-zero}, K^{r-zero}\}$) [illegible]

$T = O([illegible] K^{l-zero} [illegible] K^{r-zero} [illegible] K [illegible] K \to \infty)$ [illegible]

[illegible] $LA(\mathsf{K})$ [illegible] $\mathsf{S}^{(2)}_{LA(\mathsf{K})}$ [illegible]

[illegible] $LA(\mathsf{K})$ [illegible] $\mathsf{S}^{(3)}_{LA(\mathsf{K})}$ [illegible]

Theorem 11. [illegible] p^k ($p \in \mathbf{N}$ [illegible] $k \in \mathbf{N}$) [illegible] $LA([illegible]p^k)$ [illegible] $\mathsf{S}^{(3)}_{LA([illegible]p^k)}$ [illegible]

$$T = O([illegible] m [illegible] n [illegible] t_1 + mn^2 t_2) \ (p^k \to \infty) \qquad (2[illegible])$$

[illegible] t_1 [illegible] t_2 [illegible] p^k [illegible]

Proof. [illegible] p^k [illegible] $M_3^{(3)}$ [illegible]

[illegible] $M_1^{(3)}$ [illegible]

$$x_{i_h} = \sum_{j \in \mathbf{N}_n [illegible]} c_{i_h j} x_j + d_{i_h} \quad (h \in \mathbf{N}_r) \qquad ([illegible]3[illegible])$$

[illegible]

$$a_{ij} x_j + a_{i\,j+1} x_{j+1} + \ldots + a_{in} x_n = b_i$$

[illegible]

$$x_j + a'_{i\,j+1} x_{j+1} + \ldots + a'_{in} x_n = b'_i$$

[illegible] a_{ij}^{-1} [illegible] $n - j$ [illegible]

$$T_1'(j) = O(t_1 + (n - j) t_2) \ (p^k \to \infty) \qquad (31)$$

[illegible] x_j [illegible] $n - j$ [illegible] $n - j$ [illegible]

$$T_1''(j) = O((n - j) t_2) \ (p^k \to \infty)$$

[illegible] x_j [illegible]

$$T_1'''(j) = O(m(n - j) t_2) \ (p^k \to \infty) \qquad (32)$$

[illegible] $M_1^{(3)}$ [illegible]

$$T_1 = \sum_{j=1}^{m} (T_1'(j) + T_2''(j))$$

(31) (32)

$$T_1 = O(m n t_1 + mn^2 t_2), \quad p^k \to \infty.$$

$M_1^{(3)}$ unsat $S_{LA(K)}^{(3)}$ unsat

$M_2^{(3)}$ sat $S_{LA(K)}^{(3)}$ sat $M_1^{(2)}$

$$T_2 = O(1), \quad p^k \to \infty.$$

$T = T_1 + T_2$ (2)

$Z_{p^k} = (\mathbf{Z}_{p^k}, +, \cdot)$, $p \in \mathbf{N}$, $k \ge 2$ $M_3^{(3)}$

$M_1^{(3)}$

$$\alpha_{i_h} p^{v_h} x_{i_h} = \sum_{j \in S_{i_h}} \beta_{i_h j} p^{w_{i_h j}} x_j + \gamma_{i_h} p^{l_h}, \quad h \in \mathbf{N}_r, \quad (33)$$

$S_{i_h} \subseteq \mathbf{N}_n$, $i_1, \dots, i_r$, $\alpha_{i_h}, \beta_{i_h j} \in \mathbf{Z}_{p^k}^{inv}$, $\gamma_{jh} = 0$ $\gamma_{i_h} \in \mathbf{Z}_{p^k}^{inv}$.

11 $M_1^{(3)}$

$$T_1 = O(m n t_1 + mn^2 t_2), \quad p^k \to \infty, \quad (34)$$

t_1 t_2 Z_{p^k}.

$M_1^{(3)}$ unsat $S_{LA(K)}^{(3)}$ unsat $M_2^{(3)}$

$M_2^{(3)}$ (33)

Step 1. $U := K^n$, $h := 1$.

Step 2. $\gamma_{i_h} = 0$

Step 3. $l_h \ge$ $w_{i_h j}$, $j \in S_{i_h}$, v_h

Step 4. $M_2^{(3)}$ unsat $S_{LA(K)}^{(3)}$ unsat

Step 5. V_h h

Step 6. $V_h = \varnothing$ $M_2^{(3)}$ unsat $S_{LA(K)}^{(3)}$ unsat $U := U \cap V_h$.

Step 7. $U = \varnothing$ $M_2^{(3)}$ unsat $S_{LA(K)}^{(3)}$ unsat

Step 8. $h = r$ $M_2^{(3)}$ sat $S_{LA(K)}^{(3)}$ sat $h := h + 1$ (2)

$M_2^{(3)}$ (34) (33)

$K \in C_2 \cup C_4 \cup C \cup C$ $M_2^{(3)}$ $S \subseteq K$ K $LA(K)$ $S_{LA(K)}^{(3)}$

$LA(K)$ $S_{LA(K)}^{(4)}$ $LA(K)$ $S_{LA(K)}^{(3)}$

Conclusions.

$LA(K)$ $S_{LA(K)}^{(1)}$, $S_{LA(K)}^{(2)}$, $S_{LA(K)}^{(3)}$ $S_{LA(K)}^{(4)}$.

[illegible] *LA*K [illegible] S^{1}_{LAK} [illegible] *LA*K [illegible] S^{2}_{LAK} [illegible]

[illegible] *LA*K [illegible] S^{3}_{LAK} [illegible] *LA*K [illegible] S^{4}_{LAK} [illegible]

[illegible] *LA*K [illegible] S^{3}_{LAK} [illegible] S^{4}_{LAK} [illegible] *LA*K [illegible]

[illegible] 12 [illegible]

[illegible] *LA*K [illegible] S^{1}_{LAK}, S^{2}_{LAK}, S^{3}_{LAK} [illegible] S^{4}_{LAK} [illegible]

[illegible]

List of references

1. *Sebastiani R.* [illegible] 2[illegible] 3[illegible] 141[illegible]224[illegible]
2. *Nieuwenhuis R., Oliveras A., Tinelli C.* [illegible] 2[illegible] 3[illegible]
3. *Bozzano M., Brutomesso R., Cimatti A. et al.* [illegible] 2[illegible] 1[illegible]3[illegible] 2[illegible]2[illegible]3[illegible]
4. *Barret C., Nieuwenhuis R., Oliveras A. et al.* [illegible] 2[illegible] 424[illegible] 12[illegible]2[illegible]
5. *Duterte B., de Morura L.* [illegible] 2[illegible] 4144[illegible] 1[illegible]4[illegible]
6. *Faure G., Nieuwenhuis R., Oliveras A. et al.* [illegible] 2[illegible] 4[illegible]
7. *Griggio A.* [illegible] 2[illegible]12[illegible] 1[illegible]2[illegible]
8. *Charin Yu.S., Bernik V.I., Matveev G.V. et al.* [illegible] 2[illegible]3[illegible]3[illegible]2[illegible]
9. *Kurosh A.G.* [illegible] 1[illegible]3[illegible]4[illegible]
10. *Skobelev V.V.* [illegible] 2[illegible]12[illegible]13[illegible] 1[illegible]1[illegible]
11. *Aho A., Hopcroft Jh., Ullman Jh.* [illegible] 1[illegible]3[illegible]
12. *Skobelev V.V., Glazunov N.M., Skobelev V.G.* [illegible] 2[illegible]11[illegible] 323[illegible]

Надійшла до редколегії 2[illegible].1[illegible].11

УДК 519.6 531

Зуб С.С., к. т. н., Зуб С.І. н.сп.

Канонічна пуассонова структура на T*SE(3) в кватерніонних змінних

В даній роботі показано, що дужки Пуассона з кватерніонними змінними можуть бути виведені безпосередньо з канонічних дужок Пуассона на кодотичному розшаруванні до групи $SE(3)$ ($SO(3)$), що забезпечено стандартною симплектичною геометрією, відповідною формою Ліувіля. Отримані результати засновані на представленні кватерніонних змінних як явних функцій елементів матриці поворотів групи $SO(3)$.

Ключові слова: кватерніон, форма Ліувіля, SE(3), SO(3), пуассонові структури.

S. S. Zub, Ph.D., S. I. Zub, researcher

Canonical Poisson structure on T*SE(3) in the quaternion variables

In this paper showed that Poisson bracket with quaternion variables can be deduce directly from the canonical Poisson brackets on the cotangent bundle to $SE(3)$ ($SO(3)$) group endowed with the canonical symplectic symplectic geometry corresponding Liouville one form. The obtained results based on quaternion variables representation as the explicit functions of rotation matrix elements of $SO(3)$ group.

Key Words: quaternion, Liouville one form, SE(3), SO(3), Poisson structure.

*E-mail: stah@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

1. Introduction

Quaternion applications in mechanics of rigid body there are greate number of publication are devoted. The most of them refer to the kinematic of the rigid body that is the description of rigid body orientation in space with quaternion parameters [1].

Thereinafter we specify those rare works that devote to dynamical aspects of quaternion application. In the V.V.Kozlov's work [2] descrition of the dynamics is given by quaternion variables based on the Lagrange approach that was modified by Poincaré for the nonholonomic basis. That approach also allow to put into consideration the momentum that conjugate to quaternion variables and give the hamiltonian form to the motion equations with redundant variables. Starting from deep relations between quaternion algebra and $SO(3)$, $SO(4)$ groupes A.V. Borisov and I.S. Mamaev [3-5] propose the expressions of Poisson brackets between quaternion's parameters and angular momentum of the rigid body. They consider them as the generatrix of some Lie-Poisson structure. So, the condition of normalized per unit quaternion that is required for rigid body description sprang into special value of the Casimir function in the present Lie-Poisson structure.

The expression of group matrix element by quaternions parameters is well known [1,4-6]. Additionally it clearly demonstrates the structure of the orthogonal matrix. Per se, inverse problem that is expressing the quaternion's parameters in terms of the elements of the corresponding rotation matrix is not so difficult. Though in the litterature we succeed in found (post factum) only one work where this task was posed and its solution presented [7]. But the main goal of this short (but very instructive) work was to present the comparative analysis of the necessary number of operation for quaternions and matrix computations. In terms of quantity was proven that quaternions computation is more effective. It is important to notice that as it was pointed in the book [4, c.104] the quaternions give one the balance of advantage also in the stability of numerical integration of rigid body motion equations.

From general relations of work [8] one can deduce the following expressions for Poisson brackets between the elements of rotation matrix and the angular momentum components in the inertial reference system. Here and further for determinacy we consider more wide group $SE(3)$, that describe not only rotational, but also translational degree of freedom of the rigid body.

$$\begin{cases} \{x_i, x_j\}=0, & \{p_i, p_j\}=0, & \{m_i, Q_{jk}\}=\varepsilon_{ijl}Q_{lk}, \\ \{x_i, p_j\}=\delta_{ij}, & \{p_i, Q_{jk}\}=0, & \{m_i, m_j\}=\varepsilon_{ijl}m_l, \\ \{x_i, Q_{jk}\}=0, & \{p_i, m_j\}=0, & \{x_i, m_j\}=0, \\ \{Q_{ij}, Q_{kl}\}=0. & & \end{cases} \quad (1.1)$$

where x_i – coordinates of the body center of mass,

© С.С. Зуб, С.І. Зуб, 2013

p_i – components of the momentum of translational motion, Q_{jk} – elements of rotation matrix that describe the body orientation with respect to the inertial reference system, m_j – components of the angular moment of the body with respect to the inertial reference system.

Notice that Poisson brackets in the system connected with a body is not difficult to get by simple canonical manipulation from (1.1), see also [4-5].

From the explicit expression of quaternion parameters as the functions of the elements of rotation matrix from (1.1) one can deduce the required Poisson brackets between the components of quaternion and the angular momentum components of the body. The construction ot these relations is the main goal of the paper.

It turns out that expressions computed in this way have the same form that the previously discussed Lie-Poisson brackets between generatrix of the Poisson structure, see [4, ф. (2.7), с.103].

Though, the essence of the getting relations is something else. Quaternion parameters in our case are not the generatrix of the Poisson structure, but the dynamic variables in the canonical Hamiltonian mechanics on $T^*SE(3)$ (it is not the Lie-Poisson structure). In our case the structural tensor of Lie algebra of the Poisson brackets is not nondegenerate, and, so, Casimir functions are absent then the condition of normalized quaternion are simply express the relation of quaternion dynamic variables on group. As an explanatory notes of this circumstance let us examine the example. Let φ is one of the Euler angel. Then the dynamic variable $\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)$ is identically equal to one, but it is not the Casimir function.

2. Quaternion's algebra

As it was already mention there is a vast amount of literature devoted to quaternions. Remind briefly the properties of quaternions [1,4-7,9].

The quaternions form the associative algebra with e_0 identity and e_i, $i=1,2,3,$ generatrix that satisfy the influential relations.

$$e_r e_s = -\delta_{rs} e_0 + \varepsilon_{rst} e_t \tag{2.1}$$

or that is equal

$$\begin{cases} [e_r, e_s] = e_r e_s - e_s e_r = 2\varepsilon_{rst} e_t, \\ e_r e_s + e_s e_r = -2\delta_{rs} e_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Thus the quaternions form 4-dimensional vector pace over field of real numbers

$$q = q^0 e_0 + q^1 e_1 + q^2 e_2 + q^3 e_3 \tag{2.3}$$

or expressed in terms of 4-dimensional column-vector $\mathrm{q} = (\mathrm{q}^0, q^1, q^2, q^3)$.

The component q^0 name is scalar part of quaternion q and components q^1, q^2, q^3 group in vector part. Thus quaternion can be presented as $q = (q^0, \mathbf{q})$.

If $q^0 = 0$ then it is acceptable to write $q = \mathbf{q}$ and that quaternions named pure quaternion [6, с.301]. Pure quaternions form the linear subspace of quaternion algebra, but it is not subalgebra, because of the associative product of two pure quaternions be the quaternion of the general type.

Multiplicative rule between a and b quaternions follow from (2.1)

$$ab = (a^0 e_0 + a^r e_r)(b^0 e_0 + b^s e_s) = (a^0 e_0 + \mathbf{a})(b^0 e_0 + \mathbf{b}) \tag{2.4}$$
$$= (a^0 b^0 - <\mathbf{a}, \mathbf{b}>) e_0 + a^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Then for the pure quaternions the next expressions of scalar and vector product by associative multiplication are valid.

$$\begin{cases} <\mathbf{x}, \mathbf{y}> = -\frac{1}{2}(\mathbf{xy} + \mathbf{yx}), \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{xy} - \mathbf{yx}). \end{cases} \tag{2.5}$$

The operation of quaternion conjugation specify as

$$e_0^{\dagger} = e_0, \quad e_k^{\dagger} = -e_k \tag{2.6}$$

or

$$q^{\dagger} = (q^0, \mathbf{q})^{\dagger} = (q^0, -\mathbf{q}) \tag{2.7}$$

Thus the pure quaternions fully characterize of the next property

$$\mathbf{x}^{\dagger} = -\mathbf{x}. \tag{2.8}$$

It is follow from (2.7)

$$qq^{\dagger} = q^{\dagger} q = (q^0 q^0 + (\mathbf{q}, \mathbf{q})) e_0 = \tag{2.9}$$
$$= (q^0)^2 + (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2.$$

In addition, from the formulas (4,6a) follow

$$(ab)^{\dagger} = b^{\dagger} a^{\dagger}. \tag{2.10}$$

Let's define the quaternion norm

$$|q| = \sqrt{(qq^{\dagger})} \tag{2.11}$$

then

$$|ab| = |a||b|. \tag{2.12}$$

Moreover, from the formulas (2.9,2.11) follow the simple representation of the inverse quaternion

$$q^{-1} = \frac{q^{\dagger}}{|q|^2}. \qquad (2.13)$$

Formulas (2.9) and (2.13) show that all quaternions excepting the zero one have there inverse, so the quaternion algebra is a body.

It is follow from (2.12) and (2.13) that unit quaternion or the quaternions with norma equal to identity form the group.

3. Right (left) action in the quaternion algebra

Its make sense to put into consideration the algebra representation of quaternions by 4×4-matrix of right action. Moreover, in some computation the using of rut matrix technic is offer advantages.

It is clear from (2.1) that for the right action of quaternion $b = (b^0, \mathbf{b})$ the matrix operation corresponds

$$R_b a = ab = \begin{bmatrix} b^0 & -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ b^1 & b^0 & b^3 & -b^2 \\ b^2 & -b^3 & b^0 & b^1 \\ b^3 & b^2 & -b^1 & b^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

We can expand the matrix R_b into the present set of basis matrices

$$R_b = b^0 R_0 + b^1 R_1 + b^2 R_2 + b^3 R_3, \qquad (3.2)$$

where

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

The matrices R_0, R_1, R_2, R_3 satisfy the relations that are fully analogous to the relations (2.1) for quaternions generatrix. Therewith R_k is anti-symmetrical in $k = 1,2,3,$, and, then, the quaternion conjugation corresponds the operation of matrix transpose.

Quite similarly to the right action we can consider the matrix representation of the left action.

4. Representation of rotation by quaternions

Let's consider a linear subspace of the pure quaternions as a 3-dimensional Euclidian space with scalar product defined by (5).

Shown that interior automorphism of quaternion algebra that generated by unit quaternion q translate the space of pure quaternions by themselves.

The rule of conversion we write in form

$$\mathbf{x}' = q\mathbf{x}q^{-1} = q\mathbf{x}q^{\dagger} = Q[\mathbf{x}], \quad |q| = 1. \qquad (4.1)$$

Shown that resulting quaternion $\mathbf{x}'$ is also pure quaternion, really,

$$(q\mathbf{x}q^{\dagger})^{\dagger} = (q^{\dagger})^{\dagger}\mathbf{x}^{\dagger}q^{\dagger} = -q\mathbf{x}q^{\dagger}. \qquad (4.2)$$

Thus the operator $Q[\mathbf{x}]$ is the linear operator that acts in subspace of the pure quaternions.

Shown that operator $Q[\mathbf{x}]$ conserve the scalar product of the vectors by using expression of scalar product via associative multiplication in (2.5)

$$< Q[\mathbf{x}], Q[\mathbf{y}] >= -\frac{1}{2}(q\mathbf{x}q^{-1}q\mathbf{y}q^{-1} + q\mathbf{y}q^{-1}q\mathbf{x}q^{-1})$$

$$= -\frac{1}{2}q(\mathbf{xy} + \mathbf{yx})q^{-1} = q < \mathbf{x}, \mathbf{y} > q^{-1} = < \mathbf{x}, \mathbf{y} > .$$

Thus the following relations of invariance are true for the operator Q (it is proved analogous)

$$\begin{cases} < Q[\mathbf{x}], Q[\mathbf{y}] >= < \mathbf{x}, \mathbf{y} >, \\ Q[\mathbf{x}] \times Q[\mathbf{y}] = Q[\mathbf{x} \times \mathbf{y}], \\ < Q[\mathbf{z}], Q[\mathbf{x}] \times Q[\mathbf{y}] >= < \mathbf{z}, \mathbf{x} \times \mathbf{y} > . \end{cases} \qquad (4.3)$$

The first relation of (4.3) means that the operaror Q is orthogonal, and the third that it is unimodular, i.e. Q is the intrinsic rotation $(Q \in SO(3))$.

In this context of the task the main interest invoke the explicit form of the matrix elements of Q-operator that can be obtained from (4.1) from the multiplication rule (2.4)

$$Q_{ik} = 2\left[\left((q^0)^2 - \frac{1}{2}\right)\delta_{ik} + q^i q^k - q^0 q^j \varepsilon_{jik}\right] \qquad (4.4)$$

that for the unit quaternion equal to the following expression of matrix operator Q:

$$\begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

Shown that reflection $q \to Q$ is the reflection that cover whole group $SO(3)$.

In particular in the case $q_1 = 0,\ q_2 = 0,$ this matrix has the form

$$Q = \begin{bmatrix} q_0^2 - q_3^2 & -2q_0q_3 & 0 \\ 2q_0q_3 & q_0^2 - q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_0^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

If appear that $q_0 = \cos\frac{1}{2}\theta,\ q_3 = \sin\frac{1}{2}\theta,$ then

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

It is the rotation matrix around the axis z on the angel θ (anticlockwise).

Similarly get the rotations around other two axes x and y.

R e m a r k. It is useful to notice that the arbitrary unit quaternion can be offered in the form

$$q = \cos(\varphi/2)\mathrm{e}_0 + \sin(\varphi/2)\mathbf{e}, \qquad (4.6)$$

where $\mathbf{e}$ – unit pure quaternion, that specify the rotation axis, and φ – the corresponding rotational angle around this axis. The expression (4.6) that concerned as a function φ is one-parameter subgroup of this group of unit quaternions.

Since $q \to Q$ is the homomorphism, so then the product of such rotations belong to direct image of this homomorphism. Well known that any rotation can be realized as the product of rotations around the axes of Cartesian coordinate system. Thus, really, matrix (4.6) represents the record of the arbitrary element of group $SO(3)$ via quaternion parameters.

So, formula (4.1) defines the homomorphism of the group of unit quaternions on the $SO(3)$ group. Therewith these groups are locally isomorphic and group of unit quaternions double cover $SO(3)$ [6]. Really, from (4.1) it is clear that quaternions q and $(-q)$ give us the same rotation Q.

5. Rotational representation of quaternions

In Section 4 it was proved that for each rotation of $SO(3)$ corresponds 2 and only 2 unit quaternions with opposite sign. Then the task about explicit form of this functional dependence is appeared.

Matrix Q corresponding to the quaternion q has the follows elements.

$$Q_{ik} = (2q_0^2 - 1)\delta_{ik} + 2q_iq_k - 2q_0q_j\varepsilon_{jik}. \qquad (5.1)$$

Let's evaluate the spur of the matrix with keep in mind that q is unit quaternion

$$\mathrm{Sp(Q)} = 4\mathrm{q}_0^2 - 1 \qquad (5.2)$$

i.e.

$$q_0^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Sp(Q)} + 1). \qquad (5.3)$$

Antisymmetric part of the matrix Q has a simple form, then we have

$$q_0q_i = -\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}Q_{jk}. \qquad (5.4)$$

Thus for $q_0 \neq 0$ we can express in the explicit form the components of quaternion that corresponding to the target rotation matrix by its elements

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{Sp(Q)} + 1)^{\frac{1}{2}}, \\ q_i = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\mathrm{Q_{jk}}}{(\mathrm{Sp(Q)}+1)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases} \qquad (5.5)$$

We have two solutions of this system corresponding of two choose of root sign in the expression of q_0 (1-st line in (5.5)).

If we want to have the solution of these functional equations in the neighborhood of quaternion with zero scalar part $(\mathrm{Sp(Q)} = -1)$, i.e. in neighborhood of the pure quaternion then formulas (5.5) is not acceptable.

It must be noticed that for the numerical computations the difficulties is possible even for small but not zero value of q^0. Therefore E. Salamin who investigate the task of comparative estimation of the efficiency of numerical computations with orthogonal matrix and quaternions [7], to put forward the set of experssions for finding the quaternion components that follow from the form of matrix Q.

$$\begin{cases} q_0^2 = \frac{1}{4}(1 + Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}), \\ q_1^2 = \frac{1}{4}(1 + Q_{11} - Q_{22} - Q_{33}), \\ q_2^2 = \frac{1}{4}(1 - Q_{11} + Q_{22} - Q_{33}), \\ q_3^2 = \frac{1}{4}(1 - Q_{11} - Q_{22} + Q_{33}) \end{cases} \qquad (5.6)$$

and

$$\begin{cases} q_0q_1 = \frac{1}{4}(Q_{32} - Q_{23}), \\ q_0q_2 = \frac{1}{4}(Q_{13} - Q_{31}), \\ q_0q_3 = \frac{1}{4}(Q_{21} - Q_{12}), \\ q_1q_2 = \frac{1}{4}(Q_{12} + Q_{21}), \\ q_1q_3 = \frac{1}{4}(Q_{13} + Q_{31}), \\ q_2q_3 = \frac{1}{4}(Q_{23} + Q_{32}). \end{cases} \qquad (5.7)$$

For numerical computations the optimum is to choose the maximum component of quaternion by its

absolute magnitude from the relations (5.6) (so this component sign will defined the sign of quaternion in general), then other components can be found from (5.7).

It is clear that for the unit quaternion at least we have one component nonvanishing.

Noticed that the present solution (5.5) hereinabove is corresponding to the 1-st line of (5.6) and for the first 3 lines in (5.7).

6. The Poisson brackets with quaternion components

If we want to get Poisson brackets with quaternion components it is required to deduce the expressions $\frac{\partial q_0}{\partial Q_{kl}}$ and $\frac{\partial q_i}{\partial Q_{kl}}$. For example,

$$\{m_i, q_0\} = \frac{\partial q_0}{\partial Q_{kl}} \{m_i, Q_{kl}\} \tag{6.1}$$

where the Poisson bracket $\{m_i, Q_{kl}\}$ is known from (1.1).

From the relation (5.5) we have

$$\begin{cases} \frac{\partial q_0}{\partial Q_{kl}} = \frac{1}{8q_0}\delta_{kl}, \\ \frac{\partial q_j}{\partial Q_{kl}} = -\frac{1}{4q_0}\left(\varepsilon_{jkl} + \frac{1}{2}\frac{q_j}{q_0}\delta_{kl}\right). \end{cases} \tag{6.2}$$

In consideration of $\{m_i, Q_{kl}\} = \varepsilon_{ikn} Q_{nl}$ and using (6.2) we receive

$$\{m_i, q_0\} = \frac{\partial q_0}{\partial Q_{kl}} \{m_i, Q_{kl}\} = \frac{1}{2} q_i \tag{6.3}$$

and

$$\{m_i, q_j\} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk} q_k - q_0 \delta_{ij}). \tag{6.4}$$

Take into consideration $\{Q_{ij}, Q_{kl}\} = 0$, finally we get

$$\begin{cases} \{q_\mu, q_\nu\} = 0, & \mu = 0,1,2,3 \\ \{m_i, q_0\} = \frac{1}{2} q_i, \\ \{m_i, q_j\} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk} q_k - q_0 \delta_{ij}). \end{cases} \tag{6.5}$$

As it was mentioned above in Section 1 such Poisson bracket were deduced by A.V. Borisov and I.S. Mamaev as the relation for the generatrix of some Lie-Poisson structure. Then the value $C(q) = (q^0)^2 + (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2$ is the Casimir function for this Poisson structure and for deduce of motion equations of the rigid body it is required to pass on the symplectic sheet of this Poisson structure that corresponds to the $C(q) = 1$.

7. The invariance properties of the Poisson structure on T*(SE(3)) (T*(SO(3)))

Take note on the Poisson brackets (1.1) that includes the matrix elements of the rotations. Examine, for example, the relation

$$\{m_i, Q_{jk}\} = \varepsilon_{ijl} Q_{lk} \tag{7.1}$$

and multiply it on the fixed matrix $B \in SO(3)$ by right hand.

Thus the elements of the matrix is constant, so we can be bring them behind the sign of the Poisson brackets in the left side of (7.1), and then the relations are valid

$$\{m_i, (QB)_{jn}\} = \varepsilon_{ijl} (QB)_{ln} \tag{7.2}$$

After doing the analogous conversion with all of these Poisson brackets, we see, that matrix elements of the rotation $P = QB$ satisfy to all of those Poisson brackets as well as the matrix elements of the initial rotation Q.

Let's shown that the Poisson brackets of the Section 6 can be transform to more compact form by using the multiplicative rule of the quaternions.

Multiply the quaternion $q = q_0 e_0 + q_k e_k$ left hand on e_i

$$e_i q = q_0 e_i + q_k (e_i e_k) = q_0 e_i + q_k (-\delta_{ik} e_0 + \varepsilon_{ikj} e_j)$$
$$= -q_i e_0 + q_0 \delta_{ij} e_j + q_k \varepsilon_{ikj} e_j,$$

$$e_i q = -q_i e_0 + q_0 \delta_{ij} e_j + q_k \varepsilon_{ikj} e_j \tag{7.3}$$

$$\begin{cases} (e_i q)_0 = -q_i, \\ (e_i q)_j = -\varepsilon_{ijk} q_k + q_0 \delta_{ij}. \end{cases} \tag{7.4}$$

Then

$$\begin{cases} \{q_0, m_i\} = \frac{1}{2}(e_i q)_0, \\ \{q_j, m_i\} = \frac{1}{2}(e_i q)_j \end{cases} \tag{7.5}$$

$$\{q_\mu, m_i\} = \frac{1}{2}(e_i q)_\mu, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{7.6}$$

Formally it is possible to multiply (by left hand) the expressions (7.6) on the fixed quaternions e_0, e_1, e_2, e_3 and sum by index μ. Moreover, using the constancy of e_μ, let's bring them behind the sign of the Poisson bracket.

In result we have

$$\{m_i, q\} = -\frac{1}{2} e_i q. \tag{7.7}$$

As far as in the matrix case by multiplying the expression (7.7) (by right hand) on some fixed quaternion $b, |b| = 1$, we make sure that new

quaternion dynamic variable $p = qb$ is also satified those Poisson brackets (7.7) for q. In fact, this is the simple algebraic conversion that is equal to the the action of right hand matrix shift (3.2) on the set of (7.7). Consequently, p satisfy to all Poisson brackets that are analogous to the Poisson brackets (7.5-7.6) of the Section 6.

8. Poisson bracket with quaternion components in the special case

Deduce of the relations (7.5-7.6) hereinabove, strictly speaking, will not be correct in the neighborhood of the pure quaternion $\mathrm{Sp(Q)} = -1 \to \mathrm{q}_0 = 0$, because of (5.5) in this point is not valid. But it does not mean that relation (7.5-7.6) in the neighborhood of the pure quaternion is not valid. Quaternion with $q_0 = 0$ is not looks as the special point for this relations. But the proof of this relations in general case required another approach.

First of all, it is possible to use the Salamin's solutions (5.6-5.7) by taken as a base those component of quaternion that is nonzero in the target neighborhood, for example q^1. But this approach, unfortunally, result in hungus and non-transparent computations.

Let's examine the properties of invariance that was presented in the Section 7 and the fact that reflection of $q \to Q$ is homomorphism on $SO(3)$, group as it was describe hereinabove.

Suppose that we want to compute Poisson brackets with quaternions in the neighborhood of a pure quaternion q with $q_0 = 0$.

Let's take such fixed quaternion $b : |b| = 1$ that the dynamical quaternion variable $p = qb$ with value $p^0 \neq 0$ in the target point (it is always possible for $q : |q| = 1,$ as it was shown hereinabove). Quaternion p reflects into the matrix $P \in SO(3)$ for the mentioned homomorphism $(p \to P)$.

Quaternion variable p lie in the same relation to the matrix variable P as far as variable q relates to Q in computation of the Poisson brackets with quaternions presented hereinabove, it being known that $p^0 \neq 0$.

Therefore, the Poisson bracket (7.5-7.6) is valid for quaternion variable p. Applling the inverse conversion $q = pb^{-1}$ to the expressions that was received result in the expressions (7.5-7.6), but for the quaternion variable q.

References

1. *Whittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies / E. T. Whittaker. // – New York: Dover: Cambridge University Press, 1944. – 254 p.
2. *Kozlov V. V.* Symmetry, topology and resonance in Hamiltonian mechanics / V. V. Kozlov // –Izhevsk: Izd.UdSU, 1995. – 140 p.
3. *Borisov A. V.* Non-linear Poisson brackets and isomorphisms in dynamics / A. V. Borisov, I. S. Mamaev // Regular and Chaotic Dynamics – 1997. – V. 2, 3/4. – P. 72–89.
4. *Borisov A. V.* Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics / A. V. Borisov, I. S. Mamaev // –Izhevsk: Izd. UdSU, 1999. – 464 p. (In Russian)
5. *Borisov A. V.* Dynamics of the Rigid Body / A. V. Borisov, I. S. Mamaev // –Izhevsk: Izd. UdSU, 2001. – 384 p.
6. *Marsden J. E.* Introduction to mechanics and symmetry / J. E. Marsden, T. S. Ratiu. // – Berlin: Texts in Applied Mathematics, Springer, 1994. – Vol. 75.
7. *Salamin E.* Applications of quaternion to computation weith rotations / E. Salamin // Working Paper. – 1979.
8. *Zub S. S.* Lie group as a configuration space for simple mechanical system. Group-theoretical approach in Hamiltonian dynamics of magnetically interected rigid bodies / S. S. Zub // J. Num. Appl. Math. – 2013 (unpublished)
9. *Pontryagin L. S.* Mathematical Theory of Optimal Processes / L. S. Pontryagin // – Moscow: M.: Nauka, 1977. – 384 p.

Надійшла до редколегії 18.04.2013

УДК 519.85

Власюк А. П.[1], д.т.н., проф.
Мартинюк П. М.[2], к. ф.-м. н., доц.

Математичне моделювання фільтраційної консолідації з урахуванням просідань та повзучості скелета ґрунту

Побудовано математичну модель фільтраційної консолідації двохфазного ґрунту з урахуванням повзучості та просідань його скелету в умовах впливу тепло-масопереносу. Чисельний розв'язок відповідної одновимірної крайової задачі знайдено методом радіальних базисних функцій. Як приклад, досліджено задачу фільтраційної консолідації шару ґрунту обмеженої товщини. Наведено результати чисельних експериментів та їх аналіз.
Ключові слова: консолідація, повзучість, радіальні базисні функції.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

[2] Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

A. P. Vlasyuk[1], Doctor of technical sciences,
P. M. Martinyuk[2], Candidate of physics and mathematics sciences

Mathematical modeling of a soil filtration consolidation with taking into account skeleton creep and subsidence

A mathematical model of two-phase soil filtration consolidation problem taking into account of creep of soil skeleton and heat and mass transfer has been formulated. The numerical solution of the corresponding one-dimensional boundary-value problem has been found by the radial basis functions method. As an example, the clayey soil layer infinite width filtration consolidation problem has been investigated. Numerical experiments and their analysis have been carried out.
Key Words: consolidation, creep, radial basis functions

[1] National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
A.P.Vlasyuk@rambler.ru

[2] National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф. Г.

1. Вступ. При розробці проектів цивільних та промислових споруд, під час їх (споруд) будівництва та експлуатації постає проблема прогнозування процесів ущільнення ґрунтів. Ущільнення повністю насиченого ґрунту, що супроводжується віджиманням рідини з його пор, зазвичай називають процесом фільтраційної консолідації. Тому у повністю насичених або досить вологих глинистих ґрунтах розв'язок задачі ущільнення можна звести до визначення зміни в часі надлишкових напорів у поровій рідині. Отримані розрахунковим шляхом результати, що визначають тривалість і характер ущільнення, залежать як від властивостей і стану ґрунтів, так і від ступеня врахування різних факторів.

Класичні математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів побудовані в роботах [1-3]. В роботах [4-10] дані моделі були доповнені та вдосконалені. Вдосконалення полягали у врахуванні впливу тепло-солепереносу. Також авторами враховано зміну області консолідації в часі за рахунок просідання скелету ґрунту. Однак, комплексна задача з урахуванням впливу техногенних факторів, повзучості та просідань скелета ґрунту там розглянута не була. Це і є метою та новизною представленої статті.

2. Постановка та математична модель задачі. Математична модель R-вимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву в області Ω з межею Γ під впливом прикладеного зовнішнього навантаження інтенсивності q з урахуванням повзучості його скелету та впливу переносу солей в неізотермічному режимі, зважаючи на результати робіт [4-10], може бути описана наступною крайовою задачею:

© А.П.Власюк, П.М. Мартинюк, 2013

$$\frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma}\beta_1\times$$
$$\times\left[\nabla\cdot(\mathbf{K_h}(c,T,h)\nabla h)-\nabla\cdot(\mathbf{K_c}(c)\nabla c)-\nabla\cdot(\mathbf{K_T}\nabla T)\right]+$$
$$+\frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\cdot(\mathbf{K_h}(c,T,h)\nabla h)-\nabla\cdot(\mathbf{K_c}(c)\nabla c)-\nabla\cdot(\mathbf{K_T}\nabla T)\right]+$$
$$+\frac{a_0}{\gamma}\frac{\partial^2(\Theta^*+R\gamma h^*)}{\partial t^2}+\frac{\beta_1}{\gamma}(a_0+a_1)\frac{\partial(\Theta^*+R\gamma h^*)}{\partial t}=$$
$$=\left[Ra_0+\beta(1+e)(1+(R-1)\xi)\right]\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+$$
$$+\left[\beta_1 R(a_0+a_1)+\beta\beta_1(1+e)(1+(R-1)\xi)\right]\frac{\partial h}{\partial t},\ \mathbf{X}\in\Omega, t>0, \quad (1)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{D}_c(c,T,h)\nabla c)+\nabla\cdot(\mathbf{D_T}\nabla T)-\mathbf{u}\nabla c=$$
$$=n\frac{\partial c}{\partial t}-\gamma_m(C_m-c),\ \mathbf{X}\in\Omega,\ t>0, \quad (2)$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}(c,T)\nabla T)-\rho c_\rho\mathbf{u}\nabla T=c_T\frac{\partial T}{\partial t},\ \mathbf{X}\in\Omega,\ t>0, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}=-\mathbf{K_h}(c,T,h)\nabla h+\mathbf{K_c}(c)\nabla c+\mathbf{K_T}\nabla T, \quad (4)$$

$$\mathbf{q_c}=\mathbf{u}\cdot c-\mathbf{D}_c(c,T,h)\nabla c-\mathbf{D_T}\nabla T, \quad (5)$$

$$\mathbf{q_T}=\rho c_\rho\mathbf{u}\cdot T-\boldsymbol{\lambda}(c,T)\nabla T, \quad (6)$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_1}=0,\ h\big|_{\Gamma_2}=H_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_2, \quad (7)$$

$$(\mathbf{q_c},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_3}=0,\ c\big|_{\Gamma_4}=C_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_4, \quad (8)$$

$$(\mathbf{q_T},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_5}=0,\ T\big|_{\Gamma_6}=T_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_6, \quad (9)$$

$$h(\mathbf{X},0)=h_0(\mathbf{X}),\ c(\mathbf{X},0)=C_0(\mathbf{X}),\ T(\mathbf{X},0)=T_0(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}\in\overline{\Omega}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi}+\beta(1+e)\gamma\right)\frac{\partial h_0}{\partial t}=$$
$$=(1+e)\nabla\cdot(\mathbf{K_h}(c_0,T_0,h_0)\nabla h_0-\mathbf{K_c}(c_0)\nabla c_0-\mathbf{K_T}\nabla T_0)-$$
$$-\frac{R\gamma a_1\beta_1}{1+(R-1)\xi}h_0+\frac{a_0}{1+(R-1)\xi}\left(\frac{\partial\Theta_0^*}{\partial t}+R\frac{\partial p_0^*}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{a_1\beta_1}{1+(R-1)\xi}(\Theta_0^*+Rp_0^*),\ \mathbf{X}\in\overline{\Omega},\ t=0, \quad (11)$$

$$\frac{dl(x,y,t)}{dt}=\frac{R\gamma}{(1+\overline{e})(1+(R-1)\xi)}\times$$
$$\times\int_{\varphi(x,y)}^{l(x,y,t)}\left(a_0\left(\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial h^*}{\partial t}-\frac{1}{R\gamma}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a_1\beta_1}{\gamma}\left(p(t)-p^*(t)-\frac{\Theta^*(t)}{R}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a_1\beta_1^2}{\gamma}\int_{\tau_1}^{t}\left(\frac{\Theta^*(t)}{R}+p^*(t)-p(t)\right)\exp(-\beta_1(t-\tau))d\tau\right)dz; \quad (12)$$

де $t\in(0;t_0]$; $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2=$ $=\Gamma_3\cup\Gamma_4=\Gamma_5\cup\Gamma_6$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$, $\Gamma_3\cap\Gamma_4=\varnothing$, $\Gamma_5\cap\Gamma_6=\varnothing$, $C_1(\mathbf{X},t)$, $T_1(\mathbf{X},t)$, $H_1(\mathbf{X},t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$ - задані функції; R - розмірність задачі; $\mathbf{X}=x$ при $R=1$, $\mathbf{X}=(x,y)$ при $R=2$, $\mathbf{X}=(x,y,z)$ при $R=3$. Тут використано такі позначення: $h(\mathbf{X},t)$ - надлишкові напори; $c(\mathbf{X},t)$ - концентрація порового сольового розчину; $T(\mathbf{X},t)$ - температура; $\mathbf{K_h}(c,T,h)=\{k_{ij}^{(h)}(c,T,h)\}$, $\mathbf{K_c}(c)=\{k_{ij}^{(c)}(c)\}$, $\mathbf{D}_c(c,T,h)=\{D_{ij}^{(c)}(c,T,h)\}$, $\mathbf{D_T}=\{D_{ij}^{(T)}\}$, $\mathbf{K_T}=\{k_{ij}^{(T)}\}$, $\boldsymbol{\lambda}(c,T)=\{\lambda_{ij}(c,T)\}$, $i,j=\overline{1,3}$, – тензори відповідно коефіцієнтів фільтрації, хімічного осмосу, конвективної дифузії, термодифузії, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q_c}$, $\mathbf{q_T}$ – вектори швидкостей фільтрації сольового розчину та руху твердих частинок ґрунту, потоків розчинених солей і тепла, відповідно; $\mathbf{n}$ - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області фільтраційної консолідації; a_0, a_1, β_1 - параметри повзучості скелета ґрунту; β - коефіцієнт об'ємної стискуваності порового газу; ρ, c_ρ - густина та питома теплоємність порового розчину; c_T - об'ємна теплоємність ґрунту за постійного об'єму; t – час; e – коефіцієнт пористості; γ - питома вага сольового розчину; n – пористість ґрунту; ξ – коефіцієнт бокового тиску ґрунту; γ_m – константа швидкості масообміну; C_m – концентрація граничного насичення.

Кінематична гранична умова (12) описує зміну з часом положення верхньої рухомої межі області консолідації, яка (рухома межа) задається рівнянням $z=l(x,y,t)$. Тут функція $z=\varphi(x,y)$ задає нижній нерухомий контур області консолідації. Функції Θ^*, h^*, p^* - сума головних напружень у скелеті ґрунту, надлишкові напори та тиск в поровому розчині в умовах миттєвої консолідації згідно основної розрахункової моделі Флоріна [3]. Теоретично вони вважаються відомими. Але на практиці, особливо в дво- та тривимірних задачах, для їх визначення потрібно проводити додаткові дослідження.

3. Чисельне розв'язання. Для чисельного розв'язання задачі (1)-(12) безсітковим методом радіальних базисних функцій (РБФ) покриємо

замикання області $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ вузлами-центрами $\mathbf{X}_i$, $i = \overline{1,s}$ та колокаційними точками $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1,k}$, де: k^{Ω}, k^{Γ_j} - відповідно множини номерів колокаційних точок, які лежать в області Ω і на відповідних частинах Γ_j, $j = \overline{1,6}$, межі Γ. Вимагаємо $k \geq s$. В загальному випадку множини вузлових точок $\mathbf{X}_i$, $i = \overline{1,s}$ та колокаційних точок $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1,k}$ не співпадають. Хоча, при практичній реалізації методу, такий випадок не виключається. Також відмітимо наступне. Наближені розв'язки для різних невідомих функцій можна шукати на різних сітках вузлових та колокаційних точок. Для уникнення зайвої індексації та громіздкості викладки зроблені для випадку однієї сітки, що не зменшує їх (викладок) загальності.

Наближений розв'язок крайової задачі (1)-(12) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X},t) \approx \sum_{i=1}^{s} h_i(t)\varphi_i(r_i,\varepsilon_h),\quad c(\mathbf{X},t) \approx \sum_{i=1}^{s} c_i(t)\varphi_i(r_i,\varepsilon_c),$$

$$T(\mathbf{X},t) \approx \sum_{i=1}^{s} T_i(t)\varphi_i(r_i,\varepsilon_T), \qquad (13)$$

де $h_i(t), c_i(t), T_i(t), i = \overline{1,s}$, - невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\varphi(r_i,\varepsilon)$, $i = \overline{1,s}$, - відомі РБФ [11-13], причому $r_i = \left\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\right\|_2$; $\varepsilon_h > 0$, $\varepsilon_c > 0$, $\varepsilon_T > 0$ - параметри форми; $\left\|\bullet\right\|_2$ - Евклідова норма вектора.

Тоді, використовуючи метод колокацій в точці [5, 7, 8], з рівнянь (1)-(3), граничних та початкових умов (7)-(11) отримуємо задачу Коші

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h},\mathbf{C},\mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h},\mathbf{C},\mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \qquad (15)$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C},\mathbf{T},\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}(t) = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{F}^{(1)}, \qquad (16)$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{h}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{C}^{(0)},\mathbf{T}^{(0)},\mathbf{h}^{(0)}) \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{L}^{(01)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{L}^{(02)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)}, \qquad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)},\ \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)},\ \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}. \qquad (18)$$

для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{h}(t) = \{h_i(t)\}_{i=1}^{s}$, $\mathbf{C}(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^{s}$, $\mathbf{T}(t) = \{T_i(t)\}_{i=1}^{s}$, де

$$\mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^{s},\ \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^{s},\ \mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^{s},$$
$$\mathbf{M}^{(\alpha)} = (m_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s},\ \alpha = \overline{0,3};\ \mathbf{L}^{(s)} = (l_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^{k},$$
$$\mathbf{F}^{(s)} = (f_i^{(s)})_{i=1}^{k},\ \alpha = \overline{0,3};\ \mathbf{L}^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,s};$$
$$\mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{k,s};\ \mathbf{M}^{(1\alpha)} = (m_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s};$$
$$\mathbf{L}^{(1\alpha)} = (l_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s},\ \alpha = 2, 3;\ \mathbf{L}^{(0\alpha)} = (l_{ij}^{(0\alpha)})_{i,j=1}^{k,s},$$
$$\alpha = 1, 2;\ \tilde{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = (\tilde{m}_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s},\ \tilde{\mathbf{F}}^{(\alpha)} = (\tilde{f}_i^{(\alpha)})_{i=1}^{k},$$
$$\alpha = \overline{0,3}.$$

Елементи матриць задачі Коші (14)-(18) визначаються однотипно, але досить громіздко. Так для системи рівнянь (14), яка відповідає рівнянню теплопровідності (3), маємо

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} c_T\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T),\ i \in k^{\Omega}; \\ 0,\ i \notin k^{\Omega}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T)) + \\ +\rho c_{\rho}\mathbf{u}\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T),\ i \in k^{\Omega}; \\ (-\boldsymbol{\lambda}\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T) + \\ +\rho c_{\rho}\mathbf{u}\cdot\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T),\mathbf{n}),\ i \in k^{\Gamma_5}; \\ \varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T),\ i \in k^{\Gamma_6}; \end{cases}$$

$$f_i^{(3)} = \begin{cases} 0,\ i \in k^{\Omega}; \\ 0,\ i \in k^{\Gamma_5}; \qquad r_{ji} = \left\|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\right\|_2. \\ T_1(\mathbf{Y}_i,t),\ i \in k^{\Gamma_6}; \end{cases}$$

Чисельний розв'язок вищенаведеної задачі Коші можна знайти, використовуючи її дискретизацію згідно повністю неявної різницевої схеми, лінійної відносно шуканих функцій [4, 5].

3. Результати чисельних експериментів та висновки. Розглянемо процес фільтраційної консолідації шару двохфазного глинистого ґрунту товщиною $l = 25м$, в якого верхня та нижня межі дреновані. Вважаємо, що ґрунт зверху змочений розчином солі з концентрацією граничного насичення $C_m = 350\ {}^{г}\!/_{літр}$. На верхню межу ґрунту рівномірно прикладається миттєве зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 20\cdot 10^4 \frac{кг}{м^2\cdot доба^2}$. Тоді $h^* = 0$, $p^* = 0$, $\Theta^* = \frac{q}{\gamma}$ [1]. Початковий розподіл концентрації візьмемо $C_0(x) = \begin{cases} C_m,\ x = 0 \\ 5г/л,\ x \neq 0 \end{cases}$, а температури – $T_0(x) = \begin{cases} 20^{\circ}C,\ x = 0 \\ 4^{\circ}C,\ x \neq 0 \end{cases}$. Значення решти вхідних

даних беремо наступними: $e = 0{,}67$,

$\gamma = 10^4 \frac{кг}{м^2 \cdot доба^2}$, $a_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{кг}$,

$a_1 = 0{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{кг}$, $k_T = 2{,}8 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{град \cdot доба}$,

$\rho = 1100 \frac{кг}{м^3}$, $c_T = 2{,}100 \cdot 10^6 \frac{Дж}{м^3 \cdot град}$,

$k_c = 2.8 \cdot 10^{-5} \frac{м^{-5}}{кг \cdot доба}$, $\lambda = 108 \cdot 10^3 \frac{Дж}{м \cdot град \cdot доба}$.

Кінематична гранична умова (12) на верхній рухомій межі набуває вигляду

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\gamma}{1+e} \int_{l(x,t)}^{l} \left(a_0 \frac{\partial h}{\partial t} + a_1 \beta_1 (h(x,t) - \frac{q}{\gamma}) + \right.$$

$$\left. + a_1 \beta_1^2 \int_0^t (\frac{q}{\gamma} - h(x,\tau)) e^{-\beta_1 (t-\tau)} d\tau \right) dx.$$

Залежність коефіцієнта фільтрації від температури та концентрації солей взята з робіт [4, 5].

Як видно з рис.1, у випадку врахування повзучості скелету ґрунту надлишкові напори розсіюються повільніше, ніж у випадку без врахування повзучості скелету ґрунту. В підобластях великих надлишкових напорів повзучість скелету ґрунту практично на них не впливає. Дане явище пояснюється тим, що врахування повзучості приводить до поступового зменшення тисків в поровій рідині і до поступового (а не миттєвого) збільшення напружень в скелеті ґрунту.

З рис. 2 можна зробити висновок, що майже у всій області масиву ґрунту напори розсіюються повільніше у випадку урахування впливу солей та температури. Це можна пояснити залежністю коефіцієнта фільтрації від концентрації солей. При збільшенні концентрації солей до 50 г/літр коефіцієнт фільтрації починає різко зменшуватись.

На рис. 3 наведено графіки просідань верхньої межі масиву грунту для різних випадків: 1) з урахуванням повзучості та тепло-масопереносу; 2) без урахування повзучості, з врахуванням тепло-масопереносу; 3) з урахуванням повзучості, без урахування тепло-масопереносу; 4) з урахуванням повзучості та теплопереносу; 5) з урахуванням повзучості та масопереносу. Дані графіків на рис. 3 свідчать про те, що при врахуванні повзучості скелету ґрунту величина просідань верхньої межі зменшується в середньому на 7%. Це відбувається за рахунок того, що при врахуванні повзучості скелет ґрунту деформується в часі поступово (а не миттєво), через що його просідання сповільнюється. Найбільшою величина просідань стає при врахуванні повзучості скелету ґрунту та без впливу тепло-масопереносу. Пояснюється це явище тим, що у вказаному випадку надлишкові напори розсіюються найшвидше.

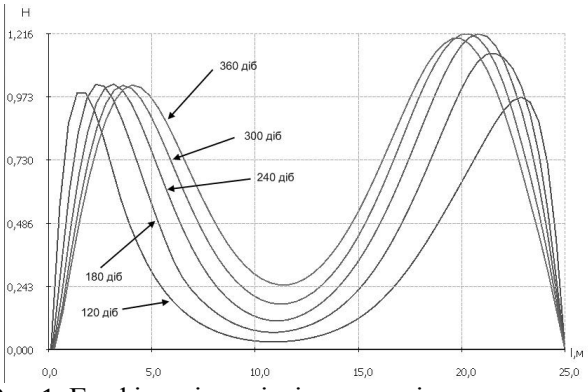


Рис.1. Графіки різниці між розподілом надлишкових напорів в умовах тепло-масопереносу з врахуванням та без врахування повзучості скелету

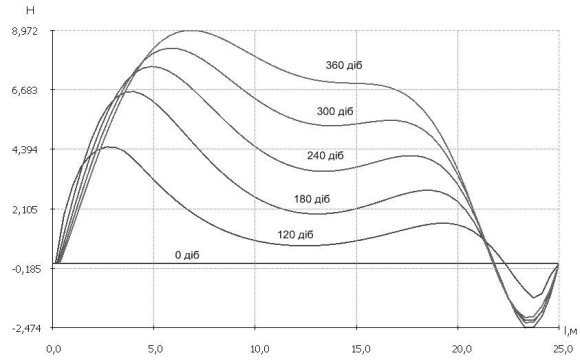


Рис.2. Графіки різниці між розподілом надлишкових напорів з врахуванням та без врахування тепло-масопереносу

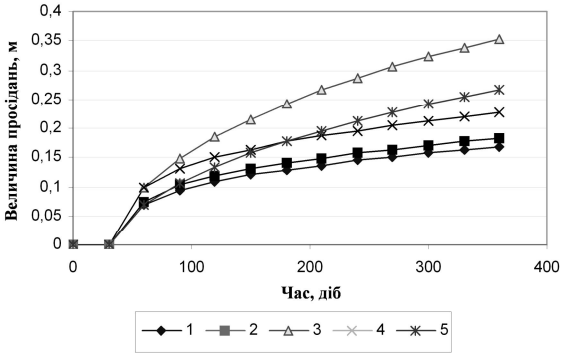


Рис.3. Графіки просідань верхньої межі ґрунту

Отже, в даній статті поставлена і чисельно розв'язана задача про вплив повзучості скелету на фільтраційну консолідацію ґрунту в умовах тепло-солепереносу. Як свідчать результати чисельного експерименту, ступені розсіювання надлишкових напорів залежать від врухування чи не врахування вказаних факторів. Подальшого дослідження вимагають дво- та тривимірні задачі.

Список використаних джерел

1. *Ivanov P.L.* Soils and foundation of hydrotechnical construction. Soil mechanics. – Moscow: Vyshaya shkola, 1991. – 447 p. (in Russian).
2. *Tsytovich N.A., Zaretsky Yu.K., Malyshev M.V., Abelev M. Yu., Ter-Martirosyan Z.G.* Prediction of settlement rate of structure bases. – Moscow: GosStroyIzdat, 1967. – 237 p. (in Russian).
3. *Florin V.A.* Base of soil mechanics. V. II. – Moscow: GosStroyIzdat, 1961. – 543 p. ((in Russian).
4. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. – Rivne: NUVGP, 2008. – 416 p. (in Ukrainian).
5. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M.* Numerical solution of consolidation problem and filtration destruction of soil in conditions of heat and mass transfer by radial basis functions method. – Rivne: NUVGP, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).
6. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M., Fursovych O. R.* Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 160, №4. – P. 525-535.
7. *Vlasyuk A. P., Martinyuk P. M.* Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171, №5. – P. 632-648.
8. *Vlasyuk A. P. , Martinyuk P. N.* Filtration consolidation of three-phase soils taking into account skeleton creep and the effect of salt transfer in a nonisothermal regime // Mat. Model. – 2010. – 22(4). – P. 32-56. (in Russian).
9. *Vlasyuk A. P. , Martinyuk P. M.* The mathematical modeling of soil consolidation with taking into account nonlinear Darcy law, heat and salt transfer // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky'iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 1. – P. 125-130. (in Ukrainian).
10. *Vlasyuk A. P. , Martinyuk P. N.* The soil wash-out and filtration consolidation problem taking into account the salt and heat transfer // Mat. Model. – 2012. – 24(11). – P. 97-112. (in Russian).
11. *Buhmann M.D.* Radial Basis Functions: Theory and Implementations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 260 p.
12. *Iske A.* Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. –2003. -Vol. 61, 3.– Pp.247-284.
13. *Wendland H.* Scattered Data Approximation. - Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 336 p.

Надійшла до редколегії 25.02.13

УДК 627.324.2/3:532.72

Власюк А.П.[1], д.т.н., професор,
Цвєткова Т.П.[2], аспірант

Математичне моделювання перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній постановці

Проведено математичне моделювання процесу перенесення солей при сумісній фільтрації і вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах. Числові розв'язки відповідних крайових задач отримано методом скінченних різниць. Розроблено відповідне програмне забезпечення, з використанням якого проведено числові експерименти та зроблено їх аналіз.

Ключові слова: масоперенесення, вологоперенесення, повне і неповне насичення, напір, концентрація.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000 м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

[2] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: Tsvetkova@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

A.P. Vlasyuk[1], Doctor of science, prof.,
T.P. Tsvetkova[2], PhD student

Mathematical model of the salt transfer during the filtration and the moisture transfer in full and partial saturation soils in the linear formulation

Mathematical model of the salt transfer during the filtration and the moisture transfer in full and partial saturation soils is formulated. Numerical solutions of respective boundary problems are obtained by means of finite differences method. Proper software is developed using which numerical experiments and their analysis are performed.

Key words: mass transfer, moisture transfer, full and partial saturation soils, pressure, concentration.

[1] National University of Water Management National Resources Use, 33000 Rivne, Soborna st, 11, e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

[2] National University of Water Management National Resources Use, 33000 Rivne, Soborna st, 11, e-mail: Tsvetkova@ukr.net

Вступ. Перенесення солей в областях повного і неповного насичення являє собою актуальну задачу, оскільки пов'язане із засоленням родючих земель і проблемою їх використання в с/г.

Даним питанням присвячено ряд робіт [1-6]. Однак, в вищезгаданих роботах дані процеси розглядалися окремо в областях повного і неповного насичення; домінували лише процеси вологоперенесення без врахування масоперенесення.

В даній роботі розглядається сумісно задача масоперенесення сольових розчинів як у водонасичених, так і у водоненасичених ґрунтових середовищах в одновимірному лінійному випадку. Її розв'язок отримано методом скінченних різниць. Для більш повного опису вказаних процесів в математичній моделі задачі враховано наявність осмотичних явищ [8, 10].

Постановка задачі. Дослідимо процес перенесення сольових розчинів при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунті (рис. 1).

На поверхню ґрунту можуть попадати атмосферні опади і поливи. В зв'язку з цим, на деякій глибині l_1 від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод (РГВ), яка надалі вважається нерухомою. На глибині l_2 є фронт промочування, який для простоти будемо вважати нерухомим (рис. 1).

© А.П. Власюк, Т.П. Цвєткова, 2013

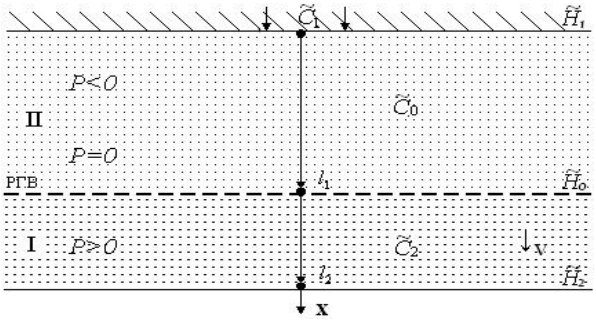


Рис.1. Перенесення солей в областях повного і неповного насичення

Таким чином, в ґрунтовому масиві сформувалося дві області: II – область неповного насичення – між поверхнею землі і вільною поверхнею; I – область повного насичення – між вільною поверхнею та фронтом промочування. Крім того, на поверхню ґрунту може потрапляти сольовий розчин з атмосферними опадами або за рахунок інших факторів з концентрацією $\tilde{C}_1$. Розподіл концентрації в області неповного насичення - $\tilde{C}_0$, в області повного насичення - $\tilde{C}_2$.

Потрібно розрахувати напір вологи в області неповного насичення, розподіл п'єзометричних напорів в області повного водонасичення та поле розподілу концентрації солей в даних областях; дослідити вплив осмосу на процеси масо- та вологоперенесення в ґрунтовому середовищі.

Математична модель задачі. Математична модель задачі масоперенесення при фільтрації сольових розчинів в області повного насичення G_1 має вигляд [8, 9]

$$\frac{\partial\left(D_1\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)}{\partial x}-v_1\frac{\partial c_1}{\partial x}-\gamma_1(c_1-C_1^*)=\sigma_1\frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$v_1=-k_1\frac{\partial h_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial h_1}{\partial x}-u_1\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)=0. \quad (3)$$

Рівняння (1)-(3) доповнюються крайовими умовами для концентрації солей $c_1(x,t)$

$$c_1(x,0)=\tilde{C}_0^1(x),\quad c_1(0,t)=\tilde{C}_1^1(t),\quad c_1(l_2,t)=\tilde{C}_2^1(t); \quad (4)$$

для напору $h_1(x,t)$

$$h_1(x,0)=\tilde{H}_0^1(x),\quad h_1(0,t)=\tilde{H}_1^1(t),\quad h_1(l_2,t)=\tilde{H}_2^1(t). \quad (5)$$

Математична модель задачі масоперенесення солей при вологоперенесенні в області неповного насичення G_2 має вигляд [8, 10]

$$\frac{\partial\left(D_2\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)}{\partial x}-v_2\frac{\partial c_2}{\partial x}-\gamma_2(c_2-C_2^*)=\sigma_2\frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\mu(h)\frac{\partial h_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k_2\frac{\partial h_2}{\partial x})-u_2\frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (7)$$

$$v_2=-k_2\frac{\partial h_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial c_2}{\partial x}. \quad (8)$$

Диференціальні рівняння (6), (7) доповнюються наступними крайовими умовами для концентрації солей $c_2(x,t)$

$$c_2(x,0)=\tilde{C}_0^2(x),\quad c_2(l_2,t)=\tilde{C}_2^2(t); \quad (9)$$

для напору

$$h_2(x,0)=\tilde{H}_0^1(x),\quad h_2(0,t)=\tilde{H}_1^1(t),\quad h_2(l_2,t)=\tilde{H}_2^2(x). \quad (10)$$

На РГВ задаються умови спряження для напору та концентрації відповідно

$$[h]|_{x=l_1}=[c]|_{x=l_1}=\left[cv_x-D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right]\Big|_{x=l_1}=0. \quad (11)$$

В рівняннях (1)-(11) використані такі позначення: D_1, D_2 – коефіцієнти конвективної дифузії; $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ – концентрації сольових розчинів в областях повного і неповного насичення відповідно; C_1^*, C_2^* – коефіцієнти граничного насичення сольових розчинів; σ_1, σ_2 – пористоті ґрунту в областях повного і неповного насичення відповідно; h_1 - п'єзометричний напір, h_2 - напір вологи;, u_1, u_2 – коефіцієнти осмосу; $[h]|_{x=l_1}$, $[c]|_{x=l_1}$ – стрибки функцій відносно напорів та концентрацій солей, задані на межі двох областей.

Числовий метод розв'язування задачі. Для знаходження числового розв'язку поставлених задач (1)-(11) використаємо метод скінченних різниць. Знайдемо спочатку числовий розв'язок задачі в області повного насичення. Розкривши дужки в (2), отримаємо

$$k_1\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}-u_1\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}=0.$$

Для знаходження розв'язку задачі фільтрації (2), (3), (5) використаємо неявну різницеву схему [7], яка має вигляд

$$\frac{k_1}{h_1^2}\left[H_{1i+1}^{j+1}-2H_{1i}^{j+1}+H_{1i-1}^{j+1}\right]=u_1\frac{C_{1i+1}^{j+1}-2C_{1i}^{j+1}+2C_{1i-1}^{j+1}}{h_1^2} \tag{12}$$

або
$$\frac{k_1}{h_1^2}H_{1i+1}^{j+1}-2\frac{k_1}{h_1^2}H_{1i}^{j+1}+\frac{k_1}{h_1^2}H_{1i-1}^{j+1}=\frac{u_1}{h_1^2}C_{1i+1}^{j+1}- \tag{13}$$
$$-\frac{2u_1}{h_1^2}C_{1i}^{j+1}+\frac{u_1}{h_1^2}C_{1i-1}^{j+1}.$$

Розв'язок різницевих схем (12), (13) знайдемо методом прогонки. Для цього запишемо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_1H_{1i-1}^{j+1}-c_1H_{1i}^{j+1}+b_1H_{1i+1}^{j+1}=-f_1, \tag{14}$$

де
$$a_1=\frac{k_1}{h_1^2},\quad b_1=\frac{k_1}{h_1^2},\quad c_1=\frac{2k_1}{h_1^2},$$

$$f_1=-u_1\frac{C_{1i+1}^{j+1}-2C_{1i}^{j+1}+C_{1i-1}^{j+1}}{h_1^2},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m}.$$

Розв'язок задачі фільтрації за методом прогонки знаходимо у вигляді

$$H_{1i}^{j+1}=\alpha_{i+1}H_{1i+1}^{j+1}+\beta_{i+1}, \tag{15}$$

де
$$\alpha_{i+1}=\frac{b_1}{c_1-\alpha_{i+1}a_1},\quad \beta_{i+1}=\frac{a_1\beta_i+f_1}{c_1-\alpha_i a_1},$$
$$\alpha_1=0,\quad \beta_1=H_1^1(t),\quad i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m}.$$

Для знаходження числового розв'язку задачі масоперенесення (1), (3), (4) застосуємо монотонну різницеву схему [7].

$$\sigma_1\frac{C_{1i}^{j+1}-C_i^j}{\tau}=\eta_i^{j+1}\frac{H_{1i+1}^{j+1}-2H_i^{j+1}+H_{1i-1}^{j+1}}{h_1^2}+$$
$$+\left(r^+\right)_i^{j+1}\left(\frac{C_{1i+1}^{j+1}-C_{1i}^{j+1}}{h_1}\right)+\left(r^-\right)_i^{j+1}\left(\frac{C_{1i}^{j+1}-C_{1i-1}^{j+1}}{h_1}\right)- \tag{16}$$
$$-\gamma_1\left(C_{1i}^{j+1}-C_1^*\right),$$

де
$$\eta_i^{j+1}=\frac{1}{1+0{,}5\cdot h_1\cdot\left|r_i^j\right|},\quad r_i^j=\left(r^++r^-\right),$$
$$\left(r^+\right)_i^{j+1}=\frac{-V_{1i}^{j+1}+\left|V_{1i}^{j+1}\right|}{2}\ge 0,$$
$$\left(r^-\right)_i^{j+1}=\frac{-V_{1i}^{j+1}+\left|V_{1i}^{j+1}\right|}{2}\le 0.$$

Розв'язок різницевої схеми (16) знайдемо методом прогонки. Для цього запишемо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_2C_{1,i-1}^{j+1}-c_2C_{1,i}^{j+1}+b_2C_{1,i+1}^{j+1}=-f_2, \tag{17}$$

де
$$a_2=\frac{\tau}{\sigma_1}\left(\frac{2\eta_i^{j+1}}{h_1^2}-\frac{\left(r^-\right)_i^{j+1}}{h_1}\right),$$

$$b_2=\frac{1}{h_1}\left(\frac{d_{i+1}^j\eta_{i2}^j}{h_1}+r_{i+}^j\right),\quad f_2=\frac{\sigma_1}{\tau}C_{1i}^j+\gamma_1C_1^*,$$

$$c_2=\frac{1}{h_1^2}\left(d_i^j\eta_{i1}^j+d_i^j\eta_{i2}^j\right)+\frac{\left|r_i^j\right|}{h_1}+\frac{\sigma_1}{\tau}.$$

Розв'язок задачі (17) методом прогонки знаходимо у вигляді

$$C_{1i}^{j+1}=\alpha_{i+1}C_{1i+1}^j+\beta_{i+1}^1, \tag{18}$$

де
$$\alpha_{i+1}=\frac{b_i}{c_2-\alpha_i a_2},\quad \beta_{i+1}=\frac{a_2\beta_i+f_2}{c_2-\alpha_i a_2},$$

$$\alpha_1=0,\quad \beta_1=\tilde{C}_1^1,\quad i=\overline{0,n},\quad j=\overline{0,m}.$$

Різницеве рівняння для обчислення швидкості фільтрації має наступний вигляд

$$V_i^{j+1}=-k_{1,i}^j\left(\frac{H_{1,i+1}^j-H_{1,i-1}^j}{2h_1}+u_1\frac{C_{1,i+1}^j-2C_{1,i}^j+C_{1,i-1}^j}{h_1^2}\right),$$

Для знаходження розв'язку задачі масоперенесення солей в області неповного насичення застосуємо неявну різницеву схему [7].

$$\left(H_{2i}^{j+1}-H_{2i}^j\right)=\frac{k_2\tau}{h_2^2\mu_i}\left(\frac{C_{1i-1}^{j+1}-2C_{2i}^{j+1}+C_{2i+1}^{j+1}}{h_2^2}\right)-$$
$$-u_2\frac{\tau}{h_2^2\mu_i}\left(C_{2i+1}^{j+1}-2C_{2i}^{j+1}+C_{2i-1}^{j+1}\right), \tag{19}$$

де
$$\mu_i=a\rho g\left(1-\frac{2\cdot h}{H_{i+1}^k-H_{i-1}^k}\right).$$

Розв'язок різницевої схеми (19) знайдемо методом прогонки. Для цього запишемо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_3C_{1i-1}^{j+1}-c_3C_{1i}^{j+1}+b_3C_{1i+1}^{j+1}=-f_3, \tag{20}$$

де
$$a_3=\frac{k_2}{h_2^2},\quad b_3=a_3,\quad c_3=\frac{\mu_i}{\tau}+\frac{2k_2}{h_1^2},$$
$$f_3=\left(\frac{\mu_i}{\tau}H_{1i}^j-\frac{u}{h_2}\left(C_{2i+1}^j-2C_{2i}^j+C_{2i-1}^j\right)\right).$$

Числовий розв'язок задачі вологоперенесення методом прогонки знаходимо у вигляді

$$H_{2i}^j=\alpha_{i+1}H_{i+1}^j+\beta_{i+1}, \tag{21}$$

де
$$\alpha_{i+1}^3=\frac{b_3}{c_3-\alpha_i^3a_3},\quad \beta_{i+1}=\frac{a_3\beta_i+f_3}{c_3-\alpha_i a_3}.$$

Для розв'язування задачі масоперенесення солей (6), (8), (9) використаємо монотонну різницеву схему [7].

$$\sigma_2\frac{C_{2i}^{j+1}-C_{2i}^{j}}{\tau}=\eta_i^{j+1}\frac{C_{2i+1}^{j+1}-2C_{2i}^{j+1}+C_{2i-1}^{j+1}}{h_2^2}+$$

$$+\left(r^+\right)_i^{j+1}\left(\frac{C_{2i+1}^{j+1}-C_{2i}^{j+1}}{h_2}\right)+\left(r^-\right)_i^{j+1}\left(\frac{C_{2i+1}^{j+1}-C_{2i}^{j+1}}{h_2}\right) \quad (22)$$

$$-\gamma_2\left(C_{2i}^{j+1}-C_2^*\right),$$

де $\mu_3=\dfrac{1}{1+0.5h_1\left|r_3^{\,2}\right|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{h_1\overline{D}_3}{2\overline{A}_3}}$, $r_i^{\,j}=\left(r^+ + r^-\right)$,

$$\left(r^+\right)_i^{j+1}=\frac{-V_{2i}^{j+1}+\left|V_{2i}^{j+1}\right|}{2}\ge 0,$$

$$\left(r^-\right)_i^{j+1}=\frac{-V_{2i}^{j+1}+\left|V_{2i}^{j+1}\right|}{2}\le 0.$$

Розв'язок задачі масоперенесення знайдемо за методом прогонки. Рівняння (22) в прогоночному вигляді наступне:

$$a_4C_{2i-1}^{j+1}-c_4C_{2i}^{j+1}+b_4C_{2i+1}^{j+1}=-f_4, \quad (23)$$

де $a_4=\dfrac{\tau}{\sigma_2}\left(\dfrac{2\eta_i^{j+1}}{h_2^2}-\dfrac{\left(r^-\right)_i^{j+1}}{h_2}\right)$, $f_4=\dfrac{\sigma}{\tau}C_{2i}^{j}+\gamma C^*$,

$$b_4=\frac{\tau}{\sigma_2}\left(\frac{2\eta_i^{j+1}}{h_2^2}-\frac{\left(r^+\right)_i^{j+1}}{h_2}\right),$$

$$c_4=\frac{\tau}{\sigma_2}\left(\frac{2\eta_i^{j+1}}{h_2^2}+\frac{\left(r^+\right)_i^{j+1}-\left(r^-\right)_i^{j+1}}{h_2}+\gamma_2\right).$$

Числовий розв'язок задачі масоперенесення солей в області неповного насичення знаходимо у вигляді

$$C_{2i}^{j}=\alpha_{i+1}C_{2i+1}^{j}+\beta_{i+1}, \quad (24)$$

де $\alpha_{i+1}=\dfrac{b_i}{c_4-a_i\alpha_4}$, $\beta_{i+1}=\dfrac{a_4\beta_i+f_4}{c_4-\alpha_i a_4}$,

$i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$.

Розв'язок задачі масоперенесення солей на РГВ, згідно методу прогонки, має вигляд

$$C_i^{j+1}=\alpha_{i+1}C_{i+1}^{j+1}+\beta_{i+1}, \quad (25)$$

де

$$\alpha_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{b_i}{c_i-a_i\alpha_i}, i=\overline{0,n_s-1},\\ \dfrac{D_{n_s}^{j}}{\left(D_{n_s+1}^{j}-v_{n_s+1}^{j}\right)+\left(D_{n_s}^{j}-v_{n_s}^{j}\right)\left(1-\alpha_{n_s}\right)}, i=n_s\\ \dfrac{b_i}{c_i-a_i\alpha_i}, i=\overline{n_s+1,n-1}.\end{cases}$$

$$\beta_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{a_i\beta_i+c_i+s_i}{c_i-a_i\alpha_i}, i=\overline{0,n_s-1},\\ \dfrac{D_{n_s}^{j}\beta_i}{\left(D_{n_s+1}^{j}-v_{n_s+1}^{j}\right)+\left(D_{n_s}^{j}-v_{n_s}^{j}\right)\left(1-\alpha_{n_s}\right)}, i=n_s\\ \dfrac{a_i\beta_i+c_i+s_i}{c_i-a_i\alpha_i}, i=\overline{n_s+1,n-1}.\end{cases}$$

n_s - значення координати на РГВ.

Отже, алгоритм розв'язування задачі масоперенесення солей у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі побудовано повністю.

Програмна реалізація та результати числових експериментів. Проведена програмна реалізація числового розв'язку даної задачі в інтегрованому середовищі візуально-подійного програмування Visual Studio 2010 на мові програмування C#.

Створена комплексна програма числового розв'язування задачі, що включає розв'язування задачі масоперенесення в області неповного та повного насичення, знаходження сумісного розв'язку задачі в насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі.

На основі програмної реалізації задачі були проведені числові експерименти, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вихідних даних задачі та детально дослідити процеси масопереносу при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах.

Розвязок задачі знайдено при таких вхідних даних: $T=360\,діб$, $l_1=1м$, $l_2=0{,}5м$,

$$\sigma_1=\sigma_2=0{,}4, \quad \gamma_1=\gamma_2=0{,}0065,$$

$$k_1=k_2=2{,}3м/добу, \quad D_m=0{,}2\,м^2/добу,$$

$$\rho=1000\,кг/м^3, \quad C_*=350\,г/літр,$$

$$u_1=u_2=2{,}8\cdot10^{-5}м^5/кг\cdot доба,,$$

$$\tilde{C}_0=0\,г/літр, \quad \tilde{C}_1=0\,г/літр,$$

$$\tilde{C}_2=10\,г/літр, \quad H_1^1=1{,}4м, \quad H_2^1=0{,}05м,$$

$$H_1^2=1{,}8м, \quad H_2^2=1{,}4м.$$

Результатом розв'язання задачі масоперенесення в області неповного насичення є знаходження значень розподілу напорів вологи та концентрації солей в заданій області.

Графічне представлення значень розподілу напорів вологи має вигляд (рис. 2, 3)

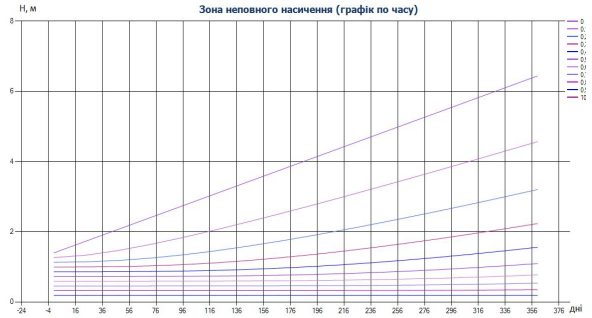


Рис.2. Графік розподілу напорів вологи з часом

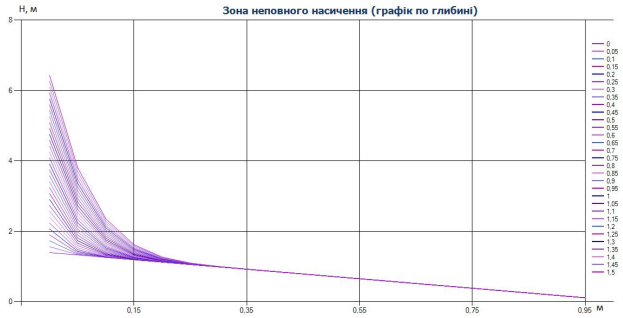


Рис.3. Графік розподілу напорів вологи з глибиною

За результатами задач вологоперенесення та швидкості фільтрації знайдено розв'язок задачі масоперенесення солей в області неповного насичення. Графічне представлення розподілу концентрації солей має вигляд (рис. 4)

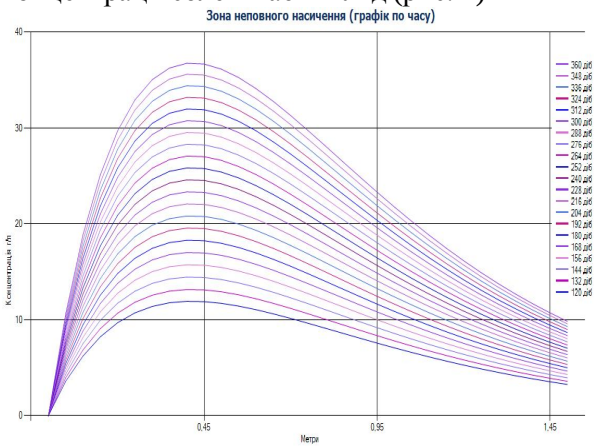


Рис.4. Графік розподілу концентрації солей в області неповного насичення

Розв'язавши задачу масоперенесення солей в області неповного насичення, знайдено розв'язок задачі в області повного насичення ґрунтового середовища.

Графіки розподілу п'єзометричних напорів мають вигляд (рис. 5, 6)

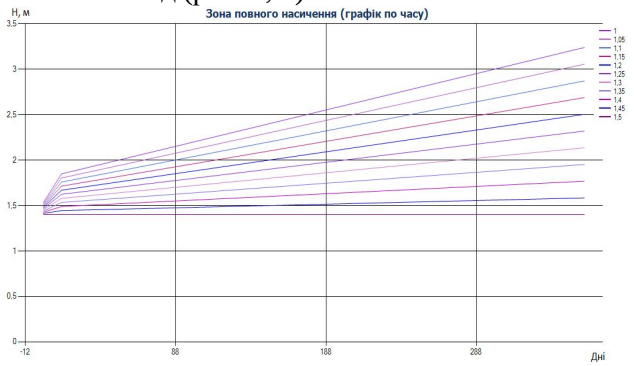


Рис.5. Графік залежності п'єзометричних напорів від часу

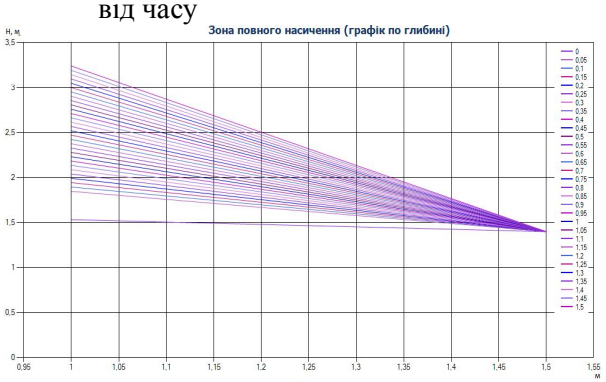


Рис. 6. Графік залежності розподілу п'єзометричних напорів від товщини шару ґрунту

В результаті числового розв'язання задачі масоперенесення солей в області повного насичення отримали наступі графіки розподілів концентрації (рис. 7, 8).

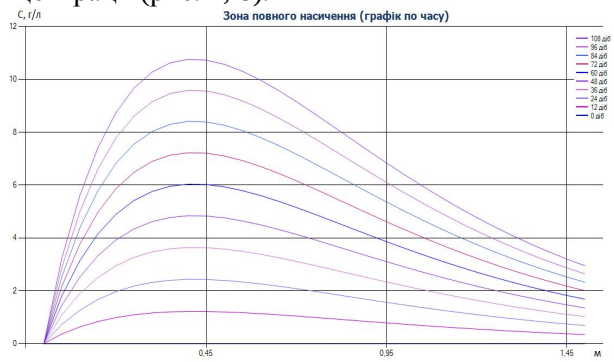


Рис.7. Графік залежності розподілу концентрації солей від часу

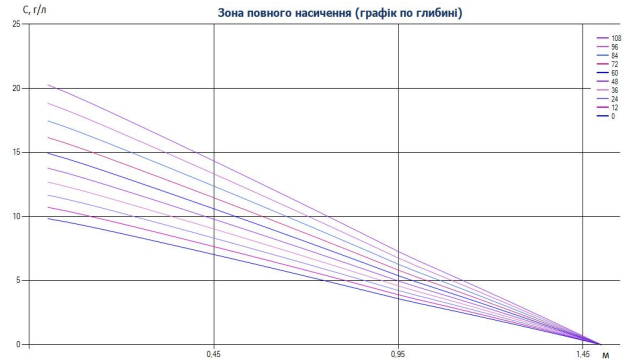


Рис.8. Графік залежності розподілу концентрації солей від товщини шару ґрунту

Важливою особливістю даної задачі є сумісний розгляд задачі масоперенесення солей в областях повного та неповного насичення. Графіки розподілу концентрації солей в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища мають вигляд (рис.9,10)

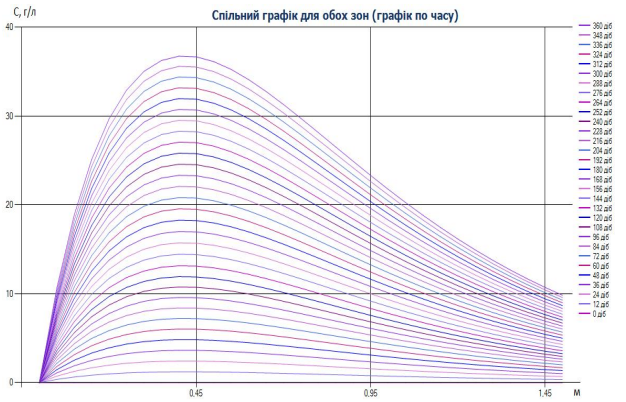


Рис.9. Графік залежності розподілу концентрації солей від товщини шару ґрунту в насичено-ненасиченій області

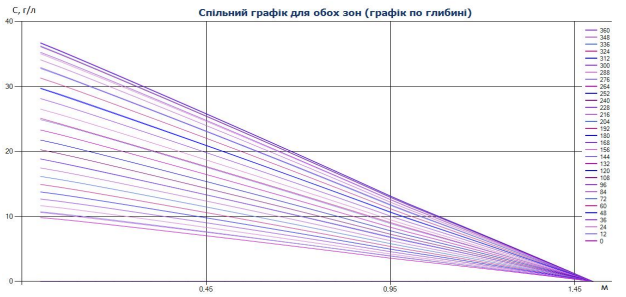


Рис.10. Графік залежності розподілу концентрації солей від часу в насичено-ненасиченій області

Також знайдено розподіл концентрації солей на межі РГВ, візуалізація отриманих значень розподілу концентрації солей має вигляд (рис. 11)

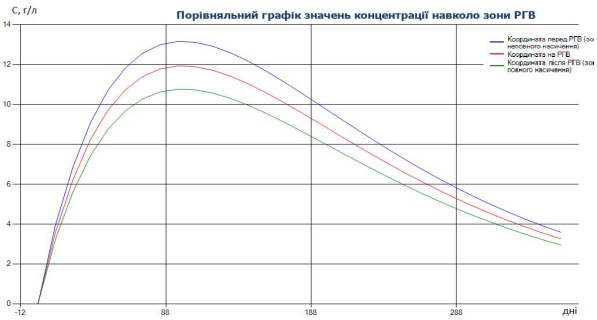


Рис.11. Графік розподілу концентрації солей на РГВ

Знайшовши розв'язок задачі в областях неповного та повного насичення, проаналізуємо отримані результати. Розподіл напорів вологи зменшується з часом (рис. 2), набуваючи найменших значень на максимальному часовому шарі ($T = 360$ *діб*). Напір вологи зростає по всій області вологоперенесення, набуваючи найбільших значень в околі вільної поверхні (рис. 3).

Із графіка розподілу поля концентрації області неповного насичення (рис. 4) видно, що розподіл концентрації солей найбільших значень набуває в першій третині часового проміжку, в подальшому – розподіл концентрації солей зменшується з часом, що пояснюється вимиванням сольових розчинів з пористого середовища; значення розподілу концентрації солей спадають з глибиною рівномірно, набуваючи найменших значень на РГВ. Розподіл концентрації монотонно спадає по всій області вологоперенесення.

В області повного насичення графік розподілу п'єзометричних напорів (рис. 5) демонструє, що розподіл напорів рідини зменшується з часом; значення напорів рідини зростають з глибиною пористого середовища (рис. 6).

Розподіл концентрації солей зменшується з часом та з глибиною, набуваючи менших значень в порівнянні з розподілом концентрації в області неповного насичення (рис. 7, 8).

Оскільки, області повного та неповного насичення розглядалися в комплексі, то отримано спільний графік розподілу концентрації солей області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища (рис. 9). Встановлено, що розподіл концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого середовища з глибиною та з часом зменшується.

Знайдено розв'язок задачі масоперенесення солей на межі двох областей (рис. 11). З

глибиною розподіл концентрації зменшується, набуваючи найменших значень в околі вільної поверхні. З початком області повного насичення концентрація солей значно зменшується.

Проведення ряду числових експериментів при різних вхідних даних дозволило встановити наступні результати: при різних значеннях коефіцієнтів дифузії ($D_1 = 0{,}01,\ D_2 = 0{,}2$) та коефіцієнтів масообміну ($\gamma_1 = 0.0065, \gamma_2 = 0.065$) розподіл концентрації солей на різних часових шарах з глибиною змінюється несуттєво – зі збільшенням даних коефіцієнтів розподіл концентрації зростає. Значно інтенсивніше на розподіл концентрації солей впливає зміна коефіцієнта фільтрації – зі збільшенням коефіцієнта фільтрації зростають значення розподілу концентрації солей. Зі збільшенням коефіцієнта пористості ґрунту концентрація солей інтенсивніше перерозподіляється по області фільтрації. Вплив звичайного осмосу на розподіл концентрації солей не значний, це пов'язано з тим, що коефіцієнт осмосу приймає малі значення.

6. Висновки. В роботі проведено математичне моделювання процесу масоперенесення при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в областях повного та неповного насичення. Числові розв'язки відповідних крайових задач отримано методом скінченних різниць. Розроблено відповідне програмне забезпечення, з використанням якого проведено числові експерименти та зроблено їх аналіз.

Список використаних джерел

1. *Verigin N.N., Sherzhukov B.S.* Diffusion and mass exchange during filtration of liquids in porous media. //Development of researches on theory of filtration in USSR (1917-2967).– Moscow: Nauka, 1969. – P. 237-313. [in Russian]
2. *Lyashko I.I.* Optimization and mathematical modelling of mass transfer of ground waters. – K.: Naukova Dumka, 1998. –P. 256. [in Ukrainian]
3. *Lyashko I.I., Demchenko L.I., Mistetskii G. E.* Numerical Solution of Problems of Heat and Mass Transfer in Porous Media. – Kiev: Naukova Dumka, 1991. – P. 262. [in Ukrainian]
4. *Sergienko I. V., Skopetskii V. V., Deineka V. S.* Mathematical Modeling and Investigation of Processes in Inhomogeneous Media. – Kiev, Naukova Dumka, 1991. – 432. [in Ukrainian]
5. *Gusev Ye. M.* Problems of theory of liquid transfer in non-saturated porous media // Physics of ground waters. – Moscow: Nauka, 1981. – P. 158. [in Russian]
6. *Dautov R.Z., Yegorov A.G.* Modeling of instability of moisture transfer in non-saturated porous media // Researches in applied mathematics. Kazan. Publ. House of Kazan univ. Iss. 24. – 2004. [in Russian]
7. Samarskii A.A. *Theory of Difference Schemes.* – Moscow: Nauka, 1989. – P. 616. [in Russian]
8. *Vlasyuk A.P., Tsvetkova T.P.* Mathematical modelling of mass transfer of salts under joint filtration and moisture transfer in saturated-non-saturated soils in non-linear statement // Theses of XVII International conference "Adoption of decisions under conditions of indeterminacy" – Skhidnytsya, 2011. – P. 48-50. [in Ukrainian]
9. *Vlasyuk A.P., Tsvetkova T.P.* Mathematical model of the mass transfer during the filtration and the moisture transfer of salt solutions in full and partial saturation soils // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. Issue 1. – 2012.– P. 137-144. [in Ukrainian]
10. *Tsvetkova T.P.* Mathematical modelling of mass transfer taking into account osmosis and moisture transfer in one-dimensional case // IV Intern. Scien. Conf. "Present-day problems of mathematical modelling, forecasting and optimization", Series: Technical sciences. Issue 4. Collected research papers. – Kamianets-Podilsky NU named after I. Ohienko, 2010. – 227-233 p. [in Ukrainian]

Надійшла до редколегії 01.03.2013

УДК 519.6

Галкін О.В., к. ф.-м. н.,доц.

Поліморфізм та класи в мові Haskell

У даній статі проаналізовано типи поліморфізму, реалізовані в мові програмування Haskell

Ключові слова: поліморфізм, параметричний поліморфізм, мова Haskel

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail:galkin@unicyb.kiev.ua

O.V.Galkin, Ph.D

Polymorphism and classes in Haskell.

In this paper we consider the kinds of polymorphism implemented,in Haskell.

Key Words:polymorphism,parametric polymorphism, language Haskell.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: galkin@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Вступ.

Haskell є чисто функціональною мовою програмування загального призначення, яка включає багато останніх інновацій у розробці мов програмування. Haskell забезпечує функції високого порядку, нестрогу семантику, статичну поліморфну типізацію, визначені користувачем алгебраїчні типи даних, зіставлення зі зразком, опис списків, модульну систему, монадичну систему введення - виведення і багатий набір примітивних типів даних, включаючи списки, масиви, цілі числа довільної і фіксованої точності і числа з плаваючою крапкою [1].

Однією з головних особливостей мови Haskell є те, що вона є мовою з відкладеними обчисленнями. Це означає, що нічого не буде обчислене до початку самого процесу обчислення. Наприклад, можна визначити в нескінченній рекурсії нескінченний список чисел. Тільки ті елементи списку, які насправді будуть використані, будуть обчислені. Це дає можливість для розв'язання багатьох проблем використовувати дуже елегантні методи. Типовим зразком вирішення проблеми могло б бути задання списку всіх можливих методів вирішення з наступним відсіюванням неправильних. Такий список згодом буде містити тільки допустимі розв'язки. Відкладені обчислення роблять цю операцію дуже прозорою [3-4].

Варто також зазначити, що мова Haskell є суворо типізованою мовою. Неможливо необережно привести Double до Int або викликати метод по порожньому покажчику. Це приводить до меншої кількості помилок. У деяких випадках може бути потрібно явно приводити Int до Double тоді, коли це потрібно перед виконанням якоїсь операції, але на практиці таке трапляється не так часто, щоб викликати незручності. В дійсності, примусове явне приведення часто допомагає виділити проблемну частину коду.

На відміну від інших мов, типи в мові Haskell визначаються автоматично. Це означає, що дуже рідко необхідно оголошувати типи функцій, крім тих випадків, які обумовлені документацією коду.

Наприклад, якщо написати функцію сортування без опису типу, мова Haskell упевниться, що вона буде працювати для всіх значень, які можуть бути відсортовані. Для порівняння, в мові програмування Java для досягнення поліморфізму необхідно було б використовувати базові класи, а після цього оголосити змінні як екземпляри підкласу цього

© О.В.Галкін, 2013

базового класу. Все це призводить до необхідності писати додатковий код. До того ж для явного приведення типів доведеться провести безліч перетворень типів, що є не найелегантнішим рішенням. Написання поліморфної функції на мові Java призведе до необхідності використання шаблонів, що еквівалентно оголошенню параметрів функції як об'єктів типу Object, а це по суті дозволяє програмісту посилати до функції що завгодно, навіть об'єкти, які за логікою не можуть пройти в функцію. В результаті виходить, що більшість функцій, які пишуться на мові Java, не є загальними [2]. Нижче розглянемо реалізацію поліморфізму в мові Haskell і проаналізуємо різні типи поліморфізму, присутні в цій мові програмування.

Поліморфізм функцій

В мові Haskell існує два види поліморфізму - параметричний і спеціальний (названий в англійських джерелах взятим з латини терміном «ad hoc»).

Параметричний поліморфізм

Параметричний поліморфізм - це можливість визначення узагальнених структур даних і функцій, поведінка яких не залежить від типів значень, якими вони оперують. У випадку типів даних (конкретніше, алгебраїчних типів даних, які, як показано в [5], можна інтерпретувати як контейнерні типи) значення довільних типів можуть тим чи іншим чином використовуватися всередині контейнерів (безпосередньо міститися в контейнерах, або вміст контейнерів залежатиме від таких довільних типів). У випадку функцій їх поведінка не залежить від типів переданих значень в якості вхідних параметрів.

Класифікація параметричного поліморфізму заснована на обмеженні рангу поліморфізму і на обмеженні використання типових змінних (за аналогією з термінами «рядкова змінна», «булева змінна» та ін.). Виділяють наступні типи параметричного поліморфізму:

а) непредикативний поліморфізм - дозволяє інстанціювати типові змінні при конкретизації довільними типами, в тому числі і поліморфними;

б) предикативний поліморфізм - на відміну від непредикативного поліморфізму інстанціювання типових змінних при конкретизації типу може проводитися тільки неполіморфними (мономорфними) типами, які іноді називаються «монотипія»;

в) поліморфізм рангу * (rank * polymorphism) - замість символу підстановки * можуть використовуватися значення «1», «k» і «N». В поліморфізмі першого рангу (цей тип поліморфізму ще називають «випереджальним поліморфізмом» або «let-поліморфізмом») типові змінні можуть отримувати конкретні значення мономорфних типів. Поліморфізм рангу k припускає, що в формулах, які описують λ-терми, квантор загальності (∀) може стояти перед не більше ніж k стрілками. Слід зауважити, що при k = 2 проблема виведення типів розв'язана, в той час як при k > 2 ця проблема нерозв'язна. Нарешті, поліморфізм вищого рангу (або поліморфізм рангу N) визначається тим, що квантори загальності можуть стояти перед довільною кількістю стрілок.

В мові Haskell досить багато прикладів параметричного поліморфізму, наприклад, у функціях length, head, teal, curry, uncurry, map, filter та ін. Наведемо реалізацію деяких з них:

```
length :: [a] -> Int
length [] = []
length (_: xs) = 1 + length xs

head :: [a] -> a
head (x: _) = x

tail :: [a] -> [a]
tail (_: xs) = xs

curry :: ((a, b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x, y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a, b) -> c)
uncurry g (x, y) = g x y
```

У перших трьох функцій вхідний параметр типу a, а в curry та uncurry ще b і c. Замість конкретного типу даних (Int, Bool, Char, ...) використовується типізація. Приклад на java:

```
public class Test <A> {...}
```

Тут теж використовується A - невідомий тип даних, який буде визначений під час компіляції. Поліморфізм використовується тоді, коли невідомо, який тип матиме параметр, але відомі операції, що над ним (або з ним) будуть проводитися.

Всі ідентифікатори типових змінних в мові Haskell повинні починатися з маленької літери (наприклад, a, abc, aA101), а всі конкретні типи (конструктори) – з великої (наприклад String, Int, Node). Параметр a може приймати будь-які типи: Int, String чи інші або навіть функції (наприклад, length [f, g, h], де f, g, h - функції, які мають однакові типи). Варто зауважити, що тип b може також приймати будь-які типи, в тому числі і тип параметра a.

Тип функції в інтерпретаторі GHCi (і в Hugs) завжди можна дізнатися за допомогою команди : t, наприклад:

```
Main>: t length
length :: [a] -> Int
```

Спеціальний (ad hoc) поліморфізм

Спеціальний (ad-hoc) поліморфізм, який ще називається поліморфізмом спеціального виду або «перевантаженням імен», дозволяє давати однакові імена програмним сутностям з різним поведінкою. Такий поліморфізм широко використовується в математиці, коли подібні математичні операції отримують одні й ті ж знаки (наприклад, арифметичні знаки (+), (-), (×) і (/) використовуються для позначення операцій додавання, віднімання, множення і ділення відповідно для довільних чисел - цілих, дійсних, комплексних та ін.). Це більш слабкий тип поліморфізму, ніж параметричний. Візьмемо для прикладу оператор (функцію) додавання (+). Вирази такого вигляду

```
(+) 2 3 - >> 5
(+) 2.5 3.85 - >> 6.35
```

відрізняються від виразів

```
(+) True False
(+) [1,2,3] [3,2,1]
```

тим, що в першому випадку були використані чисельні значення, а в другому значення типу Bool і [Int]. Оператор додавання не визначений для нечисельних типів. Все тому, що ця функція має тип не

```
(+) :: A -> a -> a
```

а такий

```
(+) :: Num a => a -> a -> a.
```

Тобто тут вводиться обмеження на типи даних, що вводяться (і виводяться). Обмеження, яке накладено на тип a: Num a говорить, що тип a повинен бути елементом класу Num. Такі класи типів дуже важливі в Haskell, так як вони додають додатковий захист від помилок при програмуванні, а також можуть зменшити кількість написаного коду в рази. Це ми побачимо в наступному прикладі.

Є наступні типи двійкових дерев:

Двійкове дерево, яке може зберігати будь-який тип даних

```
data Tree1 a = Nil | Node1 a (Tree1 a) (Tree1 a)
```

Двійкове дерево, яке може зберігати два елементи, і кожне відгалуження закінчується «листом» с одним елементом (a не Nil):

```
data Tree2 ab = Leaf2 b | Node2 ab (Tree2 ab) (Tree2 ab)
```

Двійкове дерево, яке може зберігати дані типу String і теж закінчується листом:

```
data Tree3 = Leaf3 String | Node3 String Tree3 Tree3
```

І, скажімо, є ще два види списків:

звичайний

```
type Lst a = [a]\
```

і тип "мотузка"

```
data Rope a b = Nil | Twisted b (Rope b a)
```

Маючи всі ці структури даних, можна написати функцію size, яка незалежно від структури даних, виводила б або її глибину (для дерев), або довжину (для списків), або одним словом - розмір. Наївним рішенням було б написати для кожного свою функцію:

```
sizeT1 :: Tree1 a -> Int – підраховуємо кількість
```

```
вузлів
sizeT1 Nil = 0
sizeT1 (Node1 _ l r) = 1 + sizeT1 l + sizeT1 r

sizeT2 :: (Tree2 ab) -> Int - підраховуємо к-ть елементів
sizeT2 (Leaf 2 _) = 1
sizeT2 (Node2 __ l r) = 2 + sizeT2 l + sizeT2 r

sizeT3 :: Tree3 -> Int - піраховуємо довжини елементів типу String
sizeT3 (Leaf3 m) = length m
sizeT3 (Node mlr) = length m + sizeT3 l + sizeT3
І для списків:
sizeLst :: [a] -> Int
sizeLst = length

sizeRope :: (Rope a b) -> Int
sizeRope Nil = 0
sizeRope (Twisted _ ls) = 1 + sizeRope ls
```

Тепер якщо з'явиться ще якась структура даних, то доведеться робити нову функцію, яка буде підходити тільки для цієї структури. А нам хотілося б, щоб однією функцією можна було отримати розмір будь-якої структури даних. Як у функції (+) було обмеження класом Num, так і в даному прикладі треба зробити обмеження класом Size, а для цього цій клас треба спочатку створити:

```
class Size a where
   size :: a -> Int
```

Таким чином, залишилося зробити екземпляри цього класу під конкретні значення a (тобто під конкретні типи даних):

```
instance Size (Tree1 a) where
   size Nil = 0
   size (Node1 _ l r) = 1 + size l + size r

instance Size (Tree2 a b) where
   size (Leaf2 _) = 1
   size (Node2 __ l r) = 2 + size l + size r

instance Size Tree3 where
   size (Leaf3 m) = length m
   size (Node3 m l r) = length m + size l + size r

instance Size [a] where
   size = length

instance Size (Rope a b) where
   size Nil = 0
   size (Twisted _ ls) = 1 + size ls
```

Тепер якщо в GHCi написати: t size, то побачимо size :: Size a => a -> Int. Тобто отримаємо:

```
size Nil - >> 0
size (Node1 "foo" (Node1 "bar" Nil Nil) Nil) - >>
2
size (Leaf 2 "foo") - >> 1
size (Node3 "foo" (Node3 "bar" (Leaf3 "abc")
(Leaf "cba")) (Leaf "tst")) - >> 15 - 3 * 5
size [1 .. 5] - >> 5
size (Rope 2 (Rope 'a' (Rope 5 Nil))) - >> 3
```

Кожен екземпляр класу Size реалізував функцію size, яка застосовна лише до значень певного типу. В даному випадку ця функція, як і інші предвизначені оператори (+), (*), (-), перевантажена. Але є і свої мінуси у такого рішення. Наприклад, хотілося дізнатися кількість елементів у парному списку, тобто

```
size [(1,2), (3,4)] - >> 4
size [('a', 'b'), ('c', 'd'), ('e', 'f')] - >> 6
```

Очевидно можна було б зробити наступне:

```
instance Size [(a, b)] where
   size = (* 2). Length
```

Але тут виникне проблема, через те, що вже є екземпляр для звичайного списку (instance Size [a] where) та більше не можна використовувати інше визначення, тому що, як вже говорилося раніше, тип a може бути будь-яким типом, в тому числі і (b, c), тобто. [A] == [(b, c)] Для вирішення даної проблеми можна використовувати Overlapping Instances (англ. перекривають екзепляри класу). У цього рішення є і свої мінуси (імпорт одного з модулів може поміняти значення програми, може викликати помилки, і так далі).
Розглянемо класи в Haskell більш докладно.

Класи

У попередньому прикладі був створений клас Size. Неповна декларація класу в Haskell має наступний вигляд: (tv = type variable):

```
class Name tv where
   сигнатура включає змінну tv
```

Неповна тому, що в декларацію класу також можуть бути введені обмеження на tv (наприклад, tv повинна бути елементом класу Ord). Сигнатур може бути скільки завгодно,

але кожна з них повинна включати (як вхідний так / або вихідний параметр) змінну tv.
Типові класи - це колекції типів, для яких визначені спеціальні функції. Ось деякі (одні з найважливийших) класи в Haskell:

Eq - клас для тесту на рівність (нерівність) двох типів даних (операції ==, / =)
Ord - клас для визначення порядку типів, тобто який елемент більше, який менше (операції>,> =, <, <=, min, max ...)
Enum - клас для типів, чиї значення можна «порахувати» (наприклад, [1 .. 10])
Bounded - клас теж використовується для типів класу Enum. Використовується для найменування
нізжшей і вищої межі типу.
Show - клас для типів, значення яких можна перетворити в рядок, (= можна представити як символи)
Read - клас для типів, значення яких можна перетворити з рядка

Тільки ці класи можна автоматично успадковувати будь-якого типу даних (= помістити в секцію deriving). Між класами існує теж залежність. Наприклад, якщо відомо як порівнювати два елементи (клас Ord), то тоді треба заздалегідь вміти визначати чи дорівнює один елемент іншому (клас Eq). Адже для реалізації оператора (> =) треба мати реалізований оператор (==). Тому, можна сказати, що клас Ord залежить (успадковує) від класу Eq. Більш детальна схема залежності класів представлена на рис.1. Розглянемо клас еквівалентності Eq більш детально. Як вже раніше було згадано, цей клас повинен мати дві функції (==) та (/ =):

```
class Eq a where
   (==), (/ =) :: A -> a -> Bool - так як сигнатури (==) та (/ =) однакові, їх можна записати в 1 рядок

   x / = y = not (x == y)
   x == y = not (x / = y)
```

З коду видно, що для будь-якого екземпляру класа Eq, достатньо реалізувати одну з двох функцій. Наприклад, для типу Bool (два типи дорівнюють лише тоді, коли вони обидва True або False) це зроблено таким чином:

```
instance Eq Bool where
   (==) True True = True
   (==) False False = True
   (==) __ = False
```

Як видно, випадок True False і False True (так само як і останній рядок) не обов'язково писати, тому нерівність є зворотною операцією рівності. Якщо до цього у нас було так, що тип є кокретізацією іншого типу (наприклад, [Int] є інстанцією типу [a]), то тепер тип може бути екземпляр класу (наприклад, Bool є інстанцією класу Eq). З цієї ж аналогією, можна написати функції рівності тих двійкових дерев, що ми використовували вище. Наприклад, для Tree2:

```
instance (Eq a) => Eq (Tree2 a) where - накладаємо умову на a, що цей тип може порівнюватися
   (==) (Leaf2 s) (Leaf2 t) = (s == t)
   (==) (Node2 s t1 t2) (Node2 t u1 u2) = (s == t) && (t1 == u1) && (t2 == u2)
   (==) __ = False
```

Для (Tree3 ab) ми вже повинні будемо накладати умову як на a, так і на b, тобто
instance (Eq a, Eq b) => Eq (Tree3 a b)

Все що лівіше символу => називається контекстом, все що правіше цього символу повинне бути або базовим типом (Int, Bool, ...), або конструктори типів (Tree a, [...], ...). Оператор (==) є перевантаженою функцією (ad-hoc поліморфа).

Рівність (==) є тіпозавісимим властивістю, яке вимагає реалізації під кожен тип (як наприклад реалізація рівності двійкових дерев). Хотілося б, щоб можна було порівнювати дві функції таким чином:
(==) Fac fib - >> False - де fac - факторіал числа, а fib - число Фібоначчі

```
(==) (\ X -> x + x) (\ x -> 2 * x) - >> True
(==) (+2) (2 +) - >> True
```

Це вимагало б в Haskell написання такого коду:

```
instace Eq (Int -> Int) where
(==) F g = ... - Де f і g є якимись функціями
```

Чи можливо написати таку функию, яка б видавала результат рівності двох будь-яких

функцій (True або False)? На жаль, з тези Черча-Тьюринга випливає, що рівність двох будь-яких функцій можна визначити. Не існує алгоритму, який би для двох будь-яких даних функцій, завжди і через кінцеве кількість кроків вирішував, чи є дві функції рівними чи ні. Такий алгоритм можна запрограмувати ні на одній мові програмування. Замість реалізації своєї функції для рівності, наприклад двійкових дерев, можна завжди помістити ті класи, які успадковуються даним типом автоматично після ключового слова deriving. Тобто можна написати:

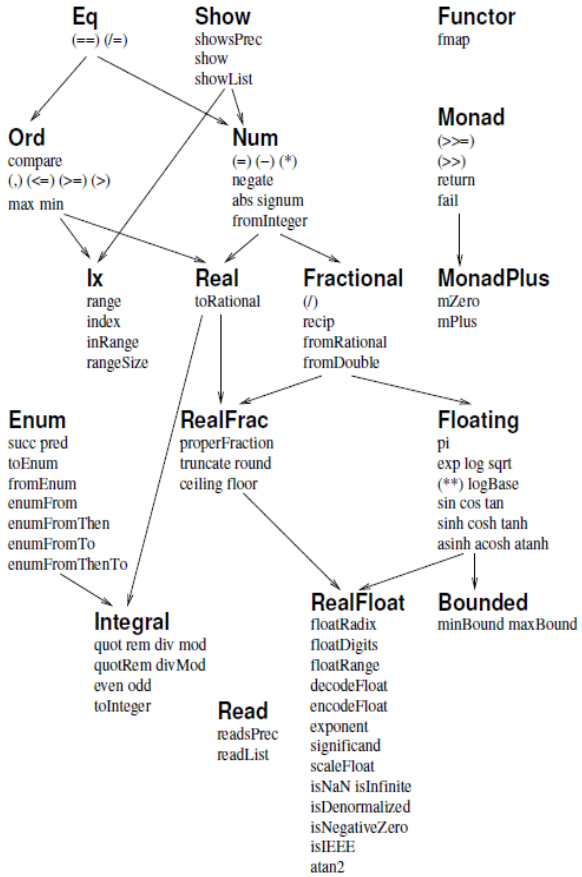


Рис.1 Залежність стандартних класів в мові Haskell

data Tree a = Nil | Node a (Tree a) (Tree a) deriving Eq

Це дозволяє не писати власноручно інстанцію класу Eq (instance Eq a => Eq (Tree a) where ...). Але для будь-якої функції, тоді доведеться накладати умову на змінну a, що ця змінна є елементом класу Eq. Іноді, все-таки доводиться писати ці функції, так як «автоматичне» порівняння не завжди працює так як ми б того хотіли. Наприклад для двійкового дерева
data Tree3 ab = Leaf3 bl | Node3 ab (Tree3 ab) (Tree3 ab) deriving Eq
буде реалізована (автоматично) наступна функція:

```
instance (Eq a, Eq b) => Eq (Tree3 a b) where
(==) (Leaf3 q) (Leaf3 s) = (q == s)
(==) (Node3 _ q t1 t2) (Node3 _ s u1 u2) = (q == s) && (t1 == u1) && (t2 == u2)
(==) __ = False
```

Як ми бачимо, перший аргумент Node3 був опущений, чого би не хотілося в деяких випадках.

Висновки.

Таким чином, в даній статті було розглянуто реалізацію поліморфізму в функціональній мові програмування Haskell. Проаналізовано відмінність між двома формами поліморфізму: спеціальним та параметричним. Неформальне відмінність двох типів поліморфізму:

параметричний - один і той же код незалежно від типу

ad-hoc - різний код, хоча однакові імена функцій

Список використаних джерел

1. www.haskell.org
2. N.A.Roganova. Functional programming. M.:MGIU 2007
3. J.Harrison. Introduction in functional programming. University of Cambridge 1998
4. A.Field, P.Harrison. Functional programming. M.:Mir, 1993.
5. R.Dushkin. Algebraic data types and their use in programming. Practice of functional programming, №2, p.86–105, 2009.

Надійшла до редколегії: 05.03.2013

УДК 517.929.4

Гаркуша Н.І., к. е. н., ст.н.с.

Про близькість моделей динаміки Вольтера та Гудвіна

Розглянуто математичні моделі динаміки популяцій Вольтера. Спочатку наведено класичну модель взаємодії «хижак-жертва». Далі розглянуто модель з запізнюванням. Проведено дослідження якісної поведінки траєкторій руху.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, запізнювання, стійкість.

E-mail: ngarkusha@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаінов Д. Я.

Garkusha N.I, PhD

The proximity of models of the dynamics of Voltaire and Goodwin

The mathematical models of population dynamics of Voltaire are considered. At first the classic model of interaction "predator-prey" is presented. Next, consider the model with a delay. The research of qualitative behavior of trajectories was made.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, delay, stability.

Вступ

Очевидно, однією з перших математичних моделей динаміки розвитку була модель Мальтуса [1]. Вона являла собою лінійне скалярне диференціальне рівняння з сталим коефіцієнтом

$$\dot{x}(t)=\gamma x(t),\ x(0)=x_0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) мало одну особливу точку $x_1=0$, Розв'язком рівняння була експонента $x(t)=x_0e^{\gamma t}$, яка зростала при додатному коефіцієнті народжуваності γ і спадала при від'ємному. Таким чином при $\gamma>0$ популяція зростала до нескінченості (епідемія), при $\gamma<0$ прямувала до нуля (вимирала). Природнью, що така модель могла реально описувати процес лише на невеликому проміжку часу і великого практичного застосування не знайшла.

Більш складною являла собою модель Ферхюльста [1]. Вона представляла собою рівняння з квадратичною правою частиною

Модель мала дві особливі точки $x_1=0$, $x_2=\alpha/\beta$. Асимптотично стійкою була точка $x_2=\alpha/\beta$, а $x_1=0$ була нестійкою. Їз збільшенням часу $t\to+\infty$, популяция прямувала до стійкого стану рівноваги $x_2(t)\to\alpha/\beta$.

Для врахування розвитку різного виду популяцій була розроблена модель Лотки-Вольтера [2]. Модель, яка враховувала післядію на нескінченому проміжку часу, мала виглядд інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{N}_1(t)=\left[\alpha_1-\int_{-\infty}^{t}F_1(t-s)N_2(s)ds\right]N_1(t),$$

$$\dot{N}_2(t)=-\left[\alpha_2-\int_{-\infty}^{t}F_2(t-s)N_1(s)ds\right]N_2(t).$$

Більш проста модель мала вигляд системи двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{N}_1(t)=[\alpha_1-\gamma_1N_2(t)]N_1(t),$$

$$\dot{N}_2(t)=-[\alpha_2-\beta_2N_1(t)]N_2(t) \qquad (3)$$

з квадратичною правою частиною. Коефіцієнти $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,2}$, $\beta_2>0$, $\gamma_1>0$ характеризували народжуваність та потребу в їжі. Розглядалась невід'ємна чверть площини, тобто $N_1\ge0$, $N_2\ge0$. Було доведено [2], що існують дві точки спокою: $N_1^0=0$, $N_2^0=0$ і $N_1^*=\alpha_1/\beta_2$, $N_2^*=\alpha_1/\gamma_1$. Нульовим станом рівноваги було сідло, ненульовим – цикл. Траєкторії системи, що розташовані в першому квадранті, мали вигляд замкнених циклів, рух по яким йшов навколо другої точки спокою. Ця модель обгрунтовувала періодичність динаміки колькісної залежності

© Н.І. Гаркуша, 2013

«хижаків» та «жертви». З ростом популяції «хижаків» популяція «жертви» зменшувалась. Це, в свою чергу вело до зменшення популяції «хижака» і к росту популяції «жертви».

Далі розглядались математические модели с квадратичной правой частью більш загального вигляду

$$\dot{N}_1(t)=[\alpha_1-\beta_1 N_1(t)-\gamma_1 N_2(t)]N_1(t),$$

$$\dot{N}_2(t)=-[\alpha_2-\beta_2 N_1(t)-\gamma_2 N_2(t)]N_1(t).$$

В цій статті розглядається математична модель Гудвіна, яка описує взаємодію виробничих пластів у суспільстві [3, стор.53]. Розлядаються два суспільних пласта: службовці та підприємці. Службовці витрачають свою зарплатню wL на прожиткові потреб, підприємці накопичують доходи $Y-wL$. Тут $Y-$продукція виробництва. Ціна товару пронормована. Нехай $K-$ капітал, $Y/L=a=a_0\exp\{gt\}$- продуктивність праці, що збільшується з сталою швидкістю g, $k=K/Y$ - коєфіцієнт капиталоємність продукції,

$$N=N_0\exp\{nt\}$$

попит на рынку робочої сили, що збільшується з темпом росту n (або зменшується для від'ємного n). Доля витрат на оплату праці по відношенню до національного доходу складає $wL/Y=w/a$. Тому, доля прибутку підприємців складає $1-w/a$. Оскільки сбереження визначені як

$$S=Y-wL=(1-w/a)/k,$$

то доля інвестицій складає

$$dK/dt=S=(1-w/a)Y.$$

При сталому значенні капиталоємності k $Y\,dK/dt=K\,dY/dt$

мають місце співвідношення

$$Y^{-1}\,dY/dt-L^{-1}\,dL/dt=g$$

і

$$K^{-1}\,dK/dT=k^{-1}(1-w/a).$$

Звідси випливає, що

$$L^{-1}\,dL/dt=(1-w/a)/k-g\ .$$

Вводяться нові змінні $y=w/a$ - доля витрат на оплату труда, $x=L/N$ - коефіцієнт зайнятості. На підставі цього отримана система двух звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{1-y(t)}{k}-(g+n)\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t)=\left[\frac{dw/dt}{w}-\frac{da/dt}{a}\right].$$

Линійна апроксимація

$$w^{-1}\,dw/dt=-r+bx$$

у другому рівнянні, приводить до співвідношення

$$y^{-1}\,dy/dt=-r+bx-g\ .$$

І модель Гудвіна взаимовідношень двух суспільних пластів, має вигляд

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{1}{k}-(g+n)-\frac{y(t)}{k}\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t)=[-(g+r)+bx(t)]y(t). \qquad (4)$$

Неважко побачити, що має місце близькість з моделлю Лотки-Вольтера «хижак-жертва». Позначивши

$$\alpha_1=\frac{1}{k}-(g+n),\ \gamma_1=\frac{1}{k},\ \alpha_2=g+r,\ \beta_2=b,$$

отримаємо, що при виконанні умови $1/k-(g+n)>0$, моделі співпадають. Таким чином, існує аналогія між явищами боротьби протидіючих біологічних суспільств і взаємовідносин «підприємець-службовець».

Динаміка моделі Гудвіна с післядією

Якщо враховувати час τ прийняття рішень (часа після отримання інформації і прийняття рішення), то більш адекватною математичною моделлю буде модель з післядією. Вона має вигляд

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{1}{k}-(g+n)-\frac{y(t-\tau)}{k}\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t)=[-(g+r)+bx(t-\tau)]y(t). \qquad (5)$$

Стани рівноваги цієї системи ті ж самі, що і в системі без післядії: $x^0=0$, $y^0=0$ і

$x^* = (g+r)/b$, $y^* = 1-k(g+n)$. Нехай виконується умова

$$1-k(g+n)>0. \qquad (6)$$

Тоді друга особлива точка знаходиться в додатній чверті. Заміною змінних

$$x(t)=(g+r)/b+\xi(t),\ y(t)=1-k(g+n)+\eta(t) \qquad (7)$$

система (5) зводиться до вигляду «системи рівнянь збурень» у другій особливій точці. Вона буде мати вигляд

$$\dot{\xi}(t)=-\frac{1}{k}\left[\frac{g+r}{b}+\xi(t)\right]\eta(t-\tau),$$
$$\dot{\eta}(t)=b[1+k(g+n)+\eta(t)]\xi(t-\tau).$$

Система лінійного наближення для другої особливої точки має вигляд

$$\dot{\xi}(t)=-\frac{g+r}{kb}\eta(t-\tau),$$
$$\dot{\eta}(t)=b[1+k(g+n)]\xi(t-\tau).$$

Її характеристичним рівнянням буде

$$\det\begin{vmatrix} -\lambda & -e^{-\lambda\tau}\dfrac{g+r}{kb} \\ be^{-\lambda\tau}[1+k(g+n)] & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Або

$$\lambda^2+\frac{1}{k}(g+r)[1+k(g+n)]e^{-2\lambda\tau}=0.$$

Позначивши

$$\frac{1}{k}(g+r)[1+k(g+n)]=\omega^2,$$

отримаємо, що характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2+\omega^2e^{-2\lambda\tau}=0. \qquad (8)$$

Його можна записати у формі

$$(\lambda+i\omega e^{-\lambda\tau})(\lambda-i\omega e^{-\lambda\tau})=0$$

і розщепити на два окремих рівняння

$$\lambda+i\omega e^{-\lambda\tau}=0,\quad \lambda-i\omega e^{-\lambda\tau}=0.$$

1. Розглянемо перше рівняння

$$\lambda+i\omega e^{-\lambda\tau}=0. \qquad (9)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $\lambda=x+iy$. Після підстановки отримаємо

$$x+iy+i\omega e^{-(x+iy)\tau}=0.$$

Звідси маємо

$$x+iy+i\omega e^{-x\tau}(\cos y\tau-i\sin y\tau)=0.$$

І отримаємо систему двох нелінійних рівнянь з двомя невідомими

$$x+\omega e^{-x\tau}\sin y\tau=0,\ y+\omega e^{-x\tau}\cos y\tau=0. \qquad (10)$$

Наведемо ряд тверджень про розташування коренів рівнянь.

1. Рівняння (9) має злічену кількість коренів.

2. Якщо виконується умова $\omega=(-1)^k k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, то рівняння (9) має розв'язок $\lambda_0=ik\pi/\tau$. Дійсно, нехай існує чисто уявний корень $\lambda_{1,2}=iy_0$, $x_0=0$. Тоді система (10) переходит до

$$\omega\sin y_0\tau=0,\ y_0+\omega\cos y_0\tau=0.$$

З першого рівняння отримуємо $y_0\tau=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$. Друге рівняння перетворюється в

$$k\pi+(-1)^k\omega=0.$$

І при $\omega=(-1)^k k\pi$ рівняння (9) має розв'язок

$$y_0=k\pi/\tau.$$

3. Покажемо, що існує хоча б один корень с додатною дійсною частиною, тобто $\lambda_0=x_0+iy_0$, $x_0>0$. Розділивши одне з рівнянь (10) на друге, отримуємо

$$\frac{x}{y}=tgx\tau\ \rightarrow\ y=xctgx.$$

Звівши до квадрату і склавши, отримуємо

$$x^2+y^2=\omega^2e^{2y\tau}.$$

Розглянемо отриману систему

$$y=xctgx,\ x^2+y^2=\omega^2e^{2y\tau}. \qquad (11)$$

Перша крива системи являє собою симетричну систему «деформованих» кривих, схожих на тангенси. Друга крива являє собою симетричну відносно змінної y криву, що прямує на нескінченість. І завжди існує перетин (x_0,y_0) кривих (11), який задовольняє уиові $x_0>0$, тобто стан рівноваги є нестійким.

Далі, розглянемо модель, яка враховує взаємодію. Вона має вигляд

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{1}{k}-(g+n)+R_1x(t-\tau)-\frac{y(t-\tau)}{k}\right]x(t),$$
$$\dot{y}(t)=\left[-(g+r)+bx(t-\tau)+R_2y(t-\tau)\right]y(t). \qquad (12)$$

В цій моделі сталі R_1, R_2 враховують взаємний вплив змінних. Особливі точки визначаються розв'язком системи

$$\left[\frac{1}{k}-(g+n)+R_1x-\frac{1}{k}y\right]x=0,$$
$$\left[-(g+r)+bx+R_2y\right]y=0.$$

Система має чотири особливі точки:

$$O_1(0,0),\ O_2\left(0,\frac{g+r}{R_2}\right),\ O_3\left(\frac{1-(g+n)}{R_1k},0\right),$$
$$O_4(x_4,y_4)$$

де

$$x_4=\frac{R_2\left[\frac{1}{k}-(g+n)\right]+\frac{1}{k}(g+r)}{R_1R_2+\frac{b}{k}},$$
$$y_4=\frac{R_1(g+r)-b\left[\frac{1}{k}-(g+n)\right]}{R_1R_2+\frac{b}{k}}. \qquad (13)$$

Актуальною є точка $O_4(x_4,y_4)$. Лінеаризація в околі цієї точки дає наступну систему

$$\dot{x}(t)=a_{11}x(t)+b_{11}x(t-\tau)+b_{12}y(t-\tau)$$
$$\dot{y}(t)=a_{22}y(t)+b_{21}x(t-\tau)+b_{22}y(t-\tau),$$

де

$$a_{11}=\left[\frac{1}{k}-(g+n)+R_1x_4-\frac{1}{k}y_4\right],$$
$$a_{22}=\left[-(g+r)+bx_4+R_2y_4\right]$$

$$b_{11}=R_1x_4,\ b_{12}=-\frac{1}{k}x_4,\ b_{21}=y_4,\ b_{22}=R_2y_4, \qquad (14)$$

Відомо, що необхідною умовою стійкості системи з запізнюванням є асимптотична стійкість системи без запізнювання [4]. Характеристичне рівняння системи без запізнювання має вигляд

$$\det\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11}-\lambda & b_{12}\\ b_{21} & a_{22}+b_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

або

$$\lambda^2-\left[(a_{11}+a_{22})+(b_{11}+b_{22})\right]\lambda+$$
$$+\left[(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-b_{12}b_{21}\right]=0$$

Для рівняння другого порядку необхідною та достатньою умовою стійкості стану рівноваги є додатність коефіцієнтів, тобто

$$(a_{11}+a_{22})+(b_{11}+b_{22})>0,$$
$$(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-b_{12}b_{21}>0. \qquad (15)$$

Таким чином, якщо виконується нерівність (15) зі змінними, що визначені в (14), то стан рівноваги $O_4(x_4,y_4)$ асимптотично стійкий при достатньо малому запізнюванні.

Це означає, що встановлюється динамічна рівновага у взаємовідносинах між підприємцями та службовцями.

Список використаної літератури

1. Smith J. Models in ecology. - M., Mir, 1976. - 184 p.
2. Volterra V. The mathematical theory of the struggle for existence. - M., Nauka, 1976. - 286 p.
3. Zang V.V. Synergetic Economics. Time and changes in the nonlinear economictheory. M., Mir, 1999. - 335 p.
4. Elsgoltz L. E. and Norkin S.B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument. Nauka 1970. - 240 p.

Подано до редколегії 19.03.2013

УДК 519.7

Грунський І.С., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Пряничникова О.О., к.ф.-м.н.

Мови, що можуть бути представлені в повністю позначених графах

У роботі введено алгебру мов, що можуть бути представлені у повністю позначених графах, досліджено її основні властивості; доведено, що мова допустима в повністю позначеному графі тоді й тільки тоді, коли вона описується регулярним виразом у введеній алгебрі; розроблено методи аналізу і синтезу мов, що можуть бути представлені у повністю позначених графах.
Ключові слова: граф, алгебра, мова.

Донецький національний технічний університет, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58,
e-mail: pryanichnikovae@gmail.com

Grunsky I.S.,
Prianychnykova O.O.

Languages Representable by Generally Labeled Graphs

In this paper, we introduce and study an algebra of languages representable by generally labeled graphs. It is proved that a language is defined by a generally labeled graph if and only if it can be representable by a regular expression in the proposed algebra. We show in a constructive way how this algebra provides a translation from generally labeled graphs to regular expressions and vice versa.
Key Words: graph, algebra, language.

Donetsk National Technical University, 83001, Donetsk, Artema str., 58,
e-mail: pryanichnikovae@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ. У комп'ютерних науках широко застосову-ються різні графові моделі, серед яких найбільш вивченими є графи з позначеними дугами (скінченні автомати). Сьогодні існують актуальні задачі, які природно представляються у вигляді повністю позначених графів – графів, у яких позначки є як у дуг, так і у вершин (в першу чергу в робототехніці[1] і формальних методах розробки програм[2]).

У теорії скінченних автоматів одним з найважливіших результатів є теорема Кліні, у якій стверджується, що клас мов, які розпізнаються скінченними автоматами, збігається із класом раціональних мов, що можуть бути представлені регулярними виразами алгебри Кліні [3]. Основна мета даної роботи – довести аналогічну теорему для повністю позначених графів.

У роботі введено алгебру мов, що можуть бути представлені у повністю позначених графах, досліджено її основні властивості, доведено, що мова допустима в повністю позначеному графі тоді й тільки тоді, коли вона описується регулярним виразом у введеній алгебрі, розроблено методи аналізу й синтезу мов, що можуть бути представлені у повністю позначених графах.

Основні визначення і позначення. Нехай X, Y – довільні скінченні множини. Позначеним графом з множиною позначок вершин X і множиною позначок дуг Y назвемо п'ятірку $G = (\tilde{G}, I, F, \alpha, \beta)$, де $\tilde{G} = (V, E, p_1, p_2)$ – орієнтований граф, у якому можливі кратні дуги й петлі, V – скінченна множина вершин графа, E – множина дуг, $p_1 : E \to V$ – инцидентор, що ставить у відповідність кожній дузі графа вершину, яка є початком цієї дуги, $p_2 : E \to V$ – инцидентор, що ставить у відповідність кожній дузі вершину, яка є її кінцем; $I \subseteq V$ – множина початкових вершин графа; $F \subseteq V$ – множина фінальних вершин графа; $\alpha : V \to X$ – відображення, яке ставить у відповідність кожній вершині її позначку; $\beta : E \to Y$ – відображення, яке ставить у відповідність кожній дузі позначку цієї дуги.

Шлях у позначеному графі G – це скінченна послідовність вершин і дуг $w = v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k$, де $p_1(e_i) = v_i$, $p_2(e_i) = v_{i+1}$, $p_1(e_{i+1}) = v_{i+1}$, $p_2(e_{i+1}) = v_{i+2}$. Назвемо вершину v_1 початком, а вершину v_k кінцем шляху w. Успішним шляхом у позначеному графі будемо називати такий шлях, який закінчується в одній з фінальних вершин цього графа.

Кожному шляху $w = v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots v_k$ в позначеному графі G відповідає послідовність,

© І.С. Грунський, О.О. Пряничникова, 2013

що складається з позначок усіх вершин і дуг, що входять у цей шлях:
$p(w) = \alpha(v_1)\beta(e_1)\alpha(v_2)\beta(e_2)\ldots\alpha(v_k)$.

Множину усіх послідовностей, відповідних до успішних шляхів у позначеному графі G, що починаються у вершині $v_i \in V$, позначимо через $P(v_i) = \{p_{i1}, p_{i2}, \ldots\}$. Мовою, що може бути представлена у позначеному графі, назвемо множину послідовностей позначок вершин і дуг, що стоять уздовж усіх успішних шляхів, які починаються в початкових вершинах графа $P(G) = \bigcup_{v_i \in I} P(v_i)$.

Алгебра мов, що можуть бути представлені у повністю позначених графах. Позначимо множину усіх послідовностей скінченної довжини виду $x_1y_1x_2y_2\ldots y_{k-1}x_k$, де $x_i \in X$, $y_i \in Y$, $1 \le i \le k$, через $P(X,Y)$.

Визначимо на множині послідовностей $P(X,Y)$ часткову бінарну операцію композиції в такий спосіб: для всіх $a,b \in X$, $p_1a, bp_2 \in P(X,Y)$

$$p_1a \circ bp_2 = \begin{cases} p_1ap_2, & \text{якщо a = b;} \\ \text{не визначено,} & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Введемо на мовах $P_1, P_2 \subseteq P(X,Y)$ наступні операції:

1. $P_1 \cup P_2 = \{p \mid p \in P_1 \text{ або } p \in P_2\}$
2. $P_1 \circ P_2 = \{p_1 \circ p_2 \mid p_1 \in P_1 \text{ та } p_2 \in P_2\}$
3. $P^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} P^i$, де $P^0 = X$, $P^1 = P$, $P^{i+1} = P^i \circ P$ для всіх $i \ge 1$.

Безпосередньо з визначення випливає, що операція $\circ$ асоціативна, і для кожного $P \in 2^{P(X,Y)}$ виконується $P \circ X = X \circ P = P$, отже, алгебра $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, X \right\rangle$ є моноїдом. Операція $\cup$ комутативна і асоціативна, оскільки за визначенням є теоретико- множинною операцією об'єднання, причому $P \cup \varnothing = \varnothing \cup P = P$ та $P \cup P = P$ для кожного $P \in 2^{P(X,Y)}$, тому $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \cup, \varnothing \right\rangle$ є ідемпотентним комутативним моноїдом. За визначенню операції $\circ$ для всіх $P \in 2^{P(X,Y)}$ виконується $P \circ \varnothing = \varnothing \circ P = \varnothing$. Для операцій $\circ$ і $\cup$ виконуються дистрибутивні закони: $R \circ (Q \cup P) = R \circ Q \cup R \circ P$, $(R \cup Q) \circ P = R \circ P \cup Q \circ P$. Таким чином, алгебра $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, \varnothing, X \right\rangle$ є ідемпотентним півкільцем.

Регулярні вирази у введеній алгебрі визначимо рекурсивно.

1) $\varnothing$ є рекурсивним виразом і позначає пусту мову $L(\varnothing) = \varnothing$.

2) Будь-який символ $x \in X$ є регулярним виразом, що позначає мову $L(x) = \{x\}$.

3) Якщо $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$, то x_1yx_2 є регулярним виразом, що позначає мову $L(x_1yx_2) = \{x_1yx_2\}$.

4) Якщо R та Q є регулярними виразами, то $(R \cup Q)$, $(R \circ Q)$, (R^*) також є регулярними виразами, і $L(R \cup Q) = L(R) \cup L(Q)$, $L(R \circ Q) = L(R) \circ L(Q)$, $L(R^*) = (L(R))^*$.

Теорема 1. В алгебрі $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, *, \varnothing, X \right\rangle$ рівняння з одним невідомим виду $P = R \circ P \cup Q$ має найменший розв'язок

$$P = P^* \circ Q, \qquad (1)$$

який є єдиним, якщо $X \cap R = \varnothing$.

Доведення. Для доведення теореми можна використати відому теорему про нерухому точку, згідно з якою в будь-якім замкненім півкільці всяке рівняння виду $x = f(x)$, де f – безперервне відображення носія цього півкільця в себе, має найменший розв'язок.

Ідемпотентне півкільце $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, \varnothing, X \right\rangle$ замкнене, тому що будь-яка впорядкована послідовність $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ мов з $2^{P(X,Y)}$ має найменшу верхню грань, яка дорівнює об'єднанню всіх мов у послідовності, а операція $\circ$ зберігає найменші верхні грані послідовностей.

У силу безперервності операцій $\circ$ і $\cup$, а також того, що суперпозиція безперервних функцій безперервна, права частина рівняння $P = R \circ P \cup Q$ є безперервним відображенням $f : 2^{P(X,Y)} \to 2^{P(X,Y)}$.

За теоремою про нерухому точку, найменшим розв'язком рівняння $P = R \circ P \cup Q$ буде $P = \bigcup_{n \ge 0} f^n(\varnothing)$, де $\varnothing$ – найменший елемент множини $2^{P(X,Y)}$, $f^0(x) = x$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ для кожного $n > 0$.

Враховуючи, що

$$f^0(\varnothing) = \varnothing,$$
$$f^1(\varnothing) = Q,$$
$$f^2(\varnothing) = R \circ Q \cup Q,$$
$$f^3(\varnothing) = R \circ R \circ Q \cup R \circ Q \cup Q,$$
$$\dots$$
$$f^n(\varnothing) = (R^{n-1} \cup \dots \cup R^2 \cup R) \circ Q \cup Q,$$

одержимо, що $P = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\varnothing) = R^* \circ Q$.

Покажемо, що цей розв'язок єдиний, коли $X \cap R = \varnothing$. Нехай P' – будь-який розв'язок рівняння $P = R \circ P \cup Q$, послідовність $p \in P'$, довжина p дорівнює m.

Підставляючи $m-1$ раз праву частину рівняння $P = R \circ P \cup Q$ замість P у себе, одержимо:

$$P = R \circ P \cup Q =$$
$$= R \circ (R \circ P \cup Q) \cup Q = R^2 \circ P \cup R \circ Q \cup Q = \dots .$$
$$= R^m \circ P \cup R^{m-1} \circ Q \cup \dots \cup R \circ Q \cup Q$$

Якщо $X \cap R = \varnothing$, то у випадку, коли $R^m \neq \varnothing$, усі слова, що належать мові R^m мають довжину не менше $m+1$, звідки випливає, що $p \in R^{m-1} \circ Q \cup \dots \cup R \circ Q \cup Q$. Тоді $p \in R^* \circ Q$, і розв'язок $P = R^* \circ Q$ дійсно є єдиним розв'язком рівняння, що й було потрібно довести.

Теорема 2. Для будь-якого позначеного графа G мова послідовностей позначок, відповідна до цього графа, має вигляд

$$P(G) = \bigcup_{v_i \in I} P(v_i),$$

де всі $P(v_i)$ є розв'язками системи рівнянь

$$P(v_1) = r_{11} \circ P(v_1) \cup r_{12} \circ P(v_2) \cup \dots \cup r_{1n} \circ P(v_n) \cup p_1$$
$$P(v_2) = r_{21} \circ P(v_1) \cup r_{22} \circ P(v_2) \cup \dots \cup r_{2n} \circ P(v_n) \cup p_2$$
$$\dots$$
$$P(v_n) = r_{n1} \circ P(v_1) \cup r_{n2} \circ P(v_2) \cup \dots \cup r_{nn} \circ P(v_n) \cup p_n$$

де $p_i \in X$ або $p_i = \varnothing$, а всі коефіцієнти r_{ij} мають вигляд abc, де $a, c \in X$, $b \in Y$.

Доведення. Для кожної дуги $(v_i, v_j) \in E$ у позначеному графі G до мови послідовностей $P(v_i)$ належать усі слова мови послідовностей $P(v_j)$ із приписаними ліворуч позначкою вершини v_i та позначкою дуги (v_i, v_j). Якщо вершина v_i в графі G є фінальною, то позначка $\alpha(v_i)$ вершини v_i належить до мови $P(v_i)$ як окреме слово. Таким чином, мову $P(v_i)$ можна описати рівнянням:

$$P(v_i) = \alpha(v_i)\beta(v_i, v_1) \circ P(v_1) \cup$$
$$\cup \alpha(v_i)\beta(v_i, v_2) \circ P(v_2) \cup \dots$$
$$\cup \alpha(v_i)\beta(v_i, v_n) \circ P(v_n) \cup \varepsilon,$$

де n – кількість вершин у графі,

$$\varepsilon = \begin{cases} \alpha(v_i), & \text{якщо вершина } \mathrm{v_i} - \textit{фінальна} \\ \varnothing, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Оскільки кожне i-те рівняння розглянутої системи має вигляд $P(v_i) = r \circ P(v_i) \cup q$, де $r = r_{ii}$, $q = \bigcup_{j \neq i} r_{ij} \circ P(v_j) \cup p_i$, для знаходження розв'язку можна скористатися результатом теореми 1.

За аналогією з розв'язком систем рівнянь із регулярними коефіцієнтами в алгебрі регулярних мов, для розв'язку розглянутої системи можна використовувати метод послідовного виключення невідомих, подібний до класичного методу Гауса. Із правої частини останнього рівняння системи можна вилучити $P(v_n)$. Отримане значення для $P(v_n)$ можна підставити в передостаннє рівняння, і одержати вираз для $P(v_{n-1})$, який залежить тільки від $P(v_1), \dots, P(v_{n-2})$. Продовжуючи такі підстановки для всіх рівнянь, що залишилися в системі, можна одержати значення всіх $P(v_i)$, які будуть залежати тільки від коефіцієнтів рівнянь, тобто від позначок дуг і вершин графа G.

Матричне представлення позначених графів. Для повністю позначених графів можна використовувати матричне представлення за аналогією з тим, як за допомогою матриць задаються скінченні автомати [4]. Кожному графу G поставимо у відповідність матрицю переходів – квадратну матрицю порядку n, де n – число вершин графа, елементи якої визначаються в такий спосіб:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \alpha(v_i)\beta(v_i, v_j)\alpha(v_j), & \text{якщо } (\mathrm{v_i}, \mathrm{v_j}) \in \mathrm{E} \\ \varnothing, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Для завдання початкових вершин графа використовуємо вектор u довжини n такий, що

$$u_i = \begin{cases} \alpha(v_i), & якщо\ \mathrm{v_i} \in \mathrm{I} \\ \varnothing, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Фінальні вершини задаються за допомогою вектора v довжини n, для якого

$$v_i = \begin{cases} \alpha(v_i), & \text{якщо } \mathrm{v_i} \in \mathrm{F} \\ \varnothing, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Визначимо для матриць над алгеброю $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, *, \varnothing, X \right\rangle$ наступні операції:

1. Якщо A й B – матриці розмірності $m \times n$, то $A \cup B = C$, де C – матриця розмірності $m \times n$, і $C_{ij} = A_{ij} \cup B_{ij}$ для всіх $i, j \in \overline{1,n}$.

2. Якщо A – матриця розмірності $n_1 \times m$, B – матриця розмірності $m \times n_2$, то $A \circ B = C$, де C – матриця розмірності $n_1 \times n_2$, $C_{ij} = \bigcup_{k=1}^{m} A_{ik} \circ B_{kj}$.

Таким чином, операції $\circ$ й $\cup$ визначаються аналогічно звичайним операціям додавання і множення матриць, а операції додавання і множення елементів цих матриць розуміються як операції алгебри $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, *, \varnothing, X \right\rangle$.

Позначимо через A^T транспоновану матрицю A. Позначимо через Z_n квадратну матрицю порядку n, усі елементи якої дорівнюють $\varnothing$, через E_n – квадратну матрицю порядку n, у якій усі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють $\varnothing$, а всі діагональні елементи дорівнюють X.

Визначимо для матриць операцію * у такий спосіб: $M^* = E_n \cup M \cup M \circ M \cup M \circ M \circ M \cup \ldots$.

Якщо M – матриця переходів графа G, то її елемент M_{ij} – це послідовність, що відповідає шляхам довжини 1 з вершини v_i у вершину v_j, $[M \circ M]_{ij} = \bigcup_{k=1}^{n} M_{ik} M_{kj}$ – об'єднання всіх послідовностей, відповідних до шляхів довжини 2, що ведуть із v_i в v_j, $[M \circ M \circ M]_{ij}$ – об'єднання послідовностей, відповідних до всіх шляхів довжини 3 і т.д. Таким чином, M^* – це матриця, елементи якої $[M^*]_{ij}$ описують усі можливі послідовності позначок вершин і дуг, що відповідають усім можливим шляхам з вершини v_i у вершину v_j в графі G.

Використовуючи матричне представлення повністю позначених графів і властивості операцій над матрицями, систему рівнянь із теореми 2 можна записати у вигляді рівняння $\overline{P(v_i)} = M \circ \overline{P(v_i)} \cup V$, а мову $P(G)$ представити у вигляді $P(G) = u^T \circ \overline{P(v_i)}$. Легко показати, що алгебра матриць над алгеброю $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, *, \varnothing, X \right\rangle$ є замкненим ідемпотентним півкільцем, і за теоремою про нерухому точку рівняння виду $P = R \circ P \cup Q$, де R, Q – матриці, має найменший розв'язок $P = R^* \circ Q$, отже, для будь-якого графа

$$P(G) = u^T \circ M^* \circ v \qquad (2)$$

Для обчислення значень матриці M^* зручно використовувати рекурсивний спосіб, подібний до того, що застосовується для матриць переходів кінцевих автоматів [4].

Лема 1. *Для повністю позначеного графа G з матрицею переходів M і числом вершин n рекурсивний спосіб знаходження M^* полягає в наступному.*

1. Якщо $n = 1$, то $M^* = (M_{11})^*$;

2. Якщо $n > 1$, то потрібно вибрати довільне n_1, $0 < n_1 < n$, і розбити матрицю

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \ldots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \ldots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

на блоки в такий спосіб: $\begin{matrix} M_1 & M_3 \\ M_4 & M_2 \end{matrix}$,

$$M_1 = \begin{pmatrix} M_{11} & \ldots & M_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n_1 1} & \ldots & M_{n_1 n_1} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} M_{(n_1+1)(n_1+1)} & \ldots & M_{(n_1+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n(n_1+1)} & \ldots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} M_{1(n_1+1)} & \ldots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n_1(n_1+1)} & \ldots & M_{n_1 n} \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} M_{(n_1+1)1} & \ldots & M_{(n_1+1)n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \ldots & M_{nn_1} \end{pmatrix}$$

обчислити M_1^* і M_2^*, а потім одержати M^* як

$(M_1 \cup M_3 \circ M_2^* \circ M_4)^*$	$(M_1 \cup M_3 \circ M_2^* \circ M_4)^* \circ M_3 \circ M_2^*$
$M_2^* \circ M_4 \circ (M_1 \cup M_3 \circ M_2^* \circ M_4)^*$	$M_2^* \circ M_4 \circ (M_1 \cup M_3 \circ M_2^* \circ M_4)^* \circ M_3 \circ M_2^*$

(3)

Доведення. Якщо $n=1$, то за визначенням $M^* = (M_{11})^*$. Якщо $n>1$, розіб'ємо на блоки вектори $\overline{P(v_i)}$ і V: $\overline{P(v_i)}_1$ V_1, $\overline{P(v_i)}_2$ V_2

$$\overline{P(v_i)}_1 = \begin{pmatrix} P(v_1) \\ \vdots \\ P(v_{n_1}) \end{pmatrix}; \quad \overline{P(v_i)}_2 = \begin{pmatrix} P(v_{n_1+1}) \\ \vdots \\ P(v_n) \end{pmatrix};$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ vn_1 \end{pmatrix}; \qquad V_2 = \begin{pmatrix} v_{n_1+1} \\ \vdots \\ vn \end{pmatrix}$$

З використанням блоків рівняння

$\overline{P(v_i)} = M \circ \overline{P(v_i)} \cup V$ можна зависати у вигляді

$\overline{P(v_i)}_1$		M1	M3		$\overline{P(v_i)}_1$		V1
	=			$\circ$		$\cup$	
$\overline{P(v_i)}_2$		M4	M2		$\overline{P(v_i)}_2$		V2

або у вигляді системи рівнянь

$$\overline{P(v_i)}_1 = M_1 \circ \overline{P(v_i)}_1 \cup M_3 \circ \overline{P(v_i)}_2 \cup V_1$$
$$\overline{P(v_i)}_2 = M_4 \circ \overline{P(v_i)}_1 \cup M_2 \circ \overline{P(v_i)}_2 \cup V_2$$

Застосовуючи до цієї системи теорему 1 і метод виключення невідомих, одержимо, що розв'язок системи збігається з результатом множення матриці, отриманої за правилом (3) на вектор фінальних вершин V, тобто матриця, складена за правилом (3) дійсно збігається з матрицею M^*.

Теорема 3. Для будь-яких повністю позначених графів G_1 і G_2 з матрицями переходів M_1 і M_2, векторами початкових вершин U_1 і U_2, векторами фінальних вершин V_1 і V_2 відповідно, граф G з матрицею переходів M, вектором початкових вершин U, вектором фінальних вершин V, що мають вигляд

M= | M1 | ∅ |
|---|---|
| ∅ | M2 |

U= | U1 |
|---|
| U2 |

V= | V1 |
|---|
| V2 |

має мову $P(G) = P(G_1) \cup P(G_2)$.

Доведення. За правилом (3) обчислимо M^*:

M^* = | $(M_1 \cup \varnothing \circ M_2^* \circ \varnothing)^*$ | $M_1^* \circ \varnothing \circ M_2^*$ |
|---|---|
| $M_2^* \circ \varnothing \circ M_1^*$ | $M_2^* \cup$ $\cup M_2^* \circ \varnothing \circ M_1^* \circ \varnothing \circ M$ |

звідки

M^* = | M_1^* | ∅ |
|---|---|
| ∅ | M_2^* |

Підставивши одержане значення для M^* до (2), отримаємо, що
$P(G) = U_1^T \circ M_1^* \circ V_1 \cup U_2^T \circ M_2^* \circ V_2 = P(G_1) \cup P(G_2)$, що і було потрібно довести.

Теорема 4. Для будь-яких позначених графів G_1 і G_2 граф G, побудований в такий спосіб:

M= | M1 | $V_1 \circ U_2^T \circ M_2$ |
|---|---|
| ∅ | M2 |

U= | U1 |
|---|
| ∅ |

V= | $V_1 \circ U_2^T \circ V_2$ |
|---|
| V2 |

має мову $P(G) = P(G_1) \circ P(G_2)$.

Доведення. За правилом (2)

M*= | M_1^* | $M_1^* \circ V_1 \circ U_2^T \circ M_2^*$ |
|---|---|
| ∅ | M_2^* |

Підставляючи цю матрицю у вираз для $P(G)$, одержимо:

$P(G) = U^T \circ M^* \circ V =$
$= U_1^\circ M_1^* \circ V_1 \circ U_2^T \circ V_2 \cup$
$\cup U_1^T \circ M_1^* \circ V_1 \circ U_2^T \circ M_2 \circ M_2^* \circ V_2 =$

$= U_1^T \circ M_1^* \circ V_1 \circ (U_2^T \circ V_2 \cup U_2^T \circ M_2 \circ M_2^* \circ V_2) =$

$= U_1^T \circ M_1^* \circ V_1 \circ U_2^T \circ M_2^* \circ V_2 = P(G_1) \circ P(G_2),$

що й було потрібно довести.

Теорема 5. Для будь-якого позначеного графа G_1 граф G, матриця переходів якого $M = M_1 \cup V_1 \circ U_1^T \circ M_1$, вектор початкових вершин U_1, вектор фінальних вершин V_1, де M_1 – матриця переходів, U_1 – вектор початкових вершин, V_1 – вектор фінальних вершин графа G_1, має мову $P(G) = (P(G_1))^+$.

Доведення. $P(G) = U^T \circ M^* \circ V =$

$= U_1^T \circ (M_1 \cup V_1 \circ U_1^T \circ M_1)^* \circ V_1.$

З визначення операцій випливає, що для будь-яких $P, Q \in 2^{P(X,Y)}$ виконується

$(R \cup Q)^* = R^* \circ (Q \circ R^*)^*, (R \circ Q)^* \circ R = R \circ (Q \circ R)^*$

Використовуючи ці властивості можна записати:

$$P(G) = U_1^T \circ M_1^* \circ (V_1 \circ U_1^T \circ M_1 \circ M_1^*)^* \circ V_1 =$$
$$= U_1^T \circ M_1^* \circ V_1 \circ (U_1^T \circ M_1 \circ M_1^* \circ V_1)^* =$$
$$= P(G_1) \circ (P(G_1))^* = P(G_1)^+$$

Оскільки $P^* = P^+ + X$ для кожного $P \in 2^{P(X,Y)}$, то для того, щоб з вихідного графа G_1 з мовою послідовностей оцінок $P(G_1)$ одержати граф з мовою $(P(G_1))^*$, потрібно скористатися розглянутою конструкцією, а потім в отриманий граф додати стільки ізольованих вершин, скільки символів в алфавіті X, зробити їх одночасно початковими і фінальними та позначити різними символами з X.

Теорема 6. Будь-який регулярний вираз R в алгебрі $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, *, \varnothing, X \right\rangle$ визначає мову, що породжується повністю позначеним графом.

Доведення. Скористаємося методом індукції за структурою формули R та побудуємо такий граф G, що $P(G) = L(R)$. Нехай R побудована з використанням n операцій. Якщо $n = 0$, то за визначенням регулярних виразів, можливі наступні випадки.

1) Якщо $R = x$, $x \in X$, то граф G складається з однієї вершини з позначкою x, яка одночасно є початковою та фінальною.

2) Якщо $R = x_1 y x_2$, де $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$, то граф G складається із двох вершин, одна з яких – початкова з позначкою x_1, друга – фінальна з позначкою x_2, з'єднаних дугою з позначкою y.

3) Якщо $R = \varnothing$, те в графі G немає жодної вершини.

Якщо $n > 0$, то можливі наступні варіанти.

1) Якщо $R = R_1 \cup R_2$, де R_1 й R_2 - формули, побудовані з використанням n-1 операції, для яких відомі такі графи G_1 й G_2, що $P(G_1) = L(R_1)$ і $P(G_2) = L(R_2)$, для одержання такого графа G, що $P(G) = L(R)$ можна скористатися конструкцією з теореми 3.

2) Якщо $R = R_1 \circ R_2$, то матричне представлення графа G, для якого $P(G) = L(R)$, описано в теоремі 4.

3) Якщо $R = (R_1)^*$, спосіб побудови графа G, для якого $P(G) = L(R)$, описано в теоремі 5.

Таким чином, у всіх випадках для будь-якого регулярного виразу R можна знайти такий граф G, для якого $P(G) = L(R)$, що й було потрібно довести.

Теорема 7. Мова $P \subseteq P(X,Y)$ може бути представлена регулярним виразом алгебри $\left\langle 2^{P(X,Y)}, \circ, \cup, *, \varnothing, X \right\rangle$ тоді й тільки тоді, коли вона породжується повністю позначеним графом.

Доведення. Необхідність доведено в теоремі 2, достатність – у теоремі 6.

Висновок. У даній роботі введено алгебру мов, що можуть бути представлені у повністю позначених графах, досліджено її основні властивості, доведено, що мова допустима в повністю позначеному графі тоді і тільки тоді, коли вона описується регулярним виразом введеної алгебри, розроблено методи аналізу й синтезу мов, що можуть бути представлені у повністю позначених графах.

Список використаних джерел

1. *Dudek G., Jenkin M.* Map validation and robot self-location in a graph-like world. // Robotics and autonomous systems, vol. 22(2), November 1997, pp.159–178.
2. *Baier C., Katoen J.-P.* Principles of Model Checkng. – Cambridge,MIT Press, 2008.
3. *Eilenberg S.* Automata, Languages, and Machines. vol A. – New York and London, Academic Press, 1974.
4. *Conway J. H.* Regular Algebra and Finite Machines. – London, Chapman and Hall, 1971.

Надійшла до редколегії 18.01.13

УДК 004.8

Гулаєва Н.М., к. ф.-м. н.

Еволюційні алгоритми

У роботі проведено комплексний аналіз стану царини практичного застосування сучасних еволюційних алгоритмів, а також визначення світових тенденцій і перспектив розвитку еволюційних технологій.

Ключові слова: генетичний алгоритм, еволюційна стратегія, еволюційне програмування, генетичне програмування, алгоритм мурашки, алгоритм бджолиного рою, епідемічний алгоритм.

Національний університет «Києво-Могилянська академія», вул. Сковороди 2, Київ 04655, Україна, e-mail: ngulayeva@yahoo.com

Gulayeva N.M., PhD

Evolutionary Algorithms

In this paper, a comprehensive analysis of the realm of the practical application of modern evolutionary algorithms is provided. Also, global trends and prospects for the evolutionary technologies are determined.

Key words: genetic algorithm, evolutionary strategy, evolutionary programming, genetic programming, ant algorithm, bees algorithm, epidemic algorithm.

National University of Kyiv-Mohyla Academy, 2 Skovorody vul., Kyiv 04655, Ukraine, e-mail: ngulayeva@yahoo.com

Вступ. Природа завжди вражала своєю складністю і водночас невипадковою взаємопов'язаністю. Тільки зараз людина почала детальніше вивчати великі та малі соціальні системи, імунні та нейронні системи, ланцюги зв'язків між різними видами та складні процеси життєдіяльності, що безупинно відбуваються всередині та зовні кожної живої істоти. Це лише невелика частина всіх чудес, що стали більш очевидними, коли ми глибше дослідили себе самих як біологічних істот та частину складніших систем Всесвіту.

Вивчаючи кожну нову для себе концепцію, людина застосовує унікальну здатність проводити аналогії між, на перший погляд, геть різними життєвими фактами чи законами природи. Ця здатність є корисною не тільки для запам'ятовування нового матеріалу, а й підштовхує людину до наукового поступу і відкриттів. Наприклад, теорія гравітації завдячує деякому яблуку, яке своїм падінням розвинуло хід думок у Ісаака Ньютона, а пліснява у чашці Петрі з неприбраної лабораторії Олександра Флемінга подарувала світу пеніцилін.

Зовсім не дивує той факт, що дослідники математичних та комп'ютерних задач у пошуках натхнення звернулись до теорії еволюції. Можливість функціонування обчислювальної системи з простими механізмами мінливості та відбору по аналогії з законами еволюції в природних системах була досить привабливою.

Найскладнішим при побудові обчислювальної системи, заснованої на принципі природного відбору, і застосуванні такої системи у прикладних задачах, є те, що природні системи є дуже складними і, як на погляд пересічної людини, хаотичними. Можливо, людина ніколи не зможе осягнути розумом всі закони і принципи, за якими щомиті відбувається її життя і все, що обертається навколо нього. Фактично, будь-які комп'ютерні обчислення мають чітко визначений характер. Коли ми звертаємося до обчислювальної системи за розв'язком задачі, ми сподіваємось на максимально швидке виконання з мінімально можливими витратами (як часу, так і пам'яті). Ми маємо конкретну ціль: отримати коректний розв'язок тієї чи іншої задачі. Коли відбуваються реальні процеси відбору, схрещування, можливо, мутації, природа не має ніяких обмежень. Виживання в природі може не бути спрямованим до якоїсь фіксованої цілі. Не кожне нове створіння є життєздатним. Замість того, щоб міркувати про доцільність чи про ймовірність наступного кроку, природа просто робить цей крок у доступному для неї напрямку. Природа – це життя. Єдиною метою для життя є продовження життя за будь-яких обставин.

© Гулаєва Н.М, 2013

На відміну від природного процесу, обчислювальна система на основі генетичного алгоритму, як правило, створена для отримання можливого і прийнятного розв'язку деякої конкретної задачі (або неодноразового отримання таких розв'язків) за скінченний проміжок часу.

Тому еволюційну метафору можна застосовувати для оптимізаційних задач чи задач пошуку у будь-якій галузі, за умови, що можливі розв'язки задачі можна деяким чином закодувати у рядок символів, коректно визначити оператори вибірки, мутації та схрещування для таких рядків і описати деяку функцію, що оцінюватиме життєздатність такого розв'язку за виконання умов задачі. Оператор схрещування вносить у закодований рядок суттєві зміни, забезпечуючи пошук на всій множині можливих розв'язків, а оператор мутації потроху «налаштовує» оптимальніший розв'язок.

Генетичними алгоритмами послуговуються як математика (оптимізація функцій) і комп'ютерні науки (нейронні мережі, штучний інтелект тощо), так і майже всі науки, які мають справу з оптимізаційними обчисленнями: економіка, фізика, астрономія, хімія, екологія, а останнім часом генетичні алгоритми навіть проникли у царину творчості і допомагають в архітектурному і інтер'єрному дизайні, створенні картин і музичних композицій, пошитті нових фасонів одягу тощо.

Дослідження даної теми є безперечно актуальним, а вивчення еволюційних алгоритмів наразі відбувається у багатьох університетах і наукових центрах світу, адже розробка, аналіз та застосування ефективних і універсальних методів розв'язку задач (алгоритмів) є наразі ключовою задачею комп'ютерних наук, а тема еволюційних алгоритмів ще не достатньо досліджена. Генетичні алгоритми надають можливість швидкої генерації прийнятних розв'язків задач, які неможливо розв'язати іншими аналітичними методами, уникаючи повного перебору і значно скорочуючи часові витрати.

При застосуванні традиційних методів оптимізації і пошуку, у разі навіть незначної зміни параметрів середовища всі обчислення доводиться проводити заново. Еволюційний підхід дозволяє проводити аналіз і адаптацію вже створеної популяції до нових умов середовища, чим скорочує час роботи алгоритму і реалізує принцип машинної адаптації і навчання.

Дана робота є дослідженням еволюційних алгоритмів, їх особливостей при розв'язуванні різних прикладних задач, і робить огляд сучасних застосувань еволюційних алгоритмів у різноманітних сферах людської діяльності – від вирішення теоретичних задач до побутового застосування результатів еволюційних обчислень. ГА є одним з найперспективніших напрямів розвитку комп'ютерних технологій, тому що охоплюють широчезне коло оптимізаційних (і не тільки) задач. Останні дослідження вчених у цій галузі продемонстрували, що ГА можна використовувати навіть у мистецтві – для формування естетично приємних зображень і складання гармонійних музичних композицій.

Метою дослідження цієї статті є комплексний аналіз сучасного стану царини практичного застосування еволюційних алгоритмів, а також визначення світових тенденцій і перспектив розвитку еволюційних технологій. Ми вважаємо, що особливу увагу слід приділити новим, неординарним сферам застосування генетичних алгоритмів, оскільки вони вказують на перспективність цього напряму і можливість використання викладеного матеріалу у різних навчальних курсах.

Різновиди еволюційних алгоритмів. Історія еволюційних обчислень починається з розробки різних незалежних моделей. Перші публікації «Симбіогенетичні еволюційні процеси, реалізовані штучними методами» («Symbiogenetic evolution processes realised by artificial methods» (1957)) та «Цифрова перевірка еволюційних теорій» («Numerical testing of evolution theories" (1962)), що належать Барічеллі Н.А., були спрямовані насамперед на розуміння механізмів природного феномену спадковості. Відомі піонери штучного моделювання еволюційних процесів і генетичних систем А.Фрейзер, Г.Бремерманн, Г.-Ф.Швефель, І.Рехенберг досліджували еволюційні стратегії. У 1966 році Л.Фогель, А.Оуенз та М.Волш запропонували і провели дослідження еволюції простих автоматів, які передбачали символи у числових послідовностях, заснувавши еволюційне програмування [1].

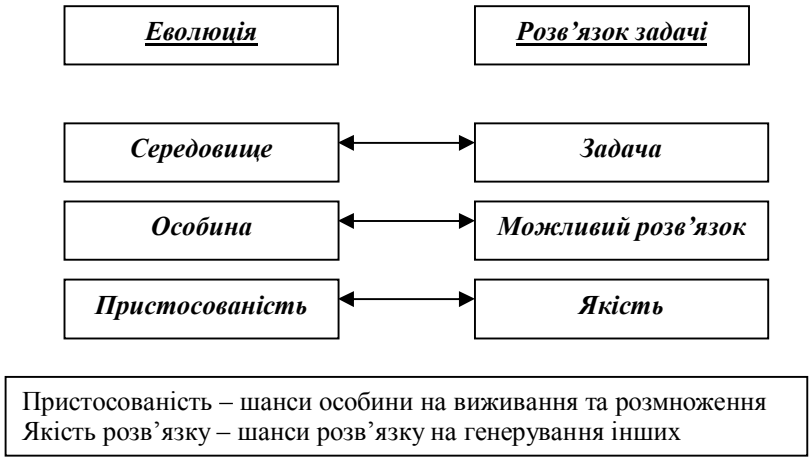


Рис. 1. Основна метафора еволюційних обчислень (за Ейбеном-Смітом)

Наразі назвою *еволюційні алгоритми* охоплюють усі обчислювальні і оптимізаційні методи, в основу яких покладена еволюційна метафора (див. рис. 1): еволюційні стратегії, еволюційне програмування, генетичні алгоритми, генетичне програмування. Ці методи відрізняються здебільшого представленнями можливих розв'язків задачі. В еволюційних стратегіях хромосоми представлені векторами дійсних чисел, в генетичних алгоритмах – векторами двійкових чисел, в еволюційному програмуванні – скінченними автоматами, а в генетичному програмуванні – деревами (списками), в перших роботах реалізованими виразами LISP. Оператори селекції еволюційних алгоритмів не залежать від представлення розв'язків, адже вони використовують лише значення функції пристосованості. Тому різниця між цими видами алгоритмів невелика, все залежить від найкращої стратегії для конкретної поставленої задачі. Під конкретну задачу підбирають відповідні представлення розв'язків задачі, а також для оперування ними – оператори мутації та схрещування.

Важливо зазначити, що різні види еволюційних алгоритмів (рис. 2) у чистому вигляді застосовують все рідше, а дедалі частіше застосовують гібридні еволюційні алгоритми, а також еволюційні алгоритми з використанням інших підходів, які дозволяють пришвидшити розв'язання конкретної задачі і покращити отримувані результати. Це можуть бути і оператори інших алгоритмів, використовуваних для цієї задачі, і використання інформації та методів, специфічних для даної предметної області.

Правильно підібрані під задачу гібридні алгоритми, як правило, працюють на порядок швидше за відповідні їм генетичні, а також дозволяють отримати значно точніші результати. Однак, розширення генетичного алгоритму додатковими операторами не завжди сприяє зростанню його ефективності, а знаходження методів, які б покращували його результативність, порівнянне з мистецтвом.

Досить довгий час тривали пошуки алгоритму all-purpose, який би показував найкращий результат у порівнянні з іншими на будь-яких даних і на будь-якій задачі, однак зараз все частіше лунає думка про те, що такий єдиний найкращий алгоритм віднайти неможливо і доцільно додатково використовувати методи, розроблені під конкретну задачу.

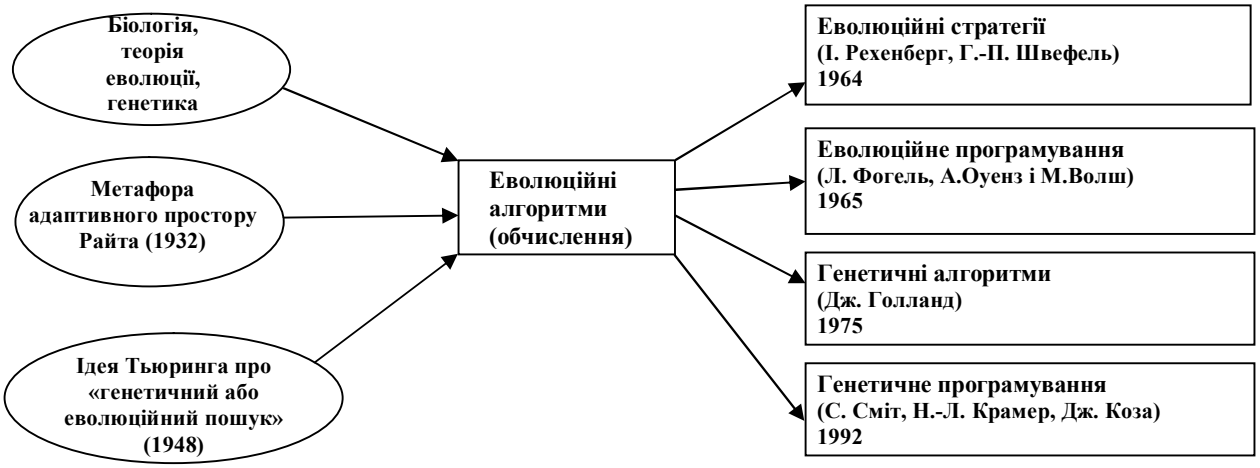


Рис. 2. Основні види еволюційних алгоритмів (за Ейбеном-Смітом)

Еволюційне програмування винайдене Лоуренсом Фогелем у 1960 – 1965 роках під час роботи над звітом перед Конгресом Сполучених Штатів про стан галузі штучного інтелекту і можливості інвестування в неї. Основними підходами у цій галузі на той час були моделювання роботи мозку (нейронні мережі) та моделювання розв'язання задач експертами. Л.Фогель помітив можливість ще одного, альтернативного підходу до проблем штучного інтелекту – моделювання не кінцевого результату еволюції, а моделювання самого процесу еволюції як засобу випрацювання розумної поведінки і можливостей передбачення явищ у середовищі.

Л.Фогель виконав низку експериментів, у яких скінченні автомати представляли собою особин у популяції вирішувачів задачі. Ці скінченні автомати передбачали символи у цифрових послідовностях, які, еволюціонуючи, ставали все придатнішими до розв'язання поставленої задачі. Саме тоді за досліджуваною цариною закріпилася назва «еволюційне програмування».

Популяція скінченних автоматів потрапляє до експериментального середовища – отримує певну послідовність символів. Для кожного автомата-батька виконується процедура звірення кожного наступного символу з відповідним йому прогнозованим символом з виходу автомата і оцінюється значення функції втрат для цього виходу. Після останнього прогнозу обчислюється «життєздатність» такого автомату чи програми. Автомати-нащадки утворюються випадковою мутацією автоматів-батьків і теж оцінюються. Найкращі автомати відбираються до наступного покоління, і процес повторюється. Коли необхідний прогноз нових символів, послуговуються найкращим на цей час автоматом, а нове спостереження додається до старих [2].

Таким чином, еволюційне програмування, на відміну від генетичних алгоритмів, моделює еволюцію більш як процес пристосувальної поведінки особин популяції або виду, аніж процес адаптації генів.

Роботи Л.Фогеля та його учнів згодом поширили процеси еволюційного програмування від прогностичних задач на моделювання систем, розпізнавання образів, теорію ігор тощо. Сучасні вчені у царині еволюційного програмування займаються дослідженням еволюції програм, впливу різних параметрів середовища та різних видів мутації на результативність еволюційного програмування, розпізнаванням образів, тощо [1].

Еволюційні стратегії у багатьох аспектах подібні і до генетичних алгоритмів, і до еволюційного програмування, бо теж імітують процеси природної еволюції. Однак, вони мають суттєву відмінність на прикладному рівні. У той час як генетичні алгоритми просто створені для оптимізації дискретних або цілочисельних розв'язків задач, еволюційні стратегії застосовують для неперервних значень, які є типовішими для експериментальних задач у лабораторіях.

Відмінності еволюційних стратегій від інших оптимізаційних методів і еволюційних алгоритмів [3]: пошук від однієї популяції до іншої на противагу від однієї особини до іншої; використання інформації про саму функцію, а не її похідних; використання імовірнісних методів при переході від популяції до популяції (а не детермінованих); кодування розв'язків векторами дійсних чисел; зосередження уваги на впливі генетичних операторів на зміни фенотипу;

адаптивний крок мутації – крок мутації еволюціонує разом з розв'язком, оскільки цей параметр «зашитий» до хромосом; невелика різниця між батьками та нащадками в процесі схрещування (сильна взаємопов'язаність – маленькі зміни у перших відбиваються у маленьких змінах у останніх).

Технологія еволюційних стратегій була винайдена І.Рехенбергом, а згодом розвинута Г.-П.Швефелем та іншими вченими, які сформували теоретичну частину цієї царини.

Особливим поняттям і кульмінацією теорії є поняття «еволюційного вікна». Часом прогрес спостерігається тільки на дуже вузькому проміжку розміром із крок мутації. Таким чином, має існувати деяке правило, за яким еволюція регулює розмір кроку мутації, залежно від обставин. Знаходження оптимального кроку мутації саме по собі є складною і цікавою задачею.

Генетичне програмування було розроблене у Сполучених Штатах у 1990-их роках, серед перших дослідників – Дж.Коза. Особливістю цього виду еволюційних алгоритмів є використання нелінійних хромосом (графи, дерева – подання у вигляді списків LISP), а також (якщо популяції особливо великих розмірів) необов'язковість оператора мутації/схрещування. Здебільшого використовують або мутацію, або схрещування. Мутація полягає в заміні випадковим деревом деякого піддерева розв'язку, а схрещування – у обміні батьківських хромосом піддеревами. На відміну від лінійного представлення даних, представлення деревами дозволяє гнучкі зміни розв'язків, а також оперування хромосомами різного розміру (деревами з різною глибиною чи шириною).

Оперування подібними структурами даних уможливило автоматичний комп'ютерний синтез фрагментів програм на основі навчання шляхом індуктивного виводу. Хромосоми, що фактично закодовують математичні вирази (функції, змінні та константи), автоматично генеруються за допомогою генетичних операторів. Початкова популяція створюється випадковим чином і складається з програм, які включають до свого складу елементи множини проблемно-орієнтованих елементарних функцій (function set: +, , —, *, %, sin, cos, log, or, and, for, do-until та ін.), а також спеціальних функцій з предметної області конкретної задачі, змінних та констант. Ці множини стають основою для еволюційного синтезу програми для розв'язку деякої поставленої задачі. Спочатку у генетичному програмуванні застосовувалась мова LISP, однак на сьогоднішній день популярні також такі мови програмування як C, Smalltalk, C++ тощо.

Як правило, генетичне програмування застосовують у машинному навчанні (прогнозування, класифікація тощо).

Інші евристичні алгоритми, що використовують метафори природних процесів. Останніми роками активно розвивається такий напрям наукових досліджень як *природні обчислення* (*Natural Computing*), який об'єднує математичні методи на основі принципів природних механізмів прийняття рішень [4]. До таких методів належать еволюційні алгоритми, імітація самоорганізації мурашиної колонії, оптимізаційні алгоритми «бджолиного рою» тощо.

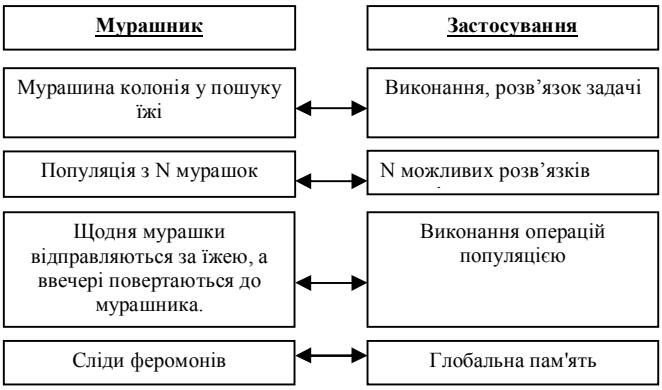


Рис. 3. Метафора мурашиної колонії

Мурашина колонія [5] – це один із нових перспективних метаевристичних алгоритмів (різновид евристики рою), який імітує колективну поведінку мурашок для досягнення певної цілі, спільної для всього мурашника. Ідея алгоритму мурашиної колонії, натхнена статтею

про колективну поведінку аргентинських мурах, вперше висловлена А.Колорні, М.Доріго і В.Маньєццо у 1991 – 1992 роках при розв'язанні задачі про оптимальні шляхи у графах відповідно до того, як мураха відшукує найкращий шлях між мурашником та деяким харчовим ресурсом (див. рис. 3). Так само вона застосовна до задачі комівояжера, задач оптимізації маршрутів вантажних перевезень, задачі розфарбування графів, оптимізації мережених графіків, задач календарного планування тощо [6].

Один-єдиний мураха має обмежені когнітивні можливості, але весь мурашник, діючи спільно в певному напрямку, може досить швидко і ефективно знайти оптимальний шлях. Відтоді ідея мурашиної колонії поширилася на значно більше коло числових задач, а також всередині цієї ідеї з'явилися численні відгалуження, які застосовують різні аспекти поведінки мурах.

Колонію мурах можна розглядати як багатоагентну систему, у якій кожен агент («мурашка») функціонує автономно за досить простими правилами. На противагу примітивній поведінці окремих агентів, поведінка всієї системи виявляється досить розумною.

Перший мураха (припустимо, що він бігає навколо мурашника випадковим чином), який знаходить ресурс харчування яким-небудь шляхом, повертається до мурашника, залишаючи на цьому шляху відповідний слід феромону, який приваблює інших мурах, що проходять повз, слідувати саме цим шляхом. Оптимальніший шлях скоро набуває більшої концентрації «запаху» феромонів, ніж інші, чим виявляється ще привабливішим. Поки цей шлях залишається найкращим, легкі сліди феромонів на інших шляхах поступово вивітрюються.

Розподіл феромонів по середовищу пересування мурах є своєрідною динамічно змінюваною глобальною пам'яттю всього мурашника. «Мурашка» на деякому вузлі графа має прийняти рішення, яким шляхом далі слідувати, при цьому він користується параметрами «привабливості» та «сліду феромонів» на тій чи іншій ланці. Будь-який мурашка у фіксований момент часу може зчитувати або вносити зміни лише до єдиної комірки глобальної пам'яті.

Алгоритм «бджолиного рою» [7] – ще один різновид евристик рою, відносно молодий метод знаходження глобального екстремуму (максимуму або мінімуму) складної багатовимірної функції (у термінах алгоритму – цільової функції). Як видно з назви, цей алгоритм використовує особливості поведінки рою бджіл-розвідників під час пошуку нектару.

Припустимо, що бджоли живуть у багатовимірному просторі, де кожна координата означає один параметр функції, яку необхідно оптимізувати. Нехай глобальний екстремум функції – це місце, де зосереджено найбільше нектару, причому таке місце у довкіллі вулика – єдине, а на інших галявинах нектару однозначно менше. Знайдена кількість нектару – це значення цільової функції у даній точці простору. Деякий розвіданий розв'язок представлений бджолою, яка зберігає параметри місця, де можна добути нектар. Нові бджоли знаходять ділянки простору, де значення цільової функції оптимальні, причому окіл випадкового пошуку наступними бджолами від вже розвіданих точок з найкращими показниками цільової функції динамічно зменшується (тільки не можна зменшувати окіл занадто швидко, бо є шанси застрягнути на локальному екстремумі). Найуспішніша бджола запам'ятовується як проміжний розв'язок, і процес повторюється, поки не буде досягнутий відповідний критерій зупинки.

Цей тип алгоритмів вже зарекомендував себе у численних застосуваннях, наприклад: навчання нейронних мереж розпізнавання образів, оптимізація ваг у перцептронах, формування розкладу робіт на виробництві, кластеризація даних, багатоцільова оптимізація тощо.

Епідемічні алгоритми [8] також використовують природну метафору, використовуючи відносно прості правила поширення інформації, потрібної іншим елементам, у гетерогенному некогерентному середовищі, де для елемента можливе лише вузьке, локальне бачення. Для деякого елемента середовища визначаються правила, за якими він може «народитися», «вмерти від одинокості», «вмерти від перенаселення» або «вижити» і перейти у наступне покоління. Елемент може набувати стану «чутливості» (susceptible: не знати, але бути готовим до отримання інформації), «інфікованості» (infective: знати і розповсюджувати інформацію) або «зцілення» (removed/recovered: знати, але вже не розповсюджувати інформацію).

Батьком сучасної теорії генетичних алгоритмів вважається Дж.Г.Голланд. Довгий час він займався здебільшого здатністю природних систем до адаптації і мріяв про створення системи, здатної адаптуватися до будь-яких умов

довкілля. Голланд побачив наявність зв'язку між біологією і обчислювальними процесами. В процесі еволюції генетичний матеріал «навчається» краще пристосовуватися до змін у навколишньому середовищі. Результатом такого «навчання» протягом численних поколінь є все живе на планеті, у всій повноті краси і життєздатності. Якщо еволюція так добре працює на живих істотах, чому б не застосувати її і до комп'ютерних обчислень?

Голланд розпочав роботу над алгоритмами, які оперували послідовностями двійкових чисел, які за аналогією до біології отримали назву хромосом. Його алгоритми виконували операції над цими хромосомами, імітуючи процеси природного відбору і еволюції. В 1975 році Дж. Голланд опублікував, мабуть, найвідомішу свою працю «Адаптація у природних і штучних системах» («Adaptation in Natural and Artificial Systems»). Після цієї публікації інтерес до новоствореної галузі безупинно зростав. Якщо у 1982 році було всього 15 публікацій на цю тему, то у 1992 році – вже понад 500. У книзі вводиться власне ідея генетичного алгоритму («репродуктивний план Голланда» [9]) і пропонується схема такого алгоритму, який згодом назвали класичним або канонічним генетичним алгоритмом (canonical GA).

Згодом поняття генетичних алгоритмів значно розширилося, і до них належать і суттєво відмінні від канонічного алгоритми. Наприклад, у техніці генетичного програмування шукані розв'язки мають форму комп'ютерних програм, а оцінка життєздатності полягає у визначенні, чи здатна програма розв'язати деяку обчислювальну задачу. В еволюційному програмуванні, навпаки, структура комп'ютерної програми фіксована, а еволюціонують параметри. У методі еволюційної стратегії замість двійкових рядків застосовують вектори дійсних чисел, а також часто використовуються самопристосовні показники ріня мутації.

Учні Голланда Кеннет Де Йонг та Девід Ґолдберг продовжили його дослідження і зробили чималий внесок в розвиток генетичних алгоритмів. Найвідомішим доробком Ґолдберга є книга «Генетичні алгоритми в оптимізації пошуку та машинному навчанні» («Genetic algorithms in search optimization and machine learning» (1989)), одна з найбільш цитованих у галузі комп'ютерних наук. Завдяки цим вченим описано всі генетичні оператори і досліджено поведінку алгоритмів на групі тестових функцій, і саме алгоритм Ґолдберга отримав назву «генетичний алгоритм».

Від традиційних методів оптимізації генетичні алгоритми відрізняються тим, що [10]: мають справу не зі значеннями параметрів задачі, а з їх закодованою формою (кодування параметрів); здійснюють пошук рішення не з єдиної вихідної точки, а відштовхуючись від деякої популяції (операції на популяції); використовують лише цільову функцію, а не її похідні чи іншу допоміжну інформацію (використання мінімальної інформації про задачу – не потрібна інформація про поведінку функції); застосовують ймовірнісні, а не детерміновані правила вибору (рандомізація операцій); застосовні до задач, які раніше розв'язувалися лише повним комбінаторним перебором, або лише за допомогою нейронних мереж, а також до раніше нерозв'язних задач.

Сучасні застосування генетичних алгоритмів. Генетичні алгоритми дозволяють працювати з широким колом теоретичних і прикладних задач. За допомогою них відшукується баланс, «золота середина» між ефективністю роботи алгоритму та якістю отримуваних розв'язків за рахунок виживання «найпристосованіших», що дозволяє досліджувати і розв'язувати задачі навіть в умовах невизначеності і з нечіткими даними.

Генетичні алгоритми застосовуються при розв'язанні задач, які полягають в оптимізації деякої функції від великої кількості параметрів. Такі функцій можуть мати значну кількість екстремумів, чим унеможливлюють їх розв'язання іншими традиційними методами.

Генетичні алгоритми застосовують також в системах підтримки прийняття рішень, адже вони дозволяють приймати рішення як в умовах визначеності, так і в умовах невизначеності та з нечіткими даними. Нерідко генетичні алгоритми використовують у подібних задачах з нейронними мережами. Процеси глобалізації і посилення зв'язків між колись майже незалежними процесами у світі викликали потребу в створенні систем, які б здійснювали аналіз досліджуваного середовища, допомагали прийняти відповідне до поточного стану середовища рішення, а також виявляли деякі закономірності і тенденції змін та здійснювали відносний прогноз на найближче майбутнє.

У класифікації алгоритмів комбінаторних обчислень виділяють точні і наближені методи. Перші гарантовано знаходять точний оптимальний розв'язок задачі. Однак, майже всі

принципово важливі задачі є NP-повними, і для них не існує жодного точного алгоритму з поліноміальною складністю. Також є задачі з недоліками і помилками у даних, для яких невиправдані і неприпустимі значні часові витрати, оскільки потрібно часто здійснювати корекцію даних і запускати алгоритм повторно. На противагу точним методам, сучасні наближені методи, до яких відносяться і еволюційні алгоритми, дозволяють за раціональний (а також наперед визначений) час отримувати розв'язки «високої якості», дуже близькі до оптимальних і тому цілком прийнятні з практичної точки зору [11].

Генетичні алгоритми з успіхом застосовують, коли необхідно скомпонувати (розмістити на шматі матеріалу, нерідко обмеженого за розміром) задану множину елементів (інколи навіть враховуючи зв'язки між ними), мінімізуючи витрати на площу (задача крою, дизайн інтер'єрів, планування міста чи ландшафту тощо). У задачі крою одягу може також бути врахована інформація про напрям нитки у деталях. Таким чином, генетичні алгоритми з успіхом застосовують в конструктивному дизайні і створенні креслень майбутніх деталей.

Особливо популярним є використання генетичних алгоритмів у нейронних мережах, навчанні перцептронів та вирішенні складних задач штучного інтелекту [12]. При цьому використовується така властивість генетичних алгоритмів як слабкий зв'язок з конкретною структурою задачі (можливість використання одного і того ж алгоритму для різних задач) – ГА застосовні до різних нейромережевих парадигм.

За допомогою стратегії на основі генетичного алгоритму можна також оптимізувати запити до баз даних, при цьому ми уникаємо комбінаторного перебору усіх таблиць і заощаджуємо час та ресурси пам'яті. У такому ГА таблиці, які розглядаються запитом, кодуються у вигляді сукупності хромосом, над якими протягом скінченної кількості ітерацій здійснюються генетичні операції. В результаті вибірки залишаються тільки такі хромосоми, які мають менше, у порівнянні з попередньою ітерацією, значення функції вартості. Найбільш оптимальний розв'язок стає результатом запиту. Бази даних невпинно зростають, тому оптимізація запитів на основі великої кількості таблиць набуває все більшої актуальності [13].

Останнім часом все більшої популярності набувають паралельні генетичні алгоритми, тому вчені замислюються над проблемами комунікації і безпеки в розпаралеленому ГА.

Висновки. З наведених вище задач добре видно, що генетичні алгоритми є потужним допоміжним обчислювальним засобом у математичних дослідженнях та в теорії прийняття рішень і керування. Особливу цінність ГА становлять у обчисленнях, які не можна провести іншими традиційними методами і для яких необхідно застосовувати евристичні та наближені методи. Генетичні алгоритми успішно застосовуються при розв'язанні математичних задач, які полягають в оптимізації деякої функції від великої кількості параметрів. Таким чином, за їх допомогою можна практично досліджувати залежність поведінки функції від динаміки параметрів. Більше того, еволюційні алгоритми здійснюють пошук над дійсними числами і дозволяють отримувати прийнятні для практичного застосування рішення за скінченний і розумний час. Можливість кодування як цілих чисел, так і чисел з плаваючою крапкою і дробів за допомогою кодів Грея розширює дослідникам простір роботи [1].

За кілька останніх років необхідність у використанні ГА у математичних розрахунках настільки посилилася, що виникла потреба в імплементації відповідного модуля у середовищі MATLAB 7. Тепер можна застосовувати оптимізацію за допомогою еволюційного процесу або викликати ГА як функцію з командного рядка.

Досліджуючи деяке вузьке застосування генетичних алгоритмів, вчені водночас наводять власні результати, що стосуються самого генетичного алгоритму – динаміки процесу еволюції, самоадаптації алгоритму, залежності ефективності операторів і збіжності алгоритму від значень заданих параметрів тощо. Наприклад, Брітта Кехден та Франк Нойманн досліджують представлення та функціонування стандартних операторів мутації та схрещування у термінах реляційної алгебри [14]. Дослідники з Великобританії Михайло Семенов та Дмитро Теркель вивчають збіжність генетичного алгоритму за допомогою стохастичних функцій Ляпунова [15]. Математичний критерій збіжності еволюційних алгоритмів досліджений також у роботі Марчіна Радванського [16]. Процеси динаміки параметрів генетичного алгоритму та адаптації параметрів детально розглянуті російськими вченими [17].

Колін Ґ. Джонсон (Colin G. Johnson) у своїй роботі «Використання методу табу та генетичних

алгоритмів у дослідженнях математики (Using Tabu Search and Genetic Algorithms in Mathematics Research) звертає увагу на можливість застосовування генетичних алгоритмів, самостійно або у поєднанні з іншими евристичними методами (наприклад, методом табу), у пошуку прикладів та контрприкладів до гіпотез, знаходженні послідовностей перетворень одного об'єкта на інший, нумерації класів еквівалентності тощо. У якості прикладів наводяться задачі про топології: представлення вузлів математичної топології, визначення, чи є конкретна структура вузлом тощо [18]. Генетичні алгоритми успішно застосовуються разом з нечіткими системами [13].

Наведемо інші приклади популярних досліджень і задач, розв'язаних за допомогою генетичних алгоритмів (список постійно доповнюється новими напрямами роботи): задачі лінійного та нелінійного програмування [19, 20]; дослідження скінченних алгебр, нечітких алгебр [21], задачі про точки і дерева Штейнера [22, 23]; задачі на графах [24, 25].

Застосування генетичних алгоритмів у системах штучного інтелекту та нейронних мережах має суттєве значення, тому це питання розглядається окремо від інших застосувань у комп'ютерних науках.

Особливостями застосування ГА у системах ШІ є реактивність систем і динамічна оптимізація, уможливлення навчання системи і прогнозування поведінки досліджуваного середовища, а відтак – визначення оптимальних способів поведінки у такому середовищі. Прикладами таких застосувань можуть бути системи прогнозування банкрутства [26], системи допомоги у творчому пошуку [27] та багато інших.

Список використаних джерел

1. ***Eiben A. E.*** Introduction to Evolutionary Computing / *Eiben A. E., Smith J. E.* // Natural Computing Series. – Springer. – 2007. Available at: http://www.cs.vu.nl/~gusz/ecbook/ecbook.html (Eng.)
2. ***Fogel J.*** A Retrospective View and Outlook on Evolutionary Algorithms / *Fogel J., Lawrence J. A.* // Proc. of the Int. Conf. on Computational Intelligence Theory and Applications: Lecture Notes In Computer Science. – 1997. – Vol. 1226. – P. 337–342. (Eng.)
3. ***Kureichik V. M.*** Evolutionary Computations: Genetic and Evolutionary Programming / *Kureichik V. M., Rodzin S.I.* // Novosti Iskusstvennogo Intellecta. – 2003. – №5(59). — P. 13–20. – RAII, Moskva. — Available at: http://www.raai.org/library/ainews/2003/5/kureichik_rodzin.doc (Rus.)
4. ***Glybovets M.*** On Necessity of Medical, Biological and Computer Science Research Integration / *Glybovets M., Gorokhovskyi S., Gulayeva N., Kyriienko O.* // Naukovi Zapysky NaUKMA. – 2007. – Vol. 73: Komputerni nauki. – P. 5–9. Available at: http://aleph.ukma.kiev.ua/e-lib/NZ/NZV73_2007_computer/01_glybovets_mm.pdf (Ukr.)
5. ***Maniezzo V.*** Ant Colony Optimization / *Maniezzo V., Gambardella L. M., de Luigi F.* // New Optimization Techniques in Engineering, eds. Onwubolu G. C., Babu, B. V. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. – 2004. – P. 101–117. Available at: http://www.idsia.ch/~luca/aco2004.pdf (Eng.)
6. ***Shtovba S.*** Ant Algorithms / *Shtovba S.* // Exponenta Pro. Matematika v prilozhenijah. – SoftLine. – 2003. – №4. — C. 70-75. Available at: http://soft.mail.ru/journal/pdfversions/32150.pdf (Rus.)
7. ***Pham D. T.*** The Bees Algorithm – A Novel Tool for Complex Optimisation Problems / *Pham D. T., Ghanbarzadeh A., Koç E., Otri S., Rahim S., Zaidi M.* // Intelligent Production Machines and Systems. – Cardiff University, Elsevier Ltd. – 2006. – P. 454–459. Available at: http://conference.iproms.org/the_bees_algorithm_a_novel_tool_for_complex_optimisation_problems (Eng.)
8. ***Hollerung T. D.*** Algorithms of the Internet' presentation. Epidemic Algorithms / *Hollerung T. D., Bleckmann P.* // – Universität Paderborn. – 2004. Available at: http://wwwcs.uni-paderborn.de/cs/ag-madh/WWW/Teaching/2004SS/AlgInternet/Submissions/09-Epidemic-Algorithms.pdf (Eng.)
9. ***Panchenko T. V.*** Genetic Algorithms: teaching aid / eds. *Tarasevich Y. Y.* — Astrahan: Astrahanskiy universitet. – 2007. Available at: http://mathmod.aspu.ru/images/File/ebooks/GAfinal.pdf (Rus.)
10. ***Rutkowska D.*** Neural Networks, Getenic Algorithms and Fuzzy Systems / *Rutkowska D., Pilinski M., Rutkowski L.* // Moskva: Goriachaja linija. Telekom. – 2004. – 452p. (Rus.)

11. ***Sirenko S.*** On Classification of approximate methods of combinatorial optimization / *Sirenko S.* // Int. Book Series "Information Science and Computing". – Vol. "Artificial Intelligence and Decision Making". – 2007. Available at: http://www.foibg.com/ibs_isc/ibs-07/IBS-07-p25.pdf (Rus.)
12. ***Subbotin S. O.*** Non-iterative, evolutionary and multi-agent methods of synthesis of fuzzy-logic and neural-network models: monograph / eds. *Subbotin S. O., Olijnyk A. O., Olijnyk O. O.* // Zaporozhye: ZNTU. – 2009. – 375p. (Ukr.)
13. ***Bennett K.*** **A.** Genetic Algorithm for Database Query Optimization / *Bennett K., Ferris M. C., Ioannidis Y. E.* // Proc. of the 4th Int. Conf. on Genetic Algorithms. – 1991. Available at: ftp://ftp.cs.wisc.edu/tech-reports/reports/91/tr1004.ps (Eng.)
14. ***Kehden B.*** Relation-Algebraic View on Evolutionary Algorithms for Some Graph Problems / *Kehden B., Neumann F.* // Proc. of the EvoCOP'06. – 2006. – P. 147-158. (Eng.)
15. ***Semenov M. A***. Analysis of Convergence of an Evolutionary Algorithm with Self-Adaptation using a Stochastic Lyapunov function / *Semenov M. A., Terkel D. A.* // – Evolutionary Computation. – 2003. – Vol. 11, № 4. – P. 363-379. (Eng.)
16. ***Radwanski M.*** Convergence of nonautonomous evolutionary algorithm / *Radwanski M.* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2007. Available at: http://www.emis.de/journals/UIAM/PDF/45-197-206.pdf (Eng.)
17. ***Komartsova L. G.*** Adapting the parameters of genetic algorithms to find solutions / *Komartsova L. G., Golubin A. V.* // Sbornik nauchnyh trudov. Nauchnaja sessija MIFI. – Moskva: MIFI. – 2003. – Vol. 3. – P. 124-125 (Rus.)
18. ***Johnson C. G.*** Using Tabu Search and Genetic Algorithms in Mathematics Research. – 2004. Available at: http://kar.kent.ac.uk/14050/1/Using_Tabu_Search_and_Genetic_Algorithms_in_Mathematics.pdf (Eng.)
19. ***Sarimveis H.*** Solving Mixed Integer and Nonlinear Programming Problems by Genetic Algorithms / *Sarimveis H., Alexandridis A., Nikolakopoulos A., Spyropoulos A.* // THALES Project No. 1179. – 2005. Available at: http://www.ntua.gr/eseve/Vasikh_Ereyna/Thalis/Thalis_projects_English_summaries/Sarimveis.pdf (Eng.)
20. ***Wang Y.*** An evolutionary algorithm for solving nonlinear bilevel programming based on a new constraint-handling scheme / *Wang Y., Jiao Y.-C., Li H.* // IEEE Trans. Syst. Man Cybern.: Applications and Reviews. – 2005. – Vol. 35, № 2. – P. 221-232. (Eng.)
21. ***Spector L.*** Genetic Programming for Finite Algebras / *Spector L., Clark D. M., Lindsay I., Barr B., Klein J.* // Proc. of the GECCO-2008. – ACM Press. – 2008. Available at: http://www.genetic-programming.org/hc2008/03-Spector/Spector-PAPER.pdf (Eng.)
22. ***Yang B.*** A Hybrid Evolutionary Algorithm for the Euclidean Steiner Tree Problem Using Local Searches / *Yang B.* // KES'06 Proc. of the 10th Int. Conf. on Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems. – 2006. (Eng.)
23. ***Kalashnikov R. S.*** Steiner tree construction by the method of genetic search / *Kalashnikov R. S.* // Perspektivnije informacionnije technologii i intellectualnije systemy. – 2005. – № 2 (22). (Rus.)
24. ***Greiner G.*** Single- and multi-objective evolutionary algorithms for graph bisectioning / *Greiner G.* // FOGA '09 Proc. of the 10th ACM SIGEVO workshop on Foundations of GA. – 2009. (Eng.)
25. ***Kureichik V. V.*** Application of genetic algorithms to solve graph optimization problems / *Kureichik V. V., Stasenko L. A.* // Perspektivnije informacionnije technologii i intellectualnije systemy. – 2002. – № 3 (11). (Rus.)
26. ***Min*** **S.-H.** Hybrid genetic algorithms and support vector machines for bankruptcy prediction / *Min S.-H., Lee J., Han I.* // Expert Systems with Applications. – 2006. – Vol. 31 (3). – P. 652-660. Available at: http://www.deepdyve.com/lp/elsevier/hybrid-genetic-algorithms-and-support-vector-machines-for-bankruptcy-uj4ha91KlL (Eng.)
27. ***Yang H.-L.*** An Intelligent System for Supporting Personal Creativity Based on Genetic Algorithm / *Yang H.-L., Lee C.-H.* // PRICAI'06 Proc. of the 9th Pacific Rim Int. Conf. on Art. Intelligence. – 2006. (Eng.)

Надійшла до редколегії 28.02.2013

УДК 519.9

Зубенко В.В.[1], к.ф.-м.н., доц.

Про комунікативну інформатику

Розглядається комунікативна платформа інформатики.

Ключові слова: комунікативний процес, комунікативний система, інформатика.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: vvz@unicyb.kiev.ua

V.V.Zubenko[1], doc.

On the communicative informatics

The communicative platformot of informatics is desided.

Key Words: communicative process, informatics, communicative system.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: vvz@unicyb.kiev.u

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012)

Не зважаючи на стрімкий розвиток індустрії інформатики протягом останніх кількох десятиріч, процес її становлення як фундаментальної науки все ще не можна вважати завершеним. Перебігає він досить суперечливо між кількома напрямами – інженерним, математичним, комунікативним, а останнім часом і інформаційним. Кожен із них має своє підґрунття й зорієнтований на ті чи інші аспекти процесів обробки інформації. Такий плюралізм у підходах до визначення задач та предмета інформатики актуалізує проблему пошуку її базової парадигми (парадигм) та ідентифікації як наукової дисципліни.

Робота присвячена комунікативній платформі інформатики та уточненню предмета інформатики у цій платформі.

1.Традиційно, коли говорять про інформатику, то мають на увазі сферу збереження, пошуку, передачі та обробки інформації [1] і ті проблеми, які тут виникають (інженерні, наукові тощо). Важливо, що при цьому не можна обмежитися інформацією взагалі – потрібна певна її стуктуризація. А саме, коли мова йде про інформаційні об'єкти, то в них явно виділяють повідомлення, його значення та зв'язок між ними. Перші є формою, завдяки якій інформацію ідентифікують і передають, другі відповідають за зміст інформації і враховуються при її перетворенні, а треті (комунікативні) подають спосіб зв'язку між першими двома, та, можливо, з іншими інформаційними об'єктами[1]. Слід зазначити, що в теорії програмуваня – важливій складовій інформатики - елемент зв'язку довгий час, якщо й не був поза кадром, то без належної уваги. З ускладненням людино-машинних систем та появую об'єктно-орієнтованого та інших напрямків сучасного программування ситуація кардинально змінюється і цей комунікативний елемент стає важливою складовою теоретичних досліджень програм.

У світлі становлення науки інформатики було б цікаво подивитися як формувалися сусідні, вже класичні, точні науки (а саме такою ми хочемо бачити й інформатику). Якщо взяти, наприклад, фізику, то побачимо, що: 1) вона як природнича наука має справу з певними моделями природних явищ (руху, твердого тіла, рідини, звуку, світла тощо), 2) ці моделі є фізичними за суттю, математичними за формою, 3) їх може бути не одна, а декілька, навіть для одного і того самого явища; наприклад, корпускулярна та хвильова теорія світла тощо, 4) кожна з моделей, орієнтуючись на відображення тих чи інших аспектів природних явищ, спирається на певну методологічну платформу, 5) моделі не є чимось сталим, а час від часу в процесі

[1] Є спроби трактувати інформацію більш загально та долучати до інформатики аспекти, не пов'язані безпосередньо з передачою та обробкою інформації [2]. На наш погляд, вони мають стосуватись вже не інформатики, а якоїсь іншої науки, наприклад, такої як Information Science в США і в Західній Європі чи інформології в РФ тощо.

© В.В. Зубенко, 2013

розвитку удосконалюються і збагачуються новими фактами (в межах платформи), 6) самі платформи теж можуть змінюватись і, як наслідок, можуть з'являтися нові, якісно інші, моделі тих самих явищ.

Як відомо (див., наприклад, [3].), фізика розпочиналась з вивчення механіки та оптики на базі механістичної платформи Ньютона, потім перейшли до теорії поля (електрика) і нарешті до квантової фізики (теорія відносності). Нові і старі платформи можуть якийсь час співіснувати паралельно, доповнювати одна одну (корпускулярна і хвильова теорія світла), відходити у минуле з передаванням своїх здобутків наступникам (корпускулярні елементи у квантовій платформі) та відмирати з часом (як планетарна модель Пталомея).

Повертаючись до інформатики, можемо зробити висновок, що плюралізм серед існуючих в ній моделей та платформ явище цілком природне. Питання полягає в іншому - у цілях та якості існуючих моделей, на скільки вони адекватні поставленим задачам тощо.

На сьогодні однією з найбільш загальних та вивчених платформ інформатики є платформа, відома під назвою *дискретні системи* [4]. Завдяки своєму апріорі високому рівню абстрактності вона знайшла широке коло застосувань в інформатиці, але в багатьох випадках цей рівень є занадто високим і потребує суттєвого зниження. Серед інших платформ, насамперед, виділимо загальні та спеціалізовані платформи програмування. Однією з найбільш загальних та глибоких є *сутнісна* платформа [5], яка є розвитком більш ранніх платформ – *денотативної* [6,7] та *композиційної* [8-10,11,12], направлених на уточнення та вивчення семантики програм. Спеціалізовані платформи, відомі під назвами *парадигм програмування*, орієнтуються на побудову програм і підтримують різних стилі програмування, кожний з яких характеризується своїми моделями програм і даних, засобами їхнього опису й методами реалізації.

Нас цікавлять комунікативні аспекти процесів обміну та обробки інформації, і розробка математичної платформи для моделювання таких аспектів.

У *комунікативних системах* [13] обміну та обробки інформації (КС)[2] обов'язковою є наявність:

1) предметної області (ПрО) з певною сукупністю інформаційних об'єктів та співвідношень між ними;

2) суб'єкта-ініціатора, що формує і передає суб'єкту-обробнику певну вхідну та приймає від нього певну вихідну інформацію;

3) суб'єкта-обробника, що приймає вхідну інформацію, аналізує її, обробляє та повертає як вихідну суб'єкту-ініціатору.

Далі суб'єкти-ініціатори та суб'єкти-обробники будемо називати скорочено *ініціаторами* та *обробниками*. Головне призначення комунікативних систем полягає у здійсненні *комунікативних процесів*, кожний з яких розгортається в певному часовому просторі і встановлює зв'язок між певними об'єктами предметної області системи. За своєю роллю в процесі ці об'єкти розподіляються на *вхідні* та *вихідні*. З перших розпочинається процес, другими закінчується. Комунікативний процес складається з етапів, які разом утворюють його *життєвий цикл*.

Останній розпочинається ініціатором, який формує й передає обробнику за допомогою засобів зв'язку повідомлення, що містить *запит*[3] на обробку певних вхідних інформаційних об'єктів. Запит окрім останніх містить інформацію про *мету* обробки, яка може бути сформульована неявно – як вимоги до очікуваних вихідних об'єктів або явно – як детальний опис їх отримання за вхідними об'єктами. Перший спосіб превалює, наприклад, в пошукових інформаційних системах, другий – в обчислювальних системах з процедурними мовами програмування. В обох випадках мета декларує певне співвідношення між об'єктами і сама подається у вигляді спеціального інформаційного об'єкту - *програми*. Вихідні дані є результатом

[2] У кібернетиці подібні системи називають системами зі зворотним зв'язком.

[3] Не змішувати з запитами в інформаційно-пошуковими системах. Тут термін "запит" трактується як загальне поняття з більш широким змістом.

реалізації програми (мети) на конкретних вхідних даних.

Запит оформлюється у вигляді набору дескрипцій[4] і сам є спеціальним інформаційним об'єктом, зрозумілим обробнику. Останній приймає запит, виконує в межах певного часового інтервалу відповідні дії для реалізації програми й повертає ініціатору за допомогою засобів зв'язку отримані й декодовані вихідні дані.

Таким чином, кожний запит породжує певне співвідношення між об'єктами ПрО. Це співвідношення може бути не кінцевим, а тільки проміжним. У деяких випадках інціатор повинен уміти аналізувати вихідні дані. Після відповідного аналізу (або без нього) він формує новий запит, знову передає його обробнику і так далі аж доки не буде отримано кінцевий результат комунікативного (діалогового) процесу.

Зазвичай обробник має власні інформаційні об'єкти – *внутрішні* (сукупності яких утворюють його стани), на відміну від *зовнішніх* - тих, що фігурують в предметній області, Тому сам запит містить не вхідні об'єкти обробника, а тільки їхні прообрази, які після кодування утворюють початковий стан обробника. Це стосується й вихідних даних, поданих у заключному стані процесу обробки. Вони потребують декодування. В деяких системах з метою безпеки вхідні й вихідні дані перед кодуванням (декодуванням) шифрують (дешифрують).

Ключовим моментом в комутативному процесі є його реалізаційний . компонент – частина процесу, яка відбувається "на території" обробника. Отримавши запит, обробник трансформує його у вхідний стан та в послідовність дій, які необхідно виконати, щоб перейти у заключний стан. В теорії цю послідовність дій називають *обчисленням*. В кожний момент часу обробник перебуває у певному стані, в якому подана та чи інша інформація. Обчислення зводиться до цілеспрямованої зміни станів обробника. Щоб змінити стан, обробник виконує певну дію (операцію). Існує механізм, який визначає порядок застосування операцій в обчисленні. Є два варіанти реалізації цього механізму. Перший - характерний для *спеціалізованих* систем, які орієнтовані на обробку запитів з фіксованою метою. У цьому випадку порядок застосування операцій відображений безпосередньо у струтурі обробника, він є її елементом. Другий притаманний, так званим, *універсальним* системам, які можуть обробляти запити з різною метою. Базується він на використанні обробником спеціальних інформаційних об'єктів – *внутрішніх процедур*, які задають правило для проведення обчислень - визначають над якими об'єктами і які дії необхідно виконати на кожному з кроків обчислення. В структурі такого обробника є механізм для переводу (трансляції) програм запитів у внутрішні процедури (або сукупності процедур), які їх реалізують. У цьому випадку процес обчислення складається з двох фаз – трансляції та виконання внутрішньої процедури на вхідних даних.

На практиці зустрічаються і системи з мішаним варіантом реалізації запитів, коли одні запити реалізуються як спеціалізовані, а інші – за допомогою універсального механізму.

Комунікативні системи теж мають свій життєвий цикл, пов'язаний з їх появою та функціонуванням у часовому просторі. Він складається з етапів і розпочинається з аналізу варіантів вхідних даних та усіх можливих запитів системи. Наступні етапи охоплюють: проектування і побудову обробника та експлуатацію системи.

В межах комунікативної платформи інформатику можна було б визначити *як науку, що вивчає моделі комунікативних процесів та систем*. Однак, зважаючи на дискусійний характер обговорення, зробимо кілька принципових зауважень щодо даного означення.

Насамперед зазначимо, що в такому вигляді воно постає занадто загальним і багатоаспектним. Моделі комунікативних процесів і систем, які є спрощеним поданням реальних комунікативних процесів та систем, можуть дуже відрізнятися й вимагати принципово різних підходів. Достатньо послатися на різноманіття тільки кібернетичних моделей (від систем автоматичного регулювання, ймовірнісних і статистичних моделей до автоматних та компютерних моделей). Тому було б доречно обмежити моделі комунікативних процесів і систем.

[4] Дескрипція (від англ. description – опис) – мовна конструкція, що замінює назву предмета, виражаючи його зміст іншими мовними засобами.

Опустимо далі розгляд спеціалізованих систем, де вирішальну роль відіграє специфіка запитів та її відображення в структурі обробника, і зосередимо увагу на **універсальних** системах. В залежності від способу, яким обробники знаходять вихідні дані в таких системах, вони поділяються на *породжуючі* та *і синтезуючі*. У першому випадку обробник породжує певну надмножину вихідних даних (або використовує вже готову таку надмножину як, наприклад, у пошукових системах), з якої відбирає остані, згідно з умовами, які визначено у внутрішній процедурі як інформаційному об'єкті, у другому – вихідні дані генеруються (будуються) з вхідних даних за допомогою цілеспрямованих імперативних дій. Обидва способи широко представлені в комунікативних системах.

Далі, нагадаємо, що інформація в комунікативній системі представляється інформаційними об'єктами. В кожній з них є свої правила побудови таких об'єктів. Без цих правил і без розуміння їх суб'єктами системи ніякий комунікативний процес неможливий. Модель комунікативної системи повинна враховувати цей аспект, а це значить, що вона має бути **дескриптивною**. Дескриптивність моделі означає, що до складу її елементів входять дескриптивні системи (ДС), в яких подаються (описуються) усі її інформаційні об'єкти: вхідні і вихідні дані, запити та внутрішні процедури. Мова йде не про одну, а, як правило, про декілька ДС, тому що інформаційні об'єкти різних суб'єктів системи потребують різних дескриптологічних засобів. Як мінімум – *мову специфікації* запитів для ініціатора і *внутрішню мову* для обробника. Остання описує внутрішні інформаційні об'єкти та процедури. Ці мови можуть співпадати, але тільки тоді, коли обидва суб'єкти КС співпадають.

Таким чином, в центрі уваги комунікативної платформи мають бути не просто моделі комунікативних процесів і систем, а саме дескриптивні їхні моделі.

Характеристичною особливістю таких моделей є те, що в них присутній часовий фактор і властивості деяких об'єктів (їхні значення і навіть їхній тип та зв'язки) можуть з часом змінюватись. Про такі об'єкти говорять, що вони є мінливі (*динамічні)*. Моделі, які допускають динамічні об'єктами, самі називаються *динамічними.* Це означає, що моделі комунікативних систем і процесів апріорі мають бути **динамічними.**

Відомо три види дескриптивних моделей – екстенсіональні, інтенсіональні й мішані (інтегровані) в залежності від того, якими є їхні ДС.

Для *екстенсіональних* ДС характерним є предикативний опис об'єктів через їх обсяг. Вони виділяють об'єкти за конкретним іменем v і певними спільними ознаками його можливих значень або за тією роллю, яку вони відіграють у тих чи інших контекстах. Подібні ознаки та ролі отримали назву - *характеристичних властивостей.* Характеристичні властивості описують об'єкти таким чином, що можливі розбіжності між ними поза межами цих властивостей не приймаються до уваги. Одну й ту ж роль можуть грати абсолютно різні за значенням об'єкти. При екстенсіональному підході здійснюється перехід на вищий рівень абстракції до узагальненого об'єкта - *змінної*, яка має своє ім'я - v, а значенням - клас допустимих значень (екстенсіонал).

Можна *конкретизувати* змінну, пов'язавши з її ім'ям v конкретне допустиме значення a. Факт конкретизації змінної подається тріадою $v \mapsto a$. Конкретне ім'я v абстрактне у тому сенсі, що воно ніяк не пов'язане з конкретною структурою його поточного значення, яка міняється від значення до значення. Слід зазначити, що предикат може описувати і рівно один об'єкт (і його можна навіть взяти за його ім'я!), але і в цьому випадку він не буде мати прямого відношення до структури значення. . Наприклад, лінійне рівняння $2x = 8$ може розглядатися як синонім для свого єдиного розв'язку (числа 4), але воно немає ніякого відношення до структури числа 4 в десятковій системі числення.

В *інтенсіональних* моделях кожний з об'єктів представлений не тільки конкретним своїм ім'ям, але і своїм конкретним значенням (*інтенсіоналом*). При цьому, на відміну від екстенсіональних моделей, структури імен та значень, як правило, певним чином пов'язані, а саме так, що за іменем може бути установлено його значення (в екстенсіональних моделях для цього потрібен ще додатковий компонент-зв'язок).

Різницю між екстенсіональними та інтенсіональними засобами проілюструємо наступними двома важливими прикладами.

Перший стосується натуральних чисел. З одного боку, їх можна визначити інтенсіонально, за допомогою числа 0 і відповідної конкретної сукупності операцій збільшення на 1 або скориставшись якоюсь позиційною, наприклад, звичайною десятковою, системою числення, взявши відповідну конкретну кількість одиниць, десятків, сотень тощо. В обох випадках значення числа – є результат конкретних дій в часі, які обумовлені його іменем. З іншого боку існує екстенсіональне означення натурального числа як кардинального через потужність множин.

Якщо взяти, наприклад, число три. Інтенсіонально його можна подати виразами $1+1+1$ чи десятковою цифрою 3. Екстенсіонально ж воно визначається як кількість елементів (кардинал) в таких множинах як { груша, яблуко, слива }, { a,b,c } та усіх їм рівнопотужних. Характеристичною властивістю тут є предикат штибу *три(x)*= "множина x - рівнопотужна множині { груша, яблуко, слива }". Кількість елементів в цих множинах – це те, що об'єднує усі триелементні множини. Ім'я кардинала "три" замінює їх в усіх контекстах, пов'язаних з їхньою потужністю[5].

Другий приклад пов'язаний з поняттям функції. Відомо два підходи до означення функції: процедурний – з функціями як конкретними правилами для обчислення результату (інтенсінальний) та теоретико-множинний – з функціями як відношеннями у теорії множин (екстенсіональний).

Мішані моделі використовують обидва види засобів. Моделі обробників навіть конкретних комунікативних систем є **мішаними**. Це випливає з подвійного характеру внутрішніх процедур, кожна з яких має, і інтенсіонал - правило для знаходження вихідних даних за вхідними, і екстенсіонал - сукупність обчислень, яку це правило породжує. Наявність екстенсіоналу (він може бути і одноелементним) є наслідком *масовості* внутрішніх процедур. Масовість означає здатність процедури застосовуватись до вхідних даних з певної не порожньої їх сукупності (немає жодного варіанту вхідних даних – немає і жодного обчислення!). Це вимагає, щоб останні були представлені в процедурі екстенсіонально - не конкретними значеннями (хоча і це можливо у випадку одного єдиного варіанту вхідних даних), а своєю роллю в обчисленні.

І нарешті про головне. Якщо звернутись до реальних обробників КС, то побачимо, що їхні ДС є **фінітними**, тобто в них усі об'єкти, і зовнішні, і внутрішніх є скінченно поданими. Це стосується, як запитів, так і внутрішніх процедур. КС та їхні моделі з фінітними ДС називаються *конструктивними*.

Наголосимо окремо, що конструктивність КС розповсюджується не на всю предметну область КС, а тільки на ту її частину, яка представлена у мові специфікацій КС. В останній представлена (наближено або точно) певна конструктивна модель предметної області. На цьому базується ідея інформаційного моделювання в різних галузях.

Враховуючи сказане, запропонуємо таке загальне визначення предмета інформатики в комунікативній платформі:

Комунікативна інформатика – це наука, що вивчає конструктивні моделі комунікативних процесів і систем.

Моделі, що вивчає комунікативна інформатика, будемо назвати *комунікативними інформаційними*, як і самі конструктивні комунікативні процеси та системи.

2.Конструктивний характер комунікативних аспектів інформаційних моделей фіксує границі комунікативної інформатики та вберігає її від надмірного узагальнення й ототожнення з іншими науками, насамперед з кібернетикою як наукою про загальні закони перетворення інформації в системах зі зворотним зв'язком та з інформологією – узагальнюючою наукою про інформацію в цілому, усі її вияви в живій і неживій природі, властивості й види загальних інформаційних процесів, а також з інформаційною наукою (Information Science). Взаємовідносини між цими науками, з одного боку, та комунікативною інформатикою – з іншого, приблизно такі, як між загальним поняттям і та його конкретизацією.

Як приклад можна навести взаємовідносини між загальною теорією груп і групою дійсних матриць або між класичним математичним аналізом і конструктивним

[5] Але воно не може це зробити в тих же теоретико-множинних операціях, кулінарних рецептах тощо, де суттєвими є конкретні елементи множин.

тощо. Останній приклад є особливо характерним: класичний аналіз базується на теоретико-множинній (екстенсіональній) платформі, а конструктивний - на алгоритмічній (інтенсіональній). І як математичні теорії вони дуже різні, хоч і мають значний спільний перетин (спільні теореми тощо). Якщо порівняти доведення однакових теорем в обох теоріях, то в конструктивному аналізі вони, як правило, значно довші і складніші. Про велику різницю між конструктивними і неконструктивними методами свідчать і складність отримання точних оцінок поведінки функцій чи процесів (конструктивних за означенням) у порівнянні з аналогічними асимптотичними (екстенсіональними) оцінками в межах навіть однієї теорії.

Таким чином, не можна ототожнювати кібернетику чи інформаційну науку з комунікативною інформатикою та стверджувати, як іноді можна сьогодні почути, що, наприклад, кібернетика вже "вмерла", залишилася лише інформатика тощо. Це просто різні, хоч і споріднені науки зі своїми предметами та методами дослідження. Це ж стосується і таких сучасних напрямів інформаційної науки як соціальна інформатика, біоінформатика тощо, в яких комунікативні інформаційні моделі є лише засобом досліджень, а предмети в них різні.

Висновки. В роботі введено поняття комунікативної інформатики як науки, що вивчає конструктивні моделі комунікативних процесів і систем. Комунікативна платформа інформатики є доволі загальною, але хочеться сподіватися, і достатньо змістовною для того, щоб відобразити основні проблеми теорії й практики обробки та передачі інформації, у тому числі, і програмування та сприяти їхньому розв'язку.

Список використаних джерел

1. *Le Garf A.* Dictiormairie de 1'infor-matique. Paris: Presses Universitaires de France. 1982.
2. *Kolin K. K.* Evolution of Informatics. /K.K. Kolin // Information technologies.- 2005, № 1, c.2-16
3. *Einstein A, Infeld L.* The growth of ideas from early concepts to relativity and quanta. – NY: Simon & Shuster, 1954.
4. *Kapitinova J.V., Letichevskij A.A.* Mathematical theory of computer systems design. – M.: Nauka, 1988.- 296 c.
5. *Red'ko V.N.* The descriptive foundations of the essential platform / V.N. Red'ko, I.V.Red'ko, N.V.Grishko // Problems of Programming – 2008. – № 2-3. – P. 75-83.
6. *Scott D.S.* Outline of a mathematical theory of computation.- Technical Monograph RPG-3, Programming Research Group, Uni. of Oxford, 1970.
7. *Stoy, J. E.* The Scott-Sterachey Aproach to Programming Language Theory / J. E. Stoy. – Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1979.
8. *Basarab I.A., Nikitchenko M.S., Red'ko V.N.* Compositional databases.– K.: Lybid', 1992. – 192 p.
9. *Red'ko V.N., Brona J., Buj D.B., Poljakov V.A.* Relational databases: Table algebras & SQL-likely languages.-K.: Publishers «Akademperiodika», 2001.-198 p
10. *Nikitchenko M.S.* Theory of programming. Part I / M.C.Нікітченко – Nizhin: Publishers of Mykoly Gogolja NDU, 2010.- 119 p.
11. *Red'ko V.N.* Foundations of compositional programming. / V.N. Red'ko // Programming. – M., 1979. – № 3.
12. *Zubenko V.* Applied Program Algebra. – Kiel: CAU Kiel.-1985.- Bericht. – № 8504.- 50 p.
13. *Zubenko V.V., Omel'chuk L.L.* Programming.– K.: Publishers of University of Kyiv, 2011. - 625 .c.

Надійшла до редколегії 03.12.2012

УДК 519.87

Івохін Є.В., д.ф.-м.н., доцент

Про підхід до використання нейронних мереж для прогнозування нечітких фінансових даних

Розглянуто підхід для вирішення задач прогнозування у фінансовій сфері за допомогою штучних нейронних мереж. Проаналізовано основні етапи обробки вхідних даних та схеми функціонування нейронної мережі. Визначено проблеми, що пов'язані з формалізацією вхідної інформації. Запропоновано використання нечіткого підходу для опису даних.

Ключові слова: нейронна мережа, нечіткі множини, прогнозування, технічний аналіз фінансових даних

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivokhin E.V., Doctor of science, associate professor

On approach for the using of neural networks for fuzzy financial data prediction

Artificial neural networks are often used for solving of financial sector prediction.

Some problems of that approach are considered. The based stages of processing input data are analyzed. The scheme functioning of neural network is modified. The decision method of task of input fuzzy information formalization is proposed. The new approach of describing of fuzzy input data is considered.

Key words: neuron network, fuzzy set, prediction, technical analysis of financial data

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор технічних наук, проф. Волошин О.Ф.

Системи, що базуються на штучних нейронних мережах, останнім часом все активніше використовуються для прогнозування фінансових ринків. Завдяки можливості роботи з зашумленими даними система виходить гнучкою і хоча не вирішує задачу з стовідсотковою точністю, може мати значний вплив на використання різних додатків фінансової сфери. Відомі традиційні підходи до вирішення задач прогнозування (класичний технічний аналіз, аналіз фундаментальних чинників, регресійний і кореляційний аналіз і т.і.), проте вони не володіють необхідною функціональністю за межами типових умов. Штучні нейронні мережі дають багатообіцяючі альтернативні рішення [1].

Традиційною схемою застосування штучних нейронних мереж (ШНМ) для вирішення задач прогнозування у фінансовій сфері є формування такої нейронної мережі, яка б найкращим чином відтворювала відображення F: $x \Rightarrow y$, узагальнено сформоване на основі динаміки спостережень у3 вигляді набору прикладів $\{x_t, y_t\}$. Пошук такої нейронної мережі здійснюється за допомогою алгоритмів «навчання». Потрібно також відмітити, що нейромережеве моделювання в чистому вигляді базується лише на даних часового ряду.

ШНМ можна застосовувати для одновимірного і багатовимірного аналізу, належним чином сформувавши множину незалежних входів і залежних від них виходів. Як правило, модель будується для того, щоб передбачати значення часового ряду для однієї цільової змінної, проте, в принципі, модель може передбачати значення і декілька змінних, якщо в мережу додати додаткові вихідні елементи.

При прогнозуванні ринків цінних паперів (акцій) за допомогою штучних нейронних мереж як вхідна інформація можуть виступати цінова динаміка та її похідні (значення індикаторів, значущі рівні і т.п.) і ринкові (часто макроекономічні) показники. В рамках даної роботи ставиться завдання дослідження на міжбанківській фінансовій біржі значень довгострокових цінових часових рядів про курси акцій з метою спостереження банком-покупцем за динамікою курсів і підтримкою ухвалення рішень по їх покупці або продажу.

При роботі з ШНМ вхідну інформацію, в першу чергу, необхідно належним чином підготувати: як входи і виходи нейромережі не слід вибирати самі значення результатів спостережень (наприклад, цінових котирувань).

Розглянемо простий спосіб формування вхідних образів для роботи ШНМ. Основним поняттям при роботі з даним видом вхідної інформації, що розглядається тут, є «вікно»,

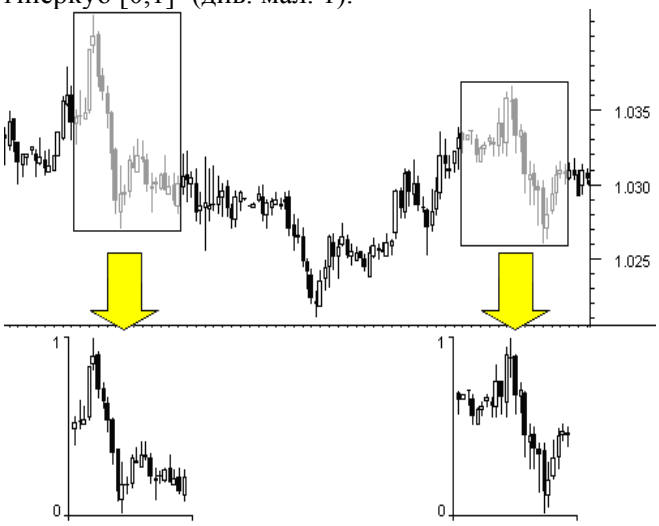
©Є.В.Івохін, 2013

тобто та кількість періодів часу, дані про які потрапляють в «образ», що формується на вході мережі. При роботі з часовою динамікою курсів вікно розміром n означатиме, що дослідника цікавить динаміка курсу за останні n періодів. Щоб ШНМ працювала з «образами» такого вікна, при проектуванні архітектури мережі необхідно виділити n вхідних нейронів.

Суть методу формування вхідних образів полягає в наступному. Припустимо, що дані кожного з образів лежать в діапазоні [*Min*..*Max*], тоді найбільш простим способом нормування буде

$$\tilde{x} = \frac{x - Min}{Max - Min}.$$

Після такого перетворення кожен «образ», що складається з n послідовних цін, нормується так, що всі значення «образу» лежать в інтервалі від 0 до 1. При цьому дійсні значення втрачаються, і всі вхідні записи вкладаються в гіперкуб $[0,1]^n$ (див. мал. 1).



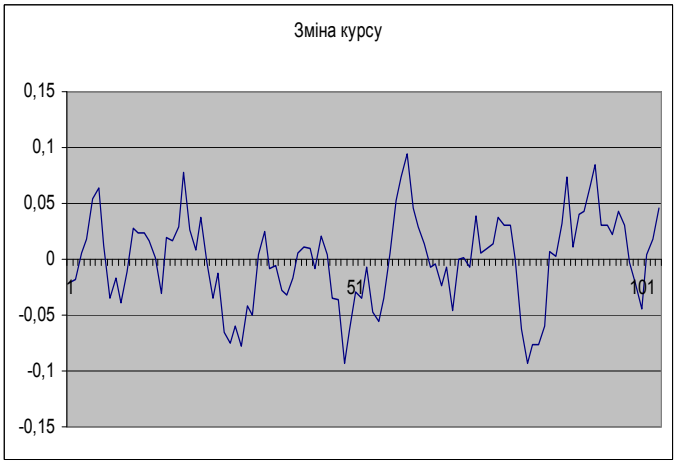
Мал. 1. Результати нормування різних вхідних образів

Таким чином, при будь-якому рівні цін гарантується інваріантність перетворення вхідного запису. Таке перекодування не позбавлене сенсу, оскільки банк-покупець зазвичай оцінює дані часового ряду у відносному виразі за допомогою стандартних прийомів.

Позначимо значення перетворених за формулою (1) коритувань через C_t. Як вже було сказано вище, дійсно значущими для прогнозів є зміни котирувань (ΔC_t - зміна котирування в періоді t). Оскільки ці зміни, як правило, значно менше по амплітуді, ніж самі котирування, тому між послідовними значеннями курсів є велика кореляція у вигляді $<C_{t+1}> = C_t + <\Delta C_t> = C_t$. Тим часом, для підвищення якості навчання слід прагнути до статистичної незалежності входів, тобто до відсутності подібних кореляцій.

Тому як вхідні параметри логічно вибирати найбільш статистично незалежні величини, наприклад, абсолютні значення котирувань: $\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$. Легко відмітити, що: якщо $C_t > \Delta C_{t-1}$, то $\Delta C_t > 0$, якщо $C_t < \Delta C_{t-1}$, то $\Delta C_t < 0$.

Наочне уявлення про характер динаміки курсу акцій на основі інформації про зміну котирувань ΔC_t дає графік, зображений на малюнку 2.



Мал. 2. Приклад динаміки зміни котирувань курсу акцій

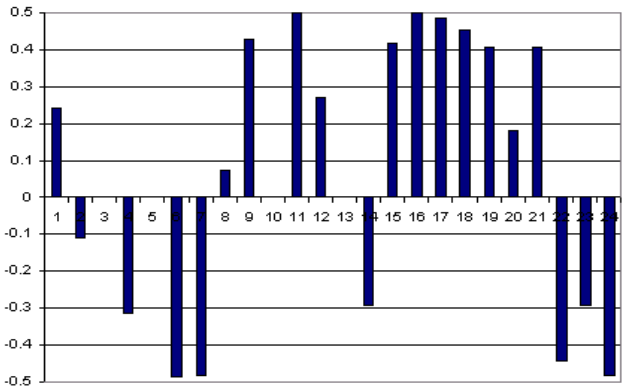
Проте образи, сформовані подібним методом, ще поки не придатні для подачі на входи ШНМ, оскільки володіють дуже малою амплітудою коливань. Крім того, вхідна інформація для ШНМ повинна лежати в інтервалі активаційних функцій нейронів.

Сьогодні відомо багато способів перетворення вхідної інформації застосовних до завдань прогнозування, наприклад, можна скористатися наступною схемою: на першому кроці змінюємо величини ΔC_t за формулою $\Delta C1_t = \Delta C_t * A \quad (A > 0)$, а на другому кроці - використаємо спосіб «перекодування» неперервних даних в інтервал активаційних функцій ШНМ, отриманий за даними перетворення функцією-сигмоїдом, що використовується в першому прихованому шарі ШНМ [2]:

$$\Delta C2_t = 1/(1 + exp(-1.5 * \Delta C1_t)) - 0.5 \qquad (2)$$

Змінений за такою схемою первинний «образ» представлений на мал. 3.

В якості даних, що поступають на входи ШНМ, можуть виступати як максимальні прирости цін одного типу, наприклад цін закриття або відкриття, так і комбінації приростів різних типів цін в межах одного часового інтервалу.



Мал. 3. Приклад готового до подачі на входи нейромережі «образу»

Негативною рисою методу «вікон» є те, що його застосування обмежує «кругозор» мережі. Недостатньо широке вікно занурення в лаговий простір не здатне надати таку інформацію, що знижує ефективність прогнозу. З іншого боку, розширення вікна до таких значень, коли залучаються далекі екстремальні значення ряду, підвищує розмірність мережі, що у свою чергу, приводить до зниження точності нейромережевого прогнозу.

Альтернативним представленням вхідної інформації можна вважати значення індикаторів, побудовані на основі цінової динаміки. Значення кожного з індикаторів залежить від певного числа значень часового ряду у минулому, таким чином використання сукупності декількох індикаторів дозволяє охопити ринок широким поглядом і подивитися на ринкову ситуацію у минулому з різних точок зору.

Однак необхідно відзначити, що у вибірку варто відбирати найбільш значущу комбінацію технічних індикаторів, яку і слід потім використовувати для входів нейромережі. Вирішити задачу вибору необхідних індикаторів можна, наприклад, за допомогою оптимізаційних методів і тих же нейронних мереж.

Як було відмічено вище, значення, що подаються на входи ШНМ, повинні лежати в тому ж інтервалі, що і у активаційних функцій (сигмоїдів) нейронів. Тобто, в процесі формування вибірки необхідно перекодувати значення індикаторів в інтервал активаційних функцій, що використовуються в дослідах ШНМ.

Проведена підготовка даних дозволяє перейти до виконання основного завдання – за допомогою ШНМ з довільного неідеального сигналу, поданого на її вхід, виділити ("пригадати" за частковою інформацією) відповідний зразок (якщо такий є) або "дати висновок" про те, що вхідні дані не відповідають жодному із зразків. Будемо використовувати нейромережу Хопфілда [3].

У загальному випадку, будь-який сигнал у мережі може бути описаний вектором $\boldsymbol{X} = \{x_i : i = \overline{0,n-1}\}$, n – число нейронів в мережі і розмірність вхідних і вихідних векторів. Кожен елемент x_i рівний або +1, або -1. Позначимо вектор, що описує k-ий зразок, через $\boldsymbol{X}^k$, а його компоненти, відповідно, $\{x_i^k : i = \overline{0,n-1}\}$, $k = \overline{0,m-1}$, m – число зразків. Коли мережа розпізнає (або "пригадає") який-небудь зразок на основі пред'явлених їй даних, її виходи міститимуть саме його, тобто $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^k$, де $\boldsymbol{Y}$ – вектор вихідних значень мережі: $\boldsymbol{Y} = \{y_i : i = \overline{0,n-1}\}$. Інакше, вихідний вектор не співпадає ні з одним зразковим.

На стадії ініціалізації мережі вагові коефіцієнти синапсів встановлюються таким чином:

$$w_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m-1} x_i^k x_j^k, i \neq j \\ 0, \ i = j \end{cases}$$

Алгоритм функціонування мережі Хопфілда має наступний вигляд (тут p – номер ітерації):

1. На входи мережі подається невідомий сигнал. Фактично його ввод здійснюється безпосередньою установкою значень аксонів:

$$y_i(0) = x_i, \ i = \overline{0,n-1},$$

2. Розраховується новий стан нейронів:

$$s_j(p+1) = \sum_{i=0}^{n-1} w_{ij} y_i(p), \ j = \overline{0,n-1},$$

і нові значення аксонів

$$y_j(p+1) = f\left[s_j(p+1)\right], \ j = \overline{0,n-1},$$

де $f(\cdot)$ – активаційна функція у формі стрибка (наприклад, вигляду (2)).

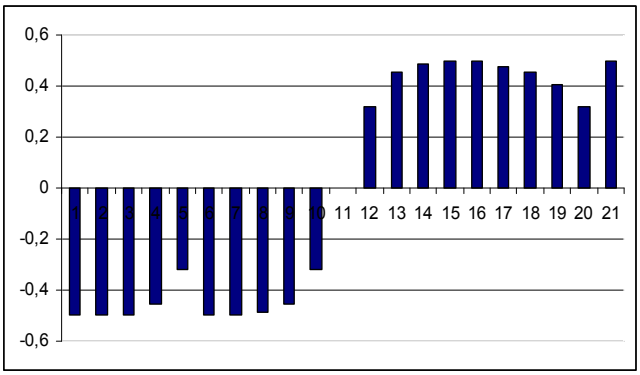
3. Перевіряється, чи змінилися вихідні значення аксонів за останню ітерацію. Якщо так – перехід до пункту 2, інакше (якщо виходи стабілізувалися) – кінець. При цьому вихідний вектор представляє собою зразок, що найкращим чином відповідає вхідним даним.

На історичних даних можна виконати результуючу розмітку, в яких місцях слід купувати, в яких продавати, в яких чекати покупки або продажу. Існують передумови розробки алгоритму, що формує так званий шаблон (карту) максимального прибутку (МРР) [4].

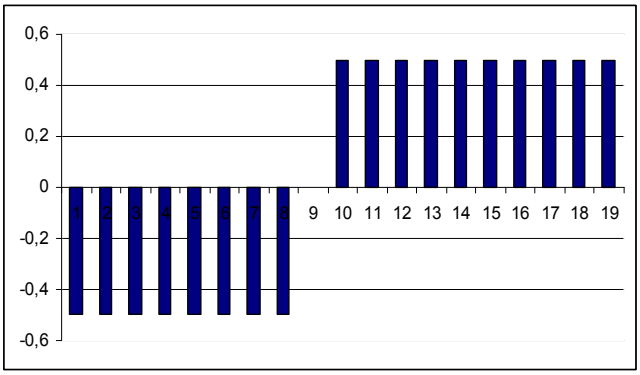
Незважаючи на досить вдале практичне застосування даної алгоритмічної схеми при вирішенні задач прогнозування фінансових даних, необхідно звернути увагу на окремі моменти, що потребують свого вдосконалення.

Як показує статистика спостереження за ціновими котируваннями побудова вхідних образів і перетворення інформації «вікон» за формулою (1) не завжди добре визначають тенденції часових змін фінансових показників, що впливає на характер фінальної розмітки. Частково цю проблему можна розв'язати за допомогою засобів технічного аналізу [4], які з метою попередньої обробки представляють вхідні дані часових рядів у вигляді послідовності згладжених спостережень. Серед таких підходів часто використовується, наприклад, побудова сковзкого середнього з різними значеннями періоду (порядку) середнього.

Другим недоопрацьованим елементом запропонованої схеми є пропорційне збільшення в A разів вхідних значень, від величини якого надалі залежатиме вигляд даних після їх перетворення функцією-сигмоїдом (див.мал.4 та 5).



Мал. 4. Приклад вхідного «образу» з A=10.



Мал. 5. Приклад вхідного «образу» з A=100.

Зрозуміло, що у перетворених функцією-сигмоїдом даних $\{x_i : i = \overline{0,n-1}\}$ діапазон представлення визначається відрізком $[-0.5;0.5]$, але подальше кодування додатних значень x_i величиною +1, а від'ємних – величиною -1 для формування сигналу для ШНМ викликає ряд непорозумінь: вхідні дані з суттєвою різницею у показниках динаміки можуть бути нівельовані до однієї вихідної величини.

Для подолання нечутливості запропонованої схеми можна запропонувати розгляд даних, поданих множинами рівня α, $\alpha \in [0,1]$, тобто множинами, для елементів яких справедлива нерівність $2|x_i| \geq \alpha$. Таким чином, у вхідну послідовність будуть відбиратися лише такі значення часових спостережень, які мають достатньо змістовний вплив на визначення тенденції у динаміці показників. Вибір величини α та аналіз отриманих для її різних значень результатів можуть бути проведені фінансовим експертом з урахуванням специфіки проблемної області.

Хотілося б також звернути увагу на відсутність ітогової (цільової) оцінки за даними інформаційного «вікна», що формують вхідні сигнали ШНМ. Представляється доцільним враховувати час спостереження у послідовності вхідних даних. Дані, які спостерігаються на початку «вікна» менш інформативні порівняно з останніми спостереженнями. Це дозволяє використати цільову функцію за даними спостережень, наприклад, у вигляді

$$I(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i / (n-i), \qquad (7)$$

що дає змогу оцінити інформативність вхідних даних з урахуванням віддаленості результатів спостереження від моменту прийняття рішення на основі застосування ШНМ.

Слід відзначити, що описані тут способи обробки вхідних даних не знижують якості стандартного методу «вікон», але допускають стискання інформації, що базується на застосуванні вхідних даних з заданою величиною впливу та використанні величини віддаленості часу спостереження від поточного моменту часу. Подібного роду стискання інформації є прикладом визначення найбільш значущих для прогнозу динаміки фінансових показників.

Список використаних джерел

1. *Lutkovskiy V. M.* Neural Networks. Minsk: BSU, 2003. – 99 p. (in Russian)
2. *Ezhov A.A., Shumskiy S.A.* Neurocomputing and its application in economics and business. – M: MIFI, 1998. – 224 p. (in Russian)
3. *Osovsky S.* Neural Networks for information processing. – M.: Finance and statistics, 2002.– 344 p. (in Russian)
4. *Shvager D.* Technical analysis. Full course. – M.:Alpina Publisher, 2001. – 768 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 12.03.2013

УДК 519.7

Кійковська О.І. [1], аспірантка
Чабанюк Я.М. [2], д.ф.-м.н., проф.

Процедура стохастичної апроксимації в схемі дифузійної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу

В даній роботі встановлено достатні умови збіжності процедури стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням у випадку марковських переключень в схемі дифузійної апроксимації в умовах локального балансу. Умови сформульовано в термінах властивостей функції Ляпунова усередненої системи.

Ключові слова: процедура стохастичної апроксимації, марковський процес, імпульсне збурення, функція Ляпунова, умова локального балансу.

[1] Національний університет "Львівська політехніка", 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail: olja.kiykovska@gmail.com
[2] Національний університет "Львівська політехніка", 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com

O. I. Kiykovska[1], postgraduate student,
Ya.M. Chabanyuk[2], Ph.D.

Stochastic approximation procedure in diffusion approximation scheme with impulse perturbation under the condition of local balance

In this paper it has been established sufficient conditions for the stochastic approximation procedure with impulse perturbation in diffusion approximation scheme under the condition of local balance using the Lyapunov function conditions for average system.

Key Words: stochastic approximation procedure, Markov process, impulse perturbation, Lyapunov function, condition of local balance.

[1] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: olja.kiykovska@gmail.com,

[2] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В. В.

Вступ

Асимптотичні властивості імпульсних процесів досліджено в [1] з використанням малого параметру в умовах глобального балансу. Флуктуації випадкової еволюції з усередненою точкою рівноваги присвячена робота [2]. Збіжність неперервної процедури стохастичної апроксимації (ПСА)

$$du(t) = a(t)[C(u(t))dt + \sigma(t,u(t))d\zeta(t)], u(0) = u_0$$

встановлено у [3] через властивості функції Ляпунова. У [4] досліджено ПСА з дифузійним збуренням та марковськими переключеннями.

В даній роботі розглянуто неперервну ПСА з імпульсним збуренням в умовах локального балансу в схемі дифузійної апроксимації. Встановлено достатні умови збіжності такої процедури в марковському середовищі через властивості функції Ляпунова усередненої системи.

1. Постановка задачі

Неперервна процедура стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням в ергодичному марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації [1] визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)[C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^\varepsilon(t)],$$
$$u^\varepsilon(0) = u_0 \qquad (1)$$

де $C(u;x), u \in R^d$ - функція регресії, $u^\varepsilon(t), t \geq 0$ - випадкова еволюція, а ε - малий параметр серій. Друга компонента функції регресії описує вплив зовнішніх факторів, які задаються рівномірно

© О.І. Кійковська, Я.М.Чабанюк, 2013

ергодичним марковським процесом $x(t), t \ge 0$ у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ [5]. Марковський процес задається генератором

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \quad \varphi \in (X),$$

де (X) - банаховий простір дійснозначних обмежених функцій з супремум – нормою

$$\|\varphi\| := \max_{x \in X} |\varphi(x)|,$$

а $P(x, B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$, - стохастичне ядро [5], $q(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = E\theta_x$, θ_x - час перебування марковського процесу в стані x.

Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, марковського процесу $x(t), t \ge 0$, визначається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

де $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$, - стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова [6] $x_n = x(\tau_n), n \ge 0$, і τ_n - моменти стрибків марковського процесу $x(t), t \ge 0$.

Для генератора $\boldsymbol{Q}$ марковського поцесу $x(t), t \ge 0,$ потенціал R_0 має представлення

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$, - проектор на нуль-простір оператора $\boldsymbol{Q}$: $N_Q = \{\varphi \in (X): \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}$ [1].

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t), t \ge 0$ в схемі дифузійної апроксимації задається співвідношенням $\eta^\varepsilon(t) := \varepsilon\eta(t/\varepsilon^2)$, де

$$\eta(t) = \int_0^t \eta(ds; x(s)),$$

а сімейство процесів з локально незалежними приростами $\eta(t; x), t \ge 0, x \in X$ задається генераторами

$$\boldsymbol{\Gamma}(x)\varphi(w) = \int_{R^d} [\varphi(u + v) - \varphi(u)]\Gamma(u; dv; x),$$

$u \in R^d, x \in X$. Отже, процес $\eta^\varepsilon(t), t \ge 0$ визначається генератором [7]

$$\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma(u; dv; x). \quad (2)$$

2. Збіжність процедури стохастичної апроксимації

Нехай виконується умова локального балансу

$$b(u; x) := \int_{R^d} v\Gamma(u; dv; x) \equiv 0. \quad (3)$$

Усереднена функція регресії визначається співвідношенням [8]:

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u; x).$$

Теорема . *Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$, для усередненої динамічної системи*

$$du(t) = C(u(t))dt,$$

що забезпечує умову експоненційної стійкості

$C1:\ C(u)V'(u) < -cV(u), c > 0,$

та задовольняє додатковим умовам:

$C2:\ |\ (x)V(u)| \le c_1(1 + V(u)), c_1 > 0,$

$C3:\ |\delta_\Gamma^\varepsilon(u; x)V(u)| \le c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,$

$C4:\ |\ (x)R_0\tilde{}(x)V(u)| \le c_3(1 + V(u)), c_3 > 0,$

$C5:\ |\ (x)R_0\tilde{}(x)V(u)| \le c_4(1 + V(u)), c_4 > 0,$

$C6:\ |\delta_\Gamma^\varepsilon(u; x)R_0\tilde{}(x)V(u)| \le c_5(1 + V(u)), c_5 > 0,$

де $\tilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u) = [\boldsymbol{C}(x) - \boldsymbol{L}]V(u)$,

$\boldsymbol{L}V(u) = \Pi C(u, x)V'(u)$,

$(x)\varphi(u; x) = B(u; x)\varphi_u''(u; x)$,

а $\left\|\delta_\Gamma^\varepsilon(u; x)\varphi(u)\right\| \to 0$, *при* $\varepsilon \to 0$.

Нехай виконується умова балансу (3) і нормуюча функція $a(t) > 0$ задовольняє умовам:

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді, для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) = u_0 \in R^d$, розв'язок рівняння (1) при будь-якому $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^*, що однозначно визначається рівнянням $C(u^*) = 0$:

$$\{\lim_{t \to \infty} u^\varepsilon(t) = u^*\} = 1.$$

Зауваження 1. Добутки типу $B(u; x)V''(u)$ мають представлення [1, с.10]

$$B(u; x)V''(u) = \sum_{i,j=1}^d b_{i,j}(u; x)\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}V(u).$$

Зауваження 2. У випадку, коли функція $C(u; x)$ - лінійна, а $V(u)$ - квадратична форма виконуються умови $C2 - C6$ теореми.

Лема 1. *Генератор двокомпонентного марковського процесу*

$$u^\varepsilon(t) := u_t^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2) := x_t^\varepsilon, t \ge 0, \quad (4)$$

в банаховому просторі (R^d, X) *дійснозначних обмежених функцій* $\varphi(u;x) \in C^{2,0}(R^d, X)$ *має представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x) + a(t)C(x)\varphi(u;x) + \varepsilon a(t)\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u;x), \quad (5)$$

де $\boldsymbol{C}(x)\varphi(u;x) = C(u;x)\varphi'(u;x)$.

Доведення. Генератор марковського процесу (4) на тест-функціях $\varphi(u;x)$, визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon) \mid u_t^\varepsilon = u, x_t^\varepsilon = x] - \varphi(u;x)]. \quad (6)$$

Використовуючи позначення

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon)] := E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon) \mid u_t^\varepsilon = u, x_t^\varepsilon = x]$$

для умовного математичного сподівання, представимо праву частину (6) у вигляді

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u;x)] = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon)] + \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u;x)]. \quad (7)$$

Зауважимо, що останній доданок в (7) має представлення [2]

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u;x)] = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x). \quad (8)$$

Враховуючи те, що з (1) отримуємо

$$u_{t+\Delta}^\varepsilon = u + a(t)C(u;x)\Delta + a(t)\Delta\eta^\varepsilon(t) + o(\Delta),$$

для математичного сподівання з першого доданку (7) маємо

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = E_{u,x}[\varphi(u + a(t)C(u;x)\Delta + a(t)\Delta\eta^\varepsilon(t) + o(\Delta); x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u; x_{t+\Delta})].$$

Додавши та віднявши у математичному сподіванні вираз $\varphi(v, x_{t+\Delta}^\varepsilon)$, де $v = u + a(t)C(u;x)\Delta + o(\Delta)$, отримуємо

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = E_{u,x}[\varphi(v + a(t)\Delta\eta^\varepsilon(t); x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(v; x_{t+\Delta}^\varepsilon)] + E_{u,x}[\varphi(v; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon)].$$

Враховуючи означення генератора $\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)$:

$$\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + \Delta\eta^\varepsilon(t); x) - \varphi(u;x)],$$

та те, що $v \to u$ при $\Delta \to 0$, отримуємо для першого доданку з (7) представлення

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = a(t)\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u,x) + \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(v; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u; x_{t+\Delta})].$$

Оскільки для останньої границі з попереднього представлення мають місце перетворення

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(v; x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi_u'(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon)a(t)C(u;x)\Delta + o(\Delta)] = a(t)C(u;x)\varphi_u'(u;x), \quad (9)$$

то разом з (8), отримуємо (5).

Лема 2. *Генератор (5) в умовах локального балансу (3) допускає асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x) + a(t)\boldsymbol{C}(x)\varphi(u;x) + \varepsilon a(t)\gamma^\varepsilon(x), \quad (9)$$

де $\gamma^\varepsilon(x) = (1/2)\quad(x)\varphi(u;x) + \delta_\Gamma^\varepsilon(u;x)\varphi(u)$,

$(x)\varphi(u;x) = B(u;x)\varphi_u''(u;x)$, *і* $\left\|\delta_\Gamma^\varepsilon(u;x)\varphi(u)\right\| \to 0$, *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Оскільки генератор (2) в умовах (3) допускає представлення [7]

$$\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = (1/2)B(u;x)\varphi''(u) + \delta_\Gamma^\varepsilon(u;x)\varphi(u),$$

де $\delta_\Gamma^\varepsilon(u;x)\varphi(u)$ - знехтуючий член, такий, що $\left\|\delta_\Gamma^\varepsilon(u;x)\varphi(u)\right\| \to 0$, при $\varepsilon \to 0, \varphi(u) \in C^3(R^d)$, то з (5) отримуємо (9).

Лема 3. *На збуреній функції Ляпунова*

$$V^\varepsilon(u;x) = V(u) + \varepsilon^2 a(t)V_1(u;x), \quad (10)$$

розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (9) реалізується співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u;x) = a(t)\boldsymbol{L}V(u) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)V(u), \quad (11)$$

де $\boldsymbol{L}V(u) = \Pi\boldsymbol{C}(x)V(u) = \Pi C(u;x)V'(u)$, *а залишковий член* $\theta_t^\varepsilon(x)V(u)$ *допускає оцінку в умовах теореми*

$$|\theta_t^\varepsilon(x)V(u)| \le ca^2(t)(1+V(u)). \quad (12)$$

Доведення. Встановимо дію оператора $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)$ на збуреній функції Ляпунова (10).

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)V^{\varepsilon}(u;x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}V(u) +$$
$$+ a(t)[\boldsymbol{Q}V_1(u;x) + \boldsymbol{C}(x)V(u)] + \varepsilon[a(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V(u) +$$
$$+ \varepsilon a^2(t)\boldsymbol{C}(x)V_1(u;x) + \varepsilon^2 a^2(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V_1(u;x)].$$

Оскільки $V(u)$ не залежиить від x, тобто $V(u) \in N_Q$, отже $\boldsymbol{Q}V(u) = 0$. З умови розв'язності рівняння

$$a(t)[\boldsymbol{Q}V_1(u;x) + \boldsymbol{C}(x)V(u)] = a(t)\boldsymbol{L}(u)$$

отримуємо вигляд граничного оператора

$$\boldsymbol{L}V(u) = \Pi\boldsymbol{C}(x)V(u) = \Pi C(u,x)V'(u).$$

Отже з використанням цієї умови, розв'язок рівняння набуде вигляду:

$$V_1(u,x) = [a(t)]^{-1}R_0\left[a(t)\boldsymbol{C}(x) - a(t)\boldsymbol{L}\right]V(u) =$$
$$= R_0\tilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u),$$

де $\tilde{\boldsymbol{C}}(x) = \boldsymbol{C}(x) - \boldsymbol{L}$.

Встановимо оцінку залишкового члена представлення (11), врахувавши його аналітичний вигляд

$$\theta_t^{\varepsilon}(x) = a(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V(u) +$$
$$+ \varepsilon a^2(t)\boldsymbol{C}(x)V_1(u;x) + \varepsilon^2 a^2(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V_1(u;x). \quad (13)$$

З гладкості функції Ляпунова $V(u)$, умов $C2, C3$ теореми маємо

$$|a(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V(u)| \le (c_1 + c_2)a^2(t)(1+V(u)).$$

Використавши умову $C4$ для оцінки другого доданку (13), отримуємо

$$|a^2(t)\boldsymbol{C}(x)V_1(u;x)| \le c_3 a^2(t)(1+V(u)).$$

Для тетього доданку (13) з умов $C5, C6$ теореми, маємо

$$|a^2(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V_1(u;x)| \le (c_4 + c_5)a^2(t)(1+V(u)).$$

Таким чином для залишкового члена $\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u)$ має місце сумарна оцінка (12).

3. Завершення доведення теореми.

Використовуючи умову $C1$ теореми одержимо оцінку для граничного генератора $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L}V(u) \le -cV(u).$$

З умови $C1$ теореми та нерівності (12) одержимо нерівність:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)V_t^{\varepsilon}(u,x) \le -ca(t)V(u) + c^* a^2(t)(1+V(u)). \quad (14)$$

Збіжність процедури стохастичної апроксимації випливає з нерівності (14) та теореми Невельсона-Хасьмінського [3].

Висновки

Встановлено достатні умови збіжності процедури стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу до точки рівноваги функції регресії в термінах властивостей функції Ляпунова. Отримані результати дозволяють дослідити збіжність процедури стохастичної оптимізації та її модифікацій з врахуванням марковських та імпульсних впливів на функцію регресії в умовах локального балансу.

Література

1. *Korolyuk V.S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Singapore: World Scientific, 2005. – 330 p.

2. *Chabaniuk Y., Koroliuk V.S., Limnois N.* Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point // C.R.Acad.Sci.Ser.I.Paris, 2007. – P.405 – 410.

3. *Nevelson M.B., Hasminskyy R.Z.* Stochastic Approximation and Recurent Evaluation. – Moscow: Nauka, 1972. – 304 p. (in Russian).

4. *Kiykovska O.I.* Converges of stochastic approximation procedure with diffusion perturbation // Kamyanets - Podilsky National University of Ivan Ogienko, 2012. — No. 7. — P. 109 – 117. (in Ukrainian).

5. *Korolyuk V.S.* Stochastic Models of Systems. – K: Lybid, 1993. – 136 p. (in Ukrainian).

6. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 185p.

7. *Koroliuk V.S.* Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 179, No. 2, November, 2011. – P. 273 – 289.

8. *Kiykovska O.I., Chabanyuk Ya.M.* Converges of stochastic approximation procedure in asymptotically small diffusion scheme // Journal of Chernivtsi National University, 2012. – T.2 no.2-3 – P. 90 – 95. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 12.03.2013

УДК 517.330.3

Коляденко М.А.[1]

Підходи технічного аналізу при прогнозуванні фондових показників. Дослідження індикатора 52-week high

У даній роботі проводиться огляд основних праць по технічному аналізу та виділяються головні результати теоретичних досліджень фондових показників. Подаються результати річного статистичного дослідження одного з основних технічних індикаторів – 52-week high.

Ключові слова: фондовий ринок, технічний аналіз, хвильова теорія, індикатори ринку.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: mak_kol@ukr.net

M.A. Koliadenko[1]

Methods of technical analysis in stock indices forecasting. Research of 52-week high indicator

The research paper contains an overview of major studies of technical analysis, the description of various theoretical research results and the annual statistical analysis of 52-week high indicator.

Key Words: stock market, technical analysis, wave principle, market indicators.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: mak_kol@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

З ростом потужностей обчислювальних машин в торгівлі акціями пройшли значні зміни. Якщо раніше всі гравці при прийнятті рішень переважно керувалися фундаментальними показниками та суб'єктивними вподобаннями, то в останні роки все більше уваги приділяється технічному аналізу для досягнення статистичної переваги при вході в ринок. Таким чином, нового значення набули дослідження Чарльза Доу та Ральфа Еліота, які на початку XX століття систематизували накопичений досвід про постійно повторювальні тенденції поведінки цін акцій та індексів. Так як ці надбання лягли в основу сучасних комп'ютерних систем торгівлі акціями, то розглянемо основні результати, отримані дослідниками.

«**Теорія Доу**» – найбільш відомий метод технічного аналізу показників фондового рику, та його трендів. Теоретичні основи зазначеного методичного підходу містяться у роботах Чарльза Доу, що були опубліковані з 1900 по 1902 року у щоденній газеті The Wall Street Journal, та у подальшому були доопрацьовані С. А. Нільсоном, Вільямом Р. Гамильтоном, Робертом Ріа. Основу «теорії Доу» складають сім постулатів [1]:

1. Вся істотна інформація про ринок міститься в середніх цінах (індексах), передусім в промисловому і транспортному індексах. Згідно «теорії Доу», будь-який чинник, здатний вплинути на попит або пропозицію, незмінно знайде своє віддзеркалення у динаміці індексу.
2. Ринок визначають три тренди. Первинним трендом називається довгостроковий напрямок цін акцій. Найбільше значення він надавав саме первинній, або основній тенденції. Доу вважав, що більшість інвесторів на фондовому ринку враховує саме основний напрям руху ринку.
3. Первинні зростаючі тренди складаються з трьох рухів вгору. Перший рух вгору – результат накопичення акцій в період занепаду економіки. Другий рух відбувається за умов купівлі акцій інвесторами, які дізнаються про підвищення прибутків. Остання хвиля характеризується участю широких верств населення і спекулянтів.
4. Первинні спадні тренди складаються з трьох рухів вниз. Перший рух

© М.А. Коляденко, 2013

обумовлений розумінням перекупленості акцій. Другий рух вниз – результат паніки серед тих, хто прагне вийти з ринку. Останній ціновий рух акцій пов'язаний з масовими банкрутствами та терміновою потребою у грошових коштах.

5. Будь-який рух індексу повинен пов'язуватись з рухом іншого. Будь-який важливий сигнал до підвищення або пониження курсу на ринку повинен підтвердитись у значеннях декількох індексів фондового ринку.
6. Об'єм торгів акціями повинен підтверджувати характер тенденції. Доу вважав об'єм торгів виключно важливим чинником для підтвердження сигналів, отриманих на цінових графіках. При цьому, важливі ціни закриття індексів – цінові рухи протягом дня не беруться до уваги.
7. Тенденція первинного тренду вважається дійсною, доки сигнал про його зміну не буде підтверджений розворотом індексів на об'ємі. З цього випливає, що ринкова тенденція, яка почала рух цін акцій на ринку, має схильність зберігатися.

Теоретична основа **хвильової теорії**, що зайняла особливе місце в розробці теорії циклічності, належить російському вченому Н.Д.Кондратьєву. Його дослідження реалізовані на статистичній базі економік Англії, Франції і США за період 100-150 років через аналіз ряду економічних показників, завдяки чому виник багатофакторний аналіз економічного зростання. У результаті досліджень, Н.Д.Кондратьєв виділив три великих цикли: І-й цикл з 1787 по 1814 р. – підвищувальна хвиля, і з 1814 по 1851 р. – знижувальна хвиля; ІІ-й цикл з 1844 по 1875 р. – підвищувальна хвиля, і з 1870 по 1896 р. – знижувальна хвиля; ІІІ-й цикл з 1896 по 1920 р. – підвищувальна хвиля [2].

У подальшому, американський дослідник Еліот Р. Н., у середині 30-х рр. зробив певне припущення, що фондовий ринок має в основі ритм, який можна назвати "хвилевим принципом" (пізніше автор замінив назву на "Закон природи"). Наведений ритм визначався серією хвиль за напрямком основного тренду, що, з використанням певного математичного апарату, можна було завжди навести як серію дрібніших хвиль, та подовжити таку дискретизацію до більш дрібних хвиль на основі певних емпіричних правил.

У сучасному вигляді, хвильова теорія Еліота – один з найбільш відомих і складних методів технічного аналізу, який до того ж найбільш спірний у своїй інтерпретації. За час свого існування дана теорія набула значної кількості доопрацювань та доповнень, що були зроблені Робертом Пректером, Білом Вільямсом, Гленом Ніллом, іншими [3].

Будучи інструментом майбутньої зміни біржових цін, хвилевий принцип не є лише інструментом прогнозування, але й детальним описом поведінки ринків. Характеристики ринку, що отримуються таким чином надають значну кількість інформації про положення ринку всередині тенденції і, таким чином, про його ймовірний подальший шлях [4].

Пізніше Еліот встановив, що його 5-3 хвилеві структури, які так часто зустрічаються на практиці, мають тісний внутрішній зв'язок з послідовністю Фібоначчі [5].

Серед різноманітних індикаторів технічного аналізу цінних паперів, спектр яких постійно розширюється, індикатор **52-week high** (момент, коли акція досягає найвищої ціни за останній рік) вважається одним з найсильніших, практична цінність якого підтверджується з року в рік. Нагадаємо, що технічний аналіз заснований на стійких шаблонах поведінки людини в певних ситуаціях. При чому людський натовп за певних умов схильний діяти повністю автоматично та передбачувано, не зважаючи на інтелектуальний розвиток окремих індивідів. У критичних ситуаціях поведінка людини цілком підкоряється підсвідомим інстинктам, за які відповідають незмінні архаїчні структури мозку – ця теза знайшла своє підтвердження в роботах таких психоаналітиків як Зігмунд Фрейд та Густав Юнг.

Серед найбільш вагомих причин, які лежать в основі сильного імпульсу ціни фінансового активу вгору відразу після досягнення нового річного максимуму, можна виділити наступні:

- Всі інвестори, які володіють акціями компанії, отримують прибуток, адже поточна ціна активу однозначно вища, ніж початкова. Ситуація влаштовує всіх акціонерів, тому бажаючих продавати акції стає менше.
- З іншого боку, всі спекулянти, які грають на пониження курсу за допомогою коротких продажів, отримують збитки. І виникає цілком природна реакція –

покрити програшні позиції, тобто купити акції.

- Дуже часто причиною виходу ціни акції з річного коридору стає деяка позитивна новина стосовно діяльності компанії. Тому до числа покупців приєднуються фундаментальні інвестори та інституційні фонди.
- В акції відкривається теоретично необмежений потенціал росту, адже всі технічні лінії спротиву вже пройдені, а нові ще не окреслені.

Слід зазначити, що під впливом бурхливого розвитку технологій поводження ціни активу біля нового річного максимуму зазнало деяких видозмін. Раніше ріст ціни відбувався як правило в 3 етапи, які розтягувалися на декілька днів, а то й тижнів. Події могли розгортатися, скажімо, так (див. рис.1):

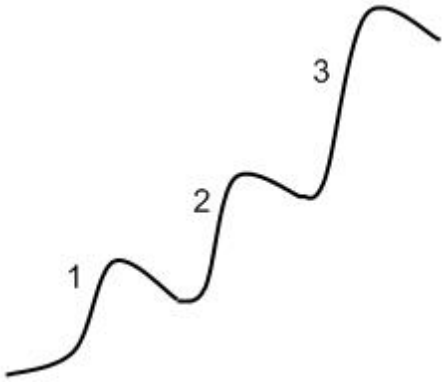


Рис 1. Схема росту ціни на біржах в минулому

1. Ціна деякої акції досягла нового річного максимуму. Професійні трейдери біржової зали, які постійно слідкують за ходом торгів починають скуповувати ці акції і курс йде вгору.

2. Потім інформація про початок росту акцій з вуст у вуста передається фінансистам, які бажають розмістити кошти для довгострокових інвестицій. Вони приєднуються до покупців, адже відкривається гарний потенціал росту активу. Таким чином утворюється друга хвиля росту.

3. Згодом інформація проникає в засоби масової інформації, і про компанію з чудовими перспективами дізнається натовп, який і формує третю хвилю росту та остаточну ціну. Це все супроводжується невеликими корекціями відповідно до хвильової теорії Елліота.

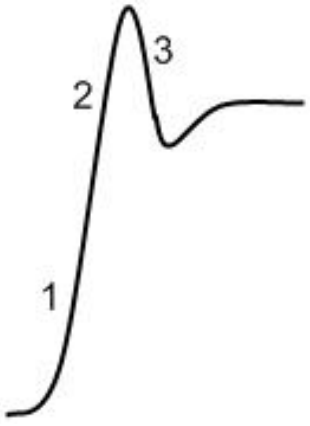


Рис. 2. Схема росту ціни акцій на біржах в наші дні

Коли ж швидкість поширення інформації досягла швидкості світла, усі гравці змогли отримувати інформацію практично одночасно в межах одного дня (див. рис. 2). Тепер ріст акції після проходження точки 52-week high відбувається практично безупинно, однією хвилею (1), при чому він включає і спекулятивну складову (2), яка згодом виливається у різку корекцію (3).

Розглянемо ефективність дії індикатора на сучасному фондовому ринку. В якості прикладу візьмемо акції компанії International Business Machines Corp., які представлені на Нью-Йоркській біржі тікером IBM (див. рис. 3).

Рис. 3. Денний графік компанії IBM

19 липня 2011 року після звіту компанії про прибутки за 2 квартал та прогнозів на поточний рік, акції відкрилися за ціною 178,74$, що на 3,46$ (або на 2%) більше за ціну закриття минулого дня. Відразу виникла аномальна ситуація, адже ціна досягла найвищого значення за останній рік, а разом з тим і свого історичного максимуму. Більшість гравців фондового ринку миттєво зійшлися у думці щодо майбутніх прогнозів, що призвело до невпинного росту акцій протягом усього торгового дня. Таким чином, ціна закриття склала 185,21$, тобто за торгову сесію акції виросли ще на 6,47$ (що дорівнює +3,6%). У загальній сукупності за один день акції компанії виросли на 9,93$, або на 5,7%. Гарний приклад ефективності індикатора.

З використанням програмних систем для безпосередньої та миттєвої торгівлі акціями з'явилася можливість провести комплексну оцінку ефективності технічних індикаторів на практиці. Виникає питання, якщо дійсно існують стійкі шаблони поведінки гравців фінансових ринків за певних умов, то чи можна побудувати таку торгову систему, стратегія якої буде використовувати суто ці шаблони? *Якщо технічний аналіз стверджує, що після досягнення ціною рівня 52-week high ймовірність росту акції більша, ніж падіння, то можна змоделювати систему, яка на цьому знанні здатна показувати високу прибутковість. Якщо ж виявиться, що прибутковість не перевищує середньоринкову, то можна стверджувати про спростування аксіом технічного аналізу та досягнення ринком найсильнішої форми ефективності.*

Для вирішення цього питання протягом року було проведено аналіз, класифікація та обробка

статистичної інформації про рух цін на вибрані акції. Дослідження проводилось серед акцій з середнім об'ємом торгівлі не менше 1 млн. акцій в день і ціною не менше 10$. За основу бралася прибутковість за один торговий день портфелю цінних паперів, який складався зі 100 акцій кожної компанії, ціна відкриття яких на початку торгової сесії в 9.30 була найвищою за останній рік, тобто задовольняла індикатор 52-week high. Збір інформації проводився кожного робочого дня з грудня 2009р. по листопад 2010р. Дані збиралися та оброблялися в описаній нижче послідовності.

Спочатку відбиралися акції, ціна яких протягом торгового дня показували новий річний максимум. Таким чином за рік було відслідковано поведінку 14 933 акцій. Інформація кожного дня зберігалася у наступному форматі (наприклад за 22.04.2010, див. рис. 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	No.	Ticker	52-Week High	Price	Change	Change from Open		Open	NYH Price		Diff	In Day
2	1	A	-0,08%	36,44	0,86%	1,79%		35,8	36,47		-0,67	0,64
3	2	AAPL	2,39%	266,47	2,80%	3,19%		258,23	260,25		-2,02	8,24
4	3	ABC	2,68%	31,41	3,46%	0,38%		31,29	30,59		0,7	0,12
5	4	ADS	6,40%	73,51	7,77%	9,10%		67,38	69,09		-1,71	6,13
6	5	ADSK	3,51%	33,64	3,67%	4,15%		32,3	32,5		-0,2	1,34
7	6	AIV	2,40%	21,36	4,09%	5,01%		20,34	20,86		-0,52	1,02
8	7	AMP	0,02%	48,58	0,43%	1,34%		47,94	48,57		-0,63	0,64
9	8	AMZN	0,73%	150,09	2,50%	2,10%		147	149		-2	3,09
10	9	ANN	1,59%	23,63	5,73%	6,87%		22,11	23,26		-1,15	1,52
11	10	AON	0,23%	44,26	0,32%	0,80%		43,91	44,16		-0,25	0,35
12	11	ARMH	1,94%	12,08	4,95%	3,78%		11,64	11,85		-0,21	0,44
13	12	ARO	2,62%	32,08	3,75%	4,63%		30,66	31,26		-0,6	1,42
14	13	AVB	2,04%	99,05	3,34%	4,06%		95,19	97,07		-1,88	3,86
15	14	AXP	0,19%	46,77	1,70%	2,43%		45,66	46,68		-1,02	1,11

Рис. 4. Структура даних акцій з індикатором 52-week high

Потім серед усіх цих акцій відбувається відбір таких, у яких ціна відкриття перевищувала або дорівнювала новому річному максимуму, тобто значення Diff > = 0. За вказаний рік було проаналізовано 3 616 таких акцій. Дані кожного дня зберігалися у такому форматі (наприклад за 22.04.2010, див. рис. 5):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	No.	Ticker	52-Week High	Price	Change	Change from Open		YestClose	Open	NYH Price	Open / YestClose		Diff	Profit	BP	
2	1	ABC	2,68%	31,41	3,46%	0,38%		30,36	31,29	30,59	3,07		0,12	11,89	3129,11	
3	2	DCTH	17,55%	12,93	19,17%	-9,26%		10,85	14,25	11	31,33		-1,32	-131,95	1424,95	
4	3	DHR	2,55%	84,39	3,58%	1,21%		81,47	83,38	82,29	2,34		1,01	100,89	8338,11	
5	4	GNTX	0,09%	22,39	0,67%	-1,58%		22,24	22,75	22,37	2,29		-0,36	-35,94	2274,94	
6	5	HSY	6,30%	48,08	7,23%	4,93%		44,84	45,82	45,23	2,19		2,26	225,9	4582,1	
7	6	LEG	2,50%	23,8	2,85%	0,89%		23,14	23,59	23,22	1,94		0,21	21	2359	
8	7	MAR	6,05%	36,82	6,20%	5,96%		34,67	34,75	34,72	0,23		2,07	207,1	3474,9	
9	8	NFLX	12,51%	100,25	15,26%	10,16%		86,98	91	89,1	4,63		9,25	924,6	9100,4	
10	9	PNC	3,50%	68,82	5,39%	2,95%		65,3	66,85	66,49	2,37		1,97	197,2	6684,8	
11	10	SBUX	5,22%	27,25	7,33%	4,89%		25,39	25,98	25,9	2,33		1,27	127,04	2597,96	
12	11	SNDK	6,75%	42,22	12,32%	6,59%		37,59	39,61	39,55	5,38		2,61	261,03	3960,97	
13	12	STR	7,90%	49,84	8,68%	-1,75%		45,86	50,73	46,19	10,62		-0,89	-88,77	5072,77	
14	13	TTM	0,45%	20,03	0,86%	-0,69%		19,86	20,17	19,94	1,56		-0,14	-13,92	2016,92	
15																
16											Sum		18,06	1806,06	55016,94	3,28
17																%change

Рис. 5. Структура даних акцій з ціною відкриття 52-week high

Кінцеві значення щоденного аналізу вписуються в результуючу таблицю, яка має наступний вигляд (наприклад за квітень 2010р., див. рис. 6):

April						
Date	All NYH	Portfolio	BP	Profit	%	Volume
04/01/2009	139	29	123775.65	749.35	0.61	2900.00
04/05/2009	222	80	371907.59	3016.41	0.81	8000.00
04/06/2009	198	9	36306.59	421.41	1.16	900.00
04/07/2009	108	11	61169.18	-397.18	-0.65	1100.00
04/08/2009	78	7	23684.47	224.53	0.95	700.00
04/09/2009	167	26	108009.70	230.30	0.21	2600.00
04/12/2009	191	69	380583.20	-351.20	-0.09	6900.00
04/13/2009	140	6	17583.89	-202.89	-1.15	600.00
04/14/2009	286	122	641143.38	5882.62	0.92	12200.00
04/15/2009	266	39	154474.23	-693.23	-0.45	3900.00

Рис. 6. Структура таблиці результуючих даних.

Звичайно, розмір задіяних коштів кожного дня різний, все залежить від величини та складу портфелю акцій. Протягом корекції ринку з травня по жовтень 2010р. капіталовкладення скорочувалися, під час же підсилення трендових тенденцій, портфель акцій навпаки збільшувався.

Всього було зведено інформацію за 252 торгових дня. З них у 22 випадках портфель акцій з індикатором 52-week high був порожнім, у 2 випадках дохід дорівнював нулю, 120 днів виявилися прибутковими з середнім прибутком у 506,69 $ і 108 днів виявилися збитковими з середньою величиною втрат у -349,83 $. У прибуткові дні середня вартість портфелю була 78 247 $, а у збиткові – 62 513$. Середня ж відносна прибутковість за день склала 0,65%, а збитки були 0,56% від задіяного капіталу. Таким чином при вкладенні коштів у непорожній портфель акцій з індикатором 52-week high отримуємо можливість отримати прибуток у 506,69$ з ймовірністю 52,17%, збитки у розмірі -349,83$ з ймовірністю 46,96% і залишити капітал без змін з ймовірністю 0,87%. Як бачимо, технічний індикатор 52-week high довів свою ефективність, а принципи технічного аналізу доведені на практиці.

Висновки

В результаті проведеного дослідження розглянуто використання індикатора 52-week high при прогнозуванні ціни акцій, і таким чином, доведено основні принципи технічного аналізу. На основі даної роботи можна розробляти автоматизовані торгові системи управління капіталом, засновані на технічних індикаторах. Також доцільно продовжити дослідження інших технічних індикаторів та окреслити межі технічного аналізу з одного боку, а з іншого спростувати чи підтвердити аргументи теорії випадкових блукань.

Список використаних джерел

1. *John J. Murphy*. Technical Analysis of the Futures Markets: A Comprehensive Guide to Trading Methods and Applications / John J. Murphy. – Moscow: Sokol, 1996. – P. 31-32. (in Russian)
2. *Fomina A. V.* Kondratiev cycles in the Russian economy: monograph / A.V.Fomina. – Moscow: International N. D. Kondratiev Foundation, 2005. – 146 p. (in Russian).
3. *Robert W. Colby*. The Encyclopedia of Technical Market Indicators / Robert W. Colby, Thomas A. Meyers. – Moscow: Alpina Publisher, 1998. – 581 p., *Steven B. Achelis*. Technical Analysis from A to Z / Steven B. Achelis. – Moscow: Diagramma, 1999. – 376 p., *Jack D. Schwager*. Technical Analysis. Full edition. / Jack D. Schwager. – Moscow: Alpina Publisher, 2001. – 768 p. (in Russian).
4. *Robert R. Prechter*. Elliott Wave Principle: Key to Market Behavior / Robert R. Prechter, A. J. Frost. – Moscow.: Alpina Publisher, 2001. – 268p. (in Russian).
5. *Charles Miller*. Elliott wave and theory of cycles. – E-resource (in Russian): http://download.virtuosclub.ru/lib/volnielyiottayityeoryiyacyiklov3.pdf

Надійшла до редколегії 18.01.12

УДК 519.8

Кондрук Н.Е., к.т.н.

Метод визначення кількісної міри переваги в колективному порядку

Пропонується метод визначення кількісної міри переваги кандидатів в колективному порядку, що побудований на основі методів голосування із використанням теорії нечітких множин

Ключові слова: методи голосування, колективний порядок, кандидати голосування.

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46,
e-mail: kondrukne@gmail.com

N. E. Kondruk, Ph.D. (Technical sciences)

A method for determining the quantitative measure of advantage of collective order

A method for determining the quantitative measure of candidates advantage of collective order based on the methods of voting & theory of fuzzy sets is proposed

Key Words: methods of voting, collective order, candidates voting.

National University of Uzhgorod, 88000,
Uzhgorod, Pidgirna str., 46,
e-mail: kondrukne@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

В наші дні більшість суспільних рішень приймається на основі голосування. Голосуванням вибираються президенти, депутати, приймаються закони. Таким чином, найбільш розповсюдженим способом прийняття колективного рішення є голосування, що, в свою чергу, і визначає актуальність вибраної теми дослідження.

Хоча практика голосування становить тисячі років, фактичне їх вивчення почалось близько 200 років тому в роботах Борда та Кондорсе[1-3].

Принцип, що лежить в основі методу Кондорсе полягає в наступному: кандидат, який виграє в попарних порівняннях з усіма іншими кандидатами є переможцем на виборах. Принцип Кондорсе пропонувався як раціональний та демократичний. Однак невдовзі було виявлено «парадокси», зокрема відсутності переможця, нетранзитивності цього методу голосування тощо [4]. Узагальненими правилами типу Кондорсе є правила Компленда та Сімпсона. При цьому, якщо існує переможець Кондорсе, то він буде переможцем і Компленда, і Сімпсона, крім того, на відміну від правила Кондорсе, дані методи завжди визначають переможця [1].

Згідно методу Борда, результати голосування виражаються у вигляді кількості очок, які набрані кожним із кандидатів. Для цього, на думку Борда, кожний виборець має впорядкувати по перевазі всіх кандидатів, що включені в бюлетень, приписати їм рангові місця із спадаючими вагами, тобто приписати ранг 0 найгіршому, 1 – наступному по перевазі і т.д. Колективний вибір Борда запропонував визначати не за кількістю отриманих голосів, а за сумою рангових місць, які приписані кандидату всіма виборцями [1-3].

В середині 20-го століття були винайдені багато десятків процедур голосування, але дослідження Борда та Кондорсе залишились неперевершеними взірцями. І лише в 1951 році американський вчений К.Ерроу запропонував формальну модель колективного прийняття рішень, яка дозволила їх досліджувати з аксіоматичної точки зору [4].

За останні роки багатьма вченими вивчались парадокси голосування, будувались нові способи «розумних» процедур голосування, але опубліковані до цього часу результати показують, що ні одна із відомих процедур голосування не задовольняє більшості введеним критеріям (аксіомам), і при виборі процедури голосування виникає та ж проблема, з якою на початку зустрічається дослідник в багато-критеріальній оптимізації.

Незалежно від вибраного правила голосування перемога кандидата з розривом в 99 % голосів більш переконлива, чим перемога з розривом в 1 % голосів виборців; «абсолютна» (100 %) ж перемога є беззаперечною.

© Н. Е. Кондрук, 2013

Дане дослідження і є направленим на розв'язання вищеозначеної проблеми – визначення кількісної міри переваги кандидатів в колективному порядку, тобто визначення «якості» отриманої перемоги.

Постановка задачі

Нехай розв'язок «задачі голосування» записується у вигляді колективного порядку строгим ранжуванням. У випадку рівноправності кандидатів (у випадку переваг $a \succ b$ (одного виборця) і $b \succ a$ (в іншого), звичайно, буде $a = b$ (кандидати a і b «ділять» місце)) можна, наприклад, скористатись наперед встановленим правилом вибору (зокрема і лексикографічним).

Існують два підходи побудови колективного порядку.

Суть першого підходу полягає в наступному: на множині індивідуальних ранжувань задається відстань і колективний порядок визначається як таке ранжування, відстань якого до індивідуальних ранжувань за певним критерієм (наприклад, Кемені-Снелла) мінімальна [5,6].

Другий підхід заснований на тому, що переможець виключається з профілю, в отриманому профілі знову визначається переможець, який займає друге місце в колективному порядку і т.д., тобто маємо деякий покроковий процес виключення, де кількість кроків на одиницю менше кількості кандидатів. Наприклад, у вигляді послідовності переваги кандидатів: $a \succ b \succ c \succ d$, де кандидат a – переможець в множині кандидатів $\{a, b, c, d\}$, b – переможець в множині $\{b, c, d\}$ і т.д. [1,2].

Ставиться задача визначення кількісної міри переваги кожного кандидата-переможця над кандидатами у відповідній йому множині в залежності від колективного порядку.

Для розв'язання поставленої задачі будуть використані терміни і методи теорії нечітких множин, згідно яких мірою належності деякого елемента до такої множини визначається числом із одиничного відрізку $[0,1]$. Тобто нечітка множина C на деякій універсальній множині X, являє собою множину пар $\{(x, \mu_C(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_C : X \to [0,1]$. Значення μ_C для конкретного значення x називається мірою належності цього елементу множині C [7].

Нехай $X = \{x_1, \ldots, x_P\}$ – множина всіх кандидатів, P – загальна кількість кандидатів деякого голосування. В якості універсальної множини X доцільно взяти множину всіх кандидатів, але оскільки вона змінюватиметься відповідно до профілю голосування при виключенні переможця на кожному кроці побудови колективного порядку, то будемо розглядати не одну множину X, а їх послідовність $X_i \subset X_{i+1}$, $X_1 = X$, $i = \overline{1, P-1}$, де кожна наступна множина X_i не буде містити переможця попереднього кроку.

Під терміном «абсолютний переможець» будемо розуміти кандидата, за якого проголосували всі виборці, тобто він займає перше місце в індивідуальних порядках всіх виборців.

Опишемо нечіткі множини C_i={кандидат x – «абсолютний переможець» в множині кандидатів X_i}, де $x \in X_i \subset X$, $i = \overline{1, P-1}$. Тобто нечітка множина C_i буде визначатись парами $(x, \mu_{C_i}(x))$, де x є кандидатом множини X_i, а величина $\mu_{C_i}(x)$ – міра «близькості» даного кандидата до абсолютного переможця в кожній множині X_i, $i = \overline{1, P-1}$. на кожному кроці побудови колективного порядку буде відповідати своя нечітка множина C_i.

Розв'язок поставленої задачі будемо шукати, використовуючи процедуру побудови функції належності $\mu_{C_i}(x)$ кандидатів $x \in X_i$ до нечітких множин C_i для кожного кроку $i = \overline{1, P-1}$ визначення колективного порядку.

Загальний алгоритм розв'язання поставленої задачі

Розглянемо загальну процедуру визначення кількісної міри переваги кандидатів в колективному порядку μ^i, $i = \overline{1, P-1}$.Для цього припустимо, що деяким способом вже побудовані функції належності $\mu_{C_i}(x)$ кандидатів $x \in X_i$ нечітким множинам C_i.

Крок 1. Для множини кандидатів $X_1 = X$ знаходимо $\mu^1 = \max\limits_{x \in X_1} \mu_{C_1}(x)$. Позначимо x^1

кандидата, якому відповідає знайдене значення μ^1, а $\widetilde{\mu}^1 = \dfrac{\mu^1}{\sum\limits_{x\in X_1}\mu_{C_1}(x)}$.

Крок 2. Для множини $X_2 = X_1 / \{x^1\}$ знаходимо значення $\mu^2 = \max\limits_{x\in X_2}\mu_{C_2}(x)$ і відповідного йому кандидата x^2, $\widetilde{\mu}^2 = \dfrac{\mu^2}{\sum\limits_{x\in X_2}\mu_{C_2}(x)}$.

Крок i. Знаходимо значення $\mu^i = \max\limits_{x\in X_i}\mu_{C_i}(x)$, де $X_i = X_{i-1} / \{x^{i-1}\}$ і фіксуємо відповідного кандидата x^i, де $\widetilde{\mu}^i = \dfrac{\mu^i}{\sum\limits_{x\in X_i}\mu_{C_i}(x)}$.

Значення $\widetilde{\mu}^i$ будемо називати відносною мірою переваги кандидата x^i над іншими кандидатами множини X_i.

Після пророблених $P-1$ ітерацій нормуємо значення: $\mu^i = \dfrac{\widetilde{\mu}^i}{\sum\limits_{i=1}^{P-1}\widetilde{\mu}^i}$, $i = \overline{1, P-1}$.

Отримані значення μ^i, $i = \overline{1, P-1}$, і будуть визначати відносну міру переваги кандидатів-переможців в колективному порядку.

Таким чином, розв'язання поставленої задачі представляється в наступному вигляді: $x^1 \overset{\mu^1}{\succ} x^2 \overset{\mu^2}{\succ} x^3 \overset{\mu^3}{\succ} \cdots$, що означає, що μ^1 – відносна міра переваги кандидата x^1 відносно інших $P-1$ кандидатів, які знаходяться «лівіше» в знайденому колективному порядку, μ^2 – міра переваги кандидата x^2 відносно кандидатів із множини $X / \{x^1, x^2\}$), μ^3 – міра переваги кандидата x_3 по відношенню до кандидатів множини $X / \{x^1, x^2, x^3\}$ і т.д.

Очевидно, що побудований алгоритм для знаходження значень μ^i, $i = \overline{1, P-1}$, передбачає виконання умови нормування: $\sum\limits_{i=1}^{P-1}\mu_i = 1$.

Побудова функцій належності для деяких правил голосування

Як відомо, класичні методи голосування можна умовно поділити на ті, що засновані на підрахунку очок і методи типу Кондорсе.

До методів підрахунку очок відносяться методи відносної більшості, метод альтернативних голосів, метод Борда та ін.

Розглянемо побудову функцій належності $\mu_{C_i}(x)$ для цього класу методів голосування на прикладах методів голосування відносної більшості та Борда.

Для методу відносної більшості функції $\mu_{C_i}(x)$ визначаються як відношення кількості голосів виборців, отриманих визначеним кандидатом x на i-му кроці до кількості всіх виборців голосування: $\mu_{C_i}(x) = \dfrac{n_x^i}{M}$, де $x \in X_i$, $i = \overline{1, P-1}$, n_x^i – кількість голосів отриманих кандидатом x на i-му кроці, M – загальна кількість виборців. Вибір цієї залежності визначається тим, що «абсолютний переможець» i-го кроку колективного порядку за даним правилом буде мати M очок.

Для методу Борда кількість очок, набрана «абсолютним переможцем» i-го кроку буде рівна величині $\alpha_i = M(P-(i-2))$. Таким чином, функція належності кандидата $x \in X_i$ до нечіткої множини C_i, що визначає міру його «близькості» до «абсолютного переможця» i-го кроку буде мати наступний вигляд: $\mu_{C_i}(x) = \dfrac{B_x^i}{M \cdot \alpha_i}$, де $x \in X_i$, $i = \overline{1, P-1}$, B_x^i - загальна кількість очок кандидата x, підрахована за правилом Борда на i-му кроці.

Розглянемо побудову функцій належності $\mu_{C_i}(x)$ для методів Сімпсона та Компленда, які є методами типу Кондорсе.

Функцію належності кандидата $x \in X_i$ нечіткій множині C_i для методу Сімпсона, можна визначити як: $\mu_{C_i}(x) = \dfrac{S^i(x)}{M}$, де $S^i(x)$ – оцінка Сімпсона для кандидата $x \in X_i$ на i-му кроці побудови колективного порядку, M – загальна кількість виборців (оцінка для

«абсолютного переможця» за Сімпсоном буде рівна M). Нагадаємо, що оцінкою Сімпсона для кандидата $x \in X_i$ називається число $S^i(x) = \min\limits_{x \neq z, z \in X_i} S^i(x,z)$, причому $S^i(x,z)$ – кількість голосів виборців, для яких кандидат x переважніше кандидата z .

Оцінкою Компленда для кандидата $x \in X_i$ називається число $K^i(x) = \sum\limits_{z \in X_i, x \neq z} K(x,z)$, де

$$K(x,z) = \begin{cases} 1, & x \succ z \\ 0, & x = z \\ -1, & z \succ x \end{cases}.$$

Таким чином, оцінка Компленда «абсолютного переможця» множини кандидатів X_i, $i = \overline{1, P-1}$, рівна $\beta_i = P - i$. Тоді функцію належності кандидата $x \in X_i$ нечіткій множині C_i для методу Компленда, можна визначити як $\mu_{C_i}(x) = \dfrac{\beta_i + K^i(x)}{2 \cdot \beta_i}$.

Обчислювальний експеримент

Для проведення експериментального дослідження запропонованого методу був розроблений в середовищі Delphi 6.0 програмний комплекс, що дозволяє розв'язувати задачі визначення не тільки колективного порядку за методами Сімпсона, Компленда, Борда та відносної більшості, а й визначати кількісну міру переваги кандидатів голосування в колективному порядку. При цьому розроблено простий та зручний інтерфейс для користувача. Передбачена можливість зберегти отримані результати роботи програмного забезпечення в текстовий файл.

Під час обчислювального експерименту було розв'язано ряд реальних задач (вибір старости групи, кращого викладача факультету, представника групи для виступу на конференцію, тощо) голосування в яких брали участь від 14 до 20 виборців та 3-5 кандидатів.

Дане дослідження показало ефективність використання представленого методу для розв'язання практичних задач голосування.

Висновки

Таким чином, в даній роботі поставлено задачу визначення кількісної міри переваги кандидатів колективного порядку; розроблено метод розв'язання поставленої проблеми для різних методів голосування, який заснований на теорії нечітких множин; представлено його конкретизацію для методів голосування Компленда, Сімпсона, відносної більшості та Борда.

Список використаних джерел

1. *Voloshin O.F.* Models and methods of making decision: a train aid is for the students of higher educational establishments / second edition / O.F. Voloshin, S.O. Maschenko – Kiev: Publisher center the «Kiev university», 2010. – 336 p. (in Ukrainian)
2. *Voloshin O.F.* Methodical recommendations to implementation of practical and laboratory works from the decision making theory / O.F. Voloshin, S.O. Maschenko : Kiev, 2001. – 46 p. (in Ukrainian)
3. *Larichev O.I.* Theory and methods of making decision and also Chronicle of events in the Magic countries: Textbook. A publ. is second / O.I. Larichev – M.: Logos, 2002. – 392 p. (in Russian)
4. *Zarichniy M. M.* Elements of the social choice theory / Zarichniy M., Dzyubko I. : Lviv, 2001. – 160 p. (in Russian)
5. *Antosyak P.P.* Localization of change intervals of objects optimum grades in the task Kemeni-Snella median finding / P.P. Antosyak // Announcer of the Kiev national university of the Tarasa Shevchenko name. Series: Cybernetics, 2008. – №8. – P. 4–7. (in Ukrainian)
6. *Voloshin A.F.* The collective social-meaningful decisions making problems / A.F. Voloshin, P.P. Antosyak of // Trudy XII-th international conference «Knowledge-dialog-decision», V. 1, Sofia. – 2006. – P. 153-157. (in Russian)
7. *Orlovskiy S.A.* Problems of making decision at fuzzy initial information. / S.A. Orlovskiy – Moscow: Science. Main release of phys.-math. literature, 1981. – 208 p. (in Russian)

Надійшла до редакції 12.03.13

УДК 519.718.2

Королік Р.П., асп.,
Пічкур В.В., д.ф.м.н.,доц.

Оцінка множини фазових обмежень множинної дискретної системи

У роботі одержано оптимальні оцінки множини фазових обмежень в задачі практичної стійкості дискретної множинної системи. Для випадку лінійної динамічної складової обгрунтовано теореми про оптимальні оцінки при конкретних фазових обмеженнях.

Ключові слова: дискретна система, множинна система, фазові обмеження.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: korolik@email.ua

R. P. Korolik*, grad. student
Pichkur V.V. doctor of science

Estimations of a set of phase constraints of discrete set systems

This paper is focused on the set of initial phase constraints in the problem of practical stability of discrete multiple systems. For the case of linear dynamic component is focused on theorems on optimal estimation at specific phase constrains.

Key Words: discrete set system, maximum set, phases constraints.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: korolik@email.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Задачі дослідження якісної поведінки дискретних систем набули широкого розповсюдження у науковій літературі. Це пов'язано з суттєвим прикладним значенням співвідношень такого класу. Так, ряд фізичних, біологічних та соціальних процесів описуються дискретними моделями. Крім того, в зв'язку з широким застосуванням обчислювальної техніки, актуальним є дослідження різницевих співвідношень, що застосовуються при побудові числових методів для різних класів задач. До аналізу дискретних систем застосовуються методи теорії стійкості [2, 6, 8]. В працях [2, 5] отримані оцінки і властивості максимальних множин практичної стійкості дискретних систем.

У випадку, якщо при дослідженні динамічної системи потрібно враховувати її просторову конфігурацію, одержуємо множинну динамічну систему. До множинної динамічної системи приходять також в задачі лінійної фільтрації, де динамічна компонента є фільтром, а множинна компонента є інформаційною областю [7]. Задача практичної стійкості множинною динамічною системою у неперервному випадку досліджувалась в [1].

В роботі одержано оптимальні оцінки множини фазових обмежень в задачі практичної стійкості дискретної множинної системи. Результати мають алгоритмічну спрямованість.

Будемо використовувати такі позначення: $R^n -$ евклідовий $n-$ вимірний простір, $\langle\cdot,\cdot\rangle -$ скалярний добуток в R^n, який породжує евклідову норму $\|\cdot\|$, $\operatorname{int} A$, $\partial A -$ сукупність внутрішніх точок і границя множини $A \subset R^n$ відповідно, $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\} -$ одинична сфера, $K_r(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| \le r\} -$ замкнута куля радіусу r з центром в точці $a \in R^n$, $c(A,\psi) = \sup\limits_{x \in A} \langle x, \psi \rangle$ - опорна функція множини $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$, $comp(R^n)$ - сукупність всіх непорожніх компактів з R^n, $conv(R^n)$ - множина всіх непорожніх і опуклих компактів з R^n, $[0, N] = \{0,1,...,N\} -$ множина індексів.

Основні означення і постановка задачі.

Розглянемо систему вигляду

$$x(k+1) = f_k(x(k)), \quad (1)$$

$$B_k : R^m \to comp(R^n), \quad (2)$$

де $x \in R^m$, $f_k : D \to D \subset R^m$ - m - вимірна функція в області D, $\Phi(k) \in comp(R^n)$ - множина фазових обмежень. Відображення $B_k : R^m \to comp(R^n)$ - неперервне в області D [1, 4].

© Р.П. Королік, В.В. Пічкур, 2013

Означення 1. Система (1), (2) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$-стійкою, якщо $B_k(x(k, x_0)) \subset \Phi(k)$ для всіх $x_0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 2. Сукупність G_* з R^m називається максимальною за включенням множиною практичної стійкості системи (1), (2) при фазових обмеженнях $\Phi(k)$ на інтервалі $[0, N]$, якщо система (1), (2) є $\{G_*, \Phi(k), 0, N\}$-стійкою і $G_0 \subseteq G_*$ для всіх множин G_0, для яких має місце $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ - стійкість системи (1), (2).

Нехай заданий клас множин

$$W = \{\Phi(k, p): p \to \Phi(k, p), \Phi(k, p) \in comp(R^m), p \geq 0\}.$$

Припустимо, що відображення $\Phi: p \to \Phi(k, p)$, $p \geq 0$ є неперервним і задовольняє такі умови:

$$\Phi(0) \subset \operatorname{int} G_*; \ \Phi(k, p) \subset \operatorname{int} \Phi(k, q), \ p < q.$$

Задача оцінки фазових обмежень $\Phi(k, p)$ максимальної за включенням множини практичної стійкості системи (1)-(2) у класі W полягає у знаходженні всіх значень параметра $p > 0$, при яких наявна $\{G_0, \Phi(k, p), 0, N\}$ - стійкість нульового розв'язку системи (1), (2).

Позначимо $G_*(p)$- оптимальна за включенням множина практичної стійкості при фазових обмеженнях $\Phi(k, p)$, $k \in [0, N]$.

Означення 3. Оптимальною оцінкою практичної стійкості для фазових обмежень системи (1) ,(2) у структурній формі W називається значення параметра

$$p_* = \max\{p \geq 0 : G_0 \subseteq G_*(p)\}.$$

За вищевказаних умов оптимальна оцінка існує та єдина, при цьому для неї виконується

$$\partial G_0 \cap \partial G_*(p) \neq \varnothing \ \text{[1]}.$$

Критерії оптимальної оцінки фазових обмежень

Розглянемо дискретну множинну систему вигляду

$$x(k+1) = A(k)x(k), \tag{3}$$

$$B_k: R^m \to conv(R^n), \tag{4}$$

де $A(k)$ - невироджена матриця розмірності $m \times m$ $k \in [0, N-1]$, $\Phi(k, p) \in conv(R^n)$ - множина фазових обмежень, B_k - неперервні відображення для яких виконується *умова поділу*

$$c(B_k(x), \psi) = \langle x, m_k(\psi) \rangle + n_k(\psi) \tag{5}$$

де $m_k(\psi) = c(B_k(1), \psi) - c(B_k(0), \psi) > 0$, $n_k(\psi) = c(B_k(0), \psi) > 0$, $m \in C(R^n, R^m)$, $n \in C(R^n)$, $\|\psi\| \leq \mu \|m(\psi)\|$, $\mu > 0$.

Запишемо загальний розв'язок системи (3), (4) у вигляді

$$x(k) = \Theta(k)x_0, \ k \in [1, N],$$

де $\Theta(k, s) = A_{k-1} \ldots . A_s = \prod_{s \leq i \leq k-1} A_i$ - невироджена матриця, $\Theta(k) = \Theta(k, 0)$, $s \in [0, k]$, $k \in [1, N]$, $\Theta(0)$ - одинична матриця.

Множину G_* можна подати у вигляді:

$$G_* = \bigcup_{e \in S} \{x = ke : k \in [0, d_*(e)]\}$$

де $d_*(e, p) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \dfrac{c(\Phi(k, p), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle}$ - функція деформації множини G_*.

Позначимо $d_0(e)$ функцію деформації множини G_0. Тоді $\forall \ e \in S$ p_* є оптимальним значенням параметра p, якщо виконується

$$d_0(e) \leq d_*(e, p_*) \tag{6}$$

та $\exists \ \bar{e} \in S$, для якого має місце

$$d_0(\bar{e}) = d_*(\bar{e}, p_*). \tag{7}$$

Звідси випливає, що

$$\min_{e \in S} (d_*(\bar{e}, p_*) - d_0(\bar{e})) = 0.$$

Загальний випадок оптимальних оцінок фазових обмежень.

Нехай заданий клас множин

$$W = \{\Phi(k, p): p \to \Phi(k, p), \Phi(k, p) \in comp(R^m), p \geq 0\}.$$

Відображення $\Phi: p \to \Phi(k, p)$, $p \geq 0$ - неперервне та задовольняє такі умови:

$$\Phi(0) \subset \operatorname{int} G_*; \ \Phi(k, p) \subset \operatorname{int} \Phi(k, q), \ p < q.$$

Позначимо:

$d_0(e)$ - функцію деформації множин G_0;

$d_*(e, p)$ - функцію деформації множини G_*,

Представимо вираз (7) в такому вигляді

$$d_0(e) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\substack{\psi \in S \\ e \in S}} \frac{c(\Phi(k, p), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle},$$

$k \in [0, N]$.

Припустимо, що справджується умова поділу:

$$\Phi(k, p) = p\Phi_1(k) + \Phi_2(k), \ k \in [0, N],$$

де $\Phi_1(k), \Phi_2(k) \in conv(R^n)$.

Звідси отримуємо опорну функцію для фазових обмежень

$$c(\Phi(k,p),\psi)=pc(\Phi_1(k),\psi)+c(\Phi_2(k),\psi), \quad (8)$$

$k\in[0,N],\ \psi\in S$.

Зі співвідношень (6), (7) випливає, що $\forall\ e\in S$

$$d_0(e)\le \min_{k\in[0,N]}\min_{\psi\in S}\frac{c(\Phi(k,p),\psi)-n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle}.$$

При цьому $\exists\,\bar e\in S$ таке, що

$$d_0(\bar e)=\min_{k\in[0,N]}\min_{\psi\in S}\frac{c(\Phi(k,p),\psi)-n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle},\ \bar e=e.$$

Це означає, що $\forall\ e\in S$, $\forall\ k\in[0,N]$, $\forall\ \psi\in S$ використовуючи вираз (8) можемо записати наступне:

$$d_0(e)\le \min_{k\in[0,N]}\min_{\psi\in S}\frac{pc(\Phi_1(k),\psi)+c(\Phi_2(k),\psi)-n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle} \quad (9)$$

При цьому $\exists\,\bar e\in S$, $k\in[0,N]$, $\psi\in S$ таке, що

$$d_0(\bar e)=\min_{k\in[0,N]}\min_{\psi\in S}\frac{pc(\Phi_1(k),\psi)+c(\Phi_2(k),\psi)-n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle}.$$

Звідси зі співвідношення (9) можемо виразити *p*:

$$pc(\Phi_1(k),\psi)+c(\Phi_2(k),\psi)-n_k(\psi)\ge$$
$$\ge\max_{k\in[0,N]}\max_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}} d_0(e)\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle$$

$$p\ge\max_{k\in[0,N]}\max_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}}\frac{d_0(e)\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle-c(\Phi_2(k),\psi)+n_k(\psi)}{c(\Phi_1(k),\psi)} \quad (10)$$

Зі співвідношення (7) випливає, що в (10) для оптимальної оцінки досягається рівність.

Отже доведена така теорема.

Теорема 1. Оптимальна оцінка фазових обмежень в класі W має вигляд

$$p=\max_{k\in[0,N]}\max_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}}\frac{d_0(e)\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle-c(\Phi_2(k),\psi)+n_k(\psi)}{c(\Phi_1(k),\psi)}.$$

Оптимальна оцінка множини фазових обмежень у вигляді кулі.

Нехай

$$W_1=\{\Phi(k,p)=K_p(0):p\ge0\},$$

множинна компонента

$$B_k(x)=K_{r(k)}(x),$$

$G_0=K_{r(k)}(0),\quad r(k)>p(k)>0,\ k\in[0,N]$.

Оскільки $d_0(e)=r$, то

$$r\le\min_{k\in[0,N]}\min_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}}\frac{p\|\psi\|}{\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle}.$$

Тоді звідси можемо записати

$$p\ge\max_{k\in[0,N]}\max_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}} r(k)\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle.$$

Отже, для оптимальної оцінки фазових обмежень у даному випадку справджується таке співвідношення

$$p\ge p_*=\max_{k\in[0,N]}\max_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}} r(k)\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle.$$

З урахуванням (7) одержуємо

$$p_*=\max_{k\in[0,N]}\max_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}} r(k)\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle=$$
$$=\max_{k\in[0,N]} r(k)\max_{\substack{\psi\in S\\ e\in S}}\langle m_k(\psi),\Theta(k)e\rangle.$$

Оскільки $\max\limits_{\psi\in S}\langle\psi,\Theta(k)e\rangle=\|\Theta(k)e\|$, то

$$p_*=\max_{\substack{k\in[0,N]\\ e\in S}} r(k)\|\Theta(k)e\|.$$

Зі співвідношення Релея [3] випливає, що

$$\max_{e\in S}\|\Theta(k)e\|=\sqrt{\max_{e\in S}\langle Q(k)e,e\rangle}=\sqrt{\lambda_{\max}(Q(k))}.$$

Тут $\lambda_{\max}(Q(k))$ - максимальне власне число симетричної додатновизначеної матриці $Q(k)$ розмірності $m\times m$. У такий спосіб доведено таку теорему.

Теорема 2. Оптимальна оцінка фазових обмежень в класі W_1 має вигляд

$$p_*=\max_{k\in[0,N]} r(k)\sqrt{\lambda_{\max}(Q(k))}.$$

Оптимальна оцінка фазових обмежень у формі еліпсоїда.

Нехай

$$W_2=\{\Phi(k,p)=E_p(0,Q(k)):p\ge0\},$$

де $E_p(0,Q)=\{x\in R^m:\langle Qx,x\rangle\le p^2\}$ є еліпсоїдом з центром в точці 0, множинна компонента

$$B_k(x)=K_{p(k)}(x),$$

$G_0=E_r(0,Q),\quad r(k)>p(k)>0,\ k\in[0,N]$,

$Q(k)$ - додатновизначена симетрична матриця розмірності $m\times m$, $k\in[0,N]$.

Аналогічно, як і у попередньому випадку, запишемо

$$r\le\min_{k\in[0,N]}\min_{\psi\in S}\frac{p\sqrt{\langle Q^{-1}(k)\psi,\psi\rangle}}{\langle\psi,\Theta(k)e\rangle},\ \forall e\in E_1(0,Q)$$

Тоді звідси виразимо *p* і отримуємо

$$p\ge\max_{k\in[0,N]}\max_{\psi\in S}\frac{r(k)\langle\psi,\Theta(k)e\rangle}{\sqrt{\langle Q^{-1}(k)\psi,\psi\rangle}},$$
$$k\in[0,N],\ \forall e\in E_1(0,Q).$$

Даний вираз запишемо у такому вигляді

$$p\ge\max_{k\in[0,N]}\max_{\langle Q^{-1}(k)\psi,\psi\rangle=1}\langle\psi,\Theta(k)e\rangle,$$

$k \in [0,N],\ \forall e \in E_1(0,Q).$

Спростимо останню рівність, розв'яжемо задачу на умовний екстремум

$$\max_{e \in E_1(0,Q)} \langle \psi, \Theta(k) e \rangle .$$

Для цього введемо заміну змінних $z = Q^{1/2} e$. Оскільки $e \in E_1(0,Q)$, то вектор $z \in K_1(0)$. Тоді $e = Rz$, де $R = Q^{-1/2}$. Так як матриця Q є симетричною і додатновизначеною, то можна ввести $Q^{1/2}$, що буде симметричною додатновизначеною матрицею розмірності $m \times m$. Звідси випливає, що $\max_{e \in E_1(0,Q)} \langle \psi, \Theta(k) e \rangle =$

$$\max_{z \in K_1(0)} \langle \psi, \Theta(k) R z \rangle = \left\| R^* Q^* (k) \psi \right\| = \sqrt{\langle M(k)\psi, \psi \rangle} .$$

Тут $M(k) = \Theta(k) R R^* \Theta^*(k)$. Оскільки $RR^* = Q^{-1}$, $M(k) = \Theta(k) Q^{-1} \Theta^*(k)$.

Покажемо, що для знаходження матриці $M(k)$ можна записати матричне дискретне рівняння.

Справді,

$$M(k+1) = \Theta(k+1) Q^{-1} \Theta^*(k+1) =$$
$$= A(k) \Theta(k) Q^{-1} \Theta^*(k) A^*(k) = A(k) M(k) A^*(k),$$
$$k = 0,1,...$$

При цьому $M(0) = Q^{-1}$.

Тоді рівність (10) ми запишемо у вигляді

$$p \geq \max_{k \in [0,N]} \max_{\langle Q^{-1}(k)\psi, \psi \rangle = 1} r(k) \sqrt{\langle M(k)\psi, \psi \rangle},$$

$k \in [0,N]$,

де $M(k+1) = A(k) M(k) A^*(k)$,

$M(0) = Q^{-1},\ k \in [0, N-1]$.

Теорема 3. Оптимальна оцінка фазових обмежень в класі W_2 має вигляд

$$p \geq p_* = \max_{k \in [0,N]} \max_{\psi \in S} r(k) \sqrt{\lambda_{\max}(M(k))},\ k \in [0,N],$$

де $\lambda_{\max}(M(k))$ - максимальне власне число матриці $M(k)$,

$$M(k+1) = A(k) M(k) A^*(k)\ ,\quad M(0) = Q^{-1}\ ,$$
$$k \in [0, N-1].$$

Оптимальна оцінка множини початкових умов у формі гіперкуба.

Розглянемо задачу в структурній формі

$$W_3 = \{ \Pi_p(0) : p \geq 0 \},$$

де $\Pi_p(0) = \bigcap_{i=1}^{m} \{ x = (x_1, x_2, ..., x_m)^* : |x_i| \leq p \}$ - гіперкуб з центром в точці 0, множинна компонента

$$B_k(x) = K_{p(k)}(x),$$

$$G_0 = K_r(0),\quad r(k) > p(k) > 0\ ,\ k \in [0,N].$$

Запишемо для даного випадку співвідношення (6) в наступному вигляді:

$$r \leq \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{p \sum_{i=1}^{m} |\psi_i| + p \|\psi_i\|}{\langle \psi, \Theta(k) e \rangle} \ \forall e \in \Pi_1(0).$$

Тоді має місце наступна теорема.

Теорема 4. Оптимальна оцінка множини фазових обмежень в класі гіперкубів матиме вигляд

$$p \geq p_* = \max_{k \in [0,N]} \max_{\psi \in S} r(k) \frac{\sum_{i=1}^{m} |\langle \theta_i(k), \psi \rangle|}{\sum_{i=1}^{n} |\psi_i| + 1} \quad k \in [0,N],$$

де $\theta_i(k) \in R^m$ - стовпчики матриці $\Theta(k)$, $i = 1,2,...,m$.

Висновки. В роботі побудовано оптимальні оцінки множини фазових обмежень в задачі практичної стійкості множинної дискретної системи за умов, що динамічна складова є лінійною, а множинна складова задовольняє умову поділу. Одержані співвідношення мають алгоритмічну спрямованість.

Список використаних джерел

1. Bashnyakov O.M., Garashchenko F.G., Pichkur V. V. Practical stability, evaluation and optimization. – K.: Kyiv University, 2008. – 383 p.(in Ukrainian)

2. Bashnyakov A.N., Pichkur V.V., Hitko I.W. The maximal set of initial conditions in problems practical stability discrete system // Journal of Automation and Information Sciences. –2011. –№2. – P.5-11. (in Russian)

3. Beklemishev D.W. Additional chapters of linear algebra. – M.: Nauka, 1983. – 336 p. (in Russian)

4. Blagodatskikh W. I. The theory of differential inclusions. – M:. Moscow State University Press, 1979. – 88 p. (in Russian)

5. Bublik B. N., Garashchenko F.G., Kirichenko N. F. Structural and parametric optimization and stability of the beam dynamics. – Kyiv: Naukova dumka, 1985. – 304 p. (in Russian)

6. Halanay A., Wexler D. Qualitative theory of impulsive systems. – M.: Mir, 1971. – 309 p.

7. Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. – Boston: IIASA and Birkhauser. – 1997. – 321 p.

8. Martynyuk A.A. Stability analysis of discrete systems // International Applied Mechanics – 2000. – Vol.36, No. 7. – P. 3-34.

Надійшла до редколегії 07.03.2013 р.

УДК 519.852:519.876

Кудін В.І. [1], д.т.н., п.н.с.

Метод базисних матриць та розв‘язки матричної гри у змішаних стратегіях

Проаналізовано зв‘язки метода базисних матриць для задачі лінійного програмування та матричної гри у змішаних стратегіях.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв‘язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

V.I.Kudin [1], Dr. Sci.,

The method of basic matrix and matrix game with mixed strategies

Analysis of basic matrix methods for linear programming problems and matrix game with mixed strategies is reseatch.

Key Words:basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

Для багатьох практичних задач встановити існування та знайти оптимальний розв‘язок задачі лінійного програмування (матричної гри) є лише однією із задач дослідження. Виникає ряд інших задач, наприклад, дослідити характер розв‘язків: встановити їх єдиність чи неєдиність, виявити структуру множини її розв‘язків (обмеженість чи необмеженість), її аналітичне представлення та оцінки множинами більш простої структури. Ці проблеми вцілому недостатньо досліджені. Наведені нижче умови дають змогу організувати більш розширений аналіз властивостей матричної гри, як моделей лінійного програмування.

Встановлено [1-4], як побудувати пару двоїстих задач лінійного програмування, розв’язок яких визначають оптимальні стратегії заданої матричної гри. Параметри задач лінійного програмування, що відповідають заданій матричній грі, вибираються в процесі конструктивного доведення основної теореми теорії ігор [1].

Можлива побудова матричної гри за заданою задачею лінійного програмування. Введення одного з найважливіших понять теорії ігор - поняття *стратегії* - дозволяє звести найрізноманітніші розгорнуті гри до єдиної стандартної форми, яка називається *нормальною* формою гри.

Стратегією гри [1-3] називається система правил, що однозначно визначають вибір поведінки гравця на кожному ході в залежності від ситуації, що склалася в процесі гри. Гравець, який вибрав стратегію, може не брати участь в грі. За складеною ним інструкцією гру може проводити нейтральна особа.

Кожна фіксована стратегія, яку може обрати гравець, називається його *чистою стратегією*. Чисті стратегії не вичерпують усіх можливостей гравців. Як ми побачимо далі, є ситуації, в яких гравцям доцільно вибирати не чисту стратегію, а частоту, з якою слід використовувати ту чи іншу чисту стратегію в грі.

Користуючись поняттям стратегії, можна будь-яку гру розглядати так: кожен гравець має один хід - вибір між стратегіями з деякої множини. При цьому гравець приймає рішення, *не маючи жодної інформації про вибір іншого гравця.*

При двох учасниках гра в нормальній формі називається *прямокутною*.

© В.І. Кудін, 2013

Прямокутна гра з скінченним числом чистих стратегій називається *матричної* грою.

Будемо розглядати тільки *матричні ігри з нульовою сумою*.

В даній роботі проведено дослідження властивостей розв'язків матричної гри на основі положень методу базисних матриць [6].

Постановка задачі

Нехай перший гравець має m стратегій, а другий $-n$. При цьому вважається відомим, що якщо перший гравець вибере i-ю стратегію, а другий - j-ю, виграш першого (і отже програш другого) дорівнює $\|a_{ij}\|$. Матриця $A=\|a_i\|$ $A=\|a_{ij}\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ називається *платіжної матрицею* або *матрицею виграшу*.

Зауважимо, що складання платіжної матриці при формалізації реальних конфліктних ситуацій є складним завданням. Підстави для побудови платіжної матриці лежать, взагалі кажучи, поза теорією ігор і відносяться до певного застосування, з яким пов'язана постановка задачі.

Завдання теорії ігор полягає у виробленні принципів, що визначають поведінку гравців у кожній конкретній конфліктній ситуації.

Означення 1. Вектор $U=(u_1,u_2,...,u_m)$, кожна компонента якого вказує відносну частоту (ймовірність), з якою відповідна чиста стратегія використовується в грі, називається *змішаної стратегією* першого гравця.

Набір чисел $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ - змішана стратегія другого гравця.

Ясно, що

$$u_i \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1$$

$$w_j \geq 0,\ j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

Чиста стратегія може бути визначена як змішана стратегія, в якій всі складові, крім однієї, рівні нулю.

Надалі будемо позначати чисті стратегії обох противників у вигляді одиничних векторів

$$e_i=(\underbrace{0,0,...,0}_{i},1,\overbrace{0,...,0}^{m})$$

та

$$e_j=(\underbrace{0,0,...,0}_{j},1,\overbrace{0,...,0}^{n})$$

відповідно.

Означення 2. Оптимальна стратегія гравця - це стратегія, що забезпечує йому максимально можливий гарантований середній виграш.

Властивості оптимальних стратегій матричної гри випливають з основних теоретичних результатів лінійного програмування.

Теорема 1. (Основна теорема теорії ігор [1]). Кожна матрична гра з нульовою сумою має рішення в змішаних стратегіях, тобто існують такі стратегії U^0 та W^0 першого і другого гравця відповідно, що

$$M(U,W^0)\leq v=M(U^0,W^0)\leq M(U^0,W)$$

В процесі доведення основної теореми теорії ігор матричної гри з платіжною матрицею $A=\|a_{ij}\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ $(a_{ij}>0)$ приведена в відповідність наступна пара двоїстих задач лінійного програмування типу (1)-(3) та (4)-(6), які наведені нижче.

Пряма задача:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\leq b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\leq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n\leq b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j\geq 0,\quad j=\overline{1,n}\ . \qquad (3)$$

де $C=(c_1,c_2,...,c_n)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $B=(b_1,b_2,...,b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)–(3) має матрицю обмежень А в якій кількість стовпців більш ніж рядків ("довга").

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i\ , \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ ..... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \quad (5)$$

$$u_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,m}) \quad (6)$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4] (1)-(3) та (4)-(6),

де $b_i = 1, \quad j = \overline{1,m}, \; c_j = 1, \; j = \overline{1,n}$.

Задача (4)-(6) є двоїстою або спряженою до задачі (1)-(3), яку називають прямою (основною, початковою).

Ставиться завдання дослідити властивості оптимальних стратегій ігроків у матричній грі, що подається у еквівалентному вигляді (1)-(3) та (4)-(6).

Положення методу базисних матриць (МБМ)

МБМ може бути застосований як до прямої так і до двоїстої задачі, причому розв'язання кожної з задач буде давати інформацію про властивості стратегій відповідно першого та другого ігроків.

Без обмеження загальності, при викладенні положень методу будемо розглядати задачу лінійного програмування у вигляді (4)-(6), а саме:

($\max Bu, \; A^T u \le C^T, \; u \ge 0$).

Для визначеності, будемо вважати, що задача (1)−(3) має n>>m, матриця A обмежень витягнута горизонтально, ранг системи рівним m. Задача виду (4),(5) має n обмежень та m змінних, матриця A^T обмежень витягнута вертикально.

Означення 3. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати базисною (БМ), а розв′язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С базисним (опорним) (БР).

Нехай: $\beta_{ij}, \quad i, j \in I = \{1, 2, ..., m\}$ - елементи $A_б$;

e_{ri} та $(A_б^{-1})_i$ елементи та i-й стовпець $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$;

$\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі $a_r u_1 \le c_r$ за рядками $A_б$,

$\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками $A_б$;

$\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5), а $\Delta_0 = Bu_0^T$ - значення цільової функції в вершині u_0, які утворюють вектор $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$; $J_б, J_H$ - множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (5).

Всі означені елементи при переході до суміжної $\overline{A}_б$, яка утворюється із A_b заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_{ij}, \quad \overline{\alpha}_r, \overline{L}_i, \quad \overline{\Delta}_k, \quad \overline{e}_{ri}, (\overline{A}_b^{-1})_i \quad \overline{\alpha}_0$.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормалі, $a_j u^T \le c_j, j \in J_б$, де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють $A_б$, a_l - вектор-нормалі $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$, $a_l u \le c_l$ - вектор розвинення a_l за рядками $A_б$.

Теорема 2. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \; \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{0,n}; \quad i = \overline{1,m}; \; i \ne k; \quad (7)$$
$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \; \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}; \; i \ne k; \quad (8)$$
$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \; j = \overline{1,m}, \quad (9)$$
$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \; \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,$$
$$r = \overline{1,n}; \quad r \ne k; \quad (10)$$

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \quad (11)$$

причому умовою невирожденості є $\alpha_{lk} \neq 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку - $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції - $\alpha_{0k} < 0$.

Встановлено [7], що якщо існує базисна матриця $A_{\bar{o}}$ така, що $\alpha_{0k} \geq 0,\ k = \overline{1,m}$, то базисна матриця та відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $\alpha_{ok} > 0, \quad k = \overline{1,m}$, розв'язок єдиний, при $\exists i_0 \in I,\ \alpha_{0i0} = 0$, розв'язок неєдиний.

Нехай $S_1^c, S_2^c, ..., S_m^c$ - суми елементів стовпців, а $S_1^r, S_2^r, ..., S_m^r$ - суми елементів рядків оберненої матриці A_b^{-1}.

Про дослідження розв'язків матричної гри у змішаних стратегіях методом базисних матриць.

Твердження 1. Компоненти вектора розкладу цільової функції задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами

$$\alpha_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ji},\ i = \overline{1,m},$$

тобто

$$S_i^c = \alpha_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ji},\ i = \overline{1,m}$$

де $S_1^c, S_2^c, ..., S_m^c$ - суми елементів стовпців оберненої матриці, причому співпадають з невід'ємними компонентами вектора опорного розв'язку двоїстої задачі.

Доведення. Оскільки вектор цільової функції задачі (4)-(6) є вектором обмеження двоїстої задачі (в даному випадку задачі (1)-(3)), а оптимальна базисна матриця (рядкова) задачі (4)-(6) при транспонуванні буде утворювать оптимальні стовпці, що відповідають невід'ємним компонентам опорного розв'язку задачі (1)-(3)- умова доповнюючої не жорсткості (тобто для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

$$u_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}\ ).$$

Витікає, що обчислення компонент вектору розкладу цільової функції (4) будуть співпадать із знаходженням компонент опорного розв'язку задачі (1)-(3).

Наслідок 1. Якщо існує базисна матриця $A_{\bar{o}}$ така, що $S_k^c \geq 0,\ k = \overline{1,m}$, то базисна матриця та відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $S_k^c > 0,\ k = \overline{1,m},$ розв'язок єдиний, при $\exists i_0 \in I,\ S_{i_0}^c = 0$, розв'язок неєдиний.

Твердження 2. Компоненти вектора розв'язків задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами

$$u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij},\ i = \overline{1,m},$$

тобто

$$S_i^r = u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij},\ i = \overline{1,m},$$

де $S_1^r, S_2^r, ..., S_m^r$ - суми елементів рядків оберненої матриці).

Доведення. Неважко переконатись, що вектор обмежень відповідний рядкам, що утворюють базисну матрицю на ітераціях методу базисних матриць буде одиничним (як під вектор одиничного). Розрахунок компонент базисного розв'язку на ітераціях методу буде знаходитись множенням справа оберненої матриці (до базисної) на одиничний вектор-стовпець і буде справедливо

$$u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij},\ i = \overline{1,m}.$$

Наслідок 2. Сума елементів векторів стовпців оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору розкладу цільової функції за рядками базисної матриці.

Наслідок 3. Сума елементів рядків оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору проміжного розв‘язку на ітераціях методу базисних матриць.

Доведення. Справедливість тверджень 1,2 є наслідком властивостей розкладу елементів методу базисних матриць за рядками базисної матриці та співвідношень (7) та (9).

Висновок.

Оскільки оптимальні стратегії матричної гри визначаються через компоненти розв‘язки задач (1)-(3) та (4)-(6) [1-3], то складові оптимальних стратегій $u_i^{'}$ та $w_i^{'}$ ігри пов'язані з компонентами u_i та x_j оптимальних планів двоїстих задач лінійного програмування формулами

$$w_j^{'} = x_j / \sum_{j=1}^{n} x_j \,,\; u_i^{'} = u_i / \sum_{i=1}^{m} u_i \,.$$

тобто розв‘язання двоїстої пари задач лінійного програмування (матричної гри у змішаних стратегіях) (1)-(3) та (4)-(6) на основі методу базисних матриць встановлює властивості оптимальних розв‘язків прямої та двоїстої задачі, зокрема вказує на властивості єдності та неєдиності.

Після встановлення властивостей розв’язків прямої та двоїстої задач можна зробити висновки про рівноважні стани матричної гри (про сідлові точки задачі та їх властивості).

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B* Linear programming and application. M.: Progress, − 1966. (in Russian).
3. *Dantzig G.B., Thapa M.N.* Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997, − 435p.
4. *Dantzig G.B.* Dikin’s Interior Method for solving LP manuscript, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, − 1988.
5. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
6. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 28.03.13

УДК 519.7

Кукурба В.Р.[1] аспірант,
Чабанюк Я.М.[1] д.ф.-м.н., проф.,
Кінаш А.В.[2] студентка.

Асимптотична дифузійність флуктуацій неперервної оптимізаційної процедури в напівмарковському середовищі

Розглянуто асимптотичну дифузійність флуктуацій неперервної процедури стохастичної оптимізації в випадку коли функція регресії має сингулярно збурений доданок, який залежить від зовнішнього середовища, що описується рівномірно ергодичним напівмарковським процесом. Використано асимптотичні властивості компенсуючого оператора напівмарковського процесу для побудови генератора граничного дифузійного процесу.

Ключові слова: асимптотична дифузійність, напівмарковський процес.

[1] Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, e-mail: rector@lp.edu.ua

[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1.

V.R. Kukurba[1] post-graduate
Ya.M. Chabanyuk[1], PhD.
A.V. Kinash[2], student.

Asymptotic diffusivity of fluctuation of continuous stochastic optimization procedure in semi-Markov media.

The asymptotic diffusivity of fluctuation of continuous stochastic approximation procedure in the case when the regression function hew the singular perturbation addition, where dependent with on the external media, that is described by uniformly ergodic semi-Markov process.
Asymptotic properties of compensative operator of semi-Markov process for creating generator of limited diffusion process.

Key words: asymptotic diffusivity, semi-Markov process.

[1] Lviv Polytechnic National University , 79013, Lviv, Bandera street, 12, e-mail: rector@lp.edu.ua

[2] Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytetska str., 1.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Вступ. Поряд з збіжністю процедури стохастичної оптимізації (ПСО) [1] важливою властивістю ПСО є асимптотична поведінка флуктуацій в околі точки екстремуму функції регресії, яка в свою чергу характеризує швидкість збіжності ПСО. В класичних схемах [2] дослідження асимптотичної дифузійності реалізується використовуючи принцип інваріантності для процесів в неперервній ПСО.

В даній роботі для неперервної ПСО з асимптотично дифузійним збуренням в схемі дифузійної апроксимації з малим параметром $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$, в напівмарковському середовищі встановлено асимптотичну дифузійність флуктуацій навколо точки рівноваги усередненої динамічної системи.

1. Постановка задачі. Розглянемо неперервну ПСО в напівмарковському середовищі[6] в схемі дифузійної апроксимації

$$\frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt} = a(t)C^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t); x(t/\varepsilon^4)), \qquad (1)$$

де

$$C^{\varepsilon}(u;x) = \nabla_{b(t)}C(u;x) + \varepsilon^{-1}C_0(u;x) \qquad (2)$$

де $\nabla_{b(t)}C(u;x) = \dfrac{(C(u+b(t);x) - C(u-b(t);x))}{2b(t)}$,

$u \in R$. Функція регресії $C^{\varepsilon}(u;x)$, $u \in R$, $x \in X$ задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем.

$$du_x^{\varepsilon}(t)/dt = C^{\varepsilon}(u_x^{\varepsilon}(t);x), x \in X. \qquad (3)$$

© В.Р. Кукурба, Я.М. Чабанюк, А. В. Кінаш 2013

Функція регресії $C(u;x)$ така, що $C(u;\cdot)\in C^3(R)$, тобто допускає наступний розклад псевдо градієнта

$$\nabla_{b(t)}C(u;x)=C^{(1)}(x)+uC^{(2)}(x)+$$
$$+u^2C_{(3)}(u;x), \quad (4)$$

де

$$C^{(1)}(x)=C'(0;x),C^{(2)}(x)=C''_u(0;x), \quad (5)$$

$$C^{(3)}(x)=C''_u(\theta u,x),0\le\theta\le 1. \quad (6)$$

Нехай для збурення $C_0(u;x)$ функції регресії (2) виконується умова балансу

$$\acute{O}\acute{A}1:\Pi C_0(0;x):=\int_X\rho(dx)C_0(x)=0,$$

де $\rho(B),B\in X$, - стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x_n:=x(\tau_n),n\ge 0$, в напівмарковський процес $x(t),t>0$, в стандартному фазовому просторі станів (X,X) з лічильним процесом

$$\nu(t):=\max\{n:\tau_n\le t\},t\ge 0,$$

для моментів марковського відновлення $\tau_n,n\ge 0$ [3]. Напівмарковське ядро

$$Q(x,B,t):=P(x,B)G_x(t), \quad (7)$$

де $x\in X,B\in X,t\ge 0,$

задає напівмарковський процес $x(t),t>0$. В (7) стохастичне ядро $P(x,B)$ визначається перехідними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова $x_n,n\ge 0,$

$$P(x,B)=P\{x_{n+1}\in B|x_n=x\},$$

з функцією розподілу $G_x(t):=P\{\theta_{n+1}\le t|x_n=x\}=:P\{\theta_x\le t\}$. Разом з напівмарковський процесом $x(t),t>0,$ розглянемо супроводжуючий марковський процес $x_0(t),t>0$, з генератором [3]

$$Q\varphi(x):=q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)],$$

де $q(x):=1/g(x)$, $g(x):=\int_0^\infty\overline{G}_x(t)dt$,

$\overline{G}_x(t):=1-G_x(t)$. Супроводжуючий марковський процес $x_0(t),t>0$, є рівномірно ергодичний [4] з стаціонарним розподілом $\pi(B),B\in X$. Між стаціонарними розподілами $\pi(B)$ та $\rho(B)$ існує зв'язок [6]

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx),q:=\int_X\pi(dx)q(x),$$

або

$$\pi(dx)=\rho(dx)g(x)/m,m:=\int_X\rho(dx)g(x)=1/m.$$

Розподіли $\pi(B)$ та $\rho(B)$ визначають проектори Π та $\widetilde{\Pi}$ відповідно співвідношеннями:

$$\Pi\varphi(x):=\tilde{\varphi}1(x),\tilde{\varphi}:=\int_X\pi(dx)\varphi(x),1(x)\equiv 1,x\in X, \quad (8)$$

$$\widetilde{\Pi}\varphi(x):=\tilde{\varphi}1(x),\tilde{\varphi}:=\int_X\rho(dx)\varphi(x),1(x)\equiv 1,x\in X.$$

При відповідних умовах на нормуючі функцію $a(t),b(t),t>0$, неперервна ПСО (1) збігається з ймовірністю одиниця до точки екстремуму $u^*=0$ усередненої системи

$$du(t)/dt=C'(u),$$

де

$$C(u):=\int_X\pi(dx)C(u;x).$$

Таким умовам задовольняють функції

$$a(t)=a/t,b(t)=b/t^{1/4},0<t_0<t,a,b>0$$ я кі і будуть розглядатися надалі в ПСО (1). З того, що $u^*=0$ має місце рівність

$$C'(0)=0,$$

Враховуючи (5) та (8) додаткову умову балансу

$$\acute{O}\acute{A}2:\Pi C^0(x)=0.$$

Асимптотична нормальність ПСО (1) досліджується для нормованих флуктуацій

$$v^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\sqrt{t}[u^\varepsilon(t)-\varepsilon C_0^\varepsilon(t)], \quad (9)$$

де дифузійне збурення $C_0^\varepsilon(t)$ визначається через $C_0(u;x)$ з (2):

$$C_0^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-2}a\int_{t_0}^t C_0(u^\varepsilon(s);x(\frac{s}{\varepsilon^4}))\frac{1}{s}ds. \quad (10)$$

Зауважимо, що збурення (10) задовольняє рівняння

$$\frac{dC_0^\varepsilon(t)}{dt}=\varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(u^\varepsilon(t);x(\frac{t}{\varepsilon^4})). \quad (11)$$

В позначенні

$$\tilde{v}^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(t)-\varepsilon C_0^\varepsilon(t)$$

флуктуація (9) має представлення

$$v^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\sqrt{t}\tilde{v}^\varepsilon(t),$$

або в зворотній формі

$$\tilde{v}(t)=\frac{\varepsilon v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}}.$$

З іншої сторони з (9) маємо представлення

$$u^{\varepsilon}(t) = \varepsilon[\frac{v^{\varepsilon}(t)}{\sqrt{t}} + C_0^{\varepsilon}(t)]. \qquad (12)$$

Зауваження 1. Для збурення $C_0^{\varepsilon}(t)$ буде доведена слабка збіжність

$$C_0^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t > 0, \varepsilon \to 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^2}{t^2},$$

а

$$\sigma^2 = 2a^2 \int_X \pi(dx) C_0(x) R_0 C_0(x). \qquad (13)$$

В (12) R_0 - потенціал до оператора Q [3], такий, що виконуються співвідношення

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - \mathrm{I},$$

де I - тотожній оператор.

2. Теорема. При умовах збіжності ПСО (1) та при додаткових умовах УБ1, УБ2 а також

$$D1: \rho^2 := \sigma^2 + \sigma_{\mu} > 0,$$

де σ^2 обчислюється в (13), а

$$\sigma_{\mu} = qa^2 \int_X \rho(dx)\mu(x)C_0^2(x), \mu(x) := g_2(x) - 2g^2(x),$$

$$D2: c_2 < -\frac{1}{2a},$$

де

$$c_2 := q\int_X \rho(dx) C^{(2)}(x),$$

має місце слабка збіжність

$v^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t > 0, \varepsilon \to 0,$ в кожному скінченому інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний двокомпонентний процес $\zeta(t), D_0(t)$, $t > 0$, визначається генератором

$$\mathrm{L}_t\varphi(v,w) = \frac{a^2\rho^2}{2t^2}\varphi''_w(v,w) + \\ + \frac{a}{t}C^{(2)}(v,w)\varphi'_v(v,w), \qquad (14)$$

де

$$C^{(2)}(v,w) = vb + ac_2\sqrt{t}w,$$

$$b := ac_2 + \frac{1}{2}.$$

Висновок 1. Граничний процес флуктуацій $\zeta(t)$, $t > 0$, визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\zeta(t) = \frac{a}{t}b\zeta(t)dt + \sigma dw(t),$$

де $w(t)$ - гаусівський процес з дисперсією

$$\sigma^2 = a^2\rho^2.$$

3. Властивості нормованої флуктуації $v^{\varepsilon}(t)$.

Лема 1. Нормована флуктуація (9) задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dv^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon(\frac{v^{\varepsilon}(t)}{\sqrt{t}} + C_0^{\varepsilon}(t)), x(\frac{t}{\varepsilon^4}))dt + \\ + \frac{v^{\varepsilon}(t)}{2t}dt. \qquad (15)$$

Доведення. Диференціюючи (9) і враховуючи (1) та (12) маємо (15).

Наслідок 1. Супроводжуюча флуктуація $v_x^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}[u_x^{\varepsilon}(t) - \varepsilon C_0^{\varepsilon}(t)]$ задовольняє диференціальне рівняння

$$dv_x^{\varepsilon}(t) = \frac{v_x^{\varepsilon}(t)}{2t}dt + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)dt, x \in X, \qquad (16)$$

де

$$z = \frac{v_x^{\varepsilon}(t)}{\sqrt{t}} + w, w = C_0^{\varepsilon}(t). \qquad (17)$$

Доведення. Використання системи (3) в схемі доведення Леми 1 дає (16).

Наслідок 2. Рівняння (16) допускає асимптотичне представлення

$$dv_x^{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon^{-1}a}{\sqrt{t}}C^{(1)}(x)dt + \\ + \frac{a}{t}[\sqrt{t}zC^{(2)}(x) + \frac{v_x^{\varepsilon}(t)}{2a}]dt + \theta_x^{\varepsilon}dt, x \in X, \qquad (18)$$

в позначеннях (17), а знехтуючий член θ_x^{ε} такий, що $\left\|\theta_x^{\varepsilon}\right\| \to 0, \varepsilon \to 0$.

Доведення. Використовуючи (4) для функції $\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)$ з (16) маємо розклад

$$C(\varepsilon z, x) = C^{(1)}(x) + \varepsilon z C^{(2)}(x) + \\ + \varepsilon^2 z^2 C_3(\varepsilon z, x), \qquad (19)$$

де $C_3(\varepsilon z, x)$ обчислюємо за представленням (6). Зауважимо, що останній доданок в (19) має порядок малості $o(\varepsilon^2)$.

Підставляючи (19) в (16) отримуємо (18).

Розглянемо півгрупи $C_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)\varphi(v) = \varphi(v_x^{\varepsilon}(t+s)), v_x^{\varepsilon}(t) = v$, що породжуються системою (16) з генератором

$$\mathrm{C}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v) = [\frac{v}{2t} + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)]\varphi'(v), \quad (20)$$

де z обчислюємо в (17).

Наслідок 3. Генератор (20) півгруп $\mathrm{C}_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)$, $x \in X$, має асимптотичне представлення

мовою). $\mathrm{C}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^{(1)}(x)\varphi'(v) +$

$$+\frac{a}{t}C^{(2)}(v,w,x)) + \theta_C^{\varepsilon}(x)\varphi'(v), \quad (21)$$

де

$$C^{(2)}(v,w,x) = \sqrt{t}zC^{(2)}(x)\varphi'(v) + \frac{v}{2a}.$$

Доведення. В (20) для функції $\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)$ використаємо розклад (19).

Для дифузійного збурення (10) розглянемо півгрупи

$$\mathrm{C}_{t+s}^{0,t}(x)\varphi(w) = \varphi(C_0^{\varepsilon}(u(t+s);x)), C_0^{\varepsilon}(u(t);x) = w,$$

з генератором

$$\mathrm{C}_t^0(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(x)\varphi'(w). \quad (22)$$

4. Компенсуючий оператор. Розглянемо КО для розширеного процесу марковського відновлення

$$v_n^{\varepsilon} := v^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}), w_n^{\varepsilon} := C_n^{\varepsilon} := C_0^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}), x_n^{\varepsilon} := x(\tau_n^{\varepsilon}), \quad (23)$$

де $\tau_n^{\varepsilon} := \varepsilon^4\tau_n, n \geq 0,$

що визначається співвідношенням

$$\mathrm{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) := \varepsilon^{-4}q(x)[E[\varphi(v_{n+1}^{\varepsilon}, w_{n+1}^{\varepsilon}, x_{n+1}^{\varepsilon}) |$$

$$v_n^{\varepsilon} = v, w_n^{\varepsilon} = w, x_n^{\varepsilon} = x, \tau_n^{\varepsilon} = t] - \varphi(v,w,x)]$$

Лема 2. Компенсуючий оператор (24) має аналітичне представлення

$$\mathrm{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}q(x)\int_0^{\infty}G_x(ds)\times$$

$$\times[\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)\,\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x)\mathrm{P} - \mathrm{I}]\varphi(v,w,x), \quad (25)$$

де оператор P визначається через ядро $P(x,B), B \in X$,

$$\mathrm{P}\varphi(x) := \int_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Доведення. Розглянемо приріст компоненти v_{n+1}^{ε} процесу (23) при $x_n^{\varepsilon} = x$ і $\tau_n^{\varepsilon} = t$ в вигляді

$$\Delta v_n^{\varepsilon} := v_{n+1}^{\varepsilon} - v_n^{\varepsilon} = v_x^{\varepsilon}(\varepsilon^4\theta_x), \quad (26)$$

де $v_x^{\varepsilon}(t)$ є розв'язком рівняння (16) з початковою умовою $v_x^{\varepsilon}(0) = 0$.

Аналогічно маємо приріст для w_{n+1}^{ε}

$$\Delta w_n^{\varepsilon} := C_{n+1}^{\varepsilon} - C_n^{\varepsilon} = C_0^{\varepsilon}(\varepsilon^4\theta_x). \quad (27)$$

Враховуючи (26) і (27) та використовуючи півгрупи $\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)$ та $\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x)$ для умовного математичного сподівання з (24) маємо перетворення

$$E[\varphi(v_{n+1}^{\varepsilon}, w_{n+1}^{\varepsilon}, x_{n+1}^{\varepsilon}) \mid v_n^{\varepsilon} = v, w_n^{\varepsilon} = w, x_n^{\varepsilon} = x, \tau_n^{\varepsilon} = t] =$$

$$E_{v,w,x}[\varphi(v + v_0(\varepsilon^4\theta_x), w + C_0^{\varepsilon}(\varepsilon^4\theta_x), x_{n+1}^{\varepsilon})] =$$

$$\int_0^{\infty}G_x(ds)\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)\,\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x)\mathrm{P}\varphi(v,w,x).$$

З останнього і з означення (24), маємо (25).

Лема 3. Компенсуючий оператор (25) на тест-функціях $\varphi(v,w,\cdot) \in C^{3,3}(R \times R)$ допускає асимптотичне представлення

$$\mathrm{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) = [\varepsilon^{-4}Q + \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}Q_1(x)\mathrm{P} + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}Q_2(x)\mathrm{P} +$$

$$+\frac{a}{t}Q_3(x)\mathrm{P} + \theta_L^{\varepsilon}(x)]\varphi(v,w,x), \quad (28)$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v,w) = C_0(x)\varphi'_w(v,w), Q_2(x)\varphi(v,w) =$$

$$= (1 + \frac{z}{\sqrt{t}})C^{(1)}(x)\varphi'_v(v,w),$$

$$Q_3(x)\varphi(v,w) = [C^{(2)}(v,w,x)\varphi'_v(v,w) +$$

$$+\frac{a}{t}\mu_2(x)C_0^2(x)\varphi''_w(v,w) + \frac{z^2}{2}C_0^{(2)}(x)\varphi''_w(v,w)], \quad (24)$$

$\mu_2(x) = \frac{g_2(x)}{2g(x)}$, а залишковий член $\theta_L^{\varepsilon}(x)$ такий, що

$$\| \theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w,x) \| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Використаємо алгебраїчну тотожність

$$ab\mathrm{P} - \mathrm{I} = \mathrm{P} - \mathrm{I} + (ab - \mathrm{I})\mathrm{P}$$

для підінтегрального виразу в (25), покладаючи $\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x) = a$ і $\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x) = b.$

Таким чином з (25) маємо

$$\mathrm{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}q(x)[\mathrm{P} - \mathrm{I}]\varphi(v,w,x) +$$

$$+\varepsilon^{-4}q(x)\int_0^\infty G_x(ds)[\mathrm{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\mathrm{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-\mathrm{I}]\mathrm{P}\varphi(v,w,x),$$

або

$$\mathrm{L}^\varepsilon_t\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}Q\varphi(v,w,x)+$$
$$+\varepsilon^{-4}q(x)\mathrm{L}^\varepsilon_{0,t}\mathrm{P}\varphi(v,w,x), \qquad (29)$$

де

$$\mathrm{L}^\varepsilon_{0,t}=\int_0^\infty G_x(ds)[\mathrm{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\mathrm{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-\mathrm{I}]. \qquad (30)$$

В свою чергу оператор $\mathrm{L}^\varepsilon_{0,t}$ має представлення

$$\mathrm{L}^\varepsilon_{0,t}=\mathrm{L}_a+\mathrm{L}_b+\mathrm{L}_{ab},$$

де

$$\mathrm{L}_a=\int_0^\infty G_x(ds)[\mathrm{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-\mathrm{I}], \qquad (31)$$

$$\mathrm{L}_b=\int_0^\infty G_x(ds)[\mathrm{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-\mathrm{I}], \qquad (32)$$

$$\mathrm{L}_{ab}=\int_0^\infty G_x(ds)[\mathrm{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-\mathrm{I}]\times$$
$$\times[\mathrm{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-\mathrm{I}].$$

Встановимо асимптотичні розклади для (31)-(33). Інтегруючи (31) по частинах з використанням генератора (20) маємо

$$\mathrm{L}_a=\varepsilon^4 g(x)(\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^{(1)}(x)+$$
$$+\frac{za}{\sqrt{t}}C^{(2)}(x)+\frac{v}{2t})+o(\varepsilon^6). \qquad (34)$$

Аналогічно для (32), використовуючи генератор (22), отримуємо

$$\mathrm{L}_b=\varepsilon^2 g(x)\frac{a}{t}C_0(\varepsilon z,x)+$$
$$+\varepsilon^4\frac{a^2}{t^2}\frac{g_2(x)}{2}C_0^2(\varepsilon z,x)+o(\varepsilon^6). \qquad (35)$$

Використаємо формулу розкладу (4) для $\tilde{\mathrm{N}}_0(\varepsilon z,x)$ та врезультаті отримаємо:

$$\mathrm{L}_b=\varepsilon^2 g(x)\frac{a}{t}C_0(x)+\varepsilon^3 g(x)\frac{za}{t}C_0^{(1)}(x)+$$
$$+\varepsilon^4\frac{a}{t}[\frac{a}{t}\frac{g_2(x)}{2}C_0^2(x)+\frac{z^2}{2}C_0^{(2)}(x)]+o(\varepsilon^5), \qquad (36)$$

де

$$C_0^{(1)}(x)=C_{0'}(0;x),C_0^{(2)}(x)=C_{0''}(0;x)$$

І нарешті для (33), враховуючи обидва генератори (20) і (22) маємо

$$\mathrm{L}_{ab}=o(\varepsilon^6). \qquad (37)$$

Підставляючи (34)-(37) в (30), і результат в (29) отримуємо (28).

5. Розв'язок проблеми сингулярного збурення. Заключним кроком доведення Теореми є використання розв'язку проблеми сингулярного збурення для зрізаного до оператора (28).

$$\mathrm{L}^\varepsilon_{t,0}\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\frac{a}{t}Q_1(x)\mathrm{P}+$$
$$+\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}Q_2(x)\mathrm{P}+\frac{a}{t}Q_3(x)\mathrm{P} \qquad (38)$$

на тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\varphi(v,w)+\varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x)+$$
$$+\varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x)+\varepsilon^4\frac{1}{t}\varphi_4(v,w,x). \qquad (39)$$

Лема 4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (38) на тест-функціях (39) визначає граничний оператор L формуло

$$\mathrm{L}\Pi=\frac{a^2}{t}\Pi Q_1(x)R_0Q_1(x)\Pi- \qquad (33)$$
$$-\frac{a^2}{t}\Pi g(x)Q_1^2(x)\Pi+\Pi Q_3(x)\Pi \qquad (40)$$

в позначеннях Леми 3.

Доведення. Слідуючи [3] , розділ 5, представлення оператора $\mathrm{L}^\varepsilon_{t,0}$ на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(v,w,x)$ має вигляд

$$\mathrm{L}^\varepsilon_{t,0}\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\frac{1}{t}\mathrm{L}\varphi(v,w)+\theta^\varepsilon_L(x)\varphi(v,w), \qquad (41)$$

з знехтую чим доданком $\theta^\varepsilon_L(x)\ \ \varphi(v,w)$, таким, що $\|\ \theta^\varepsilon_L(x)\varphi(v,w)\|\to 0,\varepsilon\to 0.$

Враховуючи (36) та (37) для розв'язку проблеми сингулярного збурення для оператора (39) маємо систему рівнянь

$$Q\varphi(v,w)=0, \qquad (42)$$

$$Q\varphi_2(v,w,x)+aQ_1(x)\mathrm{P}\varphi(v,w)=0, \qquad (43)$$

$$Q\varphi_3(v,w,x)+aQ_2(x)\mathrm{P}\varphi(v,w)=0, \qquad (44)$$

$$Q\varphi_4(v,w,x)+\frac{a}{t}Q_1(x)\mathrm{P}\varphi_2(v,w,x)+$$
$$+aQ_3(x)\mathrm{P}\varphi(v,w)=\mathrm{L}_t(x). \qquad (45)$$

Рівняння (42) має місце для всіх тест-функцій, що не залежать від аргументу $x \in X$, (див. (8)).

З умови балансу УБ1 маємо

$$\Pi Q_1(x) = \Pi C_0(x) = \int_X \pi(dx) C_0(x) = q \int_X \rho(dx) C_0(x) = 0.$$

Отже розв'язок рівняння (43) можна подати в вигляді (див. [3])

$$\varphi_2(v, w, x) = aR_0 Q_1(x) \varphi(v, w). \qquad (46)$$

Аналогічно з виконання умови УБ2 отримуємо

$$\Pi Q_2(x) = \Pi C^0(x) = \int_X \pi(dx) C^0(x) = q \int_X \rho(dx) C^0(x) = 0.$$

Таким чином для рівняння (44) маємо розв'язок

$$\varphi_3(v, w, x) = aR_0 Q_2(x) \varphi(v, w).$$

З рівняння (45) маємо представлення граничного оператора L в вигляді (див. [3], розділ 5),

$$\mathrm{L} = \Pi \mathrm{L}_t(x) \Pi.$$

Підставляючи (46) в (45) і враховуючи те, що

$$\mathrm{P} R_0 = R_0 + g(x)[\Pi - \mathrm{I}],$$

маємо (40).

6. Доведення Теореми. Спочатку відзначимо, що розв'язок проблеми сингулярного збурення для $\mathrm{L}_{t,0}^{\varepsilon}$ в (38) визначає той самий розв'язок для оператора $\mathrm{L}_t^{\varepsilon}$ в (28) з малим доданком (див. твердження 5.1 [3]). Отже для отримання граничного оператора (14) достатньо обрахувати праву частину в (40). Враховуючи оператори $Q_1(x)$ і $Q_3(x)$ Леми 3 з (40) маємо

$$\mathrm{L}\varphi(v, w) = \frac{a^2}{2t} \rho^2 \varphi''_w(v, w) + aC^{(2)}(v, w) \varphi'_v(v, w), \qquad (47)$$

в позначеннях Теореми. Використовуючи (47) та множник $1/t$ в (41) визначаємо граничний оператор (14).

Висновок 2. Асимптотичну нормальність ПСО в R^d , $d > 1$, можна отримати аналогічним чином з додатковими технічними ускладненнями.

Список використаних джерел

1. *Ljung L., G. Pflug, H. Walk* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems -- Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, – 1992. – 113P.
2. *Nevelson M.S., Khasminsky R.Z.* Stochastic Approximation and Recurrence Evaluation. – Nauka, Moscow –1972. – 332 p. (in Russian).
3. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, -- World Scientific Publishing, 2005. - 330P
4. *Koroliuk V. S., Tubin A.F.* Semi-Markov process and applications – Kiyv Nayk. dumka, 1976. –184p.
5. *Koroliuk V. S., Svicshuk A.V.* Semi-Markov random evolutions – Kiyv Nayk. dumka, 1992. –246p.
6. *Kukurba V.R., Yarka Y.B.* Convergence of stochastic optimization procedure in semi-Markov media // Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. №1, 2012, P. 64-69.

Надійшла до редколегії 13.03.2013

УДК 519.8

Мащенко С.О., д. ф.-м. н., доц.,
Саад* М., аспірант

Обзор развития многокритериальных моделей принятия решений

Рассматриваются многокритериальные модели принятия решений: нечеткого линейного программирования, с нечеткими множествами критериев и альтернатив, целевого программирования, программирования De Novo, анализа среды функционирования.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, прийнятие решений, целевое программирование, нечеткое множество.

S.O.Mashchenko, D.Sci(Phys-Math.), Ass. Prof.,
M.Saad*, Postgrad. Stud.

Review of multiple criteria decision making models development

There are considered multiple criteria models of decision making: models of fuzzy linear programming, models with fuzzy sets of criteria and alternatives, models of goal programing, De Novo programing models, data envelopment analysis models.

Keywords: the multiple criteria optimization, the decision making, the goal programing problem, the fuzzy set.

*E-mail: msomail@yandex.ru, blackhawk_is@yahoo.com
Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Многокритериальная оптимизация - это один из важных разделов теории принятия решений. Одним из основных понятий этой теории является понятие оптимального по Парето решения. Оно связано с именем итальянского экономиста и социолога В. Парето (1848 – 1923), который одним из первых начал его использовать при исследованиях процесса рыночного обмена товаров.

В 1881 году это направление начал исследовать Edgeworth [1]. В 1951 году Kuhn и Tucker [2] опубликовали первые результаты по проблемам многокритериальной оптимизации. В 1961 году Charnes и Cooper [3] впервые предложили модель анализа среды функционирования для оценки эффективности систем. В 1970 году Bellman и Zadeh [4] опубликовали первые исследования о применении теории нечетких множеств для решения задач оптимизации и развили основные понятия принятия решений в нечеткой среде. В 1975 году Zeleny [5] опубликовал книгу, содержащую обзор пятидесяти исследований по многокритериальному принятию решений. В 1978 году Zimmerman [6] впервые предложил применить теорию групп для нечетких многокритериальных задач принятия решений. В 1982 году Zeleny [7] опубликовал исследования об использовании различных принципов оптимальности для задач многокритериального линейного программирования.

Нечеткое многокритериальное линейное программирование. Задача нечеткого многокритериального линейного программирования, как правило, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\max \tilde{C}^{(1)}x,\ \min \tilde{C}^{(2)}x,\\ \tilde{A}^{(1)}x \le \tilde{b}^{(1)},\ \tilde{A}^{(2)}x \ge \tilde{b}^{(2)},\ \tilde{A}^{(3)}x = \tilde{b}^{(3)},\ x \ge 0,\end{gathered} \quad (1)$$

где $\tilde{C}^{(i)}$, $i=1,2$; $\tilde{A}^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$, - матрицы и $\tilde{b}^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$, - векторы соответствующих параметров задачи, заданные нечеткими числами. Задача (1) может быть решена путем ее дефаззификации в четкую задачу многокритериального линейного программирования следующего вида:

$$\begin{gathered}\max \tilde{C}_\alpha^{(1)U}x,\ \min \tilde{C}_\alpha^{(2)L}x,\\ \tilde{A}_\alpha^{(1)L}x \le \tilde{b}_\alpha^{(1)U},\ \tilde{A}_\alpha^{(3)L}x \le \tilde{b}_\alpha^{(3)U}, \tilde{A}_\alpha^{(2)U}x \ge \tilde{b}_\alpha^{(2)L},\\ \tilde{A}_\alpha^{(3)U}x \ge \tilde{b}_\alpha^{(3)l},\ x \ge 0,\end{gathered} \quad (2)$$

где $\tilde{C}_\alpha^{(i)U}, \tilde{C}_\alpha^{(i)L}$, $i=1,2$; $\tilde{A}_\alpha^{(j)L}, \tilde{A}_\alpha^{(j)U}$, $j=\overline{1,3}$, - матрицы верхних и нижних границ множеств уровня $\alpha \in [0,1]$ нечетких чисел, которые являются соответствующими компонентами соответствующих матриц $\tilde{C}^{(i)}$, $i=1,2$; $\tilde{A}^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$. Аналогично $\tilde{b}_\alpha^{(j)L}$, $\tilde{b}_\alpha^{(j)U}$ - векторы верхних и нижних границ множеств уровня $\alpha \in [0,1]$ нечетких чисел, которые являются соответствующими компонентами векторов $\tilde{b}^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$.

Подробно этот подход изложен в работах Zimmermann (1978) [8]; Lee (1993) , Li (1993) [9]. Приложение метода и его развитие можно найти в Sakawa (1993) [10], Sakawa и другие (1995) [11],

© С.О. Мащенко, М. Саад, 2013

Shibano и другие (1996) [12], Ida и Gen (1997) [13], и Shih и Lee (1999) [14].

Задача многокритериального линейного программирования с нечеткими критериями. Имеет вид:

$$\max_{x\in D} \quad [\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \cdots, \tilde{f}_k(x)],$$

где D - множество допустимых решений, заданное линейными ограничениями.

Согласно концепции TOPSIS (Lai и другие 1994 [15], Yu 1973 [16]) нечетким критериям этой задачи могут быть сопоставлены целевые нечеткие множества G_i, $i=\overline{1,k}$. Их функции принадлежности определяются как: $\mu_{G_i}(x) =$

$$= \begin{cases} 1, \tilde{f}_i(x) > f_i^*(x), \\ 1 - \dfrac{f_i^*(x) - \tilde{f}_i(x)}{f_i^*(x) - f_i^-(x)}, f_i^-(x) \le \tilde{f}_i(x) \le f_i^*(x), \\ 0, \tilde{f}_i(x) < f_i^-(x), \end{cases} \qquad (3)$$

где $f_i^*(x)$ и $f_i^-(x)$ представляют собой соответственно наилучшее и наихудшее значения критерия $\tilde{f}_i(x)$, $i=\overline{1,k}$. Тогда дефаззифицированная задача принимает следующий вид:

$$\max_{x\in D}\left\{\lambda \left| \lambda \le \frac{f_i(x) - f_i^-(x)}{f_i^*(x) - f_i^-(x)},\ i=1,...,k \right.\right\}.$$

Задача многокритериального линейного программирования с нечеткими критериями и ограничениями. Имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\max[\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \cdots, \tilde{f}_k(x)]; \\ &(Ax)_j \le b_j, j=\overline{1,m}; x \ge 0; \end{aligned} \qquad (4)$$

где $(Ax)_j$ и b_j - элементы $j=\overline{1,m}$ соответственно векторов Ax и b.

Функции принадлежности целевых нечетких множеств G_i, $i=\overline{1,k}$, имеют вид (3), а нечетких множеств, которые соответствуют ограничениям $(Ax)_j \le b_j, j=\overline{1,m}$, задачи (4) имеют вид:

$$\mu_{D_j}(x) = \begin{cases} 1, & (Ax)_j < b_j, \\ 1 - \dfrac{(Ax)_j - b_j}{p_j}, & b_j \le (Ax)_j \le b_j + p_j, \\ 0, & (Ax)_j > b_j + p_j, \end{cases}$$

$j=\overline{1,m}$. В этом случае дефаззифицированная задача принимает следующий вид:

$$\max_{x\ge 0}\left\{\lambda \left| \begin{array}{l} \lambda \le 1 - \dfrac{f_i(x) - f_i^-(x)}{f_i^*(x) - f_i^-(x)}, i=\overline{1,k}; \\ \lambda \le 1 - \dfrac{(Ax)_j - b_j}{p_j}, j=\overline{1,m} \end{array} \right.\right\}.$$

Двухэтапный подход к решению нечеткой многокритериальной задачи. Задача нечеткого математического программирования аналогична (1) и описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\max \tilde{C}^{(1)}x,\ \min \tilde{C}^{(2)}x,\ \tilde{A}^{(1)}x \le \tilde{b}^{(1)}, \\ &\tilde{A}^{(2)}x \ge \tilde{b}^{(2)},\ x \ge 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

На первом этапе решается аналогичная (2) четкая многокритериальная задача линейного программирования следующего вида:

$$\max \tilde{C}_\alpha^{(1)U}x,\ \min \tilde{C}_\alpha^{(2)L}x,\ x \in X_\alpha,$$

где множество допустимых решений

$$X_\alpha = \{x \ge 0 \mid \ \tilde{A}_\alpha^{(1)L}x \le \tilde{b}_\alpha^{(1)U},\ \tilde{A}_\alpha^{(2)U}x \ge \tilde{b}_\alpha^{(2)L}\},$$

$\alpha \in [0,1]$ - уровень нечетких чисел параметров задачи (5).

Далее решается задача:

$$\max_{x\in X_\alpha}\left\{\beta \left| \beta \le \mu_{g_{i(\max)}}(x),\ \beta \le \mu_{g_{i(\min)}}(x) \right.\right\}, \qquad (6)$$

где

$$\mu_{g_{i(\max)}}(x) = \frac{(C_\alpha^{(1)U}x)_i - f_{i(\max)\alpha}^-}{f_{i(\max)\alpha}^* - f_{i(\max)\alpha}^-},\ i=\overline{1,k_1};$$

$$\mu_{g_{i(\min)}}(x) = \frac{f_{i(\min)\alpha}^- - (C_\alpha^{(2)L}x)_i}{f_{i(\min)\alpha}^- - f_{i(\min)\alpha}^*},\ i=\overline{1,k_2};$$

$f_{i(\max)\alpha}^*$ и $f_{i(\max)\alpha}^-$ представляют собой соответственно наилучшее и наихудшее значение критерия $(C_\alpha^{(1)U}x)_i$ на множестве допустимых решений X_α уровня $\alpha \in [0,1]$, $i=\overline{1,k_1}$; $f_{i(\min)\alpha}^*$ и $f_{i(\min)\alpha}^-$ представляют собой соответственно наилучшее и наихудшее значение критерия $(C_\alpha^{(2)L}x)_i$ на множестве допустимых решений X_α уровня $\alpha \in [0,1]$, $i=\overline{1,k_2}$.

Согласно Zimmerman (1978) [8] целесообразно рассматривать две задачи:

- максимизировать уровень $\lambda = \alpha = \beta$;

- найти компромисс между значениями α, β.

Для первой задачи Lee и Li (1993) [9] предложили следующий метод.

Шаг 1. Выбрать допустимую ошибку $\tau > 0$, длину шага $\varepsilon > 0$, начальный уровень $\alpha = 1$, номер итерации $t = 1$.

Шаг 2. Присвоить значение $\alpha := \alpha - t\varepsilon$, решить задачу линейного программирования (6) и получить значения β и x. Если длина шага ε слишком велика, то присвоить $\varepsilon := \varepsilon / 2$ и повторить шаг 2.

Шаг 3. Если $|\alpha - \beta| \le \tau$, то выбрать $\lambda = \min\{\alpha, \beta\}$ и перейти к шагу 4; в противном случае присвоить $t := t + 1$ и вернуться на шаг 2.

Шаг 4. Получены значения $\alpha, \beta, \lambda, x$. Процедура закончена.

Во втором варианте метода для нахождения компромисса между значениями α и β решается задача математического программирования:

$$\max \beta = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \beta_i;\ x \in X_\alpha,\ \beta, \beta_i \in [0,1];$$

$$\beta \le \beta_i \le \frac{(C_\alpha^{(1)U} x)_i - f_{i(\max)\alpha}^-}{f_{i(\max)\alpha}^* - f_{i(\max)\alpha}^-},\ i = \overline{1, k_1};$$

$$\beta \le \beta_i \le \frac{f_{i(\min)\alpha}^- - (C_\alpha^{(2)L} x)_i}{f_{i(\min)\alpha}^- - f_{i(\min)\alpha}^*},\ i = \overline{1, k_2};$$

Более подробное описание метода можно прочитать в Ida и Gen (1997) [13].

Многокритериальные задачи с нечетким множеством альтернатив. Пусть X – универсальное множество, а $\phi: X \to R^m$ – вектор-функция, значениями которой оцениваются результаты выбора элементов из множества X. Во множестве X задано нечеткое подмножество $\mu_D : X \to [0,1]$, которое называется нечетким множеством альтернатив. Задача заключается в "максимизации" в некотором смысле функции ϕ на нечетком множестве μ_D.

Под "максимизацией" согласно подходу С.А. Орловского [17] понимают выбор нечеткого подмножества μ множества μ_D, которому отвечает наибольшие значения как компонент функции ϕ, так и функции принадлежности μ_D нечеткого множества альтернатив. В задачах многокритериальной оптимизации такие альтернативы называются эффективными.

Пусть P_m – множество всех эффективных альтернатив $(m+1)-$ критериальной задачи:

$$\phi_i(x) \to \max,\ i = \overline{1, m},$$
$$\mu_D(x) \to \max,\ x \in X.$$

Решением многокритериальной задачи с нечетким множеством альтернатив называется нечеткое множество с функцией принадлежности:

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_D(x), x \in P_m, \\ 0 \quad\quad , x \notin P_m. \end{cases}$$

Таким образом, нечеткое множество решений будет включать в себя те, и только те альтернативы, которые будут эффективны как по критериям ϕ_i, $i = \overline{1, m}$, так и по функции принадлежности μ_D нечеткого множества альтернатив. Выбор некоторой конкретной альтернативы осуществляется с помощью любого из методов многокритериальной оптимизации.

В [17] рассмотрена также общая задача нечеткой векторной оптимизации, которая состоит в следующем. Пусть на универсальном множестве X задано нечеткое подмножество альтернатив $\mu_D : X \to [0,1]$. Альтернативы оцениваются нечеткими значениями векторов оценок $y = (y_1, ..., y_m) \in Y$, которые задаются нечетким отображением $\phi: X \times Y \to [0,1]$. На универсальном множестве $Y \subseteq E^m$ векторных оценок альтернатив из множества X задано нечеткое отношение предпочтения $\mu_R : Y \times Y \to [0,1]$, которое характеризует цель ЛПР. При таком нечетком описании цели автор сравнивает между собой альтернативы по соответствующим им нечетким множествам значений векторов оценок y, используя нечеткое отношению предпочтения μ_R ("лучшим нечетким оценкам" отвечают "лучшие альтернативы").

Многокритериальные задачи с нечетким множеством критериев. В [18] рассматривается задача многокритериальной оптимизации с нечетким множеством критериев. Пусть $f_i(x), i \in N = \{1, ..., n\}$, - критериальные функции, определенные на множестве альтернатив *X.* В некоторых случаях ЛПР не может четко сказать, какие критерии $f_i(x)$, $i \in N$, характеризуют его цель, а может лишь задать некоторое нечеткое подмножество $\tilde{N} \subseteq N$ этих функций.

Предлагается подход к выбору альтернатив, которые можно считать решением задачи:

$f_i(x) \to \max\limits_{x \in X},\ i \in \tilde{N}$. Этот метод основан на идее построения агрегированной нечеткой цели ЛПР в виде нечеткого отношения $\tilde{R} = \bigcap\limits_{i \in \tilde{N}} R_i$ типа 2, где бинарные отношения $R_i : xR_iy \Leftrightarrow f_i(x) \geq f_i(y)$ $\forall x, y \in X,\ i \in N$. Решением задачи многокритериальной оптимизации с нечетким множеством критериев считается множество (типа 1) нечетких слабо эффективных альтернатив, недоминируемых по нечеткому отношению $\tilde{S} = \tilde{R} \setminus \overline{\tilde{R}^{-1}}$ типа 2, с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \min_{y \in X} \max_{j \in N} \{\eta(j) \mid \sum_{j \in N} r_j(x, y) \geq 1\}.$$

Показано, что в случае конечного множества критериев всегда существует максимизирующая нечеткая слабо эффективная альтернатива x^*, которая может быть найдена как решение задачи: $\mu(x^*) = \max\limits_{x \in X} \mu(x)$.

Задача целевого программирования. Целевым программированием называют подход к решению задач принятия решений, состоящий в минимизации степени недостижимости цели ЛПР (Romero, 2002 [19]).

Целевое программирование первоначально задумано для применения в однокритериальном линейном программировании (Charns и Cooper 1955, 1961 [20], [21]). Целевое программирование приобрело популярность в 1960-1970 годах благодаря работам Ijiri (1965) [22], Lee (1972) [23], и Ignizio (1976) [24]. Идея целевого программирования состоит в удовлетворении достижимости целевого уровня по каждому критерию. Согласно Steurer (1986) [25] целевое программирование идеально подходит в случае, когда известны целевые значения достижимости критериев. Целевое программирование отличается от линейного программирования следующим:

- концептуализацией критериев как целей;
- назначением приоритетов и/или весов для достижения целей;
- наличием девиантных переменных d_i^+ и d_i^- для измерения величин соответственно сверхдостижения и недостижения целевого уровня (или порога);
- условием минимизации взвешенной суммы девиантных переменных для нахождения наилучшего решения.

Ключевым элементом модели целевого программирования является условие минимизации функции достижимости, которая характеризует нежелательные отклонения переменных от заданных значений. Различные типы этой функции приводят к различным вариантам задач целевого программирования. Tamiz и др. (1995) [26] показывают, что около 65% моделей целевого программирования, которые известны в литературе, используют лексикографические функции достижимости, 21% - функции достижимости с весовыми коэффициентами, остальные виды функций достижимости имеют минимаксную структуру и минимизируют максимальное отклонение.

Задача целевого программирования с весовыми коэффициентами. Функция достижимости задачи целевого программирования с весовыми коэффициентами описывает нежелательные отклонения переменных, которые взвешены по важности. Модель целевого программирования с весовыми коэффициентами может быть представлена в следующем виде (Ignizio, 1976 [24]):

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+),\ f(x) + d_i^- - d_i^+ = g_i,$$
$$d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ d_i^- \geq 0,\ d_i^+ \geq 0,\ i = \overline{1,n},$$

где $\alpha_i = k_i$, если значение d_i^- является нежелательным, в противном случае $\alpha_i = 0$; $\beta_i = w_i$, если значение d_i^+ является нежелательным, в противном случае $\beta_i = 0$; w_i и k_i - весовые коэффициенты, характеризующие предпочтение ЛПР в достижении i-й цели, $i = \overline{1,n}$.

Лексикографическая модель задачи целевого программирования. Функция достижимости лексикографической модели задачи целевого программирования представляет собой упорядоченный вектор, размерность которого совпадает с числом Q уровней приоритета, установленных в модели. Каждая компонента этого вектора представляет собой значение нежелательного отклонения переменных от цели и имеет соответствующий приоритет. Лексикографическая модель задачи целевого программирования может быть представлена в следующем виде (Ignizio, 1976 [24]):

$$\operatorname{lex}\min_{x \in X} \left[\sum_{i \in H_1} \left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+ \right), \ldots, \sum_{i \in H_Q} \left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+ \right) \right];$$
$$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = g_i;\ d_i^- \geq 0;$$
$$d_i^+ \geq 0;\ i \in H_r,\ r \in \{1, \ldots, Q\},$$

где h_r представляет собой множество индексов целей, которые имеют r-й приоритет, $r \in \{1,...,Q\}$. Следует отметить, что лексикографические функции достижимости отвечают некомпенсационной структуре предпочтений. Это означает, что не существует конечного компромисса между целями, которые имеют различный приоритет (Romero, 1991 [27]).

Минимаксная модель задачи целевого программирования. Функция достижимости минимаксной модели целевого программирования реализует идею минимизацию максимального отклонения от поставленной цели. Если мы обозначим максимальное отклонение от цели через D, то минимаксная модель задачи целевого программирования будет иметь вид (Flavell, 1976 [28]):

$$\min_{x \in X} D;\ \alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+ - D \le 0;$$
$$f_i(\boldsymbol{x}) + d_i^- - d_i^+ = g_i;\ d_i^- \ge 0;$$
$$d_i^+ \ge 0,\ i \in \{1,...,q\}$$

Минимаксная модель задачи целевого программирования обеспечивает наиболее сбалансированное решение между достижением различных целей. Другими словами, это решение обеспечивает максимальное равенство между уровнями достижения различных целей. Таким образом, решение задачи минимаксной задачи целевого программирования представляет собой противоположный полюс по отношению к задаче целевого программирования с весовыми коэффициентами (Tamiz и др., 1998 [29]).

Многокритериальное программирование De Novo. При решении задачи оптимизации по нескольким критериям, обычно сталкиваются с тем, что невозможно оптимизировать все критерии данной системы одновременно. Это свойство, так называемого, компромисса означает, что не возможно улучшить значение одного критерия без ухудшения другого.

Zeleny (1981,1986) [30, 31] предложил несколько подходов для решения этой проблемы. Он предположил, что компромисс характерен только для недостаточно хорошо разработанной системы и, следовательно, могут быть устранен путем разработки лучшей, "оптимальной" системы. Для этого Zeleny (1995) [32] разработал концепцию программирования De Novo для проектирования оптимальной системы путем изменения допустимого множества.

В случае, когда стоимость разработки новой оптимальной системы превышает общий бюджет, была предложена оптимальная траектория развития бюджета. Shi (1995) [20] определил шесть типов оптимальных траекторий оптимального проектирования системы.

Рассмотрим задачу многокритериального линейного программирования следующего вида:

$$\max Cx,\ Ax \le b,\ x \ge 0, \qquad (7)$$

Обозначим $X = \{x \in R^n \,|\, Ax \le b, b \ge 0\}$ - допустимое множество решений. Идеальной точкой будем называть вектор $f^* = (f_1^*,..., f_q^*)$, где $f_k^* = \max\{C^k x \,|\, x \in X\}$, $k = \overline{1,q}$; C^k - k-я строка матрицы критериев C, $k = \overline{1,q}$.

В задаче (7) идеальная точка, как правило, не допустима. Поэтому интерес представляет не оптимизация критериев данной системы, а создание новой "оптимальной" системы. Для этого рассматривается следующая задача:

$$\max Cx,\ Vx \le B,\ x \ge 0, \qquad (8)$$

где $V = pA = (V_1,...,V_n) \in R^n$, $p = (p_1,..., p_m) \in R^m$ - вектор удельных затрат ресурсов, $B \in R^m$ - общий имеющийся ресурс. Постановка задачи (8) состоит в оптимизации удельных затрат ресурсов и общего бюджета с целью максимизации критериев. Такую модель можно назвать многокритериальной задачей оптимального проектирования системы. Далее будут описаны три метода программирования De Novo.

Синтетическое решение многокритериальной задачи оптимального проектирования системы. Рассмотрим каждый критерий отдельно. Тогда задача (8) может быть записана в виде:

$$\max C^k x,\ Vx \le B,\ x \ge 0,\ k = \overline{1,q}. \qquad (9)$$

Задача (9) представляет собой непрерывную задачу о ранце с решением $x^k = (x_1^k,..., x_n^k)$, где

$$x_j^k = \begin{cases} 0, & j \ne j_k \\ B/V_{j_k}, & j = j_k \end{cases},$$
$$j_k \in Arg \max_{j=1,n} (c_j^k / V_j).$$

Тогда значение целевой функции $f_k = C^k x^k$, а бюджет $B^k = V \cdot x^k$, $k = \overline{1,q}$.

Пусть $f_0^* = (f_1^*,..., f_q^*)$ - идеальная точка. Если число критериев меньше, чем переменных, мы можем решить систему уравнений $C^k x^k = f_k^*$,

$k=\overline{1,q}$, и получить синтетическое решение $x^1_{j_1},...,x^q_{j_q}$. Shi (1995) [20] определил синтетическое оптимальное решение, как $x^{**}=\left(x^1_{j_1},...,x^q_{j_q},0....0\right)\in R^n$.

Мета-оптимальная многокритериальная задача оптимального проектирования систем. Второй способ решения задачи оптимального проектирования предложен Zeleny (1986) [31] и состоит в решении задачи минимизации необходимого бюджета при условии достижения идеальной точки:

$$\min Vx, Cx = f^*,\ x\geq 0. \qquad (10)$$

Гибкие ограничения в мета-оптимальной многокритериальной задаче оптимального проектирования систем. Вместо ограничений-равенств в мета-задаче оптимального проектирования систем (10) Shi (1995) [20] предложил ограничения типа неравенств:

$$\min Vx, Cx \geq f^*,\ x\geq 0. \qquad (11)$$

Задача (11) состоит в минимизации необходимого бюджета при ограничениях, которые задают условие того, что значение целевых функций должны быть лучше, чем в идеальной точке. Обозначим $\bar{x}^*$ - оптимальное решение этой задачи. Сравнивая задачу (10) с задачей (11), можно заметить, что допустимая область задачи (11) шире, чем (10). Следовательно, оптимальное решение (11) не хуже решения (10).

Если обозначить: $B^{**}=V\cdot x^{**}$ - синтетический оптимальный бюджет, $B^*=V\cdot x^*$ - мета-оптимальный бюджет и $\bar{B}^*=V\cdot\bar{x}^*$ - мета-оптимальный бюджет с гибкими ограничениями, то согласно Shi (1995) [20] справедливы неравенства: $B^{**}\geq B^*\geq\bar{B}^*\geq B\geq B^k$, $k=\overline{1,q}$.

Модели анализа среды функционирования для оценки эффективности. Самая распространенная форма оценки эффективности может быть выражена как отношение каких-либо выходных параметров (выходов) ко входным параметрам (входам), необходимым для производства этих выходных параметров. Существуют различные подходы к оценке эффективности систем. Чаще всего используются методы регрессионного анализа и стохастической граничной производственной функции. Но результаты применения этих методов зачастую неполноценны и на их основе пользователь может сделать неверные выводы. Анализ среды функционирования (DEA – Data Envelopment Analysis) – это методология, основанная на применении линейного программирования. Изначально она была разработана для измерения производительности, затем успешно применена для оценки относительной эффективности фирм, которые используют множество идентичных входных параметров (входы) для производства множества идентичных выходных параметров (выходов). В DEA не предполагается, что сам исследователь будет присваивать веса для каждого входа и выхода. Применение гибких весов позволяет исключить риск субъективной оценки пользователя.

Charnes, Cooper и Rhodes (1978) [34] обобщили понятие коэффициента эффективности для систем с одним выходом и одним входом на случай систем с несколькими входами и выходами без использования наперед заданных весовых коэффициентов. Для вычисления значения коэффициента эффективности каждого объекта решается задача оптимизации.

Обозначим: x_{ik} - значение i-го входа по k-му критерию, $i=\overline{1,r}$; y_{jk} - значение j-го выхода по k-му критерию, $j=\overline{1,s}$; $\varepsilon>0$ - малое число, называемое неархимедовым количеством; δ_i,σ_j - переменные, соответствующих входу i и выходу j соответственно; v_i,u_j - виртуальные множители для входа i и выхода j соответственно $(\geq\varepsilon)$; λ_k - вес k- го критерия; h_k - коэффициент эффективности по k - му критерию.

Модель CCR. Предложена Charnes A., Cooper W.W. и Rhodes E. (1978) [33]. Для каждого критерия $k=\overline{1,n}$ необходимо решить задачу:

$$\max h_k=\sum_{j=1}^{s}u_jy_{jk};$$

$$\sum_{i=1}^{r}v_ix_{ik}=1,\ \sum_{j=1}^{s}u_jy_{jk}-\sum_{i=1}^{r}v_ix_{ik}\leq 0,\ k=\overline{1,n}; \qquad (12)$$

$$v_i\geq\varepsilon>0, i=\overline{1,r};\ u_j\geq\varepsilon>0,\ j=\overline{1,s}.$$

Эта задача состоит в нахождении наибольшей суммы взвешенных выходов по k - му критерию сохраняя при этом сумму его взвешенных входов равной единице при условии, что отношение суммы взвешенных выходы к сумме взвешенных входов для любого критерия должно быть не более, чем единица.

Двойственная, к записанной выше, задача

имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\min\left\{h_k = \theta_k - \varepsilon\cdot\left(\sum_{i=1}^{r}\delta_i + \sum_{j=1}^{s}\sigma_j\right)\right\};\\
&\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\cdot\lambda_k + \delta_i = h_k\cdot x_{ik},\\
&\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\cdot\lambda_k - \sigma_j = y_{jk},\ k=\overline{1,n};\\
&\delta_i \ge 0,\ i=\overline{1,r};\ \sigma_j \ge 0,\ j=\overline{1,s};\\
&\lambda_k \ge 0, k=\overline{1,n}.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Эта задача состоит в минимизации значения коэффициента интенсивности, который характеризует так называемый потенциал пропорционального уменьшения значений по входам k - го критерия. Можно так же сказать, что целевая функция характеризует наиболее несущественные значения во всех измерениях входа-выхода.

ВСС модель. В этой модели к двойственной задаче (13) добавлено еще одно ограничение на среду функционирования $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. Поэтому соответствующая прямая задача имеет несколько иную, чем задача (12), целевую функцию:

$$\max\left\{h_k = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - u_k\right\}.$$

Нечеткие модели анализа среды функционирования. Учитывая нечеткий характер данных в реальном мире, нечеткая модель анализа среды функционирования на основе модели CCR описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\max\ \tilde{f}_k = \sum_{j=1}^{s} u_j \tilde{y}_{jk};\\
&\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} = 1, \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \le 0,\ k=\overline{1,n};\\
&v_i \ge \varepsilon > 0, i=\overline{1,r};\ u_j \ge \varepsilon > 0,\ j=\overline{1,s}.
\end{aligned}$$

В этой постановке значение целевой функции выражаются нечетким числом треугольного вида $\tilde{f}_k^* = \left(f_k^{L^*}, f_k^{M^*}, f_k^{U^*}\right)$. Задача представляет собой многокритериальную задачу линейного программирования. Если использовать концепцию минимакса, то одно из ее решений (при одинаковом предпочтении на множестве критериев) можно найти, решив следующую задачу оптимизации (Tanaka (2001) [35]):

$$\begin{aligned}
&\max\lambda_k;\\
&\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}^{U} \ge \lambda_k\left(\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}^{U} - \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}^{M} + 1\right),\\
&\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}^{L} \ge w\cdot\lambda_k\left(\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}^{L} - \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}^{M} + 1\right),\\
&\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} = 1, \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \le 0,\ k=\overline{1,n};\\
&\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ip} - \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jp}^{L} \ge \lambda_k\left(\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jp}^{M} - \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jp}^{L}\right),\\
&p=\overline{1,n}; p\ne k; v_i \ge \varepsilon > 0, i=\overline{1,r};\ u_j \ge \varepsilon > 0,\ j=\overline{1,s}.
\end{aligned}$$

В заключение следует отметить, что несмотря на свою почти 125-летнюю историю модели многокритериального принятия решений до сих пор активно развиваются. Об этом свидетельствуют как многочисленные публикации, так и представительные конференции, которые проходят ежегодно во многих странах.

Список использованных источников

1. *Edgeworth Y.* Evolutionary Multi-Objective Optimization: Past,Present and Future. – 1881. - http://www.delta.cs.cinvestav.mx.
2. *Kuhn H.W., Tucker A.W.* Nonlinear Programming / Proceedings of II Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. – Berkeley: University of California Press, 1951. – P. 481-492.
3. *Charnes A., Cooper W.W.* Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. - New York: John Wiley & Sons, 1961. – 478 p.
4. *Bellman, R.E., Zadeh, L.A.* Decision-making in a fuzzy environment // Mgmt Sci. – 1970. - №17. – P. 141-166.
5. *Zeleny M.* Multiple Objective Decision Making: Kyoto. - New York: Springer-Verlag, 1975. – P. 153-206.
6. *Zimmermann H. J.* Fuzzy programming and linear programming with several objective functions.–1978.- http://www.elsevier.com.
7. *Zeleny M.* Multiple Criteria Decision Making. - New York: McGraw - Hill Book Company, 1982. – 95 p.
8. *Zimmermann H. J.* Fuzzy programming and linear programming with several objective functions // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – V. 1, № 1. – P. 45 - 55.

9. *Lee E. S., Li R. J.* Fuzzy multiple objective programming and compromise programming with pareto optimum // Fuzzy Sets and Systems. – 1993. – V. 53, №2. – P. 275-288.
10. *Sakawa M.* Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization. - New York: Plenum Press, 1993. – 308 p.
11. *Sakawa M., Kato K., Sundad H., Enda Y.* An interactive fuzzy satisfying method for multiobjective 0-1 programming problems through revised genetic algorithms // Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and System. – 1995. – V. 17, № 2. – P. 361-370.
12. *Hibano T., Sakawa M., Obata H.* Interactive decision making for multiobjective 0-1 programming problems with fuzzy parameters through genetic algorithms // Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and System. – 1996. – V. 18, № 6. – P. 1144-1153.
13. *Ida K., Gen M.* Improvement of two-phase approach for solving fuzzy multiple objective linear programming // Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and System. – 1997. – V. 19, № 1. – P. 115-121.
14. *Shih H. S., Lee E. S.* Fuzzy multi-level minimum cost flow problem // Fuzzy Sets and Systems.–1999.–V.107,№2.–P.159-176.
15. *Lai Y. J., Liu T. Y., Hwang C. L.* TOPSIS for MODM // European Journal of Oper. Res. – 1994. – V. 76, №3. – P. 486-500.
16. *Yu P.* LA class of solutions for group decision problems // Management Science. – 1973. – V. 19, №8. - P. 936-946.
17. *Orlovsky S. A.* Decisions making problems at conditions of fuzzy initial information. - M.: Science, 1981. – 208 p.
18. *Mashchenko S.O., Bovsunivskyi O.* The problem of multicriterion optimization with the fuzzy set of criteria // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. 2012. N 1. P. 193 - 198.
19. *Romero C.* Extended lexicographic goal programming: a unifying approach // Omega. – 2001. – V. 29, №1. – P. 63-71.
20. *Charnes A., Cooper W. W.* Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. - New York: John Wiley & Sons, 1961. – 490 p.
21. *Charnes A., Cooper W. W., Ferguson R.* Optimal estimation of executive compensation by linear programming // Manag. Sc.–1955. – V. 1, №1. – P. 138-151.
22. *Ijiri Y.* Management Goals and Accounting for Control. – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1965. – 390 p.
23. *Lee S.* Goal Programming for Decision Analysis.–Pittsburgh:Auerbach,1972.– 430 p.
24. *Ignizio J. P.* Goal Programming and Extensions.- Lexington:Heath, 1976. – 316 p.
25. *Steuer R.E.* Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. - New York: John Wiley, 1986. – 246 p.
26. *Tamiz M., Jones D. F., El-Darzi E.* A review of goal programming and its applications // Annuals of Operations Research. – 1995. – V. 58, №1. – P. 39-53.
27. *Romero C.* Handbook of Critical Issues in Goal Programming. – Cambridge: Oxford Pergamon Press, 1991. – 124 p.
28. *Lavell R. B.* A new goal programming formulation // Omega. - 1976. – V. 4, №4. – P. 731-732.
29. *Tamiz M., Jones D. F., Romero C.* Goal programming for decision making: an overview of the current state-of-art // European Journal of Operational Research. – 1998. – V. 111 , №4. – P. 569-581.
30. *Zeleny M.* A case study in multiple objective design: De Novo programming / Multiple Criteria Analysis, Operational Methods.– Hampshire: P. Nijkamp and J. Spronk, Eds. Gower Publishing Co, 1981. – P. 37-52.
31. *Zeleny M.* Optimal system design with multiple criteria: De Novo programming approach // Engineering Costs and Production Economics.–1986.-V.10,№1. – P. 89-95.
32. *Zeleny M.* Trade-offs-free management via De Novo programming // International Journal of Operations and Quantitative Management. – 1995. - V. 1, №1. – P. 3-13.
33. *Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision making units // European Journal of Operational Research. - 1978. - V. 2, №3. – P. 429-444.
34. *Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision making units // European Journal of Operational Research. – 1978. -V. 2, № 3. – P. 429 - 444.
35. *Guo P., Tanaka H.* Fuzzy DEA: A perceptual evaluation method // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. V. 119, № 1. - P. 149-160.

Поступила в редколлегию 06.03.2013

УДК 627.324.2/3:532.72

О.Р. Мічута[1], аспірант,
А.П. Власюк[2], д.т.н., професор,
П.М. Мартинюк[3], к.ф.-м.н., доцент.

R-вимірна задача впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів

Побудовано математичну модель R-вимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів і неізотермічних умов. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом радіальних базисних функцій. Наведено результати чисельних експериментів.
Ключові слова: фільтраційна консолідація, хімічна суфозія, просідання.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування(НУВГП), 33028, м. Рівне, вулю Соборна, 11
e-mail: michuta@ukr.net

[2] НУВГП, 33028, м. Рівне, вулю Соборна, 11
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

[3] НУВГП, 33028, м. Рівне, вулю Соборна, 11
e-mail: Martinjuk@ukr.net

O.R. Michuta[1], PhD student,
A.P. Vlasyuk[2], Doctor of science, prof.,
P.M. Martyniuk[3], PhD, assoc. prof.

R-dimensional problem of the influence of multicomponent chemical solutions on the processes of filtration consolidation of soils

The R-dimensional mathematical model of soil filtration consolidation problem has been built taking into account multicomponent chemical solution and unisothermal conditions. The numerical solutions of corresponding boundary-value problem have been found by the radial base functions method. The series of numerical experiments and their analysis have been carried out.
Key Words: filtration consolidation, chemical suffosion, subsidence.

[1] National University of Water Management and National Resources Use(NUWMNRU), 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: michuta@ukr.net

[2] NUWMNRU, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

NUWMNRU, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Ущільнення повністю насиченого ґрунту під впливом зовнішніх навантажень або його власної ваги можливе лише при переміщенні (витісненні) деякої частини порової рідини з пор ґрунту (в припущенні нестискуваності твердих частинок). Тому деформації розглядуваного масиву ґрунту пов'язані з фільтраційними процесами порової рідини. Як правило, причиною інтересу до задачі консолідації є порушення стійкості ґрунтових основ при будівництві цивільних та промислових об'єктів, а також аварії гідротехнічних споруд.

До побудови математичної моделі описаної задачі консолідації можна йти двома шляхами. Перший – використання співвідношень теорії пружності для пористих середовищ. Вказаний напрямок отримав назву «теорія об'ємних сил» і використаний в роботах [1-3]. Інший шлях – звести задачу консолідації до визначення динаміки зміни надлишкових напорів в поровій рідині. Такий підхід отримав назву «теорія фільтраційної консолідації ґрунтів». Відразу зазначимо, що на вказаній теорії ґрунтується і представлена стаття. Застосування вказаної теорії ґрунтується на ряді припущень: принцип гідроємності М.М. Герсеванова [1]; основна розрахункова модель В.І. Флоріна [2]. Отримана в результаті крайова задача

© О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк, 2013

набагато простіша, аніж згідно першого підходу. Фільтраційна теорія консолідації ґрунтів досить повно описана в роботах [2, 4]. Крім того, в роботах [5, 6] класичні математичні моделі фільтраційної консолідації доповнені та вдосконалені шляхом урахування впливу теплового поля та змінного поля концентрації солей у поровому розчині.

Однак в цих роботах в якості порової рідини розглядався однокомпонентний сольовий розчин. Насправді ж, в природних умовах, поровий розчин є багатокомпонентним. Прикладом може бути загіпсований ґрунт, в пори якого починає надходити інший сольовий розчин в результаті аварії на хімічному підприємстві, або як результат неконтрольованого витоку. Загіпсовані ґрунти досить часто використовуються в якості основ для будівництва. Моделювання поведінки таких ґрунтів має свої особливості. Основна – це необхідність урахування розчинення гіпсу (хімічної суфозії) в процесі будівництва та експлуатації споруд на цих ґрунтах [7].

Розгляд вказаних задач вимагає дослідження випадку, коли поровий розчин є багатокомпонентним за своїм хімічним складом. Моделювання фільтрації та масопереносу багатокомпонентних розчинів проведено в роботі [8].

Одна із цілей даної статті полягає у побудові математичної моделі консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатокомпонентних сольових полів та температури. Елементи таких досліджень наведено в роботах [6, 9-12].

Математична модель процесу фільтраційної консолідації. Математична модель R-вимірної задачі консолідації ґрунту в області під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу - компонентного сольового розчину та неізотермічних умов на основі робіт [6, 9] може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma a}\times$$
$$\times\left(\nabla\cdot\left(\mathbf{K_h}(\mathbf{c},\mathbf{N},T)\nabla h-\sum_{s=1}^{S}\left(\upsilon_{\mathbf{s}}\nabla c_s\right)-\upsilon_{\mathbf{T}}\nabla T\right)\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{S}\frac{\varepsilon_s(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma\rho_s a}\left(n\frac{\partial c_s}{\partial t}-e\frac{\partial N_s}{\partial t}\right)= \quad (1)$$
$$=\frac{\partial h}{\partial t},\quad \mathbf{X}\in\Omega,\ \ s=\overline{1,S},\ t>0,$$

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{D}_s\nabla c_s\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{D}_{\mathbf{T}s}\nabla T\right)-\left(\mathbf{u},\nabla \mathrm{c}_s\right)=$$
$$=n\frac{\partial c_s}{\partial t}+\frac{\partial N_s}{\partial t},\ s=\overline{1,S},\mathbf{X}\in\Omega,\ t>0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t}=-\gamma_s\left(C_s^{(\max)}(\mathbf{c},T)-c_s\right)N_s{}^{\alpha_s}, \quad (3)$$
$$s=\overline{1,S},\ \mathbf{X}\in\Omega,\ t>0,$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}\nabla T)-\rho c_p(\mathbf{u},\nabla T)=c_T\frac{\partial T}{\partial t},\ \mathbf{X}\in\Omega,t>0, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}-e\mathbf{v}=-\mathbf{K}(\mathbf{c},\mathbf{N},T)\nabla h+\sum_{s=1}^{S}\upsilon_{\mathbf{s}}\nabla c_s+\upsilon_{\mathbf{T}}\nabla T, \quad (5)$$
$$\mathbf{X}\in\Omega,\ t>0,$$

$$h(\mathbf{X},0)=H_0(\mathbf{X}),\quad c_s(\mathbf{X},0)=C_s^{(0)}(\mathbf{X}),$$
$$N_s(\mathbf{X},0)=N_s^{(0)}(\mathbf{X}),s=\overline{1,S}, \quad (6)$$
$$T(\mathbf{X},0)=T_0(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}\in\overline{\Omega},$$

$$l_h h(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma}=H_1(\mathbf{X},t),$$
$$l_{c_s}c_s(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma}=C_s^{(1)}(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma,s=\overline{1,S}, \quad (7)$$
$$l_T T(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma}=T_1(\mathbf{X},t),\qquad \mathbf{X}\in\Gamma,$$

$$\frac{dl(\mathbf{X},t)}{dt}=$$
$$=-\int_{l(\mathbf{X},t)}^{L(\mathbf{X},t)}\frac{1}{\left(1-\sum_{s=1}^{S}\frac{N_s}{\rho_s}(1+e)\right)(1+e)}\times$$
$$\times\left(\frac{R\gamma a}{1+(R-1)\xi}\frac{\partial h}{\partial t}-(1+e)\times\right. \quad (8)$$
$$\left.\times\sum_{s=1}^{S}\left(\frac{\gamma_s}{\rho_s}\left(C_s^{(\max)}-c_s\right)N^{\alpha_s}\right)dx.\right.$$

де $t\in[0;t_0]$, $l_h, l_{c_s}, l_T, s=\overline{1,S}$ - оператори, що задають граничні умови на межі Γ для напору, концентрації солей у рідкій фазі та температури відповідно; $H_0(\mathbf{X})$, $C_s^{(0)}(\mathbf{X})$, $N_s^{(0)}(\mathbf{X})$, $s=\overline{1,S}$, $T_0(\mathbf{X})$, $H_1(\mathbf{X},t)$, $T_1(\mathbf{X},t)$ - задані функції. Тут використані наступні позначення: $h(\mathbf{X},t)$ - надлишкові напори в поровій рідині;

$\mathbf{c}(\mathbf{X},t)=\{c_s(\mathbf{X},t)\}_{s=1}^{S}$, $\mathbf{N}(\mathbf{X},t)=\{N_s(\mathbf{X},t)\}_{s=1}^{S}$ - вектори концентрації солей в рідкій та твердій фазах відповідно; e - коефіцієнт пористості; γ - питома вага сольового розчину; a - коефіцієнт стисливості ґрунту; ξ - коефіцієнт бічного тиску грунту; $\mathbf{K}(\mathbf{c},\mathbf{N},T)$ - коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах та температури; $\mathbf{\upsilon}_s=\{\upsilon_{s\,ij}\}$, $s=\overline{1,S}$, $\mathbf{\upsilon}_\mathbf{T}=\{\upsilon_{T\,ij}\}$, $i,j=\overline{1,R}$ - коефіцієнти хімічного та термічного осмосів; N_s, $s=\overline{1,S}$ - концентрації солей в твердій фазі; ρ_s, $s=\overline{1,S}$ - густини солей в твердій фазі; n - пористість ґрунту; $\mathbf{D}_s=\{D_{s\,ij}\}$, $s=\overline{1,S}$, $i,j=\overline{1,R}$ - коефіцієнти дифузії; γ_s, $s=\overline{1,S}$ - коефіцієнти швидкості масообміну; α_s, $s=\overline{1,S}$ - показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи [13]; $\mathbf{D}_{\mathbf{T}s}=\{D_{Ts}^{(ij)}\}$, $s=\overline{1,S}$, $i,j=\overline{1,R}$ - коефіцієнти термічної дифузії; $C_s^{(\max)}$, $s=\overline{1,S}$ - концентрації граничного насичення, які залежать від температури та концентрації інших солей в рідкій фазі; $\lambda=\{\lambda_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,R}$ - коефіцієнт теплопровідності вологого ґрунту; ρ - густина порового сольового розчину; C_ρ - питома теплоємність порового сольового розчину; C_T - об'ємна темлоємніть ґрунту; $\mathbf{u}=(u_1;u_2;u_3;...;u_R)$ - вектор швидкості фільтрації; $\mathbf{v}=(v_1;v_2;v_3;...;v_R)$ - вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту.

В процесі консолідації тверді частинки ґрунту зближаються. Як результат – верхня межа ґрунту просідає і область консолідації змінюється з часом. Крім того, зміна області консолідації може відбуватись і за рахунок хімічної суфозії. Тому крайова задача (1)-(7) доповнена кінематичною граничною умовою на рухомій верхній межі (8). Дану умову виведено в R - вимірному випадку, припустивши, що ґрунт може просідати лише за рахунок вертикальних зміщень. Тут верхня межа ґрунту описується рівнянням $x_1=l(x_2,x_3,...,x_R,t)$, де x_1 - вертикальна координата.

Умову (8) запишемо у вигляді

$$\frac{dl(t)}{dt}=-\int_{l(\mathbf{X},t)}^{L(\mathbf{X},t)}F(\mathbf{c},\mathbf{N},h)dx. \qquad (9)$$

Чисельне розв'язання крайової задачі. Чисельне розв'язання крайової задачі (1)–(8) здійснене методом радіальних базисних функцій [6]. Покриємо область Ω вузловими точками $\mathbf{X}_j=\left(x_{1j}^{(\mathbf{X})},x_{2j}^{(\mathbf{X})},...,x_{Rj}^{(\mathbf{X})}\right)$, $j=\overline{1,m}$. Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (1)–(8) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{X},t)&\approx\sum_{j=1}^{m}h_j(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_H),\\
c_s(\mathbf{X},t)&\approx\sum_{j=1}^{m}c_{sj}(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_s),\\
N_s(\mathbf{X},t)&\approx\sum_{j=1}^{m}N_{s\,j}(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_{N_s}),\ s=\overline{1,S},\\
T(\mathbf{X},t)&\approx\sum_{j=1}^{m}T_j(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_T),
\end{aligned} \qquad (10)$$

де $\varepsilon_h,\varepsilon_s,\varepsilon_{N_s},\varepsilon_T,\ s=\overline{1,S}$, – параметри форми; $\varphi_j(r_j,\varepsilon)$ – радіальні базисні функції; $h_j(t),c_{sj}(t),N_{s\,j}(t),T_j(t),\ s=\overline{1,S}$, – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу; $r_j=\sqrt{\left(x_1-x_{1j}^{(\mathbf{X})}\right)^2+\left(x_2-x_{2j}^{(\mathbf{X})}\right)^2+...+\left(x_R-x_{Rj}^{(\mathbf{X})}\right)^2}$, $j=\overline{1,m}.$

Покриємо замикання області $\overline{\Omega}$ колокаційними точками $\mathbf{Y}_i=\left(x_{1i}^{(\mathbf{Y})},x_{2i}^{(\mathbf{Y})},...,x_{Ri}^{(\mathbf{Y})}\right)$, $i=\overline{1,M}$. Введемо множини $\varpi=\{i:\mathbf{Y}_i\in\Omega\}$, $\gamma_1^{(h)}=\{i:\mathbf{Y}_i\in\Gamma_1^{(h)}\}$, $\gamma_2^{(h)}=\{i:\mathbf{Y}_i\in\Gamma_2^{(h)}\}$. Тут $\Gamma_1^{(h)}$, $\Gamma_2^{(h)}$ - частини межі Г, де для функції $h(\mathbf{X},t)$ задано граничні умови першого та другого роду відповідно. Аналогічно визначаємо множини номерів граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення

$$r_{ij}=\sqrt{\left(x_{1i}^{(\mathbf{Y})}-x_{1j}^{(\mathbf{X})}\right)^2+...+\left(x_{Ri}^{(\mathbf{Y})}-x_{Rj}^{(\mathbf{X})}\right)^2},\ j=\overline{1,m},$$
$$i=\overline{1,M},\ m\geq M.$$

Підставляючи (10) в рівняння (1)–(4), початкові умови (6) та граничні умови (7), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{H}(\mathrm{t})=\{h_j(t)\}_{j=1}^{m}$, $\mathbf{C_s}(\mathrm{t})=\{C_{sj}(t)\}_{j=1}^{m}$, $\mathbf{N_s}(\mathrm{t})=\{N_{s\,j}(t)\}_{j=1}^{m}$, $s=\overline{1,S}$, $\mathbf{T}(\mathrm{t})=\{T_j(t)\}_{j=1}^{m}$:

$$\mathbf{M}^{(1)}\frac{d\mathbf{H}(t)}{dt}+\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s(t),\mathbf{T}(t))\mathbf{H}(t)= =\mathbf{K}_s{}^{(1)}\frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt}+\mathbf{A}_s{}^{(1)}\frac{d\mathbf{C}_s(t)}{dt}+ +\mathbf{A}_s{}'^{(1)}\mathbf{C}_s(t)+\mathbf{E}'^{(1)}\mathbf{T}(t)+\mathbf{F}^{(1)}, \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_s^{(2)}\frac{d\mathbf{C}_s(t)}{dt}+\mathbf{L}_s^{(2)}(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s(t),\mathbf{T}(t))\mathbf{C}_s(t)= =\mathbf{K}_s^{(2)}\frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt}+\mathbf{E}'^{(2)}\mathbf{T}(t)+\mathbf{F}^{(2)}, s=\overline{1,S} \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_s{}^{(3)}\frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt}=\mathbf{L}_s{}^{(3)}\left(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s{}^{\alpha_s}(t)\right), s=\overline{1,S}, \quad (13)$$

$$\mathbf{M}^{(4)}\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}+\mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s(t),\mathbf{T}(t))\mathbf{T}(t)=\mathbf{F}^{(4)}, \quad (14)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{(1)}\mathbf{H}_0(t)=\widetilde{\mathbf{F}}^{(1)},\widetilde{\mathbf{M}}_s^{(2)}\mathbf{C}_s^{(0)}(t)=\widetilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \widetilde{\mathbf{M}}_s^{(3)}\mathbf{N}_s^{(0)}(t)=\widetilde{\mathbf{F}}^{(3)}, s=\overline{1,S},\widetilde{\mathbf{M}}^{(4)}\mathbf{T}_0(t)=\widetilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \quad (15)$$

де $\mathbf{M}_s^{(k)}=\left\{m_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\widetilde{\mathbf{M}}_s^{(k)}=\left\{\widetilde{m}_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\mathbf{L}_s^{(k)}=\left\{l_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $k=2,3;$ $\mathbf{M}^{(k)}=\left\{m_{ij}^{(k)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\widetilde{\mathbf{M}}^{(k)}=\left\{\widetilde{m}_{ij}^{(k)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\mathbf{L}^{(k)}=\left\{l_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $k=1,4;$ $\mathbf{K}_s^{(k)}=\left\{k_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $k=1,2;$ $\mathbf{A}_s^{(1)}=\left\{a_{sij}^{(1)}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\mathbf{A}_s'^{(1)}=\left\{a'^{(1)}_{sij}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\mathbf{E}'^{(1)}=\left\{e'^{(1)}_{ij}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\mathbf{E}'^{(2)}=\left\{e'^{(2)}_{ij}\right\}_{i=1,\ j=1}^{M,\ m}$, $\widetilde{\mathbf{F}}^{(k)}=\left\{\widetilde{f}_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{m}$, $\mathbf{F}^{(k)}=\left\{f_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{m}$, $k=\overline{1,4}$, $s=\overline{1,S}$.

Елементи матриць задачі Коші (10)-(14) визначаються однотипно, але досить громіздко. Так для рівняння теплопровідності (4) маємо

$$m_{ij}^{(4)}=-c_T\varphi_j(r_j,\varepsilon_T), i=\overline{\omega};$$

$$l_{sij}^{(4)}=\begin{cases}\nabla(\boldsymbol{\lambda}\nabla\varphi_j(r_{ij},\varepsilon_T))-\rho c_\rho\mathbf{u}\nabla\varphi_j(r_{ij},\varepsilon_T), & i=\overline{\omega};.\\ \varphi_j(r_{ij},\varepsilon_T), & i\in\gamma_1^{(T)};\\ (\nabla\varphi_j(r_{ij},\varepsilon_T),\mathbf{n}), & i\in\gamma_2^{(T)};\end{cases}$$

$$f_j^{(4)}=\begin{cases}T_1(t), i\in\gamma_1^{(T)};\\ 0, \ i\in\gamma_2^{(T)}.\end{cases}$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (10)–(14) дискретизуємо часовий відрізок рівномірно з кроком τ. Для дискретизації рівнянь (10), (11), (13) по часу використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [6, 15]. Оскільки рівняння (12) є нелінійними, то для їх лінеаризації використано метод Ньютона [15].

$$\mathbf{M}_s^{(3)}\frac{\mathbf{N}_s{}^{(k+1)}-\mathbf{N}_s{}^{(k)}}{\tau}=\alpha_s\mathbf{L}_s^{(3)}\left(\mathbf{C}_s{}^{(k)},\mathbf{N}_s{}^{(\alpha_s-1)}(t_k)\right)\times \times\left(\mathbf{N}_s{}^{(k+1)}-\mathbf{N}_s{}^{(k)}\right)+\mathbf{L}_s^{(3)}\left(\mathbf{C}_s{}^{(k)},\mathbf{N}_s{}^{\alpha_s}(t_k)\right), s=\overline{1,S}.$$

Отриману після дискретизації по часу систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) розв'язано модифікованим методом Гауса, але перед цим попередньо використовувався метод найменших квадратів [16].

Для перерахунку координат вузлових та коллокаційних точок використано кінематичну граничну умову (9):

$$\frac{x_{1j}^{(k+1)}-x_{1j}^{(k)}}{\tau}=-\int_{l^{(k)}(\mathbf{X},t)}^{L(\mathbf{X},t)}F\left(\mathbf{c}^{(k+1)},\mathbf{N}^{(k+1)},h^{(k+1)}\right)dx.$$

Результати чисельних експериментів. Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву загіпсованого ґрунту форми прямокутного паралелепіпеда довжиною ребер *24 м* , *24 м* , *10 м* по осях *Ox, Oy* та *Oz* відповідно (рис.1). Нехай $c_1(\mathbf{X},t)$, $N_1(\mathbf{X},t)$ - концентрації звичайної кам'яної солі NaCl, яка починає надходити в грунт з фундаменту споруди; $c_2(\mathbf{X},t)$, $N_2(\mathbf{X},t)$ - концентрації гіпсу.

Межу ABCD позначимо як Γ_1, KLMN – Γ_2, $A_1B_1C_1D_1$ – Γ_3, ABC_1D_1 і CDC_1D_1 - Γ_4, $ADA_1D_1\cup BCB_1C_1$ – Γ_5. Граничні умови в чисельних експериментах взято наступними:

$$(\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}=0, h(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1}=H_1(\mathbf{X},t), \mathbf{X}\in\Gamma_1,$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\Gamma_4}=\left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{\Gamma_5}=0,\ t>0,$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial z}\right|_{\Gamma_1\cup\Gamma_3}=\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{\Gamma_5}=\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{\Gamma_4}=0,$$

$$c(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_2}=C_1(\mathbf{X},t), \mathbf{X}\in\Gamma_2, t>0,$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{\Gamma_3}=\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{\Gamma_5}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\Gamma_4}=0,$$

$$T(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1}=T_1(\mathbf{X},t), \mathbf{X}\in\Gamma_1,$$

$$T(\mathbf{X})\big|_{\Gamma_2}=T_2(\mathbf{X},t), \mathbf{X}\in\Gamma_2,\ t>0.$$

В області KLMN грунту прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q=20\cdot10^4$ *кг/м²доба.* Область KLMN – квадрат зі сторонами, паралельними відповідним осям координат при $x\in[6,16]$ та $y\in[6,16]$.

Для надлишкових напорів межі ABCD , ADA_1D_1, ABA_1B_1, CDC_1D_1, BCB_1C_1 є

дренованими, а область KLMN та межа $A_1B_1C_1D_1$ - непроникні. Для концентрації солей межі ABA_1B_1, CDC_1D_1, $A_1B_1C_1D_1$, ADA_1D_1, BCB_1C_1, ABCD непроникні, а область KLMN є дренованою. Температура на межі ABCD та області KLMN вважається відомою.

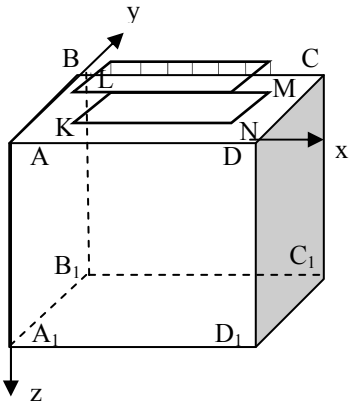


Рис. 1. Фільтраційна консолідація загіпсованого масиву ґрунту

Вхідні дані вибираємо наступними:

$$n = 0.4,\ e = 0.7,\ \alpha_1 = 0.5,\ \alpha_1 = 0.5,$$

$$a = 2{,}5 \cdot 10^{-7}\ м^2/H,\ \rho_1 = 2300\ кг/м^3,$$

$$\rho_2 = 2100\ кг/м^3\ \ C_2^{(\max)} = 350\ г/л,$$

$$D_1 = 0.02\ м^2/доба,\ D_2 = 0.02\,м^2/доба,,$$

$$\gamma = 10^4\ кг/\left(м^2 \cdot доба^2\right),\ \gamma_1 = 6.5 \cdot 10^{-4}\ доба^{-1},$$

$$\gamma_2 = 0\ доба^{-1},,$$

$$\upsilon_1 = 2.8 \cdot 10^{-6}\ м^5/\left(кг \cdot доба\right)$$

$$\upsilon_2 = 2.9 \cdot 10^{-5} м^5/\left(кг \cdot доба\right),\ C_1(t) = C_m,$$

$$\xi = 0.75\ ,\ T_1(t) = 30^o C,$$

$$C_\rho = 4{,}2\ кДж/\left(кг \cdot град\right),$$

$$\lambda = 108\ кДж/\left(м \cdot град \cdot доба\right),$$

$$C_T = 2137\ кДж/\left(м^3 \cdot град\right),$$

$$\upsilon_T = 2{,}8 \cdot 10^{-6}\ м^3/\left(доба \cdot град\right),$$

$$T_2(t) = 17 + 13\cos\left(\frac{\pi t}{180}\right),$$

$$C_2^{(0)} = \begin{cases} 350\ г/л,\ z = 0, \\ 10\ г/л,\ z \neq 0; \end{cases}\quad T_0 = \begin{cases} 30^\circ C, z = 0, \\ 4^\circ C, z \neq 0. \end{cases}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладався рівним $0{,}001\,м/доба$. Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазі визначався за формулою [16]

$$K_h(C_1, N_1, T) = k_0(C_1, T)e^{-\gamma\frac{N_1}{C_1^{(\max)}}},$$

де $k_0(C_1, T)$ - коефіцієнт фільтрації, апроксимований згідно експериментальних даних взятих з монографії [6].

Загіпсованість ґрунту становить *m=20%*, а густина ґрунту $\rho_g = 2000\ \ кг/м^3$. Початкове значення гіпсу в твердій фазі обчислювалось за формулою $N_1^{(0)} = \frac{m}{100}\rho_g$.

Кількість вузлових і коллокаційних точок покладалася рівною 2744. Крок по часу $\tau = 10$ діб. Кількість часових проміжків 31. Параметр форми для невідомих функцій становив $\varepsilon = 2.5$.

Значення концентрації граничного насичення гіпсу $C_2^{(\max)}(C_1, T)$, що залежить від концентрації солі та температури отримано внаслідок апроксимації даних, взятих з [17].

Початковий розподіл надлишкових напорів $h_0(x, y, z)$ залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай маємо довільний закон розподілу навантаження $q(x, y)$ в області Ф його прикладання, яка лежить у площині $z = 0$. Для довільної точки $\mathbf{X} = (x, y, z)$ області консолідації, що не належить до області Ф прикладання навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначаємо за формулою [4]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{\theta(\mathbf{X})}{3\gamma},$$

де $\theta(\mathbf{X})$ - сума головних напружень у точці $\mathbf{X}$, яка визначається згідно формули [4]

$$\theta(\mathbf{X}) = \iint_\Phi \frac{q(\xi, \eta, 0)}{\pi}(1+\nu)\frac{z}{r^3}d\xi d\eta,$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$; ν - коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо випадок, коли область Ф являє собою прямокутник $x \in [a;b], y \in [c,d]$, а площина прикладення навантаження і паралельною до площини *XOY*. Тоді для наближеного обчислення вищенаведеного інтеграла можна використати квадратурні формули.

При вказаних даних у площині при $x = 12\ м$, паралельній *YOZ*, були знайдені значення напору, концентрації солей та гіпсу у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультиквадратичної

Таблиця 1

Величина просідань верхньої межі грунту за 300 діб при $x = 12$ *м*, $y = 12$*м*

№	Параметри	I	II	III
1	*m=10%, q=* $20 \cdot 10^4$ *кг/м²доба²*	18,31 см	17,59 см	4,09 %
2	*m=10%, q=0 кг/м²доба²*	1,08см	0,31 см	248,39 %
3	*m=20%, q=* $20 \cdot 10^4$ *кг/м²доба²*	22,03 см	21,16 см	4,11 %
4	*m=20%, q=0 кг/м²доба²*	1,25 см	0,32 см	290,62 %
5	*m=30%, q=* $20 \cdot 10^4$ *кг/м²доба²*	27,69 см	26,59 см	4,14 %
6	*m=30%, q=0 кг/м²доба²*	1,52 см	0,36 см	322,22 %

РБФ $\varphi(r,\varepsilon) = \sqrt{1+(r\varepsilon)^2}$ і побудовані відповідні графіки (рис.2, 3).

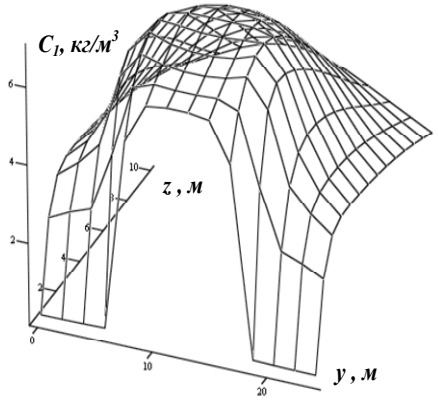


Рис.2. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ($C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$)

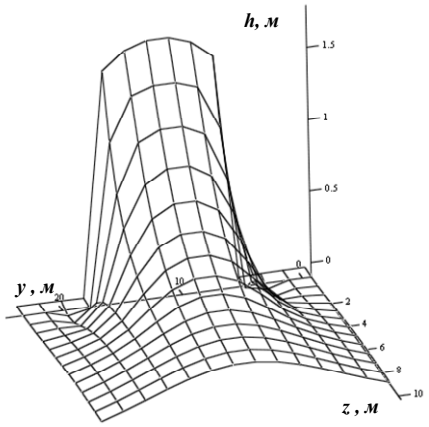


Рис.3 Розподіл надлишкових напорів

В нижченаведеній таблиці: I - величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$; II - величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = const$; III - збільшення просідань при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ в порівнянні $C_2^{(\max)} = const$.

З нижченаведеної таблиці видно, що урахування залежності концентрації граничного насичення гіпсу призводить до збільшення величини просідання верхньої межі масиву ґрунту. Це можна пояснити тим, що гіпс розчиняється швидше при збільшенні концентрації солі в поровій рідині. Для порівняння можна проаналізувати останній стовпець таблиці, в якому наведено збільшення просідання у відсотках. Також в таблиці наведено результати просідання при різній загіпсованості ґрунту (10%, 20% та 30%). Збільшення загіпсованості ґрунту призводить до збільшення просідання ґрунту.

Корисними є чисельні експерименти з визначення просідання верхньої межі масиву ґрунту при відсутності початкових надлишкових напорів. Зокрема, як видно з таблиці, просідання в результаті розчинення гіпсу при загіпсованості 20% і урахування залежності $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ збільшується від 0,32 см до 1,25 см (на 290,62 %). Тобто, якщо процес консолідації грунту під фундаментом цеху хімічного виробництва завершився, але в грунт починає надходити не вода, а сольовий розчин, то це спричиняє додаткові просідання. До того ж, ці просідання будуть нерівномірними. Тому урахування дії не чистої води, а сольового розчину може значно змінити прогнозні розрахунки просідання будівель на загіпсованих ґрунтах.

Висновки. В роботі досліджено вплив багатокомпонентних сольових розчинів та температури на розподіл надлишкових напорів та на просідання верхньої межі масиву ґрунту. При проведенні і аналізі чисельних експериментів виявлено, що надходження в загіпсований грунт іншого хімічного розчину може значно змінити прогнозні розрахунки просідання ґрунт.

Подальші дослідження будуть стосуватися якісної теорії крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі та обґрунтуванню точності та збіжності отриманих наближених розв'язків.

Список використаних джерел

1. *Zaretskyi J.K.* Theory of soils consolidation / J.K. Zaretskyi. - Moscow: Nauka. - 1967. - 270 p. (in Russian).
2. *Florin V.A.* Fundamentals of soil mechanics **V.2**. / V.A. Florin. – Moscow: Gosstroyizdat, 1961. - 560 p. (in Russian).
3. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation / M.A. Biot // J. Appl. Phys. – 1941. - Vol. 12, №2. – Pp. 155-165 (in English).
4. *Ivanov P.L.* Soils and foundation of hydrotechnical constructions. Soil mechanics. / *P.L Ivanov.* – Moscow: Vyshaya shkola, 1991. – 447 p. (in Russian).
5. *Bulavatskyi V.M.* Mathematical modeling of filtration consolidation taken into account of salt transfer in the system of the double relaxation / V.M. Bulavatskyi, V. Skopetskyi // Cybernetics and system analysis. - 2008. - № 1. - P. 116-126. (in Ukrainian).
6. *Vlasyuk A.P.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. / *A.P. Vlasyuk, P.M. Martiniuk* – Rivne: NUVGP, 2008. – 416 p. (in Ukrainian).
7. *Petrukhin V.P.* Computation of the suffusion deformations in the saline soils / V.P.Petruhin // Bases, foundations and soil mechanics. - 1995. - № 5. - S. 11-13. (in Russian).
8. *Class H.* Numerical simulation of non-isothermal multiphase multicomponent processes in porous media. 1. An efficient solution technique / H. Class, R. Helmig, P. Bastian // Advances in Water Resources. – 2002. - 25 . – Pp. 533–550 (in English).
9. *Vlasyuk A.P.* Numerical solution of consolidation problems and filtration destruction of soil in conditions of heat and mass transfer by radial basis functions method / *A.P. Vlasyuk, P.M. Martiniuk*. – Rivne: NUVGP, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).
10. *Michuta O.R.* Mathematical modeling of soils consolidation considering non-isothermal conditions and the impact of multicomponent chemical solutions in one-dimensional case / O.R. Michuta // Scientific notes of NaUKMA. - Ser. computer sciences. - 2012. – V. 138. - P. 100-105. (in Ukrainian).
11. *Michuta O.R.* Mathematical modeling of the effect of the chemical suffusion on filtration consolidation of saline soils in non-isothermal conditions / O.R. Michuta, A.P. Vlasyuk, P.N. Martiniuk / / Mathematical modeling. - 2013. -V.25. - Number 2. - P. 3-18. (in Russian).
12. *Michuta O.R.* Mathematical modeling of chemical suffusion on filtration consolidation of saline soils in non-isothermal conditions in the two-dimensional case / O.R. Michuta, A.P. Vlasyuk, P.M. Martyniuk // Bulletin of Taras Shevchenko National Univ. of Kyiv. - Ser. Physics and Mathematics. - 2011. – Issue 4. - P. 169-175. (in Ukrainian).
13. *Verigin N.N.* Convective diffusion and mass transfer in the process of solution filtration in porous media / N.N.Verigin, V.S.Sarkisian // Hydrogeological studies of water intake, water step-down and drainage systems. – Moscow, 1980. - P. 19-24. (in Russian).
14. *Samarskyi A.A.* Numerical methods of mathematical physics / A.A. Samarskyi and A.V. Gulin. – Moscow: Scientific World, 2003. - 316 p. (in Russian).
15. *Shakhno S.M.* Numerical methods of linear algebra / S.M. Shakhno. - Lviv: Ivan Franko National University of Lviv., 2007. - 243 p. . (in Ukrainian).
16. *Dobronravov O.O.* Modeling of groundwater filtration considering suffusion and mudding / O.O.Dobronravov, V.S.Kremez // Problems of water supply, drainage and hydraulics. - 2006. - Vol. 7. - P. 141-146. (in Ukrainian).
17. *Lukner L.* Modeling of undergroundwater water migration / L. Lukner, V.M. Shestakov. - Moscow: Nedra, 1986. - 208 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 21.02.13

УДК 519.816+519.237.8

Мулеса О.Ю., викладач

Послідовний аналіз варіантів в нечітких задачах кластеризації та ідентифікації

Розглядається задача виявлення у заданій множині близьких між собою за деякою ознакою елементів у випадку, коли не задано метрику або ознаки об'єктів є якісними. Пропонується модифікація методу послідовного аналізу варіантів до розв'язання поставлених задач. Розглядається прикладна задача та схема її розв'язання.

Ключові слова: кластеризація, ідентифікація, послідовний аналіз варіантів, нечітка база знань, група ЖСБ.

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46,
e-mail: mulesa.oksana@gmail.com

O. Y. Mulesa, teacher

A sequential analysis of variants in clustering and identification

The problem of detecting in a given closely related set for some sign of the elements when not specified is metric, or features of objects are qualitative. A modification of the sequential analysis of variants to solve tasks is proposed. An application tasks and scheme to solve it is considered..

Key words: clustering, identification, sequence analysis of variants, fuzzy knowledge base, a group of female sex workers.

National University of Uzhgorod, 88000,
Uzhgorod, Pidgirna str., 46,
e-mail: mulesa.oksana@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

Задачі виявлення в заданій множині підмножини близьких між собою за деякою ознакою чи сукупністю ознак елементів та задача оцінки кількості елементів серед заданих, які належать певній групі, виникають в багатьох прикладних задачах. Зокрема, в соціології, медицині, політології виникає проблема виявлення в суспільстві певних груп населення, які об'єднані між собою спільними ознаками (родом занять, інтересами, звичками, особливостями здоров'я тощо) [1]. Існує декілька підходів до побудови математичної моделі та пошуку розв'язків для такого класу задач. До прикладу, такі задачі можуть бути сформульовані як задачі кластеризації [2] та розв'язуватися одним з класичних методів. Проте зустрічаються випадки, коли застосування відомих методів є недоцільним або утрудненим через специфічні особливості природи прикладної задачі (неможливість введення метрики, переважна більшість ознак об'єктів якісні тощо) [1]. Тому доцільним є розробка підходів до розв'язання згаданого класу задач у випадку, коли відомими методами знайти розв'язок, який є прийнятним для особи, що приймає рішення, є неможливим.

Наприклад, з метою профілактики поширення ВІЛ-інфекції та проведення оцінки кількості жінок, які належать до групи ЖСБ (жінок секс-бізнесу) в різних містах України проводяться соціологічні дослідження, робляться спроби побудувати соціально-демографічний портрет жінки, що надає платні сексуальної послуги [3]. В [4] запропоновано підхід до оцінки кількості жінок секс-бізнесу, який базується на використанні статистичної інформації. В основі даного підходу лежить використання методики RDS [4], теоретичною основою якої є теорія ланцюгів Маркова та теорія малих мереж та методики TLS [4] – вибіркового методу, відповідно до якого вибір учасників дослідження відбувається на спеціальних територіях (в місцях збору "цільової" групи).

Застосування такого підходу вимагає великих фінансових витрат із залученням міжнародних фондів, що не завжди є можливим та доцільним. До того ж, при такому підході здійснюються грубі узагальнення, які нівелюють вплив на вибір життєвого шляху таких важливих чинників як "релігійність" того чи іншого регіону, рівень освіченості населення місцевості тощо. Тому необхідною є побудова моделі, яка дала б змогу скоротити трудові та фінансові витрати при побудові соціально-демографічного портрету особи та при цьому максимально узагальнювала би всі фактори, що є складовими соціально-демографічного портрету, могла б врахувати не тільки статистичні дані, а й знання експертів.

© О. Ю. Мулеса, 2013

Постановка задачі

Виділимо дві взаємопов'язані задачі.

Задача визначення оціночної кількості елементів із заданої множини, які належать певній її підмножині. Нехай задано множину об'єктів та множину ознак (критеріїв), за якими ці об'єкти оцінюються. Для кожного з об'єктів відомі значення за кожною з ознак. Необхідно оцінити скільки об'єктів із заданої множини належать певній її підмножині. Вказана підмножина описується правилами (співвідношеннями), побудованими на основі експертних опитувань щодо характеристик об'єктів, які належать підмножині. В такому представленні задачу можна віднести до задачі кластеризації [2], формальна постановка якої є такою: задано множину об'єктів *X*, необхідно розбити їх на групи (кластери) близьких між собою об'єктів.

Задача визначення міри належності об'єкта до заданої множини (кластеру). Нехай для заданого об'єкта, який характеризується набором ознак, необхідно оцінити міру його належності до деякої групи. Група задається правилами, побудованими на основі експертних опитувань щодо характеристик об'єктів, які їй належать. В такій постановці дана задача може бути віднесеною до задач ідентифікації [5].

Алгоритми кластеризації та ідентифікації є ефективними у випадку, коли задана метрика, за якою встановлюється відстань між об'єктами (для задач кластеризації), або вхідні та вихідні величини мають кількісний характер (для задач ідентифікації). В інших випадках застосування згаданих алгоритмів є утрудненим або вимагає допоміжних прийомів для приведення початкових даних до необхідної форми.

В роботі пропонується підхід до розв'язання поставлених задач, який базується на методі послідовного аналізу варіантів [6, 7] та не вимагає введення метрики між об'єктами.

Формальна постановка задачі та схема її розв'язування

Нехай задано множину об'єктів $O=\{O_1,O_2,\ldots,O_n\}$. Необхідно оцінити кількість об'єктів з заданої множини, які належать певній її підмножині G. Оцінка проводиться на основі відомих значень ознак (критеріїв) для кожного об'єкта з початкової множини. Значення критеріїв можуть бути як числовими результатами експериментів, так і нечисловими характеристиками об'єктів.

Характеристики виділеної групи визначаються експертами шляхом формування нечіткої бази знань [8] для заданих наперед лінгвістичних змінних [9].

На множині об'єктів задається нечітка множина належності до підмножини G. Позначимо через $\mu_\Omega(\mathrm{O_j})$ - міру належності об'єкта O_j підмножині G, тобто $\Omega=\{(O_j,\mu_\Omega(O_j))\}$. Об'єкт O_j належить G з певним ступенем належності, якщо його міра належності $\mu_\Omega(\mathrm{O_j})$ більша за деякий наперед визначений "допуск" [6] : $O_j \overset{\mu_j}{\in} G$, якщо $\mu_\Omega(\mathrm{O_j})>\Delta$, інакше, $O_j \notin G$, якщо $\mu_\Omega(\mathrm{O_j})\le\Delta$.

Нехай задано множину об'єктів $O=\{O_1,O_2,\ldots,O_n\}$. Позначимо через $J=\{1,2,\ldots,n\}$ - множину індексів об'єктів, що розглядаються. Нехай також задано множину ознак (критеріїв) $K=\{K_i\}$, $i=\overline{1,m}$, за якою необхідно провести оцінку.

Для кожного критерію експертами формується лінгвістична змінна [9] та проводиться розбиття множини критеріїв на групи рівнозначних взаємонезалежних критеріїв відповідно до їх впливу на оцінку. Нехай в результаті було отримано L груп критеріїв. Позначимо множину критеріїв рівня l через I_l.

Для кожної групи критеріїв, на основі інформації, отриманої від експертів, формуємо нечітку базу знань типу:

якщо $x_1\in A_{l1}$, $x_2\in A_{l2}$, …, $x_k\in A_{lk}$, то $y\in C$,

де $l\in\{1,\ldots,L\}$, k – кількість критеріїв на відповідному рівні ієрархії.

Далі кожним двом сусіднім рівням ієрархії поставимо у відповідність правило (функцію, згортку тощо) u_l $(l\in\{1,\ldots,L-1\})$, за допомогою якого буде проводитися узгодження оцінки об'єкта між рівнями ієрархії.

Алгоритм послідовного аналізу варіантів для задачі кластеризації

Опишемо алгоритм відсіву $\tilde{W}_2$ об'єктів, який базується на послідовному аналізі варіантів [6,7].

Будуємо таблицю $V=\{v_{ji}\}$, в якій i – стовпцю відповідає i – тий об'єкт з групи O, а j-ому рядку – j-тий критерій, за яким проводиться оцінка.

Елементами таблиці є значення ознак для об'єктів. Позначимо $J^{(0)} = J$, $V^{(0)} = V$.

Перша ітерація процедури $\tilde{W}_2$. *Крок 1.* На основі інформації, отриманої від експертів, будуємо базу знань для групи ознак першого рівня [9]:

Π_1: якщо $x_1 \in A_{11}^{(1)}, \ldots, x_{T_1} \in A_{1T_1}^{(1)}$, то $y \in C^{(1)}; \cdots$

Π_{τ_1} :якщо $x_1 \in A_{11}^{(\tau_1)}$, …, і $x_{T_1} \in A_{1T_1}^{(\tau_1)}$, то $y \in C^{(\tau_1)}$;

де τ_1 - кількість правил на 1-му рівні ієрархії.

Крок 2. Для передумов кожного правила знаходимо степені істинності: $A_{1j}^{(\xi j)}(v_{ji})$, $\xi_1 = \overline{1,\tau_1}$, $i = \overline{1,m}$, $j \in J^{(0)}$.

Застосовуємо логічний вивід та композицію нечітких множин [8]. В результаті за деяким правилом для кожного об'єкта отримуємо інтервал оцінок $\left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right]$.

Крок 3. Виключаємо з розгляду ті об'єкти, для яких $b_1^{(j)} \le \Delta$. З таблиці $V^{(0)}$ формуємо таблицю $V^{(1)}$, шляхом виключення стовпців, що відповідають відсіяним об'єктам. Відповідно отримуємо множину індексів об'єктів $J^{(1)}$, для яких продовжується обчислення оцінок.

Якщо множина $J^{(1)}$ порожня, то або застосовуємо діалогову процедуру для уточнення експертом величини Δ і повертаємося до третього кроку, або робимо висновок, що жоден з заданих об'єктів не належить до групи G.

В результаті виконання першої ітерації відсіюються об'єкти за ознаками першого рівня.

На другій ітерації для ознак другого рівня будується база знань вказаного типу. Для всіх об'єктів, що залишилися в розгляді, обчислюються інтервали оцінок за відповідними ознаками $\left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right]$, $j \in J^{(1)}$.

Визначаємо правило, за яким проводиться узгодження інтервалів оцінок отриманих на двох попередніх рівнях. Позначимо узгоджений інтервал $\left[a^{(j)}, b^{(j)}\right]$, $j \in J^{(1)}$. Виключаємо з розгляду ті об'єкти, для яких $b^{(j)} \le \Delta$.

Аналогічно до першої ітерації, формуємо таблицю $V^{(2)}$ та множину індексів $J^{(2)}$.

Якщо $J^{(2)} = \varnothing$, то, або експертом уточнюється допуск Δ і процедура повертається до першої ітерації, або робимо висновок, що жоден з заданих об'єктів не належить до підмножини G, і завершуємо роботу.

L-а заключна ітерація процедури $\tilde{W}_2$.

Отримавши узгоджені інтервали оцінок $\left[a^{(j)}, b^{(j)}\right]$, $j \in J^{(L-1)}$, за заданим правилом u_{L-1}, проводимо їх узгодження з інтервалами $\left[a_L^{(j)}, b_L^{(j)}\right]$, $j \in J^{(L-1)}$. В результаті отримуємо інтервали оцінок $\left[\bar{a}^{(j)}, \bar{b}^{(j)}\right]$. Виключаємо з розгляду ті об'єкти O_j, для яких $\bar{b}^{(j)} \le \Delta$. Формуємо множину індексів $J^{(L)}$. Якщо $J^{(L)} = \varnothing$, то робимо висновок, що жоден з об'єктів з множини O не належить до підмножини G, і завершуємо роботу. В протилежному випадку, проводимо дефазифікацію [8] інтервалу оцінок.

Позначимо дефазифіковані оцінки через μ_j, $j \in J^{(L)}$. Для об'єктів, для яких $\mu_j > \Delta$, робимо висновок, що $O_j \overset{\mu_j}{\in} G$, для об'єктів з $\mu_j \le \Delta$ робимо висновок, що $O_j \notin G$. Тобто:

$$\mu_\Omega(O_j) = \begin{cases} \mu_j, & j \in J^{(L)} \\ 0, & j \in J^{(0)} \setminus J^{(L)} \end{cases}.$$

Алгоритм визначення міри належності об'єкта до заданої групи

Не втрачаючи загальності, припустимо, що утворена ієрархія критеріїв складається з 2-х рівнів. Тоді процес обчислення оцінки об'єкта можна представити у виді такого алгоритму:

Крок 1. Формуємо нечітку базу знань зазначеного виду для групи критеріїв верхнього рівня ієрархії.

Крок 2. Застосовуємо логічний вивід та композицію нечітких множин [8]. В результаті отримуємо інтервал $[a_1, b_1] \subseteq [0,1]$ для оцінки ступеня належності об'єкта певній групі.

Крок 3. Проводимо дефазифікацію отриманого результату. Якщо отримана чітка оцінка задовольняє особу, що приймає рішення (ОПР), то алгоритм закінчено. Якщо ні – крок 4.

Крок 4. Формуємо нечітку базу знань зазначеного виду для групи критеріїв нижнього рівня ієрархії.

Крок 5. Застосовуємо логічний вивід та композицію нечітких множин. В результаті отримуємо інтервал $[a_2, b_2] \subseteq [0,1]$ для оцінки ступеня належності об'єкта певній групі.

Крок 6. Визначаємо правило u_1, за яким проводимо узгодження результатів, отриманих на обох рівнях. В результаті отримуємо новий

інтервал $[a, b] \subseteq [0, 1]$ для оцінки ступеню належності об'єкта певній групі.

Крок 7. Виконуємо дефазифікацію отриманого результату .

Задача оцінювання чисельності представниць групи ЖСБ

Розглядаючи проблему оцінювання чисельності групи ризику ВІЛ-інфікування, можна виділити дві взаємопов'язані задачі, які випливають одна з одної [1]: задача визначення оціночної чисельності представників групи ЖСБ серед виокремленої групи та задача визначення міри належності особи до групи ЖСБ.

При ров'язуванні обох поставлених задач, вхідними даними можуть бути результати соціологічних досліджень, соціально-демографічні показники тощо.

Для прикладу розглянемо випадок, у якому експертами було виокремлено наступні ознаки: вік особи; сімейний стан; освітній рівень; рід занять; місце проживання. Також вищевказані ознаки було розбито на групи за їх впливом на оцінку:

Група 1. Рід занять.

Група 2. Вік, Сімейний стан.

Група 3. Освітній рівень.

Група 4. Місце проживання .

Введемо вектор характеристик особи $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$, компонентами якого є такі величини: k_1 – компонента, що вказує на вік особи, причому $k_1 \in [14, 52]$ і приймає цілочислові значення; k_2 – компонента, що містить дані про сімейний стан особи, причому $k_2 \in$ {незаміжня особа; розлучена особа; особа, що перебуває в громадянському шлюбі; офіційно заміжня особа}; k_3 –компонента, що містить дані про освітній рівень особи, причому $k_3 \in$ {неповна середня освіта; повна середня освіта; середня спеціальна освіта; вища освіта}; k_4 –компонента, що містить дані про місце проживання особи, причому $k_4 \in$ {особа проживає у тому ж місці, де і працює; особа проживає в сільській місцевості; особа проживає в іншому місті}; k_5 –компонента, що містить дані про рід занять особи, при чому $k_5 \in$ {безробітна особа; особа, що навчається; особа, що працює}.

Всі компоненти вектора характеристик є лінгвістичними змінними для яких сформовано наступні терм-множини:

T_1 = {неповнолітня особа; особа молодого віку; особа зрілого віку; особа старшого віку};

T_2 = {нестабільний сімейний стан, неорганізований сімейний стан, організований сімейний стан};

T_3 = {низький освітній рівень, середній освітній рівень, високий освітній рівень};

T_4 = {віддалене місце проживання, наближене місце проживання};

T_5 = {стабільний рід занять; нестабільний рід занять}.

Функції належності для відповідних нечітких множин доцільно будувати методом парних порівнянь побудови функцій належності, так як універсальні множини кожної змінної є скінченими [10].

Також опишемо лінгвістичну змінну, яка характеризує степінь належності особи до вказаної групи: C = {імовірність належності особи до групи ЖСБ} з наступною терм-множиною:

T_C = {Висока імовірність належності до групи ЖСБ; Низька імовірність належності до групи ЖСБ}.

На сонові даних, отриманих шляхом опитування експертів, представників різних професій, які володіють відповідними знаннями, будуємо таку базу знань:

Для ознак першої групи: "Якщо *рід занять стабільний*, то *імовірність* належності до групи ЖСБ *низька"* тощо.

Для ознак другої групи: "Якщо особа *молодого віку* і *сімейний стан неорганізований*, то *імовірність* належності до групи ЖСБ *висока*" тощо.

Для ознак третьої групи: "Якщо *освітній рівень особи високий*, то *імовірність* належності до групи ЖСБ *низька*" тощо.

Для ознак четвертої групи: "Якщо місце *проживання особи віддалене*, то *імовірність* належності особи до групи ЖСБ *висока*" тощо.

Базу знань доцільно будувати шляхом введення до неї правил з найбільшим рангом, який можна обчислювати як суму рангів експертів, які задали відповідне правило.

Коефіцієнти якості експертів обчислюються в таких задачах, як правило, з використанням документального методу, який дозволяє врахувати такі об'єктивні характеристики експертів, що можуть мати вплив на компетентність, як освіта, досвід роботи в проблемній області, наявність наукових здобутків в даній області тощо.

Дану задачу, в описаній математичній постановці, пропонується розв'язувати за допомогою алгоритму $\tilde{W}_2$.

Числовий експеримент

Нехай дано множину $O = \{O_j\}$, $j = \overline{1,20}$, що складається з 20 об'єктів з наступними характеристиками (Табл. 1):

Таблиця 1. Початкові дані

№	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1	15	незам.	н.с.	місто	навч
2	16	незам.	н.с.	село	навч
3	17	незам.	н.с.	ін.місто	безроб.
4	18	незам.	с.	ін.місто	прац.
5	25	незам.	с.с.	село	прац.
6	19	незам.	н.с.	село	навч.
7	19	незам.	с.	місто	навч.
8	24	гр.шлюб	в.о.	місто	прац.
9	36	розл.	с.с.	місто	безроб.
10	24	зам.	в.о.	село	безроб
11	32	розл.	в.о.	ін.місто	прац.
12	25	незам.	с.с.	село	безроб.
13	19	незам.	н.с	місто	навч.
14	31	розл.	в.о.	село	прац.
15	25	зам.	н.с.	село	навч.
16	19	незам.	н.с.	село	безроб.
17	19	незам.	с.с.	ін.місто	безроб.
18	32	незам.	в.о	ін.місто	безроб.
19	20	зам.	с.с.	село	навч.
20	19	незам.	н.с	село	навч.

Необхідно визначити, які об'єкти із заданих належать до групи „ЖСБ" (G) та степені належності цих об'єктів групі при $\Delta = 0.75$.

Для застосування процедури формується база знань та функції належності нечітких множин, за допомогою методів описаних вище. Застосовуючи процедуру $\tilde{W}_2$ з чотирма ітераціями, отримаємо, що до вказаної групи, з множини заданих об'єктів, належать чотири об'єкти: O_3, O_{12}, O_{16}, O_{17}, причому ступені належності до групи у перерахованих об'єктів відповідно є такими: 0.80, 0.77, 0.77, 0.83. Як видно з отриманих результатів, на отримані оцінки суттєвий вплив має розбиття ознак на групи за значимістю, тобто за впливом на оцінку. Так як до першої групи експертами віднесений рід занять, то і серед об'єктів, що належать до вказаної груп всі мають одне і те ж значення цієї ознаки - „безробітна". Можна також порівняти значення ознак для O_5 та O_{12}. Як видно, дані об'єкти відрізняються тільки родом занять. Але перший, за результатами роботи процедури, не належить до групи G, а другий – належить зі ступенем належності 0.77.

Висновки

В роботі запропоновано підхід до розв'язування задач кластеризації та ідентифікації на основі експертної та статистичної інформації без використання навчальної вибірки. Кластеризація проводиться з використанням нечітких множин, що дозволяє використовувати нечислову вхідну інформацію. Робота запропонованого алгоритму проілюстровано на прикладній задачі.

Список використаних джерел

1. *Mironyuk I.S.* The results of the estimated population vulnerable to HIV infection groups (female sex workers) in the Transcarpathian region / I.S. Mironyuk, V.J. Shatylo, I.J. Hutsol, V. Brych. // Transcarpathian Centre for Prevention of AIDS– 2010. – P. 21-25. (in Ukrainian)
2. *R.Duda, P.Hart.* Pattern recognition and scene analysis. – M:Mir, 1976. (in Russian)
3. *Shvalahin O.Y., Mlavets Y.Y., Mironyuk Z.B.* Modeling social portrait of the person // Computational Intelligence. - Cherkasy: Maklaut, 2011. - P. 262. (in Ukrainian)
4. *Balakireva, T. Bondar, Sereda Y.* Monitoring the behavior of commercial sex workers, as a component of second generation surveillance. - K.: ICF "International HIV / AIDS Alliance in Ukraine", 2008. - 60 p. (in Ukrainian)
5. *Grop D.* Methods of identification systems. – M:Mir, 1979. - 302 p. (in Russian)
6. *Volkovich V.L., A.F. Voloshin.* The methods for automated design of complex systems. - K.: Nauk. Dumka, 1984. (in Russian)
7. *N.Malyar, O.Shvalagin.* Fuzzy procedures successive analysis of variants in combinatorial problems // Information technologies & knowledge, Intern. Journal, №1, Vol.6, 2012.- P. 81-87. (in Russian)
8. *Snytyuk V.E.* Prediction: Models & Methods. - K.: "Maklaut", 2008. (in Ukrainian)
9. *Zadeh L.* The concept of a linguistic variable. – M.:Mir, 1976. (in Russian)
10. *Melkumova E.M.* Construction methods of fuzzy set membership functions // Bulletin VSU, Series: System Analysis. 2009. №2. - P. 13-18. (in Russian)

Надійшла до редколегії 12.03.13

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк О.С., к. ф.-м. н.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н.

Логіки часткових предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами

Запропоновано нові класи першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів. Характерною їх особливістю є використання композицій розширеної реномінації (перейменування) та розширеної квантифікації, що дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен. Описано основні семантичні властивості цих логік.

Ключові слова: логіка, предикат, реномінація, квантор.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

M.S. Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor, O.S. Shkilniak, PhD, S.S. Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.).

Logics of partial predicates with extended renominations and quantifiers

New classes of pure first-order composition-nominative logics of partial quasiary predicates are proposed. Its specific feature is a usage of extended renomination (renaming) and extended quantification. This gives possibility to indicate explicitly the absence of the value of subject variables. Basic semantic properties of such logics are described.

Key words: logic, predicate, renomination, quantifier.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Апарат математичної логіки належить до основних засобів моделювання предметних областей, він є основою сучасних інформаційних і програмних систем. Для цього зазвичай використовується класична логіка предикатів та базовані на її основі спеціальні логіки. Водночас принципові обмеження класичної логіки зумовлюють необхідність побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ), збудовані на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу.

Метою даної роботи є побудова нових класів КНЛ часткових предикатів. Пропонуються чисті першопорядкові КНЛ квазіарних предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами. Характерною їх особливістю є використання композицій розширеної реномінації (перейменування), які дають змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен (змінних), тобто вилучати з вхідних даних компоненти з певними іменами. За допомогою композицій розширеної реномінації визначаємо композиції розширеної квантифікації (розширені квантори). Запропоновані чисті першопорядкові КНЛ з розширеними реномінаціями (ЧКНЛРР) можна трактувати як підрівень чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ).

Дотримуємось позначень роботи [1].

Наведемо основні визначення необхідні для подальшого викладу. Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [1, 2].

V-іменна множина (*V*-ІМ) над *A* – це довільна однозначна функція $\delta : V \to A$. Тут *V* і *A* –множини предметних імен і предметних значень.

V-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$. Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для *V*-ІМ введемо функцію $asn : {}^{V}A \to 2^{V}$:

$asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Введемо параметричні операції $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем *x* та $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами із *X*:

$\delta\|_{-x} = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \neq x\}$; $\delta\|_{-X} = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \notin X\}$.

Операцію ∇ накладки *V*-ІМ δ на *V*-ІМ η задаємо так: $\eta \nabla \delta = \delta \cup (\eta\|_{-asn(\delta)})$.

V-квазіарний предикат на *A* – це предикат вигляду $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$.

Область істинності та область хибності предиката $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ – це множини

$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d)\downarrow = T\}$,
$\boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d)\downarrow = F\}$.

V-квазіарний предикат *P* на *A*:

– неспростовний, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

© М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк, 2013

– тотожно істинний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = {}^{V}A$ і $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;
– тотожно хибний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$ і $\boldsymbol{F}(P) = {}^{V}A$;
– всюди невизначений, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Надалі тотожно істинний предикат будемо позначати як T, тотожно хибний – як F, всюди невизначений – як ⊥.

1. Розширені реномінації

Відсутність значення для імені x задаємо парою, де верхнє ім'я – x, відповідне нижнє ім'я – спеціальний символ ⊥. Операцію розширеної реномінації $r^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m}_{x_1,\dots,x_n,\perp,\dots,\perp} : {}^{V}A \to {}^{V}A$ задамо так:

$$r^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m}_{x_1,\dots,x_n,\perp,\dots,\perp}(\delta) =$$

$$= \delta\|_{-\{x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m\}} + [v_1 \mapsto \delta(x_1),\dots,v_n \mapsto \delta(x_n)].$$

Зокрема, $r^{x}_{\perp}(\delta) = \delta\|_{-x}$.

Ввівши позначення $\overline{y}$ для $y_1,\dots,y_n$, будемо також скорочено писати $r^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ замість $r^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m}_{x_1,\dots,x_n,\perp,\dots,\perp}$.

Із визначення $r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}$ випливає її монотонність:

Твердження 1. $d_1 \subseteq d_2 \;\Rightarrow\; r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d_1) \subseteq r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d_2)$.

Нехай $\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t},\overline{v},\overline{z}$ задають попарно диз'юнктні множини імен. Тоді для кожного $d \in {}^{V}A$ маємо

$$r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp}(r^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}(d)) = r^{\overline{u},\overline{s},\overline{v},\overline{w},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{y},\perp,\perp,\perp}(d),$$

де кожні $p_i \in \{\overline{p}\}$ та $q_i \in \{\overline{q}\}$ задаються так:

$$p_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } x_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\overline{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } x_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\overline{s}\}, \\ x_i, \text{ якщо } x_i \notin \{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\overline{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\overline{t}\}; \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } a_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\overline{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } a_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\overline{s}\}, \\ a_i, \text{ якщо } a_i \notin \{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\overline{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\overline{t}\}. \end{cases}$$

Так визначену операцію $r^{\overline{u},\overline{s},\overline{v},\overline{w},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{y},\perp,\perp,\perp}$ назвемо *згорткою* операцій реномінації $r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp}$ та $r^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}$. Будемо її позначати $r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp} \bullet r^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}$.

Композицію розширеної реномінації (розширену реномінацію) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ визначаємо за допомогою операції $r^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ традиційним чином:

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)(d) = P(r^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(d)).$$

Твердження 2. Ім'я $x \in V$ строго неістотне для $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},x}_{\overline{y},\perp,\perp}(P)$.

Справді, для всіх $d \in {}^{V}A$ та $a \in A$ маємо:

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},x}_{\overline{y},\perp,\perp}(P)\,(d\nabla x \mapsto a) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},x}_{\overline{y},\perp,\perp}(P)\,(d \| \text{-}x).$$

Властивості композицій $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ аналогічні відповідним властивостям традиційної композиції $\mathrm{R}^{\overline{v}}_{\overline{x}}$ (див., напр., [1]):

R⊥T) $\mathrm{R}^{z,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$ – згортка тотожної пари імен;

R⊥¬) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\neg P) = \neg \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$ – R¬-дистрибутивність;

R⊥∨) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P \vee Q) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) \vee \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(Q)$ – R∨-дистрибутивність.

Подібним чином для розширеної реномінації записуємо $\mathrm{R}_{\perp}\!\to$, $\mathrm{R}_{\perp}\&$, $\mathrm{R}_{\perp}\!\leftrightarrow$.

R⊥R) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp} \circ \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)$ – згортка реномінацій.

Згортка композицій реномінації задається через згортку операцій реномінації.

Для довільних $P \in Pr^{A}$ та $d \in {}^{V}A$ маємо

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp} \circ \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)(d) = (\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)))(d) =$$

$$= (\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P))(r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d)) = P(r^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d)) =$$

$$= P(r^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp} \bullet r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d)).$$

Розпишемо детальніше множини пар імен (як це зроблено вище для операції реномінації).

Для кожних $P \in Pr^{A}$ та $d \in {}^{V}A$ тоді отримуємо:

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp} \circ \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp}(P)(d) = P(r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp} \bullet r^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}(d)).$$

Наведемо властивості розширеної реномінації, повязані з кванторами.

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

NR⊥) $\exists y\, \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P)$ та

$\forall y\, \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P)$ при умові $y \notin \{z, \overline{x}\}$.

Обмежені R∃-дистрибутивність та R∀-дистрибутивність:

R⊥∃) $\exists y\, \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\exists y P)$ при $y \notin \{\overline{v},\overline{x},\overline{u}\}$;

R⊥∀) $\forall y\, \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\forall y P)$ при $y \notin \{\overline{v},\overline{x},\overline{u}\}$.

Згортка пари імен реномінації за квантифікованим верхнім іменем (зауважимо, що тут маємо $x \notin \{\overline{u},\overline{w}\}$ згідно визначення реномінації):

R⊥∃R) $\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(\exists x P) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists x P)$ та

$\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,\perp}(\exists x P) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists x P)$;

R⊥∀R) $\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(\forall x P) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\forall x P)$ та

$\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,\perp}(\forall x P) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\forall x P)$.

Теорема 1. Композиції $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}$ зберігають еквітонність предикатів.

Нехай $d_1 \sqsupseteq d_2$ та P еквітонний. Із $d_1 \sqsupseteq d_2$ отримуємо $r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1) \subseteq r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2)$, звідки за еквітонністю P маємо: якщо $P(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1))\downarrow$, то $P(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2))\downarrow = P(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1))$. Проте $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}(P)(d_1) = P(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1))$ та $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)(d_2) = P(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2))$, звідки маємо: якщо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(P)(d_1)\downarrow$, то $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}(P)(d_2)\downarrow = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(P)(d_1)$. Отже, якщо предикат P еквітонний, то предикат $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}P$ еквітонний.

2. Розширені квантори

Надалі вважаємо $d \in {}^{V}A$. Зауважимо, що замість $d\nabla x \mapsto a$ можна писати $d\,\|_{-x} + x \mapsto a$.

Введемо множини істинності та хибності предиката на даних, які не містять компоненти з іменем x. Це $T^{-x}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d\,\|_{-x}) = T\}$ та $F^{-x}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d\,\|_{-x}) = F\}$.

Враховуючи, що $r^{x}_{\perp}(d) = d\,\|_{-x}$, маємо

$T^{-x}(P) = \{d \mid P(r^{x}_{\perp}(d)) = T\} = \{d \mid \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)(d) = T\}$,

$F^{-x}(P) = \{d \mid P(r^{x}_{\perp}(d)) = F\} = \{d \mid \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)(d) = F\}$.

Таким чином, отримуємо

$T^{-x}(P) = \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P))$; $F^{-x}(P) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P))$.

Введемо композиції розширеної квантифікації (розширені квантори) $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$, які враховують відсутність значення для квантифікованого імені.

Розширені квантори $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ задаємо так:

$\boldsymbol{T}(\exists_{\perp}xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP) \cup T^{-x}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\exists_{\perp}xP) = \boldsymbol{F}(\exists xP) \cap F^{-x}(P)$;

$\boldsymbol{T}(\forall_{\perp}xP) = \boldsymbol{T}(\forall xP) \cap T^{-x}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\forall_{\perp}xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP) \cup F^{-x}(P)$.

Звідси отримуємо такі визначення композицій $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$:

$\exists_{\perp}xP = \exists xP \vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)$;

$\forall_{\perp}xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)$.

Отже, при наявності розширених реномінацій композиції $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ є *похідними*.

Твердження 3. Для $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ виконуються наступні співвідношення:

$\boldsymbol{T}(\exists_{\perp}xP) \supseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$; $\boldsymbol{F}(\exists_{\perp}xP) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{T}(\forall_{\perp}xP) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$; $\boldsymbol{F}(\forall_{\perp}xP) \supseteq \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Приклад 1. Задамо еквітонний предикат Q так:

$$Q(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } x \in asn(d), \\ \text{невизначене, якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

Тоді маємо $T^{-x}(Q) = \varnothing$, $F^{-x}(Q) = \varnothing$.

Звідси отримуємо:

$\boldsymbol{T}(\exists xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) = {}^{V}A$; $\boldsymbol{F}(\exists xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\exists_{\perp}xQ) = \boldsymbol{T}(\exists xQ) \cup T^{-x}(Q) = {}^{V}A$;

$\boldsymbol{F}(\exists_{\perp}xQ) = \boldsymbol{F}(\exists xQ) \cap F^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\forall_{\perp}xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) \cap T^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{F}(\forall_{\perp}xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) \cup F^{-x}(Q) = \varnothing$.

Тут маємо $\exists_{\perp}xQ = \exists xQ = \forall xQ = \mathrm{T}$; $\forall_{\perp}xQ = \perp$. Отже, $\forall_{\perp}xQ \neq \forall xQ$.

Приклад 2. Задамо предикат Q таким чином:

$$Q(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } x \in asn(d), \\ F, \text{ якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

Тоді маємо $T^{-x}(Q) = \varnothing$, $F^{-x}(Q) = {}^{V}A$.

Звідси отримуємо:

$\boldsymbol{T}(\exists xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) = {}^{V}A$; $\boldsymbol{F}(\exists xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\exists_{\perp}xQ) = \boldsymbol{T}(\exists xQ) \cup T^{-x}(Q) = {}^{V}A$;

$\boldsymbol{F}(\exists_{\perp}xQ) = \boldsymbol{F}(\exists xQ) \cap F^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\forall_{\perp}xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) \cap T^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{F}(\forall_{\perp}xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) \cup F^{-x}(Q) = {}^{V}A$.

Отже, тут $\exists_{\perp}xQ = \exists xQ$; $\forall_{\perp}xQ = \neg\forall xQ$.

Твердження 4. Ім'я $x \in V$ строго неістотне для $\exists_{\perp}xP$ та $\forall_{\perp}xP$.

Справді, для довільних $d \in {}^{V}A$ та $a \in A$ маємо:

$\exists_{\perp}xP(d\nabla x \mapsto a) = (\exists xP \vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P))(d\nabla x \mapsto a) =$

$= (\exists xP \vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P))(d \,\|\!\!-x) = \exists_{\perp}xP(d \,\|\!\!-x)$;

$\forall_{\perp}xP(d\nabla x \mapsto a) = (\forall xP \,\&\, \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P))(d\nabla x \mapsto a) =$

$= (\forall xP \,\&\, \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P))(d \,\|\!\!-x) = \forall_{\perp}xP(d \,\|\!\!-x)$.

Твердження 5. Композиції $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ зберігають еквітонність предикатів.

Справді, композиції $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ подаються через $\mathrm{R}^{x}_{\perp}$, $\exists x$, $\forall x$, $\vee$, $\&$, а останні композиції зберігають еквітонність.

Теорема 2. Нехай предикат P еквітонний. Тоді:

1) $\boldsymbol{T}(\exists_{\perp}xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{F}(\exists_{\perp}xP) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

2) $\boldsymbol{T}(\forall_{\perp}xP) = \boldsymbol{T}(R^{x}_{\perp}(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$;

$\boldsymbol{F}(\forall_{\perp}xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Нехай маємо $d \in \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P))$, тоді $P(d\,\|_{-x}) = T$. За еквітонністю предиката P для кожного $d \in A$ тоді маємо $P(d\,\|_{-x} + x \mapsto a) = T$, що дає $d \in \boldsymbol{T}(\exists xP)$ та

$d \in \boldsymbol{T}(\forall xP)$. Нехай $d \in \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P))$, тоді $P(d\|_{-x}) = F$. За еквітонністю предиката P для кожного $d \in A$ маємо $P(d\|_{-x} + x \mapsto a) = F$, що дає $d \in \boldsymbol{F}(\exists xP)$ та $d \in \boldsymbol{F}(\forall xP)$. Отже:

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$ та $\boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$ та $\boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Звідси отримуємо:

$$\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP \vee \mathrm{R}^x_\perp(P)) =$$
$$= \boldsymbol{T}(\exists xP) \cup \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) = \boldsymbol{T}(\exists xP);$$
$$\boldsymbol{F}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\exists xP \vee \mathrm{R}^x_\perp(P)) =$$
$$= \boldsymbol{F}(\exists xP) \cap \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P));$$
$$\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{T}(\forall xP \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(P)) =$$
$$= \boldsymbol{T}(\forall xP) \cap \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) = \boldsymbol{T}(\mathrm{R}^x_\perp(P));$$
$$\boldsymbol{F}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(P)) =$$
$$= \boldsymbol{F}(\forall xP) \cup \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^x_\perp(P)) = \boldsymbol{F}(\forall xP).$$

3. Спеціальні предикати-індикатори квантори

Це спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z.

Предикати-індикатори εz визначаємо [3, 4] так:

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^V\!A \mid z \notin asn(d)\};$$
$$\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^V\!A \mid z \in asn(d)\}.$$

Наведемо властивості предикатів εz, пов'язані з реномінаціями:

$$\mathrm{R}^{\overline{x},z}_{\overline{y},u}(\varepsilon z) = \varepsilon u;\ \text{зокрема,}\ \mathrm{R}^z_u(\varepsilon z) = \varepsilon u;$$
$$\mathrm{R}^{\overline{x}}_{\overline{y}}(\varepsilon z) = \varepsilon z,\ \text{якщо}\ z \notin \{\overline{x}\};$$

зокрема, $\mathrm{R}^x_y(\varepsilon z) = \varepsilon z$ та $\mathrm{R}^x_\perp(\varepsilon z) = \varepsilon z$;

$$\mathrm{R}^{\overline{x},z}_{\overline{y},\perp}(\varepsilon z) = \mathrm{T};\ \text{зокрема,}\ \mathrm{R}^z_\perp(\varepsilon z) = \mathrm{T}.$$

Наведемо властивості предикатів εz, пов'язані з композиціями квантифікації.

$$\boldsymbol{T}(\exists y\,\varepsilon y) = \boldsymbol{T}(\forall y\,\varepsilon y) = \boldsymbol{F}(\exists y \neg\varepsilon y) = \boldsymbol{F}(\forall y \neg\varepsilon y) = \varnothing;$$
$$\boldsymbol{F}(\forall y\,\varepsilon y) = \boldsymbol{F}(\forall y\,\varepsilon y) = \boldsymbol{T}(\exists y \neg\varepsilon y) = \boldsymbol{T}(\forall y \neg\varepsilon y) = {}^V\!A.$$

Таким чином:

$\exists y\,\varepsilon y = \mathrm{F}$, $\forall y\,\varepsilon y = \mathrm{F}$, $\exists y \neg\varepsilon y = \mathrm{T}$, $\forall y \neg\varepsilon y = \mathrm{T}$.

Зауважимо, що $\exists y\,\varepsilon y = \mathrm{F}$ та $\forall y \neg\varepsilon y = \mathrm{T}$ видаються не дуже природними.

Для випадку різних імен квантора та предиката-індикатора маємо:

$$\exists x\,\varepsilon y = \forall x\,\varepsilon y = \varepsilon y;$$
$$\exists x \neg\varepsilon y = \forall x \neg\varepsilon y = \neg\varepsilon y.$$

Твердження 6. Маємо такі властивості:

$$\exists y(\varepsilon y \& P)) = \forall y(\varepsilon y \& P) = \mathrm{F};$$
$$\exists y(\neg\varepsilon y \vee P) = \forall y(\neg\varepsilon y \vee P)) = \mathrm{T};$$
$$\exists y(\varepsilon y \vee P) = \exists y(\neg\varepsilon y \& P) = \exists y P;$$
$$\forall y(\varepsilon y \vee P) = \forall y(\neg\varepsilon y \& P) = \forall y P.$$

Для предикатів-індикаторів εx маємо:

$$T^{-x}(\varepsilon x) = {}^V\!A;\quad F^{-x}(\varepsilon x) = \varnothing;$$
$$T^{-x}(\neg\varepsilon x) = \varnothing;\quad F^{-x}(\neg\varepsilon x) = {}^V\!A.$$

Звідси отримуємо:

$$\exists_\perp x\,\varepsilon z = \exists x\,\varepsilon z \vee \mathrm{R}^x_\perp(\varepsilon z) = \varepsilon z \vee \varepsilon z = \varepsilon z;$$
$$\forall_\perp x\,\varepsilon z = \forall x\,\varepsilon z \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(\varepsilon z) = \varepsilon z \,\&\, \varepsilon z = \varepsilon z;$$
$$\exists_\perp x \neg\varepsilon z = \exists x \neg\varepsilon z \vee \mathrm{R}^x_\perp(\neg\varepsilon z) = \neg\varepsilon z \vee \neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z;$$
$$\forall_\perp x \neg\varepsilon z = \forall x \neg\varepsilon z \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(\neg\varepsilon z) = \neg\varepsilon z \,\&\, \neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z.$$
$$\exists_\perp x\,\varepsilon x = \exists x\,\varepsilon x \vee \mathrm{R}^x_\perp(\varepsilon x) = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T};$$
$$\forall_\perp x\,\varepsilon x = \forall x\,\varepsilon x \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(\varepsilon x) = \mathrm{F} \,\&\, \mathrm{T} = \mathrm{F};$$
$$\exists_\perp x \neg\varepsilon x = \exists x \neg\varepsilon x \vee \mathrm{R}^x_\perp(\neg\varepsilon x) = \mathrm{T} \vee \mathrm{F} = \mathrm{T};$$
$$\forall_\perp x \neg\varepsilon x = \forall x \neg\varepsilon x \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp(\neg\varepsilon x) = \mathrm{T} \,\&\, \mathrm{F} = \mathrm{F}.$$

Отже, маємо такі співвідношення:

$$\exists_\perp x\,\varepsilon x = \neg\exists x\,\varepsilon x;\ \forall_\perp x\,\varepsilon x = \forall x\,\varepsilon x;$$
$$\exists_\perp x \neg\varepsilon x = \exists x \neg\varepsilon x;\ \forall_\perp x \neg\varepsilon x = \neg\forall x \neg\varepsilon x.$$

Зауважимо, що згідно твердження 6, $\mathrm{R}^x_\perp(P)$ не можна подати в жодному із наступних виглядів:

$$\exists z(\mathrm{R}^x_z(P) \vee \varepsilon z),\ \exists z(\mathrm{R}^x_z(P) \vee \neg\varepsilon z),$$
$$\exists z(\mathrm{R}^x_z(P) \,\&\, \varepsilon z),\ \exists z(\mathrm{R}^x_z(P) \,\&\, \neg\varepsilon z),$$
$$\forall z(\mathrm{R}^x_z(P) \vee \varepsilon z),\ \forall z(\mathrm{R}^x_z(P) \vee \neg\varepsilon z),$$
$$\forall z(\mathrm{R}^x_z(P) \,\&\, \varepsilon z),\ \forall z(\mathrm{R}^x_z(P) \,\&\, \neg\varepsilon z).$$

4. Властивості розширених кванторів

Основні властивості композицій $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ аналогічні відповідним властивостям традиційних композицій $\exists x$ та $\forall x$.

Теорема 3. Для $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ виконуються наступні співвідношення:

1) комутативність однотипних кванторів

$\exists_\perp x \exists_\perp y P = \exists_\perp y \exists_\perp x P$ та $\forall_\perp x \forall_\perp y P = \forall_\perp y \forall_\perp x P$;

2) закони де Моргана

$\neg\exists_\perp x P = \forall_\perp x \neg P$ та $\neg\forall_\perp x P = \exists_\perp x \neg P$;

3) неістотність квантифікованих імен

$\exists_\perp x \exists_\perp x P = \exists_\perp x P$; $\exists_\perp x \forall_\perp x P = \forall_\perp x P$;

$\forall_\perp x \exists_\perp x P = \exists_\perp x P$; $\forall_\perp x \forall_\perp x P = \forall_\perp x P$;

4) дистрибутивність кванторів щодо $\vee$ та &:

$\exists_\perp x P \vee \exists_\perp x Q = \exists_\perp x (P \vee Q)$ та

$\forall_\perp x P \,\&\, \forall_\perp x Q = \forall_\perp x (P \& Q)$.

Розглянемо тепер властивості $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp$, пов'язані з розширеною реномінацією.

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

$\mathrm{N}_\perp\mathrm{R}_\perp)$ $\exists_\perp y\, \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P)$ та

$\forall_\perp y\, \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P)$ за умови $y \notin \{z, \overline{x}\}$.

За $NR_\perp$ маємо $\exists y\, R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P)$. Тоді:

$$\exists_\perp y\, R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = \exists y\, R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) \vee R^{y}_{\perp}(R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P)) =$$
$$= \exists y\, R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) \vee R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) \vee R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) =$$
$$= R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P).$$

Аналогічно доводимо, що

$\forall_\perp y\, R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P)$.

Згортка пари імен реномінації за квантифікованим верхнім іменем:

$R_\perp\exists_\perp R)$ $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp xP)$ та

$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp xP)$;

$R_\perp\forall_\perp R)$ $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\forall_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp xP)$ та

$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\forall_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp xP)$

(тут $x \notin \{\bar u, \bar w\}$ згідно визначення реномінації).

Згідно $R_\perp\exists R$ маємо $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists xP)$ та

$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists xP)$. Тоді:

$$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists xP \vee R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(P) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(P);$$

$$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists xP \vee R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(P) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(P).$$

Водночас $R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp xP \vee R^{x}_{\perp}(P)) =$

$= R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(R^{x}_{\perp}(P)) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(P).$

Отже, $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp xP)$ та

$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp xP)$.

Аналогічно доводимо

$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\forall_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp xP)$ та

$R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\forall_\perp xP) = R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp xP)$.

Обмежені $R\exists$-дистрибутивність та $R\forall$-дистрибутивність для розширених кванторів записуються так, як і для традиційних кванторів:

за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$ маємо

$R_\perp\exists_\perp)$ $\exists y_\perp\, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) = R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists_\perp yP)$;

$R_\perp\forall_\perp)$ $\forall_\perp y\, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) = R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\forall_\perp yP)$.

Згідно $R_\perp\exists$ маємо $\exists y\, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) = R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists yP)$.

Тоді: $\exists y_\perp\, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) = \exists y\, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) \vee R^{y}_{\perp}(R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)) =$

$= \exists y\, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) \vee R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(P) = R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists yP) \vee R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(P) =$

$= R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists yP) \vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(R^{y}_{\perp}(P) = R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists yP \vee R^{y}_{\perp}(P)) =$

$= R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists_\perp yP)$.

Аналогічно доводимо, що

$\forall_\perp y\, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) = R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\forall_\perp yP)$.

5. Семантичні властивості формул мови логік з розширеними реномінаціями.

Семантичними моделями ЧКНЛРР є композиційні системи квазіарних предикатів вигляду $({}^{V}A, Pr^{A}, C)$, де C задається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$, $\exists x$. Кожна така композиційна система задає алгебру даних (A, Pr^{A}) та композиційну алгебру предикатів (Pr^{A}, C). Терми композиційної алгебри (Pr^{A}, C) трактуємо як формули мови ЧКНЛРР.

Рівень ЧКНЛРР можна трактувати як підрівень кванторного [1] рівня, тобто рівня ЧКНЛ. З формального погляду мова ЧКНЛРР відрізняється від мови ЧКНЛ лише дещо відмінними параметрами (парами імен) символів реномінації (нижнім іменем може бути спеціальний символ $\perp$).

Визначення формули та відображення інтерпретації задаються аналогічно випадку традиційних ЧКНЛ. Те саме стосується визначень істинної (неспростовної) формули, виконуваної формули, тавтології, відношень тавтологічного наслідку, логічного наслідку, слабкого логічного наслідку, тавтологічної еквівалентності, логічної еквівалентності, строгої логічної еквівалентності.

Для ЧКНЛРР справджується теорема еквівалентності, вона формулюється у двох формах – для відношення логічної еквівалентності $\sim$ та відношення строгої логічної еквівалентності $\sim_{TF}$.

Теорема 4. Нехай формула Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень підформул $\Phi_1,..., \Phi_n$ на $\Psi_1,..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim \Psi_n$, то $\Phi \sim \Phi'$.

Теорема 5. Нехай формула Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень підформул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_{TF} \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim_{TF} \Psi_n$, то $\Phi \sim_{TF} \Phi'$.

Специфічні властивості формул ЧКНЛРР пов'язані з композиціями розширеної реномінації. Вони відображають наведені вище відповідні властивості цих композицій.

Враховуючи, що в цілому властивості композицій $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ аналогічні відповідним властивостям композицій $R^{\bar v}_{\bar x}$, зберігаємо для таких властивостей аналогічні назви.

$R_\perp T)$ $R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)$;

$R_\perp \neg)$ $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)$;

$R_\perp \vee)$ $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi \vee \Psi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi)$.

Подібним чином для розширеної реномінації записуємо $R_\perp\!\to$, $R_\perp\&$, $R_\perp\!\leftrightarrow$.

$R_\perp R)$ $R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp} \circ R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)$.

$NR_\perp)$ $\exists y R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi)$ та $\forall y R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi)$ за умови $y \notin \{z, \bar x\}$.

$R_\perp \exists)$ $\exists y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$.

$R_\perp \forall)$ $\forall y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\forall y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$.

$R_\perp \exists R)$ $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$.

$R_\perp \forall R)$ $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\forall x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\forall x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall x\Phi)$.

За допомогою розширених реномінацій можна визначити композиції розширеної квантифікації $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ як похідні. Тоді трактуємо:

$\exists_\perp x\,\Phi$ – як скорочення для $\exists x\Phi \vee R^x_\perp\Phi$;

$\forall_\perp x\,\Phi$ – як скорочення для $\forall x\Phi \,\&\, R^x_\perp\Phi$.

Вводячи до розгляду $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$, отримуємо такі властивості:

Теорема 6. 1) $\exists_\perp x\exists_\perp y\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp y\exists_\perp x\,\Phi$ та $\forall_\perp x\forall_\perp y\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp y\forall_\perp x\,\Phi$;

2) $\neg\exists_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp x\neg\Phi$ та $\neg\forall_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp x\neg\Phi$;

3) $\exists_\perp x\exists_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp x\,\Phi$; $\exists_\perp x\forall_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp x\,\Phi$; $\forall_\perp x\exists_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp x\,\Phi$; $\forall_\perp x\forall_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp x\,\Phi$;

4) $\exists_\perp x\,\Phi \vee \exists_\perp x\,\Psi \sim_{TF} \exists_\perp x\,(\Phi \vee \Psi)$ та $\forall_\perp x\,\Phi \,\&\, \forall_\perp x\,\Psi \sim_{TF} \forall_\perp x\,(\Phi\&\Psi)$.

Додаючи розширені реномінації, маємо такі властивості:

$N_\perp R_\perp)$ $\exists_\perp y\, R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P)$ та $\forall_\perp y\, R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P)$ за умови $y \notin \{z, \bar x\}$.

Згортка пари імен реномінації за квантифікованим верхнім іменем (тут $x \notin \{\bar u, \bar w\}$ згідно визначення реномінації):

$R_\perp \exists_\perp R)$ $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp x\Phi)$;

$R_\perp \forall_\perp R)$ $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\forall_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\forall_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp x\Phi)$;

$R_\perp \exists_\perp)$ $\exists_\perp y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists_\perp y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$;

$R_\perp \forall_\perp)$ $\forall_\perp y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\forall_\perp y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$.

Висновки

В роботі запропоновано нові класи композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів. Характерною їх особливістю є використання композицій розширеної реномінації (перейменування), які дають змогу в явному вигляді задавати відсутність значення для предметних імен, тобто вилучати з вхідних даних компоненти з певними іменами. За допомогою композицій розширеної реномінації визначено композиції розширеної квантифікації (розширені квантори). Описано основні семантичні властивості чистих першопорядкових логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями і кванторами.

Проведене дослідження планується продовжити в плані вивчення властивостей відношення логічного наслідку для множин формул та побудови числень секвенційного типу.

Список використаних джерел

1. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
2. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* First-Order Composition-Nominative Logics // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – №4. – P. 176–185 (in Ukrainian).
3. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Special Sequent Calculi of Pure First-order Composition-nominative Logics// Visnyk, Ser. Kibernetyka, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – V. 12. – P. 38–45 (in Ukrainian).
4. *Nikitchenko M., Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347. – P. 89–110.

Надійшла до редколегії 15.03.2013

УДК 378.016

Омельчук Л.Л.[1], к.ф.-м.н.

Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та міжнародного стандарту Computer Science'2013

Наведено порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки та міжнародного стандарту Computer Science'2013. Наведено пропозиції для покращення українського освітнього стандарту.

Ключові слова: інформатика, освітній стандарт.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова 4д, e-mail: l.omelchuk@gmail.com

L.L. Omelchuk [1]

A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and international standard Computer Science'2013

A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and international standard Computer Science'2013 is made. Proposals for further enhancement of Ukrainian standards are formulated.

Key Words: informatics, educational standard.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Glushkova st., 4d, e-mail: l.omelchuk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

У вересні 2010 Міністерством освіти і науки України затверджено стандарт освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів за напрямом підготовки 040302 "Інформатика" на здобуття кваліфікації 3121 "фахівець з інформаційних технологій" (надалі ОПП'2010) [1].

Для визнання українського диплома з інформатики, а також підвищення мобільності студентів, потрібно щоб український стандарт узгоджувався із стандартами інших країн. Проведемо порівняльний аналіз затвердженого стандарта з визнаними міжнародними стандартами освітньо-професійної підготовки з інформатики.

Найбільш значимим проектом, що має на меті стандартизацію процесу навчання в галузі інформатики є Computer Science Curriculum ("Рекомендації з викладання інформатики в університетах"). Цей документ розроблений спеціальним комітетом з освіти професіонального співтовариства ACM (Association for Computing Machinery) спільно з іншим професійним співтовариством – IEEE Computer Society.

Перша версія Computing Curricula була розроблена спеціальним комітетом з освіти професіонального співтовариства ACM та була опублікована в 1968. В 1970-х роках аналогічний документ випустило інше професійне співтовариство – IEEE Computer Society. Наприкінці 1980-х років ці організації об'єднали свої зусилля та в 1991 році випустили оновлену версію рекомендацій – Computing Curricula'91. Передостанній стандарт було підготовлено в 2008, а останній план цього співтовариства – Computer Science Curricula 2013 (надалі CS'2013) [2]. ACM крім інформатики також виділяє інші три комп'ютерні спеціальності: комп'ютерну інженерію, програмну інженерію і інформаційні системи. В США, наприклад, склалася практика, за якою бакалаврів готують переважно з інформатики, а інші спеціальності з'являються потім у магістерських програмах. В [3] наведено порівняння вітчизняного освітнього стандарту ОПП'2010 з попередньою версією Computing Curricula 2008.

© Л.Л. Омельчук, 2013

В CS'2013 визначено коло 18 базових тем, які складають ядро спеціальності на рівні бакалаврату. Кожна з них складається з певної кількості розділів, деяка частина яких, складає обов'язковий мінімум (для них зазначено мінімальну кількість годин, необхідну для вивчення предмета в лекційному форматі). Цей обов'язковий мінімум годин ділиться на два ядра. Згідно з CS'2013 навчальний план повинен включати всі теми з ядра 1 і гарантувати, що студенти опановують цей матеріал та усі, чи майже усі, теми з ядра 2.

Автором статті встановлено відповідність між базовими темами з інформатики та дисциплінами, які пропонуються ОПП'2010. Це співвідношення наведено нижче в табл. 1.

Співставляючи дисципліни, які ОПП'2010 та CS'2013 можна побачити, що базовий курс CS'2013 "Керування перериваннями та реактивне програмування" (PL), що входить до ядра 2 та на який виділено мінімально 2 години лекційних занять, не представлений в ОПП'2010. Проте, курс входить до ядра 2, деякі дисципліни з якого можуть не читатися. Таким чином, відсутність цього курсу бажано компенсувати, але це не представляє суттєвої проблеми для відповідності програми ОПП'2010 стандарту CS'2013.

Слід звернути особливу увагу на дисципліни, які в CS'2013 є обов'язковими, в той час як в ОПП'2010 вони представлені вибірковими дисциплінами. Так обов'язкова дисципліна "Функціональне програмування" (PL) представлена в ОПП'2010 дисципліною за вибором "Функціональне програмування" (СВ.2.18), дисципліна "Професійна та етична відповідальність" (SP) – двома вибірковими дисциплінами з ОПП'2010: "Етика та естетика" (СВ.5.05) та "Соціальні та професійні питання інформатики» (СВ.3.03). Дисципліна «Інтелектуальна власність" (SP) – дисципліною «Основи авторського права" (СВ.5.13). Дисципліни "Конфіденційність та громадянські свободи» (SP), "Розвиток" (SP) та "Професійна комунікація" (SP) в ОПП'2010 представлені однією дисципліною за вибором "Соціальні та професійні питання інформатики" (СВ.3.03). Обов'язкова дисципліна "Навчання машини" (IS) в ОПП'2010 представлена дисципліною за вибором "Нейронні мережі" (СВ.1.15). А обов'язкова дисципліна "Фундаментальні основи моделювання" (CN) в ОПП'2010 представлена двома вибірковими дисциплінами: "Моделювання складних систем" (СВ.1.12) та "Моделювання інформаційних процесів" (СВ.1.10).

Крім того, в CS'2013 є три вибіркові курси, що не знайшли свого відображення в ОПП'2010: "Робототехніка" (IS), "Мобільні платформи" (PDB) та "Цифровий криміналістичний аналіз" (IAS).

З іншого боку, є низка дисциплін в ОПП'2010, що не мають свого аналогу в CS'2013. З обов'язкових дисциплін – це переважно дисципліни гуманітарної та соціально-економічної підготовки (ГСЕ та одна дисципліна професійної та практичної підготовки (ПП): "Українська мова (за професійним спрямуванням)" (ГСЕ 1.01), "Історія української культури" (ГСЕ 1.03), "Іноземна мова" (ГСЕ 1.04), "Філософія" (ГСЕ 1.05), "Фізичне виховання (за рахунок вільного часу студента)" (ГСЕ 1.06), "Методика викладання математики та інформатики" (ПП 3.09).

Крім того ціла низка вибіркових дисциплін в ОПП'2010 не знайшли свого аналогу в CS'2013: "Методи стохастичної оптимізації" (СВ.1.05), "Мови обчислювань та кластерні системи" (СВ.1.06), "Розпізнавання образів" (СВ.1.19), "Символьні обчислення та комп`ютерна алгебра" (СВ.1.20), "Теорія ігор" (СВ.1.22), "Теорія керування" (СВ.1.24), "Теорія масового обслуговування" (СВ.1.26), "Фізика" (СВ.1.27), "Функціональний аналіз" (СВ.1.28), "Unix подібні операційні системи" (СВ.2.01), "Технологія XML" (СВ.2.04), "Комп'ютерна вірусологія" (СВ.2.06), "Стандартизація та сертифікація програмного забезпечення ЕОМ" (СВ.2.12), "Інформаційні системи підприємств" (СВ.3.01), "Менеджмент знань" (СВ.3.02), "Організаційна інформатика" (СВ.3.03), "Основи педагогіки" (СВ.4.01), "Бухоблік та аудит" (СВ.5.01), "Екологія" (СВ.5.02), "Економетрія" (СВ.5.03), "Зарубіжна філософія" (СВ.5.06), "Іноземна мова (за професійним спрямуванням – інформатика)" (СВ.5.07), "Макро- та мікроекономіка" (СВ.5.08), "Маркетинг" (СВ.5.09), "Менеджмент" (СВ.5.10), "Методи наукових досліджень" (СВ.5.12), "Політологія" (СВ.5.15), "Правознавство" (СВ.5.16), "Релігієзнавство" (СВ.5.18), "Соціологія" (СВ.5.19), "Філософія природознавства" (СВ.5.20).

Таблиця 1 Порівняння CS'2013 та ООП'2010

CS'2013				**ООП'2010**		
Базова тема	**Перелік дисциплін**	**Години ядра 1**	**Години ядра 2**	**Цикл**	**Перелік дисциплін**	**Кількість годин**
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
AL	**Алгоритми та складність (Algorithms and Complexity)**	**19**	**9**			
AL	Основи аналізу алгоритмів (Basic Analysis)	2	2	ПП 3.13	Основи програмування	576
				ПП 3.01	Алгоритми і структури даних	144
				МПН 2.04	Математична логіка та теорія алгоритмів	288
AL	Алгоритмічні стратегії (Algorithmic Strategies)	5	1	ПП 3.01	Алгоритми і структури даних	144
AL	Фундаментальні структури даних та алгоритми (Fundamental Data Structures and Algorithms)	9	3			
AL	Поглиблене вивчення структур даних та алгоритмів (Advanced Data Structures, Algorithms, and Analysis)					
AL	Поглиблене вивчення теорії обчислювальної складності					
AL	Основи теорії автоматів та обчислювальної складності (Basic Automata, Computability and Complexity)	3	3	МПН 2.04	Математична логіка та теорія алгоритмів	288
AL	Поглиблене вивчення теорії автоматів та обчислюваності (Advanced Automata Theory and Computability)_					
OS	**Операційні системи (Operating Systems)**	**4**	**11**			
OS	Огляд операційних систем (Overview of Operating Systems)	2		ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
OS	Основи операційних систем (Operating System Principles)	2				
OS	Планування та диспетчеризація (Scheduling and Dispatch)		3			
OS	Керування пристроями (Device Management)					
OS	Файлові системи (File Systems)					
OS	Вбудовані системи та системи реального часу (Real Time and Embedded Systems)					
OS	Відмовостійкість (Fault Tolerance)			ПП 3.02	Архітектура обчислювальних систем	144
OS	Оцінка продуктивності системи (System Performance Evaluation)					
OS	Керування пам'яттю (Memory Management)		3			
OS	Віртуальні машини (Virtual Machines)					
OS	Паралелізм (Concurrency)		3	ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
OS	Безпека та захист даних (Security and Protection)		2	ПП 3.05	Захист інформації	144

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
AR	**Архітектура та організація ЕОМ (Architecture and Organization)**	**0**	**16**			
AR	Цифрова логіка та цифрові системи (Digital logic and digital systems)		3	ПП 3.02	Архітектура обчислювальних систем	144
AR	Машинний рівень представлення даних (Machine level representation of data)		3			
AR	Асемблерний рівень машинної організації (Assembly level machine organization)		6			
AR	Архітектура обчислювальних систем та система організації пам'яті (Memory system organization and architecture)		3			
AR	Інтерфейс та стратегія введення / виведення (Interfacing and communication)		1			
AR	Функціональна організація (Functional organization)					
AR	Багатопроцесорні архітектури (Multiprocessing and alternative architectures)					
AR	Покращення производительности (Performance enhancements)					
NC	**Мережі і зв'язок (Networking and Communication)**	**3**	**7**			
NC	Вступ до мережевих обчислень (Introduction)	1.5		ПП 3.07	Інформаційні мережі	144
NC	Надійність передачі даних (Reliable Data Delivery)		2			
NC	Мережеві застосування (Networked Applications)	1.5		ПП 3.16	Програмування та підтримка веб-застосувань	144
				ПП 3.18	Розподілені інформаційно-аналітичні системи	144
NC	Маршрутизації та пересилка (Routing And Forwarding)		1.5	ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	288
				ПП 3.07	Інформаційні мережі	144
NC	Локальні мережі (Local Area Networks)		1.5	ПП 3.07	Інформаційні мережі	144
NC	Розподіл ресурсів (Resource Allocation)		1	ПП 3.08	Методи оптимізації та дослідження операцій	216
				ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
NC	Мобільність (Mobility)		1	ПП 3.07	Інформаційні мережі	144
				ПП 3.16	Програмування та підтримка веб-застосувань	144
PL	**Мови програмування (Programming Languages)**	**8**	**20**			
PL	Представлення програм (Program Representation)		1	ПП 3.13	Основи програмування	576
PL	Основи системи типів (Basic Type Systems)	1	4			
PL	Поглиблене вивчення програмних конструкцій (Advanced Programming Constructs)					
PL	Системи типів (Type Systems)					

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
PL	Паралелізм та розподіленість (Concurrency and Parallelism)			ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
				СВ.2.11	Розподілені інформаційні системи	
PL	Об'єктно-зорієнтоване програмування (Object-Oriented Programming)	4	6	СВ.1.06	Методи об`єкто-зорієнтованого програмування	
				ПП 3.13	Основи програмування	576
				СВ.2.09	Об'єкто-зорієнтований аналіз та проектування	
PL	Функціональне програмування (Functional Programming)	3	4	СВ.2.18	Функціональне програмування	
PL	Трансляція і виконання (Language Translation and Execution)		3	ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
PL	Синтаксичний аналіз (Syntax Analysis)					
PL	Прагматика мов (Language Pragmatics)					
PL	Компіляція та семантичний аналіз (Compiler Semantic Analysis)			ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
				ПП 3.02	Архітектура обчислювальних систем	144
				СВ.1.25	Теорія компіляції	
PL	Керування перериваннями та реактивне програмування (Event-Driven and Reactive Programming)		2			
PL	Генерація коду (Code Generation)			ПП 3.02	Архітектура обчислювальних систем	144
PL	Динамічні системи (Runtime Systems)			ПП 3.02	Архітектура обчислювальних систем.	144
				ПП 3.01	Алгоритми і структури даних.	144
PL	Статичний аналіз (Syntax Analysis)			ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
PL	Формальна семантика (Formal Semantics)			ПП 3.19	Теорія програмування	144
PL	Логічне програмування (Logic Programming)			СВ.2.15	Логічне програмування	
HC	**Інтерфейси (Human Computer Interaction)**	**4**	**4**			
HC	Принципи взаємодії людини та машини (Foundations)	4		ПП 3.15 СВ.2.14	Платформи корпоративних інформаційних систем Розробка інтерфейсу людина-система	144
HC	Програмування діалогових систем (Programming Interactive Systems)			СВ.2.14	Розробка інтерфейсу людина-система	
HC	Змішана, доповнена та віртуальна реальність (Mixed, Augmented and Virtual Reality)			ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
HC	Людський фактор та безпека (Human factors & security)			ПП 3.05	Захист інформації	144

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
HC	Проектування взаємодії (Designing Interaction)		**4**			144
HC	Орієнтоване на користуача проектування та тестування програмного забезпечення (User-cantered design & testing)			ПП 3.15	Платформи корпоративних інформаційних систем	
HC	Проектування безмишкових інтерфейсів (Design for non-Mouse interfaces)			СВ.2.14	Розробка інтерфейсу людина-система	
HC	Співробітництво та комунікація (Collaboration & communication)			ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації	144
				СВ.5.17	Психологія	
				ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
				ПП 3.05	Захист інформації	144
HC	Статистичні методи людино-машинної взаємодії (Statistical Methods for HCI)			СВ.2.16	Тестування програмних систем	
				СВ.5.17	Психологія	
				СВ.1.02	Аналіз даних та “м'які” обчислення	
HC	Дизайнерський інтерфейс (Designing Interaction)			СВ.5.14	Основи дизайну	
				СВ.2.08	Основи комп'ютерного дизайну	
IS	**Інтелектуальні системи (Intelligent Systems)**		**10**			
IS	Основні питання, пов’язані з інтелектуальними системами (Fundamental Issues)		1	ПП 3.06	Інтелектуальні інформаційні системи	144
IS	Базові стратегії пошуку (Basic Search Strategies)		4			
IS	Представлення знань та виведення (Basic Knowledge Representation and Reasoning)		3			
IS	Поглиблене вивчення пошуку (Advanced Search)					
IS	Поглиблене вивчення представлення знань та виведення (Advanced Representation and Reasoning)					
IS	Агенти (Agents)			СВ.1.01	Агентні технології	
IS	Обробка природної мови (Natural Language Processing)			ПП 3.20	Теорія програмування	144
				СВ.1.20	Проектування систем штучного інтелекту	
IS	Навчання машини (Basic Machine Learning)		2			
IS	Поглиблене вивчення навчання машин (Advanced Machine Learning)			СВ.1.15	Нейронні мережі	
	Міркування в умовах невизначеності			СВ.1.11	Моделювання систем за умов невизначеності	
IS	Робототехніка (Robotics)					
IS	Сприйняття (Perception and Computer Vision)			СВ.5.14	Основи дизайну	
				СВ.5.17	Психологія	

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
SP	**Соціальні та професійні питання (Social and Professional)**	**11**	**5**			
SP	Історія інформатики (History)			ПП 3.13	Основи програмування	576
				ГСЕ 1.02	Історія України	108
SP	Соціальний контекст інформатики (Social Context)	1	2	ПП 3.04	Безпека життєдіяльності	72
SP	Методи та засоби аналізу (Analytical Tools)	2		СВ.3.03	Соціальні та професійні питання інформатики	
SP	Професійна та етична відповідальність (Professional Ethics)	2	2	СВ.5.05	Етика та естетика	
				СВ.3.03	Соціальні та професійні питання інформатики	
SP	Інтелектуальна власність (Intellectual Property)	2		СВ.5.13	Основи авторського права	
SP	Конфіденційність та громадянські свободи (Privacy and Civil Liberties)	2		СВ.3.03	Соціальні та професійні питання інформатики	
SP	Розвиток (Sustainability)	1	1			
SP	Професійна комунікація (Professional Communication)	1				
SP	Економічні питання, пов'язані з застосуванням комп'ютерів (Economies of Computing)			СВ.5.04	Економічна теорія	
SP	Засоби безпеки (Security Policies, Laws and Computer Crimes)			ПП 3.05	Захист інформації	144
SE	**Програмна інженерія (Software Engineering)**	**6**	**21**			
SE	Проектування ПЗ (Software Design)	4	4	ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
SE	Програмні засоби та оточення (Tools and Environments)		2			
SE	Процеси розробки ПЗ (Software Processes)	1	2	СВ.2.05	Командна розробка програмних проектів	
SE	Еволюція ПЗ (Software Evolution)		1			
SE	Керування програмними проектами (Software Project Management)		3			
SE	Конструювання ПЗ (Software Construction)		2			
SE	Верифікація і валідація ПЗ (Software Verification Validation)		3	ПП 3.20	Теорія програмування	144
				СВ.1.03	Методи верифікації та оптимізації програм	
SE	Формальні методи (Formal Methods)			ПП 3.20	Теорія програмування	144
SE	Розробка вимог до ПЗ (Requirements Engineering)	1	3	ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
				СВ.1.03	Методи верифікації та оптимізації програм	
SE	Надійність ПЗ (Software Reliability)		1	ПП 3.05	Захист інформації	144
CN	**Обчислювальні науки (Computational Science)**	**1**				
CN	Фундаментальні основи моделювання (Fundamentals)	1		СВ.1.12	Моделювання складних систем	
				СВ.1.10	Моделювання інформаційних процесів	

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
CN	Моделювання (Modeling and Simulation)			СВ.1.11	Моделювання систем за умов невизначеності	
				СВ.1.13	Моделювання соціально-економічних процесів	
				СВ.1.09	Моделювання випадкових процесів	
				СВ.1.14	Нечітке моделювання систем	
CN	Обробка (Processing)			ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
				ПП 3.02	Архітектура обчислювальних систем	144
				ПП 3.08	Методи оптимізації та дослідження операцій	216
CN	Діалогова візуалізація (Interactive Visualization)			ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
CN	Дані, інформація та знання (Data, Information, and Knowledge)			ПП 3.06	Інтелектуальні інформаційні системи	144
				ПП 3.07	Інформаційні мережі	144
				ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
				ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації	144
PD	**Паралельні та розподілені обчислення (Parallel and Distributed Computing)**	**5**	**9**			
PD	Основні принципи паралелізму (Parallelism Fundamentals)	2		ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
PD	Паралельна декомпозиція (Parallel Decomposition)	1	3			
PD	Паралельні алгоритми, аналіз і проектування (Parallel Algorithms, Analysis, and Programming)		3			
PD	Паралельна архітектура (Parallel Architecture)	1	1			
PD	Паралельне виконання (Parallel Performance)					
PD	Розподілені системи (Distributed Systems)					
PD	Формальні моделі та семантика (Formal Models and Semantics)			ПП 3.19	Теорія програмування	144
PD	Комунікація та координація (Communication and Coordination)	1	3	ПП 3.05	Захист інформації	144
				ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
SF	**Основні системні принципи (Systems Fundamentals)**	**18**	**9**			
SF	Обчислювальні парадигми (Computational Paradigms)	3		ПП 3.13	Основи програмування	576
				ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
SF	Межрівнева комунікація (Cross-Layer Communications)	3		ПП 3.13	Основи програмування	576
				СВ.2.03	Архітектура взаємодії відкритих систем	

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
SF	Транзитивний автомат (State-State Transition-State Machines)	6		МПН 2.04	Математична логіка та теорія алгоритмів	288
SF	Системна підтримка паралелізму (System Support for Parallelism)	3		ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
				СВ.2.07	Паралельне програмування	
SF	Виконання (Performance)	3		ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
				СВ.1.03	Методи верифікації та оптимізації програм	
				СВ.1.25	Теорія компіляції	
SF	Розподіл ресурсів та планування (Resource Allocation and Scheduling)		2	ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
				ПП 3.08	Методи оптимізації та дослідження операцій	216
SF	Наближення (Proximity)		3	ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
SF	Віртуалізація та ізоляція (Virtualization and Isolation)		2	ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
SF	Надійність через надлишковість (Reliability through Redundancy)		2	ПП 3.05	Захист інформації	144
				ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації	144
IAS	**Інформаційна безпека (Information Assurance and Security)**	**2**	**6**			
IAS	Фундаментальні принципи (Fundamental Concepts)	1	2	ПП 3.05 СВ.1.17	Захист інформації Основи криптології	144
IAS	Мережева безпека (Network Security)	1	4	СВ.1.23	Теорія інформації та кодування	
IAS	Криптографія (Cryptography)					
IAS	Керування ризиками (Risk Management)			ПП 3.18	Системний аналіз та теорія прийняття рішень	144
IAS	Безпека і керування(Security Policy and Governance)			СВ.5.11	Менеджмент безпеки підприємств	
				СВ.3.05	Технології інформаційного менеджменту	
				СВ.3.06	Управління програмними проектами	
IAS	Цифровий криміналістичний аналіз (Digital Forensics)					
IAS	Архітектура безпеки і системне адміністрування (Security Architecture and Systems Administration)			СВ.2.02	Адміністрування комп'ютерних мереж	
IAS	Забезпечення та розробка безпечних проектів (Secure Software Design and Engineering)			ПП 3.05	Захист інформації	144
				ПП 3.17	Проектування програмних систем	144

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
DS	**Дискретні структури (Discrete Structures)**	**37**	**4**			
DS	Основи логіки (Basic Logic)	9		МПН 2.04	Математична логіка та теорія алгоритмів	288
DS	Методи доведення (Proof Techniques)	10	1			
DS	Основи обчислень (Basics of Counting)	5		МПН 2.01	Алгебра та геометрія	216
				МПН 2.03	Диференціальні рівняння	144
				МПН 2.05	Математичний аналіз	360
				СВ.1.16	Обчислювальні методи	
DS	Функції, відношення та множини (Sets, Relations, and Functions)	4		МПН 2.02	Дискретна математика	288
DS	Графи та дерева (Graphs and Trees)	3	1			
DS	Дискретна ймовірність (Basics of Counting)	6	2	МПН 2.06	Теорія ймовірностей та математична статистика	216
PBD	**Розробка ПЗ, що базується на платформах (Platform-Based Development)**					
PBD	Вступ (Introduction)			ПП 3.15	Платформи корпоративних інформаційних систем	144
PBD	Веб-платформи (Web Platforms)			ПП 3.16	Програмування та підтримка веб-застосувань	144
PBD	Мобільні платформи (Mobile Platforms)					
PBD	Індустріальні платформи (Industrial Platforms)			ПП 3.15	Платформи корпоративних інформаційних систем	
PBD	Ігрові платформи (Game Platforms)			ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
IM	**Управління інформацією (Information Management)**	**1**	**9**			
IM	Управління інформацією (Information Management Concepts)	1	2	ПП 3.18	Розподілені інформаційно-аналітичні системи	144
				ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації	144
IM	Системи баз даних (Database Systems)		3	ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	288
IM	Моделювання даних (Data Modeling)		4	ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	288
				ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації	144

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
IM	Реляційні бази даних (Relational Databases)			ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	288
IM	Мови запитів до баз даних (Query Languages)					
IM	Обробка транзакцій (Transaction Processing)					
IM	Розподілені бази даних (Distributed Databases)					
IM	Проектування фізичної структури бази даних (Physical Database Design)					
IM	Вилучення інформації (Data Mining)					
IM	Збереження та пошук інформації (Information Storage And Retrieval)					
IM	Індексація (Indexing)					
GV	**Графіка та візуалізація (Graphics and Visualization)**	**2**	**1**			
GV	Фундаментальні методи в графіці (Fundamental Concepts)	2	1	ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
GV	Комп'ютерна анімація (Computer Animation)					
GV	Візуалізація (Visualization)					
GV	Геометричне моделювання (Geometric Modeling)			СВ.1.17	Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка	
GV	Основи рендерінга (Basic Rendering)					
GV	Поглиблене вивчення рендерінга (Advanced Rendering)			СВ.2.10	Програмування комп'ютерної графіки	
SDF	**Основні принципи розробки ПЗ (Software DevelopmentFundamentals)**	**42**				
SDF	Алгоритми і дизайн (Algorithms and Desig)	11		ПП 3.01	Алгоритми і структури даних	144
SDF	Фундаментальні поняття програмування (Fundamental Programming Concepts)	10		ПП 3.13	Основи програмування	576
				ПП 3.19	Теорія програмування	144
				СВ.1.21	Сучасні парадигми програмування	
SDF	Фундаментальні структури даних (Fundamental Data Structures)	12		ПП 3.13	Основи програмування	576
				ПП 3.01	Алгоритми і структури даних	144
SDF	Методи розвитку (Development Methods)	9		СВ.1.03	Методи верифікації та оптимізації програм	
				ПП 3.19	Теорія програмування	144

Висновки

З дослідженого видно, що забезпечена відповідність відносно обов'язкового мінімуму дисциплін ОПП'2010 рекомендаціям CS'2013 за умови, що читатимуться дисципліни за вибором: "Нейронні мережі" (СВ.1.15), "Функціональне програмування" (СВ.2.18), "Основи авторського права" (СВ.5.13), "Соціальні та професійні питання інформатики" (СВ.3.03), принаймні одна із дисциплін: "Моделювання складних систем» (СВ.1.12), "Моделювання інформаційних процесів" (СВ.1.10) та принаймні одна із дисциплін: "Етика та естетика" (СВ.5.05), "Соціальні та професійні питання інформатики" (СВ.3.03). Крім того, бажаним є введення до ОПП'2010 курсу, який би відповідав базовому курсу CS'2013 "Керування перериваннями та реактивне програмування" (PL).

Список скорочень

У даній статті застосовуються наступні скорочення:
ПЗ – програмне забезпечення;
ОПП'2010 – галузевий стандарт вищої освіти підготовки бакалаврів за напрямом 040302 "Інформатика" 2010;
CS'2013 – Computer Science Curricula 2013;
ГСЕ – гуманітарної та соціально-економічної підготовки;
МПН – математичної, природничо-наукової підготовки;
ПП – професійної та практичної підготовки;
СВ – самостійного вибору.

Список використаних джерел

1. The industry standard of the higher education of preparation of bachelors behind the direction 040302 «Informatics». Kyiv, 2010. (in Ukrainian).
2. Computer Science Curriculum 2013. Strawman Draft. The Joint Task Force on Computing Curricula, Association for Computing Machinery, IEEE-Computer Society.
3. Omelchuk L.L. A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and Computer Science'2013 // Visn., Ser. Fiz/-Mat/ Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 2. – P. 202 – 209. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 28.02.2013

УДК 519.7

Татаринов Є.О.[1], інженер першої категорії

Спектр алгоритмів відновлення графів за допомогою блукаючого ним агентом

Досліджується процес відновлення графів. Мета дослідження – виявлення основних етапів відновлення графу за допомогою агента та оптимізація цього процесу. Пропонується спектр алгоритмів відновлення графів, які уточнюють метод відновлення графу за допомогою побудови на його вершинах неявної нумерації. Наводяться переваги та особливості цих алгоритмів.

Ключові слова: відновлення графа агентом, нумерація вершин графа, оптимізація процесів відновлення графа.

[1] Інститут прикладної математики та механіки НАНУ, 83114, м. Донецьк, вул. Рози Люксембург, 74,
e-mail: MDgerelo@yandex.ru

E.A. Tatarinov[1], engineer first category

Spectrum of graph recovery algorithms with moving agent

The graphs recovery are investigated. The main goal of the study to identify the main stages of graph recovery with the agent and optimization of this process. Offers a spectrum of graphs recovery algorithms that define recovery method by building on the graph vertices an implicit enumeration. Given the benefits and features of these algorithms.

Key Words: graph recovery with moving agent, the numbering of graph vertices, optimization of graph recovery

[1] Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU, 83114, Donetsk, R. Luxemburg st., 74
e-mail: MDgerelo@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Введение

В настоящее время интенсивно развивается одно из направлений математической кибернетики - теория дискретных динамических систем [1 - 2]. В общей схеме Глушкова - Летичевского дискретная система представляется как модель взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и операционной среды) [3]. Взаимодействие этих систем зачастую представляется как процесс перемещения управляющего автомата по графу (лабиринту) управляемой системы [1], что привело к появлению обширной и интенсивно развивающейся области исследования поведения автоматов в лабиринтах [1 - 2].

Одной из наиболее важных таких задач является задача полного восстановления графа. Решение этой задачи позволяет получить решение двух других задач: самолокализации и контроля карты [4]. Поэтому задача полного восстановления графа является важной в теоретическом и прикладном плане.

Целью данной работы является планомерное исследование процессов восстановления графов с целью их оптимизации и выявления основных этапов и параметров восстановления. Предлагается спектр алгоритмов, полученных в результате такого исследования, приводятся их преимущества и особенности.

Основные определения

Пусть K – класс простых, неориентированных, связных графов, без петель кратных ребер, и граф $G(V,E)\in K$, где V – множество вершин, мощности n, а $E\subseteq V\times V$ – множество ребер, мощности m. Обхват графа – это длина кратчайшего простого цикла. Цикломатическое число графа – это минимальное число ребер, которые надо удалить, чтобы граф стал ациклическим. Тройку $((u,v),v)$ будем называть инцидентором (точкой прикосновения) ребра (u,v) и вершины v. Множество инцидентов графа обозначим I. Пусть $L=V\cup E\cup I$ множество элементов графа G. Будем обозначать $\mu(e)$ метку элемента e. Окрестностью $O(v)$ вершины v будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины v, всех вершин u смежных с v, всех ребер (v,u) и всех инцидентов $((v,u),v),((u,v),u)$.

Нумерация $F:V\to N$ вершин графа G – это инъективное отображение множества его вершин во множество N натуральных чисел. Прямой нумерацией называется нумерация вершин графа, соответствующая порядку их обхода при поиске в глубину. Древесными ребрами называются ребра, порождающие дерево поиска при обходе графа в глубину, остальные ребра –

Є.О. Татаринов, 2013

обратными. Будем обозначать $T^*(n)$ и $T_*(n)$, соответственно, верхнюю и нижнюю оценку временной сложности выполнения алгоритма.

Постановка задачи

Пусть задан класс K графов все элементы которых окрашены белой краской w. Задан мобильный агент A. Он может передвигаться по графу из вершины v в вершину u по ребру (v,u). При этом он может изменить окраску вершин v,u, ребра (v,u), инциденторов $((v,u),v),((v,u),u)$ метками. Находясь в вершине v, агент A воспринимает («видит») метки всех элементов окрестности $O(v)$ и на этом основании определяет по какому ребру (v,u) он будет перемещаться и как будет перекрашивать элементы из $O(v)$. Агент A обладает конечной, неограниченно растущей внутренней памятью, в которой фиксируется результат функционирования агента на каждом шаге, и, кроме того, постепенно выстраивается представление графа G, вначале неизвестного агенту, списками ребер и вершин.

Требуется разработать такой алгоритм функционирования агента A (т.е. передвижения по графу и раскраски его элементов), что он, будучи помещен в произвольную вершину произвольного неизвестного агенту графа $G \in K$, через конечное число шагов построит граф H, изоморфный G, т.е. восстановит G.

Базовый алгоритм

Очевидно, для восстановления графа агенту необходимо обойти все вершины, ребра и установить вершины, инцидентные каждому ребру. Поэтому алгоритм восстановления графа является специальным обходом этого графа.

В качестве основы этого обхода выбран обход в глубину, так как он содержит меньшее число возвратов по графу, сравнительно с обходом графа в ширину, и разбивает множество ребер графа всего на два множества: древесные и обратные, поскольку исследуемый граф G неориентированный [5]. При обходе в глубину агент создает на вершинах исследуемого графа с помощью красок неявную прямую нумерацию [5] и на ее основе определяет инцидентность ребер вершинам. Известен ряд алгоритмов поиска в глубину для известного графа [5]. Предлагаемая ниже стратегия обладает рядом особенностей. Во - первых, граф G агенту не известен и агент на каждом шаге обладает информацией только о метках элементов из окрестности $O(v)$ рабочей вершины v. Во - вторых, при прохождении вершин графа G агент создает неявную нумерацию пройденных вершин: при первом посещении вершины u она окрашивается красным цветом и ей ставится в соответствие номер, равный по значению переменной Сч. На основе этой нумерации и происходит восстановление (распознавание) графа путем построения графа H изоморфного G. В процессе поиска агент строит неявное дерево поиска в глубину и относительно этого дерева все ребра разделяются на древесные, т.е. принадлежащие этому дереву и окрашиваемые при первом прохождении по ним в красный цвет r, и обратные – не принадлежащие дереву и окрашиваемые при первом прохождении в черный цвет b. Древесные ребра проходятся по крайне мере 2 раза и при последнем проходе окрашиваются агентом в черный цвет. Обратные – проходятся один раз.

Древесные ребра распознаются агентом при первом проходе агента по ним. Красные вершины графа G, на каждом шаге алгоритма, образуют красный путь. С помощью этого пути распознаются обратные ребра, при проходе в новую вершину красный путь удлиняется, при проходе назад – укорачивается, при распознавании обратного ребра – не изменяется. Вершина, у которой все инцидентные ребра распознаны, красится черной краской. Алгоритм оканчивает работу, когда красный путь становиться пустым, а все вершины черными. Таким образом, агент использует две краски (красную и черную) и не использует камней. Данный алгоритм подробно описан в [6] далее приведем краткое его описание.

Базовый алгоритм (БА).

Вход: граф $G \in K$ неизвестный агенту, все элементы G окрашены в w, агент помещен в произвольную вершину v.

Выход: все элементы графа G окрашены в b, агент находится в вершине v, список вершин V_H и ребер E_H графа H, изоморфного G.

Данные: v – рабочая вершина графа G, в которой находится агент, V_H, E_H – списки вершин и ребер графа H, изоморфного G. Сч – счетчик числа посещенных вершин G. $k(1)k(2)...k(t)$ – список номеров вершин красного пути, t – длина этого списка, j – счетчик, используемый для восстановления обратных ребер.

Алгоритм

1. Сч:=1; $t:=1$; $k(t):=$ Сч; $V_H := \{1\}$; $E_H := \varnothing$;

2. Агент красит: $\mu(v) := r$;

3. if $O(v)$ есть ребро (v,u), у которого $\mu(u,v) = w$ then goto 4 else goto 5

4. if $O(v)$ есть ребро (v,u), у которого $\mu(u,v) = w$ и $\mu(u) = \mu(v) = r$ then ВОСТ(v) else ВПЕРЕД(v)

5. if в $O(v)$ есть ребро (v,u), у которого $\mu((v,u),v) = r$ then do НАЗАД(v) goto 3 end do

6. Агент красит: $\mu(v) := b$;

ВПЕРЕД(v) – достраивание дерева и восстановление древесного ребра. НАЗАД(v) – возврат по дереву, когда все ребра, инцидентные вершине, восстановлены. ВОСТ(v) – восстановление обратного ребра.

Оценки сложности сформулируем виде теоремы.

Теорема 1. Нижняя оценка временной сложности БА $T_*(n) = \Omega(n + qg)$, а верхняя равна $T^*(n) = O(n + qt)$. Верхняя оценка емкостной сложности– $S(n) = O(n^2)$.

Здесь g – обхват графа, q – цикломатическое число, t – длина наибольшего простого цикла в графе. Агент использует две различные краски (красную и черную). Таким образом $T^*(n) = O(n^3)$.

Модификации Базового Алгоритма (БА)

Анализ выполнения этапов предложенного метода позволил найти модификации алгоритма, которые будут иметь лучшую оценку сложности. Существенным достоинством полученных модификаций является то, что они позволяют установить взаимоотношение между числом ресурсов, используемых агентами и оценками сложности алгоритма.

Модификация 1 (М1), декомпозиция агента

Первой естественной модификацией БА является разделение процессов непосредственного взаимодействия агента с графом и оперирования с внутренней памятью агента при восстановлении графа. Таким образом, проводится декомпозиция агента на два агента: агент - исследователь (АИ) и агент - экспериментатор (АЭ). Первый – передвигается по исследуемому графу, считывает и изменяет метки на элементах графа из окрестности текущей вершины, передает сообщения агенту экспериментатору и на основе разметки элементов графа выбирает дальнейшее направление движения. Второй, по сообщениям от агента АИ, строит представление исследуемого графа в виде списка смежности. Агент АЭ не передает никаких сообщений АИ. Подробно модификация описана в [7].

Достоинством этой модификации является то, что агент АИ не требует для своего функционирования хранения таблицы всего исследуемого графа или хранения информации о пройденном пути, поэтому он может быть достаточно мал, а для некоторых частных случае графов, которые будут рассмотрены далее, он может быть конечным автоматом. При применении этой модификации агенту АИ не требуется выполнять сложные вычисления, дополнительные трудоемкие действий и / или дополнительные ресурсы для пометки элементов графа. Таким образом, декомпозиция агента не ухудшает временную, емкостную сложности и не увеличивает число различных красок и камней.

К особенностям данной модификации можно отнести следующее. Для передачи сообщения от АИ к АЭ потребуется канал односторонней связи, очередь сообщений и протокол передачи данных.

Модификация 2 (М2), одновременное восстановление обратных ребер инцидентных одной вершине красного пути

В БА кубическая временная сложность возникает из - за того, что каждое обратное ребро агент восстанавливал отдельно и при этом мог совершить число шагов соизмеримое с n. Поэтому следующей модификацией стало восстановление всех обратных ребер инцидентных рабочей вершине красного пути за один проход по вершинам красного пути. В этом случае агенту потребуется пометить все такие обратные ребра. Например, если агент воспринимает 1- окрестность $O(v)$, можно поставить в вершине камень и затем двигаться в обратном направлении до начальной вершины с целью поиска ребер, которые смежны с вершиной помеченной камнем. Таким образом, считая число переходов по ребрам красного пути агент может однозначно вычислить прямой номер вершины, из которой он увидит смежную вершину помеченную камнем, а значит сможет узнать какой вершине в восстанавливаемом графе она соответствует, так же как и при восстановлении обратного ребра в БА. Подробно данная модификация описана в [8].

Теорема 2. Нижняя оценка временной сложности алгоритма равна $T_*(n) = \Omega(n)$, а верхняя – $T^*(n) = O(n^2)$, и емкостная сложность – не

ухудшается. При этом используется две краски и один камень l.

Таким образом, предложенная модификация имеет верхнюю оценку временной сложности на порядок лучше, чем БА, однако требует дополнительный камень для пометки вершины, инцидентной обратным ребрам, которую агент восстанавливает.

К особенностям метода можно так же отнести проход по ребрам красного пути в прямом и обратном направлении.

Модификация 3 (М3), восстановление обратных ребер при «зацикливании»

Естественной модификацией базового алгоритма и его М2 будет восстановление ребер не при первом их появлении в текущей вершине, а при зацикливании агента. Данная модификация показывает, что порядок восстановления обратных ребер не влияет на верхнюю оценку времени восстановления графа и не требует дополнительных ресурсов по памяти и меткам.

Эта модификация изменяет в основном алгоритме только приоритет выполнения двух процедур ВОСТ(v), ВПЕРЕД(v). То есть, раньше, если была возможность восстановить обратное ребро, то агент его восстанавливал и только потом шел вперед, в М3 наоборот, если есть возможность идти вперед, то агент идет вперед не восстанавливая обратных ребер. Подробно модификация описана в [8].

Эта модификация не ухудшает порядка сложности алгоритма, к которому она была применена. Однако она позволяет получить новые алгоритмы восстановления графа и позволяет показать, что порядок восстановления обратных ребер не изменяет сложность алгоритма.

Модификация 4 (М4), ординарные и неординарные вершины

В БА множество ребер разбивается только на два непересекающихся подмножества: древесные и обратные. При этом обратные ребра требуют для восстановления проход по вершинам красного пути. Длина такого прохода может быть соизмерима с n. Поэтому следующей модификацией БА стало выделение во множестве обратных ребер подмножества, которое бы восстанавливалось за константное число шагов. Рассматривается разбиение множества вершин на два подмножества: ординарные и неординарные,– а множество обратных ребер на те, которые не инцидентны неординарным вершинам и те, которые инцидентны хотя бы одной неординарной вершине. Ребра инцидентные неординарным вершинам восстанавливаются за два шага, при проходе по ним агента в прямом и обратном направлении. При этом ординарной вершиной будем назвать вершину, у которой $\deg(v) \le D$, где D (степень ординарности) заранее известная константа и не зависит от n, в противном случае вершина неординарная. Ординарные вершины восстанавливаются согласно стратегии алгоритма, к которому была применена данная модификация (например, к БА или его модификациям М1 - М3). Неординарные вершины метятся камнями. В момент установки камня в неординарной вершине ей неявно присваивается следующий номер по порядку. Этот номер записывается в список соответствия в ячейку, номер которой совпадает с номером установленного камня. Такое соответствие сохраняется на протяжении выполнения всего эксперимента по восстановлению. Это позволяет без выполнения дополнительных шагов определять неявный номер неординарной вершины по номеру камня установленного в ней. Таким образом, при выполнении процедуры НАЗАД(v) агент при обнаружении неординарной вершины помеченной камнем сможет вычислить ее неявный номер. После чего агент может добавить в E_H ребро, соединяющее текущую вершину с этой неординарной вершиной. Заметим, что выполнять поиск вершин помеченных камнем можно не только при выполнении процедуры НАЗАД(v), но и при выполнении процедуры ВПЕРЕД(v). Подробно данная модификация описана в [8]. Оценку сложности выполнения модификации сформулируем виде теоремы.

Теорема 3. Верхняя оценка временной сложности при применении М4 не ухудшается, верхняя оценка емкостной сложности равна $O(pn)$. При этом используется две краски и, дополнительно, не более чем p камней. Здесь p – количество неординарных вершин в графе.

Достоинством этой модификации является то, что агенту необходимо анализировать окрестности только ординарных вершин, что займет меньше времени и конечную память, чем анализ окрестности неординарных вершин. Если же применить М4 вместе с М1, то агент - исследователь может быть конечным автоматом, поскольку ему необходимо будет анализировать окрестность, в которой будет не более чем D ребер, $2D$ инциденторов и $D+1$ вершины.

К особенностям этой модификации можно отнести то, что рассматривается более узкий

класс графов, чем в базовом алгоритме и требуются дополнительные камни для установки в неординарных вершинах.

Модификация 5 (М5), нумерация вершин набором камней

Пусть у агента имеется p попарно различных камней. Нумерацию вершин агент будет реализовывать неявно, при помощи установки в вершине одного камня. При этом для каждого камня i существует свой счетчик числа непомеченных ребер, которые есть в окрестности текущей вершины v, перед тем как агент установит в ней камень i. Когда агент «видит» в окрестности текущей вершины смежную вершину, помеченную камнем i, его счетчик уменьшается на единицу. Когда счетчик обнулится, камень станет свободным и агент перейдет в вершину, снимет с нее камень i, вершину пометит краской b и вернется обратно. Агент использует для пометки вершины свободный на данный момент камень с наименьшим номером. Камень считается свободным, если его счетчик равен нулю. Перед началом восстановления счетчики всех камней равны нулю. В момент установки камня i вершине неявно присваивается ее номер по порядку $1,2,3$ – ее неявный прямой номер. Камень i ассоциируется с прямым номером, который неявно был присвоен вершине в момент установки в ней камня i. Такая связь сохраняется до тех пор, пока камень не станет свободным. Модификация подробно описана в [9]. Оценку сложности сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4. Верхняя оценка временной сложности М5 базового алгоритма $T(n)=O(n)$, а верхняя оценка емкостной сложности не изменяется. При этом используется две различные краски и h_t камней, где h_t - максимальная высота дерева при обходе графа в глубину.

К достоинствам этой модификации можно отнести совпадение верхней и нижней оценки временной сложности. Для любого графа из класса K, существуют классы графов для восстановления, которых агент использует константное число камней.

К особенностям этой модификации следует отнести достаточно большое число камней, которые требуются для выполнения алгоритма, поскольку в общем случае h_t соизмеримо с n. Кроме того, агент проводит дополнительный анализ в вершине при восстановлении обратного ребра и при снятии камня с вершины, в частных случая это может потребовать дополнительного времени.

Выводы

Предлагается Базовый Алгоритм и его модификации, образующие спектр алгоритмов. Модификации позволяют понизить верхнюю оценку временной сложности и выявить основные этапы восстановления графа. Однако, выполнение модификаций требуют от агента использования дополнительных ресурсов. Это позволяет установить определенную зависимость времени выполнения алгоритма от числа используемых агентом ресурсов.

Список використаних джерел

1. *G. Kilibarda, V. B. Kudryavtsev, and S. M. Ushchumlich* Collectives of automata in labyrinths // Discrete mathematics. – 2003, 15, no. 3, C. 3–40. (in Russian).
2. *G. Kilibarda, V. B. Kudryavtsev, and S. M. Ushchumlich* Collectives of automata in labyrinths // Discrete mathematics. – 2003, 15, no. 2, C. 3–39. (in Russian).
3. *Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S.* Intorduction to the Automata Theory. M.: Nauka, 1985. 320 p. (in Russian).
4. *Dudek G., Jenkin M., Milios E., Wilkes D.* Map validation and Robot Self-Location in a Graph-Like World // Robotics and Autonomous Systems. – 1997. – Vol. 22.
5. *Evstigneev V.A.* Application of graph theory to computer programming. M: Nauka, 1985. 352 p. (in Russian).
6. *Grunsky I.S., Tatarinov E.A.* Grpah reconstruction with moving agent // Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences. – 2009. – no 1. – P. 492–497. (in Russian).
7. *Grunsky I.S., Tatarinov E.A.* Graph reconstructiong algorithm // Proc. of 4th “PACO’2008” Intern. Conf. “Parallel Computations and Control Problems”, Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, RAS, October 27-29, 2008. - P. 1483-1498. (in Russian).
8. *Tatarinov E.A.* Basic algorithm for reconstructing graph // Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics. – 2010. – V. 21. – P. 216-227.
9. *Tatarinov E.A.* Graph reconstruction with stones / / Scientific Papers "Problems of Applied Mathematics, Mathematical Modeling." - Izd. Dnepropetrovsk National. univ., - 2011. - P. 232 - 255.

Надійшла до редколегії 03.12.2012

УДК 519.68

Терещенко В.М.[1], д.ф.-м.н., доц.

Модифікація методу ланцюгів для задачі локалізації точки

У роботі пропонується модифікація методу ланцюгів для розв'язання задачі локалізації точки на площині. Запропонована модифікація стосується побудови нової структури даних у вигляді орієнтованого ациклічного графа, яка дозволяє лакалізувати точку за O(logn) часу, використовуючи O(n) пам'яті.

Ключові слова: локалізація точки, монотонний ланцюг, дискримінація точки, структура даних.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: vtereshch@gmail.com

V.M. Tereshchenko[1], Dr. Sci.(Phis.-Math.), Assoc. Prof.

A modificated chain method for point-location problem

The paper proposes a modification of chain method for solving the point-location problem on the plane. The modification concerns the construction of a new data structure as directed acyclic graph, which allows to locate a point in O(logn) time using O(n) memory.

Key Words: point-location, monotone chain, point discrimination, data structures.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: vtereshch@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Постановка проблеми. Задача локалізація точки є однією з фундаментальних та важливих проблем в області обчислювальної геометрії. Для n- вершинного планарного розбиття важливим завданням є побудова алгоритму цієї задачі, який одночасно досягає $O(\log n)$ часу та $O(n)$ пам'яті.

Аналіз останніх досліджень. Перші оптимальні рішення були представлені Ліптоном і Тар'яном [6] та Кіркпатріком [2]. Метод Ліптона-Тар'яна заснований на теоремі сепаратора графу, і досі представляє лише теоретичний інтерес. Метод деталізації тріангуляції [2], який будує ієрархію тріангуляцій, можна реалізувати, але він має константи занадто великі константи. Окрім того, жоден з цих методів не поширюється на планарні розбиття з криволінійними ребрами.

Історично, Добкін і Ліптон [3] були першими в досягненні $O(\log n)$ оцінки часу запиту, при цьому використовуючи $O(n^2)$ пам'яті. Їх метод, що отримав назву метод смуг, був згодом покращений Препаратою [4], так що оцінка пам'яті стала $O(n\log n)$. Пізніше Білардо і Препарата [1] ще раз покращили оцінку складності пам'яті в середньому до $O(n\log n)$. Окрім цього, ці методи мають позитивну рису: вони можуть бути застосовані до розбиття з криволінійними ребрами.

Істотно інший підхід був розглянутий Шеймосом [7], що привів до відомої роботи про проблему локалізації точки Лі і Препарати [5], заснованої на побудові розділяючих ланцюгів. Час попередньої обробки побудови цієї структури даних складає $O(n\log n)$, з використанням пам'яті $O(n)$ в гіршому випадку, та часом пошуку $O(\log^2 n)$.

Мета роботи. Запропонувати модифікацію методу ланцюгів Лі і Препарати [5], яка покращує оцінки складності часу запиту до $O(\log n)$ та пам'яті до $O(n)$.

Новизна. В роботі пропонується модифікація методу ланцюгів, в основі якої лежить нова структура даних у вигляді орієнтованого ациклічного графу. В цій структурі, точка запиту локалізується не лише у батьківському ланцюгу, а й в одному із ланцюгів нащадків за $O(1)$ часу. Окрім цього, досягається зменшення значень констант та проста реалізація.

2. Побудова модифікованого алгоритму розв'язання задачі

Сподівання отримати швидший алгоритм полягають в тому, що є деякі очевидні втрати інформації в існуючому методі ланцюгів [5].

© В.М. Терещенко 2013

Зокрема, коли ми локалізуємо точку відносно ланцюга c_k, ми повинні локалізувати її *x*-координату в межах деякого ребра або так званої прогалини c_k. Проте, коли ми продовжуємо пошук вниз по одному із синів вершини k, ми починаємо цей процес локалізації заново. Було б добре, якщо б кожне ребро або прогалина у ланцюгу вказувала на місце, в кожному із ланцюгів нащадків, де пошук по *x*-координаті буде завершений. Проблема в тому, що ребро або прогалина батьківського ланцюга може покривати багато ребер або прогалин в його ланцюгах нащадках.

В роботі пропонується така модифікація ланцюгів, щоб локалізація p_x в одному ланцюгу дозволяла зробити те саме в одному з нащадків за $O(1)$ часу. Ідея розбити кожний ланцюг по *x*-координатам вершин в графі не підходить, адже зрозуміло, що така структура даних вимагатиме O(n^2) пам'яті. Замість цього, для кожного ланцюга c_k опишемо структуру даних L_k, яка визначає розбиття осі OX на інтервали. Кожен такий інтервал L_k покриває *x*-проекцію одного ребра або прогалини ланцюга c_k і не більше двох інтервалів списків $L_{l(k)}$ і $L_{r(k)}$.

L_k списки і їхні взаємозв'язки доцільно представити за допомогою орієнтованого ациклічного графу. Список L_k будується на основі ланцюга c_k і представлений послідовністю вузлів трьох типів: *x*-вузли, *e*-вузли, і *g*-вузли. *x*-вузол відповідає вершині ланцюга і складається із значення *x*-координати цієї вершини (поле $xval$), а також вказівників $left$ і $right$, що вказують на *e*- або *g*-вузол, що знаходяться відповідно ліворуч та праворуч від вершини. *x*-вузол відповідає на питання: "Шукана точка знаходиться ліворуч чи праворуч від вершини?".

e-вузол відповідає ребру ланцюга і складається з поля *edge* з представленням цього ребра, а також вказівників up та $down$, які вказують на вузли $L_{l(k)}$ та $L_{r(k)}$, що можуть бути будь-якими з трьох типів. *e*-вузол відповідає на питання: "Шукана точка знаходиться на, над чи під ребром?". *g*-вузол відповідає прогалині ланцюга і складається з поля $chain$, що вказує номер цього ланцюга, а також вказівників up та $down$, аналогічно *e*-вузлу. На рис. 1 зображені три типи вузлів, на рис. 2 зображений L_k список.

Визначимо значення вказівників $down(t)$ та $up(t)$ для деякого вузла *t*. Вище вказана властивість інтервалів списку L_k забезпечує покриття *x*-інтервалом списку L_k, який відповідає *e*- або *g*-вузлу, одного *x*-інтервалу I списку $L_{l(k)}$, або двох таких інтервалів I_1, I_2, розділених деякою вершиною x_k списку $L_{l(k)}$.

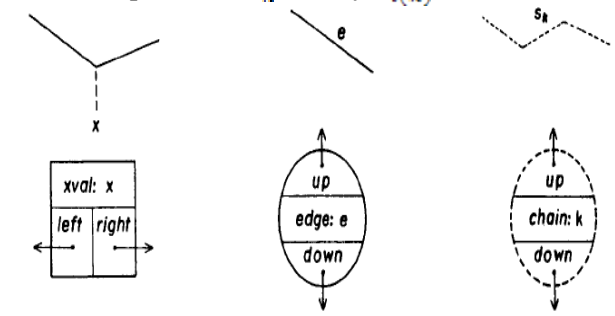


Рис. 1 Три типи вузлів.

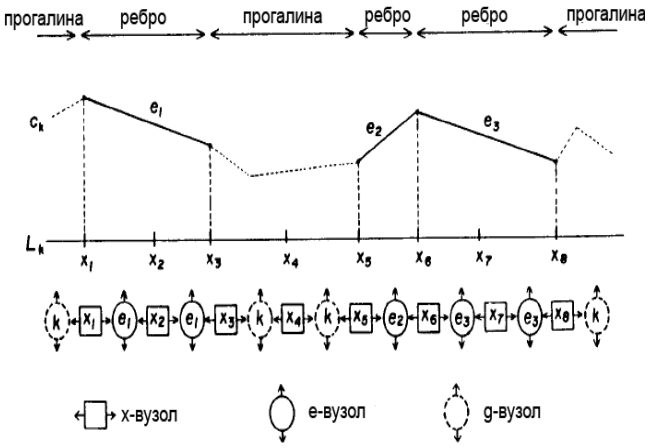


Рис. 2 L_k список.

У першому випадку, *down*(*t*) вказує на *e*- або g-вузол списку $L_{l(k)}$, що відповідає інтервалу I; а в другому випадку, $down(t)$ вказує на *x*-вузол, що відповідає абсцисі x_k. Посилання $up(t)$ вказує на вузол списку $L_{l(k)}$, визначений аналогічним чином. У окремому випадку, коли $r(k)$ та $l(k)$ є листками структури *T*, $down(t) = up(t) = nil$. Таким чином матимемо наступний алгоритм.

Модифікований алгоритм пошуку

{Вхідні дані: вказівник на корінь орієнтованого ациклічного графу і кількість регіонів *n*. *Вихідні дані:* зберігаються в змінній *loc.}*

1. $i := 0, j := n-1, t \leftarrow root$.
2. Поки $i < j$:

{ Відомо, що точка p лежить над s_i та під s_{j+1} ланцюгами. Це означає, що p лежить в одному з регіонів $R_i, R_{i+1}, \ldots, R_j$. Змінна t представляє один з вузлів графа певного типу, і допомагає встановити регіон розташування точки p }

3. Якщо t є *e*-вузол, тоді $e \leftarrow edge(t)$:

{ Відомо, що $p_x \in Пе$ (проекція ребра e на вісь x) }

4. Якщо p лежить на e, $loc \leftarrow e$ та завершити роботу алгоритму.

5. Якщо p лежить над e тоді $t \leftarrow up(t)$ та $t := index(above(e))$, інакше $t \leftarrow down(t)$ та $j := index(below(e))$.

6. Інакше, якщо t є x-вузол, тоді:
{Цей x-вузол переміщує до відповідного ребра наступного ланцюга, відносно якого необхідно порівнювати точку p }
7. Якщо $p_x \leq xval(t)$ тоді $t \leftarrow left(t)$, інакше $t \leftarrow right(t)$.

8. Інакше, якщо t є g-вузол, тоді:

{Визначено розташування точки p відносно відповідного ребра ланцюга прогалини. }
9. Якщо $j < chain(t)$ тоді $t \leftarrow down(t)$, інакше $t \leftarrow up(t)$.
10. $loc \leftarrow R_i$ та закінчити пошук.

3. Побудова структури даних

Побудова структури даних відбувається "знизу вгору" (від листків до кореня), одночасно з уточненням ланцюгів c_k. Вже було описано, як отримуються списки L_k. Тобто, ми вже маємо в своєму розпорядженні три відсортованих списки значень x: ті, які відповідають $L_{l(k)}$, $L_{r(k)}$, а також список кінців ребер, що зберігається з ланцюгом c_k. x-значення у списку L_k є об'єднанням x-значень ланцюга c_k і кожної іншої точки, що присутня як в $L_{l(k)}$ так і в $L_{r(k)}$. Причому, якщо k-ий вузол є листком в дереві ланцюгів T (тобто відповідає певному регіону), або $k \geq n$, тоді список L_k порожній. Просування x-значення від сина до батьківського вузла задовольняє двом корисним властивостям:

Лема 1. Інтервал між двома сусідніми x-значеннями в списку L_k покриває не більше двох інтервалів в $L_{l(k)}$, та в $L_{r(k)}$ аналогічно.

Лема 2. Загальна кількість x-значень в списках L_k, просумованих для кожного k, не збільшується.

Доведення. Нехай a_k це кількість ребер в ланцюгу c_k , тоді $\sum_{k \epsilon T} a_k = m$, оскільки кожне ребро планарного розбиття зустрічається в ланцюгах тільки один раз. Нехай b_k це кількість x-значень в L_k, і A_k(відповідно B_k) це сума a_i(відповідно b_i) по всім вузлам i, що знаходяться в піддереві з коренем в вершині k. Для доведення леми достатньо показати $B_r \leq 4A_r = 4m$ для кореневої вершини $r = lca(0, n-1)$. Будемо доводити за індукцією, припускаючи гіпотезу $B_i + b_i \leq 4A_i$. Гіпотеза тривіально справджується для i-их вузлів, які є листками в дереві ланцюгів T. З того, що $B_k = B_{l(k)} + B_{r(k)} + b_k$, $A_k = A_{l(k)} + A_{r(k)} + a_k$, та $b_k \leq 2a_k + (b_{l(k)} + b_{r(k)})/2$, оскільки кожне ребро в ланцюгу c_k вносить не більше двох значень до списку L_k, випливає $B_i + b_i \leq B_{l(i)} + B_{r(i)} + 4a_i + b_{l(i)} + b_{r(i)} \leq 4A_i$ ■

Інтуїтивно зрозуміло, що половина x-значень ланцюга c_k поширюється батьківському ланцюгу, чверть діду, восьма частина прадіду, і так далі. Зазначений факт ілюструє лінійність загальної довжини L списків.

Алгоритм побудови структури даних

1. i:=1. Поки i < n:
{ Побудова ще одного рівня графу. Номер першого вузла =i, різниця між послідовними вузлами (що лежать в одному піддереві) = 2i. K-й вузол на цьому рівні є найменшим спільним нащадком листків від k — i до k + i — 1; його нащадками (якщо i > 1) є вузли k — i/2 та k + i/2 }
2. $k \leftarrow i$. Поки $i < n$:
{ Створюємо список L_k із ланцюгу c_k. $L' = L_{l(k)}$ та $L'' = L_{r(k)}$ }
3. Якщо $i = 1$, тоді $L' \leftarrow \emptyset$, інакше $L' \leftarrow L_{k-i/2}$.
4. Якщо $i = 1$ або $k + i/2 \geq n$, тоді $L'' \leftarrow \emptyset$, інакше $L'' \leftarrow L_{k+i/2}$
5. Якщо $k \geq n$, тоді нехай c_k є звичайною прогалиною від $x = -\infty$ до $x = +\infty$. Розбиваємо ребра і прогалини ланцюга c_k в кожній точці іншого x-значення списків L' та L".
6. $L_k \leftarrow \emptyset$. Для кожного ребра чи прогалини e в ланцюгу c_k:

а) Додати в L_k e-вузол чи g-вузол t, що представляє e, $edge(t) \leftarrow e$ чи $chain(t) \leftarrow k$.

б) Якщо $L' = \emptyset$, тоді $down(t) \leftarrow nil$, інакше, якщо Πe покриває тільки один x-інтервал списку L', тоді вказівник $down(t)$ посилаємо на відповідне ребро або прогалину списку L'. Інакше, якщо Πe покриває два x-інтервали L', тоді створити x-вузол t', що вибирає між двома відповідними ребрами чи прогалинами списку L', та $down(t) \leftarrow t'$.

в) Таким же чином, встановлюємо вказівник $up(t)$ в nil, або в e-вузол або в g-вузол списку L'', або в новий x-вузол, що вибирає між двома вузлами списку L''.

7. $k \leftarrow k + 2i$.
8. $i \leftarrow 2i$.

9. Нехай $r \leftarrow lca(0, n-1)$. Побудуємо збалансоване бінарне дерево *x*-вузлів списку L_r, тоді *root* вказує на корінь цього дерева.

Різні вузли L_k можуть вказувати на один і той же вузол (рис.3). Зауважимо, що структура, побудована Кіркпатріком [2] також відповідає орієнтованому ациклічному графу. Таке спільне використання піддерев здається є однією з основних властивостей алгоритмів локалізації точки, які одночасно досягають оптимальної оцінки часу і пам'яті. Щоб зменшити кількість вказівників, можна зберігати вузли кожного списку L_k в послідовних комірках пам'яті (в масивах), у їхньому природньому порядку зліва-направо. Тоді початкове знаходження x_p в L_r можна знайти за допомогою звичайного бінарного пошуку. Окрім того, при побудові L_k можна переглядати списки $L_{l(k)}$ та $L_{r(k)}$ без зайвих вказівників. Також, таке послідовне зберігання вузлів усунуло б необхідність зберігання $left$ та $right$ вказівників *x*-вузлів, що приводить до зменшення використаного об'єму пам'яті на одну третину.

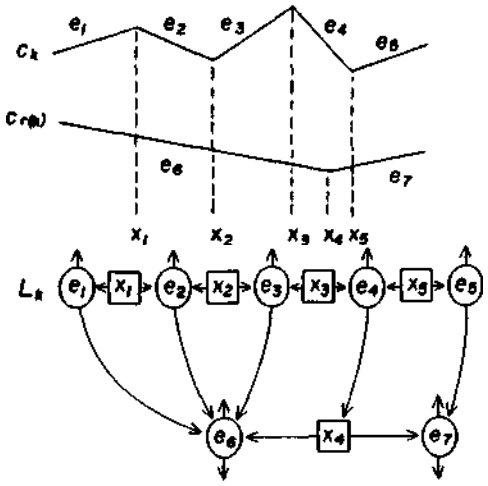


Рис. 3 Сходження декількох вказівників в один вузол.

У будь-якому випадку, початкове знаходження x_p в кореневому списку L_r може бути встановлено за $O(\log m)$. Після цього алгоритм виконує точно $\lceil log\, n \rceil$ порівнянь в *e*- або *g*-вузлах (одне на кожному рівні T), і не більше цієї ж кількості порівнянь в *x*-вузлах. Таким чином, загальний час запиту $O(\log m)$. Список L_k з t *x*-значеннями представлений в структурі не більше ніж t *x*-вузлами та $t+1$ *e*- або *g*-вузлами і, як було показано, може бути побудований за $O(t)$ часу. Використовуючи лему 2, робимо висновок, що орієнтований ациклічний граф не збільшує кількість *x*-вузлів та *e*- або *g*-вузлів, і може бути побудований за $O(m+n)$ з дерева ланцюгів *T*. Таким чином, має місце наступний висновок.

Теорема 1. Маючи дерево ланцюгів для планарного розбиття з *n* ребрами, можна побудувати структуру даних за час $O(n)$, що використовує $O(n)$ пам'яті, і дозволяє локалізувати точку за $O(\log n)$ часу.

4. Висновки

В роботі представлена модифікація методу ланцюгів, що дозволяє побудувати лінійну за розміром структуру даних, яка вирішує задачу локалізації точки для планарних розбиттів на площині з оптимальною оцінкою складності часу пошуку $O(\log n)$. Основна ідея полягає в тому, щоб зберігати рівно одне ребро серед усіх ланцюгів, які були вперше представлені Лі та Препаратою, а також з'єднувати їх вказівниками. Структура даних може бути побудована із звичайного дерева ланцюгів за лінійний час, як це було описано в підрозділі 3. Запропонована модифікація може бути узагальнена і на випадок криволінійного розбиття.

Список використаних джерел

1. *Bilardi G. and Preparata F. P.* Probabilistic analysis of a new geometric searching technique. Manuscript, Dept. of EECS, Univ. of Illinois. -1982.
2. *Kirkpatrick, D. G.* Optimal search in planar subdivisions // SIAM Journal on Computing. –1983. –N12. –P. 28-35.
3. *Dobkin D. P., Lipton R. J.* Multidimensional searching problems//SIAM Journal on Computing. –1976. – Vol. 5. –P. 181-186.
4. *Preparata F. P.* A new approach to planar point location// SIAM Journal on Computing. –1981. –Vol. 10. –P. 473-482.
5. *Lee D. T., Preparata F. P.* Location of a point in a planar subdivision and its applications // SIAM Journal on Computing. -1977. – V 6.- P. 594-606.
6. *Lipton R. J.,* Tarjan R. E. Applications of a planar separator theorem // Proc. 18th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science. – 1977. – P. 162-170.
7. *Shamos M. I.* Geometric complexity // Proc. 7th ACM Symp. on Theory of Computing. – 1975.-P. 224-233.

Надійшла до редакції 28.03.13

УДК 519.852:519.876

Тодоріко Б.Д.[1], аспірант

Аналіз особливостей двоїстої задачі лінійного програмування матричної гри у змішаних стратегіях методом базисних матриць

Проаналізовано властивості двоїстої задачі лінійного програмування, як матричної гри у змішаних стратегіях. Застосовано положення методу базисних матриць при встановленні властивостей чистих стратегій (рядків)- платіжної матриці.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв‘язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: t1to@list.ru

B.D.Todorico[1], postgraduate student

The analysis of matrix game with mix strategies how dual linear programming problems with application methods of basic matrix

Analysis of matrix game with mix strategies as dual linear programming problems of basic matrix methods is research.

Key Words:basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: t1to@list.ru

Статтю представив д.т.н., п.н.с. Кудін В.І.

Вступ.

Одним з напрямкім дослідження матричної гри у змішаних стратегіях опирається на аналізі спеціальним чином побудованої двоїстої пари задач лінійного програмування [1-5]. Як “рішатель” даної задачі, найчастіше обирають сімплекс методи, що застосовані до прямої або до двоїстої задачі (“стовпцеві” [5,6] та “порядкові” [7] схеми). При проведенні її аналізу доцільно застосовувати як “стовпцеві” [5,6] (метод покращення плану) так “порядкові” (метод базисних матриць) [7] схеми. Це обумовлено тим, що при застосуванні перші дають інформацію про стовпці, а інші про рядки матриці обмежень, тобто про стратегії ігроків матричної гри.

В даній роботі досліджено структурні властивості двоїстої задачі (матричної гри) та застосовано ідеологію “стовпцевих” та “рядкових” методів при аналізі властивостей платіжної матриці (стратегій ігроків)

Постановка задачі.

Введемо в розгляд двоїсту пару задач лінійного програмування [1-5], де *пряма задача*:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \qquad (3)$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)–(3) має матрицю обмежень A в якій кількість стовпців більш ніж рядків (“довга”).

© Б.Д. Тодоріко, 2013

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \,, \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \geq c_2; \\ ..... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \geq c_n; \end{cases} \qquad (5)$$

$$u_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (6)$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4],

де $b_i = 1,\ i = \overline{1,m},\ c_j = 1,\ j = \overline{1,n}$..

Пасивність та неактивність обмежень двоїстої задачі лінійного програмування (4)-(5).

Нехай

$$U = \{ \quad u / a_j u^T \leq c_j, \quad j \in J \ \},$$

$$U_r = \{u / a_j u^T \leq c_j, \quad j \in J, \quad J \neq r \ \}$$

$$U^0 = \{u_0 / Bu_0{}^T = \max_{u \in U} Bu^T, u \in U\}$$

$$U_r^0 = \{u_0 / Bu_0{}^T = \max_{u \in U_r} Bu^T, u \in U_r\}.$$

Означення 1. Обмеження $a_r u^T \leq c_r$ задачі (4)-(6) пасивне, якщо $U = U_r$.

Означення 2. Обмеження $a_r u^T \leq c_r$ неактивне, якщо $U^0 = U_r^0$.

Означення 3. Обмеження $a_r u^T \leq c_r$ оптимально-активне, якщо $U^0 \neq U_r^0$.

Через $A_{б(k)}^0$ позначимо матрицю, яка отримується із базисної матриці $A_б$ (що відповідає базисному розв'язку u_0 задачі (4),(5)) заміною рядка, що займає k-у позицію нормаллю цільової функції, взятої з протилежним знаком, тобто $(-B)$.

Означення 4. Матрицю B_k^0 будемо називати оптимально базисною, якщо існує обернена до неї $(A_{б(k)}^0)^{-1}$, $A_{б(k)}^0 \cdot u_0^T = d_0$, де $d_0 = (c_1^0, ..., c_{k-1}, -Bu_0^T, c_{k+1}^0, ..., c_m^0)$

Теорема 1. (друга теорема двоїстості для симетричних задач або з однотипними обмеженнями [5]). Для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

$$u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1,m}\,.$$

Очевидніший взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок 1. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна i-та компонента оптимального плану (відповідна стовпцю A_i) спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна (при стовпцю A_i), то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Наслідок 2. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність (пасивне), то відповідна i-та компонента оптимального плану (відповідна стовпцю A_i) спряженої задачі дорівнює нулю.

Оскільки оптимальні стратегії матричної гри визначаються через компоненти розв'язки задач (1)-(3) та (4)-(6) [1-3], а саме, складові оптимальних стратегій $u_i^{'}$ та $w_i^{'}$ ігри пов'язані з компонентами u_i та x_j оптимальних планів двоїстих задач лінійного програмування формулами

$$w_j^{'} = x_j / \sum_{j=1}^{n} x_j \,,\ u_i^{'} = u_i / \sum_{i=1}^{m} u_i \,.$$

Наведені вище умови пасивності обмежень (5) тісно пов'язані з категорією суттєвості чистої стратегії матричної гри.

Наслідок 3. Якщо в результаті аналізу однієї із задач (прямої чи двоїстої) в системі обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність (пасивне або неактивне), то відповідна і-у стовпцю (стратегія) платіжної матриці спряженої задачі несуттєва.

Означення 4. Чиста стратегія $e_k = \left(\underbrace{\overbrace{0,0,...,0,1}^{k},0,...0}_{m} \right)$ першого гравця називається *істотною (суттєвою)*, якщо існує така оптимальна змішана стратегія $u' = \left(u_1, u_2, ..., u_{k-1}, \underbrace{u_k}_{k}, u_{k+1}, ..., u_m \right)$, в якій k-а її складова u_k додатня.

В іншому випадку стратегія e_k *неістотна (несуттєва)*.

Аналогічно визначаються суттєві і несуттєві стратегії другого гравця.

Мають місце такі властивості оптимальних стратегій матричної гри:

Чиста стратегія e_k гравця є суттєвою в тому і тільки в тому випадку, якщо на ній досягається ціна гри при довільній оптимальній стратегії противника. Іншими словами, необхідною і достатньою умовою того, щоб чиста стратегія e_k першого гравця була суттєвою, є виконання рівності $e_k Aw = v$ для всіх оптимальних стратегій другого гравця, де v ціна ігри.

Якщо стратегія e_k не є істотною, то завжди знайдеться оптимальна стратегія w' другого гравця, яка гарантує строгу нерівність $e_k Aw < v$

Це вказує на потребу проведення аналізу структурних властивостей системи обмежень (4)-(6) задачі. Наприклад, для розв'язування задачі симплексним методом [5-6] необхідно звести задачі до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач необхідно ввести n невід'ємних змінних.

Для розв'язання задачі (без додаткових перетворень) можна також застосувати метод базисних матриць як до задачі з однотипними обмеженнями [7]. Для цього випадку будемо розглядати як базову задачу лінійного програмування з однотипними обмеженнями (4)-(6) на "≤" та на "max" з використанням методу базисних матриць. Зв'язок умов оптимальності, формул зв'язків елементів методу (методів) поміж задачами з різною формою запису, типом обмежень, напрямком оптимізації умовами пасивності (неактивності) рядків одної з задач та стовпців двоїстої можна встановити на основі теорем двоїстості, що наведені вище.

Означення 5. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (5), будемо називати базисною, а розв'язок відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$ базисним. Дві базисні матриці з відміними одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай β_{ij}, $1, j = 1,2,...,m,$ елементи базисної підматриці $A_б$, $e_{ri,}$ - елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$.- стовпець оберненої матриці. Розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ системи рівнянь $A_б u = c^0$, де c^0 - підвектор C - компоненти якого складаються з правих частин обмежень (5), нормалі, яких утворюють базисну матрицю $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі обмеження $a_r u_1 \le c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками базисної матриці $A_б$, . $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5) в вершині u_0; $J_б$, J_H, $J = J_б \cup J_H$ - множини індексів базисних і небазисних обмежень (5).

Теорема 2 (Критерій пасивності). Для того, щоб обмеження $a_r u \le c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування базисної матриці, $A_б$ відносно якої розвинення $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх k.

Теорема 3 (Критерій не активності обмеження). Для того щоб $a_r u \le c_r$ обмеження було не активним для (5) необхідно і достатньо, щоб існувала оптимально базисна матриця $A^0_{б(k)}, k = \overline{1,m},$ відносно якої, $\alpha_{ri} \ge 0$ для всіх i.

Про структурні властивості задачі (4)-(6).

Двоїста задача вигляду (4)-(6) (задача на мінімум) має свої особливості структури, що визначають можливості застосування алгоритмів та їх ефективність.

Твердження 1. Множина точок з координатами $u_{j(H)} = (0,0,....,\underbrace{\lambda_{j(B)}}_{j},0,...,0),\ j \in I$, $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m}$

де $\lambda_{j(B)} = \max\limits_{\substack{a_{ij}>0, \\ i \in I}} \frac{1}{a_{ij}},\ j \in I$ є допустимими для (5).

Доведення. Розглянемо додатні координатні осі множини обмежень в E^m, тобто промені, які можна представити у вигляді $OU_j = \left\{ \begin{array}{l} u = (u_1, u_2, ..., u_m) / u_i = 0, i \neq j, \\ u_j = \lambda_j, 0 < \lambda_j < +\infty, i = j \end{array} \right\}$.

Найдемо перетин кожної з гіперплощин обмежень (невід'ємних півпросторів) з OU_j, $j \in I$ (опуклих множин). Підставимо кординати точок променя OU_j, $j \in I$ в рівняння гіперплощини відповідній

$a_i u \geq c_i$, $i \in I$, $a_i u = c_i$, $i \in I$,

$a_i u = 1$, $i \in I$, $\lambda_{j(i)} = 1 / a_{ij}$, $i \in I$,

Відрізок $\left[\lambda_{j(i)}, \infty \right]$ допустимий для $a_i u \geq c_i$, $i \in I$. Знайдемо перетин відрізків, тобто відрізок $\left[\lambda_{j(B)}, \infty \right]$, $\lambda_{j(B)} = \max\limits_{i \in I} \lambda_{j(i)}$. Точки з координатами $u_{j(B)} = (0,0,..., \lambda_{j(B)}, 0, ..., 0)$, $j \in I$ будуть допустимими для всіх обмежень.

Наслідок 4. Точки простору E^m : $u_{j(B)} = (0,0,..., \lambda_{j(B)}, 0, ..., 0)$, $j \in I$ є допустимими для (4)-(6), а точка $u_{d(B)} = (0,0,..., \lambda_{d(B)}, 0, ..., 0)$, $\lambda_{d(B)} = \min\limits_{j \in J} \lambda_{j(B)}$ нижньою допустимою оцінкою за цільової функції (4) задачі (4)-(5), тобто оптимальні значення $Bu \leq Bu_{d(B)}$.

Доведення цього факту є очевидне, якщо врахувати властивість цільової функції (4) (координати вектора одиничні) та додатність компонент ($Bu_{d(B)} = \lambda_{d(B)}$).

Наслідок 5. Множина точок простору E^m, що подається в наступному вигляді $U_d = \left\{ u \in E^m / u = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_J u_{j(B)}, \ \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \right\}$ є допустимою для (4).

Наслідок 6. Нижня допустима границя значень цільової функції (1.4) визначається із співвідношення

$u_{d(B)} = \arg\min \left(Bu_{j(B)}, \ j \in I \right)$,

$F_{u(H)} = Bu_{d(H)} = \min \left(Bu_{j(H)}, \ j \in I \right)$

Наслідок 7. Множини (області) оптимальних значень задачі (4)-(5) та задачі (4)-(5) з додатковим обмеженням на цільову функцію у вигляді $Bu \leq Bu_{d(B)} \left(-Bu \geq -Bu_{d(B)} \right)$ співпадають. Обмеження (стовпці) пасивні (несуттєві) для даної множини будуть неактивними для (4)-(5).

За властивістю пасивності обмежень (4)-(6) можна зробити висновок про властивості стовпців прямої задачі (відповідні стовпці будуть пасивними), а відповідна змінна буде набувати лише нульових значень. Це буде вказувати також і на статус відповідної чистої стратегії матричної гри.

Висновок.

Врахування структурних властивостей обмежень задачі (4)-(6) таких як двосторонні оцінки розв'язків за цільовою функцією дозволяє: побудувати двосторонні оцінки значень змінних (та цільової функції (4)) , локалізувати область належності оптимальних значень, додатково ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження (стовпці), застосовувати другу теорему двоїстості (про умови доповнюючої нежорсткості) для виявлення суттєвих та несуттєвих стратегій.

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B* Linear programming and application. M.: Progress, 1966. (in Russian).
3. *Dantzig G.B., Thapa M.N*. Linear Programming 1: introduction, Springer, 1997, − 435p.
4. *Dantzig G.B. Dikin's* Interior Method for solving LP manuscript, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, − 1988.
5. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, 1963. – 776p. (in Russian).
6. *Leon S. Lasdon* . Optimization theory for large System. − M.: Nauka, 1975. – 430p. (in Russian).
7. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 29.03.13

УДК 517.929.4

Шатирко А.В. [1], к ф.-м.н., доц.,
Хусаінов Д.Я. [1], д. ф.-м.н., проф.

Стабілізація скалярних процесів прямого регулювання нейтрального типу

З використанням прямого методу Ляпунова розглянуто задачу стабілізації до стану абсолютної стійкості нелінійних скалярних процесів прямого регулювання нейтрального типу. Результати сформульовано у вигляді матричних алгебраїчних нерівностей..

Ключові слова: функціонал Ляпунова, абсолютна стійкість, відхилення аргументу нейтрального типу, стабілізація

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, Київ, пр-т Глушкова 4д
E-mail: a_shatyrko@mail.ru, dkh@unicyb.kiev.ua

A.V.Shatyrko[1], PhD in Math., Docent,
D.Ya. Khusainov[1], Dr.Sc., Prof..

Stabilization of scalar processes of direct regulator of neutral type

By employing the direct Lyapunov method stabilization problem of nonlinear scalar Lurie-type direct control systems of neutral type is considered. Conditions are constructed in terms of matrix algebraic inequalities

Key Words: Lyapunov's functional, absolute stability, neutral type time-delay, stabilization.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
E-mail: a_shatyrko@mail.ru, dkh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Як відомо, постановка задач абсолютної стійкості, тобто асимптотичної стійкості в цілому нелінійних систем регулювання виникла в технічних системах і описана, наприклад, в роботах [1-6]. При дослідженні цієї проблеми використовуються два підходи: «частотний метод», який розвинуто в роботах [3-5], та прямий метод Ляпунова з використанням функцій Ляпунова типу Лур'є-Постнікова [1,2,7]. При подальшому розвитку задач абсолютної стійкості розглядалися динамічні системи, що описані різницевими та диференціально-різницевими рівняннями з відхиленням аргументу [7]. Дослідження абсолютної стійкості з використанням прямого методу Ляпунова в системах з післядією проводилося в роботах [8-11].

В даній роботі розглянуто процеси регулювання, які можуть бути описані скалярним рівнянням нейтрального типу. Вважається, що розв'язок не є абсолютно стійким, або ж не вдалося підібрати належні параметри функціоналу Ляпунова-Красовського для встановлення цього факту. Наведено розв'язок задачі стабілізації до стану абсолютної стійкості в обраному класі функціоналів Ляпунова-Красовського за допомогою введення оберненого зв'язку за фазовими координатами, що взяті в даний та попередній моменти часу.

1. Умови абсолютної стійкості

Розглянемо процес регулювання, який описано скалярним диференціально-різницевим рівнянням наступного вигляду

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)-dx(t-\tau)\right]=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+bf\left(\sigma(t)\right),$$
$$\sigma(t)=cx(t). \qquad (1)$$

Тут a_1, a_2, b, d – сталі, $|d|<1$, початкові умови задаються функціями $x(t)\equiv\varphi(t)$, $x'(t)\equiv\varphi'(t)$, $-\tau\le t\le 0$. Нелінійна функція регулювання $f(\sigma)$ задовольняє умову Ліпшиця, та так звану, «секторну умову»

$$0\le f(\sigma)\sigma\le k\sigma^2,\ k>0. \qquad (2)$$

Дослідження абсолютної стійкості проводиться з використанням функціоналу Ляпунова-Красовського вигляду [9,11]

$$V\left[x(t),t\right]=hx^2(t)+$$
$$+\int_{t-\tau}^{t}e^{-\varsigma(t-s)}\left\{g_1x^2(s)+g_2\dot{x}^2(s)\right\}ds+ \qquad (3)$$
$$+\beta\int_0^{\sigma(t)}f(\sigma)d\sigma,$$

© А.В. Шатирко, Д.Я. Хусаінов, 2013

$$h>0,\ g_1>0,\ g_2>0,\ \beta>0,\ \varsigma>0,$$

Також використовуються поняття та означення дані свого часу в роботі [9].
Введемо до розгляду наступну матрицю

$$S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & 0 & s_{24}^1 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^1 & s_{24}^1 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix},$$

$$s_{11}^1=-2a_1h-g_1-a_1^2g_2,\quad s_{12}^1=-ha_2-a_1a_2g_2,$$

$$s_{13}^1=-hd-(a_1+a_2)d,$$

$$s_{14}^1=-hb-a_1g_2b-\frac{1}{2}(\beta a_1+\nu)c,$$

$$s_{22}^1=e^{-\varsigma\tau}g_1-a_2^2g_2,\ \ s_{24}^1=-a_2\left(g_2b+\frac{1}{2}\beta c\right),$$

$$s_{33}^1=e^{-\varsigma\tau}g_2-d^2g_2,\quad s_{34}^1=-d\left(g_2b+\frac{1}{2}\beta c\right),$$

$$s_{44}^1=-b^2g_2-\beta cb+\frac{1}{k}\nu, \qquad (4)$$

Умови абсолютної стійкості систем регулювання нейтрального типу отримані в роботах [9,10]. Стосовно скалярного рівняння (1) вони можуть бути переформульовані наступним чином.

Теорема 1. Нехай параметри рівняння (1), сталі $h>0$ $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\varsigma>0$ функціонала Ляпунова-Красовського (3) і величина $\nu>0$ такі, що матриця $S_1[h,g_1,g_2\beta,\varsigma,\nu]$ додатно визначена. Тоді система регулювання (1) абсолютно стійка в метриці C^1 для довільного відхилення аргументу $\tau>0$.

Перевірка умов стійкості (варіант 1). Згідно критерію Сільвестра [12,13], необхідною й достатньою умовою додатної визначеності симетричної матриці $S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]$ є додатність її головних мінорів, тобто

$$\Delta_1^1=s_{11}^1>0, \qquad (5)$$

$$\Delta_2^1=s_{11}^1s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2>0, \qquad (6)$$

$$\Delta_3^1=\begin{vmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & 0 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 \end{vmatrix}= \qquad (7)$$

$$=s_{11}^1s_{22}^1s_{33}^1-\left(s_{13}^1\right)^2s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2s_{33}^1>0$$

$$\Delta_4^1=\begin{vmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & 0 & s_{24}^1 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^1 & s_{24}^1 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{vmatrix}=$$

$$=s_{11}^1\left[s_{22}^1s_{33}^1s_{44}^1-\left(s_{24}^1\right)^2s_{33}^1-\left(s_{34}^1\right)^2\right]-$$

$$-s_{12}^1\left[s_{12}^1s_{33}^1s_{44}^1+s_{13}^1s_{34}^1s_{24}^1-\left(s_{34}^1\right)^2s_{12}^1\right]+$$

$$+s_{13}^1\left[s_{22}^1s_{34}^1s_{14}^1+\left(s_{24}^1\right)^2-s_{13}^1s_{22}^1s_{44}^1-s_{12}^1s_{24}^1s_{34}^1\right]-$$

$$-s_{14}^1\left[s_{22}^1s_{33}^1s_{14}^1-s_{13}^1s_{22}^1s_{34}^1-s_{12}^1s_{33}^1s_{24}^1\right]>0 \qquad (8)$$

Після дослідження нерівностей (5) - (8) в області $h>0$, $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\varsigma>0$, $\nu>0$ простору зміни параметрів функціоналу Ляпунова-Красовського(3), робиться висновок про абсолютну стійкість розв'язку рівняння (1).

Перевірка умов стійкості (варіант 2). Можливий інший підхід, що базується на дослідженні матриць меншої розмірності. Наведемо деякі допоміжні відомості.

Твердження 1. [12]. Нехай ермітова матриця S представлена в вигляді

$$S=\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix},$$

причому матриці A і C квадратні. Для додатної визначеності матриці S необхідно і достатньо, щоб були додатно визначеними матриці A і $C-B^*A^{-1}B$.

Твердження 2. [13]. Якщо матриця A невироджена, тоді оберненою до матриці

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

буде

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}BR^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BR^{-1} \\ -R^{-1}CA^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix},$$

$$R=D-CA^{-1}B.$$

За допомогою наведених тверджень сформулюємо наступні умови абсолютної стійкості.

Теорема 2. Для того, щоб система регулювання (1) була абсолютно стійкою, достатньо, щоб сталі $h>0$ $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\varsigma>0$ функціоналу Ляпунова-Красовського (3) й величина $\nu>0$ були такими, щоб виконувалися умови (5), (6) і матриця

$$\tilde{S}_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}- \\ -\frac{1}{s_{11}^1 s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2}\times \\ \times\begin{bmatrix} \left(s_{13}^1\right)^2-s_{22}^1 & \left(s_{14}^1 s_{12}^1-s_{24}^1 s_{12}^1\right)s_{13}^1 \\ \left(s_{14}^1 s_{12}^1-s_{24}^1 s_{12}^1\right)s_{13}^1 & \left(s_{14}^1 s_{22}^1-s_{24}^1 s_{12}^1\right)s_{14}^1+\left(-s_{14}^1 s_{12}^1+s_{24}^1 s_{11}^1\right)s_{24}^1 \end{bmatrix}$$

була додатно визначеною.

Доведення. Представимо матрицю $S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]$ в вигляді

$$S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 \\ \left(S_{12}^1\right)^T & S_{22}^1 \end{bmatrix},$$

$$S_{11}^1=\begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 \end{bmatrix}, S_{12}^1=\begin{bmatrix} s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ 0 & s_{24}^1 \end{bmatrix},$$

$$S_{22}^1=\begin{bmatrix} s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}.$$

Тоді, згідно твердження 1, для додатної визначеності матриці $S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]$ необхідно і достатньо, щоб були додатно визначені матриці S_{11}^1 і $S_{22}^1-\left(S_{12}^1\right)^T\left(S_{11}^1\right)^{-1}S_{12}^1$, тобто виконувалися нерівності (5), (6), і була додатно визначена матриця

$$\tilde{S}_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}- \\ -\frac{1}{s_{11}^1 s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2}\begin{bmatrix} s_{13}^1 & 0 \\ s_{14}^1 & s_{24}^1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} s_{22}^1 & -s_{12}^1 \\ -s_{12}^1 & s_{11}^1 \end{bmatrix}\times \\ \times\begin{bmatrix} s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ 0 & s_{24}^1 \end{bmatrix}.$$

Розкриваючи добуток матриць, отримаємо твердження теореми.

2. Стабілізація

Припустимо, що розв'язок рівняння (1) не є абсолютно стійким або не знайдено відповідні параметри $h>0$, $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\nu>0$. Розглянемо тоді задачу стабілізації, тобто знаходження параметрів c_1, c_2 керування $u(t)$, при яких рівняння

$$\frac{d}{dt}[x(t)-dx(t-\tau)]=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+bf(\sigma(t))+u(t)$$
$$u(t)=c_1x(t)+c_2x(t-\tau) \qquad (9)$$

з оберненим зв'язком вже буде мати абсолютно стійкий розв'язок.. Перепишемо (9) в вигляді

$$\frac{d}{dt}[x(t)-dx(t-\tau)]=(a_1+c_1)x(t)+ \\ +(a_2+c_2)x(t-\tau)+bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t)=cx(t). \qquad (10)$$

В цьому випадку матриця, яка визначає повну похідну функціонала (3) вздовж розв'язків, буде мати вигляд

$$S_2[h,g_1,g_2,c_1,c_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 & 0 & s_{24}^2 \\ s_{13}^2 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^2 & s_{24}^2 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

$$s_{11}^2=s_{11}^1-2hc_1-\left(2ac_1+c_1^2\right)g_2,$$
$$s_{12}^2=s_{12}^1-\left(hc_2+a_1c_2+a_2c_1+c_1c_2\right)g_2,$$
$$s_{13}^2=s_{13}^1-(c_1+c_2)d,\ s_{14}^2=s_{14}^1-\left(bg_2+\frac{1}{2}\beta c\right)c_1,$$
$$s_{22}^2=s_{22}^1-\left(2a_2c_2+c_2^2\right)g_2,$$
$$s_{24}^2=s_{24}^1-a_2\left(g_2b+\frac{1}{2}\beta c\right). \qquad (12)$$

Знаходження умов стабілізації (варіант 1). Як витікає з критерія Сільвестра [12,13], необхідною і достатньою умовою додатної визначеності матриці $S_2[h,g_1,g_2,c_1,c_2,\beta,\varsigma,\nu]$ є додатність її головних мінорів, тобто

$$\Delta_1^2=s_{11}^1-2hc_1-\left(2ac_1+c_1^2\right)g_2>0, \qquad (13)$$
$$\Delta_2^2=\begin{vmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 \end{vmatrix}=\left[s_{11}^1-2hc_1-\left(2ac_1+c_1^2\right)g_2\right]\times \\ \times\left[s_{22}^1-\left(2a_2c_2+c_2^2\right)\right]- \\ -\left[s_{12}^1-\left(hc_2+a_1c_2+a_2c_1+c_1c_2\right)\right]>0, \qquad (14)$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 & s_{13}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 & 0 \\ s_{13}^2 & 0 & s_{33}^2 \end{vmatrix} = \left[s_{11}^1 - 2hc_1 - \left(2ac_1 + c_1^2\right)g_2\right] \times \left[s_{22}^1 - \left(2a_2c_2 + c_2^2\right)\right]s_{33}^1 -$$

$$- \left[s_{13}^1 - \left(c_1 + c_2\right)d\right]^2\left[s_{22}^1 - \left(2a_2c_2 + c_2^2\right)g_2\right] -$$

$$- \left[s_{12}^1 - \left(hc_2 + a_1c_2 + a_2c_1 + c_1c_2\right)\right]^2 s_{33}^1, \quad (15)$$

$$\Delta_4^2 = \begin{vmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 & 0 & s_{24}^2 \\ s_{13}^2 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^2 & s_{24}^2 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{vmatrix} =$$

$$= s_{11}^2\left[s_{22}^2 s_{33}^2 s_{44}^2 - \left(s_{24}^2\right)^2 s_{33}^2 - \left(s_{34}^2\right)^2\right] -$$

$$- s_{12}^2\left[s_{12}^2 s_{33}^2 s_{44}^2 + s_{13}^2 s_{34}^2 s_{24}^2 - \left(s_{34}^2\right)^2 s_{12}^2\right] +$$

$$+ s_{13}^2\left[s_{22}^2 s_{34}^2 s_{14}^2 + \left(s_{24}^2\right)^2 - s_{13}^2 s_{22}^2 s_{44}^2 - s_{12}^2 s_{24}^2 s_{34}^2\right] -$$

$$- s_{14}^2\left[s_{22}^2 s_{33}^2 s_{14}^2 - s_{13}^2 s_{22}^2 s_{34}^2 - s_{12}^2 s_{33}^2 s_{24}^2\right] > 0. \quad (16)$$

В нерівності (16) залежності s_{ij}^2 визначаються в (12).

І задача стабілізації полягає в знаходженні параметрів c_1, c_2, при яких рівняння (10) буде мати абсолютно стійкий розв'язок. Ця область визначається нерівностями (13) - (16) в просторі зміни параметрів $(c_1.c_2)$ керування $u(t)$.

Знаходження умов стабілізації (варіант 2). Якщо скористатися результатами теореми 2, тоді умови стабілізації можна сформулювати наступним чином.

Теорема 3. Для того, щоб процес прямого регулювання (1) був стабілізованим до стану абсолютної стійкості, достатньо, щоб знайшлися сталі c_1 c_2, $g_2 > 0$, при яких виконуються нерівності (13), (14) і матриця

$$\tilde{S}_2[h, g_1, g_2, \beta, \varsigma, \nu] = \begin{bmatrix} s_{33}^2 & s_{34}^2 \\ s_{34}^2 & s_{44}^2 \end{bmatrix} - \quad (17)$$

$$- \frac{1}{s_{11}^2 s_{22}^2 - \left(s_{12}^2\right)^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \left(s_{13}^2\right)^2 - s_{22}^2 & \left(s_{14}^2 s_{12}^2 - s_{24}^2 s_{12}^2\right)s_{13}^2 \\ \left(s_{14}^2 s_{12}^2 - s_{24}^2 s_{12}^2\right)s_{13}^2 & \left(s_{14}^2 s_{22}^2 - s_{24}^2 s_{12}^2\right)s_{14}^2 + \left(-s_{14}^2 s_{12}^2 + s_{24}^2 s_{11}^2\right)s_{24}^2 \end{bmatrix}$$

є додатно визначеною.

Список використаних джерел

1. *Lur'e A.* Some Problems in the Theory of Automatic Control. H.M. Stationary Office, London, 1957.
2. *Aizerman M., Gantmacher F.* Absolute Stability of Regulator Systems. Holden-Day, San Francisco, 1964.
3. *Pyatnitsky E.S.* New Investigations Absolute Stability of Automatic Control Systems // J. Automat. and Telemech. Iss. 6, 1968. – P.5-36. (in Russian).
4. *Barkin A.I.* Qualitative Estimates of Nonlinear Control Systems. Nauka, Moscow. 1982. (in Russian).
5. *Yakubovich A., Leonov G., Gelig A.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. World Scientific. Singapore, 2004.
6. *Kuntsevich V.M.* Control under Uncertainties. Guaranteed Results in Control and Identification Tasks. Naukova Dumka, Kiev, 2006. (in Russian).
7. *Korenevskiy D.G.* Dynamical Systems Stability under Random Perturbation of Parameters. Algebraic Criteria. Naukova Dumka, Kiev, 1989. (in Russian).
8. *Khusainov D.Ya., Shatyrko A.V.* Lyapunov Functions Method in Investigation of Function-Differential Systems. KNU Publ., Kiev, 1997. (in Russian).
9. *Shatyrko A.V Khusainov D.Ya* Absolute Interval Stability of Neutral Type Differential Systems. Proc of In-t Math. NASCU // Dynamical and Stability Problems of Multidimensional Sytems, Kyiv, 2009.- Vol.6, Iss.3. P.232-247. (in Ukraine).
10. *Shatyrko A.V., Khusainov D.Ya* Stability of Nonlinear Control Systems with Aftereffect. Inform.-Analit. Agency Publ., Kyiv, 2012. (in Ukraine).
11. *Shatyrko A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M.* Stabilization of Lur'e-type nonlinear control systems by Lyapunov-Krasovski functionals // Advances in Difference Equations. – doi:10.1186/1687-2012-229.
12. *Hornn R..,Johnson C.* Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. 1985.
13. *Gantmacher F.* Theory of Matrices. Nauka, Moscow. 1968. (in Russian).

Надійшла до редколегії 28.02.2013

РАДІОФІЗИКА

УДК 537.311.33

Pavlyuk[1] S.P., Ph.D.,
Gandziuk[1] V. I., stud.

Features of the current-voltage characteristics of the resistors made by "silicon with dielectric isolation" technology at high densities of leaking current

Investigations of current-voltage characteristics of diffusion resistors, made by "Silicon with dielectric isolation" technology with leaking current density till $10^5 A/sm^2$ and different geometrical characteristics were conducted. Three regions were found on IV-curves. First region – is the region of linear dependence of current from voltage. In the second region voltage drop across the structure changes abruptly. Third region is the region where voltage drop doesn't depend from flowing current. Such features of IV-curves of diffusion resistors were explained by non linear change of its resistance as a result of significant self-heating.

Key Words: diffusion resistor, resistance, non linearity, self-heating.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: pps@univ.kiev.ua

Павлюк[1] С.П., к.ф.-м.н.,
Гандзюк[1] В.І., студ.

Особливості ВАХ дифузійних резисторів, виготовлених за технологією «кремній з діелектричною ізоляцією» при великих густинах протікаю чого струму

Проведено дослідження вольт-амперних характеристик дифузійних резисторів, виготовлених за технологією « кремній з діелектричною ізоляцією» при густинах протікаючого струму до 10^5 А/см^2 при різних геометричних розмірах. На ВАХ виявлено три області. Перша область – область лінійної залежності струму від напруги. Друга область– область, де падіння напруги на структурі змінюється стрибкоподібно. Третя область – область, де падіння напруги не залежить від протікаю чого струму. Такі особливості ВАХ дифузійних резисторів пояснено нелінійною зміною його опору в результаті значного саморозігріву.

Ключові слова: дифузійний резистор, опір, нелінійність, саморозігрів.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: pps@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. д.ф.-м.н., проф. Скришевський В.А.

Introduction

Diffusion resistors (DR) are the most common type of resistors of semiconductor integrated circuits (IC), because they are made in a single technological process in conjunction with the base or emitter area [1]. Resistance of DR is a volume resistance of the section of the diffusion layer. It is determined by the geometrical dimensions of resistive layer, which in turn is characterized by specific surface resistance ρ_S. The value of ρ_S is a constructive parameter of resistor that depends on technological factors (diffusion regime). When creating integrated circuits parameters of diffusion layers are optimized in order to obtain the best characteristics of transistors of n - p - n type, that's why parameters of DR are improving not by varying of technological regimes but by the choice of configuration and geometric sizes of resistor.

Reproducibility of nominal values of resistance, of course, is 15-20% and depends on the width of the resistor.

Due to the microminiaturization of all components of IC their size significantly reduces. The value of leaking currents is conserved, which leads to an increase of their density. That is why researches of IV-curves of diffusion resistors at high densities of leaking currents are relevant and may be of interest for developers of IC elements.

The aim of this work was to investigate the current-voltage characteristics of diffusion resistors of various sizes at high leaking currents.

© S.P. Pavlyuk, V.I. Gandziuk, 2013

Investigated samples

Investigated samples are the diffusion resistors, produced by the standard SDI technology. This technology allows creating a bridge of monocrystalline silicon covered with dielectric isolation and placed in a matrix of polycrystalline silicon. In the polycrystalline silicon there is a “pocket" with SiO_2, where DR is placed. It is an n^+- n – n^+ structure with metal contacts to n^+ regions through which the current offtake is carried. The region of energy release is a part of the semiconductor with area $S = 10^{-6} \div 10^{-8}$ sm^2 located between areas of metallization and covered with a layer of silicon dioxide. The main parameter that characterizes this area is ohmic resistance. Resistance value for different SDI structures varied from a few to tens of ohms and is determined by the geometry of the structure: length l, width w, thickness h_1.

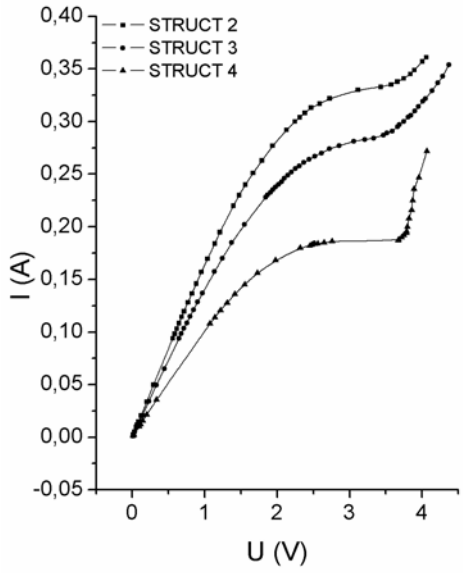


Fig. 1. CV-curves of structures under numbers 2, 3 and 4 with different lengths $l = 2,\ 5.6$ and $8\ \mu$m respectively and thickness $h_1 = 9.8\ \mu$m

DR are separated from the substrate with a layer of SiO_2, thickness of 2.5 μm. N-area in the "pocket" is made of monocrystalline silicon n-type of conductivity of brand 1А4вмКЄФ1.0 with specific resistance $\rho = 1.0\ \text{Ohm} \times sm$. But as a result of technological processes its resistivity decreased and became equal to $\rho = 0,007\ \text{Ohm} \times sm$ that corresponds concentration $n = 7 \times 10^{18} sm^{-3}$. n^+- areas that perform the role of contacts in the structures are obtained by thermal diffusion of phosphorus in the "pockets" at a depth of 5 μm from the surface of silicon. The resistivity of these areas is $R_S = 1.4\ \text{Ohm}/\text{sm}^2$ that corresponds to the concentration of impurities $n^+ = 10^{21}$ sm^{-3}. These results to sub alloying under the edge of oxide to a depth 2.8 μm.

Characteristics of the investigated samples are given in the table.

Experimental results

Fig. 1 shows the current-voltage characteristics, and Figure 2 - dependence of the diffusion resistance of resistors with different lengths l and thickness of $9.8\ \mu$m from the current For these samples 2, 3, 4 the ratio h_l/ h =1.97 is carried out in accordance. Fig. 3 shows the current-voltage characteristics, and Fig. 4 - resistance dependence of diffusion resistors with different thickness $h_1 = 8.4,\ 9.8,\ 11.9\ \mu$m and length $l = 8\ \mu$m from the current. For these samples 2, 3, 4 the ratio $h_1/h = 1.68,\ 1.97\ 2.38$ carried out in accordance.

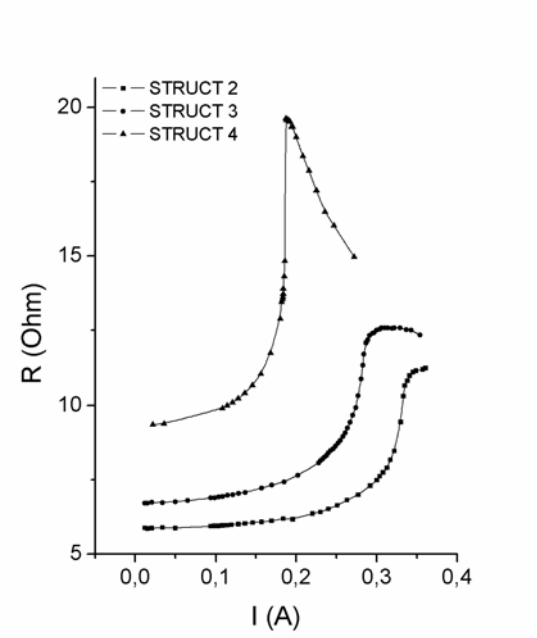


Fig. 2. Dependencies of resistance of structures under numbers 2, 3, 4 with different lengths $l = 2,\ 5.6$ and $8\ \mu$m respectively and thickness $h_1 = 9.8\ \mu$m

According to the above graph we see that IV-curves have three areas. The first area is characterized by a linear dependence of the voltage drop on the structure

of leaking current. On this area Ohm's law is performed and the resistance value of diffusion resistor is determined Change of length l of resistor leads to change of resistance value and the value of the magnitude of linear region. The smaller is the length l, the smaller is the value of resistance and the more is linear area of IV-curve.

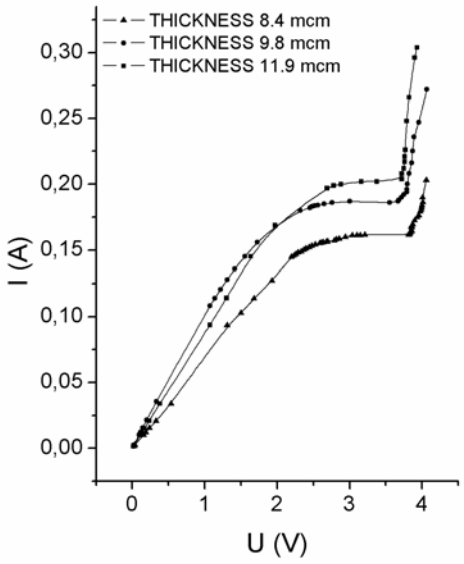


Fig.3. IV-curves for samples with different thickness h_1 and length $l = 8\ \mu$m

Dependencies of parameters on the thickness h_1 DR are shown in Fig. 3, 4. The graph shows that the more is the value of h_1 parameter, the less is the resistance value of DR (Fig. 4) and the greater is the area of the linearity of the first section of IV-curve (Fig. 3).

The second section of IV-curve is characterized by occurrence of nonlinearity and jump of voltage drop and a sharp increase of resistance of DR. The greater is the length and the less is the thickness of DR, the sharper is power surge is and the greater is resistance value.

The third area of IV-curve is characterized by a decrease of dependence of voltage drop on the current. In sample 4, which has the greatest length, voltage drop does not depend on the current in the range of 0.15 - 0.3A. At the same time resistance of DR in this region of IV-curve decreases almost linearly (Fig. 5). The smaller is peak value of the resistance, the thicker is the DR, and it is formed at lower currents.

Discussion

Analysis of the results showed that the experimental value of resistance of DR accurate to 10% coincides with the calculated values. According to the theoretical formula increasing the length and reducing the thickness leads to an increase of resistance value of DR. The shorter and thicker is DR, the greater the zone of linearity of IV-curve of the resistor and so it is steeper. Having measured the resistance values of DR, we can determine the specific resistance and the concentration of charge carriers in it, which makes data samples $n = 5\times10^{17}$ sm^{-3}.

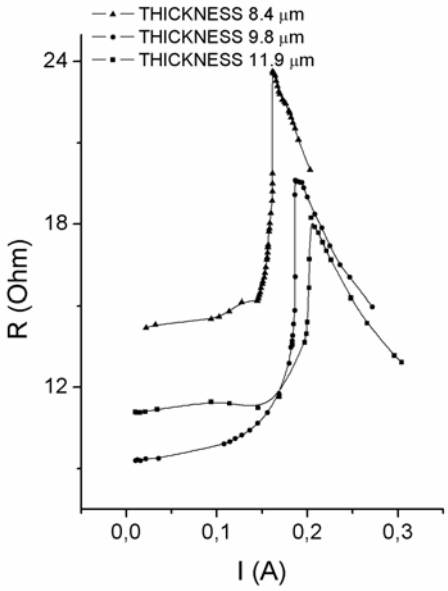


Fig. 4. Dependencies of resistance of the structure number 4 with $l = 8\ \mu$m and different thickness h_1

The second section of IV-curve of the resistor is connected with the occurrence of high field area in DR [3]. This area is thermal gradient-drift domain (TGD-domain) [4]. This domain is formed by inhomogeneous Joule self heating of a sample by leaking current and the presence of bipolar conductivity. Evaluation of temperature according to

Table 1
Characteristics of investigated samples

№ sample	I_{max} A	U_{max} V	R Ohm	l μm
2	0.3	2.37	5.6	2.4
3	0.25	2.15	6.6	5.6
4	0.15	1.56	9.1	8.0
w, μm		9		

the method [5] shows that even at current 0.1A thermal heating reaches a value of 700^0C. The concentration of thermal carriers in this case equal to $n = 5 \times 10^{17}$ sm^{-3} [2]. Further increase in current leads to an increase of temperature of DR and performing an inequality $n < n_T$ and transition to the third area on the IV-curve. On this area voltage drop on the DR, in a certain approximation, doesn't depend on leaking current. This is due to the fact that self heating to a higher temperature leads to filling of high field area with thermal generated carriers and destruction of TGD domain. In Fig. 4 we can see that the resistance of DR in this case begins to decrease almost linearly, and this ensures the independence of voltage drop from leaking current.

Further increase of the current leads to heating of DR to a temperature $T \approx 1500^{\circ}C$, occurrence of current between the contacts of Cord, sample of the surface of DR and its melting [6,7].

Conclusions

- As a result of the work electrical parameters of "Silicon structures with dielectric isolation" were studied and defined such important parameters as the dimensions of the linear part of IV-curve. The shorter and thinner DR, the more area of linearity of IV-curve.
- It was established that with increasing of the depth of "pockets", its impact on IV-curve decreases and becomes weaker and then disappears.
- It is qualitatively explained the causes of power surges on IV-curve.

References

1. Design and technology of chips./ Ed. L.A. Koledova. – M.: Higher School, 1984 (in Ukrainian)
2. *Zi S.* Physics of semiconducting devices. In 2 Vols: Transl. from English. - Moscow: Mir, – 1984. – **1.** – 456 p. (in Russian)
3. *Pavliuk S.P., Gandziuk V.I.* Mechanism of formation of high field domain in SDI structures // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky\"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – N 4. – P. 263-266.
4. *Dobrovolskyy V.N., Pavlyuk S.P.* Thermal gradient-drift domain in the electron-hole plasma of semiconductors // FTP. – 1981. – **15**. – N 1. – P. 120-129. (in Russian)
5. *Dobrovolsky V.N., Ishchuk L.V., Ninidze G.R.* et.all. // J.Appl.Hhys. – 2000. – **88**. – N 11. – P. 6554 - 6559.
6. *Konovalenko L.D., Makordey F.V., Mazurenko V.S., Andreev V.I.* Semiconducting allocating elements. // Photo Electronics. – 2003. – N 12. – P. 21-27. (in Russian)
7. *Vakarov B.S., Vakorova I.S., Korliakov A.B., Kravchenko S.N., Petukhov A.G.* Current instability caused by phase transition of the semiconductor - metal in quasi univariate structures. // FTP. – 1987. – **23** – N 7. – P. 1182-1186. (in Russian)

Надійшла до редколегії 11.03.2013

УДК 537.52:533.9.082.5:537.872

Веклич А.М., к.ф.-м.н., доц.,
Іванісік А.І., к.ф.-м.н., доц.,
Борецький В.Ф., к.ф.-м.н., асист.,
Лебідь А.В., аспірант,
Бондаренко Я.В., студ.,
Фесенко С.О., аспірант.

Дослідження плазми електродугового розряду між композитними Cu–C електродами. Частина II: Лазерна абсорбційна спектроскопія

Дана робота присвячена дослідженню плазми електродугового розряду в повітрі між композитними Cu–C електродами. Методом лазерної абсорбційної спектроскопії отримано радіальний розподіл концентрації атомів міді у плазмі дугового розряду силою струму 3.5 А у припущенні локальної термодинамічної рівноваги.

Ключові слова: плазма електродугового розряду, композитні Cu–C електроди, радіальний розподіл концентрації атомів міді, ерозійні властивості.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: puluu@yandex.ru

Veklich A.N., Ph. D., Associate Professor,
Ivanisik A.I., Ph. D., Associate Professor,
Boretskij V.F. , Ph.D., Assistant Professor,
Lebid A.V., post grad. stud.,
Bondarenko Ya.V., stud.,
Fesenko S.O., post grad. stud.

Investigation of electric arc plasma between composite Cu–C electrodes. Part II: Laser absorption spectroscopy

Present paper deals with investigations of plasma of electric arc discharge in air between composite Cu–C electrodes. The radial profiles of copper density in discharge column at arc current 3.5 A were obtained by Laser absorption spectroscopy in the assumption of local thermodynamic equilibrium.

Key Words: plasma of electric arc discharge, composite Cu–C electrodes, radial profiles of cooper density, erosion properties.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: puluu@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

На даний час в електрорухомому транспорті використовується мідний провід та різного типу контактні вставки, які закріплені на поверхні пантографа. Контактні вставки можуть бути графітові, коксові, мідно-графітові, та із різних мідних сплавів. Кожен із видів цих контактних вставок має свої переваги та недоліки [2]. Зокрема, графітові та коксові вставки хоч і мають гарні змащувальні властивості, проте їх великий питомий опір сприяє значному нагріванню, відпалюючи мідний контактний провід, що погіршує його трибологічні параметри [7]. Окрім того, такі вставки мають досить малу твердість, внаслідок чого їхній експлуатаційний ресурс скорочується. Металічні контактні вставки на основі мідних сплавів мають суттєво менший питомий опір, більш тривалий ресурс, проте, внаслідок їхньої спорідненості з мідним проводом вони його суттєво зношують, а його вартість значно більша порівняно з вартістю контактних вставок. Тому розробники таких контактних вставок оптимальним матеріалом для них пропонують мідно-графітовий композит [2]. Він має гарні змащувальні властивості за рахунок графіту та значно вищу електропровідність у порівнянні з графітовими вставками, завдяки додаванню міді. Щоб уникнути спорідненості цих вставок з провідником, вміст міді в них є незначним (наприклад, у досліджуваних в даній роботі мідно-графітових вставках вміст міді складав 20% [3]).

З іншого боку, між провідником та контактом пантографа часто виникає електрична дуга, яка спричиняє їх суттєву ерозію. Це явище значно посилюється при обледенінні контактних провідників. Отже, розуміння процесів масоперенесення у міжконтактному проміжку дозволить знайти шляхи зменшення електроерозії, що, безперечно, сприятиме покращенню економічних показників виробництва контактних матеріалів.

Метою даної роботи є оцінка електроерозійних властивостей мідно-графітових електродів. Зокрема,

© А.М. Веклич, А.І. Іванісік, В.Ф. Борецький, А.В. Лебідь, Я.В. Бондаренко, С.О. Фесенко, 2013

методами лазерної абсорбційної спектроскопії потрібно визначити концентрацію парів міді у проміжку електродугового розряду між такими електродами.

Методика вимірювань та результати

На рис. 1 зображений спектр випромінювання плазми електродугового розряду між плавкими композитними Cu–C електродами (із вмістом міді 20%). Спектр був отриманий нами на етапі попередніх досліджень [4]. Для вирішення поставленої задачі логічним їх продовженням є визначення просторового розподілу парів атомів міді в міжелектродному проміжку. Одним з найдостовірніших методів такого дослідження є лазерна абсорбційна спектроскопія. Вимірювання просторового розподілу оптичної товщини плазми з домішками міді виконані на експериментальній установці, зображеній на рис.2. В роботі використаний лазер на парах міді "Криостат 1", в спектрі генерації якого наявні дві лінії: 510,5 та 578,2 нм [5]. Для виділення однієї з них в оптичній схемі установки додатково використали дифракційну гратку. У дослідженнях використали спектральну лінію атома міді 510,5 нм, якій відповідає перехід $4p\ ^2P_{3/2}$ (3.817eB) → $4s^2\ ^2D_{5/2}$ (1,389eB). З наведеного на рис.1 спектру видно, що ця лінія є добре ізольованою в спектрі.

Електродуговий розряд ініціювався між торцевими поверхнями неохолоджуваних вертикально розташованих електродів циліндричної форми діаметром 6 мм. Міжелектродна відстань – 8 мм. Струм дуги становив 3,5 А. Оскільки ширина лазерного пучка (~20 мм) перевищувала розміри плазмового об'єкту, то це дозволило визначати поглинання одразу по всьому об'єму міжелектродного проміжку.

Досліджувану область зондували лазерним випромінювання двічі – в режимі без дуги та при її наявності. Випромінювання в паралельних променях лазера реєстрували за допомогою ПЗЗ матриці. Оскільки, лазерне випромінювання має незначну розбіжність, то це дало змогу віддалити ПЗЗ матрицю від електричної дуги на достатню відстань, щоб не враховувати вплив власного випромінювання плазми. Оптична товщина плазми визначається наступним чином:

$$\tau(\lambda_0, x) = \ln\left(I_1(\lambda_0, x)/I_2(\lambda_0, x)\right) \qquad (1)$$

де, I_1, I_2 – інтенсивність падаючого та поглиненого світла, відповідно, напрямок координати x – перпендикулярний до напрямку лазерного променя. Спектральна ширина лазерного випромінювання значно менша від ширини лінії, яка випромінюється атомами міді в плазмі, хоча вони і відповідають одному спектральному переходу. Це пояснюється тим, що температура робочого тіла лазера значно менша від температури електродугової плазми та звуженням ширини випромінювання лазера завдяки резонатору. Тому визначене в експерименті значення коефіцієнту поглинання відповідає поглинанню в центрі $\lambda = \lambda_0$ спектральної лінії. Оптична товщини та радіальний розподіл коефіцієнту поглинання (всі наші розрахунки проводяться у припущенні осьової симетрії плазмового об'єкту) $k(\lambda_0, r)$ пов'язані між собою за допомогою інтегрального рівняння Абеля [6].

Коефіцієнт поглинання $k(\lambda_0, r)$ залежить від кількості поглинаючих центрів (у даному випадку атомів міді, які перебувають на рівні $4s^2\ ^2D_{5/2}$). Отже, у такий спосіб можна визначити просторовий розподіл заселеності відповідного рівня у досліджуваній плазмі.

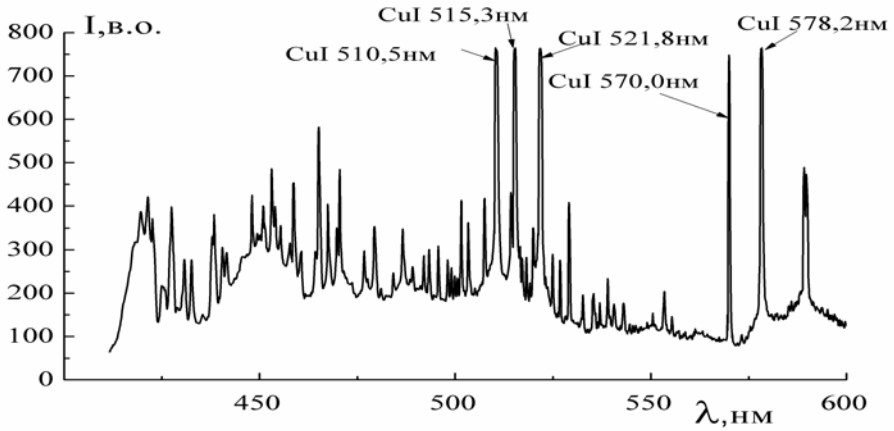


Рис.1 Спектр випромінювання плазми електричної дуги між композитними Cu-C електродами

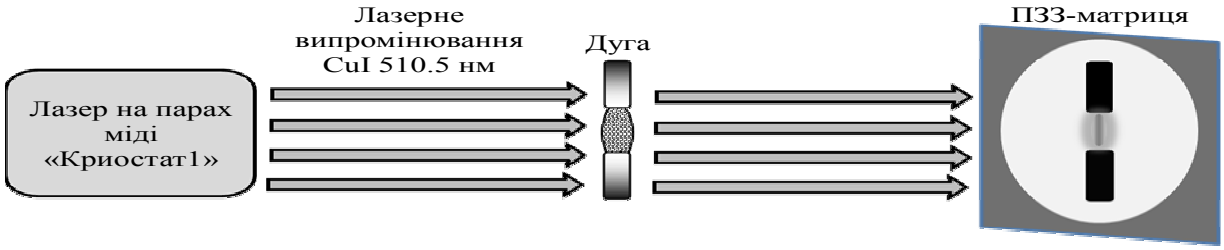


Рис.2 Схема експериментальної установки для дослідження поглинання плазми електродугового розряду

Зв'язок між локальними значеннями коефіцієнту поглинання та заселеністю рівнів має вигляд [1]:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} k(\lambda,r)d\lambda = \frac{\pi e^2}{m_0 c^2}\cdot f_{ki}\cdot N_k(r)\cdot\left(1-\frac{g_k N_i(r)}{g_i N_k(r)}\right), \quad (1)$$

де N_i – заселеність верхнього рівня ($4p\ ^2P_{3/2}$), N_k – заселеність нижнього рівня ($4s^2\ ^2D_{5/2}$), f_{ki} – сила осцилятора, g_k, g_i – статистичні ваги рівнів, λ – довжина хвилі, m_0, e – маса та заряд електрона, c – швидкість світла. Щоб пов'язати інтеграл у виразі (1) з виміряним у експерименті коефіцієнтом поглинання в центрі спектральної лінії, треба знати форму її контуру. Оскільки механізм розширення саме цієї лінії в розглянутому типі розряду є доплерівським, тому ми вважаємо контур лінії гаусовим:

$$k(\lambda,r) = k(\lambda_0,r)\cdot\exp\left(-\frac{\mu\cdot c^2}{2RT(r)}\cdot\left(\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}\right)^2\right), \quad (2)$$

де, μ – молярна маса атомів, R – універсальна газова стала, T(r) – радіальний розподіл температури. Тоді, інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} k(\lambda,r)d\lambda = k(\lambda_0,r)\cdot\frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2\pi RT(r)}{\mu}}. \quad (3)$$

У нашому випадку доданком $\frac{g_k N_i(r)}{g_i N_k(r)}$ у виразі (1) можна знехтувати. Тоді, заселеність нижнього рівня ($4s^2\ ^2D_{5/2}$) матиме вигляд:

$$N_k(r) = k(\lambda_0,r)\cdot\frac{\lambda_0 m_0 c}{e^2 f_{ki}}\sqrt{\frac{2RT(r)}{\pi\mu}} \quad . \quad (4)$$

Значення температури брали з результатів попередніх досліджень [4] у припущенні локальної термодинамічної рівноваги (ЛТР). Радіальний розподіл концентрації атомів міді отримали з розподілу Больцмана в стані ЛТР:

$$N_{Cu}(r) = N_k(r)\frac{U(T(r))}{g_k}\exp\left(\frac{E_k}{kT(r)}\right), \quad (5)$$

де E_k та g_k енергія та статистична вага рівня $4s^2\ ^2D_{5/2}$, U(T) – статистична сума атома міді:

$$U(T) = \sum_i g_i \exp\left(\frac{E_i}{kT}\right). \quad (6)$$

Отримані результати у випадку мідно–графітових електродів порівнювали з результатами, наведеними в [5] для дуги між мідними електродами за однакових умов експерименту.

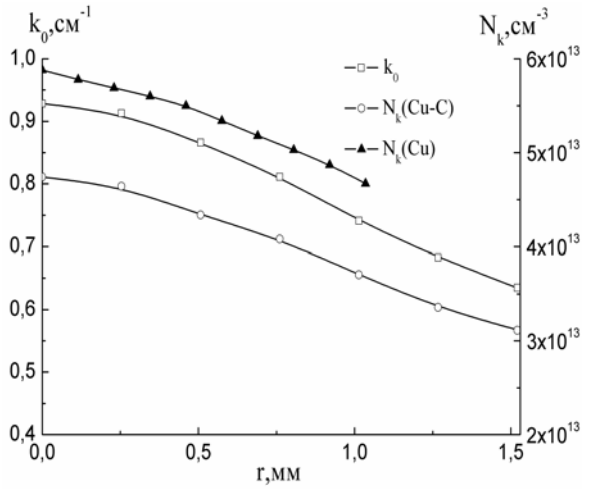


Рис.3 Радіальний розподіл коефіцієнта поглинання в центрі спектральної лінії $k_0 \equiv k(\lambda_0,r)$ та заселеності $4s^2\ ^2D_{5/2}$ рівня – N_k в середньому перерізі плазми електродугового розряду між композитними Cu-C та мідними [5] електродами.

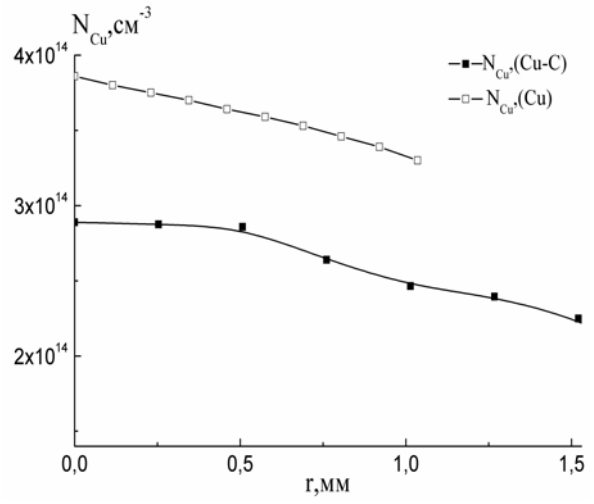


Рис.4 Радіальний розподіл концентрації атомів міді в середньому перерізі електродугового розряду між мідно–графітовими та мідними електродами.

Обговорення результатів

Як видно з рис.3 та рис.4, заселеності нижнього рівня для мідних та мідно–графітових електродів збігаються з похибкою у середньому ~20%, а концентрації атомів ~25% (при похибці вимірювань ~30%). Це досить цікавий результат, якщо взяти до уваги, що вміст міді в Cu-C електродах складає всього 20%. Цей результат добре корелює з отриманим у попередньому дослідженні [4] збігом температур для мідних та мідно–графітових електродів. Отже, основним внесок в електропровідність (а отже, і в теплопровідність) плазми між Cu-C композитними електродами забезпечує мідь. Окрім того, майже однакові її концентрації у плазмі дуги між мідними та мідно–графітовими електродами вказують на приблизно однакову ерозію міді в цих електродах. Це може означати формування на поверхні електродів мідних острівців, до яких «прив'язується» електрична дуга, проте, щоб зробити остаточний висновок стосовно цього припущення необхідно додатково провести комплекс металографічних досліджень [8,9,10].

Висновки

Методами лазерної абсорбційної спектроскопії плазми, у припущенні локальної термодинамічної рівноваги, визначено розподіл концентрації мідної компоненти в плазмі електродугового розряду силою струму 3.5 А між композитними Cu-C електродами.

Аналіз поведінки радіальних концентрації мідної компоненти в плазмі між композитними Cu-C та мідними електродами показує, що мідь, незважаючи на її порівняно незначний вміст у складі електродів, є основним елементом, який визначає параметри плазми.

Список використаних джерел

1. *Frish S.E.* Discharge plasma spectroscopy / S.E. Frish. – Moscow: "Nauka", 1970. – 362 p. (in Russian)

2. *Berent V.Ya*. Improvement of performance of current collectors on the carbon base / V.Ya. Berent, S.A. Gnezdilov // Friction and lubrication of machinery. – 2009. – **2.** – P. 18–23 (in Russian).

3. Berent V.Ya. Enhancement of current collectors on the carbon base of electric trains / V.Ya. Berent, S.A. Gnezdilov // Friction and lubrication of machinery. – 2008. – 8. – P. 9–15 (in Russian).

4. *Veklich A.N.* Investigation of electric arc plasma between composite Cu–C electrodes. Part I: Temperature measurement / A.N. Veklich, V.F. Boretskij, A.V. Lebid, Ya.V. Bondarenko, S.O. Fesenko / Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. – Series: Physics & Mathematics. – 2013. – **1**.(in Ukrainian) (submitted) .

5 *Babich I.L.* Spectroscopy of plasma arc discharge with copper alloy / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, A.I. Ivanisik // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2008. – P. 4-13 (in Russian).

6. *Bockasten K*. Transformation of Observed Radiances into Radial Distribution of the Emission of a Plasma / K. Bockasten // Journal of the optical society of America. – 1961. – **51**. – No 9. − P. 943-947.

7. *Miedzinski B*. Dynamics of sliding contacts in mine slow-speed railway transportation / B. Miedzinski, W. Dzierzanowski, J. Wandzio, N. Grechanyuk, V.N. Shoffa // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 63-69.

8. *Minakova R.V.* Secondary structure of working layer of composite materials and their functional properties / R.V. Minakova, Ye.V. Chomehko, G.Ye. Kopulova, M.Ye. Golovkova, A.N. Veklich, P.V. Soroka // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 38-47 (in Russian).

9. *Babich I.L.* Spectroscopy of electric arc plasma between composite electrodes $Ag – SnO_2 – ZnO$ / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, L.O. Kryachko, A.V. Lebid, R.V. Semenyshyn // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 81-90 (in Ukrainian).

10. *Babich I.L.* Investigations of plasma of electric arc discharge between composite electrodes on cooper base / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, M.I. Grechanuk, A.V. Lebid, R.V. Minakova, P.V. Soroka // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 91-100 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 18.02.13.

УДК **536.2**

Висоцький В.І.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Василенко В.Б.[2], к.ф.-м.н., проф.,
Василенко А.О.[1] аспірант

Періодичні режими теплопровідності в активних середовищах

У роботі розглянуто процеси теплопровідності у біологічних середовищах. Розглянуті рівняння включають у себе як перфузивний доданок, що описує терморегуляцію за допомогою кровообігу так і поправки на час релаксації середовища. Для аналізу отриманих моделей були використані хвилеві розв'язки та отримані дисперсійні співвідношення.

Ключові слова: температурні хвилі, активні середовища, моделі з релаксацією.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: gakushya@gmail.com
[2] Центр фізичних та технологічних досліджень (ЦФТ), факультет науки і технологій, Новий Лісабонський Університет, Кампус ФНТ НЛУ, 2829-516 Капаріка, Португалія

V. I. Vysotskii[1], D.Sci.,
V. B. Vassilenko[2], PhD,
A. O. Vasylenko[1], post graduate student.

Periodic heat transfer regimes in active medium

In present work heat transfer processes in bio tissue are regarded. Equations that were used contain not only perfusion term that describes temperature auto regulation in live tissue but also relaxation time. Mentioned models were analyzed with undulatory solutions. For these models dispersion relations were obtained.

Key Words: temperature waves, active medium, models with time relaxation.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: gakushya@gmail.com
[2] Centre of Physics and Technological Research (CeFITec), Faculty of Sciences and Technology, NOVA University of Lisbon, Campus FCT UNL, 2829-516 Caparica, Portugal

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Скришевський В.А.

Вступ. Класична задача про розповсюдження тепла в різних середовищах зазнала суттєвих змін впродовж другої половини двадцятого сторіччя. "Стандартне" параболічне рівняння теплопровідності. яке адекватно описує процес дифузії теплового поля для повільних теплових процесів, при опису суттєво нестаціонарних задач поступилося місцем гіперболічному рівнянню. Такі задачі виникають при аналізі теплових ефектів, що супроводжують імпульсний вплив на середовище, в якому при цьому за короткий час створюється значний градієнт температури. В таких процесах розв'язки рівняння гіперболічного типу значно краще узгоджуються з результатами експериментів, ніж відповідні розв'язки рівняння параболічного типу. Водночас слід зауважити, що навіть така заміна не приводить до повного узгодження теорії з експериментом [2].

З класичним рівнянням теплопровідності пов'язані і деякі інші проблеми. Як відомо, фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності відповідає нескінченній швидкості розповсюдження профілю розподілу температур в початковий момент часу, що суперечить уявленням про скінчену швидкість розповсюдження будь-яких збурень[1].

Все це стимулює інтерес до більш детального аналізу суттєво нестаціонарних процесів теплопереносу та пошуку нових моделей теплопровідності.

Крім того, питання про нові моделі теплопровідності можуть виникати для матеріалів, в яких розповсюдження тепла відбувається повільно - наприклад, біотканини та вуглепластики. Як правило, такі матеріали мають складну будову і містять в собі складні макромолекули. Для аналізу процесів в таких

© В.І. Висоцький, В.Б. Василенко, А.О. Василенко, 2013

середовищах було розроблено декілька нових математичних моделей, які узагальнювали класичний закон теплопровідності [3,4]. Вибір найбільш адекватної моделі гальмує відсутність відповідних експериментів. В даній роботі розглядається рівняння теплопровідності з довільною часовою затримкою, знаходяться умови існування незатухаючих теплових хвиль, а також пропонуються режими прогріву, які дозволяють якісно відрізнити одну модель теплопровідності від іншої.

З огляду на результати, отримані в [2], ефекти, пов'язані з часом релаксації відіграють суттєву роль при розповсюдженні тепла в біотканині. З іншого боку слід зауважити, що основна увага дослідників була сконцентрована на описі явища кровообігу та пов'язаної з цим терморегуляції. В даній роботі робиться спроба заповнити цей пробіл і поєднати поправки на час релаксації з перфузивним доданком, що описує кровообіг.

Класична модель теплопровідності з перфузивним доданком Пена. Класичне рівняння для потоку тепла з використанням постійного коефіцієнту теплопровідності λ має вигляд:

$$\vec{q}(x,t) = -\lambda \cdot grad(T(x,t)) \qquad (1)$$

Якщо поєднати це рівняння з законом збереження енергії при наявності розподіленого джерела тепла σ в середовищі з об'ємною густиною ρ та теплоємністю c :

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = div\vec{q}(x,t) + \sigma(x,t) \qquad (2)$$

то можна отримати класичне рівняння параболічного типу для температурного поля:

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \sigma(x,t) \qquad (3)$$

Де $\sigma(x,t)$ - розподілене джерело тепла. Саме через розподілене джерело тепла описуються теплові ефекти метаболізму та кровообігу в біотканині.

Слід зауважити, що наведені вище рівняння спираються неочевидним чином на два наближення, що лежать в основі класичної термодинаміки, а саме: принцип локальної термодинамічної рівноваги та принцип локальності [4]. Принцип локальності дозволяє перейти від рівняння, яке описує закон збереження енергії в інтегральній формі, до рівняння, яке описує той же закон в диференціальній (локальній) формі. Принцип локальної термодинамічної рівноваги дозволяє описувати нерівноважну систему, в якій присутні градієнти температури, концентрації і т.д. через локальні рівноважні стани малих підсистем, але таке наближення справедливе лише для повільних процесів, коли час релаксації підсистем до рівноважного стану суттєво менший за характерний час процесу (наприклад періоду для періодичних процесів).

Середовища з точки зору процесів теплопередачі можуть бути поділені на два великі класи: пасивні та активні. Пасивні середовища мають матеріальні параметри, що не залежать від температури, в той час, як матеріальні параметри активних середовищ мають температурну залежність, через яку і проявляється їх реакція на температурне збурення. Найбільш відомим (з точки зору теплопровідності) активним середовищем є жива біотканина: в біотканині постійно циркулює кров, що регулює її температуру. Така система температурного контролю намагається повернутися до нормальної температури у випадку відхилень через зовнішні причини. Найчастіше ці процеси моделюються за допомогою додавання до рівняння температуропровідності доданку, що є розподіленим знакозмінним джерелом тепла, залежним від температури. Поєднуючи класичне рівняння температуропровідності з перфузивним доданком, отримуємо біофізичну модель теплопровідності Пена для одновимірного випадку [5,6]:

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \rho_b c_b \omega_b \left(T(x,t) - T_b\right) \qquad (4)$$

Де ρ_b, c_b, ω_b густина крові, теплоємність крові та інтенсивність кровообігу, або перфузивна частота. T_b - температура крові. З метою більш компактного запису та зручності подальших викладок перенормуємо температуру:

$$T = \frac{T(x,t) - T_b}{T_{ia}} \qquad (5)$$

Де T_{ia} - амплітуда температурного імпульсу, що використовується для прогріву, зручність такого нормування стане очевидна далі, T - нормована температура. Після ряду простих перетворень отримуємо рівняння температуропровідності в біотканині для

нормованої температури:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = G\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \gamma\omega_b\left(T - T_b\right) \qquad (6)$$

Де G - коефіцієнт температуропровідності, γ - відношення теплоємності елементарного об'єму крові до теплоємності такого ж елементарного об'єму тканини. Підставимо у (6) нормовану температуру у вигляді:

$$T = e^{i(\omega t - kx)} \qquad (7)$$

В результаті отримаємо комплексне дисперсійне співвідношення:

$$i\omega = -k^2 G - \gamma\omega_b \qquad (8)$$

Враховуючи структуру хвилевого числа

$$k = k_1 - ik_2\,, \qquad (9)$$

з (8) отримуємо систему рівнянь відповідних компонент:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{-\omega}{2Gk_2} \\ k_1^2 - k_2^2 + \gamma\omega_b = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Розв'язки цієї системи мають вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} k_2 = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2G}\left(\sqrt{\gamma^2\omega_b^2 + \omega^2} + \gamma\omega_b\right)} \\ k_1 = \mp\dfrac{\omega}{\sqrt{2G\left(\sqrt{\gamma^2\omega_b^2 + \omega^2} + \gamma\omega_b\right)}} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} k_2 = \pm i\sqrt{\dfrac{1}{2G}\left(\sqrt{\gamma^2\omega_b^2 + \omega^2} - \gamma\omega_b\right)} \\ k_1 = \pm i\dfrac{\omega}{\sqrt{2G\left(\sqrt{\gamma^2\omega_b^2 + \omega^2} - \gamma\omega_b\right)}} \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (11)$$

Якщо поклавши $\gamma\omega_b = 0$, то з (11) легко отримати вирази для хвильового числа та коефіцієнту затухання в класичній моделі теплопровідності без перфузивного доданку:

$$\begin{cases} k_2 = \pm\sqrt{\dfrac{\omega}{2G}} \\ k_1 = \mp\sqrt{\dfrac{\omega}{2G}} \end{cases} \qquad (12)$$

Слід зауважити, що в другій парі роз'язків в (11) роль коефіцієнта затухання виконує величина k_1, в той час, як в першій парі розв'язків - k_2. Шляхом алгебраїчних перетворень можна показати, що обидві пари розв'язків еквівалентні.

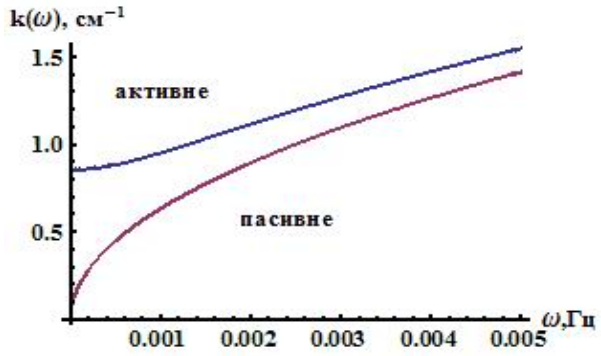


Рис. 1 Частотна характеристика коефіцієнту затухання в області низьких частот

На рис. 1 та рис. 2 зображені частотна залежність коефіцієнту затухання як в області низьких частот, так і для більш широкого діапазону.

Принципова відмінність активного середовища від пасивного полягає у тому, що при низькочастотних процесах суттєво зростає затухання температурних хвиль. Для використаних значеннях матеріальних

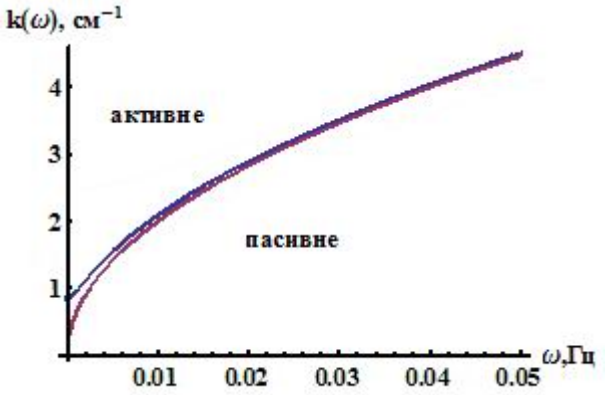


Рис. 2 Частотна характеристика коефіцієнту затухання для широкого діапазону частот

параметрів середовища $G = 1.25 \cdot 10^{-3} \frac{см^2}{c}$, $\omega_b = 10^{-3} \frac{см^3}{см^3 \cdot c}$, $\gamma = 0.91$, які були розраховані на основі даних [7], що відповідають м'язовій тканині, ця відмінність буде спостерігатися лише при дуже повільних процесах. Той факт, що для високих частот коефіцієнт затухання температурних хвиль в активному середовищі майже не відрізняється від коефіцієнту затухання в звичайному середовищі є досить очевидним. Температура середовища підтримується постійною за рахунок постійного прокачування через порувату тканину рідини(крові) при заданій константній температурі. Умовою спрацювання цього механізму є те, що має пройти достатня кількість рідини, що зможе забезпечити відведення чи, навпаки, підведення необхідної кількості тепла для врівноваження температурних змін. У випадку швидкозмінних температурних процесів фактично не відбувається ніякої зміни рідини-термостату, тому ефекти з саморегулюванням не повинні проявлятися для швидких процесів. Але слід зауважити, що при ретельному описі явища теплопровідності в живій тканині слід враховувати також можливість зміни інтенсивності кровообігу, у наслідок зміни температури тканини та реакції організму. Цей факт часто відображається в рівнянні температурною залежністю перфузивної частоти в доданку Пена від температури. Таке рівняння є нелінійним і не підлягає дослідженню використаним тут методам. Безперечно, врахування цього факту внесе свої поправки, але ці поправки не можна вважати надто значимими і здатними якісно змінити результат, оскільки коефіцієнти не лінійності незначні. Нижче розглядаються температурні хвилі в активних середовищах з релаксацією.

Моделі теплопровідності з перфузивним доданком Пена, що враховують поправку на час релаксації. В попередньому розділі були розглянуті властивості хвилевих розв'язків класичного рівняння теплопровідності з перфузивним доданком Пена. Проте в другій половині двадцятого сторіччя набуло широкого розповсюдження узагальнене рівняння (закон Максвелла-Каттанео) для теплового потоку:

$$\bar{q}(\bar{r},t) + \tau \frac{\partial q(\bar{r},t)}{\partial t} = -\lambda \cdot grad(T(\bar{r},t)) \qquad (13)$$

яке є очевидним узагальненням рівняння (1) на випадок слабкої часової неоднорідності процесу переносу тепла і яке є спрощеним випадком більш загального рівняння [3-4]:

$$\bar{q}(\bar{r},t+\tau) = -\lambda \cdot grad\,(T(\bar{r},t)) \qquad (14)$$

для системи з довільною часовою неоднорідністю процесу переносу тепла.

Поєднавши закон Максвелла-Каттанео та закон збереження енергії, можна отримати рівняння гіперболічного типу з перфузивним доданком для нормованої температури:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \gamma \omega_b T - \gamma \omega_b \tau \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (15)$$

Дане рівняння справедливе за умови:

$$\left| \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} \right| >> \left| \tau \frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial t^2} \right| \qquad (16)$$

яка виконується при малій затримці τ або при відносно малій швидкості часової зміни температурного поля і може використовуватись для опису теплових ефектів при, наприклад, взаємодії лазерного імпульсного випромінювання з середовищем та в інших нерівноважних задачах.

Аналогічно з проведеним вище аналізом класичного рівняння розглянувши хвилеві розв'язки для рівняння (15), отримаємо наступне дисперсійне співвідношення:

$$i\omega\left(1+\tau\gamma\omega_b\right) + \gamma\omega_b - \tau\omega^2 = -k^2 G \qquad (17)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma\omega_b - \tau\omega^2, \\ \beta &= \omega\left(1+\tau\gamma\omega_b\right), \end{aligned} \qquad (18)$$

за допомогою яких вирази для коефіцієнта

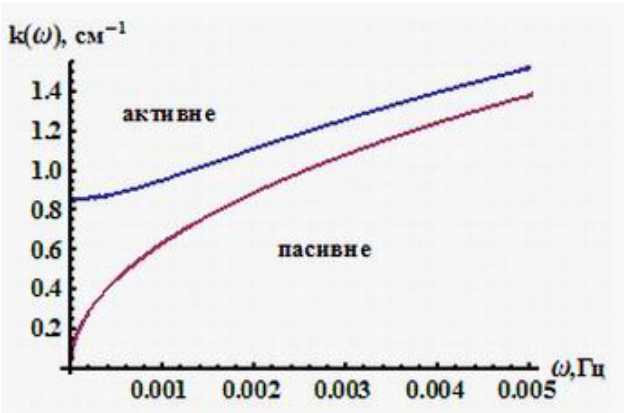


Рис. 3 Частотна характеристика коефіцієнта затухання в області низьких частот

затухання та хвилевого тепла можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} k_2 = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2G}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)} \\ k_1 = \mp\dfrac{\beta}{\sqrt{2G}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} \end{cases} \quad (19)$$

На рисунках 3,4 зображено частотну

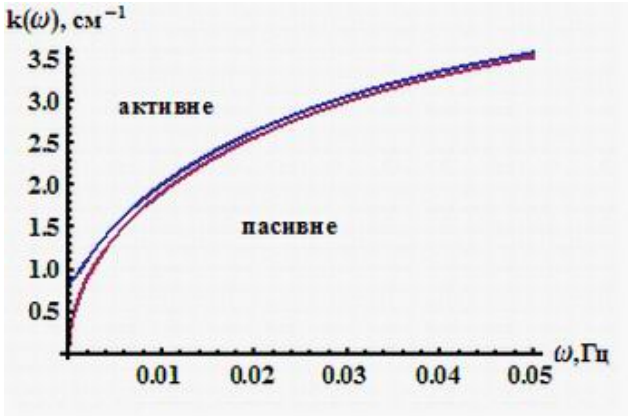


Рис. 4 Частотна характеристика коефіцієнта затухання для широкого діапазону частот.

залежність коефіцієнту затухання. Як видно з графіків різниця між активним та пасивним середовищем проявляється лише на низьких частотах. Також на низьких частотах відмінність між гіперболічною та класичною моделями не помітна, проте зі зростанням частоти в

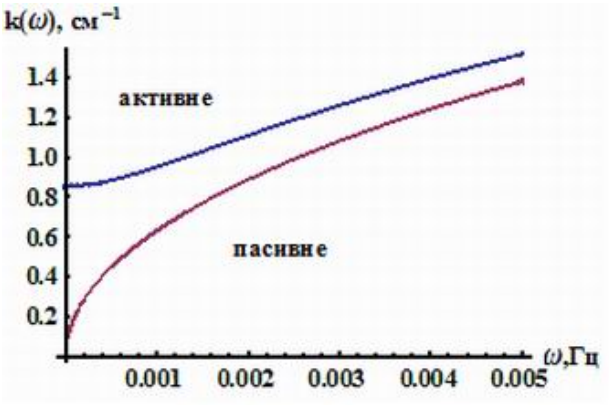


Рис. 5 Частотна характеристика коефіцієнта затухання в області низьких частот.

гіперболічній моделі затухання наростає повільніше і виходить на асимптоту.

Для побудови рівняння теплопровідності в системах, не обмежених умовою (16) (зокрема при наявності довільної затримки τ або у випадку дуже швидкої зміни температури) будемо використовувати загальне рівняння для потоку тепла (14) з довільною затримкою, природа якої визначається "пам'яттю" конкретного механізму теплопереносу.

Наприклад, у випадку променевого (радіаційного) переносу процес затримки може бути пов'язаний з тривалістю спонтанного випромінювання в атомних або плазмових системах після їх початкового збудження.

Інший механізм пам'яті може бути пов'язаний з часом релаксації збудження, отриманого по одному каналу конкретним елементом системи, на локальне оточення. В рамках формалізму матриці густини такий процес відповідає релаксації діагональних та недіагональних елементів матриці густини.

Остаточно знаходимо рівняння з затримкою для температурного поля:

$$\frac{\partial \mathrm{T}_{+\tau}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{G} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} - \gamma\omega_\mathrm{b}\mathrm{T}_{+\tau} \quad (20)$$

Тут індекс $+\tau$ позначає часовий лаг функції в напрямку зростання. Далі проведемо пошук таких розв'язків цього рівняння, які відповідають існуванню різних типів (в т.ч. незатухаючих) теплових хвиль.

Підставляючи хвилеві розв'язки в рівняння (20) отримаємо дисперсійне співвідношення:

$$i\omega e^{i\omega\tau} = -k^2 G - \gamma\omega_b e^{i\omega\tau} \quad (21)$$

Звідки можна знайти вирази для коефіцієнта затухання та хвилевого числа:

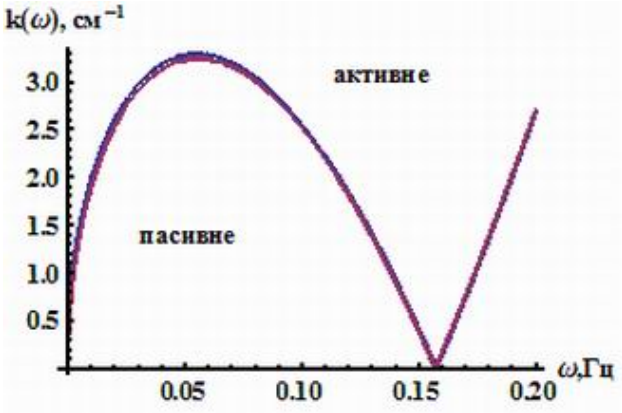


Рис. 6 Частотна характеристика коефіцієнта затухання в широкому діапазоні частот.

$$\begin{cases} k_2 = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2G}\left(-\xi + \sqrt{\xi^2+\psi^2}\right)} \\ k_1 = \mp\dfrac{\psi}{\sqrt{2G}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{-\xi + \sqrt{\xi^2+\psi^2}}} \end{cases} \quad (22)$$

Де:

$$\begin{aligned} \xi &= \omega \cdot \sin\omega\tau - \gamma\omega_b \cdot \cos\omega\tau \\ \psi &= \omega \cdot \cos\omega\tau + \gamma\omega_b \cdot \sin\omega\tau \end{aligned} \quad (23)$$

На рис. 5,6 зображена частотна характеристика коефіцієнта затухання. Аналогічно до попередніх двох випадків відмінність спостерігається в області низьких частот. При моделюванні час релаксації було обрано τ=10 с. За таких умов в активній системі можливо спостерігати незатухаючі температурні хвилі.

Також рівняння з затримкою для активного середовища зберігає особливість аналогічного рівняння для пасивного середовища. При достатньо високих частотах з'являються зони нестійкості розв'язків, тобто амплітуда температурних хвиль зростає в напрямку розповсюдження. Це дуже легко перевірити. Зростання, чи спадання амплітуди в напрямку розповсюдження хвилі визначається знаком добутку $k_1 \cdot k_2$. Для перших двох моделей він завжди від'ємний, в той час, як для моделі з часом затримки визначається знаком ψ, яка є знакозмінною функцією. Враховуючи мализну частоти перфузії доданок з синусом можна відкинути і знак ψ визначатиметься знаком $\cos\omega\tau$ і в областях, де косинус від'ємний розв'язок проявляє нестійкість, тобто амплітуда хвилі починає зростати в напрямку розповсюдження. Така ситуація обумовлена тим, що модель з затримкою описує систему зі строгою часовою когерентністю, яка забезпечується строгою рівністю між станами температурного поля в два різні моменти часу. Проте, в реальній системі строга часова когерентність навряд чи може бути досягнута, що буде унеможливлювати нескінченне зростання амплітуди температурної хвилі.

Висновки. Були розглянуті моделі теплопровідності в активних середовищах. З цією метою до класичного, гіперболічного та рівняння теплопровідності з затримкою додавався перфузивний доданок Пена. Для всіх, вищезгаданих типів рівнянь були отримані дисперсійні співвідношення та вирази для хвилевого числа і коефіцієнта затухання. Було показано, що в активному середовищі температурні хвилі сильно затухають при малих частотах, в той час, як при високих частотах немає ніякої відмінності з пасивним середовищем. Більше того було показано можливість існування незатухаючих температурних хвиль в активному середовищі. Це все створює можливість для використання таких хвиль з метою формування заданого температурного імпульсу в біотканині.

Список використаних джерел

1. *Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskii S.Yu.* Wave processes of heat transfer: systematic approach. - Moscow: Editorial URSS, 2004. – 296 p. (in Russian)
2. *Megan Jaunich, Shreya Raje, Kyunghan Kim, Kunal Mitra, Zhixiong Guo* Bio-heat transfer analysis during short pulse laser irradiation of tissues // International Journal of Heat and Mass Transfer. - 2008. – **51.** – P. 5511-5521.
3. *S.L. Sobolev* Transfer processes and traveling waves in local not equilibrium systems // UFN. – 1991. – **161.** – P. 5-29.
4. S.L. Sobolev Local not equilibrium models of transfer processes // UFN. – 1997. – 167. – P. 1095 -1106
5. *Klinger H.G.* Heat transfer in perfused biological tissue. // Bulletin of Mathematical Biology.- 1974. - **36**. P. 403-415.
6. *Chen M.M., Holmes K.R.* Microvascular Contributions in Tissue Heat Transfer // Annals of the New York Academy of Sciences. - 1980. – **335.** - P. 137–150.
7. *Lv Y.G., Liu J.* Effect of transient temperature on thermoreceptor response and thermal sensation // Building and Environment. - 2007. – **42.** P. 656-664

Надійшла до редколегії 20.02.13

УДК 535.345.67

Первак Ю.О.[1], д.ф.-м.н., проф., Федоров В.В.[1], аспірант

Просторово-спектральний розподіл електричного поля в одновимірних фотонних кристалах з трьома пів хвильовими резонаторами

Досліджено просторово-спектральний розподіл електричного поля на частотах трьох дозволених зон, що виникають в просторово-обмежених 1-D фотонних кристалах з трьома пів хвильовими дефектами. Фотонний кристал утворений шарами оксидів кремнію і титану, що чергуються. Показано, що максимальне значення електричного поля в ФК з трьома пів хвильовими дефектами завжди менше відповідного значення поля в резонаторі фільтра Фабрі-Перо, що має однакову товщину з ФК. Зближенням пів хвильових дефектів можна підвищувати концентрацію поля та керувати спектральним складом електричного поля.

Ключові слова: багатошарова тонкоплівкова структура, одновимірний фотонний кристал

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Yu.O. Pervak[1], Dr. Sci., V.V. Fedorov[1], post grad. stud.

Spectral-spatial distribution of electric-field in one dimensional photonic crystals with three half-wave resonators

Spectral characteristics of transmittance and spatial distribution of electric-field were investigated on frequencies of three allowed zones that arise up in spatially-limit 1-D photonic crystals with three half-wave defects of different nature. A photonic crystal consists the layers of oxides of silicon and titan that alternate. It is shown that maximal value of electric-field in a photonic crystal with three half-wave defects always less corresponding value of the field in a resonator of Fanri-Perot filter that has an identical thickness with a photonic crystal. By rapprochement half wave defects can be promoted concentration and to manage spectral composition of electric-field.

Key words: multilayer thin-film structure, one-dimensional photonic crystal

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g, e-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.техн.н., проф. Погорілий С.Д.

Необхідність частотної селекції електромагнітного випромінювання у різноманітних телекомунікаційних системах обумовлює інтерес до багато пів хвильових інтерференційних фільтрів, аналітична теорія яких розроблена в роботі [1]. В фотоніці такі структури дістали назву одновимірних(1 - D) фотонних кристалів (ФК) з пів хвильовими дефектами [2, 3]. Наявність пів хвильових дефектів призводить до появи фотонних дозволених зон в середині забороненої зони фотонного кристалу. При певному виборі параметрів багатошарової структури можна добитися чіткого розділення цих дозволених фотонних зон [4, 5]. Положення цих дозволених фотонних зон визначається відстанню між пів хвильовими дефектами, а ширина зон товщиною ФК [6-9]. У бездефектних 1 - D фотонних кристалах на краях зони Бриллюена електричне поле концентрується в шарах з високою діелектричною проникністю в першій фотонній дозволеній зоні (нижче забороненої зони) і в шарах з низькою діелектричною проникністю в другій дозволеній фотонній зоні (вище забороненої зони) [2, 3]. В двокомпонентних 1-D ФК з трьома пів хвильовими дефектами електричне поле концентрується в середині пів хвильових дефектів з меншою діелектричною проникливістю і на інтерфейсах пів хвильових дефектів з більшою діелектричною проникливістю [6-9].

Мета даної роботи – встановлення впливу взаємного розташування пів хвильових дефектів на розподіл електричного поля в ФК і можливість керування цим розподілом. Методика розрахунку розподілу електричного поля детально описана в попередніх роботах [6-9]. В якості модельного об’єкту вибрано структуру 1D-ФК, які склада-

© Ю.О.Первак, В.В.Федоров, 2013

ються з 47 шарів оксидів титану (TiO_2) і кремнію (SiO_2). Перший і останній шари виготовлені з TiO_2, а пів хвильові шари з SiO_2. В випадку, коли пів хвильові резонатори мають низьку діелектричну проникливість, загальна формула структур записується як $S(HL)^{l+1}[(LH)^{k+1}L]^2(HL)^{l+1}$, де H і L чверть хвильові на довжині хвилі $\lambda_0 = 550$ нм шари із матеріалів з високим (TiO_2) і низьким (SiO_2) показниками заломлення, відповідно. Для того, щоб кількість шарів N дорівнювала 47 сума $(l + k)$ має дорівнювати 10, оскільки $N = 4l + 4k + 7$.

Збільшення параметру l від 0 до 2 відповідає зменшенню відстані між пів хвильовими резонаторами від $5{,}25\lambda_0$ до $4{,}25\lambda_0$. При цьому фотонна заборонена зона (ФЗЗ) практично не змінюється, а єдина дозволена фотонна зона в ФЗЗ, тобто смуга прозорості з максимальним пропусканням на довжині хвилі $\lambda_0 = 550$ нм, суттєво розширюється. При відстані між резонаторами більшій $4\lambda_0$ взаємодія між резонаторами дуже слабка і роль бічних пів хвильових резонаторів зводиться до зменшення коефіцієнта відбивання дзеркал центрального пів хвильового резонатора. За таких умов розподіл електричного поля в таких структурах буде близьким до розподілу поля в звичайному інтерферометрі Фабрі-Перо, кожне з дзеркал якого складається з меншої кількості шарів, ніж структури з трьома резонаторами. Щоб отримати структуру такого еквівалентного інтерферометра Фабрі-Перо, достатньо від структури з трьома резонаторами відняти бічні пів хвильові шари і шари, що симетрично їх оточують. На рис.1 показано спектрально-просторовий розподіл електричного поля ($|E|^2$) в досліджуваних 47-шарових структурах 1D-ФК. В роботі електричне поле вимірюється в відносних одиницях (процентах). Якщо електричне поле ($|E|^2$) хвилі, що падає, прийняти рівним 100%, то при коефіцієнті відбивання 1, електричне поле на вхідній поверхні складе 400%. Реально електричне поле на вхідній поверхні завжди менше 400%. Спектрально-просторовий розподіл показаний для спектрального діапазону фотонної забороненої зони, який містить дозволенні фотонні зони.

Поки відстань між серединами бічних і центрального пів хвильових резонаторів більша $4{,}25\lambda_0$ спектрально-просторовий і просторовий розподіли електричного поля в середовищі фотонного кристалу мають вигляд, характерний для інтерферометра Фабрі-Перо. При цьому роль бічних резонаторів зводиться до зменшення коефіцієнта відбивання поверхонь центрального резонатору, внаслідок чого падає його добротність і, відповідно, електричне поле в ньому. При зменшенні відстані між резонаторами від $5{,}75\lambda_0$ до $4{,}75\lambda_0$ електричне поле, що концентрується в центральному резонаторі, зменшується майже в 35 разів (від 700000% до 20000%). Чим більша відстань між резонаторами, тим вища спектральна локалізація поля. В ФЗЗ спостерігається усього одна дозволена фотонна зона, яка поступово розширюється при зменшенні відстані між резонаторами. При цьому концентрація електричного поля суттєво зменшується.

При відстані між резонаторами $4{,}25\lambda_0$ електричне поле зазнає як просторової, так і спектральної делокалізації, відбувається частотна деконцентрація поля. Поле на довжині хвилі λ_0 стає меншим, ніж на довжинах хвиль бічних смуг прозорості. При подальшому зближенні резонаторів електричне поле розподіляється по усім трьом резонаторам таким чином, що на довжині хвилі λ_0 воно практично відсутнє в центральному резонаторі, в той час як на довжинах хвиль бічних смуг прозорості досягаються максимальні значення поля. Величина поля на довжині хвилі λ_0 в бічних резонаторах вдвічі менша максимального поля в центральному резонаторі на довжинах хвиль бічних смуг прозорості. При відстані між резонаторами $1{,}25\lambda_0$ усі відповідні максимальні значення поля на усіх довжинах хвиль смуг прозорості майже однакові, а при подальшому зближенні резонаторів електричне поле на довжині хвилі λ_0 в бічних резонаторах більше, ніж на порядок перевищує максимальне поле в центральному резонаторі на довжинах хвиль бічних смуг прозорості. Відповідні зміни величини електричного поля при зміні відстані між резонаторами показано на рис.2, де значення на довжині хвилі $\lambda_0 = \lambda_c$ центральної смуги прозорості відповідають максимальному полю в бічних резонаторах, а на довжинах хвиль $\lambda_к$, і $\lambda_д$ бічних смуг прозорості – максимальному полю в центральному резонаторі. В усіх випадках електричне поле концентрується в пів хвильових резонаторах і досягає максимального значення в середині резонатору.

Якщо в структурі ФК замінити усі шари H на L і навпаки, тобто здійснити перехід від структури $S(HL)^{l+1}[(LH)^{k+1}L]^2(HL)^{l+1}$ до структури $S(LH)^{l+1}[(HL)^{k+1}H]^2(LH)^{l+1}$, то отримаємо структуру, в якій усі пів хвильові резонатори матимуть високу діелектричну проникливість. Для структур $S(LH)^{l+1}[(HL)^{k+1}H]^2(LH)^{l+1}$ характерні властивості спектрально-просторового і просторового розподілу електричного поля, як і для структур $S(HL)^{l+1}[(LH)^{k+1}L]^2(HL)^{l+1}$, з тією різницею, що в

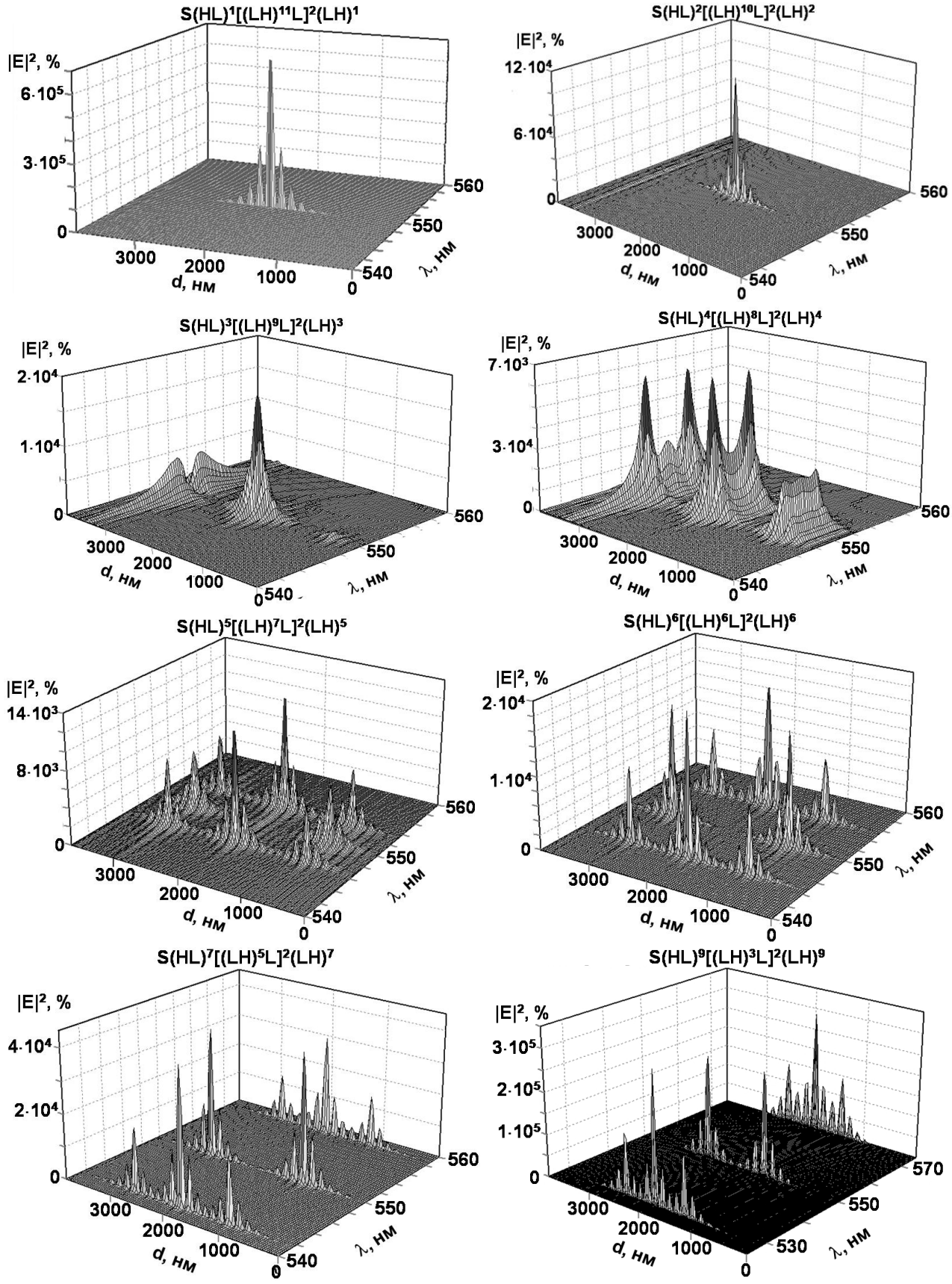


Рис.1. Просторово-спектральний розподіл електричного поля в 1D-ФК-А2 (структурна формула $S(HL)^{l+1}[(LH)^{k+1}L]^2(HL)^{l+1}$).

середині пів хвильових резонаторів поле буде відсутнім, а на інтерфейсах резонаторів досягатиме максимальних значень.

Рис.2. Максимальне значення електричного поля ($|E|^2$) в структурах 1D-ФК-А2 з 47 шарів на довжинах хвиль смуг прозорості $\lambda_к$, $\lambda_с$ і $\lambda_д$.

Тому для спектрально-просторового розподілу поля структур $S(LH)^{l+1}[(HL)^{k+1}H]^2(LH)^{l+1}$ притаманна роздвоєність піків максимального поля (рис.3). Правило локалізації максимального електричного поля на інтерфейсах пів хвильових резонаторів в незначній мірі порушується лише в випадку, коли резонатори з високою діелектричною проникливістю розділені усього одним шаром з низькою діелектричною проникливістю.

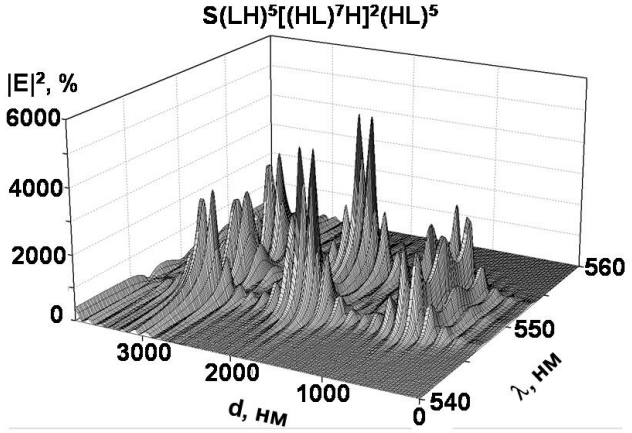


Рис.3. Просторово-спектральний розподіл електричного поля в ФК $S(LH)^5[(HL)^7H]^2(LHL)^5$.

В досліджуваних структурах електричне поле може перевищувати електричне поле хвилі, що падає на структуру, в сотні разів. Максимальне значення електричного поля в ФК з трьома пів хвильовими дефектами завжди менше відповідного значення поля в резонаторі фільтра Фабрі-Перо, що має однакову товщину з ФК. Зближенням пів хвильових дефектів можна підвищувати концентрацію поля керувати спектральним складом електричного поля.

Список використаних джерел

1. *Markov Yu.N.* Synthesis of contrast band interference filters. The complicated periodic systems // Opt.&Spectroscopy. – 19837. – Vol.543. – N1. - P.173-178. (in Russian).
2. *Joannopoulos J.D., Meade R.D., Winn J.N.* Photonic Crystals. - Princeton: Princeton University Press, 1995. – 137p.
3. *Pervak V.Yu., Shpak A.P., Pervak Yu.O., Kunitska L.Yu.* Physics of photonic crystals. – Kyyv, Akademperiodika. – 2007. - 304p.(in Ukrainian).
4. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Spectral properties of multilayer structures with three half-wave resonators // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser.: Phys.&Mathematics. – 2011. - №1. – P. 259-262.(in Ukrainian).
5. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Features of spectral characteristies of multilayer structures with three half-wave resonators // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser.: Phys.&Mathematics.– 2011. - №2. – P. 201-204.(in Ukrainian).
6. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* The angular dependences of spectral transmittance for multilayer structures with three half-wave resonators // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser.: Phys.&Mathematics. – 2011. - №4. – P. 267-270.(in Ukrainian).
7. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Influence of inconsistency of resonators on spectral descriptions and spatial distribution of electric-fild in 1-D photonic with three half-wave resonators // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser.: Phys.&Mathematics. – 2012. - №1. – P. 295-298.(in Ukrainian).
8. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Features of electric-fild distribution in 1-D photonic with three half-wave resonators of different nature // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser.: Phys.&Mathematics. – 2012. - №2. – P. 287-290.(in Ukrainian).
9. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Features of electric-field distribution in 1 - D photonic crystals with three half-wave defects // Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies. – 2012. – Vol.10. – №3. – P.467-476.(in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 29.03.2013

УДК 53.082.5

Поданчук Д. В.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.
Котов М. М., пров. інж.
Петрів Д. А., студент

Апертурні обмеження сенсора хвильового фронту на ефекті Талбота

Експериментально досліджено вплив розміру апертури на точність відновлення хвильового фронту сенсором на основі ефекту Талбота. На прикладі набору сферичних та астигматичних лінз показано, що вплив апертурних ефектів більш відчутний при збільшенні величини аберацій досліджуваного хвильового фронту.

Ключові слова: ефект Талбота, сенсор хвильового фронту Шека-Хартмана, поліноми Церніке

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, просп. Глушкова, 4-г. e-mail: pdv@univ.kiev.ua

Podanchuk D. V., Ph. D., senior researcher
Kotov M. M., advanced engineer
Petriv D. A., student

Aperture limitations of the wavefront sensor based on the Talbot effect

The influence of aperture size on the accuracy of wavefront reconstruction with the sensor based on the Talbot effect is experimentally investigated. The analysis of set of spherical and astigmatic lenses shows that the aperture effects grow with the magnitude of the wavefront aberrations.

Key Words: wavefront sensing, Talbot effect, Shack-Hartmann wavefront sensor, Zernike polynomials.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Glushkova ave., 4g.
e-mail: pdv@univ.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Данілов.В. В.

Вступ

У теперішній час достатньо актуальною стала проблема безконтактного визначення характеристик просторово неоднорідних об’єктів. Серед методів оптичної діагностики особливе місце належить проведенню вимірів та аналізу хвильового фронту, що пройшов досліджуваний об’єкт, або відбитого від його поверхні. З цією метою широко використовується сенсор хвильового фронту Шека-Хартмана [1, 2]. Принцип його дії полягає у наступному. Лінзовий растр фокусує на CCD-камеру лазерний пучок, що відбивається чи проходить через досліджуваний об’єкт. При цьому зсув кожної фокальної плями пропорційний локальному нахилу хвильового фронту. Матриця локальних нахилів перетворюється в набір коефіцієнтів при поліномах Церніке, що повністю описують аберації хвильового фронту та дозволяють кількісно відновити форму досліджуваного об’єкта. Значною перешкодою у застосуванні сенсорів для прецизійного моніторингу об’єктів є неузгодженість між чутливістю, просторовим розрізненням та кутовим динамічним діапазоном. Просторове розрізнення сенсора Шека-Хартмана визначається розміром мікролінз у растрі. Їх зменшення фактично призводить до зменшення фокальної відстані, а отже, до погіршення кутової чутливості сенсора.

Одним з можливих рішень цієї проблеми є використання для створення сенсорів хвильового фронту ефекту Талбота. Він полягає у тому, що зображення періодичного об’єкта, освітленого монохроматичною хвилею, без допомоги будь-якої оптичної системи самовідтворюється на деякій відстані, яка називається відстанню Талбота. Якщо падаюча хвиля має аберації, то зображення об’єкту спотворюється. За відмінністю викривленого зображення об’єкта від початкового можна відновити форму падаючої хвилі. Якщо у якості періодичного об’єкту взяти двовимірну періодичну структуру, то за методом вимірювання та обробки даних такий сенсор буде подібний до сенсору Шека-Хартмана. При цьому сенсор заснований на ефекті Талбота має кращу просторову роздільну здатність та є більш простим у реалізації [3, 4]. Це пов’язано з тим, що у якості вхідного елементу можна використовувати бінарні ґратки із значно меншим періодом, ніж розмір мікролінзи в матриці, і вони значно простіші у виготовленні. Однак повне самовідтворення зображення відбуватиметься лише у випадку

© Д.В. Поданчук, М.М.Котов, Д.А.Петрів, 2013

нескінченної періодичної ґратки [5]. На практиці апертура ґратки, як правило, обмежується декількома періодами, що необхідно враховувати у реальному експерименті.

Метою даної роботи було дослідити вплив апертури двовимірної періодичної структури на якість відновлення хвильового фронту сенсором на основі ефекту Талбота (сенсором Талбота).

Експериментальні дослідження

Оцінка можливостей сенсора Талбота проводилася на експериментальній установці, оптична схема якої представлена на рис.1. У якості когерентного джерела світла використовується He-Ne лазер (λ=0,63мкм). Колімований лазерний пучок потрапляє на досліджувану лінзу *Л*. Хвильовий фронт після лінзи за допомогою напівпрозорого дзеркала *НПД* розділяється по двом каналам. Частина, що пройшла, потрапляє в площину двовимірної дифракційної ґратки *ДГ*. Безпосередньо перед ґраткою вводиться квадратна діафрагма *Д*, яка відкриває для освітлення частину ґратки з необхідним числом періодів. На відстані Талбота (Z_T) від неї знаходиться фотоприймач $ПЗЗ_1$, на який реєструється відновлене зображення ґратки. Відбитий від дзеркала *НПД* хвильовий фронт аналізується сенсором Шека-Хартмана, матриця рефракційних мікролінз (*ММЛ*) якого розташована на тій самій відстані від лінзи *Л*, що й дифракційна ґратка *ДГ*. Діаметр мікролінз матриці складає 0,4 мм, фокусна відстань 24 мм. У фокальній площині матриці знаходиться фотоприймач $ПЗЗ_2$. Таким чином, ми мали можливість порівнювати результати вимірювання досліджуваного хвильового фронту сенсором Талбота з результатами, які були отримані за допомогою сенсора Шека-Хартмана.

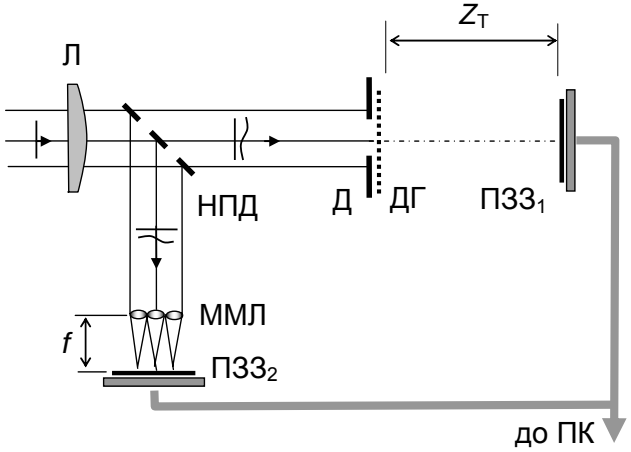


Рис.1. Оптична схема установки по тестуванню сенсора на основі ефекту Талбота.

В експериментах використовувалася двовимірна амплітудна бінарна ґратка з квадратними отворами розміром *80 мкм* та періодом (*d*) рівним *160 мкм*. Ґратка була виготовлена на основі фотоплатівки ПФГ-01 шляхом проектування зменшеного зображення необхідної структури. Розмір ґратки становив *8×8 мм*, що відповідає *49* періодам. Реєстрування розподілу інтенсивності у зображенні ґратки проводилося в площині Талбота ($Z_T = 2\,d^2/\lambda \approx 80$ *мм*). У якості досліджуваних лінз використовувалися сферичні та астигматичні лінзи.

Експеримент проводився наступним чином. Сферичні хвильові фронту створювалися за допомогою лінз з оптичною силою (*D*) від –5,0 дптр до +1,0 дптр., які розташовувалися на відстані ~0,4 м перед площинами вимірювань. На рис.2 представлені результати вимірювань кривизни сферичного хвильового фронту (*1/R*) сенсором Талбота з апертурою ґратки *17×17* періодів та сенсором Шека-Хартмана. Як видно, діапазон зміни кривизни досліджуваного хвильового фронту у вимірювальній площині становить від $-2{,}1$ м$^{-1}$ дптр до $1{,}3$ м$^{-1}$. Значення кривизни, що отримані за допомогою різних сенсорів, практично однакові. Відмінність в середньому склала ~0,8% (*1/R*) при стандартному відхиленні меншому, ніж 0,1% (*1/R*).

У подальшому аналізувались хвильові фронти сенсором Талбота з різними апертурами ґратки. Розмір апертури зменшувався від повної (49×49) до 9×9 періодів шляхом введення у пучок відповідної діафрагми. Відновлення хвильового фронту відбувалось за масивом 7×7 точок із зображення ґратки. На рис.3 представлені середні значення відхилень (по п'яти реалізаціям) коефіцієнтів дефокусування (у довжинах хвилі) досліджуваного хвильового фронту, які були отримані за допомогою сенсора Талбота з різною

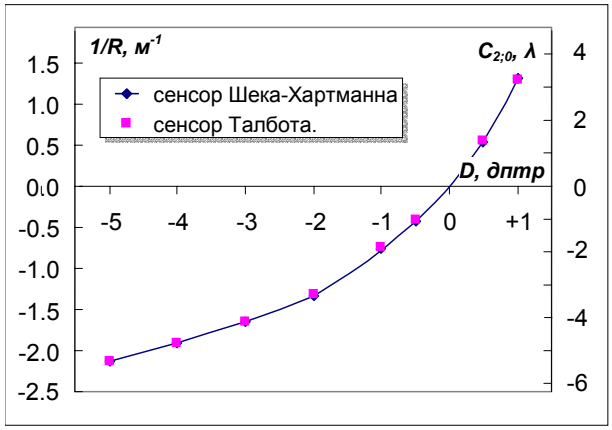


Рис.2. Значення кривизни та коефіцієнтів дефокусування тестових сферичних хвильових фронтів.

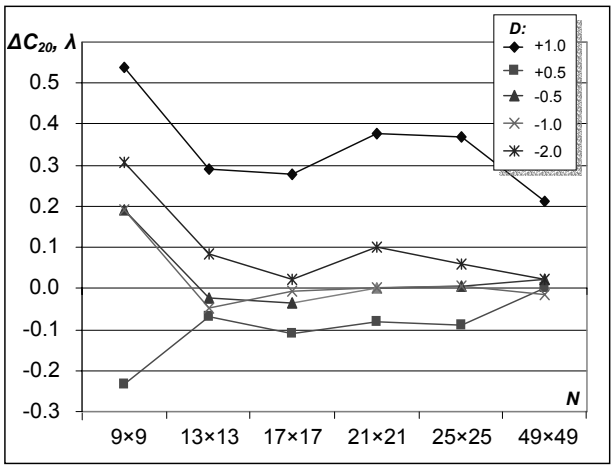
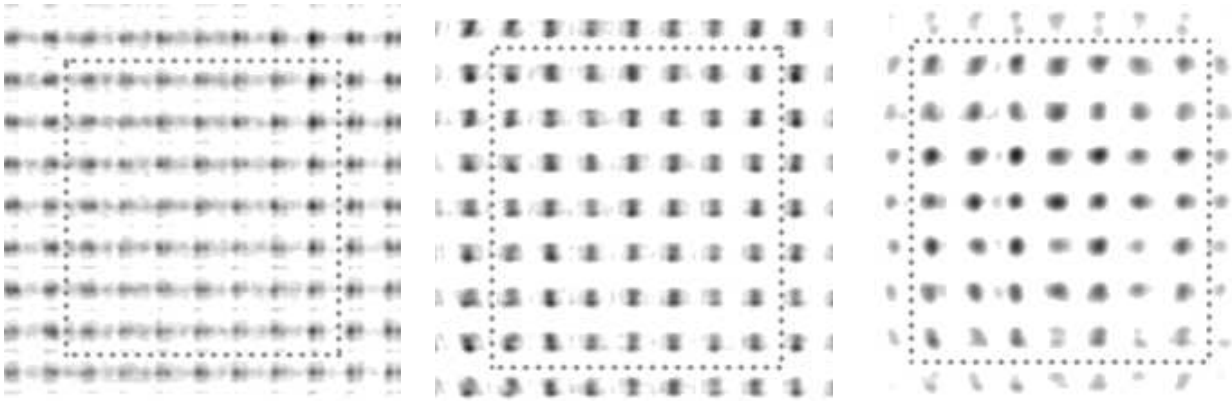


Рис.3. Відхилення значень кривизни хвильового фронту від еталонних при різних розмірах апертури дифракційної ґратки в сенсорі Талбота.

апертурою ґратки, відносно значень, що вимірювалися сенсором Шека-Хартмана. Слід зауважити, що похибка вимірювання, яка пов'язана з неточністю встановлення діафрагми, не перевищувала 1% від середнього значення. З рисунку видно, що при повній апертурі ґратки експериментальні дані для лінз з оптичною силою +0,5 дптр, −0,5 дптр, −1,0 дптр, −2,0 дптр однакові і практично співпадають з еталонними значеннями, які були отримані за допомогою сенсора Шека-Хартмана. Виключення становлять дані для лінзи з оптичною силою +1,0 дптр. На рис. 4а,б представлені фрагменти зображень ґратки у площині Талбота при освітленні повної апертури для лінз з оптичною силою відповідно +1,0 дптр та +0,5 дптр. Як видно, зображення для лінзи з D=+1,0 дптр більш розмите, що пов'язано, на наш погляд, з більшою сферичністю досліджуваної хвилі. Таким чином, вимірювальний діапазон сенсора Талбота для збіжної сферичної хвилі при зменшені області відновлення хвильового фронту звужується. Це призводить до збільшення відхилень експериментальних точок на рис.3 для лінзи з $D = +1{,}0$ дптр у порівнянні з іншими. Для лінз з оптично силою від +0,5 дптр до −2,0 дптр відхилення не перевищують значень 0,1λ для апертур від 25 до 13 рядків ґратки.

Відхилення виміряних значень кривизни від еталонних для всіх лінз різко збільшується при N = 9, що обумовлено впливом апертурних ефектів. На рис.4в представлено зображення ґратки, обмеженої апертурою 9×9, для лінзи з оптичною силою 0,5 дптр. Як видно, при зменшенні апертури освітлення практично до розмірів, в яких проводиться відновлення (7×7), зображення ґратки різко погіршується. Точки зображення змінюють свою форму, що призводить до похибки в вимірюванні їх центрів ваги, і, як наслідок, до неправильного визначення аберацій досліджуваного хвильового фронту.

В наступній серії експериментів досліджувався вплив апертурних ефектів на вимірювання сенсором Талбота астигматичного хвильового фронту. Використовувалися дві астигматичні лінзи: перша мала сферу +0,75 дптр та циліндр −0,25 дптр; друга – сферу +2,5 дптр та циліндр −0,5 дптр. Вони були розташовані на відстані ~0,25 м перед площинами вимірювань. З метою компенсації надмірної сферичності другої лінзи перед нею була додатково розміщена тонка розсіювальна лінза з оптичною силою −3,0 дптр. У якості еталонних величин приймались значення коефіцієнтів Церніке для аберацій дефокусування ($C_{2;0}$) та астигматизму ($C_{2;2}$ та $C_{2;-2}$), які були виміряні за допомогою сенсора Шека-Хартмана. Відновлення хвильового фронту в сенсорі Талбота здійснювалося на апертурі розмірністю 7×7 періодів. Апертура ґратки, що опромінювалася досліджуваним хвильовим фронтом, змінювалася

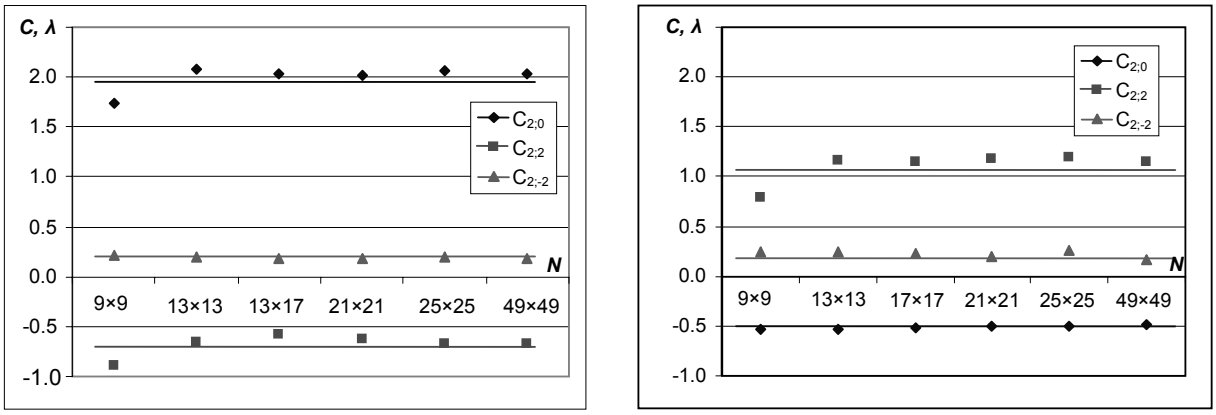


а б в

Рис.4. Зображення ґратки в площині Талбота: за лінзою +1 дптр при повному освітленні (а); за лінзою +0,5 дптр при повному освітленні (б) та при освітленні апертури 9×9 періодів (в)..

від 49×49 періодів до 9×9 періодів. При цьому положення обмежувальної діафрагми контролювалося за допомогою спеціальної оптичної схеми.

На рис.5 представлені величини коефіцієнтів Церніке (у довжинах хвилі), які були виміряні сенсором Талбота на апертурі 7×7 періодів для двох астигматичних лінз. На графіку прямими лініями показані значення коефіцієнтів, що були отримані за допомого сенсора Шека-Хартмана. Слід зауважити, що всі величини приведені до апертури одиничного радіусу. Виходячи з експериментальних даних, можна стверджувати, що для аберацій дефокусування та астигматизму ($C_{2;-2}$ на рис.5а та $C_{2;0}$, $C_{2;-2}$ на рис.5б), величина яких по модулю не перевищує 0,5 λ, визначені величини відповідних коефіцієнтів Церніке однакові в межах похибки для всіх апертур ґратки в сенсорі Талбота. Для більших аберацій ($C_{2;0}$, $C_{2;2}$ на рис.5а та $C_{2;2}$ на рис.5б) при зменшенні апертури освітлення до 9×9 періодів спостерігається різке відхилення (до 0,5 λ) даних від еталонних величин, що отримані сенсором Шека-Хартмана. Це також пов'язане з впливом апертурних ефектів на процес відтворення розподілу інтенсивності ґратки у площині Талбота.



а б

Рис.5 Значення коефіцієнтів Церніке (дефокусування та астигматизм), що були отримані за допомогою сенсора Талбота при різних апертурах ґратки (N), для двох тестових хвильових фронтів.

Висновки

Експериментально проаналізовано вплив апертурних ефектів на якість відновлення хвильового фронту сенсором на ефекті Талбота. Показано, що при умові освітлення повної апертури ґратки розмірністю 49×49 періодів визначення аберацій при обробці її зображення меншої розмірності дає надійні результати, які співпадають з даними від сенсора Шека-Хартмана. При зменшенні апертури ґратки практично до розмірів, в яких проводиться відновлення, зображення ґратки різко погіршується, що приводить до похибки у визначенні аберацій. Показано, що вплив апертурних ефектів більш відчутний при збільшенні величини аберацій досліджуваного хвильового фронту.

Список використаних джерел

1. *Podanchuk D., Dan'ko V., Kisil A., Kovalenko A., Kotov M.* Wave-front sensor for metrological applications // Bulletin of the University of Kiev. Series: Physics & Mathematics.– 2001. – No3.– P. 392–399. (in Ukrainian).
2. *Goloborodko A., Grygoruk V., Kurashov V., Podanchuk D., and Sutyagina N.* Determination of local surface defects using a Shack-Hartmann wavefront sensor // Ukr. J. Phys.– 2008.– **53**.– P. 946 – 951.
3. *Podanchuk D., Kurashov V., Dan'ko V., Kotov M., Parkhomenko O.* Wavefront sensor based on the Talbot effect // Bulletin of the University of Kiev. Series: Radiophysics and electronics.– 2011.– №16.– P.43–46.
4. *Podanchuk D., Kurashov V., Goloborodko A., Dan'ko V., Kotov M., Goloborodko N.* Wavefront sensor based on the Talbot effect with the precorrected holographic grating/ // Applied Optics.– 2012. – **51** – P.C125–C132.
5. *Goloborodko A.* Effect of periodic structures aperture on Talbot phenomena // Bulletin of the University of Kiev. Series: Physics & Mathematics.– 2012. – No3.– P. 243–244. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 03.04.2013

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 539.216; 538.22.

Авраменко Т.Г[1]., аспірант
Іваненко К.О[1]., к.ф.-м.н.
Михалюк О.В[1]., к.ф.-м.н.
Рево С.Л[1]., д.ф.-м.н., проф

Структура та міцність нанокомпозиції фторопласт-диспергований терморозширений графіт

В роботі досліджено структуру, характеристики міцності і електропровідності нанокомпозиційного матеріалу фторопласт термічно розширений графіт. Розглянуто вплив на ці властивості зміни дисперсності, морфології та концентрації термічно розширеного графіту.

Ключові слова: нанокомпозиційний матеріал, термічно розширений графіт, міцність, електропровідність

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: revo@univ.kiev.ua

A. T. Avramenko[1], PhD stud.,
K. O. Ivanenko[1], PhD
O. V. Mykhalyuk[1], PhD,
S. L. Revo[1], Dr. Sci., Prof.,

Structure and strength properties of the nanocomposite material on the base of fluoroplastic and dispersed thermally exfoliated graphite

The structure, strength and conductive properties of the composite materials on the base of fluoroplastic and thermally exfoliated graphite have been investigated. The influence of the dispersity, morphology and content of thermally exfoliated graphite on these properties have been revealed.

Key Words: nanocomposite material, thermally exfoliated graphite, strength, conductivity.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: revo@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Вступ

До числа пріоритетних напрямків розвитку сучасної науки відносяться проблеми створення нових матеріалів для різних областей економіки. Зокрема, це проблеми розробки полімерматричних композиційних матеріалів (ПКМ) з наперед заданими функціональними властивостями [1]. Направленим регулюванням структури та властивостей ПКМ при використанні ефективних дисперсних порошкових чи волокнистих армуючих наповнювачів для полімерних матриць можна створити композиційні матеріали (КМ) з вдосконаленими, а іноді, навіть, і унікальними, експлуатаційними характеристиками. Серед них особливе місце займають електропровідні ПКМ, які, окрім невисокої собівартості, мають ряд переваг в порівнянні з металевими аналогами. Висока хімічна і термостійкість, низька питома вага цих матеріалів дозволяють широко використовувати їх в екстремальних умовах. Крім того, в залежності від виду наповнювача, дисперсності і морфології його частинок, їх розподілу в полімерній матриці, характеру адгезійних зв'язків матриця-наповнювач, фізико-механічні характеристики КМ можуть суттєво змінюватись [1-2].

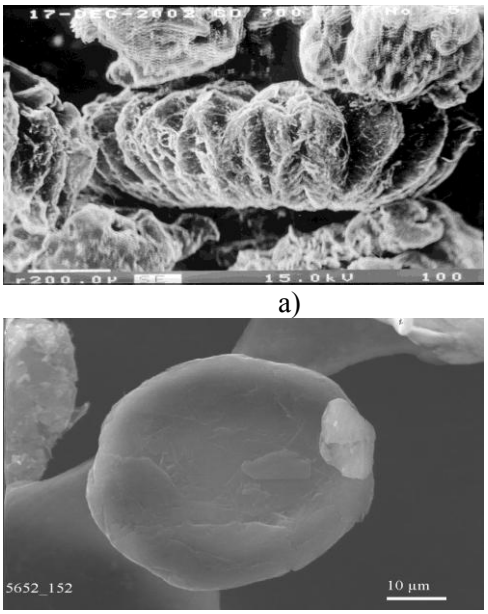
В роботі встановлено фізичні закономірності впливу дисперсності вуглецевого нанонаповнювача у вигляді термічно розширеного графіту (ТРГ) на електропровідність, границю міцності, модуль пружності та відносне видовження при розриві зразків КМ фторопласт (ФП)-ТРГ.

Методика експерименту

Вихідний порошок ТРГ, мікроструктура якого надана на рис. 1а, диспергували за допомогою механічного міксера. Під час подрібнення черв'якоподібні частинки ТРГ, які являють собою набори пачок графенових площин, товщина яких може досягати кількох нанометрів, а віддаль між ними лежить в межах від 10 нм до 10 мкм, розшаровуються на окремі лусочки, змінюючи свою морфологію, що добре видно з рис. 1**.** Отриманий порошок сепарували методом сухого просіювання за допомогою набору сит. В результаті було одержано 4 фракції порошку з розміром поперечного перерізу його частинок(*h*):

© Т.Г. Авраменко, К.О. Іваненко, О.В. Михалюк, С.Л. Рево, 2013

40…60, 60…100, 160…200, 200…315 мкм. Після цього порошки ФП і ТРГ у відповідних пропорціях ретельно змішували і спікали у циліндричній пресформі при тиску 20 МПа та температурі (217 ± 0,5) ^{0}С. Товщина отриманих зразків становила (1…1,5) мм, а діаметр – 20 мм.



а)

б)

Рис. 1. Мікроструктура порошку ТРГ до (а) та після (б) диспергування

Електропровідність зразків визначали чотириточковим методом. Для вимірювання границі міцності при розтягуванні ($\sigma_в$) зразків використовували розривну машину горизонтального типу з виводом інформації на комп'ютер. Відносна похибка цих вимірювань не перевищувала 3%.

Результати досліджень та їх обговорення

Електропровідність (σ) скомпактованих зразків ПКМ з різною концентрацією (C) і дисперсністю наповнювача в напрямку, перпендикулярному площині зразків, наведені в табл. 1.

З таблиці видно, що зі зменшенням дисперсності наповнювача, електропровідність ПКМ зростає. Аналогічну тенденцію впливу на електропровідність має і концентрація. Якщо, наприклад, для ПКМ ФП-ТРГ з C(ТРГ) = 5 об.% зі зміною середнього розміру частинок наповнювача від 40 до 260 мкм - величина σ зростає від $3{,}5*10^{-13}$ до $8{,}3*10^{-3}$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$, то при цих же умовах для композиції з C(ТРГ) = 20 об.% питома електропровідність збільшується вже від 40,3 до $1{,}9*10^{2}$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$. Все це вказує на зміну характеру електропровідності, що, перш за все, пов'язано з просторовим розподілом наповнювача і здатністю його частинок утворювати неперервний кластер в полімерній матриці.

Оскільки метою роботи було одержання електропровідних ПКМ з оптимальними характеристиками фізико-мефанічних характеристик та встановлення особливостей впливу на вказані характеристики дисперсності вуглецевого наповнювача, то нижче (рис. 2) і представлені результати дослідження характеристик міцності одержаних композицій.

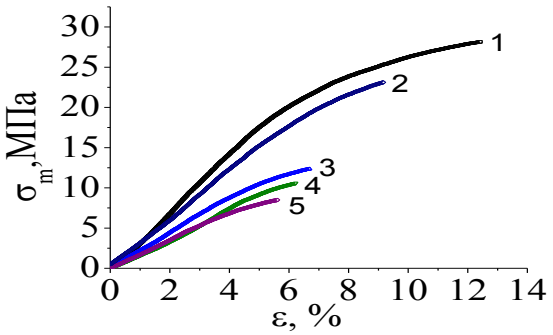


Рис. 2. Залежності напруження від відносної деформації ε при розтягуванні зразків ПКМ ФП-ТРГ (C = 10 об.% ТРГ) з різною дисперсністю частинок ТРГ h(мкм) =40…60 (1), 60…100 (2), 160…200 (3), 200…315 (4), вихідний ТРГ (5).

Таблиця 1

Залежності питомої електропровідності ПКМ ФП-ТРГ від концентрації і середнього розміру поперечного перерізу частинок наповнювача

C (ТРГ), об. %	σ, Ом$^{-1}$м$^{-1}$			
	h =(40…60)мкм	h =(60…100)мкм	h =(160…200) мкм	h =(200…315) мкм
5	$3{,}5*10^{-13}$	$4{,}1*10^{-7}$	$6{,}2*10^{-5}$	$8{,}3*10^{-3}$
10	$5{,}2*10^{-5}$	$4{,}5*10^{-1}$	10,1	91
15	3,5	18,7	36,1	$1{,}1*10^{2}$
20	40,3	67,6	$1{,}2*10^{2}$	$1{,}9*10^{2}$

З рисунку видно, що при збільшенні дисперсності частинок ТРГ границя міцності при розтягуванні композиційного матеріалу збільшується, збільшується його відносне видовження зафіксоване при розриві.

Це підтверджується залежностями границі міцності та критичної відносної деформації зразків від середнього розміру частинок ТРГ, наданими на рис. 3.

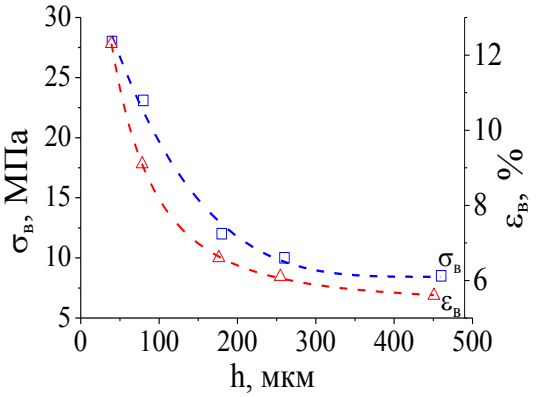


Рис. 3. Залежності границі міцності при розтягуванні та критичної деформації зразків ФП-ТРГ С(ТРГ)= 10 об.% від середнього розміру його частинок

Для зразка КМ з дисперсністю ТРГ (40…60) мкм матеріал руйнується при напруженні $\sigma_в$ = (28±0,5) МПа, в цей час його видовження становить приблизно $\varepsilon_в \approx$ 12 %. Для КМ з вихідним порошком ТРГ фіксували втричі менші значення границі міцності. Так, при критичній відносній деформації $\varepsilon_в$ = 5,57 %, його $\sigma_в$ = (8,4±0,5) МПа. Це можна пояснити тим, що частинки меншого розміру, змінюючи свою морфологію, ефективніше блокують розповсюдження дефектів при збільшенні напруження, і гальмують переорієнтацію макромолекул матриці.

Зростання концентрації ТРГ призводить до погіршення характеристик міцності ПКМ. Аналіз результатів випробувань на міцність вказаних зразків з різними концентраціями ТРГ показав, що з ростом його концентрації значення величини $\sigma_в$ композиції зменшується. Так, наприклад, зразки ПКМ з C (ТРГ) = 20 об.% і середнім розміром його частинок h = (200…315) мкм є найкрихкішими. Для них $\sigma_в$ = 9±0,5 МПа, що майже втричі менше порівняно зі значенням границі міцності ПКМ з C = 5 об.% і h(ТРГ) = (40…60) мкм. При цьому, критичні деформації розглянутих зразків становлять 5,1 і 17 %, відповідно. Для композиції з C = 15 об.% при зміні дисперсності ТРГ від 40 до 260 мкм напруження при розриві зменшується від ~15 до 10 МПа, а відносне видовження – від ~11 до 6 %. Така поведінка параметрів ПКМ пов'язана зі структурними змінами, які відбуваються в них при зміні концентрації та дисперсності наповнювача. Так, зі збільшенням вмісту ТРГ в композиції відбуваються процеси послідовного структурування матриці, зміни ступеню її кристалізації, утворення кластерних скупчень дисперсних частинок наповнювача. Зі збільшенням концентрації наповнювача його кластери стають структурно домінуючими в об'ємі КМ, а так як ФП характеризується слабкою адгезійною взаємодією з частинками ТРГ [3], то руйнування матеріалу відбувається по міжкластерним областям ТРГ і по зонах контактів структурних елементів ФП та ТРГ. Таким чином, розповсюдження тріщин в КМ відбувається і по наповнювачу, і по слабким зонам адгезійного контакту наповнювача з матрицею. Крім того, більші за розміром частинки ТРГ, завдяки своїй морфології, при збільшенні їх концентрації, проявляють кращу здатність до утворення неперервного кластеру в структурі полімерної матриці. Дрібніші, мають іншу морфологію, їх форма наближається до рівновісної, а здатність формувати неперервні ланцюжки зменшується. Таким чином, зі збільшенням C і зменшенням дисперсності ТРГ в КМ відбувається еволюція полімерних прошарків між частинками наповнювача, змінюються їх геометричні параметри, збільшується кількість безпосередніх контактів між частинками ТРГ. Сам же характер зміни поведінки $\sigma_в$ ПКМ пояснюється переходом від адгезійної міцності звязків наповнювач-матриця до домінуючої ролі міцності когезійних звязків наповнювач-наповнювач.

Особливо важливим є те, що при збільшенні дисперсності ТРГ КМ стає більш жорсткішим. Наприклад, при одній і тій же конценрації ТРГ C =5 об.% з різною його дисперсністю, пружні властивості ПКМ не лишаються сталими. Зі збільшенням середнього розміру частинок наповнювача відбувається зменшення величини ефективного модуля (E) (рис.4). В порівнянні з чистим фторопластом, для якого модуль пружності становить приблизно 1,2 ГПа [3], додавання 5 об.% ТРГ з дисперсністю частинок 40 мкм робить композиційний матеріал менш жорсткішим. Для нього величина E = 262±0,5 МПа, а додавання порошку ТРГ з

середнім розміром частинок (200…315) мкм призводить до зменшення ефективного модуля ще на ~46 МПа.

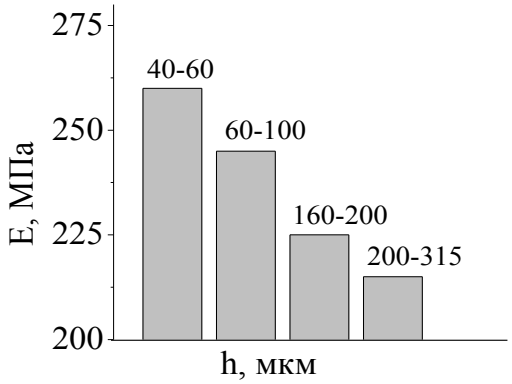


Рис. 4. Залежності ефективного модуля зразків КМ ФП – ТРГ з концентрацією ТРГ С= 5 об.% від середнього розміру частинок ТРГ.

Загальну картину впливу, як дисперсності так і об'ємного вмісту ТРГ на жорсткість ПКМ ФП-ТРГ дають відповідні залежності для ефективного модуля, представлені на рис 5.

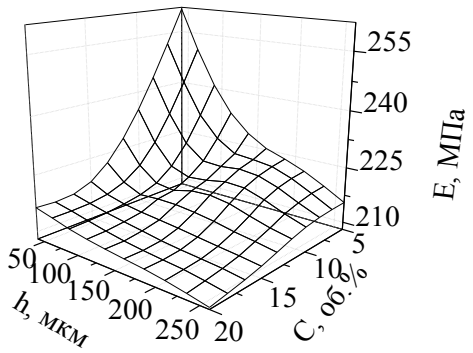


Рис. 5. Залежності ефективного модуля пружності зразків ПКМ ФП – ТРГ від концентрації ТРГ та дисперсності його частинок.

Зростання процентного вмісту наповнювача зменшує значення ефективного модуля. Так, наприклад, для композицій, розмір частинок наповнювача у яких менше 60 мкм, збільшення його концентрації з 5 до 15 об.%, супроводжується зменшенням модуля з 260 до 220 МПа. Крім того, динаміка зміни *E=f(C)* зразків зі збільшенням дисперсності частинок ТРГ збільшується. Так, для ПКМ із середнім розміром частинок ТРГ (200…315) мкм зі збільшенням його концентрації від 5 до 20 об.% величина Е зменшується лише на 7 МПа, в той час як для зразків ФП-ТРГ з *h*(ТРГ) = 40 мкм відповідна зміна становить майже 50 МПа. Аналіз отриманих результатів, дає можливість стверджувати, що зі зменшенням розмірів частинок ТРГ, зростає енергія їх внутрішньої взаємодії з фторопластовою матрицею, в результаті чого ПКМ стає більш жорстким.

Аналіз представлених у роботі даних дозволяє зробити наступні висновки:

- для нанокомпозиційних матеріалів фторопласт – термічно розширений графіт зменшення поперечного перерізу частинок ТРГ, використаних для виготовлення композиції, з 260 до 40 мкм дозволяє покращити їх фізико-механічних характеристики. Це зумовлено тим, що дрібніші частинки більш ефективно галбмують рухливість дефектів структури та перешкоджають переорієнтації макромолекул полімерної матриці при деформації;
- дисперсність та морфологія електропровідних частинок наповнювачів є визначальними факторами при формуванні з них в полімерних матрицях перколяційних кластерів. Оптимізація цих факторів дозволяє одержати електропровідну композицію без суттєвої втрати міцнісних характеристик матриці.

Список використаних джерел

1. *Socolova J.A, Shebanov S.M., Kandyrin L.B., Kalugina E.V.* Polymer nanocomposites. Structure. Properties.//Plasticheskie Massy. – 2009. - № 3. – P. 18-23. (in Russian).
2. *Hassan Mahfuz, Ashfaq Adnan, Vijaya K. Rangari, Shaik Jeelani, Bor Z. Jang.* Carbon nanoparticles/whiskers reinforced composites and their tensile respons//J.Compos. Part A-appl. Sci. Manuf.- 2004.-**35**, N5.- P.519-527. (in USA).
3. *Panshin J.A, Malkevich S.G Dunaevskaya T.S.* Fluoroplastics. - L.: Himiya, 1978. – 232 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 27.03.13

УДК 577.352

Архіпов С.О.[1] , асп.,
Булавін Л.А.[1], академік НАН України, д.ф.-м.н., проф.,
Маркес К.М.[2], проф.

Методика виготовлення гігантських везикул з поверхневим розподілом електростатичного заряду

Ця робота присвячена методам виготовлення везикул – сфероподібних утворень з подвійного фосфоліпідного шару. Його також називають мембранним шаром, оскільки він виконує функцію основи для клітинної мембрани.

В роботі розглянуто роль подвійного фосфоліпідного шару в функціонуванні живих організмів, механізм утворення везикул, різні способи штучного виготовлення везикул. Авторами роботи удосконалено та застосовано метод вирощування везикул на полімерній підкладці шляхом застосування ультразвукового збудження з метою відриву везикул від підкладки та активізації їх дифузії. В статті приділено увагу мікроскопічному аналізу виготовлених везикул.

Ключові слова: *клітинна мембрана, гігантські везикули, фосфоліпідний шар.*

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: sarkhip@gmail.com
[2] Інститут імені Шарля Садрона, Страсбург, Франція

Arkhipov S.O.[1], PhD student,
Bulavin L.A.[1], Dr. Sci., Prof,
Marques K.M.[2], Prof.

Methods of preparation of giant vesicles with the charge distribution on the surface

This work deals with methods of preparation of vesicles – spherical structures, formed with double phospholipid layer. It is named the membrane layer also, because it is the base structure for the cell membrane.

The role of phospholipid bilayer, playing in the functions of living cells, mechanisms of vesicles appearing, different methods of vesicles preparation are observed in the text. The method of vesicle growing on the polymer substrate was improved and used for the vesicle preparation. Ultrasonic exciting was applied for activation of the diffusion in the solution and removing vesicles from the substrate. Also, attention is paid to the microscopy of the prepared vesicles.

Key Words: *cell membrane, giant vesicles, pholpholipid layer.*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: sarkhip@gmail.com
[2] Charles Sadron Institute, Strasbourg, France.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А

Вступ

Актуальність дослідження будови, функцій, законів життєдіяльності живої природи насьогодні не підлягає сумнівам. Знання про такий базовий структурний елемент організму як клітина по-перше, є необхідними з фундаментальної точки зору, а, по-друге, можуть бути застосованими у таких галузях сучасного життя як медицина, біоінженерія, екологічні проблеми, тощо.

Клітина — це деяка замкнута система, що складається з органел, розміщених у клітинній рідині, цитоплазмі і відділена від оточуючого середовища спеціальною стінкою. Ця стінка носить назву клітинна мембрана та має специфічні властивості, такі як вибіркова проникність, еластичність та інше. Основою клітинної мембрани є подвійний фосфоліпідний шар. Існування такого шару є можливим завдяки амфіфільності фосфоліпідних молекул. Амфіфільність — це одночасна гідрофільність одного кінця молекули та гідрофобність іншого. Внаслідок цього у воді спостерігається активна самоорганізація фосфоліпідних молекул.

© Архіпов С.О., Булавін Л.А., Маркес К.М., 2013

Схематичне зображення молекули фосфоліпіду представлене на рис. 1.

В результаті самоорганізації фосфоліпідних

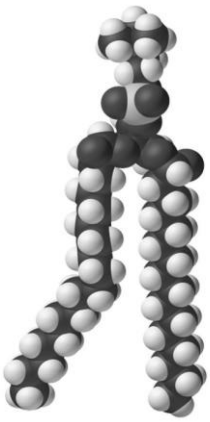


Рис. 1. Схематичне зображення молекули фосфоліпіда. Гідрофільна голова, що складається з багатоатомного спирту, залишку фосфорної кислоти (негативно заряджена) та групи атомів (може бути позитивно заряджена). Гідрофобний хвіст — вуглецеві ланцюжки, що є залишками жирних кислот.

молекул можуть утворюватися структури наступного характеру (рис. 2):

Дослідження подвійного фосфоліпідного шару, його самоорганізації та взаємодії з іншими об'єктами, в тому числі біологічного характеру, бере початок з сімдесятих років минулого століття [1, 2], причому дослідження проводяться

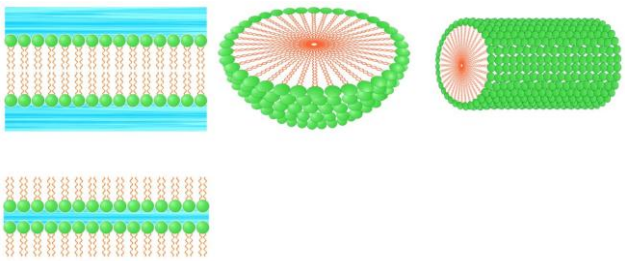


Рис. 2. Амфіфільним молекулам фосфоліпідів при взаємодії з водою властиво самоорганізовуватись у наступні структури:

а – подвійний фосфоліпідний шар

б – сферична міцела

в – циліндрична міцела

г – інвертований фосфоліпідний шар

як з електронейтральними об'єктами, так і з зарядженими [3, 4]. Значний науковий інтерес викликають везикули, оскільки це, по суті, є клітинна мембранна оболонка. Дослідження саме заряджених везикул є важливим з точки зору осмислення та розуміння протікання процесів у живих організмах, оскільки реальні клітинні мембрани, як правило, несуть на собі певний розподіл електричного заряду. Везикули – це метастабільні об'єкти з довгим періодом життя, розміром порядку 0.1-100 мкм. Умовно їх поділяють за розміром:

малі — 20-100 нм;

великі — 100-500 нм;

гігантські — більше 500 нм.

Везикули більшого розміру можуть утримувати в собі менші візикули або ліпосоми.

Методи приготування везикул

Проведення експериментальних досліджень вимагає якісних методик з приготування досліджуваних об'єктів — везикул. Для приготування нейтральних одностінних везикул (в тому числі великих та гігантських розмірів) використовують декілька основних методів. Це електроформаційний метод [5, 6], метод дегідратації-регідратації [7], метод об'єднання малих везикул, метод гідратації на полімерній підкладці в розчині цукрози. Суть електроформаційного методу полягає у впливі електричного потенціалу на формування везикул із фосфоліпідного розчину. Задля цього неорганізовані фосфоліпідні молекули поміщаються в розчин цукру (глюкози або сахарози) в робочу камеру з провідними стінками, до контактних клем котрої підключається джерело змінної напруги. Зазвичай використовують такі значення напруги: величина порядку одиниць вольт, частота зміни – порядку десяти герц. Час витримки – близько години. Задля застосування методу дегідратації-регідратації необхідно попередньо приготувати везикули малого розміру. Розчин цих везикул у воді поміщається на гідрофільну підкладку (наприклад, скло або кварц), після чого висушується та повторно гідратується чистою водою або розчином цукру у воді. Метод об'єднання малих везикул є досить зручним, оскільки не вимагає виконання жодних додаткових процедур: малі везикули схильні об'єднуватись у більші з плином часу. Однак цей

метод має такі недоліки, як необхідність значної затрати часу, порівняно малий вихід гігантських везикул та наявність великої кількості залишкових малих везикул у робочому розчині. Найчастіше використовують електроформаційний метод, оскільки він дає хороший контроль над розмірами везикул, однак, цей метод неприйнятний для приготування везикул, що несуть на собі певний електростатичний заряд через взаємодію електрично заряджених молекул фосфоліпідів з прикладеним електричним полем. Тому було використано метод вирощування везикул на підкладці у розчині цукрози. Основним недоліком цього методу є ускладнений відрив везикул від підкладки, на якій вони сформовані. Однак в ході експериментів цей недолік було усунуто шляхом застосування ультразвукового збудження.

Використані матеріали та методики досліджень

У якості підкладки використовувалась свіженанесена плівка тонкого гомогенного полімерізованого полівінілового спирту (ПВС). Базовим фосфоліпідом для виготовлення везикул було обрано DOPC (1,2-dioleoyl-sn-glycero-3-phosphocholine) виробництва Sigma-aldrich. Задля отримання розподілу електростатичного заряду по поверхні везикули було використано електропозитивний фосфоліпід DOTAP (1,2-dioleoyl-3-trimethylammonium-propane). Було

Рис. 3. Фотографія вирощувальної камери. Дном камери є лабораторне скло, стінками слугує пластична маса Vitrex.

приготовано суміш, що складається з 90% нейтрального фосфоліпіду та 10% зарядженого.

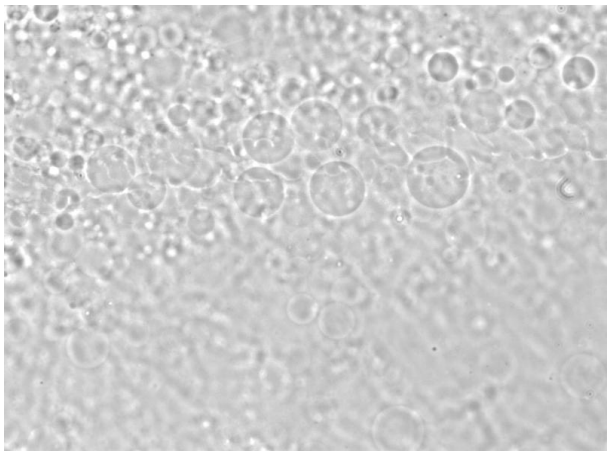


Рис. 4. Фотографія з фазово-контрасного мікроскопа, на котрій зафіксовано зображення везикул у камері вирощування. Знімок зроблено через 4-5 хвилин після заповнення камери водним розчином цукрози

Розчин суміші фосфоліпідів у хлороформі депонувався у відкриту камеру (Рис. 3) на плівку ПВС, після чого хлороформ висушувався в вакуумній камері протягом 90 хвилин. Після цього камера заповнювалась водним розчином цукрози. В камері одразу починається формування везикул.

Для аналізу зразків у вирощувальній та досліджувальній камерах використовуються фазово-контрасна мікроскопія. Ключову роль у цьому методі відіграє зсув фази світла при проходженні через досліджуванний об’єкт. На рис. 4 представлено зображення фрагменту камери для вирощування, отримане за допомогою фазово-контрасної мікроскопії через 4-5 хвилин після початку інкубації. Мікроскоп сфокусовано поблизу поверхні плівки ПВС, тобто везикули залишаються поблизу підкладки.

Як видно з рисунка, у вирощувальній камері утворюється значна кількість везикул. Для подальших досліджень везикули необхідно транспортувати до робочої камери. Транспортування здійснювалось за допомогою мікропіпетки з достатньо великим отвором (отвір піпетки приблизно на порядок перевищує розмір гігантських везикул), щоб уникнути руйнування везикул. Однак мікроскопічний аналіз транспортованої рідини показав, що кількість везикул у ній низька порівняно з кількістю везикул, що були у вирощувальній камері. Це пов’язано з тим, що більша частина

везикул залишається поблизу ПВС-підкладки і не піддається транспортуванню. Щоб активізувати відрив везикул від підкладки та збільшити їх кількість в товщі рідини було вирішено застосувати обробку ультразвуком. Камера поміщалась у скляну посудину та вміщувалось у ванну для ультразвукової обробки. В результаті процедури значно зріс відсоток везикул, котрі піддаються транспортуванню з вирощувальної до робочої камери. Фрагмент зображеня робочої камери з везикулами представлено на рис. 5.

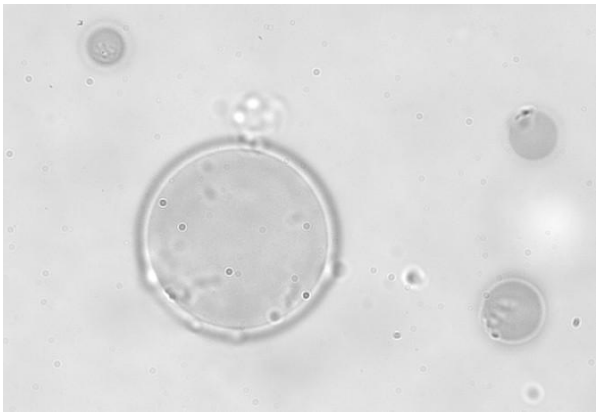


Рис. 5. Гіганстька та три великі везикули, отримані за допомогою методу вирощування на підкладці та ультразвукового збудження.

З плином часу частина з них руйнується, частина об'єднується в везикули більшого розміру. У ході експерименту було встановлено, що оптимальним є час витримки розчину перед трансфером везикул 5-7 хв, а час витримки в ультразвуковій ванні — 5-10 сек. Після приготування робочий розчин з везикулами можна зберігати за умов низьких додатних температур без відчутних втрат везикул внаслідок природного руйнування та негативного впливу бактерій. Розчин містить достатню для досліджень кількість везикул одну-дві доби після приготування. Експериментально було підтверджено, що подібний спосіб приготування везикул підходить також і для приготування електронейтральних везикул.

Висновки

В ході проведення експерименту було успішно застосовано методику приготування нейтральних та електростатично заряджених (з вмістом електростатично заряджених фосфоліпідів) везикул на підкладці з полівінілового спирту. Введення в протокол етапу ультразвукової стимуляції дифузії дозволило досягти значної концентрації везикул в робочій рідині. Отримано гігантські везикули з наперед заданими властивостями, достатньо стабільні у часі. Методика дає відтворюваний результат, тому є зручною для використання в постановці подальших експериментальних досліджень подвійного фосфоліпідного шару.

Список використаних джерел

1. Reiber H. Bilayer vesicles from a mixture of different lipids – phase-diagram and implications for myelin membrane / H. Reiber // Experemental brain research. – 1975. – Т. 23, № 5682 – С. 172.
2. *Bolotov A.A., Gashkov S.B., Frolov A.B., Chasovskich A.A.* Algorithmic backgrounds of elliptic cryptography. – Moscow: Moskow Energetic Inst., 2000. – 100 p. (in Russian).
3. *Skobelev V.V.* Automata over varieties with an algebra // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky\"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 2. – P. 234-238. (in Ukrainian).
4. *Cox D., Little J., O'Shea D.* Ideals, varieties, and algorithms. An Introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. – Moscow: Mir, 2000. – 687 p. (in Russian).
5. *Kurosh A.G.* Lectures in general algebra. – Moscow: Nauka, 1973. – 400 p. (in Russian).
6. *Cohn P.M.* Universal algebra. – Moscow: Mir, 1968. – 352 p. (in Russian).
7. *Chen P.P.* Entity-relationship modeling: historical events, future trends, and lessons learned / P.P. Chen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, November 27-30, 2001, Yokohama, Japan: proceedings. – 2001. – P. 71-77..

Надійшла до редколегії 04.04.2013

УДК 530.145

Барабаш О.В. [1], к.ф.-м.н., асистент.

Динаміка народження частинок з вакууму в однорідних нестаціонарних просторах

В роботі [1] запропоновано метод знаходження числа частинок, що народжуються з вакууму на момент часу τ при нестаціонарному розширенні всесвіт. В даній роботі цей метод проілюстровано на прикладі розширення за законом $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Ключові слова: вакуум, тензор енергії імпульсу, метод діагоналізації.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: obar@univ.kiev.ua

O. V. Barabash[1], PhD

Dynamics of creation of particles from the vacuum in homogeneous nonstationary spaces.

In paper [1] was proposed method for deriving an expression for the number of particles created from the vacuum at time τ with unsteady expansion of the Universe. In this paper this method was illustrated on the expansion governed by the law $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Key Words: vacuum, energy-momentum tensor, diagonalization method.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: obar@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ

В роботі [1] було знайдено вираз для спектрального числа частинок $N_k(t)$, що народжуються з вакууму на момент часу t при нестаціонарному розширенні всесвіту

$$N_k(t) = \frac{\pi}{\omega_0} |\, \omega_0 u_k - i\dot{u}_k \,|^2 . \qquad (1)$$

В даній роботі ми дослідимо як саме відбувається народження частинок на прикладі розширення за законом $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Рівняння на функцію $u_k(t)$ має вигляд

$$\ddot{u}_k(t) = (\omega_1^2 + m^2 a_2^2 e^{2\lambda t}) u(t) = 0,$$

де $\omega_1 = \sqrt{k^2 + m^2 a_1^2}$. Розв'язок цього рівняння з правильною асимптотикою при $t \to -\infty$ має вигляд:

$$u(t) = C J_{-i\nu}(z),$$

де $z = \frac{m a_2}{\lambda} e^{\lambda t}$, $\nu = \frac{\omega_1}{\lambda}$, C – стала нормування, яка знаходиться з умови

$$u_k(t) \to \frac{e^{-i\omega_1 t}}{\sqrt{4\pi\omega_1}}, \qquad t \to -\infty.$$

Це дає

$$C = \frac{\Gamma(1 - i\nu)}{\sqrt{4\pi\omega_1}} \left(\frac{m a_2}{2\lambda} \right)^{i\nu} = \frac{C_1}{\sqrt{4\pi\omega_1}},$$

де $|\, C_1 \,|^2 = \frac{\pi\nu}{sh\pi\nu}$.

Обчислимо тепер коефіцієнти $|\, \beta_k \,|^2$. Згідно (1), знаходимо:

$$|\, \beta_k \,|^2 = |\, C_1 \,|^2 \, \frac{\omega_0}{4\omega_1} \left| J_{-i\nu} - i \frac{\lambda z}{\omega_0} J'_{-i\nu} \right|^2 =$$

$$= \frac{|\, C_1 \,|^2}{4\nu^2 \omega_0 \omega_1} \left| \nu J_{-i\nu}(\omega_0 - \omega_1) + iz\omega_1 J_{-i\nu} \right|^2 =$$

$$= \frac{|\, C_1 \,|^2}{4\nu^2 \omega_0 \omega_1} (\nu^2 (\omega_0 - \omega_1)^2 \,|\, J_{i\nu} \,|^2 + i\nu z \omega_1 (\omega_0 - \omega_1)$$
$$(J_{i\nu} J_{1-i\nu} - J_{1+i\nu} J_{-i\nu}) + z^2 \omega_1 \,|\, J_{1+i\nu} \,|^2 . \qquad (2)$$

Тут $\omega_0 = \sqrt{k^2 + m^2 a^2(t)}$. Для спрощення цього виразу врахуємо рівняння на вронскіан

© О.В. Барабаш, 2013

$$z(J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu) = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu .$$

Використовуючи відоме співвідношення

$$zJ'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - zJ_{\nu+1}(z)$$

та здійснюючи заміну $\nu \to i\nu$ попередній вираз зводиться до вигляду

$$iz(J_{i\nu}J_{1-i\nu} - J_{1+i\nu}J_{-i\nu}) = 2\nu\left(|\, J_{1+i\nu}\,|^2 - \frac{sh\pi\nu}{\pi\nu}\right).$$

Після підстановки цього виразу і спрощення (2) приймає вигляд

$$|\,\beta_k\,|^2 = \frac{|\,C_1\,|^2}{4\omega_0\omega_1}(\omega_0-\omega_1)((\omega_0+\omega_1)(|\,J_{i\nu}\,|^2 +$$

$$+|\,J_{1+i\nu}\,|^2) - 2\omega_1\frac{sh\pi\nu}{\pi\nu}). \qquad (3)$$

Для знаходження $|\,J_{1+i\nu}\,|^2$ та $|\,J_{i\nu}\,|^2$ скористаємося формулою

$$J_\nu(z)J_\mu(z) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{\mu+\nu+2m}\Gamma(\mu+\nu+2m+1)}{m!\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(\mu+\nu+m+1)}$$

Маємо:

$$|\,J_{i\nu}(z)\,|^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}(2m)!}{(m!)^2\,|\,\Gamma(m+1+i\nu)\,|^2} =$$

$$= \frac{sh\pi\nu}{\pi\nu} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+2}(2m+2)!}{((m+1)!)^2\,|\,\Gamma(m+2+i\nu)\,|^2}\,.$$

Остаточно, отримуємо

$$|\,\beta_k\,|^2 = \frac{\omega_0-\omega_1}{4\omega_0\omega_1}((\omega_0-\omega_1) - (\omega_0+\omega_1)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+2}(2m+2)!}{(m+1)!(m+2)!\prod_{n=1}^{m+1}(n^2+\nu^2)}). \qquad (4)$$

Дослідимо отриманий вираз. Величина λ, яка входить в $a(t)$, грає роль адіабатичного параметра: при $\lambda \to 0$, $a(t) \to const$. Тому, представляє інтерес розклад $|\,\beta_k\,|^2$ в ряд по λ

$$|\,\beta_k\,|^2 = N_k^{(0)} + N_k^{(2)} + N_k^{(4)} + \ldots \qquad (5)$$

де $N_k^{(n)} \propto \lambda^n$. Для перших трьох членів розкладу отримуємо наступні значення

$$N_k^{(0)} = \frac{\omega_0-\omega_1}{4\omega_0\omega_1}((\omega_0-\omega_1)+(\omega_0+\omega_1)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^m(2m)!}{4^m\,m!(m+1)!}) = 0\,.$$

$$N_k^{(2)} = \lambda^2\,\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{24\omega_0\omega_1^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{m+2}(2m+3)!}{m!(m+1)!} =$$

$$= \lambda^2\,\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2}{16\omega_0^6}\,.$$

$$N_k^{(4)} = -\frac{\lambda^4x^2(1+x^2)^{3/2}}{1440\omega_0^4}\times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{2m+2}(2m+3)!}{m!(m+1)!}(10m^3+63m^2+119m$$

$$+60) = \lambda^4\,\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2}{256\omega_0^{12}}(98\omega_0^2\omega_1^2 - 9\omega_0^4 - 105\omega_1^4) \qquad (6)$$

Тут $x^2 = \frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1^2}$. Асимптотичний розклад (5) справедливий при сталому t та $\lambda \to 0$. Як видно, кожний член розкладу прямує до нуля при $t \to \infty$ (тобто $\omega_0 \to \infty$). Проте, це ще не означає, що повна кількість народжених частинок $N_k(t)$ обертається в нуль при $t \to \infty$, а свідчить лише про те, що ця величина є експоненційно малою по параметру λ (і тому відповідні доданки відсутні в розкладі (5)).

Асимптотику $|\,\beta_k\,|^2$ при $t \to \infty$ можна знайти, підставляючи в (1) вираз

$$J_{-i\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\pi/4+i\pi\nu/2), \quad z\to\infty .$$

Після обрахунків, отримуємо

$$N_k(\infty) = \frac{e^{-\pi\nu}}{2sh\pi\nu} = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\lambda}-1}. \qquad (7)$$

Як і передбачалось, кінцева кількість частинок $N_k(\infty)$ відмінна від нуля і є експоненційно малою за адіабатичним параметром λ.

Графік залежності $N_k(t)$ показаний на Рис.1. Як видно, число народжених частинок спочатку зростає, досягаючи максимуму при $\omega_0(t) \approx \sqrt{3}\omega_1$, а потім спадає до величини $N_k(\infty)$. Така поведінка може показатися дивною. Ситуація проясняється, якщо дослідити

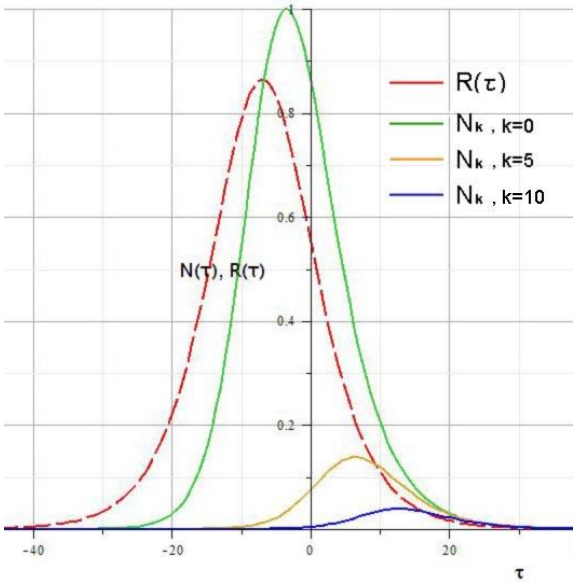


Рис. 1. Графіки залежності $N_k(t)$ та кривизни $R(t)$. Характерний час зміни метрики $1/\lambda = 10$ одиниць.

поведінку метрики простору-часу при $t \to \infty$.

Асимптотично при $t \to \infty$ масштабний фактор $a(t)$ прямує до вигляду $a_2 e^{\lambda t}$. Метрика з таким масштабним фактором є метрикою простору Мінковського, записаною в нестаціонарних координатах. В цьому легко переконатися, обчисливши тензор кривизни $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$. Всі ненульові компоненти цього тензора пропорційні $\frac{1}{a^2}\frac{d}{dt}\frac{\dot{a}}{a}$ і обертаються в нуль при $a(t) \to e^{\lambda t}$.

На якісному рівні ефект народження частинок зазвичай пояснюють як розрив вакуумних петель зовнішнім гравітаційним полем. Для того, щоб віртуальна пара, яка народжується на відстані $l \sim \lambda_c = m^{-1}$ стала реальною зовнішнє поле повинно за характерний час життя пари $t \sim \hbar / m$ виконати над нею роботу $E > 2m$. На відміну від електромагнітного поля, гравітаційне поле однаково впливає як на частинку, так і на античастинку. Тому просторове розділення частинок відбувається за рахунок приливних сил, які описуються рівнянням геодезичної девіації

$$\frac{D^2\xi^\mu}{ds^2} = R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} u^\nu u^\lambda \xi^\sigma$$

де ξ^σ – вектор відносного положення частинок, $u^\mu = D\xi^\mu / ds$. Умова народження пари приводить до нерівності [3]

$$| R^\mu{}_{00\nu} | \geq m^2. \qquad (8)$$

Таким чином, народження пар відбувається лише в областях з достатньо великою кривизною. Коли простір-час стає плоским умова (8) порушується і народження припиняється. В той же час, оскільки частинки, що розглядаються, є істинно нейтральними, ніщо не заважає їм анігілювати. Анігіляція може проходити не повністю. Аналогічна ситуація реалізується, наприклад, для закону розширення $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 th\lambda t$, коли присутня як in-, так і out-область [2]. Зокрема, при $\omega_{out} >> \omega_{in}$ та $\omega_{out} >> \lambda$ вираз для $N_k(\infty)$ в цій моделі співпадає з (7).

Формулу (7) можна отримати і іншим чином. У випадку, що розглядається, хорошим вибором для out-мод є адіабатичний вакуум. Для нього

$$u_{out}(t) \sim H^{(2)}_{i\nu}(z) \to \frac{e^{-i\int \omega dt}}{\sqrt{4\pi\omega}}.$$

Число народжених частинок за весь час розширення знаходимо з коефіцієнтів Боголюбова шляхом розкладу in-мод по out-модам:

$$NJ_{-i\nu} = \alpha_k H^{(2)}_{i\nu} + \beta_k (H^{(2)}_{i\nu})^* =$$

$$= J_{-i\nu}(\alpha_k e^{-\pi\nu} + \beta_k) - N_{-i\nu}(\alpha_k e^{-\pi\nu} - \beta_k).$$

Останній доданок має бути рівним нулю, що дає $\alpha_k = e^{\pi\nu}\beta_k$. Враховуючи властивість коефіцієнтів Боголюбова:

$$| \alpha_k |^2 - | \beta_k |^2 = 1$$

отримуємо вираз (7):

$$N_k(\infty) = |\beta_k|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\nu} - 1}.$$

З Рис.1 видно, що максимуми кривих $N_k(t)$ не співпадають, а зміщуються в бік зростання часу при зростанні k (а значить і енергії частинок). Ясно, що при достатньо великих k умова (8) буде порушена. Проте, оскільки послідовної мікроскопічної теорії народження частинок не існує, результат (8) є лише якісним і не претендує на повноту опису. Зокрема, якщо замість кривизни R (як чинника, що сприяє народженню частинок) взяти безрозмірну величину $\tilde{R}(t,k) \propto a^2 R/\omega_k^3$, то максимуми кривих $N_k(t)$ будуть співпадати з максимумом $\tilde{R}(t,k)$ при всіх значеннях k.

ВКБ-наближення

Для розширення за законом $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$ гарним наближенням виявляється ВКБ-наближення, яке є точним в будь-якому порядку по адіабатичному параметру λ.

Рівняння на польову функцію $u_k(t)$ має формальний ВКБ-розв'язок

$$u_k(t) = \frac{N}{\sqrt{W_k}} \exp\left(-i\int W(\tau)d\tau\right), \qquad (9)$$

де функція $W(t)$ визначається з нелінійного рівняння:

$$W^2(t) = \omega_k^2(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{W}}{W} - \frac{3}{2}\frac{\dot{W}^2}{W^2}\right). \qquad (10)$$

N – стала нормування. Рівняння (10) можна розв'язувати методом послідовних наближень:

$$W(t) = W^{(0)}(t) + W^{(2)}(t) + W^{(4)}(t) + \ldots$$

де

$$W^{(0)}(t) = \omega_k(t),$$

$$W^{(2)}(t) = -\frac{1}{4\omega}\left(\frac{\ddot{\omega}}{\omega} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^2}\right),$$

і т.д., а позначення $W^{(n)}$ означає доданок порядку λ^n.

Зшивка ВКБ розв'язку (9) з плоскими хвилями $u_k(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{4\pi\omega}}$, дає:

$$|\beta_k|^2 = \frac{\omega_0}{4W}\left[\left(1 - \frac{W}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{4\omega_0^2}\frac{\dot{W}^2}{W^2}\right]. \qquad (11)$$

З точністю до величин четвертого порядку малості (11) має вигляд ($\omega \equiv \omega_0$)

$$|\beta_k|^2 = \frac{1}{64\omega^4}\left(4\dot{\omega}^2 + 10\frac{\ddot{\omega}\dot{\omega}^2}{\omega^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{45}{4}\frac{\dot{\omega}^4}{\omega^4} + \frac{\ddot{\omega}^2}{\omega^2} - 2\frac{\dddot{\omega}\dot{\omega}}{\omega^2}\right),$$

Підставляючи сюди явне значення $\omega_0(t)$ отримуємо розклад (5) з $N_k^{(n)}$, що співпадають з (6).

Висновки

Метод діагоналізації гамільтоніану має добре відомі складності з фізичним обгрунтуванням тих методів і понять, за допомогою яких отримується вираз для числа частинок, народжених на момент t. В той же час, метод зшивки, який базується на використанні ТЕІ квантованого поля, є фізично прозорим і координатно незалежним. Отримані за допомогою цього методу результати для різних законів зміни $a(t)$ мають якісно зрозумілу поведінку, що проілюстровано в роботі на прикладі розширення за законами $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Список використаних джерел

1. *Barabash O.V.* Dynamics of creation of particles from the vacuum in homogeneous nonstationary spaces // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky\"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – N 1. – P. 234-238. (in Ukrainian).
2. *Birrel N.D., Davies P.C.* Quantum field in curved spsce. – Cambridge university press, 1982. – 356 p.
3. *Grib A.A., Mamaev S.G., Mostepanenko V.M.* Quantum effects in strong external fields. – Moscow: Mir, 1980. – 296 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.04.13

УДК 534.6

Британ А.В[1]., к. ф.м., інж.,
Коробко О.В[1]., асп.*
Вербінська Г.М[1]., к. ф.м. н., доц.,.
Гаврюшенко Д.А[1]., д. ф.м. н., проф.,
Голініченко Б.О[1]., студ.

Випаровування н-бутанолу в широкому інтервалі тисків

Здійснено виміри значень швидкості випаровування крапель спирту н-бутанолу в газовій суміші за тисків 30, 50, 100, 200, 400, 760 мм рт. ст. Побудовано залежності швидкості випаровування та температури краплин від оберненого тиску. Одержана залежність швидкості випаровування проаналізована за допомогою формули Максвела з поправками. Розраховано значення коефіцієнта випаровування даної рідини.

Ключові слова: випаровування, н-бутанол, поправка на вільну конвекцію

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, пр. Глушкова 4-б, *e-mail: oksana2208@i.ua

A.V. Brytan[1], PhD,
O.V. Korobko[1], PhD stud.*
G.M. Verbinska[1], PhD,
D.A. Gavryushenko[1], PhD, Prof,
B.O. Golinichenko[1], stud.

Butanol's evaporation for wide pressure interval

The evaporation rate of n-butanol alcohols' droplets was measured for the pressure values of 30, 50, 100, 200, 400, 760 mm Hg in a gas mixture. The dependences of drops' evaporation rate and temperature were obtained from reverse pressure. The experimental results were analyzed using Maxwell's formula, with corresponding corrections. Based on the obtained experimental data the values of the evaporation coefficient for test liquid was calculated.

Key Words: evaporation, n-butanol, the correction on the free convection

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Glushkova st., 4-b,

*e-mail: oksana2208@i.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Дослідження характеристик спиртів є актуальним завданням сьогодення, адже області використання спиртів різноманітні, тому в роботі проведено дослідження по випаровуванню н-бутанолу як представника класу спиртів [1]. Варто відмітити, що н-бутанол використовується як розчинник фарб, лаків, натуральних та синтетичних смол, каучуків, рослинних масел та фарб. Він відіграє роль проміжної ланки в виробництві фармацевтичних препаратів. Використовується в галузях промисловості по виробництву шкіри, текстилю, парфумів, плащів, плівок для фотографування. Н-бутанол є складовою гальмівних рідин, промислових миючих засобів, фруктових ефірних масел, речовин для видалення фарби, фарбників.

Метою даної роботи є дослідження швидкості випаровування крапель спирту н-бутанолу, в діапазоні тисків 760-30 мм.рт. ст. в атмосфері азоту для значення температури газової суміші 20 C^0, проведення порівняння виразів для поправки на вільну конвекцію, одержаних різними авторами та розрахунок значення коефіцієнту випаровування досліджуваної рідини.

Теоретичні моделі процесу випаровування.

Перша модель для опису випаровування краплин рідинних систем була запропонована Максвелом [2]. Ним було отримано залежність, що пов'язує масову швидкість випаровування краплин рідини та значення коефіцієнта дифузії досліджуваної речовини. Формула Максвела може бути представлена у вигляді:

$$-\frac{dS}{dt}=\frac{8\pi D\left(C_0-C_\infty\right)}{\rho} \qquad (1)$$

де D – коефіцієнт дифузії пари в газовому середовищі для заданих значень температури і тиску, C_0 – концентрація насиченої пари, що

© А.В Британ., О.В. Коробко, Г.М Вербінська, Д.А Гаврюшенко, Б.О. Голініченко 2013

відповідає температурі поверхні краплі T_0, C_∞ – концентрація пари на нескінченній відстані від краплі, ρ – густина рідини, $\frac{dS}{dt}$ – швидкість зміни площі краплі з часом.

Одержана Максвелом формула (1) не може в повній мірі описати процеси випаровування в реальних умовах. Тому виникає необхідність врахування поправок до формули Максвела.

Процес випаровування краплини в природному режимі призводить до її охолодження. Температура краплини знижується до моменту встановлення квазістаціонарного режиму випаровування [2]. Існування градієнту температури навколо краплини змушує взяти до уваги залежність коефіцієнта дифузії від температури для великих значень $(T_\infty - T_0)$, де T_∞ – температура фонового газу на великій відстані від краплини. Коефіцієнт дифузії в (1) вданому випадку має розраховуватися за формулою $D = \sqrt{D_0 D_\infty}$.

Існування градієнту температур навколо краплини, що випаровується в гравітаційному полі, призводить до виникнення гідродинамічного потоку від поверхні краплини, який прискорює її випаровування. Дане явище отримало назву вільної конвекції [3]. Аналітичне врахування цього ефекту є складним, в зв'язку з цим для опису даного ефекту використовується теорія подібності. Фізичні властивості середовища, де відбувається дифузія характеризують за допомогою критерія Шмідта: $\mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D}$, де ν - кінетична в'язкість, а D- коефіцієнт дифузії, та критерія Грасгофа $\mathrm{Gr} = \frac{8gr^3}{\nu^2}\frac{\Delta T}{T}$ - де g - прискорення вільного падіння, та ΔT - різниця температур, що викликає процес конвекції. Фреслінгом [2] було запропоновано вираз для поправки на вільну конвекцію для випадку тепловіддачі металевої кулі, однак вираз використовується для аналізу експериментальних даних з випаровування (2):

$$\mathrm{Sh} = 2 + 0.6\mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}}\mathrm{Gr}^{\frac{1}{4}} \qquad (2)$$

Пізніше Черчілем [4] було запропоновано модифікований вираз для опису вільної конвекції (3):

$$\mathrm{Sh} = 2 + \frac{0.59(\mathrm{Sc}*\mathrm{Gr})^{1/4}}{\left(1+\left(\frac{0.47}{\mathrm{Sc}}\right)^{9/16}\right)^{4/9}} \qquad (3)$$

Для тисків, значно менших за атмосферний (p<100 мм рт ст), виникає відхилення від рівняння Максвела, обумовлене існуванням макроскопічного стрибку концентрації, який зростає при інтенсивному випаровуванні крапель. Фукс отримав вираз для поправки до формули Максвела на стрибок концентрації (поправка Фукса) [2, 5]. Отримана поправка має вигляд

$$I_m = \frac{I_0}{\frac{D}{ru\alpha}+1} \qquad (4)$$

де I_0 – швидкість випаровування за формулою Максвела., r – радіус краплі, $u = v/4$ - четверта частина середньої теплової швидкості молекул пари, $v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

Іншим ефектом, суттєвим за малих тисків є стефанівський поток: поблизу поверхні краплі, що випаровується, повинен існувати гідродинамічний потік фонового газу, направлений від поверхні. Цю поправку можна записати у вигляді:

$$\mathrm{St} = \left(1 + \frac{P_0 + P_\infty}{2P}\right) \qquad (5)$$

де P – повний тиск середовища, P_0 – тиск пари на поверхні краплі,що випаровується, P_∞ – тиск пари на нескінченності.

Урахування даних поправок дозволяє записати узагальнену формулу Максвела для випаровування:

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{8\pi D(C_0 - C_\infty)}{\rho\left(1+\frac{D}{ru\alpha}\right)}\left(1+\frac{P_0+P_\infty}{2P}\right)\mathrm{Sh} \qquad (6)$$

Використання виразу, отриманого Фуксом, при аналізі експериментальних даних дає можливість розрахунку коефіцієнта випаровування рідини.

Аналіз отриманих експериментальних результатів. Порівняння з теоретичними моделями.

Дослідження проводились за допомогою експериментальної установки, схему якої та

методику виконання експерименту детально представлено в роботі [6]. Було проведено дослідження випаровування н-бутанолу в діапазоні тисків 30-760 мм рт. ст., за значень температури фонового газу 293 К, з початковим діаметром краплини $d_0 \approx 2,4$ мм. На основі проведених вимірів було побудовано залежності зміни площі краплини з часом та її температури на рис. 1, 2. відповідно.

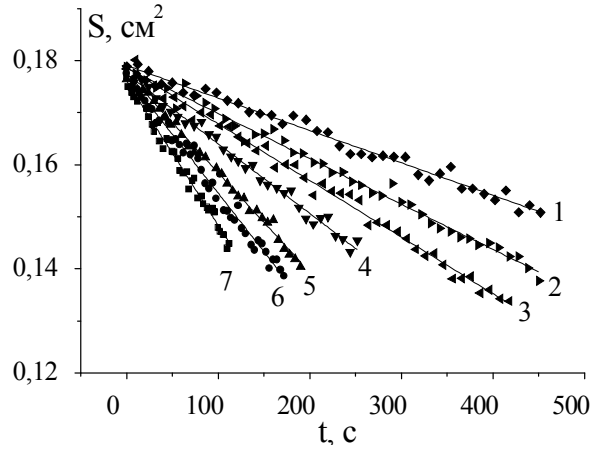


Рис. 1. Залежності площі поверхні краплини, що випаровується від часу для різних значень тиску в газовій суміші: 1-760, 2-400, 3-300, 4-200, 5-100, 6-50, 7-30 мм рт ст.

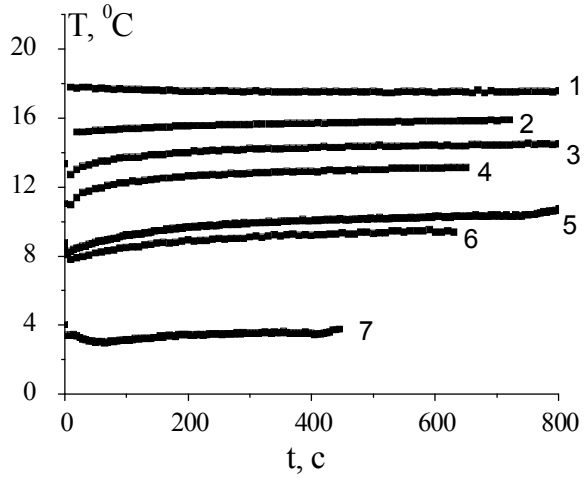


Рис. 2. Залежності температури краплини, що випаровується від часу для різних значень тиску в газовій суміші: 1-760, 2-400, 3-300, 4-200, 5-100, 6-50, 7-30 мм рт ст.

З рис. 2 можна зробити висновок, що для випадку н-бутанолу встановлення квазістаціонарного режиму випаровування, для якого характерна слабка зміна температури краплини протягом випаровування, відбувається впродовж перших 100 секунд випаровування.

В таблиці 1 наводиться порівняння розрахованих за використанням формули Максвела без урахування поправки на вільну конвекцію (2), з урахуванням даної поправки за використанням формули Фреслінга (3) та формули Черчілля (4) значень швидкості випаровування з експериментальними даними (1).

Таблиця 1

Значення швидкості випаровування н-бутанолу для різних значень тиску в суміші: одержані експериментально та розраховані за використанням різних модифікацій формули Максвела

	Значення швидкості випаровування н-бутанолу $dS/dt * 10^5, см^2/c$,			
P, мм рт ст	1	2	3	4
760	6,20	4,33	6,75	6,23
400	8,35	6,61	8,91	8,41
300	10,95	8,02	11,16	10,5
200	13,41	10,18	13,62	12,90
100	18,64	16,07	20,04	19,2
50	25,27	22,23	25,82	24,9
30	31,18	24,57	27,45	26,63

З представлених в таблиці результатів можна зробити висновок, що для випадку випаровування н-бутанолу неврахування вільної конвекції призводить до занижених порівняно з експериментом результатів. Використання поправки Фреслінга дає більш гарне узгодження з експериментом. Однак розраховані за її допомогою значення швидкості випаровування є дещо завищеними. Використання формули Черчілля дає найкраще узгодження теорії з експериментом. Поправка на вільну конвекцію у формі Черчілля була використана в модифікованій формулі Максвела (6) при розрахунку коефіцієнта випаровування н-бутанола (рис. 3) Було одержано значення коефіцієнта випаровування $\alpha = 0,004$.

Поправка Черчілля була використана для розрахунку різниці температур між краплиною та фоновим газом за використання рівнянь теплового балансу. Одержані дані представлені в таблиці 2.

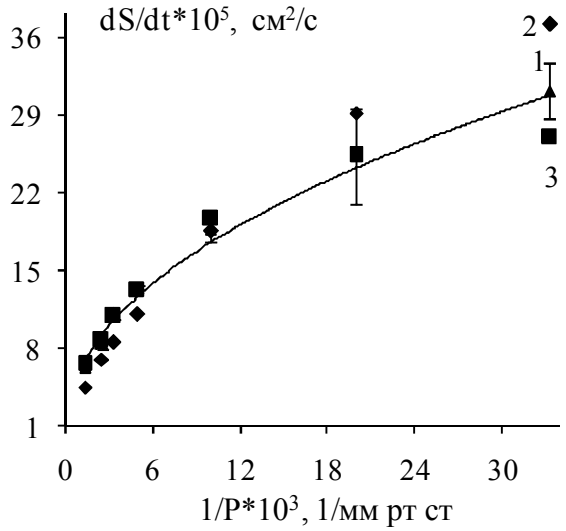


Рис. 3. Залежність швидкості випаровування від оберненого тиску: 1 – одержана експериментально; 2 – розрахована за формулою Максвела, 3 – за формулою

Таблиця 2

Рівноважні значення температури краплини: експериментальні – T_e, та розраховані – T_p.

P, мм рт ст	760	400	300	200	100
T_e, ^{0}C	17,5	15,2	14	12,1	9,9
$T_д$, ^{0}C	17,5	15,6	14,1	11,3	2,3

Як видно з таблиці 2, за тисків, близьких до атмосферного, спостерігається співпадіння експериментальних значень температури краплини з теоретично розрахованими. Це дозволяє зробити висновок про те, що потік тепла до краплини, що випаровується, існує через навколишнє газове середовище, а потоком через ніжки підвісу можна знехтувати.

Значне розходження між експериментальним та теоретично розрахованим значеннями температури при значенні тиску 100 мм рт ст. зумовлено виникненням стрибка концентрації та, відповідно, стрибка градієнта температури, врахування якого потребує більш детального розгляду.

Результати та висновки

Досліджено процес випаровування спирту н-бутанолу в атмосфері азоту в діапазоні тисків 760-30 мм рт ст. при температурі фонового газу 293 K.

Показано, необхідність врахування вільної конвекції для опису процесу випаровування.

Проаналізовано вирази різних авторів для опису цього ефекту. Показано, що вираз запропонований Черчілем більш якісно враховує даний ефект. За використанням модифікованої формули Масвела обраховано коефіцієнт випаровування н-бутанола.

З використанням рівнянь теплового балансу розраховано квазірівноважні температури краплини під час її випаровування для різних значень тиску в газовій суміші. Проведено їх порівняння з даними експерименту. Показано, що тепловий потік до краплини відбувається за рахунок теплообміну через газове середовище. Потоком тепла через підвіс на якому знаходиться краплина можна знехтувати.

Список використаних джерел

1. [online resource] access mode: http://spektrresurssp.ru/rastvor/butanol.html.5.04.2013
2. *N.A. Fuks,* Evaporation and Growth of Droplets in a Gaseous Medium / Fuks N.A. – M.:USSR Acad.Sci.Publ. House, Moscow, 1954. (in Russian)
3. *Bird R.B.* Transport Phenomena / R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot – John Wiley & Sons, New York, 2001.
4. Churchill S.W. Free Convection around Immersed Bodies / S.W. Churchill // Heat Exchanger Design Handbook – Hemisphere Publishing, New York, 1983.
5. *Bulavin L.A.* Kinetics of Liquid Droplet Evaporation in a Vapor-Gas Medium / L.A. Bulavin, G.M. Verbinska , V.M. Nuzhnyi. – Kyiv: Univ., Kyiv, 2003. (in Ukrainian)
6. Water and nitrobenzene droplets evaporation under ultraviolet irradiation / G.M.Verbinska, A.V. Brytan, V.L. Karbovskiy, T.V. Cleshchonok // Physics of aerodisperse systems. – 2010. – N 47.– P.49-58. (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 03.04.2013

УДК □3□□3□1

Власенко Т.С[1], аспірант□
Сисоєв В.М.[1] □д.ф.м.н.,проф.□
Гаврюшенко Д.А.[1], д.ф.м.н.,проф..

Зміна структурних характеристик рідинної системи під дією опромінення.

Проведено теоретичне дослідження можливості використання рівноважної термодинаміки для опису стаціонарних нерівноважних станів систем. Розглядається вплив радіаційного опромінення на особливості структурних характеристик рідинних систем. Показано, що можна використовувати формалізм рівноважної термодинаміки для опису нерівноважних систем шляхом введення ефективної температури.

Ключові слова: *радіаційне опромінення , конденсоване середовище, парна функція розподілу, інтегро-диференціальні рівняння Боголюбова.*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр□т. Глушкова 4д, □□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□ □r□□□□

□□□□ □□□□□□□[1] □□□□ □□□d□□□□
□□M□□□□□□□[1] □□r□□□□□□r□□□□
□□□ □□ □□r□□□□□□□[1] □□r□□□□□□r□□□□

Changes in the liquids structural characterictcs under the irradiation

A theoretical study of the possibility of using equilibrium thermodynamics to describe the stationary equilibrium states of systems was conducted. The influence of radiation on the feature of the structural characteristics of liquid systems is studied. It is shown that one can use the formalism of equilibrium thermodynamics to describe nonequilibrium systems by introducing an effective temperature.

□□□ □ □rd□□*radiation emission, condensed matter, the pair distribution function, Bogoliubov integro-differential equation.*

[1]□□r□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□r□□□□ □□ □□□□□□
□3 □□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□ □□□□4d□
□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□ □r□□□□

Статтю представив академік НАН України, д.ф.□м.н., проф. Булавін Л.А.

У рамках термодинаміки нерівноважних процесів опис релаксаційних явищ після радіаційного опромінення тісно пов’язано з розглядом хімічних реакцій, а також реакцій збудження молекул після радіаційного опромінення. В системі під опроміненням будуть постійно відбуватися процеси радіолізу та зворотні до нього. При цьому, навіть в такій однорідній багатокомпонентній системі, в якій може проходити тільки одна хімічна реакція, відбувається виробництво ентропії. Ситуація певним чином спрощується за умов постійного опромінення. В цьому випадку, система під дією зовнішніх чинників переходить до стаціонарного нерівноважного стану, що характеризується мінімальним виробництвом ентропії. Дійсно, нехай у нас є однорідна система, стан якої характеризується системою □ зовнішніх параметрів та □ внутрішніх параметрів. Останні описують внутрішню структуру системи або є деякою «внутрішньою температурою», що характеризує розподіл енергії за внутрішніми станами системи. За таких умов виникає питання можливості використання рівноважної термодинаміки для опису стаціонарних нерівноважних станів систем шляхом введення певних «ефективних» параметрів, що дозволять зв’язати нерівноважну систему з модельною рівноважною системою.

Теоретична частина

Радіаційне опромінення рідинних систем призводить до помітної зміни їх рівноважних термодинамічних властивостей, що пов′язані з їх структурними властивостями. При радіаційному опроміненні в рідинах порушується термодинамічна рівновага, тому рівноважні та нерівноважні властивості рідини залежать від характерів релаксаційних процесів, які його супроводжують. Проте□ питання детального аналізу релаксаційних процесів та визначення їх внеску в динамічні значення термодинамічних параметрів залишається відкритим.

Як відомо □1□□ радіаційне опромінення порушує розподіл Максвелла молекул за швидкостями, який в ізольованій системі відповідає максимуму ентропії. Це, в свою чергу□

□ T□C□Власенко, В.М. Сисоєв, Д.А. Гаврюшенко, 2□13

призводить до зменшення ентропії системи, що відповідає появі в системі інформації. Але так як через певний проміжок часу в результаті процесів структурної релаксації система приходить до стаціонарного стану, то в системі виникає внутрішнє виробництво ентропії, яке дорівнює зменшенню ентропії внаслідок процесів опромінення [2,3,4].

Перехід системи із рівноважного до нерівноважного стану під впливом радіаційного опромінювання є нестаціонарним станом, бо під час перехідного стану, який є суттєво нерівноважним, термодинамічні параметри системи сильно змінюються і залежать від часу. Тому, аби мати право використовувати термін стаціонарний стан, треба розглядати початковий і кінцевий стани, без проміжного.

В загальному випадку, структурні характеристики рідинних систем в стаціонарному стані вичерпно описуються парною функцією розподілу $F_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$, яка не залежить від часу, де $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ – радіус-вектори положень центрів структурних молекул. Знання цієї функції дозволяє описувати не лише структурні властивості рідин (число найближчих сусідів, середню відстань між атомами, молекулами, іонами, характерний радіус кореляції та ін.), а також їх теплофізичні властивості. Існує чимало методів визначення парної функції розподілу: експериментальні, теоретичні та методи комп'ютерного моделювання. Переважна більшість відомих методів дозволяє визначити цю функцію в рівноважному стані.

Постає питання, чи змінюється під час радіаційного опромінювання основна структурна характеристика рідинної системи – парна функція розподілу, яка є функцією лише просторових координат, а не швидкостей. Строгий статистичний опис термодинамічного стану рідини можна провести на основі рівняння Ліувілля. Однак, як відомо, рівняння Ліувілля є зворотнім за часом, і в такому вигляді його не можна застосувати до опису незворотних процесів, що відбуваються в рідинах. Боголюбовим М.М. [1] були розроблені найбільш систематичні методи побудови відповідних кінетичних рівнянь на основі концепції частинних функцій розподілу. Вводячи поняття s-частинкових функцій розподілу, і використовуючи рівняння Ліувілля, він отримав ланцюжок зв'язаних рівнянь для цієї функції [1].

Для теоретичного розв'язку поставленої задачі було застосовано фундаментальний метод кінетичних рівнянь Боголюбова. За модель в даних розрахунках приймається випромінювання і його вплив на однокомпонентну рідину. Як відомо, під час опромінення швидкість частинок змінюється стрибкоподібно, тому їхню динаміку не можна описати за допомогою гамільтонової механіки, тобто не працюватиме теорема про збереження фазового об'єму, а, отже, рівняння Ліувілля і ланцюжок Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона (ББГКІ). У зв'язку з цим будемо розглядати не перехід частинок з одного стану в інший, а тільки початковий і кінцевий стани частинок. І це дає нам змогу вільно використовувати для розрахунків рівняння Ліувілля та ланцюжок рівнянь ББГКІ.

З цією метою було використано друге рівняння ланцюжка Боголюбова для нерівноважної функції розподілу $F_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_2,t)$, що залежить від просторових координат $\vec{r}_1,\vec{r}_2$, імпульсів $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ та часу t

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial F_2}{\partial \vec{r}_1}\frac{\vec{p}_1}{m}+\frac{\partial F_2}{\partial \vec{r}_2}\frac{\vec{p}_2}{m}-$$
$$-\frac{\partial F_2}{\partial \vec{p}_1}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_1-\vec{r}_2\,|\right)}{\partial \vec{r}_1}-\frac{\partial F_2}{\partial \vec{p}_2}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_1-\vec{r}_2\,|\right)}{\partial \vec{r}_2}=$$
$$=\rho\int\left[\frac{\partial F_3}{\partial \vec{p}_1}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_1-\vec{r}_3\,|\right)}{\partial \vec{r}_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F_3}{\partial \vec{p}_2}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_2-\vec{r}_3\,|\right)}{\partial \vec{r}_2}\right]d\vec{r}_3 d\vec{p}_3\,. \qquad (1)$$

Тут $F_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,t)$ – нерівноважна потрійна функція розподілу, яка залежить від просторових координат $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$, імпульсів $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3$, та часу t; $\varphi\left(|\,\vec{r}_i-\vec{r}_j\,|\right)$ – потенціал взаємодії структурних елементів, що знаходяться в точках $\vec{r}_i,\vec{r}_j$ відповідно, $\rho=N/V$ – чисельна густина рідини, m – маса структурного елементу.

Розглянемо однокомпонентну рідину, що знаходиться під дією радіаційного опромінювання від джерела з постійною потужністю [1]. Під час опромінення система гріється і очевидно, що в цьому випадку вона стає нерівноважною, тобто в цьому випадку розподіл Максвелла за імпульсами змінюється на інший розподіл, який визначається енергетичним спектром радіаційного опромінення [1]. В

загальному випадку для цього розподілу співвідношення (2) не виконується. З часом, завдяки сталій величині густини потоку радіаційного випромінювання, система переходить в стаціонарний стан, в якому похідна $\frac{\partial F_2}{\partial t}$ дорівнює нулю. Зауважимо, що стаціонарний стан не є рівноважним станом, і, відповідно, в цьому стані в системі існує виробництво ентропії. Це виробництво пов'язано з появою в системі від'ємної ентропії внаслідок радіаційного опромінення, що, в свою чергу, призводить до структурних змін. Такі структурні зміни повинні мати своє відображення в термінах парної функції розподілу $g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$.

Очевидно, що в рівноважному випадку рівняння (1.1) повинно зводитись до відомого рівняння для рівноважної парної функції розподілу $F_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$, за допомогою якої обчислюються рівноважні термодинамічні властивості конденсованої системи. Дійсно, в рівноважному випадку функцію $F_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_2,t)$ можна подати у вигляді добутку парної функції розподілу за координатами $g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ та парної функції розподілу за імпульсами $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$. При цьому $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=f_1(\vec{p}_1)f_1(\vec{p}_2)$, де $f_1(\vec{p})$ має вигляд функції розподілу Максвелла за імпульсами, диференціальне рівняння для якої має вигляд

$$\frac{df_1}{d\vec{p}}+\frac{\vec{p}}{mkT}f_1=0 \qquad (2)$$

Дійсно у випадку стаціонарного стану рівняння (1) перетворюється в суму двох рівнянь, кожне з яких є рівнянням ланцюжка ББГКІ у випадку нерівноважного стану:

$$\frac{\vec{p}_1}{m}f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial\vec{r}_1}-$$
$$-g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\frac{\partial f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{\partial\vec{p}_1}\frac{\partial\varphi(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial\vec{r}_1}-$$
$$-\rho\int d\vec{r}_3d\vec{p}_3g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)\frac{\partial f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)}{\partial\vec{p}_1}\times$$
$$\times\frac{\partial\varphi(|\vec{r}_1-\vec{r}_3|)}{\partial\vec{r}_1}=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\vec{p}_2}{m}f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial\vec{r}_2}-$$
$$-g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\frac{\partial f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{\partial\vec{p}_2}\frac{\partial\varphi(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial\vec{r}_2}-$$
$$-\rho\int d\vec{r}_3d\vec{p}_3g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)\frac{\partial f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)}{\partial\vec{p}_2}\times$$
$$\times\frac{\partial\varphi(|\vec{r}_1-\vec{r}_3|)}{\partial\vec{r}_1}=0. \qquad (4)$$

Інтегруючи будь-яке з цих рівнянь, наприклад (1.6), за $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2$, та враховуючи співвідношення $\int d\vec{p}_3f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)=f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$, отримаємо модифіковане рівняння ББГКІ у випадку нерівноважного стаціонарного стану

$$kT_{ref}\frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial\vec{r}_1}+g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\frac{\partial\varphi(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial\vec{r}_1}+$$
$$+\rho\int d\vec{r}_3g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)\frac{\partial\varphi(|\vec{r}_1-\vec{r}_3|)}{\partial\vec{r}_1}=0, \qquad (5)$$

де kT_{ref} визначається співвідношенням:

$$kT_{ref}\int d\vec{p}_1d\vec{p}_2\frac{\partial f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{\partial\vec{p}_1}=$$
$$=-\int d\vec{p}_1d\vec{p}_2\frac{\vec{p}_1}{m}f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2) \qquad (6)$$

Вираз (6) дозволяє визначити ефективну температуру системи в загальному випадку. Разом з тим у випадку, коли джерела випромінювання неперервно і рівномірно розподілені в об'ємі системи, функції розподілу $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ та $f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$ стають парними функціями своїх аргументів. В цьому випадку визначення ефективної температури за допомогою формули (6) приводить до невизначеності. Аби в цьому випадку обчислити температуру, розглянемо наступну процедуру. Спочатку використовуючи можливість факторизації функції розподілу за імпульсами $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=f_1(\vec{p}_1)f_1(\vec{p}_2)$ у виразі (5) обчислимо інтеграл за $\vec{p}_2$

$$kT_{ref}\frac{\partial f_1(\vec{p}_1)}{\partial \vec{p}_1} = -\frac{\vec{p}_1}{m} f_1(\vec{p}_1) \quad (\ldots)$$

де $f_1(\vec{p})$ – унарна функція розподілу за імпульсами. Беручи до уваги, що $f_1(\vec{p})$ – парна функція від $\vec{p}$, тобто $f_1(\vec{p}) = \psi(p^2)$, і, відповідно, $\frac{\partial f_1(\vec{p})}{\partial \vec{p}_1} = 2\vec{p}\psi'(p^2)$, після інтегрування за $\vec{p}_1$ отримаємо вираз, в якому не виникає згаданої вище невизначеності

$$kT_{ref} = -\frac{1}{2m}\frac{\int d\vec{p}_1 \psi(p_1^2)}{\int d\vec{p}_1 \psi'(p_1^2)} = \quad (\ldots)$$
$$= -\left(2m\int d\vec{p}_1 \psi'(p_1^2)\right)^{-1}$$

Очевидно, що у випадку, коли $\psi(p^2)$ відповідає розподілу Максвелла за імпульсами, $kT_{ref} = kT$.

Таким чином, у стаціонарному стані структурні характеристики системи, що знаходиться під опромінюванням від джерела з постійною потужністю, описуються фундаментальними інтегро-диференціальними рівняннями статистичної рівноважної теорії рідин при ефективній температурі T_{ref}, яка у загальному випадку визначається виразом (), а у випадку просторово-однорідного радіаційного опромінення сталої потужності – виразом (...

Висновки та результати

Показано, що для визначення зміни структурних характеристик рідини та рідинних систем в стаціонарному стані під дією радіаційного опромінення необхідно мати детальну інформацію (експериментальну або теоретичну) щодо зміни розподілу Максвелла за імпульсами під дією радіаційного опромінення, аби визначити коефіцієнти при невідомих функціях розподілу.

Системи, в яких проходять нерівноважні стаціонарні процеси скалярного характеру, можна розглядати в рамках термодинаміки, шляхом введення ефективної температури.

Запропоновано метод обчислення значення ефективної температури флюїду T_{ref}, тобто температуру стаціонарного стану флюїду, що знаходиться під опроміненням сталої густини потоку частинок.

Список використаних джерел

1. *Kolesnichenko Ya.I.* ...
2. *Perez-Madrid A.* ...
3. *David Ruelle* ...
4. *Giovanni Gallavotti* ...
5. *Eisa D.A.* ...
6. ...

Надійшла до редколегії ...

УДК 536

Гаврюшенко Д.А., д. ф.-м.н., проф.

Розподіл концентрації бінарного розчину в циліндричній порі з неідеальними стінками

Проведено теоретичне дослідження впливу кореляційних ефектів на просторовий розподіл концентрації бінарного розчину в околі критичної точки розшарування в циліндричній порі, біля стінок якої діють сили, потенцал яких спадає за експоненційним законом. Показано, що при наближенні до границі стійкості системи суттєве відхилення концентрації має місце у всьому об'ємі системи.

Ключові слова: *бінарний розчин, критична точка розшарування, локальні ефекти.*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, пр. Глушкова 4-б
e-mail: dg@univ.kiev.ua

D.A. Gavryushenko, Dr. Sci., Prof.

Concentration distribution within ideal cylindrical pore in the vicinity of critical point

The theoretical investigation of correlation effects on a spatial distribution of a binary solution concentration in the vicinity of a critical point has been carried out within a cylindrical pore with exponential surface forces. It was shown that essential deviation of the concentration within hole volume of the pore exists it the vicinity of a border of a system stability.

Key Words: *binary solution, critical point, local effects.*

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Glushkova st., 4-b,
e-mail: dg@univ.kiev.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Кількісний опис бінарного розчину однорідної рідини в широкому інтервалі зміни термодинамічних параметрів, включаючи окіл можливих критичних точок, можна провести як методами статистичної фізики, так і термодинаміки. Стан такої системи можна повністю задати набором інтенсивних параметрів, жоден з яких не описує розмірів системи або форми поверхні, що її обмежує, та загальним числом частинок $N = N_A + N_B$, де N_A та N_B – кількість частинок сорту "A" та "B" відповідно. Але очевидно, що будь-яка реальна система завжди є неоднорідною. Можна виділити дві основних причини появи цієї неоднорідності: перша пов'язана з дією зовнішніх полів з потенціалом $u(\vec{r})$ (гравітаційних, електричних тощо), а друга – з наявністю стінок, що обмежують систему [1].

Традиційні методи опису властивостей неоднорідної системи полягають в розбитті її на достатньо тонкі шари між двома еквіпотенційними поверхнями і представленні відповідних термодинамічних потенціалів такої системи як суми термодинамічних потенціалів цих шарів [2]. Базуючись на цьому підході, для хімічного потенціалу однокомпонентної системи $\mu(\vec{r})$ у зовнішньому полі можна отримати відому класичну формулу:

$$u(\vec{r}) = \mu_0 - \mu(\vec{r}), \qquad (1)$$

де μ_0 – хімічний потенціал системи за відсутності зовнішнього поля. Г. Йосом було встановлено область застосування виразу (1).

Зрозуміло, що даний підхід є локальним у тому розумінні, що він передбачає розгляд термодинамічних потенціалів системи як функцій чисельної густини замість того, щоб розглядати їх як відповідні функціонали. Це призводить до втрачати інформації про «колективну» поведінку системи, яка є надзвичайно важливою при описі властивостей системи в околі точок фазових перетворень другого роду [3].

Дж. Лебовицем та Дж. Перкусом з врахуванням нелокальних («колективних») властивостей однокомпонентної системи було отримано вираз, аналогічний (1):

$$u(\vec{r}) = \mu_0 - \mu(\vec{r}) + a\nabla^2 n(\vec{r}) \qquad (2)$$

© Д.А. Гаврюшенко, 2013

де стала a визначається через другий просторовий момент так званої прямої кореляційної функції другого порядку. Вираз (2) дозволяє в певному наближенні проводити обчислення просторового розподілу густини рідини в широкому інтервалі зміни термодинамічних параметрів, включаючи критичну точку [4].

Для побудови послідовної термодинамічної теорії, яка описувала поведінку однокомпонентної неоднорідної системи, раніше було запропоновано фундаментальний підхід, що базується на обчисленні внеску від кожного шару між еквіпотенційними поверхнями не у відповідні термодинамічні потенціали, а в гамільтоніан системи. В цьому випадку замість виразів (1) та (2) можна записати

$$u(\vec{r}) = \mu_0 - \mu(\vec{r}) + \Delta\mu_{cor}(\vec{r}), \qquad (3)$$

де $\Delta\mu_{cor}$ – внесок від кореляційних ефектів, для якого було отримано вираз у вигляді нескінченого ряду:

$$\begin{aligned}\beta\Delta\mu_{cor}(\vec{r}) &= \int_V d\vec{r}_1 C_2\left[\Delta x(\vec{r}_1) - \Delta x(\vec{r})\right] + \\ &+\Delta x(\vec{r})\int_V d\vec{r}_1\int_V d\vec{r}_2 C_3\left[\Delta x(\vec{r}_1) - \Delta x(\vec{r})\right] + \\ &+\frac{1}{2!}\int_V d\vec{r}_1\int_V d\vec{r}_2 C_3\left[\Delta x(\vec{r}_1) - \Delta x(\vec{r})\right]\times \\ &\times\left[\Delta x(\vec{r}_2) - \Delta x(\vec{r})\right] + \ldots.\end{aligned} \qquad (4)$$

Для випадку достатньо плавної просторової зміни концентрації $\Delta x(\vec{r})$ різницю $\Delta x(\vec{r}_{i\varnothing}) - \Delta x(\vec{r})$ можна розкласти в ряд Тейлора за ступенями $(\vec{r}_a - \vec{r})$. Тоді вираз (4) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\beta\Delta\mu_{cor}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\vec{\nabla}^2\Delta x(\vec{r})\int_V d\vec{r}_1 C_2(\vec{r}_1 - \vec{r})^2 + \\ &+\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\Delta x(\vec{r})\right)^2\int_V d\vec{r}_1\int_V d\vec{r}_2 C_3(\vec{r}_1 - \vec{r})(\vec{r}_2 - \vec{r}) + \\ &+\vec{\nabla}\Delta x(\vec{r})\left\{\int_V d\vec{r}_1 C_2(\vec{r}_1 - \vec{r}) + \right. \\ &\left.+\Delta x(\vec{r})\int_V d\vec{r}_1\int_V d\vec{r}_2 C_3(\vec{r}_1 - \vec{r})\right\} + \ldots.\end{aligned} \qquad (5)$$

В цьому випадку формулу (3) можна записати у вигляді, аналогічному формулі для густини рідини (2):

$$\begin{aligned}\beta u_{BA}(\vec{r}) &= \beta\left(\mu_0 - \mu(\vec{r})\right) + a\vec{\nabla}^2\Delta x(\vec{r}) + \\ &+b\left(\vec{\nabla}\Delta x(\vec{r})\right)^2 + \vec{c}\vec{\nabla}\Delta x(\vec{r})\ldots\end{aligned}, \qquad (6)$$

де позначено

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}\int_V d\vec{r}_1 C_2(\vec{r}_1 - \vec{r})^2, \\ b &= \frac{1}{6}\int_V d\vec{r}_1\int_V d\vec{r}_2 C_3(\vec{r}_1 - \vec{r})(\vec{r}_2 - \vec{r}), \\ \vec{c} &= \int_V d\vec{r}_1 C_2(\vec{r}_1 - \vec{r}) + \\ &+\Delta x(\vec{r})\int_V d\vec{r}_1\int_V d\vec{r}_2 C_3(\vec{r}_1 - \vec{r}).\end{aligned} \qquad (7)$$

Якщо в цьому виразі обмежитись доданком, пов'язаним з $\vec{\nabla}^2\Delta x(\vec{r})$ (тобто наближенням, аналогічним до наближення Лебовиця-Перкуса), отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно $\Delta x(\vec{r})$, побудова розв'язку якого для обмежених систем, має певні особливості. Зокрема, на розв'язок цього рівняння необхідно накладати умови трансверсальності, які в даному випадку мають наступний очевидний вигляд:

$$\vec{n}_S \cdot \vec{\nabla}\Delta x(\vec{r})\big|_S = 0, \qquad (8)$$

де S – поверхня, що обмежує систему, $\vec{n}_S$ – нормаль до поверхні S в деякій її точці, та ізоперіметризму (в даному випадку – постійності кількості частинок в системі):

$$\int_V d\vec{r}_1\Delta x(\vec{r}_1) = 0. \qquad (9)$$

Зауважимо, що накладання на розв'язок рівняння (6) додаткової умови (9) пов'язано з необхідністю завдання хімічного потенціалу однорідної системи.

Важливим частинним випадком неоднорідної бінарної системи є система з кубічною решіткою, в якій вздовж вісі $0z$ діє зовнішнє поле $u(z)$, крім того, система в цьому напрямку обмежена, тому z може змінюватись в межах $[-L, L]$. Така ситуація реалізується, наприклад, в однорідному гравітаційному полі або в системі з плоскопаралельними стінками, біля яких діє пристінковий потенціал, за відсутності гравітаційного поля. В цьому випадку $u_{BA}^i = \left(u_B^i - u_A^i\right)N_l$, $N_l = N\frac{l}{2L} - \text{const}$ – кількість частинок (вузлів) у шарі товщиною l. В цьому випадку, очевидно, рівняння (6) можна подати у наступному вигляді:

$$\beta u_{BA}(z) = \beta(\mu_0 - \mu(z)) + \\ +a\frac{d^2}{dz^2}\Delta x(z) + b\left(\frac{d}{dz}\Delta x(z)\right)^2 + \ldots, \qquad (10)$$

де

$$a = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} dz_1 C_2(z_1 - z)^2, \\ b = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} dz_1 \int_{-L}^{L} dz_2 C_3(z_1 - z)(z_2 - z). \qquad (11)$$

Очевидно, що в цьому випадку умови трансверсальності (8) та ізопериметризму (9) набувають наступного вигляду:

$$\frac{d}{dz}\Delta x(z)\Big|_{\pm L} = 0, \qquad (12)$$

$$\int_{-L}^{L} dz \Delta x(z) = 0. \qquad (13)$$

Отримані результати свідчать про те, що класичну формулу (1) можна застосовувати виключно для опису розподілу концентрації неоднорідних бінарних систем лише у випадку наявності зовнішніх полів з малими просторовими градієнтами далеко від критичної точки. Але при наближенні до критичної точки роль кореляційних доданків зростає, і тому необхідно користуватись виразом (5), враховуючи все більше поправочних доданків. Аналогічна ситуація має місце і далеко від критичної точки при наявності великих відхилень концентрації $\Delta x(z)$.

Розглянемо випадок, коли бінарний розчин знаходиться в порожнині, обмеженій коаксіальними циліндрами з радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$). Введемо циліндричну систему координат таким чином, щоб вісь $0z$ співпадала з віссю циліндрів. В цьому напрямку систему будемо вважати необмеженою. Умови трансверсальності (12) та ізопериметризму (13) в даному випадку будуть мати вигляд

$$\frac{d\Delta x(r)}{dr}\Big|_{r=R_1} = 0, \ \frac{d\Delta x(r)}{dr}\Big|_{r=R_2} = 0, \qquad (14)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} dr \Delta x(r) r = 0. \qquad (15)$$

Будемо вважати, що в системі поблизу стінок діють сили притягання, потенціали яких промоделюємо наступними виразами:

$$u_A(r) = B_A\left[e^{-k(R_2 - r)} + e^{-k(r - R_1)}\right], \\ u_B(r) = B_B\left[e^{-k(R_2 - r)} + e^{-k(r - R_1)}\right]. \qquad (16)$$

Тоді в наближенні плавної неоднорідності можна отримати диференціальне рівняння відносно $\Delta x(r)$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}\Delta x(r) - \kappa^2 \Delta x(r) = \\ = A\kappa^2\left[\lambda + B_{BA}\left(e^{-k(R_2 - r)} + e^{-k(r - R_1)}\right)\right], \qquad (17)$$

розв'язок якого має вигляд:

$$\Delta x(r) = C_1 \mathrm{I}_0(\kappa r) + C_2 \mathrm{K}_0(\kappa r) - A\lambda + \\ +AB_{BA}\kappa^3 \mathrm{I}_0(\kappa r)\int_{R_1}^{r} \frac{\mathrm{K}_0(\kappa r)\left(\mathrm{e}^{-k(R_2 - r)} + \mathrm{e}^{-k(r - R_1)}\right)}{\mathrm{I}_1(\kappa r)\mathrm{K}_0(\kappa r) + \mathrm{I}_0(\kappa r)\mathrm{K}_1(\kappa r)} dr - \\ -AB_{BA}\kappa^3 \mathrm{K}_0(\kappa r)\int_{R_1}^{r} \frac{\mathrm{I}_0(\kappa r)\left(\mathrm{e}^{-k(R_2 - r)} + \mathrm{e}^{-k(r - R_1)}\right)}{\mathrm{I}_1(\kappa r)K_0(\kappa r) + \mathrm{I}_0(\kappa r)\mathrm{K}_1(\kappa r)} \hat{e} dr \qquad (18)$$

де I_0, K_0, I_1 та K_1 – модифіковані функції Бесселя і Ганкеля нульового та першого порядку відповідно. Враховуючи, що для вронскіану за заданих умов виконується рівність

$$\mathrm{I}_1(t)\mathrm{K}_0(t) + \mathrm{I}_0(t)\mathrm{K}_1(t) = \frac{1}{t},$$

і виконуючи обезрозмірення інтегралів у виразі (18), отримаємо:

$$\Delta x(r) = C_1 \mathrm{I}_0(\kappa r) + C_2 \mathrm{K}_0(\kappa r) - A\lambda + \\ +AB_{BA}\mathrm{I}_0(\kappa r)\int_{\kappa R_1}^{\kappa r} \mathrm{K}_0(t)\left(\mathrm{e}^{-k\left(R_2 - \frac{t}{\kappa}\right)} + \mathrm{e}^{-k\left(\frac{t}{\kappa} - R_1\right)}\right) tdt - \\ -AB_{BA}\mathrm{K}_0(\kappa r)\int_{\kappa R_1}^{\kappa r} \mathrm{I}_0(t)\left(\mathrm{e}^{-k\left(R_2 - \frac{t}{\kappa}\right)} + \mathrm{e}^{-k\left(\frac{t}{\kappa} - R_1\right)}\right) tdt$$

де:

$$b(\kappa R_1) = AB_{BA}\mathrm{K}_0(\kappa R_1)\mathrm{I}_0(\kappa R_1)\left(\mathrm{e}^{-k(R_2 - R_1)} + 1\right)\kappa R_1 - \\ -AB_{BA}\mathrm{I}_0(\kappa R_1)\mathrm{K}_0(\kappa R_1)\left(\mathrm{e}^{-k(R_2 - R_1)} + 1\right)\kappa R_1,$$

$$b(\kappa R_2) = AB_{BA}\mathrm{K}_0(\kappa R_2)\mathrm{I}_0(\kappa r)\left(1 + \mathrm{e}^{-k(R_2 - R_1)}\right)\kappa R_2 \\ -AB_{BA}\mathrm{K}_1(\kappa R_2)\int_{\kappa R_1}^{\kappa R_2} \mathrm{I}_0(t)\left(\mathrm{e}^{-k\left(R_2 - \frac{t}{\kappa}\right)} + \mathrm{e}^{-k\left(\frac{t}{\kappa} - R_1\right)}\right) tdt - \\ -AB_{BA}\mathrm{I}_1(\kappa R_2)\int_{\kappa R_1}^{\kappa R_2} \mathrm{K}_0(t)\left(\mathrm{e}^{-k\left(R_2 - \frac{t}{\kappa}\right)} + \mathrm{e}^{-k\left(\frac{t}{\kappa} - R_1\right)}\right) tdt - \\ -AB_{BA}\mathrm{I}_0(\kappa R_2)\mathrm{K}_0(\kappa R_2)\left(1 + \mathrm{e}^{-k(R_2 - R_1)}\right)\kappa R_2,$$

$$C_1 = \frac{b(\kappa R_2)\mathrm{K}_1(\kappa R_1) - b(\kappa R_1)\mathrm{K}_1(\kappa R_2)}{\mathrm{I}_1(\kappa R_1)\mathrm{K}_1(\kappa R_2) - \mathrm{K}_1(\kappa R_1)\mathrm{I}_1(\kappa R_2)},$$

$$C_2 = \frac{b(\kappa R_2)\mathrm{I}_1(\kappa R_1) - b(\kappa R_1)\mathrm{I}_1(\kappa R_2)}{\mathrm{I}_1(\kappa R_1)\mathrm{K}_1(\kappa R_2) - \mathrm{K}_1(\kappa R_1)\mathrm{I}_1(\kappa R_2)}.$$

а λ – стала, визначена за допомогою умови ізоперіметризму (15).

На рис. 1 наведено просторовий розподіл концентрації модельного бінарного розчину $\Delta x(r)$ за різних значень радіусу кореляції ξ.

Як можна бачити з наведених результатів, з наближенням до критичної точки сингулярно збурений доданок починає відігравати все більшу роль, і зміна концентрації розчину відбувається в більшій частині об'єму, тобто характерною відстанню, на якій відбуваються суттєві зміни концентрації, є вже не радіус дії поверхневих сил, а радіус кореляції системи ξ.

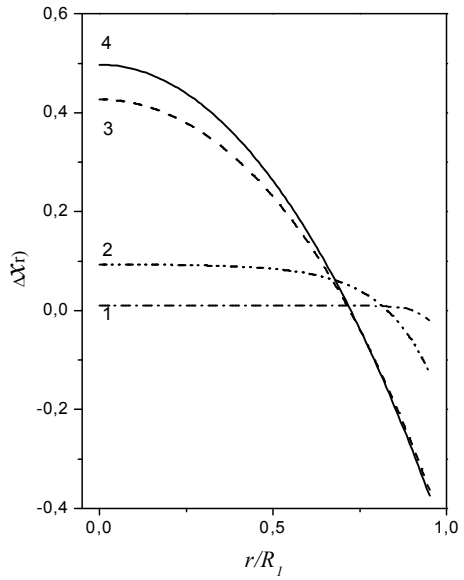


Рис. 1. Просторовий розподіл концентрації $\Delta x(r)$ бінарного розчину в неідеальній циліндричній порожнині для системи з $R_1 = 10^{-8}$ м, $R_2 = 10^{-5}$ м, $k^{-1} = 3 \cdot 10^{-10}$ м, $B_{BA} = 10^{-24}$ Дж за різних значень ξ: $1 - 10^{-6}$, $2 - 5 \cdot 10^{-6}$, $3 - 0,99 \cdot 10^{-5}$ м.

Таким чином, отримані результати вказують на те, що в околі критичної точки розшарування наявність неідеальних стінок призводить до зміни профілю концентрації суміші в об'ємі, який визначається радіусом кореляції відповідної однорідної системи, а не радіусом дії сил приповерхневого поля стінки, яка обмежує систему.

Крім того, встановлено, що наявність стінок різної природи викликає суттєві відхилення концентрації від знайденого в локальному наближенні, що впливає на значення критичних амплітуд, розрахованих за результатами експериментальних досліджень.

Список використаних джерел

1. *Bulavin L.A., Gavryushenko D.A., Sysoev V.M.* Spatial distribution of components of a binary mixture in a bounded System // Ukr. Journ. of Phys. – 2007. – Vol. 52, No 10. – P. 934-938 (in Ukrainian).
2. *Munster A.* Chemische thermodynamik. – Berlin: Akademie, 1969, – 296 p.
3. *Bulavin L.A., Gavryushenko D.A., Sysoev V.M.* Calculation of spatial distribution of binary solution concentration under external field // Dopovidi nazionalnoyi academii nauk Ukrayiny. – 2008. – N 1. – P. 68-71 (in Ukrainian).
4. *Bulavin L.A., Gavryushenko D.A., Sysoev V.M.* Non-uniform liquid in external field // Fizika. – 1998. – A6. – P. 89-95.

Надійшла до редколегії 5.04.2013

УДК 621.315.592

Горкавенко Т.В.[1], інж.,
Зубкова Л.М.[2], д.ф.-м.н.,
Русіна Л.М.[2], к.ф.-м.н.

Чисельний розрахунок електронної структури в об'ємі та на поверхні кристалів методом самоузгодженого псевдопотенціалу (алгоритм та блок-схема)

У роботі представлено алгоритм та блок – схему розробленого авторами пакету програм чисельного розрахунку електронної структури в об'ємі та на поверхні кристалів із структурою типу сфалерита та вюрцита методом самоузгодженого псевдопотенціалу. Електронна структура на поверхні кристалу розраховується з використанням моделі шаруватої надґратки.

Ключові слова: зонна структура кристалів, самоузгоджений метод псевдопотенціалу.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова 4,
e-mail: tvgorka@gmail.com
[2]Інституті проблем матеріалознавства
імені І.М. Францевича НАН України,
03680, м. Київ, вул. Кржижанівського, 3,
e-mail: smzubkova@gmail.com

T.V. Gorkavenko[1], Eng.,
S.M. Zubkova[2], Dr. Sci.,
L.M. Rusina[2], PhD

Numerical calculation of bulk and surface electronic structure of crystals by the self-consistent pseudopotential method (algorithm and block – scheme)

We propose algorithm and block - scheme of the developed by authors software package for calculation of electronic properties in the bulk and at the surface of sphalerite and wurtzite type crystals by the self-consistent pseudopotential method. The surface electronic structure of crystals is calculated using the layered superlattice model.

Key Words: electronic structure of crystals, selfconsistent pseudopotential method.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, av. Glushkova st., 4,
e-mail: tvgorka@gmail.com
[2]I.N. Frantsevich Institute for Problems of Materials Science of NAS of Ukraine,
03680, Kyiv, Krzhizhanivskogo st., 3,
e-mail: smzubkova@gmail.com

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Вступ

У цій роботі описані алгоритм та блок–схема розробленого авторами пакету програм, який вміщує самоузгоджений розв'язок системи рівнянь методу псевдопотенціала з оригінальним ітератором; розрахунок електронної структури об'ємних сполук; розрахунок поверхневих законів дисперсії в моделі шаруватої надґратки; розрахунок повної та в окремих шарах густини електронніх станів, побудову тривимірних та контурних карт розподілу зарядової густини валентних електронів як повної, так і в окремих шарах, окремих енергетичних зонах та в окремих точках зони Бріллюена та ін. Програма підходить для будь-якої кристалічної структури, довільного числа порожніх та заповнених атомних шарів, легко пристосовується для поверхонь з різними індексами. Власний пакет програм дозволяє легко удосконалювати її, розширюючи сфери застосування.

Теоретичні основи та алгоритм програми

Наведемо короткі відомості про теоретичні основи програми.

Хвильова фунція представляється у вигляді лінійної комбінації плоских хвиль із хвильовими векторами, які дорівнюють векторам оберненої гратки:

$$\Psi_{\vec{k}}^{n}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} a_{\vec{k}}^{n}(\vec{G})\, e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \quad . \qquad (1)$$

Тут n – номер зони, $\vec{k}$ - хвильовий вектор.

Система рівнянь метода псевдопотенціалу має стандартний вигляд [1, 2]:

© Т.В. Горкавенко, С.М. Зубкова, Л.М. Русіна, 2013

$$\sum_{\vec{G}}(H_{\vec{G},\vec{G}'}-E\delta_{\vec{G},\vec{G}'})\,a_{\vec{k}}(\vec{G}')=0, \qquad (2)$$

$$H_{\vec{G},\vec{G}'}=\left|\vec{k}+\vec{G}\right|^2\delta_{\vec{G},\vec{G}'}+V_{ps}(\vec{G},\vec{G}'). \qquad (3)$$

Із системи (2)-(3) одержуємо секулярне рівняння для розрахунку власних значень енергії

$$\left|\left[E-\left(\vec{k}+\vec{G}\right)^2\right]+V_{\vec{G}\vec{G}'}\right|=0\,, \qquad (4)$$

де $V_{\vec{G}\vec{G}'}=\dfrac{1}{\Omega_0}\int V_{PS}\left(\vec{r}\,\right)e^{i\left(\vec{G}-\vec{G}',\vec{r}\right)}d\vec{r}$.

Розв'язок рівнянь (2) – (4) на власні значення і власні функції електрона дає власні енергії $E_n(\vec{k})$ та псевдохвильові функції, які визначаються рівнянням (1). В програмі ці величини одержуються в 28 точках $\vec{k}$ непривідної зони Бріллюена. Таке відносно велике число точок $\vec{k}$ (замість однієї або декількох "спеціальних" точок $\vec{k}$, як це часто робиться) було взято з метою максимально точного визначення рівня Фермі та заряда валентних електронів. Рівень Фермі розраховувався наступним чином. Розв'язавши секулярне рівняння (4) для кожної з 28 точок $\vec{k}$, одержуємо *n* власних значень енергії $E_n(\vec{k})$. Далі ці 28 наборів власних значень зводимо в один, упорядкувавши його за величинами енергій, та заповнюємо електронами (на кожному рівні два електрона за принципом Паулі). Рівень Фермі – найвищий зайнятий стан в упорядкованому масиві енергій. Найчастіше – це вершина валентної зони.

Самоузгодження починається з емпіричного псевдопотенціалу:

$$V_{emp}(\vec{q})=S(\vec{q})V_{emp}{}^{at}(|\vec{q}|),\ \text{де}$$

$$S(\vec{q})=\frac{1}{M}\sum_{\tau_i}e^{-i\vec{q}\cdot\vec{\tau}_i}\ ,\ \vec{G}-\vec{G}'=\vec{q} \qquad (5)$$

структурний фактор, який описує розташування атомів в елементарній комірці. $V_{emp}{}^{at}(|\vec{q}|)$ – значення емпіричних форм-факторів, отриманих з експерименту або з апроксимаційних кривих, які одержані для деяких кристалів (див., наприклад, [3 – 6]).

Густина заряду валентних електронів розраховувалась на кожній ітерації за формулою

$$\rho(\vec{r})=e\sum_{k,n}^{з.Бр.}\Psi_{\vec{k}}{}^{n*}(\vec{r})\Psi_{\vec{k}}{}^{n}(\vec{r})\,, \qquad (6)$$

при цьому в суму по *k, n,* де *n* – номер енергетичної зони, входять $E_n(\vec{k})<E_F$, $\vec{k}$ належить зоні Бріллюена. Після підстановки (1) в (6) маємо

$$\rho_n(r)=e\sum_{\vec{k}}\left\langle\sum_m(a_{\vec{k}}{}^{n}(\vec{G}_m))^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}a_{\vec{k}}{}^{n}(\vec{G}_i)\,a_{\vec{k}}{}^{n}(\vec{G}_j)\left(e^{i(\vec{G}_i-\vec{G}_j)\vec{r}}+e^{-i(\vec{G}_i-\vec{G}_j)\vec{r}}\right)\right\rangle \qquad (7)$$

Рівень Фермі, який відповідає максимальній енергії валентних електронів, також обчислюється на кожній ітерації. Його збіжність була одним з критеріїв збіжності процесу самоузгодження. Докладніше про ітерації та самоузгодження див. нижче.

Далі на основі $\rho(r)$ обчислювались Хартрі-Фоківські екрануючі потенціали V_H і V_X. V_H є відштовхуючим кулонівським потенціалом, що описує дію на даний електрон всіх інших валентних електронів. Він визначається рівнянням Пуассона

$$\nabla^2V_H(\vec{r})=-4\pi e^2\rho(\vec{r}) \qquad (8)$$

і може бути представлений у вигляді розкладу в ряд Фур'є, в якому

$$V_H(\vec{G})=\frac{4\pi e^2\rho(\vec{G})}{\left|\vec{G}\right|^2}\,. \qquad (9)$$

Розбіжність $V_H(\vec{G})$ при $\vec{G}\to 0$ не має фізичного змісту, тому що вона повністю знищується іонним потенціалом. Для більшості кристалів типу A^2B^6, A^3B^5 із структурою сфалериту були використані іонні потенціали Сома та Матсуо-Когая [7]

$$V_i(q) = -\frac{4\pi Z_i e^2}{\Omega_0 q^2}\left[(1+u_i)\cos(qR_M{}^i) - u_i\frac{\sin(qR_M{}^i)}{qR^i{}_M}\right] \quad (10)$$

$$u_i = \frac{q_i R^i{}_M \cos(q_i R^i{}_M)}{\sin(q_i R^i{}_M) - \cos(q_i R^i{}_M)}$$

де Z_i , Ω_0 – валентність та атомній об'єм і-го атома, $R^i{}_M$- параметр, який визначає радіус іонного остова.

Для обмінного потенціалу Хартрі-Фока в локальній формі $V_X(\vec{r})$ була використана статистична обмінна модель Слетера.

Функція $\rho(\vec{r})$ визначалась для кожної точки окремо в тривимірній сітці з N = 21600 точок $\vec{r}$ в елементарній комірці в реальному просторі. Далі ця функція перетворювалася в Фур'є-образ.

Сума двох Хартрі-Фоківських потенціалів V_H і V_X складає електронний екрануючий потенціал

$$V_{screen}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}}\left[V_H(\vec{G}) + V_X(\vec{G})\right]e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \quad (11)$$

На другій ітерації вхідний потенціал дорівнює сумі іонного та екрануючого потенціалів. Таким чином, вхідні потенціали для першої та другої ітерацій процедури самоузгодження мають вигляд

$$V^{(1)}{}_{in}(\vec{r}) = V_{emp}(\vec{r}),$$
$$V^{(2)}{}_{in}(\vec{r}) = V_{ion}(\vec{r}) + V^{(1)}{}_{screen}(\vec{r}). \quad (12)$$

Відмітимо, що потенціали $V_{emp}(\vec{r})$ і $V_{ion}(\vec{r})$ являються лінійними суперпозиціями атомних потенціалів, всі інші потенціали $V_{screen}{}^{(n)}$ і $V_{in}{}^{(n+1)}$ *(n ≥ 1)* мають більш загальну форму і вже не являються простим добутком структурного фактора на форм – фактор, що пов'язано з нелінійною природою діелектричного екранування. Самоузгодження проводиться доти, доки різниця між вхідним та вихідним потенціалами не перевищуватиме десятих електрон-вольта.

Сказане вище відноситься до об'ємної задачі.

Розрахунок електронних властивостей поверхні проведено методом самоузгодженого псевдопотенціалу в моделі шаруватої надгратки [4]. У цій моделі поверхню можна уявити як систему тонких плівок, що періодично повторюються в напрямку, перпендикулярному поверхні, і розділених вакуумними проміжками. Програма наведена на прикладі поверхні (111) в сфалеритоподібних кристалах. Велика подовжена елементарна комірка вибиралась так, що в двох вимірах вона визначається найкоротшими векторами прямої гратки, тобто для гексагональної гратки – векторами довжиною $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, де a - постійна гратки кристала. У третьому вимірі вибирається довга с-вісь, яка проходить в напрямку [111] через велику диагональ куба (таким способом кубічна структура сфалерита розглядається як гексагональна) і охоплює M атомних шарів та N порожніх шарів. Числа M і N обираються так, щоб товщина плівки та число порожніх шарів були достатніми для знехтування взаємодією поверхонь з обох боків плівки та впливом інших періодично розташованих плівок на поверхневий потенціал. Тестові розрахунки дали такі значення – M = 12, N = 4, тоді для c маємо $c = \frac{5\sqrt{3}}{2}a$. Вибір 12 атомних шарів гарантує, що пластина вміщує ціле число непривідних кристалічних шарів, що включають у випадку ідеальної поверхні (111) по шість атомних шарів.

У зв'язку з тим, що в розрахунку використовувався емпіричний потенціал $V_{emp}(\vec{r})$ для об'ємних кристалів, ні перша ітерація, ні всі наступні кроки самоузгодження не призводять до збіжності результатів.

Справа в тім, що в об'ємній задачі найкоротший вектор оберненої гратки $2\pi(111)/a$ має довжину > 1 ат.од., в поверхневій задачі такий вектор дорівнює $2\pi/a_c$ < 1 ат. од. Тут c - вісь великої елементарної комірки, що складається з 16 шарів (12 – заповнених та 4 – порожніх). Для малих векторів зворотньої решітки $|\vec{G}|<1$ система (11) поводиться дуже нестабільно. Математично це проявляється в тому, що залежності $V_{\text{out}}(\vec{\text{G}}) = f(V_{\text{in}}(\vec{\text{G}}))$ для всіх значень $|\vec{\text{G}}| < 1$ ат. од. представляють собою криві з великою крутизною (часто з від'ємною), тобто найменші зміни вхідного потенціала (десяті – соті електрон-вольта) викликають зміну вихідного потенціала на порядок і навіть його знак.

Згідно з іншими авторами, обчислення вхідного потенціала на (n + 1)-ітерації *як* лінійної комбінації вхідного та вихідного потенціалів на n-ітерації, не призводить до збіжності. Тому для одержання вхідного потенціала $V_{\text{in}}^{(n)}(\vec{\text{G}})$ для n > 2 були досліджені криві $V_{\text{out}}(\vec{\text{G}}) = f(V_{\text{in}}(\vec{\text{G}}))$ для кожного малого значення $|\vec{\text{G}}| < 1$ ат. од. окремо і

запропонована наступна ітераційна процедура.

Проведемо в системі координат x = $V_{in}(\vec{G})$ і y = $V_{out}(\vec{G})$ пряму через дві точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2), що відповідають вхідному і вихідному потенціалам для двух ітерацій, попередніх до ітерації (x, y), яку ми розглядаємо. Очевидно, збіжність відповідає рівності вхідного та вихідного потенциалів x ≅ y, тому із системи рівнянь для прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2):

$$\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}=1 \text{ та } \frac{x_2}{a}+\frac{y_2}{b}=1 \qquad (13)$$

одержуємо умову для вхідного потенціалу в ітерації, що розглядається

$$x = x_1 = y_2 = \frac{a\times b}{a+b}, \qquad (14)$$

$$a=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}, b=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}.$$

У результаті вхідний потенціал для ітерації (x, y) дорівнює

$$x=\alpha(\beta)x_2+(1-\alpha(\beta))y_2, \qquad (15)$$

де коефіцієнт лінійної комбінації вхідного та вихідного потенціалів з попередньої ітерації (x_2, y_2) дорівнює

$$\alpha(\beta)=\frac{x-y_2}{x_2-y_2}. \qquad (16)$$

Тут α і β відповідають дійсній та уявній частинам потенціалів, що розглядаються, і на кожній ітерації вони приблизно рівні, що свідчить на підтримку даного ітератора.

Далі були обчислені і проаналізовані повна та в окремих шарах густина станів для поверхонь, які закінчуються катіоном або аніоном:

$$N(E)=\sum_{\vec{k}_{ii},n}\int_{\Omega}\left|\Psi_{\vec{k}_{ii}}(\vec{r})\right|^2 d\vec{r}\,\delta(E-E_n(\vec{k}_{II})) \qquad (17)$$

Тут інтегрування ведеться за об'ємом або окремого шара, або всієї елементарної комірки. Вираз (17) інтерпретується як вірогідність знаходження електрона з енергією E в об'ємі (області) Ω.

Таким чином, алгоритм розрахунку коротко запишеться:

- Введення вихідних даних.
- Вибір системи координат в прямому просторі, побудова елементарної комірки і точок $r_{i,}$, в яких будуть проведені обчислення. Визначення координат атомів, введення шарів, визначення числа заповнених та порожніх шарів.
- Побудова оберненої гратки та зони Бріллюена.
- Вибір емпіричних псевдопотенціалів для першої ітерації.
- Побудова екрануючого потенціалу.
- Побудова іонних потенціалів.
- Цикл за ітераціями:

1. Обчислення матричних елементів та розв'язок секулярного рівняння (4).
2. Знаходження власних значень енергії та власних псевдопотенціальних функцій.
3. Знаходження рівня Фермі.
4. Знаходження густини заряду валентних електронів (6)-(7).
5. Кінець циклу за ітераціями.

На рис.1 наведено блок-схему програми.

Код програми, вихідні дані та пояснення до них розміщено на сайті http://www.ipms.kiev.ua.

Висновки

Автори даної роботи розробили пакет програм на основі методу самоузгодженого псевдопотенціалу, що дозволяє розраховувати електронні властивості в об'ємі та на поверхні кристалів з різною кристалічною структурою.

Використовуючи цю програму, автори розрахували зонну структуру та густину електронних станів в гексагональних кристалах GaN, AlN, ZnO, ZnS, ZnSe, ZnTe, CdTe в температурному інтервалі 0 – 600 K; зонну структуру, густину електронних станів та розподіл зарядової густини валентних електронів на (111) поверхні кристалів ZnSe, GaAs, ZnS, ZnTe, CdTe; електронну структуру ідеальної поверхні (111) Si в температурному інтервалі 10 – 600 K. З результатами розрахунків детально можна ознайомитись у роботах [8 – 13].

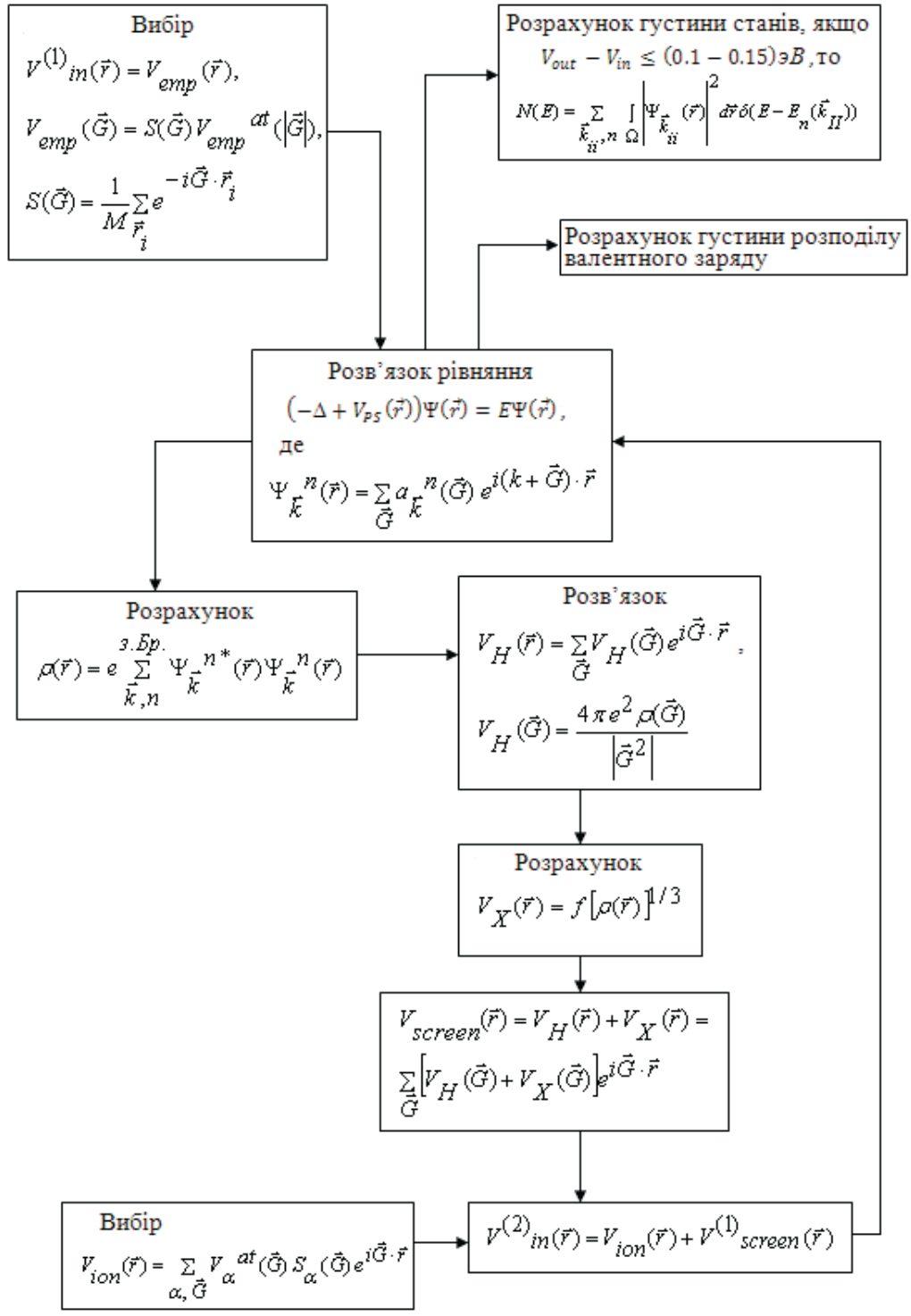


Рис.1 Блок-схема програми.

Список використаних джерел

1. *Sobolev V.V., Nemoshkalenko V.V.,* Electronic structure of solids in the fundamental absorption region - Kyiv: Nauk. Dumka, 1992. (in Russian)
2. *Zidilkovsky I.M.* Electrons and holes in semiconductors - Moskow: Nauka, 1972. – 640 p. (in Russian)
3. *Behshtedt F., Enderline R.* Surfaces and borders in semiconductors. – Moscow: Mir, 1990. – 484 p. (in Russian)
4. *Schluter M., Chelicowsky J.R., Louie S.G., Cohen M.L.,* Self-consistent pseudopotential calculations for Si (111) surfaces: Unreconstructed (1x1) and constructed (2x1) model structures // Phys. Rev.B. – 1975. – V 12. – P. 4200-4214.
5. *Chelicowsky J. R., Cohen M. L.*, (110) surface states in A^2B^6 and A^3B^5 zinc-blende semiconductors // Phys. Rev.B. – 1976. – V 13. – P. 826-834.
6. *Chelicowsky J. R., Cohen M. L.*, Self-consistent pseudopotential calculation for the relaxed (110) surface of GaAs // Phys. Rev.B. – 1979. – V 20 – P. 4150-4159.
7. *T.Soma, H.-Matsuo Kagaya*, Local heine-abarenkov model potential for III–V and II–VI covalent compounds // Phys.Stat.Sol.(b) – 1983. – V 119 – P. 547-553.
8. *T.V. Gorkavenko, S.M. Zubkova, L.N. Rusina,* Temperature dependence of the band structure of semiconductor compounds of the wurtzite type: GaN, AlN. // Fizika i tekhnika poluprovodnikov – 2007. – V 41 – P. 661-669.
9. *T.V. Gorkavenko, S.M. Zubkova, V.A. Makara, L.N. Rusina,* Temperature dependence of the band structure of wurtzite type semiconductor compounds: ZnS, ZnSe, ZnTe, CdTe. // Fizika i tekhnika poluprovodnikov – 2007. – V 41– P. 908 – 916.
10. *T.V. Gorkavenko, S.M. Zubkova, L.N. Rusina V.A. Makara, V. L. Bekenyov,* Calculations of the temperature dependence of the band structure and the density of states of hexagonal xinc oxide // Ukr. J. Phys. – 2007. – V 52 – P. 460 – 467.
11. *T.V. Gorkavenko, S.M. Zubkova, V.A. Makara, L.N. Rusina,* O.V. Smelyansky, Electronic properties of (111) surface of A^3B^5 and A^2B^6 – type crystals // Ukr. J. Phys. – 2011. – V 56 – P. 148 – 158.
12. *T.V. Gorkavenko, S.M. Zubkova, V.A. Makara, L.N. Rusina,* O.V. Smelyansky, Temperature dependence of the electronic structure of (111) surface Si / Т. В. Горкавенко, С. М. Зубкова, Л. М. Русіна, В. А. Макара, О. В. Смелянський // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – N 4. – P. 335 – 341.
13. *S.M. Zubkova, L.N. Rusina, T.V. Gorkavenko, V.A. Makara,* Temperature influence on the electronic structure of wurtzite type semiconductor compounds // Trudy IPM im. I.N. Franzevycha NANU, ser. “Modelirovanie v materialovedenii”. – 2006. – N 8 – P. 28 – 53.

Надійшла до редколегії 18.03.13

УДК 539.213:669.15:669.046.516.2

Кирильчук В.В.[1], м.н.с.,
Носенко В.К.[1], д.ф.-м.н.,
Носенко А.В.[1], к.ф.-м.н.,
Зелінська Г.М.[1], к.ф.-м.н.,
Міка Т.М.[2], к.хім.н.,
Ярмощук Є.І.[3], студ.

Вплив легування перехідними металами на стабільність та кінетику кристалізації аморфних сплавів системи Co-Si-B

Досліджено кінетику кристалізації, термічну стійкість та утворення кристалічних фаз в швидкозагартованих сплавах систем $Co_{72,5\div73,3}(Fe,Ni,Mn,Mo)_{5,7}(Si_{0,2}B_{0,8})_{21\div21,8}$ *та* $Co_{55,7\div58,3}(Fe,Ni,Mn)_{21,6\div24,2}(Si_{0,2}B_{0,8})_{20,1}$.

Показано, що термічна обробка при 550-580 К протягом 30 хв суттєво впливає на структурні характеристики амофних сплавів, а саме: зростає висота першого максимуму структурного фактора $i(s_1)$ *та площа під першим максимумом функції радіального розподілу атомів* A_m.

Показано, що легування базового сплаву $Co_{72,7}Fe_{4,6}Si_{6,0}B_{16,7}$ *домішками Fe, Ni, Mo, Mn погіршує характеристики термічної стабільності* T_{ons1}/T_L. *Збільшення вмісту легувальних домішок також призводить до зменшення температури початку первинної кристалізації. Встановлено, що кристалізація аморфних стрічок сплавів різного хімічного складу відбувається в дві стадії.*

Ключові слова: аморфний, кристалізація, термічна стабільність, легування.

[1]Інститут металофізики імені Г.В. Курдюмова НАН України, 03142, м. Київ, б-р Вернадського, 36
e-mail: kyrylchuk_v@ukr.net
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, e-mail: mikat@ukr.net
[3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д
e-mail:eugene151291@hotmail.com

V.V. Kyrylchuk[1], Jun. Sci. Res.,
V.K. Nosenko[1], Dr. Sci.,
A.V. Nosenko[1], PhD,
G.M. Zelinska[1], PhD,
T.M. Mika[2], PhD,
E.I. Yarmoschuk[3], stud.

Influence of transition metal alloying on stability and crystallization kinetics of Co-Si-B system amorphous alloys

Crystallization kinetics, thermal stability and formation of crystalline phases in the systems of $Co_{72,5\div73,3}(Fe,Ni,Mn,Mo)_{5,7}(Si_{0,2}B_{0,8})_{21\div21,8}$ *and* $Co_{55,7\div58,3}(Fe,Ni,Mn)_{21,6\div24,2}(Si_{0,2}B_{0,8})_{20,1}$ *rapidly quenched alloys was studied.*

Heat treatment at 550-580 K for 30 min was shown to influence considerably the structural characteristics of the amorphous alloys, namely height of the first maximum of structural factor $i(s_1)$ *and area under the first maximum of radial atomic distribution function* A_m *increase.*

The doping of $Co_{72,7}Fe_{4,6}Si_{6,0}B_{16,7}$ *base alloy with Fe, Ni, Mo, Mn was shown to deteriorate thermal stability characteristics* T_{ons1}/T_L. *Besides, the increase in dopants content leads to decrease of the temperature of primary crystallization onset.*

Crystallization of the amorphous ribbons of the different chemical compositions was found to proceed in two stages.

Key words: amorphous, crystallization, thermal stability, doping.

[1] G.V. Kurdyumov Institute for Metal Physics of NAS of Ukraine, 03142, Kyiv, Vernadsky blvd., 36,
e-mail: kyrylchuk_v@ukr.net
[2] Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: mikat@ukr.net
[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4д
e-mail: eugene151291@hotmail.com

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Досліджувалися аморфні сплави двох систем, перспективні з точки зору практичного використання як магнітопроводів з високими магнітними характеристиками, а саме: високою

© В.В. Кирильчук, В.К. Носенко, А.В. Носенко, Г.М. Зелінська, Т.М. Міка, Є.І. Ярмощук, 2013

індукцією насичення; лінійною (пологою) петлею гістерезису, низькою коерцитивною силою та близькою до нуля магнітострикцією.

Метою даної роботи було дослідити кінетику кристалізації, термічну стійкість та утворення кристалічних фаз в сплавах двох базових систем $Co_{72,5\div73,3}(Fe,Ni,Mn,Mo)_{5,7}(Si_{0,2}B_{0,8})_{21\div21,8}$ та $Co_{55,7\div58,3}(Fe,Ni,Mn)_{21,6\div24,2}(Si_{0,2}B_{0,8})_{20,1}$.

Вихідні сплави готувалися в індукційній печі в інертному середовищі *He* або *Ar* з чистих компонентів (не гірше 95,5 масових відсотка). Аморфні стрічки отримані методом спінінгування розплаву на гартувальний диск із хромистої бронзи.

Термічна стійкість та процеси кристалізації аморфних сплавів вивчалися за допомогою диференціального скануючого калориметра DSC 404F1 Pegasus Netzsch (ДСК) в захисній атмосфері *He*. Аморфність стрічок контролювалась методом рентгенівської дифракції на дифрактометрі ДРОН-3 в *Mo* K_α випромінюванні. Термічна обробка відбувалася при температурах 550-930 К протягом 30 хв в захисній атмосфері аргону.

Отримані результати та їх обговорення.

Для вихідних зразків були зняті залежності інтенсивності розсіяного випромінювання від кута розсіяння, характер яких підтвердив їх аморфність. Визначення термічної стабільності аморфної структури проводили при неперервній швидкості нагрівання $v_н$=20 К/хв. На рис.1 наведена ДСК крива, що характеризує перехід з аморфного в кристалічний стан аморфного сплаву $Co_{72,7}Fe_{4,6}Si_{6,0}B_{16,7}$; для інших сплавів характер залежності є подібним.

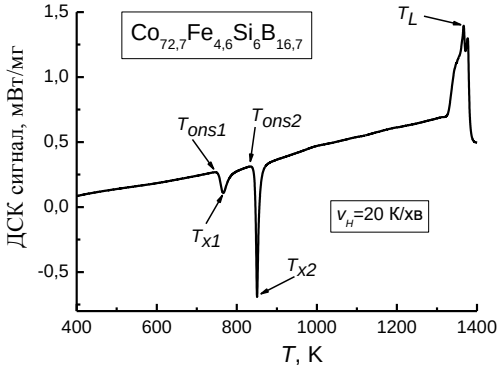


Рис.1. Калориметрична крива сплаву $Co_{72,7}Fe_{4,6}Si_{6,0}B_{16,7}$ при постійній швидкості нагрівання $v_н$=20 К/хв.

Екзотермічні піки свідчать про двостадійний характер кристалізації в цьому сплаві. Значення T_{ons1} та T_{ons2} відповідають температурі початку першої та другої стадії кристалізації. Третій ендотермічний пік відповідає температурі ліквідус T_L сплаву. В (табл. 1) наведені склади сплавів, значення T_{ons1}, T_{ons2}, температури ліквідус T_L та приведені температури початку первинної кристалізації T_{ons1}/T_L, якою характеризується термічна стійкість кожного сплаву. При підвищенні сумарного вмісту легуючих елементів *Fe*, *Ni*, *Mo* та *Mn* помічено, що температура початку первинної кристалізації T_{ons1} зменшується, в той час, як температура початку другої стадії кристалізації T_{ons2} залишається майже незмінною.

Таблиця 1

Характеристики термічної стабільності аморфних сплавів *Co(FeNiMoMn)SiB* при швидкості нагрівання 20 К/хв.

№	Склад сплаву	T_{ons1}, К	T_{ons2}, К	T_L, К	T_{ons1}/T_L
1	$Co_{72,7}Fe_{4,6}Si_{6,0}B_{16,7}$	739	826	1367	0,541
2	$Co_{73,2}Fe_{4,3}Mn_{0,5}Si_{5,3}B_{16,7}$	723	825	1372	0,527
3	$Co_{58,3}(Fe,Ni,Mn)_{21,6}(Si_{0,2}B_{0,8})_{20,1}$	685	814	1352	0,507
4	$Co_{55,7}(Fe,Ni,Mn)_{24,2}(Si_{0,2}B_{0,8})_{20,1}$	681	808	1359	0,501
5	$Co_{73}(Fe,Ni,Mo,Mn)_{5,7}(Si_{0,2}B_{0,8})_{21,3}$	719	839	1347	0,534
6	$Co_{73,3}(Fe,Ni,Mo,Mn)_{5,7}(Si_{0,2}B_{0,8})_{21}$	706	844	1346	0,525

Значення T_{ons1}/T_L дозволяють кількісно оцінити ефективність впливу легування на термічну стабільність базового сплаву. Видно, що легування базового сплаву *Fe, Ni, Mo, Mn* тобто полегшує процес первинної кристалізації. В цілому ж наведені тут, а також літературні погіршує характеристики термічної стабільності,

дані, свідчать на користь того, що процес переходу з аморфного в кристалічний стан більш адекватно описується кінетикою росту кристалів ("graine-growth kinetics" [1]), а ніж зародкоутворенням. Такий характер фазового перетворення обумовлений мікрогетерогенною структурою аморфного стану в цілому, а також значною кількістю вморожених центрів (зародків докритичного розміру), що утворюються при аморфізації розплаву [2]. Енергії активації визначалися за широко використовуваним співвідношенням Кіссінджера [3]:

$$\ln(\frac{v_н}{T_x^2}) = \frac{E_a}{RT_x} + C, \qquad (1)$$

де $v_н$ – швидкість нагрівання, T_x – температура піку ДСК-кривої, R – газова постійна (8,31 Дж/(моль*К)), C – константа.

За температурами піків першої та другої стадій кристалізації $T_{x1,2}$ в залежності від швидкості нагрівання $v_н$ (5, 10, 20, 40 К/хв) за співвідношенням (1) будувалися лінійні залежності в координатах($\ln(v_н / T_{x1,2}^2)$ від $1/T_{x1,2}$) (рис. 2), з нахилу яких визначалися значення ефективної енергії активації відповідних стадій кристалізації E_a^1 та E_a^2 (табл. 2).

Аналіз термічної стійкості аморфних фаз проводився виходячи з оцінки енергії активації обох стадій процесу кристалізації. Значення співставлення даних термічної стійкості і енергій активації процесу кристалізації досліджуваних аморфних сплавів свідчить, що збільшення вмісту легувальних домішок призводить до зменшення температури початку первинної кристалізації, що, в свою чергу, обумовлено зменшенням енергії активації даного процесу. Факт утворення кристалічних фаз в зразках з малим та великим вмістом легуючих елементів був підтверджений рентгенографічно (рис. 3).

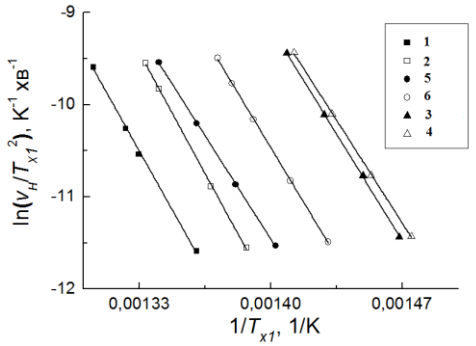


Рис. 2. Графіки Кіссинджера, побудовані для першої стадії кристалізації аморфних сплавів *Co(FeNiMoMn)SiB*.

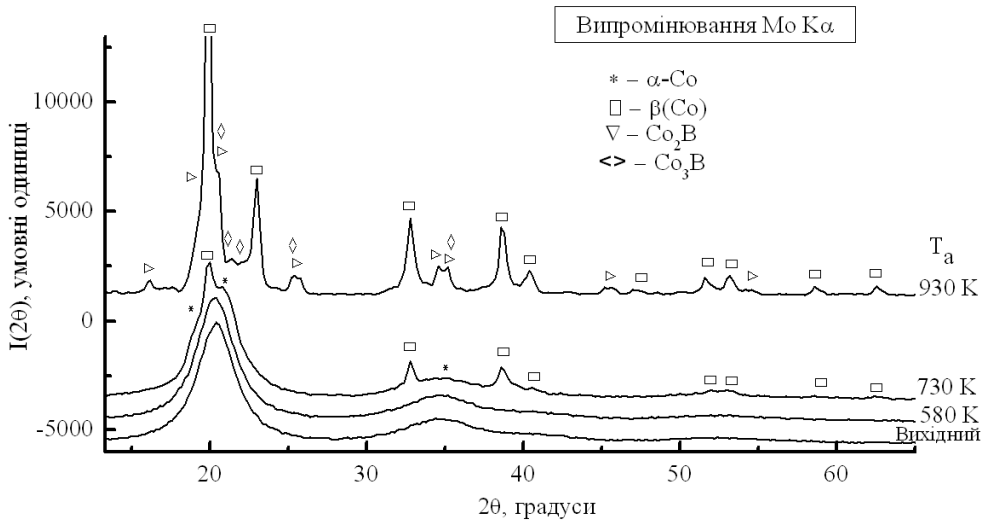


Рис. 3. Рентгенограми сплаву $Co_{73}(Fe,Ni,Mo,Mn)_{5,7}(Si_{0,2}B_{0,8})_{21,3}$ після різних термічних обробок при постійному часі відпалу t_a = 30 хв.

Таблиця 2

Ефективні енергії активації першої та другої стадій кристалізації E_a^1 та E_a^2.

№	E_a^1, кДж/моль	E_a^2, кДж/моль
1	302±6	490±13
2	311±5	537±12
3	276±3	632 ±20
4	265±2	606±27
5	267±3	618±20
6	281±2	603±16

Фазовий аналіз стрічок, проведений з використанням картотечної бази ASTM, показав, що в сплавах з низьким сумарним вмістом легуючих перехідних елементів (до 5,7 ат.%) на першій стадії кристалізації утворюються кристали твердого розчину двох типів *α-Co* та *β-Co*, а на другій - бориди Co_2B та Co_3B; в стрічках сплавів з високим сумарним вмістом легувальних елементів (21,6-24,2 ат.%) одночасно з боридами кобальту, виділяється борид Ni_3B. Було також встановлено, що в досліджених сплавах із збільшенням температури відпалу до T_a = 930 К фаза α-*Co* зникає.

Для описання процесів кристалізації та фазоутворення в сплавах при термічних обробках здійснювалося моделювання рентгенограм за базисом сполук *α-Co, β-Co,* Co_2B, Co_3B та Ni_3B з використанням програми PowderCell 2.4 (табл. 3 та 4). Для прикладу на (рис. 4) наведено змодельовану рентгенограму для сплаву $Co_{55,7}(Fe,Ni,Mn)_{24,2}(Si_{0,2}B_{0,8})_{20,1}$.

Таблиця 3

Кристалографічні данні сполук *α-Co, β-Co,* Co_2B, Co_3B та Ni_3B.

Сполука	*α-Co*	*β-Co* (> 660 К)	Co_2B	Co_3B	Ni_3B
Тип гратки	Mg	Cu	$CuAl_2$	-	-
Просторова група	$P6_3/mmc$	*Fm3m*	*I4/mcm*	*Pbnm*	*Pbnm*
	№194	№225	№140	№62	№62
Сингонія	Гексагональна	Кубічна	Тетрагональна	Орторомбічна	Орторомбічна
Параметри гратки	*a*=2,52 Å *c*=4,1 Å	*a*=3,54 Å	*a*=5,10 Å *c*=4,21 Å	*a*=5,221 Å *b*=6,631 Å *c*=4,408 Å	*a*=5,22 Å *b*=6,616 Å *c*=4,391 Å

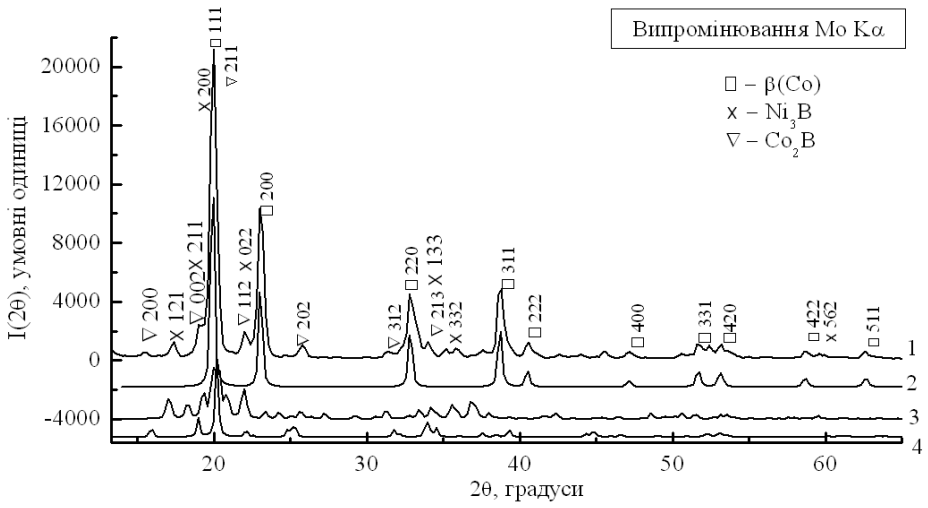


Рис. 4. Рентгенограми: 1 – експериментальна крива повністю закристалізованого сплаву $Co_{55,7}(Fe,Ni,Mn)_{24,2}(Si_{0,2}B_{0,8})_{20,1}$ (після термооброб-ки при t_a = 30 хв, T_a = 930 К);
2 – розрахована крива за базисом сполуки *β-Co*; 3 – розрахована крива за базисом сполуки Ni_3B; 4 – розрахована крива за базисом сполуки Co_2B.

Змодельовані рентгенограми, добре описали експериментальні результати для частково та повністю закристалізованих сплавів *Co(FeNiMoMn)SiB*. Змодельовані рентгенограми дозволили визначити зміни параметрів кристалічних граток, що добре узгоджується з літературними даними [4]. Видно, що при збільшенні вмісту легувальних домішок *Fe, Ni, Mo, Mn* параметри кристалічних граток *α-Co* та *β-Co* залишаються практично сталими a = 2,51 Å та a = 3,54 Å, тоді як параметри кристалічних граток Co_2B, Co_3B та Ni_3B змінюються (табл. 5). Такі зміни свідчать про утворення твердих розчинів заміщення або втілення атомів *Fe, Ni, Mo, Mn, Si* на базі сполуки Co_2B.

Таблиця 4

Атомні координати сполук *α-Co, β-Co,* Co_2B, Co_3B.

	α-Co	*β-Co*	Co_2B		Co_3B (Ni_3B)		
Атом	Co	Co	Co	B	Co1	Co2	B
Місце	2c	4a	8h	4a	8d	4c	4c
x	0,3333	0	0,1590	0	0,1834	0,5388	0,8764
y	0,6667	0	x+0,5	0	0,0689	0,2500	0,2500
z	0,2500	0	0	0,2500	0,1656	0,8422	0,0574

Таблиця 5

Параметри кристалічних граток *α-Co, β-Co* та Co_2B в сплавах *Co(FeNiMoMn)SiB* після термічних обробок при T_a= 730 К та T_a= 930 К.

№	T_a = 730 К		T_a = 930 К			
	α-Co	*β-Co*	*β-Co*	Co_2B	Co_3B	Ni_3B
2	a = 2,5172Å c = 4,1164Å	a = 3,5364Å	a = 3,55Å	a = 5,04Å c = 4,2Å	–	–
5	a = 2,5199Å c = 4,1306Å	a = 3,5315Å	a = 3,5382Å	a = 5,0754Å c = 4,1952Å	a = 5,1956Å b = 6,6942 Å c = 4,3080Å	–
3	a = 2,5151Å c = 4,0262 Å	a = 3,5496 Å	a = 3,5462 Å	–	a = 5,2220 Å b = 6,6349 Å c = 4,4065 Å	a = 5,3195 Å b = 6,6366 Å c = 4,3726 Å
4	a = 2,5176Å c = 4,0556 Å	a = 3,5436Å	a = 3,5398Å	a = 5,14Å c = 4,31Å	–	a = 5,1195 Å b = 6,7164 Å c = 4,4538 Å

Аналізуючи експериментальні рентгенограми, було розраховано структурні фактори $i(s)$ та функції радіального розподілу атомів (ФРРА) для стрічок сплавів *2, 3, 4, 5*. Обробка отриманих результатів дозволила визначити структурні характеристики отриманих аморфних стрічок. В (табл. 6) наведено висоту першого максимуму структурного фактора $i(s_1)$, його напівширину $\Delta s_{1/2}$, міжатомну відстань r_1, площу під першим максимумом ФРРА A_m (характеристика координаційного числа) та об'ємну частку кристалічної фази X_c (визначалася за методикою [5]) для цих сплавів після різних термічних обробок, протягом 30 хв.

Таблиця 6
Структурні характеристики аморфних стрічок сплавів *Co(FeNiMoMn)SiB*.

№	T_a, К	$i(s_1)$, од.	$\Delta s_{1/2}$, Å^{-1}	r_1, Å	A_m, од.	X_c, %
2	вихідний	3,63	0,46	2,56	11,4	0
	580	3,81	0,46	2,55	11,6	0,002
	730	4,19	0,40	2,54	11,5	0,121
	930	11,57	0,08	2,53	11,3	1,0
5	вихідний	3,71	0,44	2,55	11,2	0
	580	3,72	0,45	2,56	11,5	0,002
	730	3,76	0,45	2,54	11,1	0,094
	930	10,84	0,09	2,53	12,1	1,0
3	вихідний	3,88	0,46	2,54	11,8	0
	550	3,91	0,45	2,55	12,6	0,002
	730	4,86	0,33	2,53	11,6	0,201
	930	11,09	0,09	2,54	11,5	1,0
4	вихідний	3,68	0,45	2,56	11,2	0
	550	3,83	0,45	2,55	11,4	0,002
	730	4,99	0,30	2,52	11,4	0,126
	930	10,71	0,10	2,52	10,8	1,0

Видно, що термічна обробка при 550÷580 К протягом 30 хв суттєво впливає на структурні характеристики амофних сплавів, а саме: зростає висота першого максимуму структурного фактора $i(s_1)$ та площа під першим максимумом ФРРА A_m. Таке зростання A_m та $i(s_1)$ повязане з виходом вільного об'єму та локальними змінами ближнього впорядкування. Термічна релаксація атомної структури призводить до зняття внутрішніх гартувальних напружень, які утворюються в стрічці підчас гартування на мідному диску.

Висновки

Показано, що термічна обробка при 550÷580 К протягом 30 хв. суттєво впливає на структуру аморфних стрічок, а саме відбуваються вихід вільного об'єму та локальні зміни ближнього впорядкування, що проявляється в зростанні висоти першого максимуму структурного фактора *i(s1)* та площі під першим максимумом ФРРА *Am*.

Показано, що легування базового сплаву $Co_{72,7}Fe_{4,6}Si_{6,0}B_{16,7}$ домішками *Fe*, *Ni*, *Mo*, *Mn* погіршує характеристики термічної стабільності T_{ons1}/T_L, що пояснюється утворенням збагаченого домішкового шару на міжфазній поверхні первинних кристалічних зародків та аморфної матриці. Встановлено, що збільшення вмісту легувальних домішок в аморфних сплавах системи *Co(FeNiMoMn)SiB* призводить до зменшення температури початку первинної кристалізації, що обумовлено зменшенням енергії активації процесу нанокристалізації *β-Co* фази.

Список використаних джерел

1. *Maslov V.V., Nosenko V.K., Brovko A.P. et al.* // Metallofizika i noveyshie tekhnologii. – 2002. – V.24,N 11. – P.1001–1016. (in Russian).
2. *Rudenko Yu.A., Nosenko V.K., Tkach V.I. et al.* // Metallofizika i noveyshie tekhnologii. – 2012 – V.34, N 6 – P.771-785. (in Russian).
3. *Kissinger H.E.*, J. Res. Nat. Bur. Stand., 1956 –V.57. – P.217.
4. *Smitlz K.J.* Metally. Spravochnik / Ed.: S.G.Glazunov. – Moscow: Metallurgiya, 1980. – 447 p. (in Russian).
5. *Illinsky A.G., Maslov V.V., Nosenko V.V. et al. //* Metallofizika i noveyshie tekhnologii. – 1999. – V.21, N 12. – P. 38-45. (in Russian).

Надійшла до редколегії 29.03.2013

УДК 530.145, 524.354.6

Лазуренко Д.В.[1], студ.,
Горкавенко В.М.[2], к.ф.-м.н., доцент,
Тугай А.В.[3], к.ф.-м.н. асистент

Можливість утворення конденсату скалярних полів в околі нейтронної зірки

В роботі розглядається взаємодія скалярного зарядженого поля із самодією вигляду $\lambda(\varphi\varphi^*)^2$ з зовнішнім електричним полем. Така взаємодія може призводити до генерації ненульового вакуумного середнього скалярного поля. Розглянуто можливість існування конденсату скалярних частинок поблизу потужних гама-джерел, наприклад, нейтронних зірок. Показано, що ефективне утворення конденсату можливе для заряджених скалярних полів φ з масою кванта поля $m_\varphi<1$ кеВ.

Ключові слова: вакуумний конденсат, зовнішнє поле, нейтронні зірки

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова. 4д
[1]e-mail: lazurenkodaniil40@gmail.com
[2]e-mail: gorka@univ.kiev.ua
[3]e-mail: tugay.anatoliy@gmail.com

D.V. Lazurenko[1], stud.,
V.M. Gorkavenko[2], PhD, assoc. prof.,
A.V. Tugay[3], PhD, asistant

Possibility of the scalar field condensate creation in vicinity of the neutron star

We consider intreraction of scalar field with self-action $\lambda(\varphi\varphi^*)^2$ with external electrical field. It can lead to generation of nonzero vacuum average of the scalar field. We consider possibility of the scalar particles condensate in vicinity of the powerful gamma-source, e.g., neutron star. We show that effective creation of the condensate is possible for charged scalar field φ with mass $m_\varphi < 1$ keV.

Key Words: vacuum condensate, external field, neutron star

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
[1]e-mail: lazurenkodaniil40@gmail.com
[2]e-mail: gorka@univ.kiev.ua
[3]e-mail: tugay.anatoliy@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ

Процеси взаємодії між частинками у сучасному всесвіті добре описуються в рамках Стандартної моделі елементарних частинок за рахунок обміну проміжними векторними бозонами, маса яких виникає завдяки їх взаємодії із скалярним полем Хіґса. Поле Хіґса знаходиться в стані зі спонтанним порушенням симетрії та має ненульове вакуумне середнє, що визначає також маси елементарних частинок Стандартної моделі.

Чи можна за допомогою певних зовнішніх чинників змінити значення вакуумного середнього хігсівського поля? З теоретичної точки зору це можливо. По-перше, оскільки спонтанне порушення симетрії хіґсівського поля відбулося у Всесвіті при температурі порядку 100 ГеВ (близько 10^{15} Кельвінів), то у середовищі з вищою температурою вакуумне середнє хігсівського поля буде нульовим. Однак, таких температур немає у сучасному Всесвіті. По-друге, на вакуумне середнє може вплинути зовнішнє поле по аналогії зі впливом магнітного поля на надпровідні властивості матеріалів. В лабораторних умовах ми можемо створити лише електромагнітні зовнішні поля. Вважаючи, що поле Хіґса є зарядженим, можна оцінити необхідне значення напруженості магнітного поля, що відповідає $\sim 10^{24}$ Гс. Поле такої напруженості не можна створити в лабораторних умовах. Більш того, поле такої напруженості не існує в сучасному Всесвіті. Врахування ж того, що хіґсівське поле є нейтральним і може взаємодіяти з електромагнітним полем лише на рівні петльових поправок вимагатиме ще більших значень напруженості електромагнітного поля. Отже, практично вплинути на вакуумне середнє поля Хіґса ми не можемо. Див. детальніше роботу [1] стосовно впливу зовнішнього поля на вакуум Стандартної моделі.

В даній роботі розглядається задача взаємодії певного модельного зарядженого поля із самодією вигляду $\lambda(\varphi\varphi^*)^2$ з зовнішнім класичним векторним полем, що трактується як електромагнітне поле. Така взаємодія призводить до генерації ненульового вакуумного середнього скалярного поля, що може призвести до реалізації механізму Хіґса. Фактично, в роботі розглядається задача, коли взаємодія з зовнішнім

© Д.В Лазуренко, В.М. Горкавенко, А.В. Тугай, 2013

полем призводить до спонтанного порушення симетрії в початково симетричній системі.

У випадку монохроматичного зовнішнього поля дана задача була детально розглянута в [2]. Ми будемо цікавитися випадком, коли зовнішнє поле має широкий спектр частот.

В якості класичного зовнішнього поля розглядається електричне поле поблизу потужних джерел електромагнітного поля у Всесвіті. В якості прикладу, розглядається поле поблизу пульсару Краб у сузір'ї Тільця, оскільки електромагнітне випромінювання від нього є добре дослідженим.

Спонтанне порушення симетрії у зовнішньому векторному полі

Лагранжіан зарядженого масивного скалярного поля φ (з масою кванта поля m), що взаємодіє з без масовим нейтральним калібрувальним векторним полем A_μ має вигляд

$$L = (D_n\varphi)^* D^n\varphi - m^2|\varphi|^2 - \frac{\lambda}{6}|\varphi|^4 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (1)$$

де λ є безрозмірним параметром самодії, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – електромагнітний тензор Максвела, $D_n = \partial_n + ieA_n$ – оператор подовженої похідної, A_n – 4-вектор потенціалу векторного поля (розуміється електромагнітне поле) та $|\varphi|^2 = \varphi^*\varphi$

Виберемо 4-потенціал класичного нестаціонарного просторово-однорідного зовнішнього векторного поля у вигляді

$$A_n = (0,0,0,A_3(x_0)), \quad (2)$$

якому відповідає існування лише третьої компоненти електричного поля

$$E_3 = \partial_{x0}A_3. \quad (3)$$

Припустимо, що при $x_0 \to -\infty, A_3 \to \text{const}$, а при скінченних проміжках часу поле є періодичною функцією від часу з періодом *T* та представляється у вигляді

$$A_3(x_0) = \sum_{i=s}^{S}(\alpha_i \sin(\omega_i x_0) + \beta_i \cos(\omega_i x_0)) \quad (4)$$

Тобто для заданих значень мінімальної ($\omega_{\min}$) та максимальної ($\omega_{\max}$) частоти матимемо $s = \omega_{\min}/\Omega$, $S = \omega_{\max}/\Omega$ відповідно, де $\Omega = 2\pi/T$. З явного вигляду (1),(2) випливає рівняння руху для скалярного поля.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^{\,2}} - \Delta\varphi + 2ieA^3\frac{\partial\varphi}{\partial x^3} + (e^2A^2{}_3 + m^2)\varphi + \frac{\lambda}{3}|\varphi|^2\varphi = 0. \quad (5)$$

Розглянемо середнє від вторинноквантованого оператора поля $\hat{\varphi}$ по гайзенбергівському вакууму $|0\rangle$, що визначений при $x_0 \to -\infty$. В силу інваріантності задачі відносно просторових трансляцій маємо

$$\langle 0|\varphi(x,x_0)|0\rangle = \langle 0|\varphi(0,x_0)|0\rangle = u(x_0). \quad (6)$$

Величина $u(x_0)$ в загальному випадку залежить від часу, оскільки зовнішнє поле нестаціонарне. Нерівність її нулю означає наявність спонтанного порушення симетрії. В силу С-інваріантності вакуумного стану $|0\rangle$ можна вважати, що $u(x_0)$ є дійсною функцією, тобто виконується співвідношення

$$\langle 0|\varphi(x,x_0)|0\rangle = \langle 0|\varphi^*(0,x_0)|0\rangle = u(x_0) \quad (7)$$

Припустимо також, що середнє від добутку польових операторів є добутком середніх значень операторних полів

$$\langle 0|\varphi^*\varphi^2|0\rangle \approx \langle 0|\varphi^*|0\rangle\langle 0|\varphi|0\rangle\langle 0|\varphi|0\rangle = u^3, \quad (8)$$

що є справедливим для розгляду процесів в скелетному наближенні.

Зробивши усереднення по вакууму $|0\rangle$, що визначений при $x_0 \to -\infty$, над рівнянням поля (5) з використанням виразів (6)-(8) отримаємо [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^{\,2}} + (e^2A^2{}_3 + m^2)u + \frac{\lambda}{3}u^3 = 0. \quad (9)$$

Квадрат потенціалу зовнішнього поля зручно записати як

$$A_3{}^2(x_0) = \frac{a_0^{\,2}}{2} - \sum_{k=1}^{2S}(\Delta_k \sin(\omega_k x_0) + \xi_k \cos(\omega_k x_0)) \quad (10)$$

тоді рівняння (9) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 y = \\ = \sum_{k=1}^{2S} (h_k \sin(k\tau) + \tilde{h}_k \cos(k\tau)) + \gamma y^3, \quad (11)$$

де були використані позначення $\lambda / 3 = \gamma$, $\tau = \Omega x_0$, $u(\tau) = y(\tau)\Omega$, $(ea_0)^2 / 2 + m^2 = \omega^2$ та

$$h_k = \frac{e^2}{\Omega^2}\xi_k, \quad \tilde{h}_k = \frac{e^2}{\Omega^2}\Delta_k. \quad (12)$$

Таким чином, задача знаходження вакуумного середнього скалярного поля зводиться до знаходження стійких режимів стаціонарних коливань рівняння типу Матьє (11), що було розглянуто в [3]. Значення Фур'є коефіцієнтів $h_k, \tilde{h}_k$ ми візьмемо з результатів спостережень випромінювання пульсару Краб.

Електромагнітне поле поблизу пульсару Краб

Магнітні поля астрономічних джерел на багато порядків перевищують поля, досяжні у наземних експериментах. Серед усіх об'єктів Всесвіту найбільшими магнітними полями характеризуються нейтронні зорі – надщільні ядра масивних зір, що завершили свою еволюцію.

Нейтронні зорі були теоретично передбачені Л.Д.Ландау у 1932 р. як кінцевий етап еволюції зір, маса яких у кілька разів перевищує масу Сонця. Енергія випромінювання зір утворюється в їх ядрах в реакціях термоядерного синтезу більш важких хімічних елементів з легких.

Якщо маса ядра зорі перевищує 1.4 маси Сонця (межа Чандрасекара) в ньому починаються екзотермічні термоядерні реакції синтезу елементів важчих за залізо. енергія отримується при катастрофічному стисненні ядра – гравітаційному колапсі. В результаті колапсу ядро зорі стискається в 1000 разів і його радіус досягає 10 км, а густина – мільярда тон на кубічний сантиметр (густина атомного ядра). Колапс супроводжується виділенням великої кількості енергії (спалах Наднової зорі) і глобальною нейтронізацією (обернений бета-розпад) зоряної речовини. Якщо маса ядра не перевищує трьох мас Сонця, утворюється стійка компактна конфігурація – нейтронна зоря.

Внаслідок закону збереження магнітного потоку, магнітне поле нейтронної зорі досягає гігантських значень $10^{12} - 10^{15}$ Гс та є близьким до критичного значення магнітного поля $H_c = m^2c^3 / e\hbar \cong 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс, де m та e – маса та заряд електрона відповідно.

Внаслідок закону збереження моменту імпульсу нейтронні зорі швидко обертаються (спостережувані періоди лежать в межах від 1 мс до 10 с), тому їх випромінювання є періодичною послідовністю імпульсів, а самі нейтронні зорі, що доступні таким чином для спостережень, називаються пульсарами. В наш час відомо близько 1000 радіопульсарів і 40 рентгенівських пульсарів[4].

Рентгенівські пульсари є тісними подвійними зоряними системами, в яких відбувається акреція речовини з атмосфери газової зорі на нейтронну зорю. Рентгенівське випромінювання утворюється в акреційному диску і модулюється обертанням нейтронної зорі.

Прийнятий нині механізм випромінювання радіопульсарів був вперше запропонований Голдрайхом і Джуліаном і розвинений російськими астрофізиками Бескіним, Гуревичем і Істоміним, див. [5]. Він полягає у наступному. Магнітне поле нейтронної зорі, внаслідок її обертання, індукує електричне поле, яке є найбільшим поблизу магнітних полюсів. Напруженість електричного поля можна оцінити як $E = \frac{\Omega R}{c} B$, де Ω - частота обертання нейтронної зорі, R – радіус нейтронної зорі. Таким чином, напруженість електричного поля в пульсарі може сягати $E \approx 10^{14}$ В/м, що суттєво менше за критичну напруженість електричного поля, при якій відбувається масове народження електрон-позитронних пар з вакууму $E_c = m^2c^3 / e\hbar \approx 10^{18}$ В/м. Отже, індуковане електричне поле поблизу пульсару буде коливатися з частотою Ω і не буде впливати на утворення конденсату частинок.

Натомість, в сильному магнітному полі поблизу пульсару ефективно відбувається процес, обернений до однофотонної анігіляції у зовнішньому полі, а саме: процес однофотонного народження електрон-позитронних пар, див., наприклад, [6]. Заряджені частинки рухаються вздовж силових ліній магнітного поля і внаслідок їх кривини випромінюють гама-кванти. Ці гама-кванти теж можуть породжувати електрон-позитронні пари. Таким чином електрон-позитронна плазма розмножується. Розмноження плазми ефективне до висоти 100 метрів над поверхнею нейтронної зорі, вище електрони

тільки втрачають енергію на випромінювання, а нові електрон не народжуються.

Електрон-позитронна плазма вморожена в магнітне поле нейтронної зорі, тому магнітосфера обертається разом з зорею як тверде тіло. Внаслідок цього лінійна швидкість обертання частинок зростає з віддаленням від зорі і на деякій поверхні (близькій за формою до циліндра, вісь якого є віссю обертання нейтронної зорі) досягає швидкості світла. Ця поверхня називається світловою поверхнею. Вона обмежує магнітосферу пульсара і має радіус кілька десятків тисяч кілометрів. Силові лінії магнітного поля нейтронної зорі, що досить близькі до магнітного полюса, впираються у світлову поверхню.

Електрони, що рухаються по цим лініям ефективно випромінюють (в радіодіапазоні), втрачають енергію, гальмуються на світловій поверхні і стікають по ній до екваторіального шару магнітосфери. Потім вони досягають поверхні зорі по іншій силовій лінії (ця лінія є граничною між лініями, що замикаються на світловій поверхні і лініями, що її не досягають, вона називається сепаратрисою) і проходять останній етап свого шляху по поверхні зорі, наближаючись до магнітного полюса. На цьому останньому етапі електрони створюють силу Ампера (пондермоторну силу), яка гальмує обертання нейтронної зорі. Таким чином струм у магнітосфері замикається, а енергія обертання зорі перетворюється у випромінювання, яке є максимальним вздовж магнітної вісі. У радіопульсарів магнітна вісь нахилена до осі обертання і раз на період спрямовується на Землю. Саме тому і спостерігаються імпульси. Дана модель викладена в огляді [5].

Потрібно також вказати, що область випромінення високоенергетичних фотонів збільшується зі зменшенням енергії фотонів. Найбільш енергетичні фотони (рентгенівські і гама) випромінюються з області магнітного полюсу, а радіовипромінювання надходить до нас з границі магнітосфери, що віддалена від нейтронної зорі на багато тисяч кілометрів.

Найбільш дослідженим радіопульсаром є пульсар Краб у сузір'ї Тільця. Він спостерігається вже більше 40 років та має неперервний синхротронний спектр [7], що тягнеться від радіо до дуже жорсткого гама-випромінювання з енергією порядку 10 ТеВ. Повний спектр Краба показаний на рис 1. Період пульсару Краб – 33 мс. Пульсар Краб є найяскравішим астрономічним гама-джерелом і використовується у гама-астрономії як стандарт блиску.

Спектр випромінювання пульсару Краб можна апроксимувати як

$$F(E) = \tilde{F}(E) n_\gamma [см^{-2} \cdot сек^{-1} \cdot кеВ^{-1}], \qquad (13)$$

де n_γ – кількість фотонів, E – енергія окремого фотона, $\tilde{F}(E)$ – функція, відома на кожному окремому проміжку від радіо до жорсткого діапазону випромінювання.

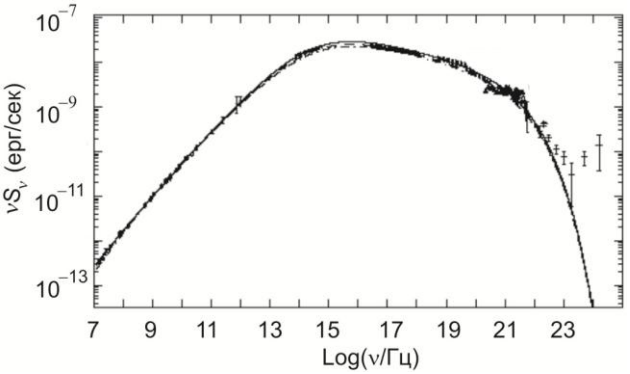


Рис. 1. Спектр випромінювання пульсару Краб. Функція νS_ν відповідає функції F з (13), помноженій на квадрат енергії фотона [7].

Повну енергію, що випромінюється пульсаром за одиницю часу, можна записати як

$$\tilde{E} = \frac{4\pi R^2}{1см^2 \cdot 1сек} \int_{E\min/1keB}^{E\max/1keB} \tilde{F}(x) x dx \ \ [keB]. \qquad (14)$$

Враховуючи, що відстань до пульсару Краб становить близько двох кілопарсек, отримаємо $\tilde{E} = 1.19 \cdot 10^{49}\ eB/сек$.

Припустимо, що дана енергія випромінюється з невеликої області поблизу магнітного полюса пульсара, котру можна представити у вигляді циліндру з радіусом та висотою порядку $r = 100$ метрів. Тоді густину енергії випромінювання в зазначеній області можна оцінити як

$$\varepsilon = \int_{E\min/eB}^{E\max/eB} \varepsilon_\omega(x) dx \ \ [1eB^4], \qquad (15)$$

де $\varepsilon_\omega(x)$ – спектральна густина

$$\varepsilon_\omega(x) \cong 3.7 \cdot 10^8 x \tilde{F}(10^{-3} x). \qquad (16)$$

Розглянемо тепер умову класичності для електромагнітного поля поблизу пульсару. Вона полягає в тому, щоб в просторі об'ємом λ^3, де λ

– комптонівська довжина хвилі фотона, містилося багато фотонів, тобто

$$n_\gamma = N_\gamma \frac{V_\gamma}{V} = \frac{E_\omega}{\omega}\frac{\lambda^3}{V} = (2\pi)^3 \frac{\varepsilon_\omega}{\omega^4} >> 1 \qquad (17)$$

В нашому випадку умова класичності для поля поблизу пульсару Краб буде виконуватися для фотонів з енергією $\omega << 1\, keB$.

Коефіцієнти частотного розкладу

Знайдемо коефіцієнти частотного розкладу $h,\ \tilde{h}$ зовнішнього поля (4).

Оскільки напруженість електричного поля

$$E_3 = \sum_{i=s}^{S} \omega_i \alpha_i \cos(\omega_i x_0) - \omega_i \beta_i \sin(\omega_i x_0), \qquad (18)$$

то просторова густина енергії електричного поля $\varepsilon = E_3^2/2$ дорівнюватиме

$$\varepsilon = \frac{\bar{a}_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{2S} \bar{\xi}_k \cos(\omega_k x_0) - \bar{\Delta}_k \sin(\omega_k x_0), \qquad (19)$$

$$\bar{a}_0^2 = \sum_{k=s}^{S} \omega_i^2 (\alpha_i^2 - \beta_i^2). \qquad (20)$$

Константи $\bar{\xi}_k, \bar{\Delta}_k$ можна явно отримати, але ми не будемо їх наводити у зв'язку з громіздкістю виразів.

Провівши усереднення густини енергії за часом, отримаємо

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{k=s}^{S} \omega_i^2 (\alpha_i^2 - \beta_i^2)/4. \qquad (21)$$

Враховуючи що розмірність $[\varepsilon] = [m^4]$, $[\omega_i] = [m]$, отримаємо, що розмірності $[\alpha] = [\beta] = [m]$. Відповідно, можна перейти до наступних безрозмірних змінних $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \cdot 1eB^4$, $\omega_i = \tilde{\omega}_i \cdot 1eB$, $\alpha = \tilde{\alpha}_i \cdot 1eB$, $\beta = \tilde{\beta} \cdot_i 1eB$:

$$\langle \tilde{\varepsilon} \rangle = \sum_{k=s}^{S} \tilde{\omega}_i^2 (\tilde{\alpha}_i^2 - \tilde{\beta}_i^2)/4. \qquad (22)$$

Оскільки проміжки між ω_k і ω_{k+1} маленькі, краще перейти до інтегрування :

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{4\tilde{\Omega}} \int_{\omega\min}^{\omega\max} (\tilde{\alpha}_i^2(x) - \tilde{\beta}_i^2(x)) x^2 dx \quad [eB^4]. \qquad (23)$$

Порівнявши останній вираз з (15) отримаємо

$$\tilde{\alpha}^2(x) - \tilde{\beta}^2(x) = 1.474 \cdot 10^9 \frac{\tilde{F}(10^{-3}x)}{x} \tilde{\Omega}. \qquad (24)$$

Вважаючи для спрощеної оцінки $\alpha(x) = \beta(x)$, отримаємо

$$a_0^2 = \frac{2}{\tilde{\Omega}} \int_{\tilde{\omega}\min}^{\tilde{\omega}\max} \tilde{\alpha}^2(x) dx \quad [eB], \qquad (25)$$

$$h(z) = -\frac{2e^2}{\tilde{\Omega}^{-3}} \int_{\tilde{\omega}\min}^{\tilde{\omega}\max} \tilde{\alpha}(x)\tilde{\alpha}(x+z) dx \qquad (26)$$

на проміжку $0 \le z \le \tilde{\omega}_{\max} - \tilde{\omega}_{\min}$ та

$$\tilde{h}(z) = -\frac{2e^2}{\tilde{\Omega}^{-3}} \int_{Max[\tilde{\omega}\min, z-\tilde{\omega}\max]}^{Min[\tilde{\omega}\max, z-\tilde{\omega}\min]} \tilde{\alpha}(x)\tilde{\alpha}(z-x) dx \qquad (27)$$

на проміжку $2\tilde{\omega}_{\min} \le z \le 2\tilde{\omega}_{\max}$. Для інших значень z параметри $h, \tilde{h}$ дорівнюють нулю.

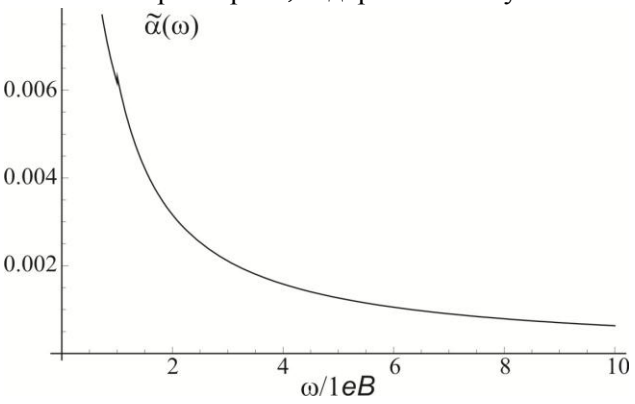


Рис. 2. Поведінка функції $\tilde{\alpha}(\omega)$.

Вирази (18), (24) дозволяють встановити межі застосування умови однорідності зовнішнього поля, що була використана в рівнянні (11). За умови її виконання нас не буде цікавити залежність від просторових координат електричного поля поблизу пульсару і задача матиме простий розв'язок.

Критерій однорідності нестаціонарного електричного поля наведений в [2]: $E(\omega) >> E_c \omega/\pi m$, де m – маси частинок скалярного поля, що можуть народитися парами в електричному полі. У нашому випадку він матиме вигляд

$$\alpha(\omega) >> m/\pi e, \qquad (28)$$

де поведінка функції $\alpha(\omega)$ наведена на рис 2.

Як можна побачити з рис.2, умова однорідності може бути виконана або при надзвичайно малих частотах випромінювання $(\omega << m)$ при масах $m \geq 0.1$ еВ, або ж при $(\omega \sim m)$ при малих масах $m < 0.1$ еВ квантів скалярного поля.

Висновки

В даній роботі ми встановили, що умова класичності зовнішнього електричного поля в околі пульсару Краб виконується для випромінювання з частотами $(\omega << 1)$ кеВ, вважаючи для оцінки, що все випромінювання генерується в околі магнітного полюсу пульсару. Як відомо [2,3], основний вклад в ефект утворення конденсату будуть давати електричні поля з частотами $(\omega \sim m)$. Оскільки в Стандартній моделі найлегшим зарядженим скалярним полем є поле піонів з масою $m_\pi \sim 140$ МеВ, то для частинок Стандартної моделі ефект утворення конденсату буде відсутній.

Якщо ж розглянути задачу знаходження маси частинки деякого гіпотетичного скалярного поля, для якого ефект конденсації мав би місце, то ми приходимо до наступних висновків.

По-перше, такі частинки повинні мати масу $m < 1$ кеВ, оскільки в протилежному випадку ($m >> 1$ кеВ) ефект буде сильно подавленим. Оскільки потрібно буде розглядати поля з частотами $\omega < 1$ кеВ, ми зіткнемося з проблемою того, що низькоенергетичне поле буде насправді утворюватися не в околі магнітного полюсу, а суттєво далі. Більш коректна оцінка умови класичності електричного поля знизить нашу оцінку в 1 кеВ. Чим меншу масу кванта гіпотетичного поля ми будемо розглядати, тим з більшої області навколо пульсару буде відбуватися опромінення поля необхідної частоти і це потрібно буде враховувати.

По-друге, при розгляді рівняння (11) в однорідному наближенні в області малих мас частинок виникає наступна, чисто математична проблема. Величина $(\omega/\Omega)^2$ виявляється величиною одного порядку з коефіцієнтами $h, \tilde{h}$ і стандартний метод розв'язку нелінійного рівняння Матьє перестає працювати. Щоб побачити це, ми в якості прикладу розглянули поле з масою $m = 0.01$ еВ та обмежилися впливом випромінювання з частотами $10^{-3} < \omega < 10^{-1}$ еВ (умова однорідності (28) накладатиме обмеження $\omega < 10^{-1}$ еВ).

По-третє, при розгляді відповідного рівняння (11), що описуватиме утворення конденсату, потрібно буде враховувати доданки, пов'язані з неоднорідністю електричного поля (28).

Нарешті, навіть якби перелічені проблеми вдалося розв'язати, то потрібно було б врахувати, що для заряджених частинок з масою $m < 1$ кеВ критичне значення електричного поля, при якому відбувається масове народження пар частинка-античастинка, складає $E_c < 5 \cdot 10^{12}$ В/м (верхнє значення наведено для частинок з $m = 1$ кеВ). Оскільки, як вже було відзначено раніше, електричне поле поблизу пульсару має напруженість 10^{14} В/м, то ефект від народження таких електрично заряджених частинок був би набагато більшим за ефект утворення ними вакуумного конденсату. По ефекту їх інтенсивного народження, частинки таких мас можна було б спостерігати.

Подяка

Автори висловлюють подяку за зверненя уваги до даної задачі Кириченко О.Г., УНДЦА «Зонд ФАКС НТУУ «КПІ».

Список використаних джерел

1. *Skalozub V.V.* Vacuum of electroweak interaction in intensive external fields // PEPAN – 1985. – V 16. – P. 1005-1052. (in Russian).
2. *Grib A.A., Mamaev S.G., Mostepanenko V.M. Quantum effects in the intensive external fields* – Moscow., Atomisdat, 1980. – *296 p.* (in Russian).
3. *G. Shmidt Parametrical oscillations* – Moscow, Mir, 1978. – 336 p. (in Russian).
4. *Manchester R.N., Hobbs G.B., Teoh A., Hobbs M.* The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue // AJ – 2005. – V.129, – P. 1993 – 2006.
5. *Beskin V.S., Gurevich A.V., Istomin Ya.N.* Physics of the Pulsar Magnetosphere. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. – 432 p.
6. *Ternov I.M., Dorofeev O.P.* Quantum effects in intensive magnetic field // PEPAN – 1994. – V 25. – P.5-93.
7. *Saoti T.* Study of the High Energy Gamma-ray Emission from the Crab Pulsar with the MAGIC telescope and Fermi-LAT // arXiv: 1105.3400 (2011) – 143 p.

Надійшла до редколегії 18.03.13

УДК 536

Мороз К.О.*, к.ф.-м.н., доц.

Пружні властивості магнітної рідинної системи на основі води

Досліджені термодинамічні властивості магнітної рідинної системи на основі води, стабілізованої подвійним шаром лауринової кислоти. Отримані ізотермічні та ізобаричні пружні властивості співставлені з аналогічними даними для води. Експериментальні значення густини даної системи описані за допомогою мало-параметричного рівняння стану. Побудовані, проаналізовані та співставлені з даними для води температурні залежності його параметрів.

Ключові слова: *магнітна рідинна система; вода, водневий зв'язок, термодинамічні властивості*

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: morozko@univ.kiev.ua

K.O. Moroz*, Ph.D., Associate Professor

Elastic properties of water based ferrofluid

The thermodynamic properties are investigated for the magnetic liquid system based on water stabilized by a double layer of lauric acid. These isothermal and isobaric elastic properties are compared with similar data for water. Experimental values of density are described by few-parametric equation of state. It is constructed, analyzed and mapped to similar data for water temperature dependences of its parameters.

Keywords: *magnetic liquid system, water, hydrogen bonding, thermodynamic properties*

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: morozko@univ.kiev.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Магнітні рідинні системи (МРС) є рідинними системами, що зберігаючи властивість плинності речовини, реагують на прикладене магнітне поле [1-3]. Визначення теплофізичних властивостей таких систем у зв'язку з молекулярною будовою має фундаментальне і прикладне значення. Згідно із статистичною теорією рідин та рідинних систем їх фізичні властивості залежать від молекулярної будови, а та в свою чергу чутлива до густини системи. Змінюючи тиск, можна призводити до зміни густини системи та її молекулярної будови [4]. Розмір часток магнітної рідинної системи складає близько 10 нм, він визначає їх однодоменний стан і робить, таким чином, дані системи чутливими до зовнішнього магнітного поля. Стабілізуючі шари в магнітній рідинній системі можуть забезпечувати інтерфейс для функціональних молекул і комплексів. Зараз існують магнітні рідинні системи з широким спектром фізичних властивостей на основі води, вуглеводнів, рідких металів [5-8].

Метою даної роботи є експериментальне дослідження пружних та калоричних термодинамічних властивостей магнітної рідинної системи на основі води стабілізованої подвійним шаром лауринової кислоти, виявлення взаємозв'язку між особливостями цих властивостей та молекулярнолю будовою досліджуваної рідини. У якості магнітного матеріалу у даній магнітній рідинній системі використовувались наночастинки магнетиту Fe_3O_4, намагніченість насичення системи складала 100 Гс. P-V-T виміри були проведені за допомогою метода сільфонного п'єзометра [4] з диференційним трансформаторним датчиком лінійних переміщень в інтервалі тисків 0,1 – 101,3 МПа та температур 299 – 331 К, дані густини системи на лінії рівноваги рідина-пара були отримані за допомогою пікнометричного методу. На основі виміряних даних були знайдені ізотермічний модуль пружності K_T, коефіцієнт теплового розширення α_P та пбудоване рівняння стану. Похибка визначення густини в експерименті складала 0.1%, для ізотермічного модуля пружності та коефіцієнта теплового розширення ця

© Мороз К.О., 2013

величина не перевищувала 1% та 2% відповідно.

Таблиця 1

Ізобаричний коефіцієнт теплового розширення $\alpha_P x10^3$ (1/K) для МРС магнетит-лауринова кислота-вода та води

МРС на основі води		
	307 К	**319.3 К**
0,1 МРа	0,20	0,24
44,1 МРа	0,18	0,27
103,2 МРа	0,13	0,33
Вода		
	294,2 К	**319,3 К**
44,1 МРа	0,32	0,44
103,2 МРа	0,35	0,45

Із зіставлення температурних залежностей ізобаричного коефіцієнта теплового розширення МРС магнетит-лауринова кислота-вода і води (див. Таблицю 1) випливає, що величина ізобаричного коефіцієнта теплового розширення води в кілька разів більша чим величина ізобаричного коефіцієнта теплового розширення МРС. Таке зменшення коефіцієнта теплового розширення пов'язане із збільшенням сил міжмолекулярної взаємодії в системі при додаванні МРС і стабілізатора у воду, подібні результати отримані також в аналізі ізотермічного модуля пружності K_T.

Отримані експериментально значення густини системи магнетит-лауринова кислота-вода були описані за допомогою напівемпіричного рівняння стану Тейта-Таммана яке в диференціальній формі має вигляд:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - A \ln \frac{B+P}{B+P_0}},$$

де A і B – сталі рівняння Тейта-Таммана, V – об'єм системи, V_0 – об'єм системи при атмосферному тиску, P – тиск. У результаті було знайдено сталі рівняння та порівняно з аналогічними даними для води без домішок. Як випливає із статистичного обгрунтування рівняння стану Тейта-Таммана, сталі B та A цього рівняння пов'язані з парметрами потенціалу міжчастинкової взаємодії [4, 8].

Таблиця 2

Стала B (МПа) рівняння стану Тейта для води та для дослідженої магнітної рідинної системи на основі води

	299 К	**307 К**	**319 К**	**330 К**
Вода	308	313	318	316
МРС	325	328	336	327

Значення сталої A для води без домішок становить 0,137, а для МРС магнетит-лауринова кислота-вода 0,350. Як випливає з отриманих значень A та B МРС, для неї характерні менше значення похідної у відштовхувальній гілці потенціалу та на декілька відсотків більша глибина ефективного потенціалу, як це випливає з таблиці 2. Подібні результати вже були отримані раніше для магнітних рідинних систем на основі води [8].

Таким чином, згідно отриманих результатів та статистичного обгрунтування рівняння стану Тейта-Таммана, можна зробити висновки, що в дослідженій магнітній рідинні системі спостерігається більше чим двократне зменшення похідної відштовхувальної гілки ефективного потенціалу міжмолекулярної взаємодії та зростання глибини потенційної ями ефективного потенціалу міжчастинкової взаємодії більше чим на 10%, що у свою чергу супроводжується зменшенням ізобарного коефіцієнта теплового розширення та ізотермічного модуля пружності в МРС порівняно з водою.

Список використаних джерел

1. R.E. Rosensweig, Ferrohydrodynamics, Cambridge Univ. Press (1985)
2. I.Anton, I. De Sabata, L.Vekas: Application orientated researches on magnetic fluids. J. Magn. Magn. Mater. 85 (1990) 219-226.
3. B.Berkovsky, V.Bashtovoi (Eds.), Magnetic fluids and applications handbook, Begell House: New York (1996)
4. Adamenko I.I., Bulavin L.A. Physics of liquids and liquid systems. - К.: «ASMI», 2006. – 663р.
5. M.A.Willard, L.K.Kurihara, E.E.Carpenter, et al.: Chemically prepared magnetic nanoparticles. Inter. Mater. Rev. 49 (2004) 125-170.
6. G.Baldi, D.Bonacchi, M.C.Franchini, M.C. Gentili, G.Lorenzi, A.Ricci, C.Ravagli: Synthesis and coating of cobalt ferrite nanoparticles: a first step toward the obtainment of new magnetic nanocarriers. Langmuir. 23(7) (2007) 4026-8.
7. T.R.Pisanic, J.D.Blackwell, V.I.Shubayev, R.R.Finones, S.Jin: Nanotoxicity of iron oxide nanoparticle internalization in growing neurons. Biomaterials. 28(16) (2007) 2572-81.
8. L.A. Bulavin, K.O. Moroz, S.P. Nedyak, V.I. Petrenko Ukr Journal of Physics, (2012). Vol. 57, No 3, P. 351-354

Надійшла до редколегії 15.02.13

УДК 538.9

Павленко О.Л[1], к. ф.-м.н., асист.

Першопринципні розрахунки електронної та коливної структури молекулярних комплексів C_{60}-Ti та C_{60}-Ti-C_{60}

Показана можливість взаємодії атомів титану з молекулами фулеренів C_{60} шляхом формування комплексів молекул C_{60}-Ti та димерів C_{60}-Ti-C_{60}. Методом Хартрі-Фока здійснено оптимізацію геометрії, розрахунки електронної та коливної структури комплексів фулеренів C_{60}-Ti та C_{60}-Ti-C_{60}. При приєднанні атома титану має місце пониження симетрії молекули C_{60}, що проявляється у розщепленні її вироджених коливних та електронних станів.

Ключові слова: фулерен C_{60}, коливні моди, енергетична щілина

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: pavlenkoelena@mail.univ.kiev.ua

O.L. Pavlenko[1], PhD, assistant

First-Principle Calculations of Electron and Vibration structure of C_{60}-Ti and C_{60}-Ti-C_{60} molecular complexes

Interaction of titanium atoms with C_{60} fullrene complexes was determined. Molecular complexes C_{60}-Ti and dimmers C_{60}-Ti-C_{60} are formed. Hartree-Fock method was applied to perform geometry optimization and calculate the electron and vibration structure of molecular complexes C_{60}-Ti and C_{60}-Ti-C_{60}. Additional chemically bonded Ti atom leads to significant lowering of the symmetry of C_{60} molecule, splitting of degenerated vibration and electron states.

Key Words: fullerene C_{60}, vibration modes, band gap

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: pavlenkoelena@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Вступ

Фулеритові плівки з огляду перспективності їх практичних застосувань (як елементи молекулярної електроніки, надтверді покриття, фоторезистори і сонячні елементи, провідники з керованою провідністю від діелектрика до надпровідника, елементи нелінійної оптики, акумулятори водню і ін.) привертають значну увагу дослідників.

Особливо цікавими є полімеризовані фулерити, що являють собою ковалентно зв'язані послідовності молекул C_{60} і перебувають у різних кристалічних фазах. Полімеризовані форми фулеритів отримуються хімічною обробкою, УФ-світловим опромінюванням, прикладанням високих тисків і температур [1]. Багатообіцяючим способом полімеризації плівок фулеритів є легування нелужними метлами, зокрема титаном [2]. Для плівок, легованих нелужними металами спостерігалося зростання електропровідності, покращення нелінійних властивостей [3]. Водночас, механізми таких змін у плівках C_{60}, легованих титаном, достеменно не встановлені. Для вивчення природи впливу легування атомами титану на поведінку фулеритів важливим є визначення характеру їх взаємодії з молекулами C_{60}, змін у коливних і електронних спектрах. У даній роботі теоретично досліджено можливість взаємодії атомів Ti з молекулами C_{60} та пропонується механізм взаємодії, що відповідальний за модифікацію вищезгаданих властивостей.

Методика розрахунків

Моделювання взаємодії молекул фулеренів з атомом титану, а також розрахунки геометрії, розподілу зарядів, дипольних моментів, коливних спектрів, активних при комбінаційному розсіянні світла (КРС) проводилися із застосуванням програмного пакету Gaussian-03 методом Хартрі-Фока RHF з використанням валентно-розщепленого базису 3-21G, що являє собою лінійні комбінації атомних функцій типу Гауса. На першому етапі була здійснена геометрична оптимізація, тобто операція знаходження мінімумів потенціальної енергії. Метод Хартрі-Фока та базис вибиралися виходячи з найкращого узгодження теоретичних та експериментальних значень частот коливних мод молекул фулеренів C_{60} [4].

© Павленко О.Л. 2013

Результати розрахунків

Квантово-хімічні розрахунки вказують на можливість утворення комплексів молекул C_{60} з атомом титану. Чотиривалентний атом титану може приєднуватися до подвійних зв'язків молекул C_{60} за рахунок перенесення заряду до C_{60}. При формуванні димерного комплексу C_{60}-Ti-C_{60} (рис. 1, б). атом Ті приєднується до подвійних зв'язків сусідніх молекул при їх розорієнтації на 90^0 одна відносно одної.

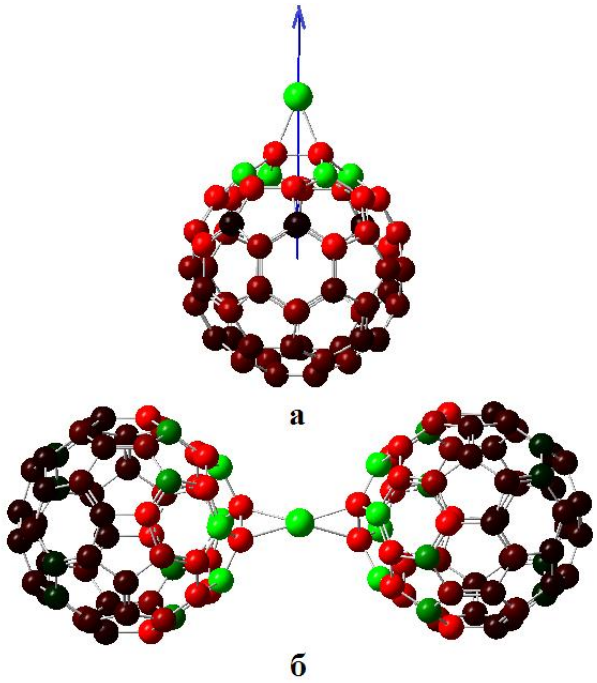


Рис. 1. Комплекси молекули C_{60} з атомом титану C_{60}-Ti(6,6) та C_{60}-Ti-C_{60}. Стрілка вказує напрям та величину дипольного моменту. Контраст атомів вуглецю молекул відповідає різним знакам та величинам розподіленого заряду.

При цьому атом титану стає позитивно зарядженим. Величина перенесеного заряду становить +1,08 та +2.06 від величини заряду електрона, внаслідок чого заряди на різних атомах вуглецю молекул C_{60} розподіляються нерівномірно, але симетрично. В результаті цього у комплексі C_{60}-Ti(6,6) виникає дипольний момент, що становить 10.85 Д. У випадку димеру C_{60}-Ti-C_{60} внаслідок скомпенсованості зарядів на обох молекулах дипольний момент дорівнює нулю.

Енергія комплексу C_{60}-Ti становить E=-3103,27 а.о., для C_{60}-Ti-C_{60} E=--5362,41 а.о., і є меншою ніж сумарна енергія складових елементів. Це вказує на енергетичну вигідність формування комплексів молекул C_{60} і атомів титану при зближенні їх на певну відстань. Експериментально така ситуація може реалізуватися при зануренні атомів титану у октаедричні та тетраедричні пори фулериту C_{60} при легуванні плівки [5]. Енергія зв'язку для C_{60}-Ti становить $E_{зв}$=509 кДж/моль, для C_{60}-Ti-C_{60} енергія майже вдвічі більша: $E_{зв}$=929 кДж/моль

Перенесення заряду та перерозподіл електронної густини по молекулі приводить до зміни довжин зв'язків між атомами вуглецю молекули C_{60}. На рис. 2 приведені значення довжин зв'язків комплексів C_{60}-Ti та C_{60}-Ti-C_{60} по відношенню до довжин зв'язків молекули C_{60}.

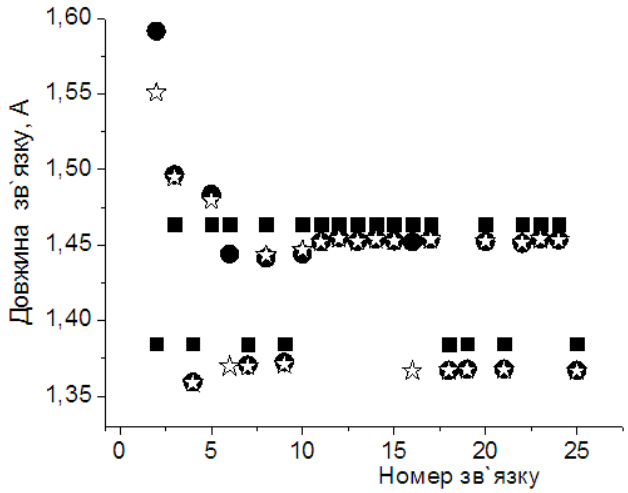


Рис. 2. Довжини одинарних та подвійних зв'язків в молекулі C_{60} (■) та комплексах C_{60}-Ti(6,6) (•) та C_{60}-Ti-C_{60} (☆). (Початок нумерації – біля зв'язку з атомом титану).

Відомо, що усереднені довжини зв'язків, визначені експериментально та теоретично у молекулі C_{60}, становлять 1.455±0.005 Å (для одинарного (5,6)-зв'язку) та 1.391±0.009 Å (для подвійного (6,6)-зв'язку) [4]. За допомогою розрахунків отримано значення, відповідно, 1.464 Å та 1.385 Å.

При формуванні комплексів довжини як подвійних так і одинарних зв'язків на молекулі зменшуються. Довжина розірваного подвійного зв'язку біля приєднаного атома Ті у комплексі C_{60}-Ti становить 1.59 та 1.55 Å. для C_{60}-Ti-C_{60}. З віддаленням від зв'язку довжини в обох типах комплексів зменшуються.

Нерівномірне зменшення довжин зв'язків внаслідок приєднання атома Ті до C_{60} приводить до зміни геометрії молекули C_{60}, зниження її симетрії, що проявляється у коливних спектрах,

рис. 3. Відомо, що зі 176 коливних мод молекули C_{60} лише 46 є активними [5]. Висока симетрія молекули приводить до виродження коливних мод, які для коливань типу (a_u, a_g), (f_{1g}, f_{1u}, t_{2u}, t_{2g}), (g_g, g_u) є відповідно, нуль-, три-, чотирикратно виродженими, а коливання типу h_g п'ятикратно вироджене. Тому спектр КРС для плівок C_{60} характеризується 10 активними коливними модами, дві з яких $A_g(1,2)$, та вісім коливань типу H_g, рис. 3 б (решта мод $F_u(1\text{-}4)$ є активними у спектрі ІЧ-поглинання [5]).

Внаслідок високої симетрії полімерного комплексу C_{60}-Ti-C_{60} із 357 активних коливань у спектрі КРС виникає лише близько 30 розщеплених станів, рис. 3а. Інші коливання, які є наслідком коливально-електронної взаємодії, мають незначну інтенсивність. Малоінтенсивна мода у спектрі КРС при 170 $см^{-1}$ відповідає симетричним валентним коливанням молекул C_{60} від спільного центру, а при 349 та 266 $см^{-1}$ – повздовжньому та поперечному антисиметричним коливанням молекул.

При утворенні димерів C_{60}-Ti-C_{60} спостерігається суттєва перебудова всього спектру КРС в порівнянні із аналогічним спектром молекул C_{60} як для низьких, так і для високих частот. З'являються інтенсивні максимуми в області коливних мод $A_g(1)$, $A_g(2)$, а також нові піки в діапазоні більш високих частот між положеннями мод $A_g(2)$ і $H_g(8)$. Чутливий до полімеризації фулеритів пік $A_g(2)$ у спектрі КРС для димеру C_{60}-Ti-C_{60} зсувається у бік нижчих частот на 12 $см^{-1}$. Характерною є поява у спектрі КРС мод $F_u(1,2)$, які на відміну від їх відносних інтенсивностей у спектрі ІЧ-поглинання більше подібні до їх поведінки для фулеренів. Спостерігається значне зростання інтенсивності коливних мод H_g.

Суттєва трансформація відбувається у розподілі електронних рівнів комплексів у порівнянні з відповідним розподілом молекули C_{60}, рис.4. Розрахунки електронної структури молекули C_{60} методом Хартрі-Фока підтверджують розрахунки іншими методами. Як відомо, молекула фулерену має 180 молекулярних орбіталей (МО) та 60 незайнятих або віртуальних МО [6].

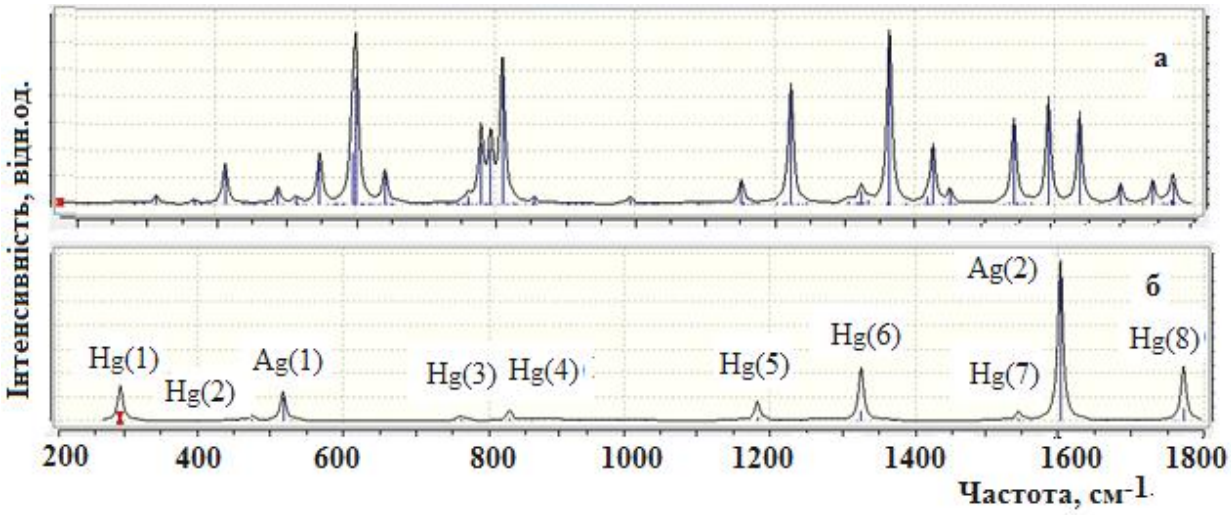


Рис. 3. Спектри комбінаційного розсіяння світла молекули комплексу C_{60}-Ti-C_{60} (а) та C_{60} (б).

60 МО (30 зайнятих та 30 віртуальних) можна розглядати як тип π, решта – σ типу, що узгоджується з результатами робіт проведених раніше [6].

На рис. 4. наведено розподіл електронних рівнів за енергіями молекули C_{60} основному стані, отриманий у результаті квантово-хімічних розрахунків.

Найвища заповнена молекулярна орбіталь (HOMO) є п'ятикратно виродженою, а наступна тобто найнижча незаповнена (LUMO) має кратність виродження рівну трьом [6].

Між останньою заповненою і першою незаповненою орбіталлю (HOMO- LUMO) існує енергетична щілина, яка, згідно даних розрахунків рівна 7,7 еВ.

При приєднанні атома металу відбувається розщеплення вироджених електронних рівнів. Для комплексу C_{60}-Ti за рахунок сильно розщеплених електронних станів (усі рівні стають невиродженими за виключенням деяких двократно вироджених) відбувається зменшення ширини HOMO-LUMO до значення 6,4 еВ. У випадку димеру дане значення більше і становить 7,2 еВ внаслідок того, що не всі рівні зазнають розщеплення, деякі залишаються чотририкратно виродженими .

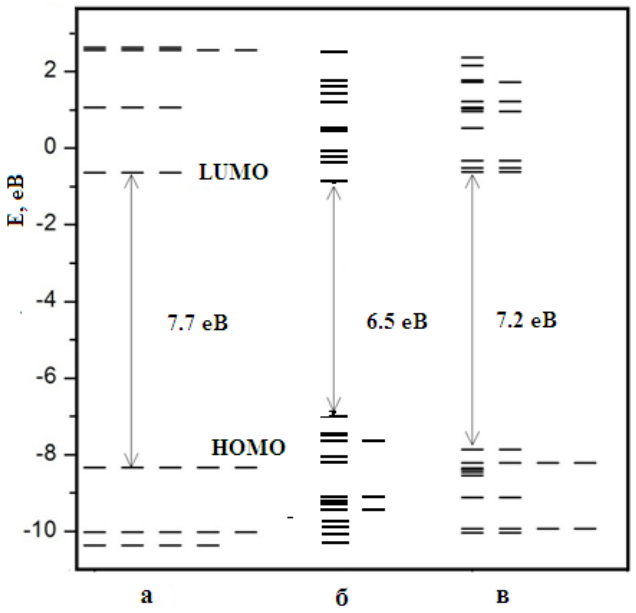


Рис. 4. Розподіл енергетичних рівнів молекули C_{60} та комплексів C_{60}-Ti(6,6) (б) та C_{60}-Ti-C_{60} (в).

Зменшення величини HOMO-LUMO відбувається також за рахунок нових домішкових рівнів від атомів титану. Експериментально це повинно проявлятися у зміні типу провідності плівок фулеритів, легованих титаном [7] у напрямку падіння опору.

Висновки

За допомогою квантово-хімічних розрахунків показано, що молекулам фулеренів, біля яких знаходиться атом титану, енергетично вигідно об'єднатися з ним зі встановленням хімічного зв'язку. Таке об'єднання можливе за рахунок розриву подвійного зв'язку на межі двох шестикутників молекули з формуванням комплексів C_{60}-Ti та C_{60}-Ti-C_{60}. Приєднання атома титану приводить до зміни геометрії молекули фулерену, пониження її симетрії молекули C_{60}, що проявляється у розщепленні вироджених коливних та електронних станів для комплексів C_{60}-Ti(6,6) та C_{60}-Ti-C_{60}. Спостерігається зменшення енергетичної щілини, що пояснює експериментальні дані з падіння опору плівок фулеритів C_{60}, легованих титаном.

Список використаних джерел

1. *Makarova T.L.* Электрические и оптические свойства мономерных и полимеризованных фуллеренов // FTP – 2001. – V. 35. – P. 257–293. (in Russian).
2. *Sun Q.* Clustering of Ti on a C_{60} Surface and Its Effect on Hydrogen Storage // J. Am. Chem. Soc. – 2005. – V. 127 (42). - P 14582–14583.
3. *Makarova T.L.* Оптические и электрические свойства $C_{60}Te_x$ // FTT– 2001. – V. 43. – P. 1336-1342. (in Russian).
4. *Xie R. H.* First-principles calculations of structural, electronic, vibrational, and magnetic properties of C_{60} and $C_{48}N_{12}$: A comparative study // J. of Chem. Phys. – 2003. – V. 118.– P. 8621-8634.
5. *Roding R.* Raman spectroscopy and X-ray diffraction studies of the single- and double bonded two-dimensional polymers $Na_nLi_{4-n}C_{60}$ // J.of Phys. and Chem. of Solids – 2004. – V. 65. – P. 355–357.
6. *Orlandi G.* Electronic states and transitions in C_{60} and C_{70} fullerenes // Photochem. Photobiol. Sci. – 2002. – V. 1. – P. 289–308.
7. *Dmytrenko O.P.* Polymerization of the C_{60} Fullerene Films, Doped by the Copper and Titanium Atoms // Metal Phys. and Adv. Tech. - 2008. -V. 30. - P. 915-922.

Надійшла до редколегії 12.03.13.

УДК 538.9

Подолян А.О.[1], к.ф.-м.н.

Спрощена методика визначення часу життя носіїв заряду в кремнії

Запропоновано спрощення методики визначення часу життя носіїв заряду в кремнії за кінетикою загасання фотопровідності. Суть спрощення полягає у використанні для однорідного збудження нерівноважних носіїв заряду в кремнії загальнодоступного арсенід-галієвого світлодіода.

Ключові слова: кремній, час життя носіїв заряду, загасання фотопровідності.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: gogi@univ.kiev.ua

A.O. Podolian[1], Ph.D.

Simplified technique for the determination of carrier lifetime in silicon

The simplification of the photoconductivity decay technique for the determination of carrier lifetime in silicon was proposed. The main point consists in using a common gallium arsenide light-emitting diode for homogeneous generation of non-equilibrium carriers in silicon.

Key words: silicon, carrier lifetime, photoconductivity decay.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: gogi@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Об'ємний час життя нерівноважних носіїв заряду τ_b є найбільш чутливою до структурної досконалості напівпровідника або напівпровідникового приладу характеристикою. Завдяки цьому з експериментальних вимірів τ_b в Si досліджують електричну активність різних дефектів. Найбільш поширені методики знаходження τ_b в Si базуються на вимірах кінетики загасання фотопровідності [1-4]. Розміри зразків та значення швидкості поверхневої рекомбінації s накладають обмеження на максимальне вимірюване значення τ_b [4]. За умови $s\to\infty$, яку легко реалізувати шляхом шліфування поверхні Si абразивним порошком [1], для зразка у вигляді прямокутного паралелепіпеду τ_b розраховується з виразу

$$\frac{1}{\tau_f}=\frac{1}{\tau_b}+\pi^2 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right), \qquad (1)$$

де a, b і c- лінійні розміри зразка, D- коефіцієнт дифузії неосновних носіїв заряду, а τ_f –стала часу кінцевої експоненціальної ділянки кривої загасання фотопровідності [4]. Таким чином, максимальне вимірюване значення τ_b буде обмежене лише лінійними розмірами зразка. Для типових $\tau_b\geq 100$ мкс розміри зразків повинні складати десятки міліметрів [4]. При таких розмірах важко досягти однорідного збудження носіїв заряду в Si, що необхідно для надійного знаходження τ_f. Як правило, для збудження використовують лазери або світлодіоди з $\lambda\geq 1{,}06$ мкм. Однак використання таких джерел в силу високої їх вартості ускладнює реалізацію методики. В роботі показано, як спрощується методика знаходження τ_b в Si при використанні в якості імпульсного джерела загальнодоступного GaAs світлодіода АЛ107Б.

Результати та їх обговорення

Як показали детальні дослідження спектрів випромінювання АЛ107Б, проведені з використанням призмового монохроматора та Ge фотодіода, довгохвильовий край спектра затягується до $\lambda>1{,}2$ мкм. Довгохвильову ділянку в спектрі АЛ107Б виділяли за допомогою Si фільтра. На Рис. 1 наведено повний спектр випромінювання світлодіода АЛ107Б (крива 1), та довгохвильова ділянка спектру, виділена за допомогою Si фільтра товщиною d=2 мм (крива 2). Максимуму випромінювання в спектрі АЛ107Б відповідає $\lambda_{макс}\approx 935$ нм (крива 1 на рис. 1). Таким чином, при використанні АЛ107Б в якості імпульсного джерела збудження нерівноважні носії заряду генеруються лише в тонкому приповерхневому шарі Si, товщина якого з урахуванням ширини спектра випромінювання трохи перевищує ~50 мкм [5].

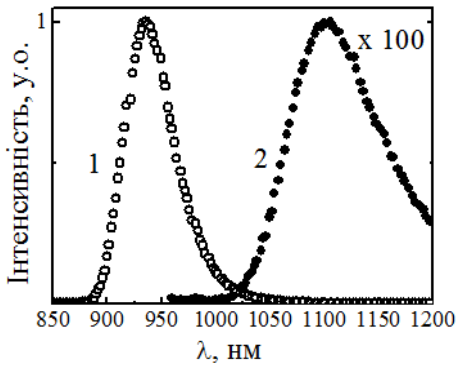


Рис. 1 Спектри випромінювання світлодіода АЛ107Б, записані без використання фільтра (1) та з використанням Si фільтра товщиною d=2 мм (2). Довгохвильова ділянка спектру представлена в збільшеному масштабі.

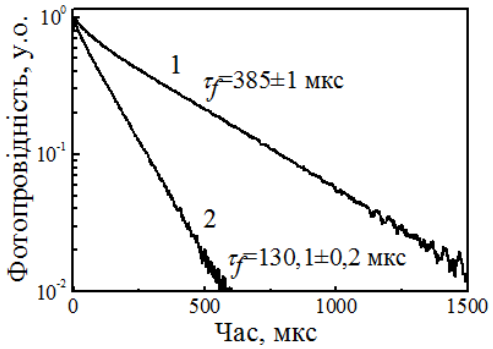


Рис. 2 Експериментальні криві загасання фотоструму у зразках p-Si (1) та n-Si (2) при збудженні нерівноважних носіїв заряду світлом АЛ107Б з λмакс≈1,1 мкм.

Максимум випромінювання виділеної довгохвильової ділянки спектра АЛ107Б припадає на $\lambda_{макс}$≈1,1 мкм (крива 2 на рис. 1), що відповідає глибині проникнення світла в Si ~19 мм [5]. Значить, використовуючи для генерації лише довгохвильову ділянку спектра АЛ107Б ми легко реалізуємо умову однорідного збудження носіїв заряду в об'ємі Si. Єдина проблема- це мала інтенсивність довгохвильової ділянки спектра. Проте дослідження показали, що для зразків Si з ρ>100 Ом·см цієї інтенсивності цілком достатньо для проведення надійних вимірів кінетики загасання фотопровідності за умов низького рівня інжекції [1]. На Рис. 2 наведено криві загасання фотоструму, виміряні згідно з [1] у зразках p-Si (ρ=1 кОм·см 7×7×20 мм) та n-Si (ρ=220 Ом·см 5×5×10 мм). Для генерації носіїв заряду використовували імпульси світла з $\lambda_{макс}$≈1,1 мкм від АЛ107Б, який збуджували генератором Г5-54.

Усереднені 1000 разів криві загасання фотоструму у зразках реєстрували з використанням широкосмугового підсилювача (К=1000) та аналогово-цифрового перетворювача L-783 (L-Card). Завдяки однорідній генерації носіїв заряду на кривих загасання легко виділити кінцеві експоненціальні ділянки, шляхом апроксимації яких знаходили τ_f. Розраховані за формулою (1) значення об'ємних часів життя складають τ_b=908±6 мкс та τ_b=153,1±0,3 мкс, для p-Si та n-Si, відповідно.

Таким чином, використання загальнодоступного GaAs світлодіода АЛ107Б дозволяє легко реалізувати в лабораторних умовах методику вимірювання τ_b за кінетикою загасання фотопровідності. Для більш потужного GaAs світлодіода можна очікувати більш високу інтенсивність довгохвильової ділянки спектра світлодіода.

Список використаних джерел

1. *Saritas M., McKell H.D.* Comparison of minority-carrier diffusion length measurements in silicon by the photoconductive decay and surface photovoltage methods // J. Appl. Phys. – 1988. – V. 63, № 9. – P. 4561-4567.
2. *Maekawa T., Fujiwara K.* Measurable Range of Bulk Carrier Lifetime for a Thick Silicon Wafer by Induced Eddy Current Method // Jpn. J. Appl. Phys. – 1995. – V. 34, N 8A. – P. 3955-3964.
3. *Gaubas E., Vanhellemont J.* Comparative Study of Carrier Lifetime Dependence on Dopant Concentration in Silicon and Germanium // J. Electrochem. Soc. – 2007. – V. 154, N 3. – P. H231-H238.
4. *Schroder D. K.* Semiconductor Material and Device Characterization. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2006. – 784 p.
5. *Green M.A.* Optical properties of intrinsic silicon at 300 K / *Green M.A. and Keevers M.J.*// Prog. Photovolt.- 1995.- V. 3, N 3, P.189–192.

Надійшла до редколегії 07.03.13

УДК 539.21

Семенько М.П.[1], д. ф.-м. н.,проф.

Кластерні особливості слабкої локалізації в аморфних сплавах на основі заліза

Температурні залежності електричного опору легованих аморфних сплавів на основі заліза проаналізовано в моделі, що пов'язує ефекти слабкої локалізації з кластерними структурами, утворених деякими легуючими компонентами. Така модель враховує мікронеоднорідну структуру аморфних сплавів. Наведено оцінки та аргументи на користь такої моделі.

Ключові слова: *аморфні сплави, електроопір, слабка локалізація, кластер.*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: smp@ univ.kiev.ua

M.P. Semen'ko[1], Dr. Sci., Prof.

Cluster peculiarities of weak localisation in iron-based amorphous alloys

Temperature dependencies of the electric resistance for doped iron-based amorphous alloys were analyzed within the model that weak localizations effects arise due to cluster structures. constructed some dopants. Such model takes into account the micro-inhomogeneous structure of amorphous alloys. The estimations and arguments have been adduced to support of such model.

Key Words: *amorphous alloys, electric resistance, weak localization, cluster.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: smp@ univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Як відомо [1,2], атомна будова аморфних металевих сплавів (АМС) є не статистично-однорідною, а складається з областей та кластерів з різним топологічним та композиційним ближнім порядком. На жаль застосування такої концепції атомної структури АМС практично не використовується при аналізі електричних властивостей. Тому використання таких особливостей внутрішньої будови АМС, зокрема, використання полікластерної моделі [2], досить важлива задача для встановлення основних механізмів розсіювання, що визначають їх електричні властивості.

Аналіз температурних залежностей електроопору $R(T)$ АМС на основі заліза показує, що їх характер визначається типом легуючої домішки [3]. В [4] показано, що наявність додаткового внеску, пропорційного $T^{1/2}$, може бути пояснено в рамках моделі початкової локалізації [5], в основу якої покладено скейлінговий розгляд квантових поправок до електроопору, зокрема механізму слабкої локалізації (СЛ) [6]. Хоча саме поняття скейлінгу і передбачає деякий масштабний фактор [6], але така концепція розглядає систему статистично-однорідною, що, як було відмічено вище, лише наближено може бути застосовано до АМС. Проведемо аналіз залежностей $R(T)$, зокрема наявність додаткового внеску від СЛ, з урахуванням кластерних особливостей внутрішньої будови АМС.

Температурна залежність $R(T)$ досліджувалась в інтервалі 77-950 К. Деталі експерименту можна знайти в [3,4]. Об'єктами досліджень були аморфні сплави на основі Fe. Особливістю залежностей $R(T)$ більшості із них є лінійний характер при високих T (від 300-450 К і до області кристалізації). Однак характер низькотемпературної поведінки суттєво визначається типом домішки. Електронний критерій виникнення внеску від СЛ в залежності від типу легуючої домішки розглянуто в [4]. Додатковий внесок ΔR, пропорційний $T^{1/2}$, був одержаний відніманням з експериментальних даних лінійної залежності, екстрапольованої до більш низьких T.

На рис. 1 зображена залежність Δr від $T^{1/2}$ для деяких АМС на основі Fe, легованих домішками, що призводять до виникнення саме такого внеску.

Як видно з рис.1, цю залежність можна описати рівнянням:

$$\Delta r = \varepsilon_0 - \varepsilon_{1/2} T^{1/2}, \qquad (1)$$

© М.П. Семенько, 2013

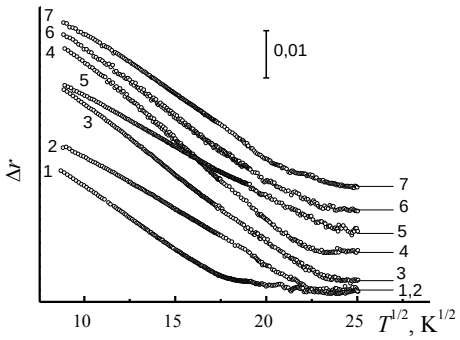


Рис. 1. Залежність Δr від $T^{1/2}$ для АМС: $Fe_{70}Mo_{10}Si_6B_{14}$ (1), $Fe_{80}Cr_5B_{15}$ (2), $Fe_{75}Cr_5B_{20}$ (3), $Fe_{80}Mn_5B_{15}$ (4), $Fe_{75}Mo_5B_{20}$ (5), $Fe_{78}Ni_1Mo_3Si_2B_{16}$ (6), $Fe_{75.5}Ni_{3.5}Mo_3Si_2B_{16}$ (7). (Ціна поділки вздовж осі Δr нанесена на графіку. Горизонтальні лінії – „нулі" відповідних залежностей).

Легко показати, що в моделі початкової локалізації температурна залежність електроопору може бути описана виразом [7]:

$$R(T) = a_0 + \alpha T - \varepsilon_{1/2} T^{1/2}. \qquad (2)$$

Безпосередньо вираз (1) можна трактувати з різних точок зору. Він може розглядатися як простою складовою виразу (2), тобто складовою з якої виділено доданок αT і деяку частину температурно-незалежного внеску. Саме це і передбачає модель [7].

В той же час при неоднорідній будові АМС можна припустити, що різні внески в температурну залежність $R(T)$ можуть виникати і внаслідок наявності різних областей з різним характером провідності. В такому випадку можна використати різні моделі електроопору, що враховують таку мікронеоднорідну атомну будову. Найпростішою з них є модель, коли сумарний питомий електроопір пропорційний об'ємному внеску питомих електроопорів кожної з областей. Припустимо, що додатковий внесок в ΔR виникає лише в деяких кластерних структурах з об'ємним вмістом v. Тоді сумарний питомий електроопір ρ може бути описаний виразом:

$$\rho = \rho_{\Phi 3}(1-\nu) + \Delta\rho_{СЛ}\nu, \qquad (3)$$

де $\rho_{ф3}=\rho_0+\alpha T$ – внесок в ρ від основної матричної структури. Його можна ототожнювати з механізмом Фабера-Займана. Внесок $\Delta\rho_{СЛ}=\rho^*-eT^{1/2}$ – це наслідок СЛ, що проявляється в кластерних структурах лише певного типу.

Для нормованої температурної залежності $r(T)=R(T)/R_{300}=\rho/\rho_{300}$ (R_{300}, ρ_{300} – електроопір або питомий електроопір АМС при T=300К) можемо записати:

$$r(T) = \rho_{\Phi 300}/\rho_{300}(1-\nu) + \alpha/\rho_{300}(1-\nu) + \\ + (\rho^*/\rho_{300})\nu - e/\rho_{300}\nu T^{1/2}. \qquad (4)$$

Звідси, в рівнянні (1):

$$\varepsilon_0 = \rho^*/\rho_{300}\nu, \qquad (5)$$

а

$$\varepsilon_{1/2} = e/\rho_{300}\nu, \qquad (6)$$

При сильному розсіюванні, відповідно до нерівності Йоффе-Регеля [6], мінімальне значення безрозмірного параметра $k_F l$ дорівнює 1. Внаслідок цього існує максимальне значення ρ^*, якого може досягти розупорядкований матеріал, зберігаючи рух електрона у вигляді плоскої хвилі [6]. Експериментальне величина граничного значення ρ^* складає 200÷300 мкОм·см. Тоді з рівняння (5) наближено можна оцінити об'ємний вміст кластерів.

В таблиці наведені значення ρ_{300} та апроксимаційних параметрів ε_0 та $\varepsilon_{1/2}$ ряду АМС на основі Fe. В цій же таблиці міститься оцінка v з використанням значення ρ^*=200 мкОм·см. Розраховане значення v в цілому правильно відображає зміни вмісту легуючого компоненту. Зокрема, у АМС Fe-Si-B, виготовлених з технічних лігатур, значення v вище ніж у АМС виготовлених з чистих компонентів. Такий фактор знаходить добре пояснення якщо припустити, що СЛ виникає не тільки в кластерних областях від легуючих компонент, але й кластерах, що формуються навколо технічних домішок.

З рівняння (6) та оцінки v можна одержати параметри, що характеризують локалізаційний внесок. Дійсно, температурна залежність провідності, що обумовлює внесок, пропорційний $T^{1/2}$, описується виразом [5]:

$$\Delta\sigma_{СЛ}(T) \cong \frac{1}{\pi^2}\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{L_i(T)}, \qquad (7)$$

де $L_i(T)$ – дифузна довжина втрати фази (в деяких випадках L_i розглядається як довжина локалізації). Якщо довжини вільного пробігу пружного розсіювання l_e, а непружного – l_i, то $L_i^2=(1/2)l_e l_i$. Якщо вважати, що $l_e\approx$0,3 нм (типова

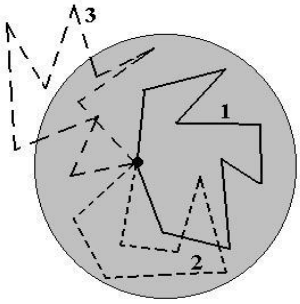


Рис. 2. Інтерференційні пари дифузійних траєкторій, вздовж яких розповсюджуються електронні хвилі. За відсутності кластера інтерференція має місце для всіх трьох траєкторій, а при наявності кластера (зафарбована область) інтерферують лише хвилі, що розповсюджуються лише по траєкторіям 1 та 2.

міжатомна віддаль для АМС), а $l_i \sim T^{-1}$ (для досліджуваного інтервалу T), то $L_i=\lambda_i T^{-1/2}$. Можна показати, що:

$$\lambda_i \approx \frac{e^2}{\hbar\pi^2}\frac{\nu\rho^{*2}}{\rho_{300}\varepsilon_{1/2}}. \qquad (8)$$

Оцінка величини L_i та l_i при температурі T=100 К дана в таблиці. Як видно, l_i виявилось на порядок меншим за l_e, що не сумісно з умовою виникнення СЛ ($l_i>>l_e$ [6]).

Однак в такій оцінці не враховано розмірні фактори кластерних структур. Зазвичай кластерна структура в аморфних матеріалах має розмір порядку декількох міжатомних віддалей, що співрозмірно з довжиною вільного пробігу електронів. На рис. 2 зображено кластерну область, в межах якої відбувається дифузійний рух електрона. Розглянемо замкнуті траєкторії, по яких електрон може повернутися у вихідну точку r=0 з протилежними напрямками руху. Серед них траєкторії 1 та 2 знаходиться в межах кластера, а траєкторія 3 – виходить за його межі.

Якщо не брати до уваги кластерні особливості, то слід враховувати всі траєкторії, довжина яких буде меншою за значення l_i, тобто, траєкторії 1, 2 та 3. Максимальний час, через який електрон, повернувшись у вихідну точку, ще прийматиме участь в інтерференції, це час збою фази τ_i, а мінімальний – це час пружного розсіювання τ [6].

Однак, траєкторія 3 виходить за межі кластера. Якщо енергія електрона ε_j зберігається після кожного акту пружного розсіювання в межах кластера, то, слід припустити, що після виходу електрона за його межі матиме збій фази. Тому, при інтегруванні верхня межа τ_i хоча і залишиться, однак, слід врахувати лише ті траєкторії, що знаходяться в межах кластера. Внаслідок цього, дифузна довжина L_i буде меншою, тобто входитиме у вираз (7) з певним множником.

Оцінимо цей множник. При відсутності кластера максимальна віддаленість електрона від точки r=0 без зміни фази складатиме $l_i/2$ (множник 1/2 враховує, що електрон повинен ще й повернутися у вихідну точку). Можна прийняти, що максимальна віддаленість електрона буде відповідати характерному розміру a, що приходиться на один такий кластер. При малій концентрації легуючого компонента, а отже і кластерів, це цілком макроскопічна величина. В такому випадку $a>>l_i/2$ і при інтегруванні по t автоматично виключаються всі траєкторії для яких $t>\tau_i$. При наявності кластера слід врахувати, що така максимальна віддаленість буде обмежена віддалю $R_к=(3V_к/4\pi)^{1/3}$, де $R_к$ – радіус кластера, а $V_к$ – його об'єм. Відношення $R_к/a$, очевидно і буде визначати коефіцієнт, на який змінюється дифузна довжина. Отже, матимемо $R_к/a \approx \alpha(V_к/V)^{1/3}=\alpha\nu_к^{1/3}$, де $\nu_к$ –частка об'єму, яку займають кластери, а α - деякий коефіцієнт (α<1). Зважаючи на це, в рівнянні (7) слід змінити L_i на $\alpha\nu^{1/3}L_i$, рівняння (8) набуде вигляду:

$$\lambda^*_i \approx \frac{e^2}{\hbar\pi^2}\frac{\nu^{2/3}\rho^{*2}}{\alpha\rho_{300}e_{1/2}}, \qquad (9)$$

Розраховані значення l_i^* при T=100 К для α=0,5 (порядок відношення $(3V_к/4\pi)^{1/3}$) наведені в таблиці. Як видно значення l_i^* значно перевищуватимуть значення l_e=0,3 нм, прийнятої за довжину пружного розсіювання, і вони мають порядок розміру кластерних структур в АМС (декілька міжатомних віддалей [8]).

Кластерний розгляд ефектів СЛ дає можливість пояснити цілий ряд особливостей на залежностях $R(T)$. До них можна використати підходи, що розглянуті в [4], для пояснення мінімуму електроопору на таких залежностях, різні критерії зникнення локалізаційного внеску. Крім цього, різний ступінь прояву локалізаційних ефектів, а отже і різне положення мінімуму на залежностях $\rho(T)$, зумовлено не тільки значеннями параметрів пружного розсіювання, а і різною концентрацією кластерів (легуючої

Таблиця 1

Питомий електроопір ρ, апроксимаційні коефіцієнти b_0, α, ε_0, $\varepsilon_{1/2}$ та оцінка об'ємного вмісту локалізаційних областей *v* та довжин непружного вільного пробігу l_i та l_i^* при температурі T=100 К для АМС на основі заліза. (АМС з індексом $^{(T)}$ виготовлені з технічних лігатур).

АМС	ρ, мкОм·см	b_0	α, 10^{-4} K^{-1}	ε_0, 10^{-2}	$\varepsilon_{1/2}$, 10^{-3} $K^{-1/2}$	*v*, %	l_i нм	l_i^* нм
$Fe_{80}Mn_5B_{15}$	162	0,9328	1,71	7.45	3,37	6,0	0,15	1,94
$Fe_{80}Cr_5B_{15}$	140	0,9402	1,56	5.63	2,51	3,9	0,15	2,56
$Fe_{80}Ti_5B_{15}$	163	0,9020	2,86	5.96	2,73	4,9	0,14	2,09
$Fe_{77,5}Ni_{3,5}Mo_1Si_2B_{16}$	159	0,9531	1,50	2,07	1,15	1,6	0,10	2,90
$Fe_{78}Ni_1Mo_3Si_2B_{16}$	150	0,9446	1,41	6,23	2,82	4,7	0,15	2,24
$Fe_{75,5}Ni_{3,5}Mo_3Si_2B_{16}$	165	0,9431	1,45	5,82	2,57	4,8	0,15	2,24
$Fe_{75,5}Ni_{3,5}Mo_3Si_2B_{16}{}^T$	160	0,9162	1,83	10,4	4,33	8,3	0,17	1,80
$Fe_{75}Ni_4Mo_3Si_2B_{16}$	148	0,9525	1,30	4,84	2,29	3,6	0,13	2,40
$Fe_{75}Ni_4Mo_3Si_2B_{16}{}^T$	172	0,9434	1,42	7,19	3,33	6,2	0,14	1,80

домішки). Але основним, очевидно, слід вважати наступне.

Ефекти СЛ досить чутливі до магнітного поля [6]. І при досить великих магнітних полях ці ефекти руйнуються (втрачається фазова когерентність). Тому досить важко пояснити їх походження в АМС на основі Fe через їх феромагнітну природу. Проте, нелінійні особливості на залежностях $R(T)$ лише при легуванні базового АМС елементами у яких магнітний момент або взагалі відсутній (Mo), або характеризується антиферомагнітною взаємодією з сусідніми атомами (Cr, Mn), дає підставу вважати, що внутрішні магнітні поля в кластерних структурах, утворених цими атомами, досить малі, а отже основне протиріччя знімається.

Очевидно, точнішу оцінку можна одержати лише при більш послідовному теоретичному розгляді цього питання. Однак, навіть тоді оцінка буде досить грубою, оскільки ρ^*, яке ми приймали рівним 200 мкОм·см, строго не визначене і змінюється в межах 200÷300 мкОм·см, а його теоретична оцінка навіть дає величину 1000 мкОм·см [6].

Таким чином, в роботі проаналізовано особливості температурної поведінки електроопору АМС на основі заліза і зроблено їх аналіз з точки зору ефектів СЛ в кластерних структурах, утворених певними легуючими атомами. Наведено оцінки та аргументи на користь такої моделі.

Список використаних джерел

1. *Amorphous metallic alloys*. ed. by V.V. Nemoshkalenko // Kiev: Naukova Dumka, 1987. – 248 p. (in Russian).
2. *Bakai A. S.* Polycluster amorphous solids // Moscow : Energoatomizdat, 1987. – 192 p. (in Russian).
3. *Semen'ko M.P.* Doping peculiarities on the electro-transport properties of iron-based amorphous alloys // Metallofiz. Noveishie Tekknol. – 2008. – **30**, №7 – P. 933-944. (in Ukrainian).
4. *Zakharenko M.I., Kalnysh T.V., Semen'ko M. P.* Interrelation between the Electrical Resistance of Amorphous Alloys and Their Atomic and Electronic Structures// Phys. Met. Metallogr.– 2012. – **113**, No. 8. –P.762–770.
5. *Howson M. A.* Incipient localisation and electron-electron correlation effects in metallic glass alloys // J. Phys. F: Met. Phys. – 1984. –**14**. – P.L25–L30.
6. *Gantmakher V.F.* Electrons in disordered environments // Moscow : FIZMATLIT, 2005. – 232 p. (in Russian).
7. *Zakharenko M.I., Kalnysh T.V., Orlenko M.V. Semen'ko M. P.* Weak localization in FINEMENT amorphous alloys // Metallofiz. Noveishie Tekknol. – 2012. – **34**, № 11. – C.1477-1486. (in Ukrainian).
8. *Glezer A.M.* Amorphous and nanocrystal structures: affinities, differences, reciprocal transitions // Russin Chem. Journal. – 2002. – **XLVI**, №5. – C.57-63. (in Russian).

Надійшла до редколегії 03.04.2013

УДК 53.091

Терентьєва Ю.Г[1]., к.ф.-м.н., доц.

До 100-річчя борівських орбіт

Нільс Бор визнаний світовою спільнотою як один із стовпів фізики XX століття. Постать Нільса Бора є фундаментальною і завдяки його науковим здобуткам, і через його дбайливе ставлення до численних учнів і їх нових ідей. Він є людиною, яка змогла осягнути велич ідей своїх колег і вчасно на зломі історії розвитку фізики авторитетно об'єднати різні теорії, що замість роз'єднання умів врешті спричинило неймовірний прогрес. Стаття присвячена саме тому історичному моменту в фізиці, коли Н.Бор висунув поряд з ідеєю колових орбіт ідею квантування моменту кількості руху.В статті показано, що ця не зовсім коректна і нелогічна ідея Н.Бора наштовхнула Луї де Бройля на правильну ідею про хвильову природу мікрооб'єктів.

Ключові слова: *квантування, Бор.*.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ,
пр.-т. Глушкова 4д,
e-mail: juliater@i.ua

Terentyeva Yu.G[1], RhD.,

Terentyeva Yu.G[1], RhD.,

To the 100-th anniversary of Bohr's orbites

Niels Bohr recognized by the international community as one of the pillars of twentieth century physics. Figure Niels Bohr is a fundamental and due to his scientific achievements, and because of his respect for the many students and their new ideas. He is a man who could understand the greatness of the ideas of his colleagues and time for hacking into the history of physics authoritatively combine different theories, instead of separation could eventually resulted in incredible progress. Article deals with the historical moment in physics when N.Bohr advanced along with the idea of circular orbits an idea of momentum of movement quantization. Article shows that this not quite correct and illogical idea of N.Bohr prompted Louis de Broglie on the correct idea of the wave nature of microscopic.

Key Words: *quantization, Bohr.*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: juliater@i.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

5 квітня 1913 року в науковий журнал "Philosophical Magazine" надійшла стаття Нільса Бора "Зв'язування електронів додатнім ядром". Вона стала першою з трьох частин єдиної фундаментальної праці "Про будову атомів та молекул". В цій роботі данський вчений сформулював постулати, їм судилося стати центром кристалізації, на якому за наступні 20 років виросла абсолютно нова наука – квантова механіка. Можна впевнено стверджувати, що стаття Бора спричинила принципово новий поворот в історії пізнання світу. Для осмислення цієї події варто коротко оглянути, що було відомо про будову речовини на той момент.

Пропонувались різні моделі будови атома, кожна мала своїх прибічників, свої вади та переваги, і єдине, з чим всі вчені погоджувались, що в склад електрично нейтральних атомів входять електричні заряди двох типів, які умовно називали «позитивними» та «негативними». Доречі, ідея позначити заряди різнознаковими математичними символами виникла як продовження запропонованих математиками від'ємних чисел, що в сумі з додатними утворюють нуль. Але питання про *стійкість системи* залишалось відкритим: чому ці протилежнознакові заряди не зникають, не нейтралізуються? Адже саме це спостерігається в макросвіті – численні досліди з найпопулярнішим приладом тих часів - електроскопом - були дуже переконливі. На початку XIX століття Й.Фраунгофер запропонував завершену конструкцію спектроскопу (з вхідною щілиною, призмою або дифракційною граткою і зоровою трубою), яка незмінна і по сьогодні. Вчені з ентузіазмом взялися спостерігати всілякі

© Терентьєва Ю.Г., 2013

можливі спектри (полум'я горючих газів, свічка, Сонце…). Зазвичай нагріті тіла мали рівномірно райдужний спектр. Якщо ж в полум'я бунзенівської горілки вводили солі Na, Ka, інших металів, чи пропускали електричний струм через вакуумовану трубку з газоподібною речовиною, спектри набували лінійчатого вигляду. Фраунгофер вперше проаналізував темні смуги на суцільному сонячному спектрі, в 1814-1815 роках опублікував статті, де зробив висновок, що наявність і положення ліній в спектрі не залежить ані від стану атмосфери Землі, ані від особливості оптичної будови реєстуючої системи, тобто, ці лінії є притаманною властивістю і характеристикою сонячного світла.

1858 року Г.Кірхгоф та Р. Бунзен зробили дуже важливий висновок, що кожен хімічний елемент має свій неповторний лінійчастий спектр.

Сільський вчитель із Швейцарії Йоганн Бальмер винайшов (1885р.) просту, лаконічну формулу у яку вкладаються довжини хвиль спектру атому водню. Через 23 роки В.Рітц запропонував узагальнену форму запису для частоти спектральної лінії у вигляді різниці двох термів. Проте ця чудова формула, як і «магічні» цілі числа, що в неї входять, не мала жодного прийнятного пояснення.

В кінці XIX століття накопичені експериментальні результати про теплове випромінювання нагрітих тіл теж сконцентрувалися в проблему теоретичного його обґрунтування. Намагання теоретично описати експериментальну криву залежності спектральної густини випромінювання від довжини хвилі методами класичної електродинаміки зазнали поразки. Наприкінці 1900 року Макс Планк ввів поняття кванта енергії, базуючись на якому зміг одержати формулу, що ідеально співпадала з експериментальними результатами, проте породила іще більше запитань. Панування ідеї про електромагнітну природу світла було абсолютним, тому фізики постали перед необхідністю її переосмислення.

Першим, хто зреагував на парадоксальну ідею Планка був А.Ейнштейн. Він акумулював та проаналізував усі численні на той момент експерименти по вивченню зовнішнього фотоефекта. В 1905 році він запропонував просту і зрозумілу формулу фотоефекту, яка по своїй суті представляла закон збереження енергії. Але її неординарність полягала як раз в тому, що поглинання енергії світлової хвилі мусило відбуватися порціями – тими самими квантами, про які говорив Планк. Тоді ставало зрозумілим існування «червоної границі» фотоефекту.

Стосовно безпосередньо будови атомів, було зрозуміло, що до їх складу входять електрони, що вони негативно заряджені. Питання ж про знаходження та розподіл позитивного заряду було розв'язане в 1911 році Ернестом Резерфордом. Результатом серії його експериментів по розсіянню альфа-частинок тонкою фольгою стала гіпотеза про планетарну будову атома. Ця гіпотеза з одного боку була узгоджена з дивовижними результатами експериментів, в яких хоча й зрідка, але впевнено фіксувалися відхилення важких альфа-частинок на великі кути, з іншого поставила нову проблему – як пояснити стабільність атома. Планетарна модель знаходилась в драматичному протиріччі з класичною електродинамікою.

Таким чином, на початок 1912-го року фізика як наука підійшла до межі застосування класичної механіки та електродинаміки, маючи в якості головних проблем – атомну спектроскопію, квант енергії та планетарну модель атома. Слід зауважити, що ніхто з визнаних авторитетів – ні Резерфорд, ані Ейнштейн, не спромігся подивитися на ці питання в комплексі. Зв'язок між ними зміг осягнути Нільс Бор, геніальний данський вчений, фізик-філософ. В трилогії «Про будову атомів та молекул» він зробив неймовірне – йому вдалося не тільки примирити класичну фізику із експериментальними незрозумілостями, а головне - побудована ним система постулатів навіть незважаючи на свою недосконаліть стала відправною позицією для розвитку сучасної квантової механіки. Головний висновок, який був ним зроблений, полягав в тому, що квантування стосується не тільки енергії (за Планком), а й орбіт електронів. Причому, можливо, найне-очікуванішим його висновком було передбачення

квантування моменту імпульсу електрона. В дійсності постулатів, які сформулював Бор , було насправді 5, одержані вони були шляхом досить плутаних і іноді важкозрозумілих міркувань. У сучасних підручниках наводять два, іноді три постулати, які пройшли перевірку часом.

1. Атом може знаходитися *лише* в певних стаціонарних енергетичних станах. Знаходячись в таких станах атом не випромінює.

Разом з тим атом може переходити з одного стаціонарного стану в інший, і тоді

2. При таких переходах між електронними станами різниця енергії випромінюється або поглинається у вигляді кванта світла.

Які саме орбіти мали бути стаціонарними – визначав третій постулат, революційний для розвитку фізики

3. Момент кількості орбітального руху електрона не будь-який, а тільки певний, а саме – кратний константі $\hbar = h/2\pi$.

Фактично, оригінальним був лише останній постулат, інші були відомі і раніше. Бор їх поєднав у вигляді єдиної теорії, основним здобутком якої стало пояснення спектральних закономірностей атома водню. Якщо вважати, що третій постулат – дійсно справедливий, тоді серіальність атомних спектрів стає просто його логічним наслідком.

Кажуть, що Бору вдалося оженити класичну фізику з квантовою, і як це буває в нерівних шлюбах, протиріччя між ними прийшлося врегульовувати декларативним шляхом. Згідно планетарної теорії Резерфорда та класичної електродинаміки Лоренца, електрон, що рухається по коловій орбіті, мусить випромінювати енергію, а, отже, її втрачати – електрон зрештою мусить впасти на ядро. В дійсності цього не спостерігається, атом є стабільною частинкою. Щоби уникнути цього парадоксу Нільсу Бору прийшлось просто *постулювати* стабільність певних станів. Але продовжуючи керуватися звичними класичними законами, Бор, тим не менше, одержав вираз для енергії атома водню

Виявилось, що експериментально виміряне значення енергії іонізації атома та радіус першої орбіти, повністю співпадають з розрахунками Бора. Більше того, експериментальне значення сталої Рідберга виявилось ідентичним розрахованому Бором. Вираз для енергії електрона включає ціле число n, яке зявилось з умови квантування моменту кількості руху. Тобто, енергія (якщо гіпотеза правильна) повинна бути теж дискретною, або квантованою. Звичайно, планетарна модель Резерфорда, як і пануюча в той час модель Томсона (модель «пудінга»), являється хибною, і розглядається в підручниках як проміжний етап розвитку науки. Численні спроби Бора узагальнити теорію та сформулювати постулати квантування для більш складних атомів виявилися безрезультатними. Умова квантування моменту імпульсу електрона не мала ніякого фізичного обґрунтування і була вгадана Бором, причому вгадана не зовсім вірно –як виявилось пізніше, квантується з кроком $\hbar = h/2\pi$ не момент, а його проекція, а для самого моменту умова квантування інша. Більше того, в основному стані (n=1), який в своїй роботі і розглядав Бор, механічний момент у атома взагалі відсутній. Тим не менш, нам вважається, що цінність моделі Бора слід вбачати в тому, що вона *підвела до ідеї* про дискретність якоїсь величини, пов'язаної з моментом кількості руху.

Придуманий в 1913 році "атом Бора" - це тимчасова модель, весь сенс якої спочатку полягав лише в тому, щоби пояснити спектральні закономірності випромінювання водню. Але де-факто, вона стала значно більшим – за декілька років поспіль вона була перероблена учнями Бора, крок за кроком перетворившись в абсолютно новий продукт колективного розуму.

Друге безперечне надбання теорії Бора - вона надихнула Луі де Бройля поглянути на рух електрона на орбіті як на хвильовий процес. Ідея де Бройля про стоячу хвилю на коловій орбіті була одночасно і хибною і геніальною. Хибність, очевидно, полягає в тому, що в природі взагалі не існує плоских колових електронних орбіт. А геніальність – тому що ідеї про хвильову природу мікрооб'єктів не було звідки взятись, дослідів по дифракції електронів на той момент ще й в проекті не було. Отже, народившись на початку XX сторіччя з хибної моделі, можна сказати – завдяки лише геніальному озарінню, хвильова

механіка за півстоліття сформувалася у фундаментальну науку .

Усі наступні досягнення квантової механіки – продукт зусиль великого колективу теоретиків та експериментаторів. І ідейним батьком, вдохновителем, був, безумовно, Нільс Бор, який старанно збирав під своє крило талановиту молодь, надавав можливість випробовувати найсвіжіші ідеї. Він чесно визнавав переваги над собою своїх учнів, зокрема, в математичній підготовці, але сприймав нове з великим ентузіазмом. Було добре відомо, що красиву ідею Бор глибоко зрозуміє, підтримає і полюбить не менше самого автора. Всього за кілька років, між серединою 20-х та початком 30-х років, Бор набув (і вже до кінця життя зберіг) славу лідера всього нового і живого в теоретичній науці, а його копенгагенський інститут залишався фізичною Меккою.

Тим часом, нові ідеї захоплювали уяву науковців, одночасно все більше входячи в протиріччя з класикою, та й одна з одною, теж. Героїчну спробу ввести ці революційні процеси в розумні рамки зробив Бор. У 1918 році він сформулював «принцип відповідності», згідно якого «класичні» та «некласичні» принципи є взаємним логічним продовженням глобальних і універсальних законів при переході від макро- до мікрооб'єктів.

Подальше розгортання подій навколо вивчення атома було бурхливим і захоплювало дух. На початку 1926 року Ервін Шредінгер завершив створення ним *хвильової механіки*: виходячи з гіпотези Луї де Бройля він взагалі відмовився від поняття «частинка», написав основне рівняння нерелятивістської квантової механіки, яка описувала поведінку матерії в термінах лише тільки хвиль. В 1927 році Вернер Гейзенберг разом з Максом Борном побудував так звану *матричну механіку*, взагалі відмовившись від поняття електронної орбіти та проголосив «принцип невизначеності». Гейзенбергівський електрон перетворився на математичну абстракцію – на «щось» розмазане в просторі і часі. Нарешті в 1928 році після кількох років поглибленого вивчення теорії відносності Ейнштейна юний геній Поль Дірак (у віці 26 років) створив теорію, яка враховувала релятивістські закони і вже як саме собою очевидне – хвильові властивості електрона, та передбачила можливість існування античастинок.

Протиріччя між хвильовою механікою Шредінгера та матричною Гейзенберга знову довелося залагоджувати Нільсу Бору. На цей раз він об'явив, що обидві механіки – і матрична, і хвильова – є абсолютно правильними, оскільки відображають дійсність з двох сторін. Вони доповнюють одна одну, тому електрон (як і будь-яка елементарна частинка) може проявляти в залежності від умов, властивості і частинки, і хвилі. Така позиція ввійшла в розширеному вигляді в історію у вигляді філософського «принципу доповнення». В розширеному формулюванні принцип доповнення трактується так – якщо деяке глибоке твердження є вірним, то й протилежне йому глибоке твердження є також вірне. І, хоча цей принцип був сприйнятий далеко не всіма вченими (Ейнштейн, наприклад, з ним не змирився до кінця життя), для більшості став тією платформою примирення, якої вимагав час. Комфортний психологічний стан було повернуто у загальну свідомість, а Нільс Бор заробив величезну вдячність та безумовний авторитет. Його можна назвати Великим Примирювачем, людиною, яка змогла осягнути велич ідей своїх колег і вчасно (на зломі історії розвитку фізики) авторитетно сказати – «і ти прав, і ти», що замість роз'єднання умів врешті спричинило неймовірний прогрес.

Список використаних джерел

1. *Bohr N.* On the Constitution of Atoms and Molecules. // Phil. Mag. – 1913. – **26**, P. 1-25 (part I), P. 476-502 (part II), P. 857-875 (part III).
2. *Louis de Broglie* Revolution in physics. – Moscow: Atomizdat, 1965. – 113 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.04.13

УДК 537

Чумаченко А.В.[1], к.ф.-м.н.

Розрахунок ефективності бездротової передачі енергії у системі з двома медіаторами

Проведено розрахунок ефективності передачі енергії у системі з двома медіаторами та отримано залежності ефективності передачі від швидкості зміни частоти емітера та параметрів зв'язку між електричними котушками. Отримані результати вказують на необхідність рівності частот медіаторів та осцилюючий характер залежності ефективності передачі енергії від констант зв'язку в системі.

Ключові слова: електромагнітна взаємодія, резонанс.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4а, e-mail: chumachenko.a@gmail.com

A.V. Chumachenko[1], PhD

Calculation of the wireless energy transfer efficiency for the system with two mediators

Efficiency of wireless energy transfer for the system with two mediators are calculated and numerical dependence of the power transfer efficiency from the emitter frequency alternation and coil coupling constants are obtained. Results show that frequencies of mediators are required to be equal and manifest an oscillatory character of the power transfer efficiency from the values of the coupling constants.

Key Words: electromagnetic interaction, resonance.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4a, e-mail: chumachenko.a@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

1. Вступ

Проблема передачі енергії на відстань без використання дротів та побудова адекватної моделі такої передачі є актуальною проблемою прикладної та теоретичної фізики. Можливість передачі енергії на великі відстані без використання високовольтних ліній є давньою мрією, яка дозволила б значно зменшити екологічне забруднення Землі та принесла значну економічну вигоду. Зростаючий попит на автономні електронні прилади (лаптопи, стільникові телефони, автономні побутові та промислові роботи, автомобілі та ин.) вимагає подальшого удосконалення цих електронних приладів та збільшення часу їх автономної роботи. У зв'язку з цим існує необхідність розробки методів та математичних моделей, що дозволили б передавати енергію безпосередньо до приладів безпровідним шляхом. Все це обумовлює актуальність задачі, яка була розв'язана в даній роботі.

Починаючи з робіт Нікола Тесла [1], протягом усього двадцятого сторіччя було зроблено безліч розробок і внесено пропозицій щодо даної проблеми. Але, не зважаючи на значний прогрес досягнутий в області електротехніки загалом та бездротової передачі зокрема, зручного та ефективного методу передачі енергії на відстань досі не існує. Існуючі методи або обмежені невеликою відстанню передачі або вимагають певного геометричного розташування передавача та приймача, що суттєво обмежує область застосування таких приладів.

Найбільш поширеною є передача енергії на коротку відстань за допомогою електромагнітної індукції. Цей метод широко використовується у звичайних електричних трансформаторах [2] та використовує ближнє електромагнітне поле на відстанях біля однієї шостої довжини хвилі передавача. Електричний трансформатор є найпростішим пристроєм для бездротової передачі енергії. Завдяки електромагнітній індукції змінний електричний струм, що протікає через первинну обмотку, створює змінне електромагнітне поле, яке діє на вторинну обмотку та створює в ній електричний струм. Дана технологія може використовуватися для заряджання різноманітних електричних побутових пристроїв але вимагає прямого контакту трансформатора та приймача.

Метод електростатичної індукції [3] може бути використано для передачі енергії на

© А.В. Чумаченко, 2013

відстань порядку декількох метрів. Електрична енергія, яка передається таким способом, може бути використана у таких приймачах як безпровідні лампи. Недоліком такого способу передачі енергії є значні втрати на випромінювання і тому відносно мала ефективність такого методу.

Методи ультразвукової передачі енергії дозволяють збільшити відстань передачі до 7-10 метрів але за умови прямої видимості приймача. Наявність перешкод різко зменшує ефективність передачі [4].

Мікрохвильове випромінювання у свій час було запропоноване як метод передачі енергії з орбітальних сонячних станцій на поверхню Землі та живлення космічних апаратів, які залишають поверхню Землі. Складність використання такого методу полягає у дифракції яка обмежує направленість передавача, що вимагає значних розмірів передаючого та приймаючого пристрою (порядку кілометрів для променя частотою 2,45 ГГц).

Метод передачі енергії у видимому оптичному діапазоні (від 10 мкм до 10 нм) [5] вимагає значно менших розмірів передаючого та приймаючого пристроїв. Монохроматична світлова хвиля через малий кут розсіяння дозволяє вузькому пучку ефективно передавати енергію на великі відстані. Компактний розмір твердотільного лазера та фотоелектричного напівпровідникового діода є зручним для невеликих приладів. Але і цей метод утримує в собі ряд недоліків. Перетворення низькочастотного електромагнітного випромінювання у високочастотне, яким є світло, не ефективне. Перетворення світла у електрику також не є ефективним через низький КПД фотоелементів – 40-50 %, хоча ефективність перетворення монохроматичного світла значно вища ніж ефективність сонячних панелей. Втрати у атмосфері та необхідність прямої видимості між передавачем та приймачем також є серйозними недоліками даного методу.

Серед методів, які частково задовольняють вимогу передачі енергії бездротовим способом, можна виділити метод однодротової передачі [1] коли енергія передається за допомогою лише одного дроту та струму в землі. Низькочастотний струм може бути переданий по землі з достатньо низькими втратами оскільки загальний опір землі є значно меншим за 1 Ом. Зворотній контур реалізується через верхні шари тропосфери та нижні шари стратосфери на відстані близько 4.5 миль (7.2 км). Саме такий метод у свій час запропонував Нікола Тесла [1] для передачі енергії у промислових масштабах на великі відстані.

Ефективний метод передачі енергії на середні відстані (порядку декількох метрів) був запропонований у [6] та оснований на магнітному резонансі між передавачем (емітером) та приймачем (ресивером). Наявність резонансу значно підвищує ефективність передачі та відповідно збільшує її відстань при цьому втрати через взаємодію з навколишніми не резонуючими перешкодами значно нижчі ніж у звичайних ізотропних випромінювачів. Системи зв'язані за допомогою резонансу зазвичай мають так званий режим сильного зв'язку [7]. Якщо вдається керувати системою у такому режимі передача енергії на відстань порядку декількох довжин хвиль є майже ізотропною не зважаючи на геометрію навколишнього простору з малою інтерференцією та втратами у навколишнє середовище [6]. Системи, які використовують магнітний резонанс, є зручними з тієї точки зору, що більшість матеріалів, які можуть знаходитись у навколишньому середовищі при використанні такої системи у побуті, не взаємодіють з магнітним полем таким чином зменшуючи втрати енергії.

Побудова системи передачі енергії на основі резонансу вимагає точного налаштування емітера та ресивера на одну вибрану частоту передачі. Таке налаштування пов'язане з певними технічними складностями і часто не є достатньо стійким до певних змін у конфігурації передавача або приймача. Тому для вдосконалення техніки передачі енергії між двома резонуючими котушками у [8,9] було запропоновано використовувати метод адіабатичної зміни частоти емітера, що дозволяє зробити передачу енергії більш стійкою до зовнішніх шумів. Авторами [10] була запропонована математична модель та проведені розрахунки ефективності передачі енергії в залежності від параметрів системи (констант зв'язку між котушками), яка складалася з двох котушок [11]. У роботі [12-15] з метою збільшення відстані передачі авторами було запропоновано використання додаткової (проміжної) котушки – медіатора, та проведено аналогічні розрахунки ефективності передачі та визначено параметри адіабатичної зміни частоти оптимальні для даної системи.

З метою збільшення відстані передачі енергії важливою є задача про розрахунок ефективності у системі з більшою кількістю проміжних котушок - медіаторів. Визначення параметрів

швидкості зміни частоти емітера в залежності від частот ресивера та двох медіаторів, а також констант зв'язку та втрат у системі, необхідної для ефективної передачі енергії. Побудова відповідних залежностей ефективності передачі від внутрішніх параметрів системи.

2. Передача енергії за допомогою магнітного резонансу

Передача енергії в системі двох резонуючих електричних котушок, що знаходяться на певній відстані та зв'язані між собою сильною взаємодією була досліджена у роботі [16]. У роботі експериментально підтверджена можливість передачі енергії до лампи розжарювання потужністю 60 Вт, що знаходилася на відстані 2 м від передавача. Експериментальний пристрій складався з двох мідних котушок, а сама передача енергії відбувалася за рахунок магнітного резонансу. Взаємодія двох електричних котушок у режимі сильного зв'язку може бути описана за допомогою теорії зв'язаних мод коливань [17] на основі наступної системи диференційних рівнянь першого порядку

$$i\frac{dA(t)}{dt} = H(t)A(t), \quad A(t) = \{a_S(t), a_D(t)\}, \tag{1}$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} \omega_S(t) - i\Gamma_S & K(t) \\ K(t) & \omega_D - i\Gamma_D - i\Gamma_w \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Тут величини $|a_S(t)|^2$ і $|a_D(t)|^2$ визначають енергію джерела (source) та приймача (device) відповідно; параметри Γ_S і Γ_D описують втрати від поглинання та випромінювання для джерела та приймача, частоти передавача та приймача задаються співвідношенням $\omega_m(t) = 1/\sqrt{L_m(t)C_m(t)}, (m = S, D)$, тут $L(t)$ та $C(t)$ відповідно індуктивність та ємність джерела та приймача. Коефіцієнт зв'язку між двома котушками визначається співвідношенням

$$K(t) = M(t)\sqrt{\frac{\omega_S(t)\omega_D(t)}{L_S(t)L_D(t)}}, \tag{3}$$

де $M(t)$ – коефіцієнт взаємної індукції котушок. Енергія в такій системі передається від джерела до приймача при цьому параметр Γ_w визначає корисну роботу виконану системою. Ефективність роботи такої системи, що визначається рівністю

$$\eta = \frac{\Gamma_w |a_D|^2}{\Gamma_S |a_S|^2 + (\Gamma_D + \Gamma_w)|a_D|}, \tag{4}$$

в залежності від відстані між котушками у статичному режимі, коли частоти джерела $\omega_S = const$ та передавача $\omega_D = const$ залишаються незмінними, була досліджена у [16]. Експеримент та теоретична модель показали ефективність передачі енергії в такій системі на рівні 40-50 %. Але у випадку коли через брак подібності між обмотками котушок або випадковими перешкодами (представленими, наприклад, зовнішніми об'єктами, поміщеними близько до будь-якої обмотки) частота джерела зміщується відносно частоти пристрою $\Delta = \omega_D - \omega_S \neq 0$ і відбувається значне зменшення ефективності передачі.

3. Метод адіабатичної зміни частоти

Використання техніки адіабатичної зміни частоти у контексті бездротової передачі енергії дозволяє значно зменшити вплив шумів, дефектів котушок та інших факторів, які впливають на ефективність передачі енергії. Подібна техніка вже використовується під час дослідження інших фізичних процесів таких як ядерний магнітний резонанс, взаємодія когерентного світлового випромінювання з дворівневими атомами та при конверсії частот у нелінійній оптиці [8,9]. Зміну частоти передавача та приймача можна вважати адіабатичною коли вона є значно меншою за внутрішню основну частоту системи, що виражається через константу зв'язку. Умова адіабатичності у нашому випадку задається наступним співвідношенням

$$\left|\frac{dK}{dt}\Delta(t) - K(t)\frac{d\Delta}{dt}\right| << \left[4K^2(t) + \Delta^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

У випадку коли частоти залежать від часу вираз (4) можна переписати наступним чином

$$\eta = \frac{\Gamma_w \int_0^T |a_D(t)|^2 dt}{\Gamma_S \int_0^T |a_S(t)|^2 dt + (\Gamma_D + \Gamma_w)\int_0^T |a_D(t)|^2 dt}. \tag{6}$$

Результати розрахунків ефективності передачі енергії (6) отримані у [8,9] на основі рівнянь (1) та (2) за умови $K(t) = K_0 = const$ а $\Delta(t) = \delta + \beta(t - t_0)$ де константи δ, β та K_0

визначаються початковими умовами. Серед переваг такого методу можна зазначити те, що на відміну від статичного режиму де енергія осцилює між передавачем та приймачем у адіабатичному режимі енергія передається до приймача один раз і не передається назад до передавача (Рис. 1), таким чином мінімізуючи втрати енергії в системі.

4. Передача енергії в системі з двома медіаторами

Розглянемо систему котушок, що містить додаткові медіатори між приймачем та передавачем. Така система здатна передати енергію на більшу відстань ніж система з двома котушками (передавачем та приймачем), а також ніж система з одним медіаторм. Ефективність передачі енергії в такій системі задається співвідношенням (7) [18,19]

$$\eta = \frac{\Gamma_w \int_0^T |a_D(t)|^2 dt}{\Gamma_S \int_0^T |a_S(t)|^2 dt + \sum_{i=1}^{2} \int_0^T \Gamma_{M_i} |a_{M_1}(t)|^2 dt + (\Gamma_D + \Gamma_w) \int_0^T |a_D(t)|^2 dt} \tag{7}$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} \omega_S(t) - i\Gamma_S & K_{SM_1} & K_{SM_2} & K_{SD} \\ K_{SM_1} & \omega_{M_1}(t) - i\Gamma_{M_1} & K_{M_1M_2} & K_{M_1D} \\ K_{SM_2} & K_{M_1M_2} & \omega_{M_2}(t) - i\Gamma_{M_2} & K_{M_2D} \\ K_{SD} & K_{M_1D} & K_{M_2D} & \omega_D(t) - i\Gamma_D - i\Gamma_w \end{bmatrix}, \tag{8}$$

де величини $A(t) = \{a_S(t), a_{M_1}(t), a_{M_2}(t), a_D(t)\}$ визначаються матричним рівнянням (1), матриця у правій частині якого задається рівністю (8).

Матриця (8) має діагональний вигляд, частоти передавача та приймача залежать від часу, а частоти медіаторів вважаємо постійними

$$\omega_S(t) = \omega_M + \delta + \alpha^2 t, \tag{9a}$$

$$\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = const, \tag{9b}$$

$$\omega_D(t) = \omega_M + \delta - \alpha^2 t. \tag{9c}$$

Ми розглядатимемо послідовну передачу коли енергія транслюється від передавача до першого медіатора потім до другого і потім до приймача. Математично це означає що взаємодія передавача та приймача відсутня ($K_{SD} = 0$), так само як і взаємодія передавача та другого медіатора ($K_{SM_2} = 0$) і приймача та першого медіатора ($K_{M_1D} = 0$).

На рис. 1 показано залежність ефективності (7) від параметру зсуву δ та енергії, яка витрачається на корисну роботу Γ_W. Зважаючи на те, що розміри котушки медіатора зазвичай більші ніж розміри передавача та приймача, параметри, які характеризують втрати з медіаторів та навантаження на приймачі приймемо однаковими $\Gamma_{M_1} = \Gamma_{M_2} = \Gamma_w$. Оскільки розміри передавача та приймача є однаковими то параметри, що характеризують втрати на цих котушках також візьмемо однаковими $\Gamma_S = \Gamma_D$.

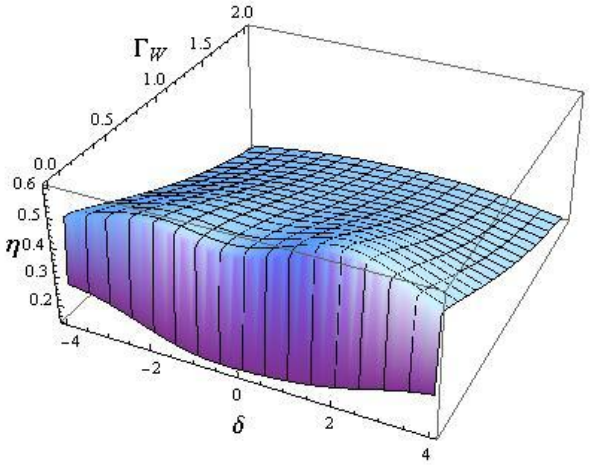


Рис. 1. Залежність ефективності передачі η від параметру зсуву δ та навантаження $\Gamma_{M_1} = \Gamma_{M_2} = \Gamma_w$ для фіксованого моменту часу $\alpha = 0.02$. Для наступних значень параметрів: $\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = 2$, $K_{M_1M_2} = 0.1$, $K_{SM_1} = K_{M_2D} = 1.5\alpha$, $\Gamma_S = \Gamma_D = 0.001\alpha$.

З результатів розрахунків (див. Рис. 1) видно, що значення параметра зсуву $\delta > 0$ на відміну від випадку з одним медіатором [18,19] дають більшу ефективність передачі енергії ніж від'ємні значення.

Ефективність передачі значно зменшується коли частоти медіаторів починають відрізнятися, що вказує на необхідність адіабатичної зміни частот не лише передавача та приймача але і частот медіаторів. При збільшенні відбору енергії з системи очевидно ефективність передачі енергії також зменшується.

Зміна константи взаємодії між медіаторами приводить до нелінійної поведінки ефективності передачі енергії у системі, що видно з графіку на рис. 2.

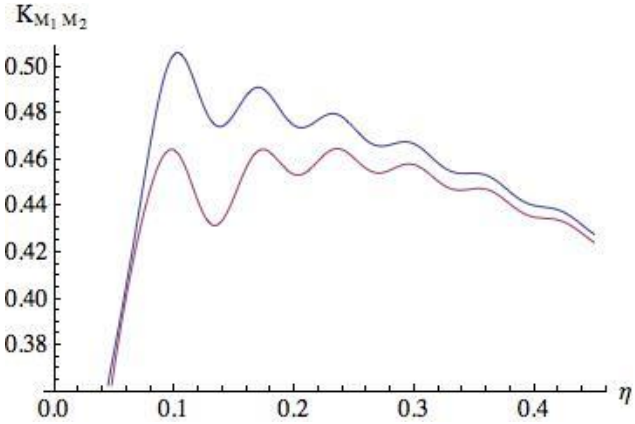


Рис. 2. Залежність ефективності η від константи взаємодії між медіаторами $K_{M_1M_2}$ для двох значень параметру δ: $\delta = 2\alpha$ – верхня штрихована крива, $\delta = -2\alpha$ – нижня суцільна крива. Для наступних значень параметрів: $\alpha = 0.02$, $\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = 2$, $K_{SM_1} = K_{M_2D} = 1.5\alpha$, $\Gamma_S = \Gamma_D = 0.001\alpha$, $\Gamma_{M_1} = \Gamma_{M_2} = \Gamma_w = 0.5\alpha$.

Значення параметру $\delta = 2\alpha$ визначає положення абсолютного максимуму ефективності. Положення локальних максимумів та мінімумів ефективності не співпадають для різних значень параметру δ, як це можна бачити з Рис. 3.

Зменшення значення параметру $K_{M_1M_2}$ може відповідати збільшенню відстані між медіаторами при постійній відстані між передавачем і першим медіатором K_{SM_1} та другим медіатором і приймачем K_{M_2D}. Розрахунок для випадку коли параметр $K_{M_1M_2}$ залишається сталим, а параметри $K_{SM_1} = K_{M_2D}$ змінюються дає меншу ефективність передачі енергії.

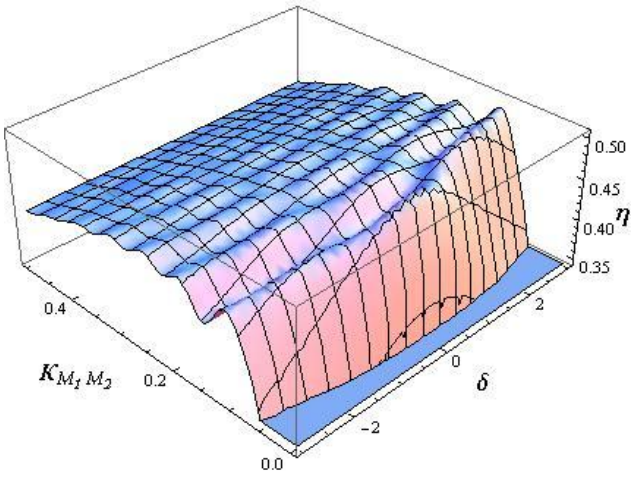


Рис. 3. Залежність ефективності η від константи взаємодії між медіаторами $K_{M_1M_2}$ для неперервної зміни параметру зсуву в межах $-5\alpha \le \delta \le 5\alpha$. Для наступних значень параметрів: $\alpha = 0.02$, $\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = 2$, $K_{SM_1} = K_{M_2D} = 1.5\alpha$, $\Gamma_S = \Gamma_D = 0.001\alpha$, $\Gamma_{M_1} = \Gamma_{M_2} = \Gamma_w = 0.5\alpha$.

Висновки

Таким чином в роботі на основі теорії про зв'язані моди коливань [17] було отримано та розв'язано чисельно систему рівнянь, які описують передачу енергії в системі чотирьох котушок, що взаємодіють на основі магнітного резонансу. Для цього у програмному пакеті Mathematica було написано відповідну програму. Для розрахунку було використано модель, в якій передача енергії відбувається по ланцюжку: передавач – перший медіатор – другий медіатор – приймач. Частоти передавача та приймача згідно методу, розробленому в [8,9], адіабатично змінювалися з часом, а частоти медіаторів залишалися постійними.

З отриманих результатів ми можемо бачити, що для системи, що містить два медіатора оптимальною є послідовність резонансів коли першим настає резонанс між передавачем та медіаторами, що відповідає значенням $\delta > 0$ [20]. Отримані на основі рівнянь (1), (10) та (11) графічні залежності на Рис. 2, 3 та 4 для ефективності передачі енергії η, дозволяють визначити оптимальні значення параметрів ($\delta = 2$) системи передавач-приймач з двома медіаторами, які дозволяють передавати енергію з ефективністю близькою до 50 %. Зростання втрат у системі приводить, як і очікувалося до

зменшення ефективності передачі енергії в системі.

Положення котушок при якому медіатори знаходяться на більшій відстані один від одного ніж їх відстань до передавача та приймача відповідно є більш оптимальним ніж коли відстань між медіаторами більша ніж їх відстань до передавача та приймача. Ефективність передачі енергії в системі зменшується коли частоти медіаторів є різними але постійними величинами, що вимагає точного налаштування медіаторів на одну частоту. Система передачі енергії в такій системі може буди вдосконалена за умови варіювання в часі частот медіаторів.

Список використаних джерел

1. *Tesla Nikola,* Systems of Transmission of Electrical Energy, Sept. 2, - 1897, U.S. Patent No. 645,576, – 1900.
2. *A. Kurs et al.,* Power Transfer via Strongly Coupled Magnetic Resonances, Science – 2007 – Vol. 317,.P 83.
3. Computerworld Россия, – 2012 № 25. http://www.osp.ru/cw/archive/#2012/25/
4. *P. Kafka,* How to Charge Your iPhone Over the Air: uBeam's, All things digital: D9 conference, May 31-June 2, 2011
5. *Glaser Peter E,* Power from the Sun: Its Future, Science Magazine – 3856, Vol. 162, P. 857.
6. *A. Karalis, J. D. Joannopoulos, M. Soljachich,* Ann. Phys. – 2007, 10.1016/j.aop.2007.04.017.
7. *T. Aoki at all,* Nature – 2006, Vol. 443, P.671.
8. *L. Allen, J.H. Eberly,* Optical Resonance and Two-Level Atoms, Dover, New York, 1987.
9. *N.V. Vitanov, T. Halfmann,* B.W. Shore, K. Bergmann, Ann. Rev. Phys. Chem. – 2001, Vol. 52, p.763.
10. *Kurs, A. Karalis, R. Moffatt, J. D. Joannopoulos, P. Fisher, and M. Solja˘ci´c,* Science – 2007, Vol.83, P. 317.
11. *A. Karalis,* Novel photonic phenomena in nanostructured material systems with applications and Mid-Range efficient insensitive Wireless Energy-Transfer, Sc.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2008.
12. *R. E. Hamam, A. Karalis, J. D. Joannopoulos, and M. Solja˘ci´c,* Ann. Phys. – 2009, Vol. 324, P. 1783.
13. *U. Gaubatz, P. Rudecki, S. Schiemann, and K. Bergmann,* J. Chem. Phys. – 1990, Vol. 92, P. 5363.
14. *N. V. Vitanov, T. Halfmann, B. W. Shore, and K. Bergmann,* Annu. Rev. Phys. Chem. – 2001, Vol. 52, P. 763.
15. *N. V. Vitanov, M. Fleischhauer, B. W. Shore, and K. Bergmann,* Adv. At. Mol. Opt. Phys. – 2001, Vol. 46, P. 55.
16. *R.E. Hamam, A. Karalis, J.D. Joannopoulos, M. Soljac˘ic´,* Ann. Phys. – 2009, Vol. 324, P. 1783
17. *Barybin and Dmitriev,* Modern Electrodynamics and Coupled-mode theory, – Rinton Press, 2002. – 707 p.
18. *Karalis, J. D. Joannopoulos, and M. Solja˘ci´c,* Ann. Phys. – 2008, Vol. 323, P. 34.
19. *Rangelov, H. Suchowski, Y. Silberberg, and N. V. Vitanov,* Ann. Phys. – 2011, Vol. 326, P. 626.
20. *Andon A. Rangelov and Nikolay V. Vitanov* Mid-range adiabatic wireless energy transfer via a mediator coil, – 2012, arXiv:1201.4592v1 [physics.atom-ph].

Надійшла до редколегії 4.04.13

УДК 539.213

Ярмощук Є.І.[1], студ.,
Семенько М.П.[1], д.ф.-м.н.,
Захаренко М.І.[1], д.ф.-м.н., проф

Термічна стабільність і магнітні характеристики складнолегованих аморфних сплавів на основі системи Co-Si-B

Досліджено структуру та магнітні характеристики аморфних сплавів системи Co-Si-B, легованих залізом та молібденом. Встановлені інтервали термічної стабільності фаз у досліджуваних сплавах. Доведено, що їх магнітні характеристики значною мірою визначаються фазовим розшаруванням у межах існування аморфного стану та процесами утворення магнітних кластерів.

Ключові слова: *аморфні сплави, магнітна сприйнятливість, магнітний момент, теромостабільність, кобальт*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: zakharenko@univ.kiev.ua

E. I. Yarmoshchuk[1], stud.,
M.P.Semen'ko[1], Dr. Sci.,
M.I.Zakharenko[1], Dr. Sci., Prof.

Thermal stability and magnetic characteristics of the Co-Si-B based amorphous alloys containing complex dopants

The structure and magnetic characteritics of the Co-Si-B amorphous alloys containing complex dopants have been investigated. The intervals of thermal stability of the phases existing in the studied alloys have been determined. The magnetic behavior of these alloys was proved to be substantially governed by the process of phase separation within the region of the amorphous state stability and magnetic clusters formation.

Key Words: *amorphous alloys, magnetic susceptibility, magnetic moment, thermal stability, cobalt.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: zakharenko@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Теоретичне та експериментальне дослідження аморфних металевих сплавів (АМС) викликає значний інтерес як з точки зору поглиблення знань у галузі фізики невпорядкованих систем, так і завдяки суто практичним потребам використання таких матеріалів як функціональних. Зокрема, АМС типу метал-металоїд мають зазвичай відмінні магнітом'які характеристики, що визначає перспективність їх практичного використання [1-3]. Серед них особливе місце займають АМС на основі Co з точки зору можливостей їх промислового використання при виготовленні різноманітних елементів, зокрема вимірювальних систем, магнітних осердь, магнітних сенсорів, полосових фільтрів, магнітних екранів, енергозберігаючих підсилювачів потужності, тощо [4-6]. Цьому сприяють такі їх властивості, як близька до нуля магнітострикція, низька коерцитивна сила, високі значення початкової і максимальної магнітної проникності.

Разом з тим відомо, що термічна стабільність і функціональні властивості АМС сильно залежать від їх складу і особливостей хімічного близького порядку [7,8]. Саме тому легування АМС базових складів може суттєво впливати на їх службові характеристики. Крім того, оскільки АМС за своєю природою є метастабільнимии системами, то на їх структурний стан, а отже, і на функціональні властивості, можуть суттєво впливати як температурно-кінетичні умови гартування, так і термічна передісторія зразків. У роботі [8] в рамках топологічної кластерної моделі проаналізовано структуру, схильність до аморфізації та функціональні властивості АМС системи CoSiB з відносно низьким вмістом кобальту (~65 ат.%). Встановлено, що сплави $Co_{63.1}B_{27}Si_{9,9}$ і $Co_{65}B_{24.4}Si_{10.6}$, незважаючи на подібність їх складу, містять різні типи кластерів, а тому – демонструють різні магнітні характеристики. Основою АМС $Co_{63,1}B_{27}Si_{9,9}$ є кластери типу Co_7B_3, завдяки чому він має хороші магнітом'які властивості з коерцитивною силою, меншою за 0.9 А/м. В той же час, АМС $Co_{65}B_{24.4}Si_{10.6}$ до складу якого входять кластери Co_8B_3, демонструє парамагнітну поведінку,

© Є.І. Ярмощук, М.П. Семенько, М.І.Захаренко, 2013

незважаючи на вищий вміст магнітоактивного компонента. Наведені в [8] результати вказують на домінуючу роль близького атомного порядку у визначенні рівня функціональних характеристик цього класу АМС.

В роботах [9,10] також встановлено, що термічна передісторія зразків справляє суттєвий вплив на атомну структуру, напружений стан і характеристики АМС цієї системи та доведена можливість ефективно керувати їх властивостями шляхом термообробки за відповідних режимів.

Таким чином, метою цієї роботи було вивчення структурних особливостей, магнітних властивостей і параметрів термічної стабільності фаз у складнолегованих АМС на основі системи CoSi-B.

Приготування зразків та методика експерименту. АМС на основі $Co_{72}Si_{16}B_{12}$, комплексно леговані залізом молібденом та ренієм (у загальній кількості до 6 ат.%), були виготовлені у вигляді стрічок шириною 10 мм і товщиною 25-30 мкм методом спінінгування розплаву з використанням хімічно чистих компонентів. Склади досліджуваних АМС за шихтою відповідали:

$Co_{66,5}Fe_4Mo_{1,5}Si_{16}B_{12}$ (#1),

$Co_{66}Fe_4Mo_{1,5}Re_{0,026}Si_{16,474}B_{12}$ (#2),

$Co_{66}Fe_4Mo_2Si_{16}B_{12}$ (#3).

Фактичні склади АМС згідно з результатами рентгенівського флуоресцентного аналізу наведені у табл.1.

Контроль структурного стану свіжозагартованих стрічок та рентгенівські дифракційні дослідження проводили на автоматичному дифрактометрі ДРОН-4-07 з використанням немонохроматизованого CoK_α випромінювання. Запис проводили в режимі зйомки по точках з кроком сканування $\Delta(2\theta)=0.05^o$ при напрузі U=30 кВ і струмові I=20 мА (час набору імпульсів у кожній точці складав 10 с.).

Температурні залежності магнітної сприйнятливості (МС) сплавів $\chi(T)$ в температурному інтервалі 300–900 К досліджували відносним методом Фарадея за допомогою магнітометра, змонтованого на базі автоматичної вагової голівки АВГ1-5г. Максимальна похибка вимірювання температури на установці складала 0,5 К, а точність вимірювання магнітної сприйнятливості $\Delta\chi/\chi$ не гірше 1,5 %.

Таблиця1

Склад досліджуваних АМС за даними рентгенівського флуоресцентного аналізу

№ зразка	Вміст елементів, ат.%				
	Co	Fe	Mo	Si	B
#1	66,6	4,2	1,5	16,2	11,5
#2	66,2	4,3	1,5	16,4	11,6
#3	66,2	4,1	2,1	16,0	11,6

Експериментальні результати та їх обговорення. Експериментальні залежності $\chi(T)$ наведені на рис.1 (тут і надалі нумерація зразків відповідає наведеній у табл.1). В цілому вони виявилися подібними для всіх досліджених зразків. Видно, що всі сплави при кімнатній температурі є феромагнетиками. Значення χ зменшується з нагріванням і в області температур 460-630К (в залежності від складу) АМС стають парамагнітними Значення температури Кюрі T_c, визначені за кривими $\chi(T)$ стандартним способом [11], наведені у табл.2. При температурах, вищих

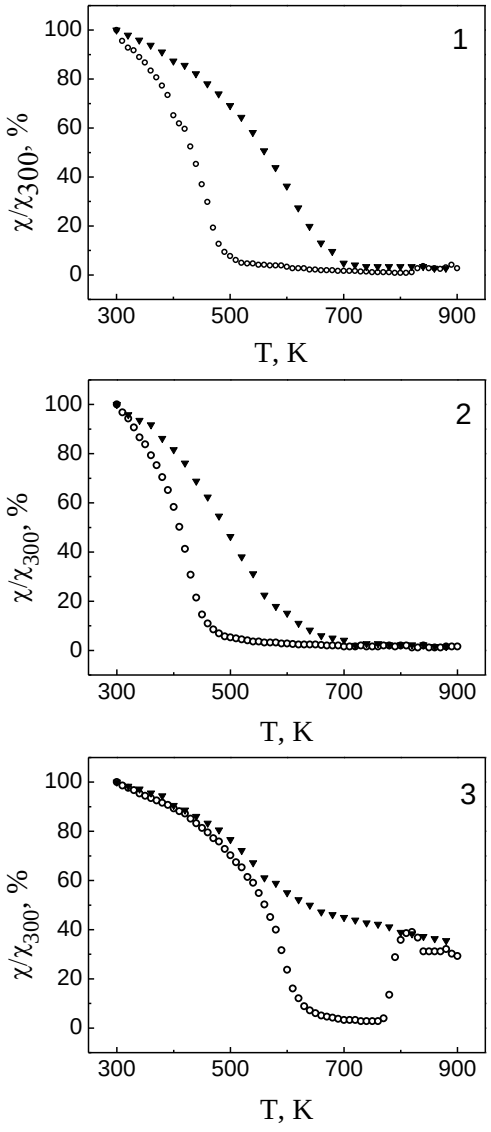


Рис. 1. Залежності $\chi(T)$ АМС на основі системи Co-Si-B.

Таблиця 2

Температура кристалізації, магнітні та структурні характеристики АМС на основі Co-Si-B

АМС	T_c, К		T_x, К	μ, μ_B	θ, К	2Θ, град	*w*, град
	аморф.	крист.					
#1	488	683	824	2,61	477	53,10±0,01	7,32±0,09
#2	460	604	835	2,53	440	53,25±0,01	7,39±0,08
#3	622	627/>900	785	2,88	610	53,21±0,04 57,78±0,04	5,34±0,26 12,83±4,59

за T_c, спостерігається досить широка парамагнітна область в межах існування аморфного стану. При подальшому нагріванні зразків #1 та #2 кривих $\chi(T)$ вище за 800 К спостерігається дуже слабкий скачок при температурі T_x, зумовлений кристалізацією. Форма віток охолодження вказує на те, що при цьому утворюється єдина феромагнітна кристалічна фаза, причому точка Кюрі цієї фази для зразка #2 виявилася значно нижчою. Це, очевидно, зумовлене меншим вмістом у ньому феромагнітного компонента та наявністю домішки Re. Як видно з рис.1 та табл.2, термомагнітна поведінка та інтервали термічної стабільності фаз для зразка #3 суттєво відрізняються. Крім того, зростання χ при температурі T_x є значно більшим, ніж для АМС #1 і #2, що зумовлене утворенням ще однієї кристалічної фази з високою точкою Кюрі (>900 К). Зважаючи на те, що склади АМС #1 і #3 є дуже близькими, зазначені особливості у термомагнітній поведінці останнього слід, на нашу думку, пов'язувати із фазовим розшаруванням АМС, яке виникає внаслідок особливостей режиму гартування. При цьому одна із фазових складових повинна бути суттєво збагаченою феромагнітними компонентами.

Викладені міркування були підтверджені результатами дифракційних досліджень. Вони показали, що усі досліджувані АМС є рентгеноаморфними, про що свідчить характер дифрактограм, на яких не виявлено жодних максимумів, що відповідали б кристалічним фазам. На кривих кутового розподілу розсіяного рентгенівського випромінювання спостерігається лише широке гало, притаманне некристалічним матеріалам (фрагменти цих кривих наведені на рис.2). Апроксимація форми дифракційного гало за допомогою єдиного лоренцевого профілю виявилась можливою лише для АМС #1 і #2. У випадку АМС #3 задовільне узгодження між експериментальною та розрахованою кривими вдалося одержати лише при апроксимації двома кривими Лоренца з різними значеннями положення центру ваги 2Θ та напівширини *w*. Значення параметрів 2Θ та *w* наведені у табл.2. Одержані результати вказують на існування в АМС #3 двох аморфних фаз різного складу.

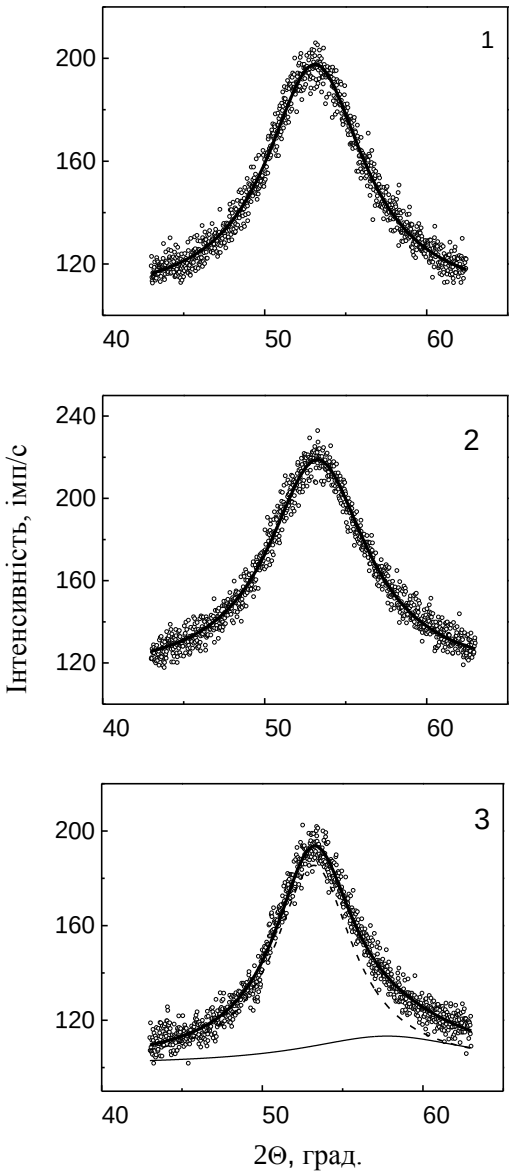


Рис. 2. Фрагменти дифрактограм досліджених АМС: точки – експеримент, криві – результат апроксимації функцією Лоренца.

Аналіз температурних залежностей МС $\chi(T)$ свіжовиготовлених сплавів у парамагнітній області ($T_c<T<T_x$) показав можливість їх опису за допомогою узагальненого закону Кюрі-Вейсса:

$$\chi = \frac{N_A \mu^2}{3k_B(T-\theta)}, \qquad (1)$$

де μ – локалізований магнітний момент на атом сплаву (у магнетонах Бора), θ – парамагнітна температура Кюрі, N_A та k_B – число Авогадро та стала Больцмана, відповідно. Значення параметрів μ та θ представлені у табл.2. Можна вважати, що значення μ досліджених АМС зумовлені лише атомами Co і Fe, а отже

$$\mu_{ПМ}^2 = c_{Co}\mu_{Co}^2 + c_{Fe}\mu_{Fe}^2. \qquad (2)$$

Тут c_{Co}, c_{Fe} – вміст Co та Fe, а μ_{Co}, μ_{Fe} – локалізовані магнітні моменти цих атомів. Розраховані за рівн. (2) значення магнітних моментів виявилися помітно нижчими за експериментальні. Цей факт вказує на те, що атоми Fe ініціюють утворення магнітних кластерів з паралельною орієнтацією магнітних моментів атомів. Оцінка, здійснена за методикою [12], показала, що до складу таких кластерів входять, крім атома Fe, 2-4 атоми кобальту. Найбільше значення μ одержане для АМС #3, що свідчить про існування у цьому сплаві двох аморфних фаз, одна з яких збагачена залізом, тобто також підтверджує висловлене раніше припущення про фазове розшарування.

Висновки. Результати дослідження структури та магнітних характеристик АМС системи Co-Si-B, легованих Fe та Mo, показали, що їх магнітні характеристики значною мірою визначаються існуванням магнітних кластерів з паралельною орієнтацією магнітних моментів атомів. Важливу роль відіграє також фазове розшарування у межах існування аморфного стану.

Список використаних джерел

1. *Nowosielski R., Zajdel A., Lesz S., Kostrubiec B., Stokłosa Z.* Influence of heat treatment on changes on structure and magnetic properties of CoSiB alloy // Achiev. Mater. Manufact. Eng. – 2008. – V. 27. – P. 147-150.
2. *Chiriac H., Moga A-E., Urse M., Necula F., Hison C.* On the amorphization and magnetic properties of Co-Fe-Si-B powders // J. Non-Cryst. Solids. – 1999. – V. 250-252. – P. 766-770.
3. *Dobrzanski L.A., Nowosielski R., Konieczny J., Przyby A.L.* Soft magnetic nanocomposite with powdered metallic ribbon based on cobalt and polimer matrix // J. Mater. Process. Technol. – 2005 – V.162-163, – P. 20-26.
4. *McHenry M.E., Willard M.A, Laughlin D.E.,* Amorphous and nanocrystalline materials for applications as soft magnets. // Progress in Materials Science – 1999 – V. 44 – P. 291-433.
5. *Babilas R., Nowosielski R, Dercz G., Stokłosa Z., Głuchowski W.* Influence of structure on soft magnetic properties of Co70Fe5Si15B10 metallic glass ribbons // Archives of materials science and engineering. – 2012 – V.54, – P. 37-44.
6. *Boll R., Warlimont H.* Application of amorphous magnetic materials in electronics // IEEE Trans. Magn. – 1981 – V. MAG-17. – P.3053-3058.
7. *Lesz S., Nowosielski R., Kostrubiec B., Stoklosa Z.,* Crystallization kinetics and magnetic properties of Co-based amorphous alloys // J. Achiev. Mater. and Manufact. Eng. – 2006 – V.16 – P. 35-39.
8. *Zhang J.L., Wang Y.M., Shek C.H.* Design of soft magnetic CoSiB metallic glass with low Co contents // J. Appl. Phys. – 2011 – V. 110, – P. 083919.
9. *Spilka M., Griner S., Kania A.* Influence of thermal activation on the changes of physical properties and structure of cobalt-based metallic glass. // Archiv Mater. Sci. Eng. – 2012 – V.56 – P. 61-68.
10. *Lee H., Kim Y.-K., Kim Y.-B.* Soft magnetic properties of Co-based amorphous alloys by two-step cooling method // Phys. Stat. Solidi. – 2002. – V.189. – P.1073-1076.
11. *Fernández A., Pérez M.J., Tejedor M., Madurga V.* Thermomagnetic analysis of amorphous $(Co_xFe_{1-x})_{73.5}Nb_3Cu_1Si_{13.5}B_9$ metallic glasses // J. Magn. Magn. Mater. – 2000. – V.221. – P.338–344.
12. *Shpak A.P., Kunitskiy Yu.A., Zakharenko M.I.., Voloshchenko A.S.* Magnetism of amorphous and nanocrystalline materials. – Kyiv: Akademperiodika, 2003. –232 p. (in Ukrainian).

.

Надійшла до редколегії 25.03.13

Підписано до друку . Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. №__. Друк. арк. ____. Тираж _____. Зам. ____.
Друкарня _____.