КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №1 2013

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1, 2013
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ДАК України.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.,
заступник головного редактора, відповідальний за видання;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Данилов Вадим Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Левитський Сергій Михайлович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Маципура Володимир Тимофійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бондарев Б.В., Сосницький О.Є. Оцінки для ймовірности нерозорення страхової компанії у дискретний час 7

Бондаренко Є. В. Автоматні групи та Цаппа-Сеп добуток груп 15

Верьовкіна Г.В. Інтерполяційні зображення деяких класів випадкових процесів із групуванням вузлів інтерполяції 18

Герич М.С. Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова 21

Журавльов В. М., Журавльов Д. В. Черепичні порядки в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності 28

Зубрілін К.М. Сплощуючі властивості ліфтів аналітичних HP-перетворень келерових просторів 35

Кандрьонкін А.В., Перестюк М.М. Якісна поведінка розв'язків нелокального рівняння Чаффе-Інфанте 45

Кочубінська Є. Підстановкові зображення узагальнених біциклічних напівгруп 48

Мішура Ю.С., Банна О.Л., Дорошенко В.В. Відстань дробового броунівського руху до підпросторів гауссівських мартингалів 53

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Акбергенов А.А. Дослідження структури множини неперервних розв'язків одного класу систем різницевих рівнянь 63

Войтушенко Є.С. Вироджені лінійні диференціальні рівняння з імпульсною дією 67

Головацька І.А. Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь 71

Гончар М.С., Кучук-Яценко С.В. Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах 75

Городецька Н.С., Нікішов В.І., Ткаченко Л.В. Розвиток вихорів Гертлера у примежовому шарі над увігнутою поверхнею 81

Горошко О.О., Кикоть С.В. Стійкість та коливання трубопроводу з малою згинною жорсткістю 87

Григоренко О.Я., Вовкодав О.В., Яремченко С.М. Визначення напружено-деформованого стану нетонких сферичних оболонок змінної товщини на основі різних моделей 91

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Перший інтеграл рівняння Мещерського при дробово-лінійному законі зменшення радіуса кулі, що летить вгору 95

Страх О.П. Нетерові крайові задачі для слабконелінійних динамічних систем на часовій шкалі 99

Яременко М.І. Дослідження щільності множини області визначення генератора напівгрупи в множині області визначення самої напівгупи в просторах Лебега 105

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Rukhaia Kh., Tibua L., Chankvetadze G., Mikhanadze G. An Algorithm of the Classification of Unranked Propositional Logic Formulas 113

Буй Д.Б., Кахута Н.Д., Шишацька О.В. Композиційна семантика SQL-подібних мов та суміжні питання 116

Вергунов В.В. Інтелектуальні системи збереження даних як інструмент для підтримки оптимальної структури даних та архітектури бази даних 122

Галкін О.А. Проблема перенавчання у процедурі вибору моделі на основі структурної мінімізації ризику 128

Галкіна О.А. Побудова послідовного за часом ефективного портфеля умовних значень ризику 132

Громадченко Т.В., Мартинюк П.М. Математичне моделювання впливу техногенних факторів на розподіл вологи в ґрунті 136

Дегтяр О.С. Адаптивна апроксимація сигналів за допомогою системи базисних функцій зі змінною розмірністю 142

Донченко В.С., Голік А.О. Застосування еліпсоїдальної та ортогональної відстаней відповідності у задачах розпізнавання мови та жестів 146

Зубенко В.В. Про комунікативну інформатику 156

Ивохин Е.В., Алмодарс Баррак Субхи Камл Об одном подходе к решению задач линейного программирования с нечеткими ограничениями 162

Івохін Є.В., Апанасенко Д.В. Про застосування методів кластеризації нечітких даних спеціального вигляду 167

Катеринич Л.О. Адаптація системи керування нейронною мережею 172

Кацалова Л.М. Один метод реалізації спрощеної моделі циркуляції атмосфери 178
Кобзар А.Ю. Калібрування камери через пошук відстаней до ключових точок 182
Кулян В.Р., Юнькова О.О., Рутицька В.В., Кулян А.В. Деякі задачі математичного моделювання при управлінні банківськими активами 186
Лиман К.С. Моделі тематик в застосуванні до зняття семантичної неоднозначності 190
Макушенко І.А. Двокритеріальна задача розподілу зовнішнього навантаження для мережі з періодичною інтенсивністю вхідного потоку 198
Марченко О.О. Метод автоматичної прив'язки статей Вікіпедії в якості нових вузлів україномовної онтологічної бази знань UkrWordNet 204
Нікітченко М.С., Потапенко Ю.І. Алгебри багатозначних предикатів стабільних відносно відношення толерантності 211
Номіровський Д.А. Апріорні нерівності для лінійних диференціальних псевдогіперболічних моделей 215
Россада Т.В. Моделі реляційних номінативних даних 221
Рубльов Б.В., Танцюра Б.В., Молодцов О.І. Визначення метрики на деревах спеціального вигляду 225
Сандраков Г.В., Базілєва М.І. Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток 231
Терещенко В.М. Оптимальний алгоритм локалізації точки для тривимірного простору 235
Хімка У.Т.,Чабанюк Я.М , Семенюк С.А. Флуктуації процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації 239

РАДІОФІЗИКА

Веклич А.М., Борецький В.Ф., Лебідь А.В., Бондаренко Я.В., Фесенко С.О. Дослідження плазми електродугового розряду між композитними Cu–C електродами. Частина I: Визначення температури 247
Веклич А.М., Лебідь А.В., Тменова Т.А., Борецький В.Ф. Спектроскопічні дослідження плазми електродугового розряду з домішками міді та молібдену 251
Іванюта О.М. Фотоелектроактивація модифікованих фуллеренів 257
Лопатько К.Г., Афтанділянц Є.Г., Веклич А.М., Борецький В.Ф., Сірик О.О. Синтез металевих наночастинок в плазмі електричного розряду у воді 261

СУЧАСНА ФІЗИКА

Авраменко Т.Г., Рево С.Л., Михалюк О.В., Іваненко К.О. Структура, триботехнічні та кінетичні характеристики нанокомпозиції фторопласт-вуглець 271
Альохін О.Д., Білоус О.І. Аналіз величин критичних показників визначених різними теоретичними та емпіричними методами 275
Барабаш О.В. Спектр електрона у графеновій стрічці з урахуванням взаємодії Рашби 279
Барабаш О.В. Динаміка народження частинок з вакууму в однорідних нестаціонарних просторах 283
Гаврюшенко Д.А. Розподіл концентрації в ідеальній циліндричній порожнині поблизу критичної точки розшарування 287
Єщенко О.А. Фотолюмінесценція наночастинок Cu: ефект гігантського підсилення поверхневими плазмонами 291
Коробко О.В. Вплив молекулярної будови спиртів на швидкість випаровування під дією опромінення 297
Курилюк В.В. Вплив ступеня неоднорідності на пружно-напружений стан самоорганізованих SiGe квантових точок 301
Овсієнко І.В., Лазаренко О.А., Мацуй Л.Ю., Прокопов О.І. Особливості електроопору інтеркальо-ваних сполук графіту з бромом та хлоридом йоду в області структурних фазових перетворень в шарі інтеркалянту 305
Онанко А.П. Зміна дефектної наноструктури та релаксаційні процеси в SiO_2 + Si, GeSi 313
Перец Ю. С., Вовченко Л. Л., Мацуй Л. Ю., Сердюк В. С. Отримання графітових нанопластинок методом ультразвукового диспергування 317
Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Магнітні властивості тонких плівок молібдену 325
Шайкевич І.А., Лендел В.В., Ломакіна О.В., Мельниченко Л.Ю. Спектроеліпсометричні властивості тонких плівок молібдену при збудженні поверхневих поляритонів із застосуванням тришарової моделі плівки 331

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

Б.В. Бондарев[1], *д.ф.-м.н., професор*
О.Є.Сосницький[2], *аспірант*

Оцінки для ймовірности нерозорення страхової компанії у дискретний час

У даній роботі будуються оцінки знизу для ймовірності нерозорення страхової компанії, яка еволюціонує у дискретному часі. Розглянуто випадкові впливи: незалежні, пов'язані мартінгальною залежністю, а також впливи, які перемішуються "по Ібрагімову" або перемішуються "по Розенблатту".

Ключові слова: ймовірність нерозорення, нерівність Розенталя, перемішування "по Ібрагімову".

[1,2]Донецький національний університет, 83001, Донецьк, вул. Університетська, 24

B.V. Bondarev[1], *Professor*
O.E.Sosnytskyy[2], *post-graduate student*

Estimates for non-ruin probability of the insurance company in the discrete time model

In this paper lower estimations for the non-ruin probability of insurance company in the discrete time model are built. The following random effects have been considered: independent, connected by martingale dependence, and also effects, mixed "according to Ibragimov" or mixed "according to Rosenblatt".

Key Words: non-ruin probability, Rosenthal inequality, mixing "according to Ibragimov".

[1,2]*Donetsk National University, 83001, Donetsk, 24 Universitetskaya st.*

E-mails: [1]bondarev.mart@gmail.com, [2]yahooomg@gmail.com

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

In the monograph by A.Melnikov [1, p.64] the following model of evolution of insurance company's capital is presented: at initial (zero) time $n = 0$ the capital of insurance company is equal to some value $x > 0$, at the same time the company invests this capital into the bank account with simple interest rate $r > 0$, during unit time, at the moment $t = 1$ there will be already the sum $x(1+r)$ on the bank account. It is considered that during the time from $t = 0$ to $t = 1$ the premium of value c and the claim, described by Z_1, which must be payed at the time $n = 1$, are received.
So at the time $n = 1$ the capital of the insurance company will be equal to $R_1 = x\,(1 + r) + c - Z_1$, if the way of insurance company's functioning doesn't change, then at the time $t = n$ we will have $R_n = R_{n-1}\,(1 + r) + c - Z_n$, where the sequence of independent identically distributed positive random variables Z_n has distribution law $F\,(x) = P\,(Z_1 < x)$. In the study [1] recurrence formula for the probability of ruin of the insurance company for the finite time were deduced, the formula for the finding of solution was proposed. In the research by B.Bondarev, T. Zhmyhova [2], [3] infinite time interval of insurance company's functioning is considered and values of premiums C_n can be also random, then, it is obvious that $R_n = R_{n-1}\,(1 + r) + C_n - Z_n$. In these studies it is proposed to look for the solution in the form of functional series of a definite kind, with coefficients which can be estimated by recurrence relation. A very interesting application of similar scheme of capital functioning to research of the probability of bank's ruin was given by N.Gonchar [4]. It should be noted that in all mentioned above cases Markov scheme was observed - random effects were expected to be independent. In the given article the following problem is observed: suppose that insurance company has m branches in different regions of the country, where deposit interest rate, premium flow and claims can be various, besides this flows are not necessarily led by sequence of independent random variables - this sequence can be martingale, or can even satisfy any of the conditions of weak dependence. Using inequalities of Kolmogorov, Kolmogorov-Hajek-Renyi, inequalities of S.Utev for the sum of weakly dependant random variables, lower estimates are deduced for probability of non-ruin of insurance company. From our point of view this approach was for the first time used in the study [5].

© Б.В.Бондарев, О.Є.Сосницький, 2013

2 Problem statement and main results

Lets have $m \geqslant 1$ regions, where there are insurance company's branches. In the region with a number $k, 1 \leqslant k \leqslant m$ a branch has initial capital $x^{(k)}, k = 1, ..., m$, at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ..., n$, to the k-th branch of the company at the time interval from $l-1$ to l random premiums $C_l^k, l = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ with distribution function $G_l^k(x) = P\left(C_l^k < x\right), M\left|C_l^k\right| < +\infty$, $l = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ and claims $Z_l^k, l = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ with the distribution function $F_l^k(y) = P\left(Z_l^k < y\right), M\left|Z_l^k\right| < +\infty, l = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ are received. The capital evolution at the time interval $[l-1, l), l = 1, ..., n$ will be described by recurrence relation $R_l^k = R_{l-1}^k\left(1 + r_{l-1}^k\right) + C_l^k - Z_l^k, l = 1, ..., n, k = 1, ..., m$, then

$$R_n^k = x^{(k)} \prod_{l=0}^{n-1}\left(1 + r_l^k\right) + \sum_{l=1}^{n}\left(C_l^k - Z_l^k\right)\prod_{\nu=l}^{n-1}\left(1 + r_\nu^k\right) = x^{(k)} \prod_{l=0}^{n-1}\left(1 + r_l^k\right) + \prod_{l=0}^{n-1}\left(1 + r_l^k\right) \times \sum_{l=1}^{n}\left(C_l^k - Z_l^k\right)\prod_{\nu=0}^{l-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1} \quad (1)$$

Let $\bar{C}_l^k = MC_l^k, \tilde{C}_l^k = C_l^k - \bar{C}_l^k, \bar{Z}_l^k = MZ_l^k, \tilde{Z}_l^k = Z_l^k - \bar{Z}_l^k, l = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ then from (1) we obtain

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ..., n, \, k = 1, ..., m\right) = P\left(x^{(k)} \prod_{j=0}^{l-1}\left(1 + r_j^k\right) + \prod_{j=0}^{l-1}\left(1 + r_j^k\right) \times \sum_{j=1}^{l}\left(C_j^k - Z_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1} \geqslant 0, \; l = 1, ..., n, k = 1, ..., m\right) =$$

$$= P\left(x^{(k)} + \sum_{j=1}^{l}\left(C_j^k - Z_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1} \geqslant 0, \; l = 1, ..., n, k = 1, ..., m\right) =$$

$$= P\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1} \leqslant x^{(k)} + \sum_{j=1}^{l}\left(\bar{C}_j^k - \bar{Z}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}, \; l = 1, ..., n, k = 1, ..., m\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} P\left(\left[\sum_{j=1}^{l}\left(\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}\right] > x^{(k)} + \sum_{j=1}^{l}\left(\bar{C}_j^k - \bar{Z}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}, \; \exists l \in \{1, ..., n\}\right) \geqslant 1 -$$

$$- \sum_{k=1}^{m}\left(1 - P\left(\left[\sum_{j=1}^{l}\left(\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}\right] \leqslant x^{(k)} + \sum_{j=1}^{l}\left(\bar{C}_j^k - \bar{Z}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}, \; l = 1, ..., n\right)\right) \quad (2)$$

Theorem 2.1. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ...$ Let Z_j^k, C_j^k be such that for each fixed $k, k = 1, ..., m$ random variables $Z_j^k - C_j^k, j = 1, 2, ...$ are independent, $M\left(\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right)^2 \leqslant \sigma_k^2 < \infty, \bar{C}_j^k \geqslant \bar{Z}_j^k, j = 1, ...; k = 1, ..., m$, $\left|M\left(\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right)^\tau\right| \leqslant \frac{\tau!}{2} M\left(\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right)^2 H_k^{\tau-2}, \tau \geqslant 2$ is integer, $H_k > 0$ is constant, $k = 1, ..., m$. If $B_\infty^k = \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right)^2 \prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-2}$, then for $x^{(k)} > \sqrt{2B_\infty^k}$ the following estimates are correct:*

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ... \; k = 1, ..., m\right) \geqslant 1 - 2\sum_{k=1}^{m} \exp\left\{-\frac{\left[x^{(k)} - \sqrt{2B_\infty^k}\right]^2}{4B_\infty^k}\right\} \quad (3)$$

where

$$0 \leqslant x^{(k)} - \sqrt{2B_\infty^k} \leqslant \frac{B_\infty^k}{H_k}, k = 1, ..., m, \quad (4)$$

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...\ k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2\sum_{k=1}^{m}\exp\left\{-\frac{x^{(k)}-\sqrt{2B_{\propto}^k}}{4H_k}\right\} \quad (5)$$

where

$$0 \leqslant x^{(k)}-\sqrt{2B_{\propto}^k} \geqslant \frac{B_{\propto}^k}{H_k}, k = 1,...,m. \quad (6)$$

Proof. Suppose that

$$B_n^k=\sum_{j=1}^{n}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^2\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2},$$

then we have the following estimate

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...,n,\ k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-\sum_{k=1}^{m}P\left(\sup_{1\leqslant l\leqslant n}\left[\sum_{j=1}^{l}\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-1}\right]>x^{(k)}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 1-2\sum_{k=1}^{m}P\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-1}>x^{(k)}-\sqrt{2B_n^k}\right) \quad (7)$$

which is a consequence of estimates from theorem 12 from [6, p. 68]. Then using estimates of theorem 17 from [6, p. 73] we obtain

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...,n,\ k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2\sum_{k=1}^{m}\exp\left\{-\frac{\left[x^{(k)}-\sqrt{2B_n^k}\right]^2}{4B_n^k}\right\} \quad (8)$$

where

$$0 \leqslant x^{(k)}-\sqrt{2B_n^k} \leqslant \frac{B_n^k}{H_k}, k = 1,...,m, \quad (9)$$

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...,n,\ k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2\sum_{k=1}^{m}\exp\left\{-\frac{x^{(k)}-\sqrt{2B_n^k}}{4H_k}\right\} \quad (10)$$

where

$$0 \leqslant x^{(k)}-\sqrt{2B_n^k} \geqslant \frac{B_n^k}{H_k}, k = 1,...,m. \quad (11)$$

Since $B_n^k < B_{n+1}^k$ is increasing bounded sequence, it has the limit B_∞^k. Tending n to infinity in (8), (9), (10), (11) and taking into account that $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...,n,\ k=1,...,m\right) = P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...;\ k=1,...,m\right)$ we get the assertion of the theorem 2.1.□

In the theorem 2.1 the existence of exponential moment of random variables $\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right), j = 1,2,...$ was supposed. This requirement can be weaken, for instance, in assumption of existence of the $p-th$ moment, $p>2$.

Theorem 2.2. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1,....$ Let Z_j^k, C_j^k be such that for each fixed $k, k = 1,...,m$ random variables $Z_j^k - C_j^k, j = 1,2,...$ are independent, $\bar{C}_j^k \geqslant \bar{Z}_j^k, j = 1,...; k = 1,...,m,$. Assume, that for $p>1$ the following estimates are correct:*

$$M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{2p} \leqslant \sigma_k^{2p} < +\infty,$$
$$j = 1,...; k = 1,...,m, \quad (12)$$

Then the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...; k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2M(\theta-1)^{2p}\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\times$$
$$\times\max\left(\sum_{j=1}^{\propto}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2p}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2p},\right.$$
$$\left.\left[\sum_{j=1}^{\propto}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^2\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2}\right]^p\right) \quad (13)$$

where θ is Poisson random variable with the parameter 1.

Proof. From (7), using Kolmogorov's inequality we obtain the estimate

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...,n,\ k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-\sum_{k=1}^{m}P\left(\sup_{1\leqslant l\leqslant n}\left[\sum_{j=1}^{l}\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-1}\right]>x^{(k)}\right)\geqslant 1-2\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\times$$
$$\times M\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-1}\right]^p \quad (14)$$

Then, using Rosenthal's inequality with exact constant from the work [7], we obtain the following estimate

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...,n,\ k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2M(\theta-1)^{2p}\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\times$$
$$\times\max\left(\sum_{j=1}^{n}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2p}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2p},\right.$$
$$\left.\left[\sum_{j=1}^{n}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2}\right]^{p}\right) \quad (15)$$

Tending n to infinity in (16) we will obtain (14). Theorem 2.2 is proved.□ It is easy to see that the following assertion is correct

Corollary 2.1. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}=r_k>0, 1\leqslant k\leqslant m, l=1,....$ Let Z_j^k, C_j^k be such that for each fixed $k, k=1,...,m$ random variables $Z_j^k-C_j^k, j=1,2,...$ are independent, $\bar{C}_j^k\geqslant\bar{Z}_j^k, j=1,...; k=1,...,m,$.*

Assume, that for $p>1$ the following is valid

$$M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{2p}\leqslant\sigma_k^{2p}<+\infty,$$
$$M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{2}\leqslant\sigma_k^{2}<+\infty,$$
$$j=1,...; k=1,...,m.$$

Then the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...; k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2M(\theta-1)^{2p}\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\times \quad (16)$$
$$\times\max\left(\frac{\sigma_k^{2p}}{1-[1+r_k]^{-2p}},\left[\frac{\sigma_k^{2}}{1-[1+r_k)]^{-2}}\right]^{p}\right)$$

where θ - Poisson random variable with the parameter 1.

Since sequence $S_n^k=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)\prod\limits_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-1}$ is a martingale not only for independent variables $\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right), j=1,2,...$ but also for variables which are connected only by martingale dependence, it makes sense to raise the question of getting estimates of the form (14) also for this case, in other words, to try to weaken the requirement about the independence of $(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k), j=1,2,...$ considerably, replacing it by martingale's requirement for $(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k), j=1,...,n$.

Theorem 2.3. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k\geqslant r_k>0, 1\leqslant k\leqslant m, l=1,...,$ if the sequence $(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k), j=1,2,...$ is a martingale for each fixed $1\leqslant k\leqslant m$, and for $p>1$ the following is valid*

$$M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{2p}\leqslant\sigma_k^{2p}<+\infty,$$
$$j=1,...;, k=1,...,m$$

Then the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...; k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{\infty}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2p}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-p}\times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-\frac{p}{2p-1}}\right]^{2p-1} \quad (17)$$

Proof. Since the sequence $\left\{S_l^k\right\}, l=1,2,...; 1\leqslant k\leqslant m$ is in this case a martingale, then using Kolmogorov's inequality we obtain

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l=1,...,n,\ k=1,...,m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-2\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\times$$
$$\times M\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-1}\right]^{2p} \quad (18)$$

Next, since in the conditions of the theorem the following estimate takes place

$$M\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-1}\right]^{2p}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2p}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-p}\times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-\frac{p}{2p-1}}\right]^{2p-1}, \quad (19)$$

tending n to infinity in (18) and (19), we will obtain (17). Theorem 2.3 is proved.□

Corollary 2.2. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1} \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ...,$ let Z_j^k, C_j^k be such that for each fixed $k, k = 1, ..., m$ random variables $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k, j = 1, 2, ...$ are connected by martingale dependence,$\bar{C}_j^k \geqslant \bar{Z}_j^k, j = 1, ...; k = 1, ..., m,$ and for $p > 1$ the following is valid*

$$M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^{2p} \leqslant \sigma_k^{2p} < +\infty,$$
$$j = 1, ...; , k = 1, ..., m$$

Then the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ...; k = 1, ..., m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - 2\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p} \times$$
$$\times \frac{\sigma_k^{2p}}{\left(1 - [1 + r(k)]^{-p}\right)\left(1 - [1 + r(k)]^{-p/(2p-1)}\right)^{(2p-1)}}$$

There is another interesting statement. Since

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ..., n, k = 1, ..., m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m}\left(1 - P\left(\left|\sum_{j=1}^{l}\left(\tilde{Z}_l^k - \tilde{C}_l^k\right) \times \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \times \prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}\right| \leqslant x^{(k)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{l}\left(\bar{C}_j^k - \bar{Z}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}, l = 1, ..., n\right)\right) \quad (20)$$

the following theorem takes place.

Theorem 2.4. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ...$ and suppose that the sequence $\left\{\tilde{Z}_l^k - \tilde{C}_l^k\right\}, l = 1, ..., n$ forms square-integrable martingale for each fixed $k, k = 1, ..., m,$ and the following is valid*

$$M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^2 \leqslant \sigma_k^2 < +\infty,$$
$$j = 1, ...; , k = 1, ..., m$$

Then the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ... \; k = 1, ..., m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\left(x^{(k)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{l}\left(\bar{C}_j^k - \bar{Z}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}\right)\right]^{-2} \times$$
$$\times \left[M\left(\tilde{Z}_l^k - \tilde{C}_l^k\right)^2 \prod_{\nu=0}^{l-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-2}\right] \quad (21)$$

Proof. Using Kolmogorov-Hajek-Renyi's inequality [8, p.218], for the function $y = x^2$ from (20) we obtain

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ... \; k = 1, ..., m\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left[\left(x^{(k)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{l}\left(\bar{C}_j^k - \bar{Z}_j^k\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}\right)\right]^{-2} \times$$
$$\times \left[M\left(\tilde{Z}_l^k - \tilde{C}_l^k\right)^2 \prod_{\nu=0}^{l-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-2}\right] \quad (22)$$

Tending n to infinity in (22), we obtain (21). Theorem 2.4 is proved.□

Earlier we observed the case of independent random effects and effects connected by martingale dependence. It also makes sense to consider random effects which are connected by any properties of weak dependence. We shall restrict ourselves to the case of u.s.m. - uniform strong mixing - mixing "according to Ibragimov" or φ-mixing and the case of s.m. - strong mixing - mixing "according to Rosenblatt" or α-mixing. Let's recall the definition of $\alpha(\tau), \varphi(\tau)$. Centered sequence $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k$ for each fixed $1 \leqslant k \leqslant m$ satisfies the condition of uniform strong mixing (u.s.m.) if

$$\sup_{0 \leqslant t < +\infty} \sup_{A \in \Im_0^t, B \in \Im_{t+\tau}^+} |P(B/A) - P(B)| =$$
$$= \varphi(\tau) \to 0, \tau \to +\infty$$

here $\Im_0^t$ is σ-algebra, generated by the sequence

$$\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k, j = 1, ..., t$$

$\Im_{t+\tau}^{+\infty}$ is σ-algebra, generated by the sequence

$$\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k, j = t + \tau, ...$$

$\varphi(\tau)$ is called the coefficient of mixing.

Centered sequence $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k$ for each fixed $1 \leqslant k \leqslant m$ satisfies the condition of strong mixing (s.m.) if

$$\sup_{0\leqslant t<+\infty} \sup_{A\in\Im_0^t, B\in\Im_{t+\tau}^+} |P(B\cap A) - P(A)P(B)| = \\ = \alpha(\tau) \to 0, \tau \to +\infty$$

here $\Im_0^t$ is σ-algebra, generated by the sequence

$$\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k, j = 1, ..., t$$

$\Im_{t+\tau}^{+\infty}$ is σ-algebra, generated by the sequence

$$\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k, j = t+\tau, ...$$

$\alpha(\tau)$ is called the coefficient of mixing.

Denote $\bar{S}_n = \max\limits_{1\leqslant t\leqslant n} |S_t|, S_t = \sum\limits_{i=1}^{t} \eta_i$, where $\{\eta_k\}, k = 1, 2, ...$ satisfies the condition of (s.m.). In this case the following estimates take place (see [11], p. 67). Suppose that

$$j(t) = 2\min\{k \in N : 2k \geqslant t\},$$
$$b(\alpha, t, \delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{\frac{\delta}{\delta+j(t)}}(k)(k+1)^{j(t)-2},$$
$$\varepsilon(\alpha, t, \delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{\frac{\delta}{(t\delta+t)}}(k), \qquad (23)$$
$$L_t(n, \delta) = \sum_{k=1}^{n} \left(M|\eta_k|^{t+\delta}\right)^{\frac{t}{t+\delta}},$$
$$(D_n(\delta))^2 = L_2(n, \delta)$$

The following inequalities take place (see [11],p. 67):

$$P\left\{\bar{S}_n^k \geqslant x\right\} \leqslant x^{-t} c_2 \varepsilon(\alpha, t, \delta)\left(b(\alpha, t, \delta) + \right. \\ \left. + \varepsilon^t(\alpha, t, \delta)\right)\left(L_t(n, \delta) + (D_n(\delta))^t\right), t \geqslant 2 \quad (24)$$

And if $\alpha(k) \leqslant Aq^k, k = 0, 1, 2, ...0 \leqslant q < 1, t \geqslant 2$, then

$$P\left\{\bar{S}_n^k \geqslant x\right\} \leqslant x^{-t} c_3 L_t(n, \delta) + \\ + c_4 \exp\left\{-c_5\left(\frac{x}{D_n(\delta)}\right)^{1/3}\right\}, t \geqslant 2 \quad (25)$$

Denote $\eta_j^k = (Z_j^k - C_j^k)\prod\limits_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-1}, S_t^k = \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_j^k, \bar{S}_n^k = \max\limits_{1\leqslant t\leqslant n}\left|S_t^k\right|$

Theorem 2.5. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ...$ and suppose that for each fixed $1 \leqslant k \leqslant m$ the sequence $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k, j = 1, 2, ...$ satisfies the condition of (s.m.) with the coefficient of mixing $\alpha(\tau)$ such that all functions are defined in (23) for $t = 2p, p > 1$, and the following is valid*

$$M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^{2p+\delta} \leqslant \sigma_k^{2p+\delta} < +\infty, \\ j = 1, ...; k = 1, ..., m$$

Then the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ... \; k = 1, ..., m\right) \geqslant 1 - \\ - c_2\varepsilon(\alpha, 2p, \delta)\left(b(\alpha, 2p, \delta) + \varepsilon^{2p}(\alpha, 2p, \delta)\right) \times \quad (26) \\ \times \left(L_{2p}(\propto, \delta, k) + (D_\propto(\delta, k))^{2p}\right)\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}$$

Here

$$L_{2p}(\propto, \delta, k) = \sum_{j=1}^{\propto}\left(M\left|\eta_j^k\right|^{2p+\delta}\right)^{\frac{2p}{2p+\delta}} = \\ = \sum_{j=1}^{\propto}\left(M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^{2p+\delta}\right)^{\frac{2p}{2p+\delta}}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-2p},$$

$$(D_\propto(\delta, k))^2 = L_2(\propto, \delta, k) \qquad (27)$$

Proof. Using the estimate (24) we obtain

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ..., n, \; k = 1, ..., m\right) \geqslant 1 - \\ - c_2\varepsilon(\alpha, 2p, \delta)\left(b(\alpha, 2p, \delta) + \varepsilon^{2p}(\alpha, 2p, \delta)\right) \times \quad (28) \\ \times \left(L_{2p}(n, \delta, k) + (D_n(\delta, k))^{2p}\right)\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}$$

Here

$$L_{2p}(n, \delta, k) = \sum_{j=1}^{n}\left(M\left|\eta_j^k\right|^{2p+\delta}\right)^{\frac{2p}{2p+\delta}} = \\ = \sum_{j=1}^{n}\left(M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^{2p+\delta}\right)^{\frac{2p}{2p+\delta}}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1 + r_\nu^k\right)^{-2p},$$

$$(D_n(\delta, k))^2 = L_2(n, \delta, k) \qquad (29)$$

Tending n to infinity in (28) and (29), we will obtain (26). Theorem 2.5 is proved.□

Theorem 2.6. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ...$ and suppose that for each fixed $1 \leqslant k \leqslant m$ the sequence $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k$ satisfies the condition of (s.m.) with the coefficient of mixing $\alpha(\tau) \leqslant Aq^\tau, 0 \leqslant q < 1$ such that all functions are defined in (23) for $t = 2p, p > 1$. Then the following is valid*

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ... \; k = 1, ..., m\right) \geqslant \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} \left(\left[x^{(k)}\right]^{-2p} c_3 L_{2p}(\propto, k, \delta) + + c_4 \exp\left\{ -c_5 \left(\frac{x^{(k)}}{D_\propto(\delta, k)} \right)^{1/3} \right\} \right) \quad (30)$$

Proof. Using the estimation (24) we obtain

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, .., n \; k = 1, ..., m\right) \geqslant \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} \left(\left[x^{(k)}\right]^{-2p} c_3 L_{2p}(n, k, \delta) + + c_4 \exp\left\{ -c_5 \left(\frac{x^{(k)}}{D_n(\delta, k)} \right)^{1/3} \right\} \right) \quad (31)$$

Tending n to infinity in (31), we will obtain (30). Theorem 2.6 is proved.□

Suppose that sequence $\{\eta_j\}, j = 1, 2, ..., n$ satisfies the condition of (u.s.m.) with the coefficient of mixing $\varphi(\tau)$, let $\bar{S}_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} \eta_i \right|$ and the following conditions are satisfied

$$L_t(n) = \sum_{j=1}^{n} M|\eta_j|^t < +\infty, \; (D_n)^2 = L_2(n),$$

$$a(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{1/j(t)}(k) (k+1)^{j(t)-2} < +\infty,$$

$$\varphi(0) = 1, t \geqslant 2, \quad (32)$$

then the following inequalities are valid (see [11, p.67]):

$$P\left\{\bar{S}_n \geqslant x\right\} \leqslant c_2 a(\varphi, t) a(\varphi, 2) \times \times \left(L_t(n) + (D_n)^t\right) x^{-t}, t \geqslant 2 \quad (33)$$

where c_2 depends only on t ,

$$P\left\{\bar{S}_n \geqslant x\right\} \leqslant c_3 x^{-t} L_t(n) + + c_4 \exp\left(-c_5 \left({}^{x}/_{D_n} \right)^{1/3} \right), t \geqslant 2 \quad (34)$$

where $\varphi(k) \leqslant Aq^k, 0 \leqslant q < 1, c_3, c_4, c_5$ depends on A, t, q

Theorem 2.7. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ...$ and suppose that for each fixed $1 \leqslant k \leqslant m$ the sequence $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k$ satisfies the condition of (u.s.m.) with the coefficient $\varphi(\tau)$ such that following functions are defined*

$$L_{2p}(\propto, k) = = \sum_{j=1}^{\propto} M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^{2p} \prod_{\nu=0}^{j-1} \left(1 + r_\nu^k\right)^{-2p} < +\infty,$$

$$a(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{1/j(t)}(k) (k+1)^{j(t)-2} < +\infty,$$

$$\varphi(0) = 1, p \geqslant 1, \; \left(D_\propto^k\right)^2 = L_2(\propto, k) \quad (35)$$

Then the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ... \; k = 1, ..., m\right) \geqslant \geqslant 1 - c_2 a(\varphi, 2p) a(\varphi, 2) \times \times \sum_{k=1}^{m} \left[x^{(k)}\right]^{-2p} \left(L_{2p}(\propto, k) + \left(D_\propto^k\right)^{2p} \right) \quad (36)$$

Proof. Under the conditions of theorem the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ..., n, \; k = 1, ..., m\right) \geqslant \geqslant 1 - c_2 a(\varphi, 2p) a(\varphi, 2) \times \times \sum_{k=1}^{m} \left[x^{(k)}\right]^{-2p} \left(L_{2p}(n, k) + \left(D_n^k\right)^{2p} \right) \quad (37)$$

where

$$L_{2p}(n, k) = = \sum_{j=1}^{n} M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^{2p} \prod_{\nu=0}^{j-1} \left(1 + r_\nu^k\right)^{-2p} < +\infty,$$

$$a(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{1/j(t)}(k) (k+1)^{j(t)-2} < +\infty,$$

$$\varphi(0) = 1, p \geqslant 1, \; \left(D_n^k\right)^2 = L_2(n, k), \quad (38)$$

Tending n to infinity in (37) and (38) we will obtain (36). Theorem 2.7 is proved.□

Theorem 2.8. *Suppose that at the time interval from $l-1$ to l deposit interest rate is $r_{l-1}^k \geqslant r_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant m, l = 1, ...$ and suppose that for each fixed $1 \leqslant k \leqslant m$ the sequence $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k$ satisfies the condition of (u.s.m.) with the coefficient of mixing $\varphi(k) \leqslant Aq^k, 0 \leqslant q < 1$ such that all functions are defined in (35) for $t = 2p, p > 1$, then the following estimate takes place*

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ... \; k = 1, ..., m\right) \geqslant \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} \left(\left[x^{(k)}\right]^{-2p} c_3 L_{2p}(\propto, k) + + c_4 \exp\left(-c_5 \left(x^{(k)} \Big/ D_{\propto}^k \right)^{1/3} \right) \right) \quad (39)$$

Proof. Under the conditions of theorem the following estimate takes place

$$P\left(R_l^k \geqslant 0, l = 1, ..., n \; k = 1, ..., m\right) \geqslant \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} \left(\left[x^{(k)}\right]^{-2p} c_3 L_{2p}(n, k) + + c_4 \exp\left(-c_5 \left(x^{(k)} \Big/ D_n^k \right)^{1/3} \right) \right) \quad (40)$$

Tending n to infinity in (40) we will obtain (39). Theorem 2.8 is proved.□

3 Conclusion

Established lower estimates for the non-ruin probability of insurance company (meaning the probability that non of its branches has ruined during the time from $t = 0$ to $\propto$) as a function of the initial capital, allow us to say about acceptable reliability of conclusions in classical scheme - in the case of independent effects, in the case of random effects connected by martingale dependence, and also in the cases of effects with weak dependence - (u.s.m.) and (s.m.).

References

1. *Melnikov A.V.* Risk-menedzhment. Stohasticheskii analiz riskov v ekonomike finansov i strahovanii.-Moscow, Ankil, 2001. – 110 p.
2. *Bondarev B.V., Zhmihova T.V.* Znahodzhennya imovirnosti bankrutstva dlya odniei modeli strahovoi kompanii.//Ukr. math. journ.–2006, v.59, №4, pp.447-457
3. *Bondarev B.V., Zhmihova T.V.* Matematicheskaya teoriya strahovaniya.–Donetsk, Yugo-Vostok, 2010, 278 p.
4. *Honchar N.S.* Teorema o kapitalizacii bankov.// Mezhdunarodnyi nauchno-tehnocheskii zhurnal "Problemy upravleniya i informatiki" –2012, №1, pp.126-140
5. *Bondarev B.V., Sosnickii O.E.* Primenenie neravenstva Kolmogorova-Gaeka-Ren'i dlya ocenki veroyatnosti nerazoreniya strahovoi kompanii, rabotayushchei na BS-rynke. //Prukladna statystyka. Aktuarna ta finansova mamtematyka, №1-2, 2010, pp.23-51
6. *Petrov V.V.* Summu nezavisimyh slychainyh velichin.-M, Nauka,1972.–414 p.
7. *Ibragimov R.,Sharahmetov Sh.* Tochnaya konstanta v neravenstve Rozentalya dlya slychainyh velichin s nulevym srednim.// Probability Theory and Its Applications, v.46, iss. 1, 2001, pp.134-138
8. *Whittle P.* Veroyatnost.–M.: Nauka, 1982.–287 p.
9. *Ibragimov I.A., Linnik Yu.V.* Nezavisimye i stacionarno-svyazannue velichinu.–M.: Nauka, 1965.–524 p.
10. *Zhurbenko I.G.* Analiz stacionarnyh i odnorodnyh sluchainuh sistem.–M.: Izd-vo Mosk. Un-ta, 1987.–240 p.
11. *Utev S.A.* Neravenstva dlya summ slabozavisimyh sluchainyh velichin i ocenki skorosti shodimosti v principe invariantnosti, Predelnye teoremy dlya summ sluchainyh velichin, Novosibirsk nauka, 1984, pp. 50-77

Received: 9.11.2012

УДК 512.54

Є. В. Бондаренко[1], *к.ф.-м.н.*

Автоматні групи та Цаппа-Сеп добуток груп

Цаппа-Сеп добуток двох груп $K \bowtie H$ визначає автомат над алфавітом K і його дуальний автомат над алфавітом H. Ми досліджуємо групи, породжені цими автоматами.

Ключові слова: автоматна група, Цаппа-Сеп добуток, біреверсивний автомат.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, e-mail: ibond.univ@gmail.com.

I. V. Bondarenko[1], *PhD*

Automaton groups and Zappa-Szép product of groups

A Zappa-Szép product of two groups $K \bowtie H$ naturally defines an automaton over K and its dual automaton over H. We study groups generated by these automata.

Key Words: automaton group, Zappa-Szép product, bireversible automaton.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, vul.Volodymyrska, 64, e-mail: ibond.univ@gmail.com.

Communicated by Prof. V. V. Kirichenko.

Introduction

Automaton groups (groups generated by automata) were introduced by V.M. Glushkov in 1960's. For the last half century, many interesting properties of automaton groups were discovered. Moreover, several problems in different areas of mathematics were solved using automaton groups. That is why these groups play an important role in modern mathematics (see [3, 4]).

Another object of study in this paper is the Zappa-Szép product (bicrossed product) of two groups, which is a generalization of the semidirect product (see [1, 2]). We show how to associate a (bireversible) automaton to a Zappa-Szép product of two groups. Further, we describe groups generated by such automata and apply this result to realization of groups by bireversible automata.

1 Automaton groups

Let X be a nonempty set called an *alphabet* (it is usually assumed finite, but we will consider also infinite alphabets). The free monoid freely generated by X is denoted by X^*. The elements of X^* are finite words $x_1x_2\dots x_n$ over X together with the empty word denoted $\emptyset$.

An *automaton over* X is the triple $A = (Q, \lambda, \pi)$, where Q is the set of states of the automaton, $\lambda : Q \times X \to X$ is the output function, and $\pi : Q \times X \to Q$ is the transition function. This definition is symmetric with respect to the sets X and Q and it is a matter of convenience which of these sets will be treated as alphabet/states. Formally, the *dual automaton* A^* is the automaton over Q with the set of states X, the transition function $\pi^*(x, q) = \lambda(q, x)$, and the output function $\lambda^*(x, q) = \pi(q, x)$. An automaton is called finite if the sets X and Q are finite.

Every state q of an automaton A over X defines the map $A_q : X^* \to X^*$ by the recursive rule

$$A_q(x_1x_2\dots x_n) = \lambda(q, x_1)A_{\pi(q,x_1)}(x_2\dots x_n).$$

In terms of sequential machines, the automaton A processes words $x_1x_2\dots x_n$ from X^* as follows: If the automaton is in state q and reads the first letter x_1, then it outputs the letter $\lambda(q, x_1)$ and changes its state to $\pi(q, x_1)$, and so on.

An automaton A is called *invertible* if for every state q the restriction $\lambda(q, \cdot) : X \to X$ is a permutation of X. Its *inverse* is the automaton A^{-1} over X, whose state set Q' is in bijection with Q via $q' \mapsto q$, and the transition and output functions λ', π' are given by the rules:

$$\lambda'(q', x) = y \text{ and } \pi'(q', x) = p',$$

where $p = \pi(q, y)$ and $\lambda(q, y) = x$.

Let A be an invertible automaton. Then every state q of the automaton defines an invertible transformation A_q of X^*, and we can talk about the group $G_A = \langle A_q : q \in Q\rangle$ called the *automaton group* of the automaton A (we are using left actions, i.e., $A_{q_1}A_{q_2}(x) = A_{q_1}(A_{q_2}(x))$). An interesting open problem is to understand which groups G can be *realized by a* (finite) *automaton*, i.e., $G = G_A$ for some automaton A.

© I. V. Bondarenko, 2013

2 Automata from Zappa-Szép product

Let K and H be two groups. There are several ways to introduce a group structure on the cartesian product $K \times H$. The basic way is as the direct product of groups, where both factors seat as normal subgroups. More general construction is the semidirect product $K \rtimes H$ or $K \ltimes H$, where only one of the factors is required to be normal. The Zappa-Szép product $K \bowtie H$ generalizes semidirect product and requires neither of the factors to be normal in the product.

The (external) Zappa-Szép product of two groups K and H is defined with respect to maps $\alpha : H \times K \to K$ and $\beta : H \times K \to H$ that satisfy the following conditions:

1) $\alpha : H \times K \to K$ is a left action of the group H on the set K, i.e., $\alpha(h_1h_2, k) = \alpha(h_1, \alpha(h_2, k))$ and $\alpha(e, k) = k$ for all $h_1, h_2 \in H$ and $k \in K$.

2) $\beta : H \times K \to H$ is a right action of the group K on the set H, i.e., $\beta(h, k_1k_2) = \beta(\beta(h, k_1), k_2)$ and $\beta(h, e) = h$ for all $h \in H$ and $k_1, k_2 \in K$.

3) compatibility conditions

$$\begin{aligned} \alpha(h, k_1k_2) &= \alpha(h, k_1)\alpha(\beta(h, k_1), k_2) \\ \beta(h_1h_2, k) &= \beta(h_1, \alpha(h_2, k))\beta(h_2, k) \end{aligned}$$

hold for all $h, h_1, h_2 \in H$ and $k, k_1, k_2 \in K$.

Then the *Zappa-Szép product* $K \bowtie H$ of groups K and H is the cartesian product $K \times H$ with multiplication

$$(k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2) := (k_1\alpha(h_1, k_2), \beta(h_1, k_2)h_2).$$

The inverse of an element (k, h) is

$$(k, h)^{-1} = (\alpha(h^{-1}, k^{-1}), \beta(h^{-1}, k^{-1})).$$

The groups K and H can be identified with subgroups $K \times \{e\}$ and $\{e\} \times H$ of $K \bowtie H$.

The Zappa-Szép product of groups is closely related to factorization of groups. Namely, a group G decomposes as the Zappa-Szép product $G = K \bowtie H$ of its subgroups K, H if $G = KH$ and $K \cap H = \{e\}$ (exact factorization of G).

Every Zappa-Szép product $K \bowtie H$ naturally defines an automaton $A_{K \bowtie H}$ over K with the set of states H, where the maps α and β play the role of output and transition functions correspondingly. The dual automaton $A^*_{K \bowtie H}$ is precisely the automaton associated to the Zappa-Szép product $H \bowtie K$.

Definition 1. The automaton $A_{K \bowtie H}$ is called the automaton associated to the Zappa-Szép product $K \bowtie H$.

Automata associated to Zappa-Szép products possess a special property. An automaton A is called *bireversible* if the automata A, A^*, and $(A^{-1})^*$ are invertible.

Proposition 1. *An automaton associated to a Zappa-Szép product of two groups is bireversible.*

Proof. The automaton $A_{K \bowtie H}$ is invertible, because $\alpha(h, \cdot) : K \to K$ is a permutation of K for every $h \in H$ by the condition 1) in the definition of Zappa-Szép product. Moreover, since $H = H^{-1}$ and $K = K^{-1}$, the inverse automaton $A^{-1}_{K \bowtie H}$ is naturally isomorphic to $A_{K \bowtie H}$. Since the dual automaton $A^*_{K \bowtie H}$ coincides with the automaton associated to the Zappa-Szép product $H \bowtie K$, it is invertible by the same reasons. □

3 Automaton groups from Zappa-Szép product

Since automata associated to Zappa-Szép products are invertible, we can study groups generated by such automata. In the next theorem we describe these automaton groups. Recall that the *normal core* of a subgroup $H < G$ is the largest normal subgroup of G that is contained in H.

Theorem 1. *Let A be the automaton associated to a Zappa-Szép product $K \bowtie H$. The automaton group generated by A is isomorphic to the quotient of H by its normal core in $K \bowtie H$.*

Proof. Let G be the group generated by A. Consider the map $\varphi : H \to G$ given by $\varphi(h) = A_h$. We check that φ is a homomorphism, which is equivalent to the equality $A_{h_1h_2} = A_{h_1}A_{h_2}$. The action of $A_{h_1h_2}$ and $A_{h_1}A_{h_2}$ on words over K is the following:

$$\begin{aligned} & A_{h_1h_2}(kv) = \alpha(h_1h_2, k)A_{\beta(h_1h_2,k)}(v) \\ & A_{h_1}A_{h_2}(kv) = A_{h_1}(\alpha(h_2, k)A_{\beta(h_2,k)}(v)) = \\ = \ & \alpha(h_1, \alpha(h_2, k))A_{\beta(h_1,\alpha(h_2,k))}A_{\beta(h_2,k)}(v) \end{aligned}$$

for $k \in K$ and a word v over K. We get $A_{h_1h_2}(k) = A_{h_1}A_{h_2}(k)$ by the condition 1) from the definition of Zappa-Szép product. Now the compatibility

condition 3) for $\beta(\cdot,\cdot)$ together with an inductive argument imply $A_{h_1h_2} = A_{h_1}A_{h_2}$. Similarly, $(A_h)^{-1} = A_{h^{-1}}$.

In particular, every element of the group G can be represented as A_h for $h \in H$ and the map φ is surjective.

Let us compute the kernel of φ. First, we note that if $k = k_1k_2$ for $k_1, k_2 \in K$ then $A_h(k_1k_2)$ with k_1k_2 considered as a word over K with two letters coincides with $A_h(k)$. This follows from equalities

$$\begin{aligned} A_h(k) &= \alpha(h, k_1k_2) \\ A_h(k_1k_2) &= \alpha(h,k_1)A_{\beta(h,k_1)}(k_2) = \\ &= \alpha(h,k_1)\alpha(\beta(h,k_1),k_2) \end{aligned}$$

and the compatibility condition 3) for $\alpha(\cdot,\cdot)$. It follows that A_h acts trivially on K^* if and only if $A_h(k) = k$ for all $k \in K$. The last condition means $\alpha(h,k) = k$ or $hk = k\beta(h,k)$ in term of Zappa-Szép product $K \bowtie H$. We have proved that $h \in Ker\,\varphi$ if and only if $k^{-1}hk \in H$ for all $k \in K$, which is equivalent to $g^{-1}hg \in H$ for all $g \in K \bowtie H$. Therefore the kernel of φ coincides with the normal core of K in $K \bowtie H$. The statement is proved. □

Corollary 1. *The automaton group generated by $A_{K\bowtie H}$ is trivial if and only if K is normal in $K \bowtie H$, i.e., $K \bowtie H$ is the semidirect product $K \rtimes H$.*

Corollary 2. *The automaton $A_{K\bowtie H}$ is minimized if and only if H has trivial normal core in $K \bowtie H$.*

Remark 1. One can try to use the above construction to realize infinite groups as automaton groups over finite alphabets. However, if K is finite, then H has finite index in $K \bowtie H$ and the normal core of H has finite index in H. Therefore the group generated by the automaton $A_{K\bowtie H}$ is finite. Nevertheless, one can apply results from group factorization to realize finite groups by bireversible automata.

Example 1. The symmetric group S_{n+1} admits exact factorization $S_{n+1} = S_nC_{n+1}$, where both S_n and C_{n+1} have trivial core in S_{n+1}. The automaton corresponding to this factorization generates S_n and its dual automaton generates C_{n+1}. In particular, the group S_n can be realized by a bireversible automaton over the alphabet with n letters (the letter corresponding to the identity element of C_{n+1} can be removed from the alphabet).

Theorem 2. *Every finite group can be realized by a bireversible automaton.*

Proof. For groups of small order the proof is direct. Let H be a finite group of order $\geqslant 5$ and consider its regular representation $H < S_n$, here $n = |H|$. Then the symmetric group S_n has exact factorization $S_n = HS_{n-1}$, $H \cap S_{n-1} = \{e\}$. Since $n \geqslant 5$, the subgroups H and S_{n-1} have trivial core in S_n. The corresponding bireversible automaton generates the group H and its dual automaton generates S_{n-1}. □

References

1. *Agore A.L., Chirvăsitu A., Ion B., Militaru G.* Bicrossed products for finite groups // Algebr. Represent. Theory — 2009. — Vol. 12, № 2-5. — P. 481–488.

2. *Brin M.G.* On the Zappa-Szép product // Commun. Algebra — 2005. — Vol. 33, № 2. — P. 393–424.

3. *Grigorchuk R.I., Nekrashevych V.V., Sushchanskyy V.I.* Automata, dynamical systems, and groups // Proc. Steklov Inst. Math. — 2000. — Vol. 231. — P. 134–214.

4. *Nekrashevych V.* Self-similar groups / Nekrashevych V. — American Mathematical Society: Providence, RI, 2005. — 231 pp. — (Mathematical Surveys and Monographs 117).

Received: 10.10.2012

УДК 519.21

Ганна В.Верьовкіна[1], *к.ф.-м.н., доцент*

Інтерполяційні зображення деяких класів випадкових процесів із групуванням вузлів інтерполяції

Досліджуються інтерполяційні зображення певного класу випадкових процесів за нерівновіддаленими вузлами інтерполяції.

Ключові слова: інтерполяційне зображення, випадковий процес, вузли інтерполяції .

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

Ganna V.Verovkina[1], *PhD, Associate Professor*

The interpolation representation of some classes of random processes with a set of interpolation knots

Some interpolation representations of random processes with non equidistance interpolation knots are investigated.

Key Words: interpolation representation, random process, interpolation knots.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64

E-mail: ganna.verov@jmail.com

The article presented Dr. Sci. Science, Full Professor Yu.V.Kozachenko

1 Introduction

Interpolation representations of a class of random process with non equidistance interpolation knots are investigated. Obtained interpolation formula that uses the value of the process and its derivatives at the knots of interpolation. The convergence with probability 1 of the corresponding interpolation series to a random process is proved.

2 The interpolation representations of some kinds of random processes

Consider the interpolation representation of random processes [1] on non equidistance interpolation knots of the type $t_{n0} = n\frac{7\pi}{\alpha}, t_{n1} = n\frac{7\pi}{\alpha}+\frac{\pi}{\alpha}, t_{n2} = n\frac{7\pi}{\alpha}+\frac{2\pi}{\alpha}$, $n \in \mathrm{Z}$, based on observations of the process and its derivatives of the first and second orders at knots t_{n0}, t_{n1}, $n \in \mathrm{Z}$ and observations of the process at knots t_{n2}, $n \in \mathrm{Z}$.

Let us formulate the necessary results from the theory of entire functions of complex variable.

Lemma 1. *Let $f(z)$ be an entire bounded on the real axis function of exponential type with indicator σ. Then for any $\alpha, \alpha > \sigma$, the representation holds true*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left[\frac{f(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n0})^3} + \right.\right.$$

$$+\frac{f'(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n0})^2}+$$

$$\left.\left.+\frac{f''(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n0})}\frac{1}{2}\right] \times \frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}}-\right.$$

$$-\left[\frac{f(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})}+\right.$$

$$+\frac{f'(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})^2}+$$

$$\left.+\frac{f''(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})}\right] \times \frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{7}}+$$

$$\left.+\frac{f(t_{n0}+\frac{2\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{7}(z-t_{n0}-\frac{2\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2\sin^3\frac{\pi}{7}\sin^3\frac{2\pi}{7}}\right) \times$$

$$\times \sin^3\frac{\alpha}{7}(z-t_{n0}) \sin^3\frac{\alpha}{7}(z-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha}) \times$$

$$\times \sin\frac{\alpha}{7}(z-t_{n0}-\frac{2\pi}{\alpha}), \qquad (1)$$

where $t_{n0} = n\frac{7\pi}{\alpha}, n \in Z$, provided that the interpolation series (1) converges uniformly in any bounded region of the complex plane.

© Ganna V. Verovkina, 2013

Proving Lemma 1, we obtain estimate of the residual of the interpolation series (1), which has the following form

$$|R_n(z)| \leqslant LG(z)C_f \frac{\alpha}{\alpha-\sigma}\frac{1}{n}, \qquad (2)$$

where L is a constant, $C_f = \sup\limits_{t\in R}|f(t)|$, $G(z) = \left|\sin^3\frac{\alpha}{7}z \times \sin^3\frac{\alpha}{7}(z-\frac{\pi}{\alpha}) \times \sin\frac{\alpha}{7}(z-\frac{2\pi}{\alpha})\right|$ is a function bounded on any bounded region of the complex plane.

Consider a random process $\xi(t)$, $t \in R$ with $\mathrm{M}\xi(t) = 0$ and covariance function which the representation is

$$B(t,s) = \int_{\Lambda\times\Lambda} f(t,\lambda)\overline{f(s,\mu)}F(d\lambda, d\mu), \qquad (3)$$

where Λ is a set of parameters, $F(.,.)$ is a positive definite additive complex function on $\Lambda \times \Lambda$ such that

$$\int_{\Lambda\times\Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < +\infty. \qquad (4)$$

The function $f(t,\lambda)$ with respect to t is an entire function of exponential type with indicator $\sigma(\lambda)$ such that

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(t,\lambda)| = C_f < +\infty, \qquad (5)$$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(\lambda) = \sigma < +\infty. \qquad (6)$$

The following theorem holds true.

Theorem 2.1. *Let $\xi(t)$ be a separable random process that satisfies conditions* (3)–(6). *Then for any $\alpha, \alpha > \sigma$ with probability 1 the following representation holds true*

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left[\frac{\xi(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{n0})^3} + \right.\right.$$

$$+\frac{\xi'(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{n0})^2}+$$

$$\left.+\frac{\xi''(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{n0})}\frac{1}{2}\right]\times\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}}-$$

$$-\left[\frac{\xi(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})^3}+\right.$$

$$+\frac{\xi'(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})^2}+$$

$$\left.+\frac{\xi''(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})}\right]\times\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{7}}+$$

$$\left.+\frac{\xi(t_{n0}+\frac{2\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{7}(t-t_{n0}-\frac{2\pi}{\alpha})}\times\frac{1}{2\sin^3\frac{\pi}{7}\sin^3\frac{2\pi}{7}}\right)\times$$

$$\times\sin^3\frac{\alpha}{7}(t-t_{n0})\sin^3\frac{\alpha}{7}(t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})\times$$

$$\times\sin\frac{\alpha}{7}(t-t_{n0}-\frac{2\pi}{\alpha}) \qquad (7)$$

Proof. The random processes $\xi(t)$ has the spectral representation of the form [1]

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} f(t,\lambda)\, Z(d\lambda), \qquad (8)$$

where $Z(d\lambda)$ is a random measure on Λ such that $\mathrm{M}Z(A_1)\cdot\overline{Z(A_2)} = F(A_1, A_2)$. For any natural n consider the process $\xi_n(t)$ which is defined as a partial sum of series (7):

$$\xi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}\left(\left[\frac{\xi(t_{k0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{k0})^3} + \right.\right.$$

$$+\frac{\xi'(t_{k0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{k0})^2}+$$

$$\left.+\frac{\xi''(t_{k0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{k0})}\frac{1}{2}\right]\times\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}}-$$

$$-\left[\frac{\xi(t_{k0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})^3}+\right.$$

$$+\frac{\xi'(t_{k0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})^2}+$$

$$\left.+\frac{\xi''(t_{k0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3(t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})}\right]\times\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{7}}+$$

$$\left.+\frac{\xi(t_{k0}+\frac{2\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}-\frac{2\pi}{\alpha})}\times\frac{1}{2\sin^3\frac{\pi}{7}\sin^3\frac{2\pi}{7}}\right)\times$$

$$\times \sin^3 \frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})\times$$

$$\times \sin \frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}-\frac{2\pi}{\alpha}).$$

Using representation (8) and the assertion of Lemma 1, we can present $\xi_n(t)$ in the form

$$\xi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \int_\Lambda \left(\left[\frac{f(t_{k0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{k0})^3} + \right.\right.$$

$$+ \frac{f'(t_{k0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{k0})^2} +$$

$$\left.\left. + \frac{f''(t_{k0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{k0})} \frac{1}{2} \right] \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7}} - \right.$$

$$- \left[\frac{f(t_{k0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})^3} + \right.$$

$$+ \frac{f'(t_{k0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})^2} +$$

$$\left. + \frac{f''(t_{k0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})} \right] \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} +$$

$$\left. + \frac{f(t_{k0}+\frac{2\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}-\frac{2\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2\sin^3 \frac{\pi}{7} \sin^3 \frac{2\pi}{7}} \right) \times$$

$$\times \sin^3 \frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}-\frac{\pi}{\alpha})\times$$

$$\times \sin \frac{\alpha}{7}(t-t_{k0}-\frac{2\pi}{\alpha}) \times Z(d\alpha) \qquad (9)$$

Then based on the representations (1), (8), (9) and estimate (2), we obtain

$$\mathrm{M}|\xi(t)) - \xi_n(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant R_n^2(t) \int_{\Lambda\times\Lambda} |F\,(d\lambda, , d\mu)| =$$

$$= L^2 G^2(t) C_f^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha-\sigma}\right)^2 \frac{1}{n^2} \times$$

$$\times \int_{\Lambda\times\Lambda} |F\,(d\lambda, d\mu)|. \qquad (10)$$

From inequality (10), taking into account condition (4), we find that the interpolation series (7) converges to a random process $\xi(t)$ in the mean-square sense. Based on separability of the process $\xi(t)$ and convergence of the series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi(t) - \xi_n(t)|^2,$$

we obtain that the interpolation series (7) converges with probability 1 to a random process $\xi(t)$ in any bounded domain of changes of parameter t.

3 Conclusions

The work is devoted to investigation of interpolation representations of a class of random process. The main result is a theorem on the convergence of interpolating series to a random process with probability 1.

References

1. Yaglom A.M. *Spectral representations for various classes of random functions* . In Trudy 4 Vsesouzn. Mat. Congr. (Proc. 4th USSR Math. Congr.), 1963, vol.1, pp.250-273, Izd. Akad. Nauk SSSR, Leningrad.

Received editorial board 25.10.2012

УДК 519.2

М.С. Герич[1], аспірант

Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова

На скінченному регулярному ланцюгу Маркова (ЛМ) розглядається гратчастий пуассонівський процес; стрибки якого приймають довільні цілі від'ємні значення, а додатні стрибки тільки одиничні. Такі процеси називаються напівнеперервними зверху. Для цих процесів встановлюються співвідношення для генератрис мінімуму та доповнення до максимуму процесу без застосування операції проектування. Одержані співвідношення для досліджуваних генератирис визначалися в [6] у термінах проекцій відповідної компоненти факторизації. Нові співвідношення для цих генератрис встановлюються оберненням кумулянти, яка виражається через твірні перетворення функції розподілу від'ємних стрибків.

Ключові слова: напівнеперервні зверху процеси, генератриси мінімуму та доповнення до максимуму, кумулянта.

[1]Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул. Підгірна, 46

M. S. Herych[1], Postgraduate

Moment generating funtions of extremums and their complemets for upper semi-continuous lattice Poison process on Markov chain

On the finite regular Markov chain it is considered latticed Poisson process, jumps of which take arbitrary integer negative values, and positive jumps are equal 1. Such processes are called upper semi-continuous. For these processes the relations for moment generating funtions (m. g. f.) of minimum and complements to maximum of the process are established without proective operation. Obtained relations for considered m. g. f. were defined in [6] in terms of projection of coresponding component of factorization. New relations for these m. g. f. are established by the invertions of the cumulant function, which is represented in terms of generating transformation for distribution function of negative jumps.

Key Words: upper semi-continuous processes, moment generating funtions of minimum and complements to maximum, cumulant function.

[1]Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, 46 Pidhirna St.

E-mail: [1]miroslava.gerich@yandex.ru
Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

The description of the processes defined on Markov chain (MCh) was given in papers of I.I. Yezhov, A.B. Skorokhod [1]. Boundary problems for such processes with continuously distributed jumps on MCh were investigated in [2, 3], where matrix analogues of basic factorization identity (b. f. i.) and 2-nd factorization identity for almost semi-continuous processes were obtained. For semi-continuous processes refinements of some results in lattice case were obtained in papers D.V. Husak, A. I. Tureniyazova [4, 5] and M.S. Gerich [7, 6].

In this paper, our task is to find:

- relations for moment generating functions (m. g. f.) of the minimum distribution (including absolute);
- relations for m. g. f. of complements to maximum and its limit relations when $s \to 0$;
- and express these m. g. f. directly through the m. g. f. of distribution's tail for negative jumps of processes.

2 Upper semi continuous lattice Poison process on Markov chain

To do this, first consider two-dimensional Markov integral-valued process $\mathbf{Z}(t) =$

© М.С. Герич, 2013

$\{\xi(t), x(t)\}(t \geqslant 0, \xi(0) = 0)$, where $x(t)$ is finite ergodic MCh with values in $\mathbb{E} = \{1, ..., m\}$ and the generating matrix $\mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I})$; $\xi(t)$ of lattice Poison process given on MCh with values in $\mathbb{Z}$. Its m. g. f. has an exponential form

$$\mathbf{g}_t(z) = \|E[z^{\xi(t)},\, x(t) = r|\, x(0) = k]\| = \mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)},$$

where matrix cumulant function $\mathbf{K}(z)$ is determined by general matrix relation

$$\mathbf{K}(z) = \sum_{x\neq 0}(z^x - 1)\mathbf{K}_0(x) + \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{K}_0(x) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x). \tag{1}$$

$\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|$ $(k = 1, ..., m)$, λ_k are jumps intensitis of Poisson processes $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ with jumps distribution $\mathbf{p}(x) = \|\delta_{kr}P\{\xi_1^{(k)} = x\}\|$, $\mathbf{N} = \|\delta_{kr}n_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, where $\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ – parameters of the exponential distributed random variables ζ_k are sojour time $x(t)$ in the state k. Matrix of transition probabilities of embedded MCh $y_n = x(\sigma_n + 0)$, where σ_n are moments of n-th change of states for $x(t)$: $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|$, $(k, r = \overline{1, m})$, $\mathbf{f}(x) = \|p_{kr}P\{\chi_{kr} = x\}\|$ is a distribution of jumps on transitions of $x(t)$.

To reduce the notation of integral transformations on t it is necessary to introduce exponential distributive random variable θ_s $(P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\, s > 0)$.

For extremums of process and their complements, as well as for intersection functionals of positive (negative) level introduce the following notations:

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0\leqslant t'\leqslant t}(\inf)\xi(t'),\ \xi^{\pm} = \sup_{0\leqslant t\leqslant\infty}(\inf)\xi(t),$$

$$\overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^{+}(t),\ \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^{-}(t);$$

$$\tau^{+}(x) = \inf\{t > 0, \xi(t) > x\}, \gamma^{+}(x) = \xi(\tau^{+}(x)) - x,\ x \geqslant 0;$$

$$\tau^{-}(x) = \inf\{t > 0, \xi(t) < x\}, \gamma^{-}(x) = x - \xi(\tau^{-}(x)),\ x \leqslant 0.$$

Denote (in pursuance of averaging over distribution θ_s)

$$\mathbf{g}(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{g}_t(z)dt = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}. \tag{2}$$

$$\mathbf{g}_{\pm}(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi^{\pm}(\theta_s)} = \|E[z^{\xi^{\pm}(\theta_s)},\, x(\theta_s) = r|x(0) = k]\|,\ k, r = \overline{1, m},$$

$$\mathbf{g}^{-}(s, z) = \mathbf{E}z^{\bar{\xi}(\theta_s)},\ \mathbf{g}^{+}(s, z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)},$$

$$\mathbf{P}_s = s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \tag{3}$$

In [3], [4, 6] b. f. i. matrix analogue that establishes a relationship between $\mathbf{g}(s, z)$ and $\mathbf{g}_{+}(s, z)$, $\mathbf{g}^{-}(s, z)$, $(\mathbf{g}_{-}(s, z)$, $\mathbf{g}^{+}(s, z))$ was obtained .

$$\mathbf{g}(s, z) = \mathbf{E}\, z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases}\mathbf{g}_{+}(s, z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^{-}(s, z),\\ \mathbf{g}_{-}(s, z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^{+}(s, z).\end{cases} \tag{4}$$

All next probabilities are strictly positive:

$$\mathbf{p}_{\pm}(s) = \|P\{\xi^{\pm}(\theta_s) = 0,\, x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\|,$$

$$\mathbf{q}_{\pm}(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_{\pm}(s),$$

$$\mathbf{p}^{+}(s) = \|P\{\check{\xi}(\theta_s) = 0,\, x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\|,$$

$$\mathbf{p}^{-}(s) = \|P\{\bar{\xi}(\theta_s) = 0,\, x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\|,$$

$$\mathbf{q}^{\pm}(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^{\pm}(s).$$

Next, consider the lattice Poisson processes on MCh with cumulant function:

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}_1(z - 1) + \sum_{x<0}(z^x - 1)(\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{p}_2(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)) + \mathbf{Q}. \tag{5}$$

In [5, 7] it is shown that one among the b. f. i. component pair in (4) is matrix fractionall linear function relatively to z, and the other component of these pairs is determined by application of some projective procedures to m.g.f. of process itself. Our task is to express "not-simple"m. g. f. from paires $\{\mathbf{g}_{+}(s, z), \mathbf{g}^{-}(s, z)\}$ and $\{\mathbf{g}_{-}(s, z), \mathbf{g}^{+}(s, z)\}$ without projective operation. To do this, introduce the inverse MCh concept (see [9]) and auxiliary assertions on singularly perturbed matrices inversion (see [10]).

If $x(t)$ is homogeneous regular MCh with generating (degenerate) matrix $\mathbf{Q}$ and appropriate matrix of transition probabilities

$$\mathbf{P}(t) = \|P\{x(t) = r|x(0) = k\| = e^{t\mathbf{Q}} \tag{6}$$

and its Laplace - Carson transform

$$\widetilde{\mathbf{P}}(s) = s\int\limits_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{P}(t)dt = s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\ s>0 \quad (7)$$

is expressed through the inversion of singular perturbed matrix $(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$ (at $s>0$ i $|s\mathbf{I}-\mathbf{Q}|\neq 0$).

For $x(t)$ the probabilities of stationary distribution exists

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_0=\|p_{kr}^0\|,\ p_{kr}^0=\pi_r,\forall\, k,$$

that defines as the boundary of inversion in (7) for $s\to 0$

$$\mathbf{P}_0=\lim_{s\to 0}s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}. \quad (8)$$

Thus the relations (9) take place

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}_0=\mathbf{0},\ \mathbf{P}_0\mathbf{Q}=\mathbf{0}. \quad (9)$$

The first one is obvious, and the second defines the unique solution of corresponding system of linear equations for the values of stationary probabilities $\{\pi_k\}$ (see [8]).

We need the generalization of relations (8)-(9), which are given in Lemmas 1-2.

Lemma 1. *[10] Let $\mathbf{Q}_0$ be degenerate matrix of m-order, $\nu\neq 0$. Then the perturbed matrix inversion $\mathbf{Q}_0+\nu\mathbf{I}$ has the splitting*

$$(\mathbf{Q}_0+\nu\mathbf{I})^{-1}=\nu^{-1}\mathbf{\Pi}_1+\mathbf{T}_0(\mathbf{I}+\nu\mathbf{T}_0)^{-1}, \quad (10)$$

where $\mathbf{\Pi}_1$ is matrix eigen projector of $\mathbf{Q}_0$, $r=dimN(\mathbf{Q}_0)<m$, $\mathbf{\Pi}_1=\sum\limits_{k=1}^{r}u^k\bigotimes\rho^k$; u^k, ρ^k are right and left eigenvectors of the operator $\mathbf{Q}_0$, that correspond to the zero eigenvalue: $(\rho^{(i)},u^{(j)})=\delta_{ij}$, $i,j=\overline{1,r}$. Besides $\mathbf{T}_0=(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi}_1)((\mathbf{\Pi}_1-\mathbf{Q}_0)^{-1}-\mathbf{\Pi}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi}_1)$,

$$\mathbf{\Pi}_1\mathbf{Q}_0=\mathbf{Q}_0\mathbf{\Pi}_1=0,\ \mathbf{\Pi}_1\mathbf{T}_0=\mathbf{T}_0\mathbf{\Pi}_1=0, \quad (11)$$

and (11) is the analogue of relations (9). Denote for the process $\xi(t)$ with cumulant function (1)

$$\mathbf{M}_1^0=\mathbf{E}\xi(1)=\sum_{x\leqslant 1,\,x\neq 0}x\mathbf{K}_0(x),$$

$$\mathbf{D}_0=\mathbf{D}\xi(1)=\sum_{x\leqslant 1,\,x\neq 0}x^2\mathbf{K}_0(x),$$

which further will consider as finite. Denote $\widetilde{\mathbf{K}}_0(z)=\sum\limits_{x\leqslant 1,\,x\neq 0}(z^x-1)\mathbf{K}_0(x)$, at $z=1+\varepsilon$, $\widetilde{\mathbf{K}}_0(1+\varepsilon)=\varepsilon\widetilde{\mathbf{K}}_0'(1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\widetilde{\mathbf{K}}_0''(1)$, where $\widetilde{\mathbf{K}}_0'(1)=\mathbf{E}\xi(1)=\mathbf{M}_1^0$, $\widetilde{\mathbf{K}}_0''(1)=\mathbf{D}\xi(1)=\mathbf{D}_0$.

Then at $z=1+\varepsilon$ the approximation

$$-\mathbf{K}(z)=(1-z)\mathbf{M}_1^0-\frac{1}{2}(1-z)^2\mathbf{D}_0-\mathbf{Q}+o(\varepsilon^2) \quad (12)$$

takes place and respectively averaged over the stationary distribution $\mathbf{P}_0$ moments denote as

$$m_1^0=\sum_{k=1}^{m}\pi_k\sum_{r=1}^{m}[\delta_{kr}E\xi^{(k)}(1)+ \\ +\sum_{r\neq k}^{m}n_kp_{kr}E\chi_{kr}], \quad (13)$$

$$\sigma_0^2=\sum_{k=1}^{m}\pi_k\sum_{r=1}^{m}[\delta_{kr}D\xi^{(k)}(1)+ \\ +\sum_{r\neq k}^{m}n_kp_{kr}D\chi_{kr}]. \quad (14)$$

Based on (12)-(13) and (14) and some results in [9] the following lemma, which generalizes the relation (8), is proving.

Lemma 2. *For the process $\mathbf{Z}(t)$ with cumulant function (5) from $|m_1^0|<\infty$ the following relations take place*

$$\lim_{z\to 1}(-(1-z)\mathbf{K}^{-1}(z))= \\ =\lim_{z\to 1}(1-z)((1-z)\mathbf{M}_1^0-\mathbf{Q})^{-1}= \\ =\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0,\ m_1^0\neq 0, \quad (15)$$

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^2\mathbf{K}^{-1}(z)= \\ =\lim_{z\to 1}(1-z)^2(\frac{1}{2}(1-z)^2\mathbf{D}_0-\mathbf{Q})^{-1}= \\ =\frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0,\ m_1^0=0,\ \sigma_0^2<\infty. \quad (16)$$

For ergodic MCh $x(t)$ in [9] the inverse MCh $\widehat{x}(t)$ concept is introduced.

Definition 2.1. If $x(t)$ is ergodic MCh with generating matrix $\mathbf{Q}=\mathbf{N}(\mathbf{P}-\mathbf{I})$ with diagonally written distribution $\mathbf{R}=\|\delta_{kr}\pi_r\|$, then the inverse to MCh $x(t)$ is called MCh $\widehat{x}(t)$ which is defined by generating matrix $\widehat{\mathbf{Q}}=\mathbf{S}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{N}(\widehat{\mathbf{P}}-\mathbf{I})$, where $\mathbf{S}=\mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}$.

Accordingly reverse process $\widehat{\xi}(t)(t \geqslant 0)$ on MCh $\widehat{x}(t)$ is defined by cumulant function and moment generating function $\widehat{\xi}(\theta_s)$:

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \mathbf{S}\mathbf{K}^T(z)\mathbf{S}^{-1},$$

$$\widehat{\mathbf{g}}(s,z) = \mathbf{E}z^{\widehat{\xi}(\theta_s)} = s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{K}}(z))^{-1}.$$

Theorem 1. *[4] Basic factorization identity (4) in terms of moment generating functions extremums for inverse process* $\widehat{\mathbf{g}}_{\pm}(s,z) = \mathbf{E}z^{\widehat{\xi}^{\pm}(\theta_s)}$ *takes the form*

$$\mathbf{g}(s,z) = \begin{cases} \mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}_-^T(s,z)\mathbf{S}^{-1}; \\ \mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}_+^T(s,z)\mathbf{S}^{-1}. \end{cases} \quad (17)$$

Note that from (4) and (17) the relations of connection between the extremums distributions of direct and inverse processes follow

$$\mathbf{g}^{\pm}(s,z) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}_{\pm}^T(s,z)\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{P}_s = \mathbf{S}\,(\widehat{\mathbf{P}}_s)^T\mathbf{S}^{-1};$$

$$\mathbf{q}^+(s) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{q}}_+^T(s)\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{q}^-(s) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{q}}_-^T(s)\mathbf{S}^{-1}.$$

As well as in [3] in case of lattice Poison processes the similar result takes place.

Lemma 3. *For lattice Poison process defined on Markov chain, the following matrix representations take place for* $\mathbf{p}_*^{\pm}(s)$ *and* $\mathbf{p}_{\pm}^*(s)$

$$\mathbf{p}_{\pm}^*(s) = \mathbf{p}_{\pm}(s)\mathbf{P}_s^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(0)},\ \tau^{\pm}(0) < \infty] = \mathbf{I} - \mathbf{T}_*^{\pm}(s,0); \quad (18)$$

$$\mathbf{p}_*^{\pm}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^{\pm}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{E}[e^{-s\widehat{\tau}^{\pm}(0)},\ \widehat{\tau}^{\pm}(0) < \infty])^T\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{T}}_*^{\pm}(s,0))^T\mathbf{S}^{-1}; \quad (19)$$

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,0) = \mathbf{q}_{\pm}(s)\mathbf{P}_s^{-1},\ \widehat{\mathbf{T}}_*^{\pm}(s,0) = \widehat{\mathbf{q}}_{\pm}(s)\widehat{\mathbf{P}}_s^{-1}.$$

For upper semi-continuous processes $\xi(t)$ according to [7] the "not complicated"components of b.f.t. in (4) are as follows

$$\mathbf{g}_+(s,z) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}z)^{-1}\mathbf{p}_+(s),\quad \mathbf{p}_+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{P}_s,\quad \mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}, \quad (20)$$

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{p}_+(s)(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1}z)^{-1},\quad \mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1}),\quad \mathbf{Q}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s). \quad (21)$$

Further suppose $m_1^0 > 0$. Consider the embedded MCh ($y_*^1 = x(\tau^+(0))$, $y_*^0 = x(0)$) with matrix of transition probabilities $\mathbf{P}_* = \|P\{y_*^1 = r|y_*^0 = k\}\|$ and generating matrix $\mathbf{Q}_* = \mathbf{P}_* - \mathbf{I}$, де $\mathbf{P}\{\tau^+(0) < \infty\} = \|P\{\tau^+(0) < \infty,\ y_*^1 = r|y_*^0 = k\}\| = \mathbf{P}_*$, $\mathbf{T}_*^+(s,0) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)},\ \tau^+(0) < \infty] = \|E[e^{-s\tau^+(0)},\ y_*^1 = r|y_*^0 = k]\|$, $\mathbf{P}_* = \mathbf{T}_*^+(0,0)$. The moment generating function $\tau^+(0)$ at $s \to 0$ satisfies the approximation

$$\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0) = -\mathbf{Q}_* + s\mathbf{M}_* + o(s),\quad \mathbf{M}_* = \mathbf{E}\tau^+(0) > 0. \quad (22)$$

Denote the stationary distribution of the embedded MCh with generating matrix $\mathbf{Q}_*$ through $\mathbf{\Pi}_* = \lim\limits_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_*)^{-1} = \|\pi_{*kr}\|$, $\pi_{*kr} = \pi_{*r}$, $k, r = \overline{1,m}$, and appropriate averaging on it for $\mathbf{M}_*$

$$\mu_*^+ = \sum_{k=1}^m \pi_{*k} \sum_{r=1}^m E[\tau^+(0),\ y_*^1 = r|y_*^0 = k].$$

Similarly, introduce notion of inverse MCh for embedded with generating matrix $\widehat{\mathbf{Q}}_* = \mathbf{S}\mathbf{Q}_*^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}_* = \widehat{\mathbf{P}}_* - \mathbf{I}$, $\mathbf{P}\{\widehat{\tau}^+(0) < \infty\} = \|P\{\widehat{\tau}^+(0) < \infty,\ \widehat{y}_*^1 = r|\widehat{y}_*^0 = k\}\| = \widehat{\mathbf{P}}_*$.

$$\widehat{\mathbf{T}}_*^+(s,0) = \mathbf{E}[e^{-s\widehat{\tau}^+(0)},\ \widehat{\tau}^+(0) < \infty] = \|E[e^{-s\widehat{\tau}^+(0)},\ \widehat{y}_*^1 = r|\widehat{y}_*^0 = k]\|;$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_* = \|P\{\widehat{y}_*^1 = r|\widehat{y}_*^0 = k\}\|,\ k, r = \overline{1,m},\quad \widehat{\mathbf{P}}_* = \widehat{\mathbf{T}}_*^+(0,0).$$

M. g. f. $\widehat{\tau}^+(0)$ for $s \to 0$ satisfies the approximation

$$\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_*^+(s,0) = -\widehat{\mathbf{Q}}_* + s\widehat{\mathbf{M}}_* + o(s),\quad \widehat{\mathbf{M}}_* = \mathbf{E}\widehat{\tau}^+(0) > 0. \quad (23)$$

Introduce the following notations

$$\widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{P}}_*)^T\mathbf{S}^{-1},\ \widehat{\mathbf{Q}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}_*)^T\mathbf{S}^{-1};\quad \widehat{\mathbf{M}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\mathbf{E}[\widehat{\tau}^+(0)])^T\mathbf{S}^{-1};$$

$$\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0) = \mathbf{S}(\mathbf{E}[e^{-\widehat{\tau}^+(0)},\ \widehat{\tau}^+(0) < \infty])^T\mathbf{S}^{-1}.$$

After performing of transposition operation on (23), then multiplying on $\mathbf{S}$ the left and on $\mathbf{S}^{-1}$ on the right and taking into account the necessary notations we obtain (24)

$$\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0) = -\widehat{\mathbf{Q}}_{*\mathbf{S}} + s\widehat{\mathbf{M}}_{*\mathbf{S}} + o(s). \quad (24)$$

Denote the stationary distribution of inverse MCh with generating matrix $\widehat{\mathbf{Q}}_*$ through $\widehat{\mathbf{\Pi}}_* = \lim\limits_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{Q}}_*)^{-1} = \|\widehat{\pi}_{*kr}\|$, $\widehat{\pi}_{*kr} = \widehat{\pi}_{*r}$, $k, r = \overline{1,m}$, and appropriate averaging for $\widehat{\mathbf{M}}_*$ by corresponding stationary distribution

$$\widehat{\mu}_*^+ = \sum_{k=1}^m \widehat{\pi}_{*k} \sum_{r=1}^m E[\widehat{\tau}^+(0),\, \widehat{y}_*^1 = r | \widehat{y}_*^0 = k].$$

For upper semi-continuous process $\xi(t)$ according with (18), (19), (20), (21) and previously introduced concepts and notations we found $\mathbf{Z}_s^{-1}$, $\mathbf{Q}_s^{-1}$:

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{T}_*^+(s,0);\ \mathbf{Q}_s^{-1} = \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0). \tag{25}$$

From Lemma 2 and the relations (22), (24) and (25) the next lemma follows

Lemma 4. *If $\xi(t)$ is upper semi-continuous process and $0 < m_1^0 < \infty$, then $0 < \mu_*^+ < \infty$, $0 < \widehat{\mu}_*^+ < \infty$, and the following limit relations take place*

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})^{-1} = \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0))^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*, \tag{26}$$

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1})^{-1} = \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0))^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}. \tag{27}$$

Proof. Using relation (25), (22) and (15) we obtain (26)

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})^{-1} = \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{M}_* - \mathbf{Q}_*)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*.$$

Similarly (27) is proved after using (25), (24) and taking into account the result of Lemma 2.

From dual relations

$$\mathbf{Z}_s - \mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{Z}_s(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}), \\ (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{Z}_s. \end{cases} \qquad \mathbf{Q}_s - \mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{Q}_s(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1}), \\ (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1})\mathbf{Q}_s. \end{cases} \tag{28}$$

at $s > 0$ follows

Lemma 5. *If $\xi(t)$ is upper semi-continuous process on Markov chain $x(t)$, then at $0 < m_1^0 < \infty$, according to (26) and (27) the following relations take place*

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{Z}_s - \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*', \qquad \mathbf{\Pi}_*' = \mathbf{\Pi}_*\mathbf{P}_* = \mathbf{P}_*\mathbf{\Pi}_* = \mathbf{\Pi}_*. \tag{29}$$

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{Q}_s - \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}', \qquad \widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_*, \qquad \mathbf{\Pi}_{*\mathbf{S}}' = \widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}. \tag{30}$$

Proof. The first relations in (29) and (30) follow from (28) taking to the account the conditions (25)-(27). Second relation in (30) follows from early mentiond inversity notations. Last relations are evident.

Consider cumulant function (5) and present it as

$$\mathbf{K}(z) = (z-1)[\mathbf{\Lambda}_1 - z^{-1}(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))] + \mathbf{Q} \tag{31}$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) = \sum_{x\leqslant 0} z^x \mathbf{P}\{\xi_1^{(k)} < x\},\ |z| \geqslant 1.$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}(z) = \sum_{x\leqslant 0} z^x \|p_{kr} P\{\chi_{kr} < x\}\|,\ |z| \geqslant 1.$$

Should be noted that according to (25) $\mathbf{K}(z)$ is expressed through generating transform of the negative jumps distribution functions and $\mathbf{K}(1) = \mathbf{Q}$.

Theorem 2. *If $\xi(t)$ is upper semi-continuous process on Markov chain $x(t)$ i $0 < m_1^0 < \infty$, and then at $|z| \geqslant 1$ moment generating function of $\xi^-(\theta_s)$ looks as*

$$\mathbf{g}_-(s,z) = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1}z)(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1})^{-1} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}[\mathbf{I} + (1-z)(\mathbf{Q}_s - \mathbf{I})^{-1}], \tag{32}$$

$$\mathbf{p}_-(s) = s\mathbf{\Lambda}_1^{-1}(\mathbf{Q}_s - \mathbf{I})^{-1}. \tag{33}$$

If $0 < m_1^0 < \infty$, and according to (30) moment generating function of absolute minimum ξ^- looks as

$$\mathbf{g}_-(z) = \lim_{s\to 0} \mathbf{g}_-(s,z) = m_1^0[\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{Q}(1-z)^{-1} - (\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))z^{-1}]^{-1}\mathbf{P}_0, \tag{34}$$

$$\mathbf{g}_-(1)=\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}=\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0\mathbf{\Pi}_*=$$
$$=\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{\Pi}_*=\mathbf{P}_0, \quad (35)$$

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}=\mathbf{\Pi}_*=\mathbf{P}_0,\ \widehat{\mu}_*^+=\frac{1}{m_1^0}, \quad (36)$$

$$\mathbf{p}_-=\mathbf{P}\{\xi^-=0\}=m_1^0\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{P}_0. \quad (37)$$

Proof. From the second equality in (4), taking into account (2), (3) and (21) we get the first relation in(32)
$\mathbf{g}_-(s,z)=s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1})^{-1}$. In order to obtain the second relation in (32) the last two multipliers $(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1})^{-1}$ are reduced to

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1})^{-1}=(\mathbf{Q}_s-\mathbf{I}z)(\mathbf{Q}_s-\mathbf{I})^{-1}=$$
$$(\mathbf{Q}_s-\mathbf{I})(\mathbf{Q}_s-\mathbf{I})^{-1}+(1-z)(\mathbf{Q}_s-\mathbf{I})^{-1}=$$
$$[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{Q}_s-\mathbf{I})^{-1}].$$

To receive (33) proceed to limit in the first relation (32) for $z\to\infty$, pre-substituting $\mathbf{K}(z)$ from (31).

M. g. f. of absolute minimum in accordance with (27) is determined from (32) for $s\to 0$ and $0<m_1^0<\infty$ after accounting the second relation in (30) and (31)

$$\mathbf{g}_-(z)=\lim_{s\to 0}\mathbf{g}_-(s,z)=$$
$$\lim_{s\to 0}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1})^{-1}=$$
$$(-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}z)\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}=$$
$$\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}[\mathbf{\Lambda}_1-\mathbf{Q}(1-z)^{-1}-(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))z^{-1}]^{-1}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}.$$

The first equality in (35) we receive from $\mathbf{g}_-(z)$ after limited transition at $z\to 1$ and taking into account conditions (5) and (15). Since $\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}=\mathbf{\Pi}_*$, then

$$\mathbf{g}_-(1)=\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0\mathbf{\Pi}_*=\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{\Pi}_*.$$

By carrying out the limiting transition in (32) for $z\to 1$ and $s\to 0$ in the general case, we get $\mathbf{g}_-(1)=\mathrm{P}_0$. Thus, $\mathbf{\Pi}_*=\mathbf{P}_0$, and $\widehat{\mu}_*^+ m_1^0=1$. So the relations (35) and (36) are proved.

Taking into account the conditions (36) in the last relation for $\mathbf{g}_-(z)$ we get (34).

The value $\mathbf{p}_-$ in (37) is determined from (34) for $z\to\infty$. So the theorem is proved.

Almost similarly the following theorem is established.

Theorem 3. *If $\xi(t)$ is upper semi-continuous process on Markov chain $x(t)$ and $0<m_1^0<\infty$, then for $|z|\geqslant 1$ moment generating function $\overline{\xi}(\theta_s)$ satisfies the following relation*

$$\mathbf{g}^-(s,z)=(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}=$$
$$=[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}]s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}, \quad (38)$$

$$\mathbf{p}^-(s)=(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}s\mathbf{\Lambda}_1^{-1}. \quad (39)$$

If $0<m_1^0<\infty$, then according to (29) moment generating function $\overline{\xi}=\lim\limits_{s\to 0}(\overline{\xi}(\theta_s)-\xi^+(\theta_s))$ is defined by limit relation for $s\to 0$

$$\mathbf{g}^-(z)=\lim_{s\to 0}\mathbf{g}^-(s,z)=m_1^0\mathbf{P}_0[\mathbf{\Lambda}_1-\mathbf{Q}(1-z)^{-1}-$$
$$-(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))z^{-1}]^{-1}, \quad (40)$$

$$\mathbf{g}^-(1)=\frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0=\frac{1}{\mu_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0=\mathbf{P}_0, \quad (41)$$

$$\mu_*^+=\frac{1}{m_1^0}, \quad (42)$$

$$\mathbf{p}^-=\mathbf{P}\{\overline{\xi}=0\}=m_1^0\mathbf{P}_0\mathbf{\Lambda}_1^{-1}. \quad (43)$$

Proof. From the first equality in (4) we receive $\mathbf{g}^-(s,z)=\mathbf{P}_s((\mathbf{g}_+(s,z))^{-1}\mathbf{g}(s,z)$. Considering (2), (3) and (20) we rewrite $\mathbf{g}^-(s,z)$ as $\mathbf{g}^-(s,z)=(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}$. So the first relation in (38)is proved. In order to get the second relation in (38) the first two multipliers $(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)$ will be transformed similarly as in the previous theorem. Thus the second relation in (38) is also proved.

To prove (39) proceed to limit in the first relation (38) for $z\to\infty$, and , pre-substituting $\mathbf{K}(z)$ from (31).

$$\mathbf{g}^-(s,z)=(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}=$$
$$=(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)s(s\mathbf{I}+$$
$$[\mathbf{\Lambda}_1-z^{-1}(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)-\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))]-\mathbf{Q})^{-1}\longrightarrow_{z\to\infty}$$
$$s(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{\Lambda}_1^{-1}=\mathbf{p}^-(s)$$

M. g. f. $\mathbf{g}^-(z)$ according to (26) is defined from (38) for $s\to 0$ and $0<m_1^0<\infty$ after accounting of second relation in (29) and (31).

$$\mathbf{g}^-(z)=\lim_{s\to 0}\mathbf{g}^-(s,z)=$$

$$\lim_{s\to 0}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}=$$
$$\frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I}-\mathbf{P}_*z)(-\mathbf{K}(z))^{-1}=$$
$$\frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*[\mathbf{\Lambda}_1-\mathbf{Q}(1-z)^{-1}-(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))z^{-1}]^{-1}.$$

First equality in (41) we obtain from the previous relation after the limit passage for $z\to 1$ and considering (5) and (15). From the obvious relation $\mathbf{\Pi}_*\mathbf{P}_0=\mathbf{P}_0$ we receive the second expression in (41). To deduce the last expression in (41) we will accomplish the limit passage transition in (38) at $z\to 1$, taking into account the condition $\mathbf{K}(1)=\mathbf{Q}$, and then, proceeding to limit for $s\to 0$, we'll obtain the necessary. Equating these three expressions we receive (42).

Validity (40) follows from the previous relation for $\mathbf{g}^-(z)$ after consideration of the conditions (42) and (36).

For $z\to\infty$ from (40) receive (43), previously taking into account the conditions (36) and (42)

$$\mathbf{p}^-=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*[\mathbf{\Lambda}_1-$$
$$\mathbf{Q}(1-z)^{-1}-(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))z^{-1}]^{-1}=$$
$$\frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*\mathbf{\Lambda}_1^{-1}.$$

The theorem is proved.

3 Conclusions

In paper the limiting relations (34) and (40). were obtained. They are appropriate matrix analogues of Polyaczek-Khinchin formula that in the scalar case ($P\{\xi^-=\overline{\xi}\}=1$, $\mu_*^+=\int_0^{+\infty}P\{\tau^+(0)>t\}\,dt$), for upper semi-continuous lattice process looks

$$Ez^{\xi^-}=\frac{1}{\mu_*^+}(\lambda_1-\lambda_2\widetilde{\widetilde{F}}_2(z))^{-1},$$
$$\widetilde{\widetilde{F}}_2(z)=z^{-1}\widetilde{F}_2(z),\ \widetilde{\widetilde{F}}_2(z)=\sum_{z\leqslant k}z^kp_k,\ (k\geqslant 0)$$
$$\frac{1}{\mu_*^+}=\lambda_1-\lambda_2\widetilde{F}_2(1)=m_1.$$

References

1. *Ezhov I. I., Skorokhod A. V.* Markov processes, homogeneous by second component// Probability teor. and its appl. – 1969. – **14**, № 1. – P. 3–14, № 4. – P. 679–692

2. *Husak D. V.* Boundary problems for processes with independent increments on finite Markov chain and for semi-Markov processes. – Kiev: Institute of Mathematics NAN Ukrain, 1998. – p. 320.

3. *Karnaukh Ye. V.* Boundary value problems for one class processes on Markov chain: Thesis abstract of PhD Ph.-mat. sc. – Kiev, 2007, – p. 18.

4. *Husak D. V., Tureniyazova A. I.* Distribution of some boundary functionals for lattice Poisson processes on Markov chain// Asymptotic methods in stochastic models study: Col.sc.p. – Institute of Mathematics NAN Ukrain, 1967. – P. 21–27.

5. *Husak D. V., Tureniyazova A. I.* About semi–continuous lattice processes on Markov chain// Ukr. math. journal. – 1987. – 39, №6. – P. 707–711.

6. *Husak D. V., Herych M.S.* Refinements of basic faktorizational identity components for lattice processes on Markov chain// Uzhhorod University Scientific Herald. Series mathematics and informatics. – 2011. – 22, №2. – P. 54–63.

7. *Herych M.S.* Refinements of basic faktorizational identity for almost semi-continuous lattice processes on Markov chain // Carpathian mathematical publish papers. – 2012. – V.4, №2. – P. 229–240.

8. *Borovkov A. A.* Probability theory. – Moscow: Nauka, 1986. – p. 432.

9. *Kemeny J., Snell J.,Knepp A.* Countable Markov chains. – Moscow: Nauka, 1987. – p. 416. – 416 c.

10. *Korolyuk V. S., Turbin A. F.* Semi-Markov processes and their application. – Kiev: Naukova Dumka, 1976. – p. 182.

Received: 19.10.2012

УДК 512.552.1

Журавльов В. М.[1], доцент
Журавльов Д. В.[2]

Черепичні порядки в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності

Отримано опис з точністю до ізоморфізму всіх зведених черепичних порядків в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності.
Ключові слова: черепичний порядок, незвідний модуль, глобальна розмірність, ядро епіморфізму, матриця показників.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

Zhuravlev V. N.[1], Ass. Prof.
Zhuravlev D. V.[2]

Tiled orders in $M_6(D)$ of finite global dimension

We describe, up to isomorphism, all reduced tiled orders in $M_6(D)$ of finite global dimension.
Key Words: tiled order, irreducible module, global dimension, kernel of epimorphism, exponent matrix.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64

[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64

E-mail: vshur@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Поняття черепичного порядку ввів І.Капланський. Його учень Р.Тарсі [2] вивчав глобальну розмірність черепичних порядків над локальним дедекіндовим кільцем $\mathcal{O}$ з полем часток k. Такі порядки мають класичні кільця часток, які є повними матричними алгебрами $M_n(k)$, де через $M_n(B)$ позначено кільце всіх квадратних матриць порядку n з елементами з кільця B. В.Ятегаонкар [9] довів, що в алгебрі $M_n(k)$ над полем часток k локального дедекіндового кільця $\mathcal{O}$ існує лише скінченне число, з точністю до ізоморфізму, черепичних порядків скінченної глобальної розмірності. Такі черепичні порядки вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, [5]–[10], [8]–[12]). Фуджита в [10] описав зведені черепичні порядки в $M_n(D)$ скінченної глобальної розмірності для $n = 4, 5$.

Мета цієї роботи — побудова проективної резольвенти незвідного модуля над черепичним порядком в $M_6(D)$, опис з точністю до ізоморфізму всіх зведених черепичних порядків в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності.

Відмітимо, що в нашій термінології "черепичний порядок" — це нетерове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з ненулевим радикалом Джекобсона.

2 Черепичні порядки над дискретно нормованими кільцями

Означення 2.1. Кільце A називається **напівмаксимальним**, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [5].

Теорема 1. (див. [5]) *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π, α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i.

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

© Журавльов В.М., Журавльов Д. В., 2013

Ми будемо використовувати наступне позначення: $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, де $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця Λ, т.б. $\Lambda = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є *зведеним*, то $\alpha_{ij}+\alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Кільце $\mathcal{O}$ вкладається в класичне тіло часток $\mathcal{D}$, і (1) означає множину всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ таких що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj}$, де $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ — матричні одиниці кільця $M_n(\mathcal{D})$. Очевидно, що $Q = M_n(\mathcal{D})$ є класичним кільцем часток кільця Λ.

Зрозуміло, що кільце Λ є як нетеровим справа, так і нетеровим зліва.

Означення 2.2. Модуль M називається **дистрибутивним**, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Очевидно підмодуль та фактор-модуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається **напівдистрибутивним**, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається **напівдистрибутивним справа (зліва)**, якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A ($_AA$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним (див. [3]).

Теорема 2. [6] *Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A еквівалентні:*

a) кільце A напівдистрибутивне;

b) кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем — це нетерове первинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона. В цьому випадку $\mathcal{O} = eAe$ є дискретно нормованим кільцем для кожного примітивного ідемпотента $e \in A$.

Означення 2.3. Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A-граткою називається правий (лівий) A-модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$-модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A-модулі є A-гратками.

Серед всіх A-граток виділяються так звані незвідні A-гратки, тобто A-гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q-модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Як було показано в [5] будь-яка права (відп. ліва) незвідна A-гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A-модулем з $\mathcal{O}$-базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \ldots, \pi^{\alpha_n}e_n$), причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases}$$

де буква T означає операцію транспонування. Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

3 Глобальна розмірність кілець

Нехай A —кільце. Позначимо через $\mathrm{mod} - A$ ($A - \mathrm{mod}$) категорію правих (лівих) A-модулів.

Означення 3.1. Проективною резольвентою A-модуля M називається точна послідовність A-модулів

$$\cdots \qquad P_2 \overset{d_2}{\longrightarrow} P_{(1)} \overset{d_1}{\longrightarrow} P_{(0)} \overset{\pi}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0\,,$$

в якій всі модулі P_i проективні. Якщо існує n таке, що $P_n \neq 0$ а $P_k = 0$ для всіх $k > n$, то говорять, що довжина проективної резольвенти дорівнює n (і ∞, якщо такого числа не існує).

Означення 3.2. Говорять, що проективна розмірність A-модуля M дорівнює n та пишуть $\mathrm{proj.dim}_A M = n$, якщо існує проективна резольвента довжини n:

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{(1)} \longrightarrow P_{(0)} \longrightarrow M \longrightarrow 0\,,$$

та не існує коротшої проективної резольвенти.

Якщо не існує проективної резольвенти скінченної довжини, то покладають $\mathrm{proj.dim}_A M = \infty$.

Ін'єктивна резольвента та ін'єктивна розмірність модуля визначається дуальним чином.

Означення 3.3. Права проективна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином: $\mathrm{r.proj.gl.dim} A = \sup\{\mathrm{proj.dim}_A M : M \in \mathrm{mod} - A\}$.

Аналогічно визначається ліва проективна глобальна розмірність кільця: $\mathrm{l.proj.gl.dim} A = \sup\{\mathrm{proj.dim}_A N : N \in A-\mathrm{mod}\}$.

Означення 3.4. Права ін'єктивна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином:
$\mathrm{r.inj.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{inj.dim}_A M : M \in \mathrm{mod}{-}A\}$.

Аналогічно визначається ліва ін'єктивна глобальна розмірність кільця:

$$\mathrm{l.inj.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{inj.dim}_A N : N \in A-\mathrm{mod}\}.$$

Теорема 3. *Для будь-якого кільця A мають місце рівності*

$$\mathrm{r.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{r.inj.gl.dim}\, A,$$

$$\mathrm{l.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{l.inj.gl.dim}\, A.$$

Враховуючи попередню теорему, можна визначити праву (ліву) глобальну розмірність кільця як спільне значення правої (лівої) проективної глобальної розмірності та правої (лівої) ін'єктивної глобальної розмірності:
$\mathrm{r.gl.dim}\, A = \mathrm{r.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{r.inj.gl.dim}\, A$,
$\mathrm{l.gl.dim}\, A = \mathrm{l.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{l.inj.gl.dim}\, A$

Твердження 1. *Глобальна розмірність кільця є інваріантною в сенсі Моріти.*

Зауваження 1. *Права та ліва глобальна розмірність у випадку довільного кільця можуть не співпадати. Зокрема, спадкове справа кільце може не бути спадковим зліва (приклад такого кільця навів Капланський у 1958 році).*

Теорема 4. *М. Ауслендер.* *Якщо A — нетерове справа та зліва кільце, то* $\mathrm{r.gl.dim}\, A = \mathrm{l.gl.dim}\, A$.

Нехай маємо точну послідовність $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ та проективні резольвенти A-модулів M' та M'' відповідно:
$\cdots \quad P'_2 \quad P'_{(1)} \quad P'_{(0)} \quad M' \quad 0$,
$\cdots \quad P''_2 \quad P''_{(1)} \quad P''_{(0)} \quad M'' \quad 0$. Тоді наступна точна послідовність

$$\cdots \quad P'_2 \oplus P''_2 \quad P'_1 \oplus P''_1 \quad P'_0 \oplus P''_0 \quad M \quad 0$$

є резольвентою модуля M (див. Ауслендер). Звідси
$\mathrm{proj.dim}_A M \le \max(\mathrm{proj.dim}_A M', \mathrm{proj.dim}_A M'')$.
Зокрема, якщо $M = M' \oplus M''$, то $\mathrm{proj.dim}_A M = \max(\mathrm{proj.dim}_A M', \mathrm{proj.dim}_A M'')$.

В загальному випадку, якщо $M = \bigoplus\limits_i M_i$, то

$$\mathrm{proj.dim}_A M = \sup_i(\mathrm{proj.dim}_A M_i). \qquad (2)$$

Нехай A — зведене напівдосконале кільце, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ — розклад $1 \in A$ в суму локальних взаємно ортогональних ідемпотентів, $R = \mathrm{rad}\, A$ — радикал Джекобсона кільця A. Тоді всі прості праві (ліві) A-модулі з точністю до ізоморфізму вичерпуються модулями $U_1 = e_1A/e_1R, \ldots, U_n = e_nA/e_nR$ ($V_1 = Ae_1/Re_1, \ldots, V_n = Ae_n/Re_n$).

За теоремою Баса кожен скінченнопороджений A-модуль M над напівдосконалим кільцем має проективне накриття $P(M)$, причому $P(M) = P(M/\mathrm{rad}\, M)$. Оскільки для довільного модуля $M/\mathrm{rad}\, M \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i^{m_i}$ — напівпростий модуль, то

$$P(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P(U_i)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{n} (e_iA)^{m_i}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\mathrm{r.gl.dim}\, A = \max_{1\le i\le n}\{\mathrm{proj.dim}_A U_i\}. \qquad (3)$$

4 Проективне накриття незвідних модулів

Твердження 2. [11] *Нехай $X_1, \ldots, X_s$ — всі максимальні підмодулі незвідного і непроективного Λ-модуля M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ та $\mathcal{E}(X_i) = \mathcal{E}(M) + e_{j_i}$, де $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$. Тоді $P(M) = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$ та $M = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$.*

Доведення. Оскільки $\mathrm{rad}\ M = \bigcap\limits_{i=1}^{s} X_i$, то $\mathcal{E}(\mathrm{rad}\ M) = \mathcal{E}(M) + \sum\limits_{i=1}^{s} e_{j_i}$, $P(M) = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$. Для кожного i маємо $\pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \subset M$, тому $\sum\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \subset M$. Припустимо, що $\sum\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \ne M$. Тоді існує максимальний підмодуль X_k такий, що $\pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \subseteq X_k$. Отримали протиріччя, бо $\pi^{\alpha_{j_k}} P_{j_k} \not\subseteq X_k$. □

З твердження 2 випливає наступне твердження.

Твердження 3. [11] *Нехай незвідний Λ-модуль M має рівно два максимальних непроективних підмодуля X і Y з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{E}(X) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$ та $\mathcal{E}(Y) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$. Тоді $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j$ та маємо точну послідовність*

$$0 \to \pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j \to \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \to M \to 0.$$

Нехай модуль M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ має проективне накриття $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \oplus \pi^{\alpha_k} P_k$ і $M = \pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k$. Тоді $K = (\pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j)(e_i - e_j) + (\pi^{\alpha_j} P_j \cap \pi^{\alpha_k} P_k)(e_j - e_k) + (\pi^{\alpha_k} P_k \cap \pi^{\alpha_i} P_i)(e_k - e_i)$.

Нехай модуль K має проективне накриття $P(K) = \pi^{\alpha_a} P_a \oplus \pi^{\alpha_b} P_b \oplus \pi^{\alpha_c} P_c$. Маємо 2 точні послідовності
$0 \to L \to P(K) \to K \to 0$,
$0 \to K \to P(M) \to M \to 0$.

Теорема 5. [11] $L \simeq \pi^{\alpha_a} P_a \cap \pi^{\alpha_b} P_b \cap \pi^{\alpha_c} P_c$.

В.Ятегаонкар довів, що в алгебрі $M_n(k)$ над полем часток k локального дедекіндового кільця $\mathcal{O}$ існує лише скінченне число, з точністю до ізоморфізму, черепичних порядків скінченної глобальної розмірності.

Теорема 6. [9] *Нехай $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з максимальним ідеалом $\mathbf{m}$ і тілом дробів D. Тоді*

- *Якщо $\Lambda = (\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})) \subseteq M_n(D)$ — черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ з $\operatorname{gl.dim} \Lambda < \infty$, то $\alpha_{ij} \le n - 1$ для $1 \le i, j \le n - 1$.*
- *Існує лише скінченна кількість черепичних порядків в $M_n(D)$ над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ скінченної глобальної розмірності, які містять фіксовану множину з n ортогональних ідемпотентів.*
- *Існує з точністю до спряження лише скінченна кількість черепичних порядків в $M_n(D)$ над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ скінченної глобальної розмірності.*

5 Ядро проективного накриття незвідного модуля

Лема 1. [11] *Нехай M_1, M_2, M_3 — підмодулі дистрибутивного модуля M та $\varphi\colon M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \to M_1 + M_2 + M_3$ — епіморфізм прямої суми незвідних модулів на їх суму, визначений за правилом: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3$. Тоді $\ker \varphi = \{(m_{12} - m_{31}, m_{23} - m_{12}, m_{31} - m_{23) } \mid m_{12} \in M_1 \cap M_2, m_{23} \in M_2 \cap M_3, m_{31} \in M_3 \cap M_1\}$.*

Теорема 7. [11] *Нехай $M_1, \dots, M_n$ — підмодулі дистрибутивного модуля $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ та епіморфізм $\varphi\colon \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \mapsto M$ діє за правилом $\varphi(m_1, \dots, m_n) = m_1 + \dots + m_n$. Тоді $\ker \varphi = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_i = \sum_{j \ne i} m_{ij},\ m_{ij} = -m_{ji} \in M_i \cap M_j\}$.*

Наслідок 1. [11] *Нехай M — незвідний Λ-модуль і $P(M) = \bigoplus_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$, $M = \sum_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$. Тоді ядро епіморфізму $\varphi\colon P(M) \mapsto M$ дорівнює $\ker \varphi = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_i = \sum_{k \ne i} m_{ik},\ m_{ik} = -m_{ki} \in \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \cap \pi^{\alpha_{j_k}} P_{j_k}\}$.*

Доведення. Черепичний порядок Λ є напівдистрибутивним кільцем. Тому кожен незвідний Λ-модуль є дистрибутивним. За попередньою теоремою ядро епіморфізму має вказаний вигляд. □

Ядро K як підмодуль в $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ можна формально записати у вигляді

$$K = \sum_{i<j} (M_i \cap M_j)(e_i - e_j),$$

де $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots, 0)$.

Твердження 4. *Нехай модуль M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ має проективне накриття $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \oplus \pi^{\alpha_k} P_k$ і $M = \pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k$ і модуль $\pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j$ є проективним. Тоді ядро L проективного накриття $P(K)$ модуля K співпадає з ядром L_2 проективного накриття $P((\pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j) \cap \pi^{\alpha_k} P_k)$ модуля $(\pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j) \cap \pi^{\alpha_k} P_k$.*

Доведення. Нехай модуль M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ має проективне накриття $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \oplus \pi^{\alpha_k} P_k$ і $M = \pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k$. Тоді $K = (\pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j)(e_i - e_j) + (\pi^{\alpha_j} P_j \cap \pi^{\alpha_k} P_k)(e_j - e_k) + (\pi^{\alpha_k} P_k \cap \pi^{\alpha_i} P_i)(e_k - e_i)$. Також маємо три епіморфізма з K на $(\pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j) \cap \pi^{\alpha_k} P_k$, $(\pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k) \cap$

$\pi^{\alpha_i}P_i$, $(\pi^{\alpha_k}P_k+\pi^{\alpha_i}P_i)\cap\pi^{\alpha_j}P_j$ з ядрами $\pi^{\alpha_i}P_i\cap\pi^{\alpha_j}P_j$, $\pi^{\alpha_j}P_j\cap\pi^{\alpha_k}P_k$, $\pi^{\alpha_k}P_k\cap\pi^{\alpha_i}P_i$ відповідно.

Позначимо $\pi^{\alpha_i}P_i\cap\pi^{\alpha_j}P_j = X$, $(\pi^{\alpha_i}P_i+\pi^{\alpha_j}P_j)\cap\pi^{\alpha_k}P_k = Y$

Для довільної точної послідовності

$$0\to X\to K\to Y\to 0$$

наступна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & L_1 & L & L_2 & 0 \\ 0 & P(X) & P(X)\oplus P(Y) & P(Y) & 0 \\ 0 & X & K & Y & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

має точні стовпчики і два точні рядки. Тому за лемою 3×3 перший рядок також точний.

Якщо модуль $\pi^{\alpha_i}P_i\cap\pi^{\alpha_j}P_j = X$ проективний, то $L_1 = 0$. Тоді $L = L_2$. □

6 Розклад ядра у пряму суму

Твердження 5. *Нехай M_1, M_2, M_3 — підмодулі дистрибутивного модуля M, $K = (M_1\cap M_2)(e_1-e_2)+(M_1\cap M_3)(e_1-e_3)+(M_2\cap M_3)(e_2-e_3)$. Модуль K розкладається у пряму суму підмодулів тоді і тільки тоді, коли $M_i\cap M_j\subseteq M_k$ для деяких попарно різних $i,j,k\in\{1,2,3\}$.*

Доведення. Позначимо $M_{ij} = M_i\cap M_j$. Тоді $K = M_{12}(e_1-e_2)+M_{13}(e_1-e_3)+M_{23}(e_2-e_3)$ або $K = \{(m_{12}+m_{13}, -m_{12}+m_{23}, -m_{13}-m_{23}) \mid m_{ij}\in M_{ij}\}$.

Нехай $X = X_{12}(e_1-e_2)+X_{13}(e_1-e_3)+X_{23}(e_2-e_3) = \{(x_{12}+x_{13}, -x_{12}+x_{23}, -x_{13}-x_{23}) \mid x_{ij}\in X_{ij}\}$, $Y = Y_{12}(e_1-e_2)+Y_{13}(e_1-e_3)+Y_{23}(e_2-e_3) = \{(y_{12}+y_{13}, -y_{12}+y_{23}, -y_{13}-y_{23}) \mid y_{ij}\in Y_{ij}\}$ — ненульові підмодулі модуля K. Тоді X_{ij} та Y_{ij} — підмодулі M_{ij}.

Нехай $K = X\oplus Y$. Тоді $X\cap Y = 0$ і $X+Y = K$. Припустимо, що множини $\{x_{12}+x_{13}\}$, $\{-x_{12}+x_{23}\}$, $\{-x_{13}-x_{23}\}$ ненульові і $\{y_{12}+y_{13}\}$ теж ненульова множина. Тоді $X_{12}\cap Y_{12} = L_{12}\neq 0$ і $X_{13}\cap Y_{13} = L_{13}\neq 0$. Модуль $L_{12}(e_1-e_2)+L_{13}(e_1-e_3) = \{l_{12}+l_{13}, -l_{12}, -l_{13})\}$ є ненульовим підмодулем модуля K. Тому $X\cap Y\neq 0$.

Отже, хоча б одна з множин $\{x_{12}+x_{13}\}$, $\{-x_{12}+x_{23}\}$, $\{-x_{13}-x_{23}\}$ дорівнює 0. Аналогічно хоча б одна з множин $\{y_{12}+y_{13}\}$, $\{-y_{12}+y_{23}\}$, $\{-y_{13}-y_{23}\}$ теж дорівнює 0.

Якщо $\{x_{12}+x_{13}\} = 0$ і $\{y_{12}+y_{13}\} = 0$, то $x_{13} = -x_{12}$, $y_{13} = -y_{12}$ і $X = \{(0, -x_{12}+x_{23}, -(-x_{12}+x_{23}))\}$, $Y = \{(0, -y_{12}+y_{23}, -(-y_{12}+y_{23}))\}$. Очевидно, що $X\cap Y\supset\{(0, -l_{12}+l_{23}, -(-l_{12}+l_{23}))\}\neq 0$, де $l_{12}\in L_{12} = X_{12}\cap Y_{12}\neq 0$, $l_{13}\in L_{13} = X_{13}\cap Y_{13}\neq 0$.

Нехай $\{x_{12}+x_{13}\} = 0$ і $\{-y_{12}+y_{23}\} = 0$. Тоді $x_{12} = -x_{13}$, $y_{12} = y_{23}$, $X = \{(0, x_{13}+x_{23}, -(x_{13}+x_{23}))\}$, $Y = \{(y_{13}+y_{23}, 0, -(y_{13}+y_{23}))\}$. Зрозуміло, що $X\cap Y = 0$.

З'ясуємо тепер, за якої умови $X+Y = K$. Нехай $X = \{(0, x_{13}+x_{23}, -(x_{13}+x_{23}))\}$, $Y = \{(y_{13}+y_{23}, 0, -(y_{13}+y_{23}))\}$ і $K = X+Y = \{(y_{13}+y_{23}, x_{13}+x_{23}, -(x_{13}+x_{23}+y_{13}+y_{23}))\}$. Тоді $y_{13}+y_{23} = m_{12}+m_{13}$, $x_{13}+x_{23} = -m_{12}+m_{23}$. Звідси $m_{12} = y_{13}+y_{23}-m_{13}\in M_3$. Тому $M_{12}\subseteq M_3$.

Навпаки, нехай $M_{12}\subseteq M_3$. Тоді $M_{12}\subseteq M_{13}$ і $M_{12}\subseteq M_{23}$. $K = \{(m_{12}+m_{13}, -m_{12}+m_{23}, -m_{13}-m_{23})\} = \{(m_{12}+m_{13}, -m_{12}+m_{23}, -(m_{12}+m_{13})-(-m_{12}+m_{23}))\}$. Оскільки $M_{12}\subseteq M_{13}$ і $M_{12}\subseteq M_{23}$, то $m_{12}+m_{13} = m'_{13}\in M_{13}$, $-m_{12}+m_{23} = m'_{23}\in M_{23}$. $K = \{(m'_{13}, m'_{23}, -m'_{13}-m'_{23})\} = M_{13}(e_1-e_3)+M_{23}(e_2-e_3)$. Оскільки $\{(m'_{13}, 0, -m'_{13})\}\cap\{(0, m'_{23}, -m'_{23})\} = 0$, то $K\simeq M_{13}\oplus M_{23}$. Твердження доведено. □

Твердження 6. *Нехай M — незвідний Λ-модуль, $P(M) = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}$, $M = \sum\limits_{i=1}^{s}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}$ $\operatorname{rad} M = \operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_s}}P_{j_s}$. Тоді ядро епіморфізму $\varphi\colon P(M)\mapsto M$ дорівнює*

$$\ker\varphi = \overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}}\operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}.$$

Доведення. Наступна комутативна діаграма

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L & 0 \\ 0 & \operatorname{rad} P(M) & P(M) & P(M)/\operatorname{rad} P(M) \\ 0 & \operatorname{rad} M & M & M/\operatorname{rad} M \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

має точні рядки і два точні стовпчики. Тому за лемою 3×3 перший стовпчик також точний. Звідси $0\to L\to \operatorname{rad} P(M)\to \operatorname{rad} M\to 0$, тобто $0\to L\to \overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}} \operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}\to \operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_s}}P_{j_s}\to 0$.

Зазначимо, що з $\varphi(m_1,\dots,m_s)=m_1+\dots+m_s$ та $\ker\varphi=\sum\limits_{i<k}(\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}\cap\pi^{\alpha_{j_k}}P_{j_k})(e_{j_i}-e_{j_k})=\sum\limits_{i<k}(\pi^{\alpha_{j_i}}R_{j_i}\cap\pi^{\alpha_{j_k}}R_{j_k})(e_{j_i}-e_{j_k})$ випливає, що $\ker\varphi=\ker\psi$ для $\psi\colon \operatorname{rad}P(M)\to\operatorname{rad}M$, де $\psi(m_1,\dots,m_s)=m_1+\dots+m_s$. Існує гомоморфізм $\overline{\psi}\colon \operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_s}}P_{j_s}\to\overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}}\operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}$ такий, що $\psi\overline{\psi}=1_s$ — тотожне відображення модуля $\pi^{\alpha_{j_s}}P_{j_s}$. Отже, послідовність $0\to L\to\overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}}\operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}\to\operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_s}}P_{j_s}\to 0$ розщеплюється і $L\simeq\overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}}\operatorname{rad}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}$. Твердження доведено. □

7 Ізоморфізм черепичних порядків

Нехай $\Lambda=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{ij})\}$, $A=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(A)=(a_{ij})\}$ — зведені черепичні порядки над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ і $\Lambda\simeq A$

Нехай φ — ізоморфне перетворення першого типу, тобто $\varphi(\Lambda)=A$, $\varphi(\mathcal{E}(\Lambda))=\mathcal{E}(A)$, де $\varphi(\alpha_{ij})=a_{ij}=\alpha_{ij}+t_i-t_j$ для деякого набору $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{Z}$.

Для довільного ізоморфного перетворення ψ другого типу, що задається підстановкою τ, маємо $\psi(A)=\Omega$, $\psi(\mathcal{E}(A))=\mathcal{E}(\Omega)=(\omega_{ij})$, де $\omega_{\tau(i)\tau(j)}=a_{ij}$.

Теорема 8. *Два зведені черепичні порядка $A=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(A)=(a_{ij})\}$ і $B=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(B)=(b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка τ така, що елементи матриці $C=(c_{ij})$, де $c_{ij}=b_{\tau(i)\tau(j)}-a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij}+c_{jk}=c_{ik}$ для всіх i,j,k.*

Доведення. Нехай зведені черепичні порядки $A=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(A)=(a_{ij})\}$ і $B=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(B)=(b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ ізоморфні. Тоді матрицю показників $\mathcal{E}(B)$ можна отримати з матриці $\mathcal{E}(A)$ наступним чином: спочатку виконати над $\mathcal{E}(A)$ ізоморфні перетворення φ першого типу, а потім над $\varphi(\mathcal{E}(A))$ виконати еквівалентні перетворення *psi* другого типу.

Якщо $\varphi(\mathcal{E}(A))=\mathcal{E}(G)=(g_{ij})$, то $g_{ij}=a_{ij}+t_i-t_j$ для деякого набору цілих чисел $t_1,\dots,t_n$. Нехай перетворення ψ задається підстановкою τ. Тоді $b_{\tau(i)\tau(j)}=g_{ij}=a_{ij}+t_i-t_j$. Позначимо $c_{ij}=b_{\tau(i)\tau(j)}-a_{ij}$, $C=(c_{ij})$. Оскільки $c_{ij}=t_i-t_j$, то вони задовольняють рівність $c_{ij}+c_{jk}=c_{ik}$ для всіх i,j,k.

Навпаки, нехай для зведених черепичних порядків $A=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(A)=(a_{ij})\}$ і $B=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(B)=(b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ існує підстановка τ така, що елементи матриці $C=(c_{ij})$, де $c_{ij}=b_{\tau(i)\tau(j)}-a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij}+c_{jk}=c_{ik}$ для всіх i,j,k. Виконаємо над зведеною матрицею показників $\mathcal{E}(A)$ ізоморфне перетвореня ψ другого типу, що задається підстановкою τ. Отримаємо зведену матрицю показників $\mathcal{E}(F)=\psi(\mathcal{E}(A))=(f_{ij})$, де $f_{\tau(i)\tau(j)}=a_{ij}$ для всіх i,j.

Виконаємо тепер над $\mathcal{E}(F)$ ізоморфне перетворення φ першого типу $\varphi(\mathcal{E}(F))=\mathcal{E}(H)=(h_{ij})$, де $h_{ij}=f_{ij}+x_i-x_j$, $x_i=c_{\theta(i)1}$, $\theta=\tau^{-1}$. Тоді

$$h_{\tau(i)\tau(j)}=f\tau(i)\tau(j)+x_{\tau(i)}-x_{\tau(j)}=a_{ij}+c_{i1}-c_{j1}.$$

Оскільки $c_{i1}-c_{j1}=c_{ij}$ та $a_{ij}+c_{ij}=b_{\tau(i)\tau(j)}$, то $h_{\tau(i)\tau(j)}=b_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх i,j.

Отже, $\mathcal{E}(H)=\mathcal{E}(B)$ і черепичні порядки A та B ізоморфні. Теорема доведена. □

Зауваження 2. *Цілочисельна матриця C з умови теореми 8 кососиметрична та $c_{ij}=c_{i1}-c_{j1}$ для всіх i,j. Дійсно, оскільки $c_{ii}=b_{\tau(i)\tau(i)}-a_{ii}=0$ для всіх i, то $c_{ij}+c_{ji}=c_{ii}=0$. Звідси $c_{ji}=-c_{ij}$, тобто $C=-C^T$, C — кососиметрична матриця. Крім цього, $c_{ij}=c_{ik}-c_{jk}$ для всіх i,j,k. Зокрема, $c_{ij}=c_{i1}-c_{j1}$.*

Наслідок 2. *Два зведених черепичних порядка $A=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(A)=(a_{ij})$ і $B=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(B)=(b_{ij})$ в*

$M_n(D)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка τ така, що

$$b_{\tau(i)\tau(j)} + b_{\tau(j)\tau(k)} - b_{\tau(i)\tau(k)} = a_{ij} + a_{jk} - a_{ik} \quad (4)$$

для всіх i, j, k.

Доведення. Рівність (4) при $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$ еквівалентна рівності $c_{ij} + c_{jk} + c_{ik}$. □

Теореми 6 та 8 дають можливість виділити з точністю до ізоморфізму скінченну множину черепичних порядків в $M_6(D)$, яка містить всі черепичні порядки скінченної глобальної розмірності. За теоремами 7, 5 та твердженнями 3, 2, 5, 6, 4 будується проективна резольвента незвідного модуля над черепичним порядком в $M_6(D)$. На основі цього написана програма для обчислення всіх з точністю до ізоморфізму черепичних порядків в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності.

Висновок: Всього існує з точністю до ізоморфізму 659 черепичних порядків скінченної глобальної розмірності. Максимальна скінченна глобальна розмірність черепичних порядків в $M_6(D)$ дорівнює 6. З точністю до ізоморфізму існує три черепичних порядка глобальної розмірності 6. Це черепичні порядки з наступними матрицями показників

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1\\ 2&1&0&0&1&1\\ 2&2&1&0&2&2\\ 2&1&1&0&0&2\\ 1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1\\ 2&1&0&0&1&2\\ 2&2&1&0&2&2\\ 2&2&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1\\ 2&1&0&0&1&1\\ 2&2&1&0&1&1\\ 3&2&1&1&0&1\\ 2&2&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Література

1. Auslander, M., *On the dimension of modules and algebras*, III, Nagoya Math. J., **9**, 1955, pp. 67-77.
2. Tarsy R.B., *Global dimension of orders*, Trans. of the Amer. Math.Soc., v. 151, 1970, p. 335-340.
3. Tuganbaev, A. A., Semidistributive modules and rings, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
4. Zavadskij A.G., *The Structure of Orders with Completely Decomposable Representations*, Mat. Zametki, v. 13, N 2, 1973, pp. 325-335 (in Russian).
5. Zavadskij, A.G. and Kirichenko, V.V., *Torsion-free Modules over Prime Rings*, Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov. Inst. (LOMI) - 1976. - v. 57. - p. 100-116 (in Russian). English translation in J. of Soviet Math., v. 11, N 4, April 1979, p. 598-612.
6. M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish., 2004, xii+380pp.
7. M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules. Vol. 2, Series: Mathematics and Its Applications, **586**, Kluwer Acad. Publish., 2007, xii+400pp.
8. V. A. Jategaonkar, Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973), pp. 8–14.
9. V. A. Jategaonkar, Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* **196** (1974), pp. 313–330.
10. H.Fujita, Tiled orders of finite global dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension", *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**327**, No.2 (1991), pp. 919–920.
11. V.Zhuravlev, D.Zhuravlyov, Tiled orders of width 3, J. Algebras and discrete mathematics 1 (2009), 111-123.
12. W.S.Jansen and C.J.Odenthal, A tiled order of finite global dimension, J. Algebra 192 (1997), 572-591.

Надійшла до редколегії 25.10.2012

УДК 514.764

Костянтин М. Зубрілін[1], к.ф.-м.н.

Сплощуючі властивості ліфтів аналітичних HP-перетворень келерових просторів.

У роботі вивчаються сплощуючі властивості інфінітезимальних перетворень дотичних розшарувань першого та другого порядків, породжені ліфтами аналітичних HP-перетворень келерових просторів.

Ключові слова: сплощення, порядок сплощення, p-геодезична крива, p-геодезичне відображення, p-геодезичне інфінітезимальне перетворення.

[1]Феодосійський політехнічний інститут Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова, вул.Радянська, 19, м. Феодосія, смт. Приморський, АР Крим

E-mail: zubrilin@rambler.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.В.Кириченко

Kostyantyn M. Zubrilin[1], Ph.D.

Flattening properties of the lifts of analytic HP-transformations Kählerian manifolds.

In this paper we are study the flattening properties of the infinitesimal transformations of tangent bundles of orders 1 and 2, which generate the lifts of analytic HP-transformations of Kählerian manifold.

Key Words: flattening, the order of flattening, the p-geodesic curve, the p-geodesic map, the p-geodesic infinitesimal transformation.

[1]Feodosijsky polytechnical institute of National University of Shipbuilding, 19 Soviet Str. Feodosiya, Crimea

1 Introduction.

Generalisations of geodesic curves of a different aspect are known. In particular, A. Fialkow considers geodesics circles in Riemannian space ([1]). T. Otsuki, Y. Tashiro have introduced concept a holomorphically planar curve in Kählerian space ([2]). P. K. Rashevsky considers flattening curves of a arbitrary order in affine connected spaces, using concept of a flattening ([3]).

On the basis of these curves of generalisation of geodesic maps have been defined: concircular transformations K. Yano ([4]), holomorphically projective maps Y. Tashiro ([5]), p-geodesic maps S. G. Leiko ([6], [7]).

Their infinitesimal analogues were considered in works: for concircular transformations Riemannian spaces (S. Ishihara [8]), for holomorphic projective transformations Kählerian spaces (S. Tachibana, S. Ishihara [9]). P-geodesic infinitesimal transformations are defined S. G. Leiko in work [10].

Lifts of infinitesimal transformations were studied K. Yano and S. Ishihara ([11], [12]). By them it is established, that the complete lift X^{C} of the geodesic infinitesimal transformation X is infinitesimal geodesic transformation to a tangent bundle if and only if X is affine infinitesimal transformation. S. G. Leiko studied lifts of infinitesimal transformations from the point of view of the theory p-geodesic (flattening) maps. He has established, that for a tangent bundle of the first order, vertical lift X^{V} of the geodesic infinitesimal transformation X is canonical 2-geodesic infinitesimal transformation, and the complete lift X^{C} is not canonical 2-geodesic infinitesimal ([10]). The case of a tangent bundle of the second order also is considered S. G. Leiko in work [10]. Lifts of infinitesimal concircular transformation in a tangent bundle of the first order were studied S. G. Leiko ([13]). The case of a tangent bundle of the second order is considered in work [14].

The given work is devoted study of flattening properties of lifts analytical HP-transformations of Kählerian spaces.

2 Elements of the theory of flattening maps.

We will consider in affine connected space (M, ∇) curve $\mathscr{C}$ admiting parametre t; ξ - a field of tangent vectors along a curve $\mathscr{C}$. The vector q-th curvature ξ_q is defined by a rule $\xi_q = \nabla_t \xi_{q-1}$, $\xi_0 = \xi$.

Definition 2.1. ([10], [13]). Arbitrarily we take a point $p \in \mathscr{C}$ on a curve $\mathscr{C}$. If at a point p vectors ξ, $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ are linearly independent, and vectors

© Костянтин М. Зубрілін, 2013

ξ, ξ_1, ..., ξ_{m-1}, ξ_m are linearly dependent, say, that the curve $\mathscr{C}$ at a point p has a flattening m-th order; the number m is called the order of flattening of point p the curve $\mathscr{C}$.

Considering properties of an external product, a condition

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{m-1} \wedge \xi_m = 0, \quad (1)$$
$$\xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{m-1} \neq 0, \quad (2)$$

are necessary and sufficient that the curve $\mathscr{C}$ have at a point p a flattening m-th order.

Definition 2.2. ([10], [13]). The curve $\mathscr{C}$ in affine connected space (M, ∇) is called m-geodesic if in each point it has m-th order.

That the curve $\mathscr{C}$ is m-geodesic necessary and sufficient that along it conditions (1) and (2) are satisfied.

On the other hand, if a curve $\mathscr{C}$ - m-geodesic along it holds equality

$$\xi_m = a_0\xi + a_1\xi_1 + ... + a_{m-1}\xi_{m-1}, \quad (3)$$

where a_0, a_1, ..., a_{m-1} - some functions are defined along a curve $\mathscr{C}$.

Definition 2.3. ([10], [13]). The parametre t on m-geodesic curve $\mathscr{C}$ is called ι-canonical ($1 \leqslant \iota \leqslant m$), if $a_{m-\iota} = 0$ along a curve $\mathscr{C}$.

The parametre t on m-geodesic curve $\mathscr{C}$ is called ι_1, ι_2, ..., ι_k - canonical ($m \geqslant \iota_1 > \iota_2 > \ldots > \iota_k \geqslant 1$) if it is simultaneously ι_1-canonical, ι_2-canonical, ..., ι_k-canonical.

$1, 2..., m$-canonical the parametre t m-geodesic curve $\mathscr{C}$ is called as absolutely canonical.

From properties of an external product follows, that a necessary and sufficient condition of ι-canonical (resp. ι_1, ι_2, ..., ι_k-canonical, absolute canonical) parametre t m-geodesic curve $\mathscr{C}$ is the equality $\xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\xi}_{m-\iota} \wedge ... \wedge \xi_m = 0, \xi \wedge ... \wedge \widehat{\xi}_{m-\iota_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi}_{m-\iota_k} \wedge ... \wedge \xi_m = 0, \xi_m = 0$, which holds along a curve $\mathscr{C}$. Where the note $\widehat{\eta}$ shows, that η are not present a factor in an external product. We see that from this a condition of follows the condition (1).

Definition 2.4. ([10], [13]). Mapping $f\colon M \to \bar{M}$ is affine connected spaces (M, ∇) and $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ is called r-geodesic if this mapping translates all geodesic curves of the first space in curves of the second space at which points the greatest order of a flattening is equal r.

The number r is called as order of a flattening of mapping f.

r-geodesic diffeomorphism $\rho\colon M \to M$ it is affine connected space (M, ∇) on itself is called r-geodesic transformation affine connected space (M, ∇).

Geometrically r-geodesic mappings are characterised by that they geodesic curves translate in curves which on separate arcs are m-geodesic curves, and $m \leqslant r$, and r greatest of all numbers m.

S. G. Leiko the differential equations describing r-geodetic mappings are found. Let $\bar{u}^h = \bar{u}^h\left(u^1, u^2..., u^n\right)$ - representation of mapping $f\colon M \to \bar{M}$. Mapping f is r-geodesic necessary and sufficient that in general on a diffeomorphism local system coordinate are satisfied conditions

$$\begin{array}{l} \delta^{[h}_{(i}\, \mathrm{H}^{h_1}_{i_1 i_2} ... \mathrm{H}^{h_{r-1}}_{j_1 ... j_r}\, \mathrm{H}^{h_r]}_{j_1 ... j_r j_{r+1})} = 0, \\ \delta^{[h}_{(i}\, \mathrm{H}^{h_1}_{i_1 i_2} ... \mathrm{H}^{h_{r-1}]}_{j_1 ... j_r)} \neq 0, \end{array} \quad (4)$$

where $\mathrm{H}^h_{ij} = \breve{\nabla}_i \delta^h_j = \bar{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij}$ - tensor of an affine deformation of mapping f, $\mathrm{H}^h_{j_1 ... j_m j_{m+1}} = \breve{\nabla}_{(j_{m+1}} \mathrm{H}^h_{j_1 ... j_m)}$, $\breve{\nabla}$ – the mixed covariant derivative in sense of the van der Waerden – Bortolotti concerning connections ∇ and $\bar{\nabla}$. Relations (4) are called as the basic equations r-geodesic mapping.

Let $\mu\colon M \to \bar{M}$ a diffeomorphism affine connected spaces (M, ∇) and $(\bar{M}, \bar{\nabla})$.

In case of diffeomorphisms, investigation of orders of a flattening of points of a curve-image $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ in manifold $\bar{M}$ with affine connection $\bar{\nabla}$ can be reduced to study of orders of a flattening of corresponding points of a geodesic curve $\mathscr{C}$ in manifold M with respect to special connection on manifold M - a pre-image of affine connection $\bar{\nabla}$ concerning a diffeomorphism μ. It allows us not to use a means of the mixed tensors and the mixed covariant derivative of the van der Waerden - Bortolotti (see [14], [15], [17]).

Definition 2.5. ([16]). Affine connection $\tilde{\nabla}$ on manifold M, defined by equality $\tilde{\nabla}_X Y = \left(\mu^{-1}\right)_* \left(\bar{\nabla}_{\mu_* X} \mu_* Y\right)$, for arbitrary smooth fields of vectors X and Y from $\mathfrak{X}(M)$, is called as a pre-image of affine connection $\bar{\nabla}$ with respect to (under) a diffeomorphism μ.

Let $\mu\colon M \to \bar{M}$ a diffeomorphism affine connected spaces (M,∇) and $\left(\bar{M},\bar{\nabla}\right)$, $\tilde{\nabla}$ - a pre-image of affine connection $\bar{\nabla}$ with respect to a diffeomorphism μ.

Tensor $P(X,Y)=\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y$ we will call *a tensor of an affine deformation of a diffeomorphism* μ.

3 Flattening infinitesimal transformations.

Let X infinitesimal transformation, that is $X\in\mathfrak{X}(M)$ a field of vectors and $\tau_\varepsilon:\ \bar{u}^h=u^h+\varepsilon\cdot X^h$, $h=\overline{1,n}$, is infinitesimal the point-transformation is defined a field of vectors X, ε - infinitesimal parametre.

Infinitesimal transformation τ_ε translates a geodesic curve $\mathscr{C}\subset U$ in a curve $\bar{\mathscr{C}}_\varepsilon$. We now consider a field of tangent vectors $\bar{\xi}^{(\varepsilon)}$ and fields of vectors of curvature $\bar{\xi}^{(\varepsilon)}_m$, $m=1,2...$ along a curve $\bar{\mathscr{C}}_\varepsilon$.

Definition 3.1. ([10], [13]). We say, that infinitesimal transformation X adds a geodesic curve $\mathscr{C}$ a flattening r-th order in a point $p\in\mathscr{C}$, if

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^r}\bar{\xi}^{(\varepsilon)}_{\tau_\varepsilon(p)}\wedge\bar{\xi}^{(\varepsilon)}_1{}_{\tau_\varepsilon(p)}\wedge...\wedge\bar{\xi}^{(\varepsilon)}_r{}_{\tau_\varepsilon(p)}=0,$$

and number r least of the possible.

We take a pre-image $\tilde{\nabla}_{(\varepsilon)}$ affine connection ∇ concerning infinitesimal a point-transformation τ_ε. We build a field of tangent vectors ξ and fields of vectors of curvature $\tilde{\xi}^{(\varepsilon)}_m$, $m=1,2...$ along a geodesic curve $\mathscr{C}$ with respect to connection $\tilde{\nabla}_{(\varepsilon)}$. Definition 3.1 is equivalent to the following of

Definition 3.2. It is said that infinitesimal transformation X adds a geodesic curve $\mathscr{C}$ a flattening r-th order at a point $p\in\mathscr{C}$, if $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^r}\xi_p\wedge\tilde{\xi}^{(\varepsilon)}_1{}_p\wedge...\wedge\tilde{\xi}^{(\varepsilon)}_r{}_p=0$, and number r least of the possible.

Definition 3.3. ([10], [13]). Infinitesimal transformation X is called r-geodesic infinitesimal transformation (short, r-g.i.t.) if on each geodesic curve $\mathscr{C}$ it adds each point $p\in\mathscr{C}$ a flattening m-th order, $m\le r$. The number m can depend as on a choice of a geodesic curve $\mathscr{C}$, and points on it, and number r greatest of all possible numbers m.

We denote r-g.i.t. by $\tau(r)$.

Theorem 1. *Let affine connection ∇ on manifold M in a map $c=(U;\varphi;\mathrm{R}^n)$ has components Γ^h_{ji}, the derivative of Lie $\mathcal{L}_X\nabla\in\mathfrak{T}^1_2(M)$ affine connection ∇ in a map c has components $\mathcal{L}_X\Gamma^h_{ij}$. Then a tensor $P^{(\varepsilon)}$ an affine deformation infinitesimal the point-transformation τ_ε in a map c has components $P^h_{ij}(p)=\varepsilon\cdot\mathcal{L}_X\Gamma^h_{ij}(p)+\underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$.*

Proof. Let $\tilde{\nabla}_{(\varepsilon)}$ - a pre-image of affine connection concerning transformation τ_ε. Tensor $P^{(\varepsilon)}$ an affine deformation of infinitesimal transformation τ_ε has in a map c components P^h_{ij}. Considering expressions for representation $u^h\circ\tau_\varepsilon\circ\varphi^{-1}$ infinitesimal a point-transformation τ_ε, decomposing a difference $\Gamma^k_{ij}(\tau_\varepsilon(p))-\Gamma^k_{ij}(p)$ by Taylor's formula, being limited to members not above ε^2, we will have the necessary. The theorem is proved.

N o t e . Since the received result holds in each map $(U;\varphi;\mathrm{R}^n)$ the equality can be noted in the invariant form $P^{(\varepsilon)}=\varepsilon\cdot\mathcal{L}_X\nabla+\underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$.

Everywhere next, the symmetrization operator will denote by the letter S. Besides, for a field of tensors $T\in\mathfrak{T}^1_m(M)$, fields of vectors ξ, along a curve $\mathscr{C}$, a field of vectors $T(\underbrace{\xi...,\xi}_{m})$, defined along a curve $\mathscr{C}$ will denote by $T(\xi^m)$.

Lemma 1. *Let in affine connected space (M,∇) the geodesic curve $\mathscr{C}$, admiting canonical parametre t, is given and X - infinitesimal transformation M. Then a vectors of curvature of a geodesic curve $\mathscr{C}$, with respect to a pre-image $\tilde{\nabla}_{(\varepsilon)}$ affine connection ∇ under infinitesimal a point-transformation τ_ε, defined by a field of vectors X, have form:*

$$\tilde{\xi}^{(\varepsilon)}_m=\varepsilon\cdot L_{mX}\left(\xi^{m+1}\right)+\underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$$

(resp. $\tilde{\xi}^{(\varepsilon)}_m=\varepsilon\cdot\mathcal{L}_{mX}\left(\xi^{m+1}\right)+\underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$), where ξ - a field of tangent vectors along a curve $\mathscr{C}$, and a field of tensors $L_{mX}\in\mathfrak{T}^1_{m+1}(M)$ (resp. $\mathcal{L}_{mX}\in\mathfrak{T}^1_{m+1}(M)$) it is defined recurrently by a rule

$$L_{1X}=\mathcal{L}_X\nabla,\ L_{mX}=\nabla L_{m-1X}$$

(resp. $\mathcal{L}_{1X}=S(\mathcal{L}_X\nabla)$, $\mathcal{L}_{mX}=S(\nabla\mathcal{L}_{m-1X})$).

Proof. We will apply the theorem 2 (see [18]). Then $\tilde{\xi}^{(\varepsilon)}_m=P^{(\varepsilon)}_m\left(\xi^{m+1}\right)$, where the tensor field $P^{(\varepsilon)}_m\in\mathfrak{T}^1_m(U)$ is defined recurrently by a rule $P_1{}^{(\varepsilon)}=P^{(\varepsilon)}$, $P_m{}^{(\varepsilon)}=\nabla P_{m-1}{}^{(\varepsilon)}+P^{(\varepsilon)}\circ$

$\left(\delta \otimes {P_{m-1}}^{(\varepsilon)}\right)$. Using the previous lemma, we will receive $P_1^{(\varepsilon)} = P^{(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot L_X\nabla + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right) = \varepsilon \cdot L_{1X} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$. We suppose is shown, that $P_{m-1}^{(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot L_{m-1X} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right) \in \mathfrak{T}_m^1(U)$. Then

$$P_m^{(\varepsilon)} = \nabla P_{m-1}^{(\varepsilon)} + P^{(\varepsilon)} \circ \left(\delta \otimes P_{m-1}^{(\varepsilon)}\right) = \\ = \varepsilon \cdot \nabla L_{m-1X} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right) = \varepsilon \cdot L_{mX} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

From here we will receive the necessary. Similarly for a field of tensors $\mathcal{L}_m$.

Take account the previous lemma, we will receive

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^r} \xi \wedge \tilde{\xi}_1^{(\varepsilon)} \wedge ... \wedge \tilde{\xi}_r^{(\varepsilon)} = \\ = \delta(\xi) \wedge L_{1X}\left(\xi^2\right) \wedge ... \wedge L_{rX}\left(\xi^{r+1}\right).$$

The given equality allows to receive a necessary and sufficient condition r-g.i.t. That infinitesimal transformation X was r-g.i.t. necessary and sufficient that conditions were satisfied

$$\delta(\xi) \wedge L_{1X}\left(\xi^2\right) \wedge ... \wedge L_{rX}\left(\xi^{r+1}\right) = 0$$
$$\delta(\xi) \wedge L_{1X}\left(\xi^2\right) \wedge ... \wedge L_{r-1X}\left(\xi^r\right) \neq 0$$

For arbitrary ξ. As ξ is arbitrary, we discover

$$S(\delta \wedge L_{1X} \wedge ... \wedge L_{r-1X} \wedge L_{rX}) = 0, \quad (5)$$
$$S(\delta \wedge L_{1X} \wedge ... \wedge L_{r-1X}) \neq 0. \quad (6)$$

Similarly, we will receive the conditions equivalent to conditions (5) and (6)

$$S(\delta \wedge \mathcal{L}_{1X} \wedge ... \wedge \mathcal{L}_{r-1X} \wedge \mathcal{L}_{rX}) = 0, \quad (7)$$
$$S(\delta \wedge \mathcal{L}_{1X} \wedge ... \wedge \mathcal{L}_{r-1X}) \neq 0. \quad (8)$$

Conditions (7) and (8) are discovered S. G. Leiko in the coordinate form and are the equations r-g.i.t. $\tau(r)$.

If for infinitesimal transformation X the condition is satisfied $S(L_{rX}) = 0$, and as a condition (6), then X is absolutely canonical r-geodesic infinitesimal transformation.

4 HP-transformations.

By a Kählerian space (see [2], [5], [9]) we mean manifold M dimensions $n = 2m > 2$, with the (pseudo)Riemannian metric given on it g and complex structure F, which satisfy to conditions:

1) holds equality $F^2 = -\delta$;

2) for arbitrary field of vectorses X and Y $g(F(X), Y) + g(X, F(Y)) = 0$,

3) holds equality $\nabla F = 0$, where ∇ there is a connection of the Levi-Civita of a metric tensor g.

It is said that the field of vectors X is infinitesimal holomorphically projective transformation, or is simple, HP-transformation (see [9]) if it satisfies to a condition

$$\mathcal{L}_X\nabla = \beta \otimes \delta + \delta \otimes \beta - \bar{\beta} \otimes F - F \otimes \bar{\beta},$$

where β - some field of covectors on M, $\bar{\beta} = \beta \circ F$ - dual with it a field of covectors .

If $\beta = 0$, then the HP-transformation reduces to the affine. This case will be trivial.

The field of vectors X is called *analytical* if the condition (see [9]) is satisfied $\mathcal{L}_X F = 0$.

As shown in [9], that *infinitesimal transformation preserved holomorphically planar curves necessary and sufficient that it was analytical HP-transformation.*

Fields of covectors β and $\bar{\beta}$ analytical HP-transformations possess properties which we will use next. It is shown in [9] (see the equality (3.8)), that in a coordinate neighbourhood $\left(U; u^h\right)$ hold equalities

$$\nabla_j \beta_i = -\frac{1}{n+2} \mathcal{L}_X R_{ji}, \quad (9)$$

where $R_{ji} = R^{\alpha}_{\alpha j,i}$ is a tensor of Ricci . As is known, the tensor of Ricci Riemannian spaces is symmetrical ([3]). Then the equality (9) shows, that *the covariant differential $\nabla\beta$ is symmetrical a tensor field.* Besides, the equality (see [9], equality (3.7)) holds

$$\nabla_j \bar{\beta}_i + \nabla_i \bar{\beta}_j = 0, \quad (10)$$

which shows, that

$$S\left(\nabla\bar{\beta}\right) = 0. \quad (11)$$

Theorem 2. *Nontrivial HP-transformation is 2-g.i.t.*

Proof. Let X is HP-transformation. We take an arbitrary geodesic curve $\mathscr{C}$ in M, admiting canonical parametre t. Let ξ is a field of tangent vectors along a curve $\mathscr{C}$. Then

$$L_{1X}\left(\xi^2\right) = 2\beta(\xi)\delta(\xi) - 2\bar{\beta}(\xi)F(\xi).$$

Besides, as $\nabla\delta = 0$ and $\nabla F = 0$,

$$L_{2X}\left(\xi^3\right) = 2\nabla\beta\left(\xi^2\right)\delta(\xi) - 2\nabla\bar{\beta}\left(\xi^2\right)F(\xi).$$

From here $\delta(\xi) \wedge L_{1X}\left(\xi^2\right) = -2\bar{\beta}(\xi)\delta(\xi) \wedge F(\xi)$ and $\delta(\xi) \wedge L_{1X}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X}\left(\xi^3\right) = 0$. The last shows, that when $\beta \neq 0$, infinitesimal transformation X are 2-g.i.t.. The theorem is proved

5 The flattening properties of vertical and complete lifts of analytical HP-transformations.

Proposition 1. *For an arbitrary field of vectors X with respect to connection of the complete lift ∇^{C}, holds equalities $L_{mX^{\mathrm{V}}} = (L_{mX})^{\mathrm{V}}$, $L_{mX^{\mathrm{C}}} = (L_{mX})^{\mathrm{C}}$,*

Proof is deduced by an induction on m. Considering a proposition 7.6 ([11]) we will obtain

$$(L_{1X})^{\mathrm{V}} = (L_X\nabla)^{\mathrm{V}} = L_{X^{\mathrm{V}}}\nabla^{\mathrm{C}} = L_{1X^{\mathrm{V}}},$$

$$(L_{1X})^{\mathrm{C}} = (L_X\nabla)^{\mathrm{C}} = L_{X^{\mathrm{C}}}\nabla^{\mathrm{C}} = L_{1X^{\mathrm{C}}}.$$

We suppose is shown, that $L_{m-1X^{\mathrm{V}}} = (L_{m-1X})^{\mathrm{V}}$ and $L_{m-1X^{\mathrm{C}}} = (L_{m-1X})^{\mathrm{C}}$. Then applying a proposition 6.5 ([11]) $L_{mX^{\mathrm{V}}} = \nabla^{\mathrm{C}}L_{m-1X^{\mathrm{V}}} = (L_{mX})^{\mathrm{V}}$, $L_{mX^{\mathrm{C}}} = \nabla^{\mathrm{C}}L_{m-1X^{\mathrm{C}}} = (L_{mX})^{\mathrm{C}}$.

Lemma 2. *Let in a point $p \in M$ holds equality*

$$S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)\big|_p = 0, \tag{12}$$

and for arbitrary fibre coordinates $y = \left(y^k\right) \in \mathbb{R}^n$ in a point $\tilde{p} = (p, y) \in TM$ holds equality

$$S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)^{\mathrm{C}}\Big|_{\tilde{p}} = 0. \tag{13}$$

Then is fulfilled the equality

$$\nabla\beta\big|_p = 0. \tag{14}$$

Proof. C a s e 1. Let $\bar{\beta}\big|_p \neq 0$. The equality (12) can be noted in a form

$$S\left(\bar{\beta}\big|_p \otimes \nabla\beta\big|_p\right) = 0. \tag{15}$$

Then applying the equality (15) to a lemma 1 (see [15]), considering symmetry a tensor field $\nabla\beta$, we will obtain equality (14).
C a s e 2. Let

$$\bar{\beta}\big|_p = 0. \tag{16}$$

Then holds equality

$$\beta\big|_p = 0. \tag{17}$$

From equalities (16) and (17) follow equalities

$$\bar{\beta}^{\mathrm{V}}\big|_{\tilde{p}} = \left(\bar{\beta}_i\big|_p, 0\right) = 0, \tag{18}$$

$$\bar{\beta}^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} = \left(\partial\bar{\beta}_i\big|_{\tilde{p}}, \bar{\beta}_i\big|_p\right) = \left(\partial\bar{\beta}_i\big|_{\tilde{p}}, 0\right),$$

$$\beta^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} = \left(\partial\beta_i\big|_{\tilde{p}}, \beta_i\big|_p\right) = \left(\partial\beta_i\big|_{\tilde{p}}, 0\right). \tag{19}$$

Applying a rule of a taking of the complete lift from a tensor product, from (13), considering equality (18), we will have

$$S\left(\bar{\beta}^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} \otimes (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\Big|_{\tilde{p}}\right) = 0. \tag{20}$$

C a s e 2.1. We suppose, that there is such collection of fibre coordinates $y = \left(y^k\right)$, that in a point $\tilde{p} = (p, y)$ условие The condition

$$\bar{\beta}^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} \neq 0. \tag{21}$$

is satisfied. Applying a lemma 1 (see [15]) to equality (20), taking into account a condition (21), we come to equality $(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\Big|_{\tilde{p}} = 0$, From which follows the equality (14).
C a s e 2.2. Let for arbitrary collections of fibre coordinates $y = \left(y^k\right)$ in a point $\tilde{p} = (p, y)$ holds equality $\bar{\beta}^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} = 0$. Then holds also equality

$$\beta^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} = 0. \tag{22}$$

On the other hand, considering expressions for lifts (19) from equality (22) and definitions of the complete lift of function $\partial\beta_i|_{\tilde{p}} = y^s \cdot \partial_s\beta_i|_p$, we obtain equalities $y^s \cdot \partial_s\beta_i|_p = 0$ for any $i = \overline{1.n}$ and arbitrary collections $y = \left(y^k\right)$. As y^s it is arbitrary, from here to find $\partial_s\beta_i|_p = 0$ for any $i = \overline{1.n}$, $s = \overline{1.n}$. Then for arbitrary $i = \overline{1.n}$ and $j = \overline{1.n}$ it is had

$$\nabla_j\beta_i|_p = \partial_j\beta_i|_p - \Gamma^{\alpha}_{ji}\big|_p \cdot \beta_\alpha|_p = \partial_j\beta_i|_p = 0,$$

That gives equality $\nabla\beta\big|_p = 0$. The lemma is proved.

Theorem 3. *Let X is analytical HP-transformation of Kählerian spaces (M, g, F). Then:*

1. *lifts X^{V} and X^{C} are 1-g.i.t. if and only if $\beta = 0$ that is when X is an infinitesimal affinity;*
2. *lifts X^{V} and X^{C} are absolutely canonical 2-g.i.t. if and only if the field of covectors β is absolutely parallel, that is when $\nabla\beta = 0$.*
3. *generally lifts X^{V} and X^{C} are 3-g.i.t.*

Proof. We take in space M an arbitrary geodesic curve $\mathscr{C}$; Let ξ - a field of tangent vectors along a curve $\mathscr{C}$.

1) Condition $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{V}}}\left(\xi^2\right) = 0$, to equivalently conditions $\beta^{\mathrm{V}}(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi) = 0$. From ξ arbitrarily follows, that last conditions are equivalent to equalities

$$\beta = 0. \tag{23}$$

Similarly, condition $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) = 0$ to equivalently condition $\beta^{\mathrm{C}}(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^{\mathrm{C}}(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi) = 0$. From ξ arbitrarily follows, that last conditions are equivalent to equality (23). Thus, Lifts X^{V}, X^{C} are 1-g.i.t. if and only if $\beta = 0$ that is when X is an infinitesimal affinity.

2) Condition

$$\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{V}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{V}}}\left(\xi^3\right) = 0$$

to equivalently condition

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \beta^{\mathrm{V}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{V}}(\xi^2) \end{vmatrix} = 0,$$

that is to equality

$$\bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi)\,(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right) = 0. \tag{24}$$

Considering expression for components of lifts, we will obtain equality $\bar{\beta}_\iota \xi^\iota \nabla_j \beta_i \xi^i \xi^j = 0$, which whereas ξ is arbitrary, equivalent to equality

$$S\left(\bar{\beta} \otimes \nabla\beta\right) = 0. \tag{25}$$

Applying to equality (25) a lemma 2, we will obtain equality

$$\nabla\beta = 0. \tag{26}$$

On the other hand we see, that from equality (26) follows the equality $(\nabla\beta)^{\mathrm{V}} = 0$. So also equality $M_{12} = 0$.

Similarly, condition

$$\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right) = 0$$

to equivalently conditions $M_{12} = 0$, $M_{13} = 0$ и $M_{23} = 0$, where M_{12}, M_{13} and M_{23} are minors of the matrix

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{C}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{C}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{C}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{C}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{V}}(\xi^2) \end{pmatrix}.$$

Equality $M_{13} = 0$ will take the form

$$\bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi)\,(\nabla\beta)^{\mathrm{C}}\left(\xi^2\right) = 0; \tag{27}$$

from it we will obtain equality (26). Conversely, from equality (26) we will obtain equalities (27). Besides, from equality (26) follow equalities $L_{2X^{\mathrm{V}}}\left(\xi^3\right) = 0$ и $L_{2X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right) = 0$.

Thus, lifts X^{V} and X^{C} generate absolutely canonical 2-g.i.t. if and only if the covector field β is absolutely parallel.

3) Obviously

$$\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{V}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{V}}}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3X^{\mathrm{V}}}\left(\xi^4\right) = 0$$

It is similarly shown, that

$$\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^4\right) = \\ = 8M_{123}\tilde{\delta}(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{V}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{V}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{C}}(\xi),$$

where M_{123} is a determinant

$$\begin{vmatrix} \beta^{\mathrm{C}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{C}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{C}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{C}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{V}}(\xi^2) \\ (\nabla^2\beta)^{\mathrm{C}}(\xi^3) & (\nabla^2\bar{\beta})^{\mathrm{C}}(\xi^3) & (\nabla^2\bar{\beta})^{\mathrm{V}}(\xi^3) \end{vmatrix}$$

Considering equality (10), we will obtain

$$\nabla_k\nabla_j\bar{\beta}_i + \nabla_k\nabla_i\bar{\beta}_j = \nabla_k\left(\nabla_j\bar{\beta}_i + \nabla_i\bar{\beta}_j\right) = 0. \tag{28}$$

From equality (28) we find

$$M_{123} = \begin{vmatrix} \beta^{\mathrm{C}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{C}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{V}}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{C}}(\xi^2) & 0 & 0 \\ (\nabla^2\beta)^{\mathrm{C}}(\xi^3) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In that case, a condition

$$\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^4\right) = 0,$$

It is satisfied identically.

Thus, generally lifts X^{V} and X^{C} generate 3-g.i.t. The theorem is proved.

6 The flattening properties of 0th, I th and II th lifts of analytical HP-transformations.

Proposition 2. *For an arbitrary field of vectors X with respect to connection of the II-lift ∇^{II}, holds equalities $L_{mX^0} = (L_{mX})^0$, $L_{mX^{\mathrm{I}}} = (L_{mX})^{\mathrm{I}}$, $L_{mX^{\mathrm{II}}} = (L_{mX})^{\mathrm{II}}$.*

Proof to similarly proof of the proposition 1.

Lemma 3. *Let in a point $p \in M$ holds equality $S\left(\bar{\beta} \otimes \nabla\beta\right)\big|_p = 0$, and for arbitrary fibre coordinates $y = \left(y^k\right) \in \mathbb{R}^n$, $z = \left(z^k\right) \in \mathbb{R}^n$ in a point $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2M$ holds equality $S\left(\bar{\beta} \otimes \nabla\beta\right)^{\mathrm{I}}\Big|_{\tilde{p}} = 0$. Then we have $\nabla\beta|_p = 0$.*

Proof To similarly proof of a lemma 2.

Lemma 4. *Let holds equality*

$$S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\otimes\nabla\nabla\beta\right)=0. \tag{29}$$

Then we have equality

$$S\left(\nabla\nabla\beta\right)=0. \tag{30}$$

Proof. We will establish equality

$$\nabla\beta\otimes S\left(\nabla\nabla\beta\right)=0. \tag{31}$$

For this it verify in each point $p\in M$. The equality (29), according to a lemma 3 (see [18]), will take the form

$$S\left(S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)\otimes S\left(\nabla\nabla\beta\right)\right)=0. \tag{32}$$

C a s e 1. Let in a point $p\in M$ the condition $S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)\big|_p\neq 0$ is satisfied. Then taking account a lemma 1 (see [15]), applying the given condition, from equality (32) we will obtain equality of

$$S\left(\nabla\nabla\beta\right)\big|_p=0. \tag{33}$$

From here we will obtain equality of

$$\nabla\beta\big|_p\otimes S\left(\nabla\nabla\beta\right)\big|_p=0. \tag{34}$$

C a s e 2. Let holds equality of

$$S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)\big|_p=0. \tag{35}$$

We take the I-lift from a tensor product, and from equality (32), taking account equalities (35) and 0-lift definitions, we will have equality of

$$S\left(S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)^{\mathrm{I}}\Big|_{\tilde{p}}\otimes S\left(\nabla\nabla\beta\right)^{0}\Big|_{\tilde{p}}\right)=0. \tag{36}$$

C a s e 2.1. Let there will be such collections of fibre coordinates $y=\left(y^k\right)$, $z=\left(z^k\right)$, that in a point $\tilde{p}=(p,y,z)$ the condition of $S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)^{\mathrm{I}}\Big|_{\tilde{p}}\neq 0.$ is satisfied. Then to equality (36) we can apply a lemma 1 (see [15]). From this we will obtain equality of $S\left(\nabla\nabla\beta\right)^{0}\Big|_{\tilde{p}}=0$, , from which the equality (33), and from here and equality (34) follows.

C a s e 2.2. Let for arbitrary collections of fibre coordinates $y=\left(y^k\right)$, $z=\left(z^k\right)$ in a point $\tilde{p}=(p,y,z)$ holds equality of

$$S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\right)^{\mathrm{I}}\Big|_{\tilde{p}}=0. \tag{37}$$

Equalities (35) and (37) allow to apply a lemma 3 from which we will obtain equality of

$$\nabla\beta\big|_p=0. \tag{38}$$

From here we will obtain equality (34).

Now we will prove equalities (30). For this purpose we will show, that in each point $p\in M$ holds equality (33). In the given point the equality (31) takes the form (34).

C a s e 1. Let $\nabla\beta\big|_p\neq 0$. Then from equality (34) we will obtain (33).

C a s e 2. Let the equality (38) holds. We take the I-lift from equality (31) and we assume, that collections of fibre coordinates $y=\left(y^k\right)$, $z=\left(z^k\right)$ are arbitrary in a point $\tilde{p}=(p,y,z)$. Then we will obtain

$$(\nabla\beta)\big|^{\mathrm{I}}_{\tilde{p}}\otimes S\left(\nabla\nabla\beta\right)\big|^{0}_{\tilde{p}}=0. \tag{39}$$

C a s e 2.1. Let for some collection of fibre coordinates $y=\left(y^k\right)$, $z=\left(z^k\right)$ in a point $\tilde{p}=(p,y,z)$ the condition of $(\nabla\beta)\big|^{\mathrm{I}}_{\tilde{p}}\neq 0.$ is satisfied. Then from equality (39) we will obtain $S\left(\nabla\nabla\beta\right)\big|^{0}_{\tilde{p}}=0$, that implies equality (33).

C a s e 2.2. Let now for any collections of fibre coordinates $y=\left(y^k\right)$, $z=\left(z^k\right)$ in a point $\tilde{p}=(p,y,z)$ the condition of

$$(\nabla\beta)\big|^{\mathrm{I}}_{\tilde{p}}=0. \tag{40}$$

is satisfied. Taking account I-lift definition, equality (40), which is true for any collections $y=\left(y^k\right)\in\mathbb{R}^n$, we will obtain $\partial_s\left(\nabla_j\beta_i\right)\big|_p=0$, for arbitrary $s,i,j=\overline{1,n}$. From this, we find $\nabla\nabla\beta\big|_p=0$, It reduces to equality (33). The lemma is proved.

Theorem 4. *Let X is analytical HP-transformation Kählerian spaces (M,g,F). Then:*

1. *lifts X^0, X^{I}, X^{II} are 1-g.i.t. if and only if $\beta=0$ that is when X is an infinitesimal affinity;*
2. *lifts X^0, X^{I}, X^{II} are absolutely canonical 2-g.i.t. if and only if the covector field β is absolutely parallel, that is when $\nabla\beta=0$.*
3. *в общем случае лифт X^0 является 3-г.и.п.; lifts X^{I}, X^{II} are absolutely canonical 3-g.i.t. if and only if the covector field β is not absolutely parallel and satisfies to equality of $S\left(\nabla^2\beta\right)=0$;*
4. *generally lifts X^{I}, X^{II} are 4-g.i.t.*

Proof. We take in space M an arbitrary geodesic curve $\mathscr{C}$; Let ξ - a field of tangent vectors along a curve $\mathscr{C}$. Taking account properties of lifts, we will obtain.

1) Obviously conditions of $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^0}\left(\xi^2\right) = 0$, $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^2\right) = 0$, $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^2\right) = 0$, are equivalent respectively to conditions of $\beta^0(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^0(\xi) = 0$, $\beta^{\mathrm{I}}(\xi) = 0$, $\beta^0(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^0(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) = 0$, $\beta^{\mathrm{II}}(\xi) = 0$, $\beta^{\mathrm{I}}(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) = 0$, $\bar{\beta}^0(\xi) = 0$. It is equivalent to a condition $\beta = 0$ as ξ is arbitrary.

Thus, lifts X^0, X^{I}, X^{II} are 1-g.i.t. if and only if $\beta = 0$ that is when X is an infinitesimal affinity.

2) Obviously

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(\xi) \wedge & L_{1X^0}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^0}\left(\xi^3\right) = \\ & = -4M_{12}^0 \tilde{\delta}(\xi) \wedge \delta^0(\xi) \wedge F^0(\xi),\end{aligned} \tag{41}$$

where $M_{12}^0 = \begin{vmatrix} \beta^0(\xi) & \bar{\beta}^0(\xi) \\ (\nabla\beta)^0(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^0(\xi^2) \end{vmatrix}$. From equality (11) we will obtain equalities of

$$S\left(\nabla\bar{\beta}\right)^0 = 0,\ S\left(\nabla\bar{\beta}\right)^{\mathrm{I}} = 0,\ S\left(\nabla\bar{\beta}\right)^{\mathrm{II}} = 0. \tag{42}$$

Condition of $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^0}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^0}\left(\xi^3\right) = 0$, to equivalently equality of

$$\begin{vmatrix} \beta^0(\xi) & \bar{\beta}^0(\xi) \\ (\nabla\beta)^0(\xi^2) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{43}$$

which is equivalent to equality of

$$\bar{\beta}^0(\xi)\left(\nabla\beta\right)^0\left(\xi^2\right) = 0.$$

Taking account expressions for lifts, and ξ is arbitrary, we come to equality (25). Applying to equality (25) a lemma 3, we will have (26). On the other hand, from equality (26) the equality (43) follows.

Condition $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^3\right) = 0$ to equivalently equalities of

$$\begin{aligned} & M_{12}^{\mathrm{I}} = 0,\ M_{13}^{\mathrm{I}} = 0,\ M_{14}^{\mathrm{I}} = 0, \\ & M_{23}^{\mathrm{I}} = 0,\ M_{24}^{\mathrm{I}} = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

where M_{12}^{I}, M_{13}^{I}, M_{14}^{I}, M_{23}^{I}, M_{24}^{I}, M_{34}^{I} minors of a matrix of

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \beta^0(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^0(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^2) & (\nabla\beta)^0(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{I}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^0(\xi^2) \end{pmatrix}$$

The equality $M_{24}^{\mathrm{I}} = 0$, taking into account equalities (42), is (43) from which the equality (26) follows; On the other hand, equalities (26) imply equalities (44).

Condition $\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^3\right) = 0$ to equivalently equalities of

$$\begin{aligned} & M_{12}^{\mathrm{II}} = 0,\ M_{13}^{\mathrm{II}} = 0,\ M_{14}^{\mathrm{II}} = 0,\ M_{15}^{\mathrm{II}} = 0, \\ & M_{23}^{\mathrm{II}} = 0,\ M_{24}^{\mathrm{II}} = 0,\ M_{25}^{\mathrm{II}} = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

where M_{12}^{II}, M_{13}^{II}, M_{14}^{II}, M_{15}^{II}, M_{23}^{II}, M_{24}^{II}, M_{25}^{II}, M_{34}^{II}, M_{35}^{II}, M_{45}^{II} minors of a matrix of

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{II}}(\xi) & \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^0(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{II}}(\xi^2) & (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{II}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{I}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^0(\xi^2) \end{pmatrix}$$

From equality $M_{25}^{\mathrm{II}} = 0$, taking account equalities (42), we will obtain equality (26). On the other hand, the equality (26) reduces to equalities (45) and to equalities $L_{2X^0}\left(\xi^3\right) = 0$, $L_{2X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^3\right) = 0$ and $L_{2X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^3\right) = 0$.

Thus, lifts X^0, X^{I}, X^{II} are absolute canonical 2-g.i.t. if and only if the covector field β is absolute parallel.

3) Obviously

$$\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^0}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^0}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3X^0}\left(\xi^4\right) = 0$$

So generally, the lift X^0 generates 3-g.i.t. It is similarly shown, that a condition of

$$\tilde{\delta}(\xi) \wedge L_{1X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^4\right) = 0$$

to equivalently conditions of

$$M_{123}^{\mathrm{I}} = 0,\ M_{124}^{\mathrm{I}} = 0,\ M_{134}^{\mathrm{I}} = 0,\ M_{234}^{\mathrm{I}} = 0, \tag{46}$$

where M_{123}^{I}, M_{124}^{I}, M_{134}^{I}, M_{234}^{I} minors of a matrix of

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \beta^0(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^0(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^2) & (\nabla\beta)^0(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^{\mathrm{I}}(\xi^2) & (\nabla\bar{\beta})^0(\xi^2) \\ (\nabla^2\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^3) & (\nabla^2\beta)^0(\xi^3) & (\nabla^2\bar{\beta})^{\mathrm{I}}(\xi^3) & (\nabla^2\bar{\beta})^0(\xi^3) \end{pmatrix} \tag{47}$$

Taking account expressions for lifts, from equality (28) it is had

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2\bar{\beta}\right)^0\left(\xi^3\right) = 0,\ \left(\nabla^2\bar{\beta}\right)^{\mathrm{I}}\left(\xi^3\right) = 0, \\ & \left(\nabla^2\bar{\beta}\right)^{\mathrm{II}}\left(\xi^3\right) = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

Taking account equalities (42) and (48) in (46), we will obtain

$$\begin{aligned}\bar{\beta}^0(\xi) \Big(& \left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{I}}\left(\xi^2\right)\left(\nabla^2\beta\right)^0\left(\xi^3\right) - \\ & - \left(\nabla\beta\right)^0\left(\xi^2\right)\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{I}}\left(\xi^3\right)\Big) = 0.\end{aligned}$$

From here we will obtain

$$S\left(\bar{\beta}\otimes\nabla\beta\otimes\nabla\nabla\beta\right)=0. \tag{49}$$

From a lemma 4 the equality of

$$S\left(\nabla\nabla\beta\right)=0. \tag{50}$$

follows. Conversely, let the equality (50) is true. Then it is obvious $S\left(\nabla\nabla\beta\right)^{0}=0$, $S\left(\nabla\nabla\beta\right)^{\mathrm{I}}=0$. In that case the matrix (47) will take the form of

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \beta^{0}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{0}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{2}) & (\nabla\beta)^{0}(\xi^{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

From here conditions (46) follow. Besides, the equality (50) implies equality $L_{3X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^{4}\right)=0$.

Thus, the lift X^{I} is absolutely canonical 3-g.i.t. if and only if the covector field β is not absolute parallel and satisfies to equality (50).

It is easy to show, that a condition of

$$\tilde{\delta}\left(\xi\right)\wedge L_{1X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{2}\right)\wedge L_{2X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{3}\right)\wedge L_{3X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{4}\right)=0$$

to equivalently condition of

$$\begin{array}{l} M^{\mathrm{II}}_{123}=0, M^{\mathrm{II}}_{124}=0, M^{\mathrm{II}}_{125}=0, M^{\mathrm{II}}_{134}=0, \\ M^{\mathrm{II}}_{135}=0, M^{\mathrm{II}}_{145}=0, M^{\mathrm{II}}_{234}=0, M^{\mathrm{II}}_{235}=0, \\ M^{\mathrm{II}}_{245}=0, M^{\mathrm{II}}_{345}=0, \end{array} \tag{51}$$

where M^{II}_{123}, M^{II}_{124}, M^{II}_{125}, M^{II}_{134}, M^{II}_{135}, M^{II}_{145}, M^{II}_{234}, M^{II}_{235}, M^{II}_{245}, M^{II}_{345} are minors of a matrix of

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{II}}(\xi) & \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{0}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{II}}(\xi^{2}) & (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{2}) & 0 & 0 & 0 \\ (\nabla^{2}\beta)^{\mathrm{II}}(\xi^{3}) & (\nabla^{2}\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{3}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

The equality $M^{\mathrm{II}}_{125}=0$ will take the form of

$$\bar{\beta}^{0}\left(\xi\right)\Big(\left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{II}}\left(\xi^{2}\right)\left(\nabla^{2}\beta\right)^{\mathrm{I}}\left(\xi^{3}\right)- \\ -\left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{I}}\left(\xi^{2}\right)\left(\nabla^{2}\beta\right)^{\mathrm{II}}\left(\xi^{3}\right)\Big)=0.$$

From here we will obtain

$$\bar{\beta}_{\alpha}\xi^{\alpha}\nabla_{\beta}\beta_{\iota}\xi^{\iota}\xi^{\beta}\nabla_{k}\nabla_{j}\beta_{i}\xi^{i}\xi^{j}\xi^{k}=0.$$

As last equality is satisfied for arbitrary ξ we will obtain equality (49) which taking account a lemma 4, implies equality (50).

Conversely, if the equality (50) is valid the matrix (52) will take the form of

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{II}}(\xi) & \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{0}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{II}}(\xi^{2}) & (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

that implies conditions (51) are satisfied. Besides, the equality (50) reduces to equality $L_{3X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{4}\right)$.

Thus, the lift X^{II} is 3-g.i.t. if and only if the covector field β is not absolute parallel and satisfies to equality (50).

4) We take from equality (28) a covariant differential; we will obtain

$$\left(\nabla^{3}\bar{\beta}\right)^{0}\left(\xi^{4}\right)=0,\ \left(\nabla^{3}\bar{\beta}\right)^{\mathrm{I}}\left(\xi^{4}\right)=0, \\ \left(\nabla^{3}\bar{\beta}\right)^{\mathrm{II}}\left(\xi^{4}\right)=0.$$

It is easy to show, that a condition of

$$\tilde{\delta}\left(\xi\right)\wedge L_{1X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^{2}\right)\wedge L_{2X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^{3}\right)\wedge \\ \wedge L_{3X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^{4}\right)\wedge L_{4X^{\mathrm{I}}}\left(\xi^{5}\right)=0$$

to equivalently condition $M^{\mathrm{I}}_{1234}=0$, where

$$M^{\mathrm{I}}_{1234}=\begin{vmatrix} \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \beta^{0}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{0}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{2}) & (\nabla\beta)^{0}(\xi^{2}) & 0 & 0 \\ (\nabla^{2}\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{3}) & (\nabla^{2}\beta)^{0}(\xi^{3}) & 0 & 0 \\ (\nabla^{3}\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{4}) & (\nabla^{3}\beta)^{0}(\xi^{4}) & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

That it is easy to obtain application of the theorem of Laplace about determinant expansion on columns 3, 4; All minors of the second order arranged in columns 3 and 4 vanish. Means, the given condition is satisfied identically. Thus, generally the lift X^{I} is 4-g.i.t. It is easy to show, that a condition of

$$\tilde{\delta}\left(\xi\right)\wedge L_{1X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{2}\right)\wedge L_{2X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{3}\right)\wedge \\ \wedge L_{3X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{4}\right)\wedge L_{4X^{\mathrm{II}}}\left(\xi^{5}\right)=0$$

to equivalently condition of

$$\begin{array}{l} M^{\mathrm{II}}_{1234}=0,\ M^{\mathrm{II}}_{1235}=0, \\ M^{\mathrm{II}}_{1345}=0,\ M^{\mathrm{II}}_{2345}=0, \end{array} \tag{53}$$

where M^{II}_{1234}, M^{II}_{1235}, M^{II}_{1345}, M^{II}_{2345} minors of a matrix of

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{II}}(\xi) & \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{0}(\xi) \\ (\nabla\beta)^{\mathrm{II}}(\xi^{2}) & (\nabla\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{2}) & 0 & 0 & 0 \\ (\nabla^{2}\beta)^{\mathrm{II}}(\xi^{3}) & (\nabla^{2}\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{3}) & 0 & 0 & 0 \\ (\nabla^{3}\beta)^{\mathrm{II}}(\xi^{4}) & (\nabla^{3}\beta)^{\mathrm{I}}(\xi^{4}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Each of minors M^{II}_{1234}, M^{II}_{1235}, M^{II}_{1345}, M^{II}_{2345} has two columns arranged in which all minors of the second order vanish; Under the theorem of Laplace from here follows, that conditions (53) are satisfied identically.

Thus, generally the lift X^{II} is 4-g.i.t. The theorem is proved.

Література

1. A. Fialkow *Conformal geodesics* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – 45. – P. 443-473.

2. T. Otsuki, Y. Tashiro *On curves in Kählerian spaces* // Math. J. PlaceNameplaceOkayama PlaceTypeUniv. 1954. – Vol. 4, No. 1. – P. 57-78.

3. P. K. Rashevsky *Riemannian geometry and the tensor analysis* - M: Nauka, 1967 - 664 p. (Russian)

4. K. Yano *Concircular geometry I – IV* // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1940. – 16. – P. 195-200; 354-360; 442-448; 505-511.

5. Y. Tashiro *On holomorphically projective correspondences in an almost complex space* // Math. J. PlaceNameplaceOkayama PlaceTypeUniv. – 1957. – Vol. 6, No. 2. – P. 147-152.

6. S. G. Leiko *Linear r-geodetic diffeomorphisms of tangent bundles of the higher orders and the higher degrees*//Third. Geometrical. seminar. - Kazan, 1982. - Vol. 14. - P 34-46. (Russian)

7. S. G. Leiko *R-geodetic cuts of a tangent bundle*//Mathematics. - 1994. - №3. - P 32-42. - (Izv. vuzov) (Russian)

8. S. Ishihara *On infinitesimal concircular transformations* // Kodai Math. Sem. Rep. – 1960. – Vol. 12, No. 2. – P. 45-56.

9. 9. S. Tachibana, S. Ishihara *On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds* // Tohoku Math. J. – 1960. – Vol. 12, No. 1. – P. 77-101.

10. S. G. Leiko *R-geodetic transformations and their groups to the tangent bundles, induced by geodesic transformations of basis manifold*//Mathematics. - 1992. - № 2. - P 62-71. - (Izv. vuzov) (Russian)

11. K. Yano, S. Ishihara *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry* – StateplaceNew York: Marcel Dekker, 1973 – 434 p.

12. K. Yano, S. Ishihara *Differential geometry of tangent bundles of order 2* // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – Vol. 20, No. 3. – P. 318-354.

13. S. G. Leiko *R-geodetic transformations and their groups to the tangent bundles, induced by concircular transformations of basis manifold* // Mathematics. - 1998. - № 6. – P. 35-45. - (Izv. vuzov) (Russian)

14. K. M. Zubrilin *P - geodesic transformations and their groups to tangent bundles of the second order, induced by concircular transformations of bases* // Ukrainian mathematical journal. - 2009. - Vol 61, № 3. - P. 346-364. (Russian)

15. K. M. Zubrilin *r-geodetic diffeomorphisms of tangent bundles induced by holomorphic-projective diffeomorphisms of Kählerian spaces* // Zbirnik pracy Institute mathematics NAN Ukrain. - 2006. - Vol 3, № 3. – P. 132-162. (Russian)

16. S. G. Leiko *Riemannian geometry: [manual]* - Odesa: Astroprint, 2000. - 212 c. (Ukrainian)

17. K. M. Zubrilin *P – geodesic diffeomorphisms of tangent bundles with connection of the horizontal lift, induced geodesic (projective) diffeomorphisms of bases* // Prikladnie problemi Mechanics and mathematics . – 2008. – Vol. 6. – P. 48-60. (Ukrainian)

18. K. M. Zubrilin *Flattening properties of diffeomorphisms of tangent bundles of the second order, induced holomorphically projective diffeomorphisms of bases* // Matematichni methodi ta Phisiko-mehanicni polya. – 2011. – Vol 54, № 4. – P. 20-35. (Ukrainian)

Надійшла до редколегії 19.06.2012

УДК 519.9

Кандрьонкін А.В.[1], аспірант,
Перестюк М.М.[2], студент

Якісна поведінка розв'язків нелокального рівняння Чаффе-Інфанте.

У роботі розглядається рівняння Чаффе-Інфанте з нелокальною нелінійністю, що не забезпечує єдиність розв'язку задачі Коші. На всіх слабких розв'язках побудовано м-напівпотік, для якого встановлено існування глобального атрактору.

Ключові слова: глобальний атрактор, м-напівпотік, рівняння Чаффе-Інфанте.

[1]Київський національний університет імекні Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64
[2]Київський національний університет імекні Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

Kandrenkin A.V.[1], post-graduate student,
Perestyuk M.M.[2], student

Long-time behavior of solutions of nonlocal Chafee-Infante equation.

In the paper we consider Chafee-Infante equation with nonlocal nonlinear term, which does not guarantee uniqueness of Cauchy problem. On all weak solutions we construct m-semiflow and prove an existence of global attractor.

Keywords: global attractor, m-semiflow, Chafee-Infante equation.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.В.Козаченко

Вступ

Дослідження якісної поведінки нелінійних дисипативних еволюційних рівнянь прийнято пов'язувати з вивченням властивостей глобального атрактору [1,2]. У випадку неєдиності розв'язку задачі Коші відповідні узагальнення для многозначних напівгруп (м-напівптоків) зроблено в [3,4]. В даній роботі з точки зору теорії глобальних атракторів досліджено якісну поведінку розв'язків рівняння Чаффе-Інфанте з нелокальним нелінійним доданком [5], що не забезпечує єдиності розв'язку задачі Коші.

Постановка задачі.

В обмеженій області $\Omega \subset R^n$ з гладкою межею розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \lambda(u^3 - u) + \int\limits_{\Omega} f(x, u(t,x))dx, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\lambda > 0$ - константа, $f : \Omega \times R \to R$ є функцією типу Каратеодорі, тобто вимірною по першій змінній і неперервною по другій змінній, причому

$$| f(x,v) | \le C_1(x) + C_2(x) | v |, \qquad (2)$$

де $C_1 \in L^1(\Omega), C_2 \in L^2(\Omega)$ - задані невід'ємні майже скрізь (м.с.) функції.

При цьому на функцію f не накладається умов типу монотонності або ліпшицевості, що не дозволяє стверджувати єдиність розв'язку. Якщо $f(x,v) \equiv f(x)$, то (1) перетворюється на класичне рівняння Чаффе-Інфанте, динаміка розв'язків якого вивчена в [1].

Розв'язком (1) будемо називати функцію $u \in L^2_{loc}(0,+\infty; H^1_0(\Omega)) \bigcap L^4_{loc}(0,+\infty; L^4(\Omega))$, що $\forall T > 0, \forall v \in H^1_0(\Omega) \bigcap L^4(\Omega), \forall \eta \in C^\infty_0(0,T)$ задовольняє інтегральну рівність

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u,v)\eta_t dt + \int_0^T ((\nabla u, \nabla v)\eta + \\ + \lambda(u^3 - u, v)\eta - (f(x,u),1))\eta dt = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

де

© Кандрьонкін А.В, Перестюк М.М. 2013

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,\ \|u\|=\sqrt{(u,u)}$$

скалярний добуток і норма в $H=L^2(\Omega)$, що є фазовим простором задачі (1).

Якщо u розв'язок (1), то $\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2_{loc}(0,+\infty;H^{-1}(\Omega))+L^{4/3}_{loc}(0,+\infty;L^{4/3}(\Omega))$, отже [2] $u\in C([0,+\infty);L^2(\Omega))$ і м.с. виконується енергетична рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2=-a\|\nabla u(t)\|^2- \\ -\lambda(u^3-u,u)+(f(x,u(t,x)),1). \quad (4)$$

Нехай W - це множина всіх розв'язків (1), причому

1) $\forall u_0\in H\ \ \exists u\in W: u(0)=u_0$;

2) $\forall u\in W\ \ \forall s\ge 0\ u(\cdot+s)\in W$.

Тоді відображення $G:[0,+\infty)\times H\mapsto 2^H$, що визначається рівністю

$$G(t,u_0)=\{u(t)|\ u\in W,\ u(0)=u_0\} \quad (5)$$

є многозначною напівгрупою [4].

Основною метою роботи є доведення існування у м-напівпотоку G глобального атрактору, тобто існування компакту $A\subset H$ такого, що

1) $A=G(t,A)\ \ \forall t\ge 0$;

2) для довільної обмеженої множини $B\subset H$

$$dist(G(t,B),A)\to 0,\ t\to+\infty.$$

Основні результати.

Лема. *Для довільного $u_0\in H$ задача (1) має принаймні один розв'язок u такий, що $u(0)=u_0$.*

Доведення. Існування розв'язку встановимо методом Галеркінських апроксимацій. Нехай $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ - ОНБ в $L^2(\Omega)$, що складається з гладких власних функцій оператора $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$. Апроксимації задаються формулою $u^N(t,x)=\sum_{j=1}^N c_j^N(t)w_j(x)$, де набір $\{c_j^N\}_{j=1}^N$ є розв'язком задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}c_j^N(t)+a\lambda_j c_j^N(t)+ \\ +\lambda\int_\Omega((u^N(t,x))^3-u^N(t,x))w_j(x)dx- \quad (6) \\ -\int_\Omega f(x,u^N(t,x))dx=0,\ j=1,...,N, \\ u^N(0)\to u_0 \text{ в } H.$$

Функція $r\mapsto\int_\Omega f(x,rw(x))dx$ для $w\in H$ є неперервною в силу теореми Лебега, отже за теоремою Пеано задача Коші (6) має розв'язок, визначений на $[0,T_N]$. Домножимо (6) на c_j^N і підсумуємо по $1\le j\le N$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2+a\|\nabla u^N(t)\|^2+ \\ +\lambda((u^N)^3-u^N,u^N)-(f(x,u^N),1)(u^N,1)=0. \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2+a\|\nabla u^N(t)\|^2+ \\ \frac{\lambda}{2}\int_\Omega(u^N(t,x))^4dx\le\frac{\lambda}{2}|\Omega|+\int_\Omega|u^N(t,x)|dx\times \\ \times\int_\Omega(|C_1(x)|+|C_2(x)|\|u^N(t,x)|)dx.$$

Тоді існує константа $C>0$ така, що

$$\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2+a\|\nabla u^N(t)\|^2+ \\ +\lambda\int_\Omega(u^N(t,x))^4dx\le C+\|C_2\|\|u^N\|^2. \quad (8)$$

Далі з (8) і нерівності Гронуола стандартно одержуємо [4], що $T_N=\infty$ і послідовність u^N збігається до розв'язку (1). Лема доведена.

Ця лема гарантує непорожність класу W, виконання умов 1),2), а отже, коректність означення м-напівпотоку (5).

Теорема. *Нехай виконується нерівність*

$$a\lambda_1>\|C_2\|, \quad (9)$$

де $\lambda_1>0$ - це перше власне значення оператора $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$.

Тоді для м-напівпотоку (5) існує глобальний атрактор $A\subset H$, який є стійкою підмножиною фазового простору H і складається з обмежених повних траєкторій, тобто виконується вкладення

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \;\; \forall \, t \geq 0 \; G(t, O_\delta(A)) \subset O_\varepsilon(A),$

і для кожного $\xi \in A$ *існує* $u : R \mapsto H,$

$$u(t+s) \in G(s, u(t)) \;\forall t \in R, \; \forall \, s \geq 0,$$

таке, що $u(0) = \xi.$

Доведення. Легко показати, що м-напівпоттік (5) є строгим, тобто $\forall \, t, s \geq 0 \;\forall v \in H \qquad G(t+s, v) = G(t, G(s, v))$. Крім того, з умови (9), енергетичної рівності (4) і нерівності Пуанкаре маємо оцінку: існує константа $\delta > 0$ така, що

$$\frac{d}{dt} \| u(t) \|^2 + \delta(\| \nabla u(t) \|^2 + \| u(t) \|^2) + \\ + \lambda \int_\Omega u^4(t, x) dx \leq C. \qquad (10)$$

Звідси $\forall \, t \geq 0 \;\; \forall \, u \in W$

$$\| u(t) \|^2 \leq \| u(0) \|^2 \, e^{-\delta t} + C\delta^{-1} \qquad (11)$$

Остання нерівність означає дисипативність м-напівпотоку G, отже для доведення теореми згідно [4] достатньо перевірити наступну властивість: якщо для послідовності $\{u_n\} \subset W$, $u_n(0) \to u_0$ слабо в H, то існує $u \in W$, $u(0) = u_0$ таке, що по підпослідовності

$$\forall \, t \geq 0 \;\; u_n(t) \to u(t) \text{ в } H \qquad (12)$$

Дійсно, з оцінки (10) маємо, що для довільного $T > 0$ послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^4(0, T; L^4(\Omega))$, а послідовність $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\}$ в силу рівняння (1) і теорем вкладення Соболєва обмежена в

$$L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(\Omega)) \subset \\ \subset L^{4/3}(0, T; H^{-s}(\Omega)), \; s = \max\{1, n/4\}.$$

Отже з леми про компактність [2] існує функція $u = u(t, x)$ така, що по підпослідовності

$$u_n \to u \text{ в } L^2(0, T; H) \text{ і м. с. в } (0, T) \times \Omega,$$

$$\text{слабо в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^4(0, T; L^4(\Omega)), \qquad (13)$$

$$u_n(t) \to u(t) \text{ слабо в } H \;\; \forall \, t \in [0, T] \text{ і сильно м.с.}$$

Збіжності (13) одразу дозволяють перейти до границі в перших трьох доданках рівності (3). Щодо четвертого доданку, то

$$f(x, u_n(t, x)) \to f(x, u(t, x)) \text{ м.с.},$$

$$| f(x, u_n(t, x)) | \leq C_1(x) + C_2(x) \, | u_n(t, x) |,$$

і оскільки $u_n \to u$ в $L^2((0, T) \times \Omega)$, то $f(x, u_n) \to f(x, u)$ в $L^1((0, T) \times \Omega)$. Отже, функція $u \in W$, $u(0) = u_0$. Зокрема $u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$. Розглянемо функції

$$J_n(t) = \| u_n(t) \|^2 - Ct, \quad J(t) = \| u(t) \|^2 - Ct.$$

З нерівності (10) маємо, що функції J_n, J є неперервними, монотонно не зростаючими і в силу (13) J_n збігається до J майже скрізь. Тоді

$$\forall \, t \geq 0 \;\; J_n(t) \to J(t). \qquad (14)$$

Тоді $\forall \, t \geq 0$

$$J(t) = \liminf J_n(t) \geq \liminf \| u_n(t) \|^2 - Ct,$$

отже

$$\liminf \| u_n(t) \| \leq \| u(t) \|.$$

Проте в силу слабкої збіжності (13) справедлива обернена нерівність. Таким чином

$$u_n(t) \to u(t) \;\; \forall \, t \geq 0$$

і теорема доведена.

Висновки

В роботі доведено існування інваріантного, стійкого глобального атрактору для многозначного напівпотоку, породженого розв'язками рівняння Чаффе-Інфанте з нелокальною нелінійністю.

Список використаних джерел

1. *Temam R.*. «Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics» N.Y.: Springer, 1988.
2. *Бабин А.*В., *Вишик М.И.* «Аттракторы эволюционных уравнений» – М.: Наука, 1987.
3. *Мельник В.С.* «Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем». Киев, препринт Института кибернетики НАНУ № 94-17, 1994.
4. *Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.* «Global attractors of multivalued dynamical systems and systems and evolution equations without uniqueness». – Kyiv: Naukova Dumka, 2008.
5. *Zhu C., Mu C.* Attractor for the nonlinear Schredinger equation with a nonlocal nonlinear trem // J. Dynamical and Control Systems, 2010. – vol.16. – P.585-603.

Надійшла до рекколегії 20.10.2012

УДК 512.53

Євгенія Кочубінська[1], к. ф.-м. н., асистент

Підстановкові зображення узагальнених біциклічних напівгруп

Описано будову замкнених інверсних піднапівгруп узагальнених біциклічних напівгруп та побудовано підстановкові зображення цих напівгруп. Встановлено умову еквівалентності двох зображень.

Ключові слова: узагальнена біциклічна напівгрупа, замкнена інверсна піднапівгрупа, праві ω-класи, підстановкове зображення.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Eugenia Kochubinska[1], Ph.D., Assistant Prof.

Permutational representation of generalized bicyclic semigroups

The structure of closed inverse subsemigroups of generalized bicyclic semigroups is described and permutational representation of these semigroups is constructed. The equivalence condition for two representation is given.

Keywords: generalized bicyclic semigroup, closed inverse subsemigroup, right ω-classes, permutational representation.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Нехай T — кореневе n-регулярне дерево з коренем x_0, $\operatorname{Aut} T$ — його група автоморфізмів. Якщо важливо, що саме вершина x є коренем дерева T, то писатимемо T_x. Зафіксуємо вершину першого рівня x_1^1 і розглянемо деякий частковий автоморфізм: $a\colon T_{x_0} \to T_{x_1^1}$ дерева T_{x_0} на кореневе піддерево $T_{x_1^1}$. Для кожної вершини y першого рівня зафіксуємо частковий автоморфізм $a_y\colon T_{x_0} \to T_y$ дерева T_{x_0} на кореневе піддерево T_y. Якщо $x \neq y$, то $\operatorname{ran}(a_x) \cap \operatorname{dom}(a_y^{-1}) = \varnothing$, тому $a_x a_y^{-1} = \mathbf{0}$ (порожнє відображення), якщо ж $x = y$, то $a_x a_x^{-1} = \mathbf{1} = \mathrm{id}_T$.

Інверсну піднапівгрупу напівгрупи $\operatorname{PAut} T$, породжену відображенням a та групою $\operatorname{Aut} T$, позначимо $B^{(n)}$, а інверсну піднапівгрупу, породжену множиною $\{a_y\colon y \in V_1\}$, позначимо $B^{[n]}$. Для довільного ненульового $x \in B^{(n)}$ $(B^{[n]})$ область визначення $\operatorname{dom}(x)$ та образ $\operatorname{ran}(x)$ є кореневими піддеревами дерева T_{x_0}. Позначатимемо через $\operatorname{root}(x)$ корінь області визначення елемента x.

Легко бачити, що $B^{(1)} = B^{[1]} = B$ — відома біциклічна напівгрупа [2, §1.12, т.1], тому напівгрупи $B^{(n)}$ і $B^{[n]}$ природно називати узагальненими біциклічними напівгрупами. Властивості напівгрупи $B^{(n)}$ наведено в [3].

2 Замкнені інверсні піднапівгрупи узагальненої біциклічної напівгрупи

На інверсній напівгрупі S можна ввести відношення природного часткового порядку ω : $a\,\omega\,b \Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1}, a^{-1}a = a^{-1}b$. Зауважимо, що з $a\,\omega\,b$ випливає рівність $a\big|_{\mathrm{dom}}(a) = b\big|_{\mathrm{dom}}(a)$. На множині ідемпотентів відношення порядку ω набуває вигляду: $e\,\omega\,f \Leftrightarrow ef = fe = e$. Ідемпо- тент $e \in E(S)$ називається *примітивним*, якщо $e \neq 0$ і для кожного ненульового ідемпотента $f \in E(S)$ з $f\,\omega\,e$ випливає, що $f = e$, тобто примітивний ідемпотент — це мінімальний ненульовий ідемпотент. *Замиканням* $H\omega$ множини $H \subset S$ називається множина $H\omega = \{h \in S \mid \exists \pi \in H\ \pi\,\omega\,h\}$. Якщо $H\omega = H$, то множина H називається *замкненою*.

Твердження 1. [2, Лема 7.9, т.2] *Нехай H — інверсна піднапівгрупа інверсної напівгрупи S. Тоді $H\omega$ є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи S.*

Нехай K — замкнена інверсна піднапівгрупа напівгрупи $B^{(n)}$. Якщо існують $e, f \in E(K)$, такі, що $ef = \mathbf{0}$, то $K = B^{(n)}$, бо для довільного елемента $s \in B^{(n)}$ вірно, що $\mathbf{0}\,\omega\,s$. Нехай надалі $K \neq B^{(n)}$. Нерівність $ef \neq \mathbf{0}$ виконується лише тоді, коли $\operatorname{dom}(e) \cap \operatorname{dom}(f) \neq \varnothing$, що можливе лише у випадку, коли або $\operatorname{dom}(e) \subseteq \operatorname{dom}(f)$, або $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(e)$. Тому якщо $e < f$,

© Є.А. Кочубінська, 2013

то вершина $\mathrm{root}(e)$ лежить нижче за вершину $\mathrm{root}(f)$. Тоді множина $P = \{\mathrm{root}(e) \,|\, e \in E(K)\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$, де $x_i < x_j$, якщо $i < j$, є лінійно впорядкованою, отже, завдяки замкненості, є шляхом. Для кожного елемента $s \in K$ вершина $\mathrm{root}(s)$ належить шляху P. Більше того, елементи напівгрупи K переводять шлях P у себе у тому сенсі, що для кожного $b \in K$ виконується $\big(P \cap \mathrm{dom}(b)\big)^b \subseteq P$. Дійсно, для $x_i \in \mathrm{dom}(b)$ покладемо $c := be_{x_i}$, де $e_{x_i} \in E(B^{(n)})$, $\mathrm{root}(e_{x_i}) = x_i$, очевидно, $c(x_i) = b(x_i)$. Елемент $c^{-1}c$ є ідемпотентом K, а тоді $\mathrm{root}(c^{-1}c) = c(x_i) \in P$. Ми називатимемо шлях P *стрижнем* напівгрупи K.

Піднапівгрупа ідемпотентів $E(B^{(n)})$ узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)}$ нескінченна. Тому замкнена інверсна піднапівгрупа K напівгрупи $B^{(n)}$ може не містити найменшого ідемпотента. Через це, досліджуючи будову замкнених інверсних піднапівгруп напівгрупи $B^{(n)}$, будемо розглядати два випадки: а) K містить найменший ідемпотент; б) K не містить найменшого ідемпотента.

Нехай K містить найменший ідемпотент $e_{\min}$. Позначимо через $T_{\min}$ область визначення найменшого ідемпотента $e_{\min}$. У цьому випадку шлях P є скінченним. Нехай $\mathrm{root}(e_{\min}) = x_k$.

Лема 1. *Якщо замкнена інверсна піднапівгрупа K напівгрупи $B^{(n)}$ містить найменший ідемпотент $e_{\min}$, то вона зберігає рівень вершини* $\mathrm{root}(x)$ *для кожного елемента $x \in K$.*

Доведення. Припустимо, що для $b \in K$ $x_i \in P$ має місце $b(x_i) = x_l$, $i \neq l$. Будемо вважати, що $i < l$ (в іншому випадку потрібно розглянути інверсний до b елемент b^{-1}). Оскільки це відображення є частковим автоморфізмом, то $b(x_k) = x_{k+l-i}$ для $k > i$. Покладемо $c := b\,e_{\min}$. Тоді $c^{-1}c$ є ідемпотентом, причому $c^{-1}c < e_{\min}$. Оскільки $\mathrm{root}(c^{-1}c) = x_{k+l-i}$, тобто $\mathrm{root}(c^{-1}c)$ лежить нижче за $\mathrm{root}(e_{\min})$, то одержана нерівність є строгою. З отриманої суперечності випливає, що для $b \in K$ $b(x_i) = x_i$ для кожного $x_i \in P$. □

При $i < k$ для вершини x_i, що належить стрижню P, визначимо піддерево $T^P_{x_i}$ з коренем у вершині x_i як піддерево дерева T з множиною вершин $VT^P_{x_i} = VT_{x_i} \setminus VT_{x_{i+1}}$.

Отже, валентність кореневої вершини дерева $T^P_{x_i}$ дорівнює $n-1$, а валентності інших вершин дорівнюють $n+1$. Через $\overline{T}^{(n)}$ позначатимемо кореневе дерево, валентність кореня якого дорівнює $n-1$, а валентності інших вершин дорівнюють $n+1$.

Оскільки замкнена інверсна піднапівгрупа K містить найменший ідемпотент, то $K = H\omega$, де $H < \mathrm{Aut}\, T_{\min}$ [1]. Опишемо будову замкненої інверсної піднапівгрупи K більш детально.

Нагадаємо, що через $\mathcal{N}_i$ позначено множину $\{1, 2, \ldots, i\}$. Позначимо $E_k = \{\mathbf{0}, e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, де $e_i = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Множина E_k є інверсною напівгрупою, кожний елемент якої є ідемпотентом.

Лема 2. *Напівгрупа $(\mathrm{Aut}\, T_{x_k})\omega$ ізоморфна $\big(\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\big) \times \mathrm{Aut}\, T$, де $\wr_p$ позначає частковий вінцевий добуток напівгруп.*

Доведення. Для будь-якої $x_i \in P$ має місце ізоморфізм $T^P_{x_i} \simeq \overline{T}^{(n)}$, тому $\mathrm{Aut}\, T^P_{x_i} \simeq \mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)}$. Для кожного $i \leqslant k-1$ розглянемо відображення $\Theta_i \colon T^P_{x_i} \to \overline{T}^{(n)}$, яке встановлює ізоморфізм між $T^P_{x_i}$ і $\overline{T}^{(n)}$, а для $i = k$ розглянемо ізоморфізм $\Theta_k \colon T_{x_k} \to T$.

Нехай $s \in \mathrm{Aut}(T_{x_k})\omega$, $\mathrm{root}(s) = x_j$, $j \leqslant k$. Покладемо $e_s = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-j}}$, якщо $j < k$, $e_s = \mathbf{0}$, якщо $\mathrm{root}(s) = x_k$.

Покладемо $h_s(x) = \Theta_k(s(\Theta_k^{-1}(x)))$. Для $i \leqslant k$ визначимо відображення $f_s(i) = \Theta^{-1}_{k-i} s \Theta_{k-i}$, яке діє з $\mathcal{N}_i$ в $\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)}$. За побудовою $\mathrm{dom}(f_s) = \mathrm{dom}(e_s)$.

Задамо відображення $\psi \colon (\mathrm{Aut}\, T_{x_k})\omega \to \big(\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\big) \times \mathrm{Aut}\, T$ таким чином: $\psi(s) = (f_s, e_s) \times h_s$.

Розглянемо елемент $e_{s_1 s_2}$. Нехай $\mathrm{root}(s_1) = x_{j_1}$, $\mathrm{root}(s_2) = x_{j_2}$. Тоді $\mathrm{root}(s_1 s_2) = x_{\max\{j_1, j_2\}}$, а, отже, $e_{s_1 s_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-\max\{j_1, j_2\}}}$.

Розглянемо добуток $e_{s_1} e_{s_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-j_1}} \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-j_2}} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{\min\{k-j_1, k-j_2\}}} = \mathrm{id}_{k-\max\{j_1, j_2\}}$. Отже, $e_{s_1 s_2} = e_{s_1} e_{s_2}$. Звідси маємо, що $e_{s_1 s_2} = e_{s_1} e_{s_2}$.

Для всіх $x \in \overline{T}^{(n)}$, $i \in \mathrm{dom}(e_{s_1} e_{s_2})$, оскільки $\Theta^{-1}_{k-i} s \Theta_{k-i} \in \mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)}$, виконується

$$
\begin{aligned}
&f_{s_1} f_{s_2}^{e_{s_1}}(i)(x) = f_{s_2}(i^{e_{s_1}})(f_{s_1}(i)(x)) = \\
&= f_{s_2}(i)(f_{s_1}(i)(x)) = f_{s_2}(\Theta_{k-i}(s_1(\Theta^{-1}_{k-i}(x)))) = \\
&= \Theta_{k-i}(s_2(\Theta^{-1}(\Theta_{k-i}(s_1(\Theta^{-1}_{k-i}(x))))))) = \\
&= \Theta_{k-i}(s_2(s_1(\Theta^{-1}_{k-i}(x)))) = \Theta_{k-i}(s_1 s_2(\Theta^{-1}_{k-i}(x))) = \\
&= f_{s_1 s_2}(i)(x).
\end{aligned}
$$

Аналогічно, $h_{s_1} h_{s_2}(x) = h_{s_2}(\Theta_k(s_1(\Theta_k^{-1}(x)))) =$
$= \Theta_k(s_2(\Theta_k^{-1}(\Theta_k(s_1(\Theta_k^{-1}(x))))))) =$

$= \Theta_k(s_2(s_1(\Theta_k^{-1}(x)))) =$
$= \Theta_k(s_1 s_2(\Theta_k^{-1}(x))) = h_{s_1 s_2}(x)$. Далі,

$$\psi(s_1 s_2) = (f_{s_1 s_2}, e_{s_1 s_2}) \times h_{s_1 s_2} =$$
$$= (f_{s_1} f_{s_2}^{e_{s_1}}, e_{s_1} e_{s_2}) \times h_{s_1} h_{s_2} =$$
$$= ((f_{s_1}, e_{s_1}) \times h_{s_1})((f_{s_2}, e_{s_2})) \times h_{s_2} = \psi(s_1)\psi(s_2).$$

Покажемо, що кожному елементу $(f, e) \times h \in (\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k) \times \operatorname{Aut} T$ можна поставити у відповідність елемент $\tau \in (\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega$. Визначимо елемент $\tau \in B^{(n)}$ таким чином: для $x \in T_{x_i}^P$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $\tau(x) = \Theta_i^{-1}(f(k-i)(\Theta_i(x)))$, для $x \in T_{x_k}$ $\tau(x) = \Theta_k^{-1}(h(\Theta_k(x)))$.

Елемент τ визначається за елементом $(f, e) \times h$ єдиним чином. За побудовою $\tau\big|_{\operatorname{Aut} T_{x_k}} \in \operatorname{Aut} T_{x_k} \subset (\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega$. Ясно, що $\tau\big|_{T_{x_k}}$ ω τ. Оскільки $(\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega$ — замкнена піднапівгрупа, то $\tau \in (\operatorname{Aut} T_{x_k}\omega)$.

Таким чином, між елементами напівгрупи $\left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times \operatorname{Aut} T$ і елементами напівгрупи $\operatorname{Aut} T_{x_k}\omega$ встановлюється взаємно однозначна відповідність. Оскільки відображення $\psi\colon (\operatorname{Aut} T_{x_k})\,\omega \to \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times \operatorname{Aut} T$ зберігає операцію, то ψ є ізоморфізмом. □

Теорема 1. *Кожна замкнена інверсна піднапівгрупа K узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)}$, множина $E(K)$ ідемпотентів якої містить найменший ідемпотент, корінь області визначення якого належить k-му рівню, ізоморфна напівгрупі $\left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$, де $H < \operatorname{Aut} T$.*

Напівгрупа $\left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$, де H — підгрупа групи $\operatorname{Aut} T$, ізоморфна замкненій інверсній піднапівгрупі напівгрупи $B^{(n)}$, яка містить найменший ідемпотент e, такий, що $\operatorname{root}(e) = x_k$.

Доведення. Нехай K — замкнена інверсна піднапівгрупа напівгрупи $B^{(n)}$, множина $E(K)$ ідемпотентів якої містить найменший ідемпотент $e_{\min}$ з областю визначення $T_{\min} = T_{x_k}$. Тоді (див. [1, Теорема 3.1]) $K = H_0\,\omega$, де $H_0 < \operatorname{Aut} T_{x_k}$.

Розглянемо ізоморфізм $\psi\colon (\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega \to (\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k) \times \operatorname{Aut} T$, який побудовано у лемі 2. Ізоморфізм ψ зберігає природний порядок ω, тому $\psi(K) = \psi(H_0)\omega$, звуження $\psi\big|_K$ встановлює ізоморфізм між K та $\psi(K)$.

Згідно визначення ізоморфізму ψ маємо:

$$\psi(H_0) = \{\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times \Theta_k^{-1} h \Theta_k, h \in H_0\} =$$
$$= \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times (\Theta_k^{-1} H_0 \Theta_k).$$

Очевидно, $\Theta_k^{-1} H_0 \Theta_k$ є підгрупою групи $\operatorname{Aut} T$. Позначимо її H. Тоді $\psi(H_0)\omega = (\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega$.

Покажемо, що $(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega = \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$.

Нехай $(f, a) \times h_1 \in (\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega$. Це означає, що існує такий елемент $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h \in \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H$, що $((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)\,\omega\,((f, a) \times h_1)$. За означенням порядку ω маємо:

$$((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h^{-1}) = ((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((f, a)^{-1} \times h_1^{-1}),$$
$$(\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h h^{-1} = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h h_1^{-1}.$$

Звідси $h = h_1$. Отже, $h_1 \in H$, а тому $(f, a) \times h_1 \in \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$. Отже, $(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega \subset \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$.

Покажемо тепер включення

$$(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega \supset \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H.$$

Нехай $(f, a) \times h \in \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$. Розглянемо добутки:

$$((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)^{-1} =$$
$$= ((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h^{-1}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h h^{-1},$$
$$((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((f, a) \times h)^{-1} =$$
$$= ((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((f, a)^{-1} \times h^{-1}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h h^{-1}.$$

Отже, для довільного $(f, a) \times h \in \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$ вірно, що $((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)\ \omega\ ((f, a) \times h)$. Отже, $(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega \supset \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$.

З цих двох включень випливає рівність

$$(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\,\omega = \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H.$$

Доведемо другу частину твердження.

Розглянемо ізоморфізм

$$\psi^{-1}\colon \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times \operatorname{Aut} T \to (\operatorname{Aut} T_{x_k})\ \omega\,.$$

Нехай $H < \operatorname{Aut} T$ і $\psi^{-1}(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H) = H_0$. Завдяки тому, що ψ — ізоморфізм, H_0 є підгрупою групи $\operatorname{Aut} T$. Оскільки ізоморфізм зберігає порядок ω, то $\psi^{-1}((\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega) = H_0\,\omega$. Напівгрупа $H_0\omega$ є замкненою інверсною піднапівгрупою в $B^{(n)}$ [2, Лема 7.9, т.2]. Отже,

$\left(\operatorname{Aut}\overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$ ізоморфна деякій замкненій інверсній піднапівгрупі напівгрупи $B^{(n)}$.

Знайдемо тепер область визначення найменшого ідемпотента замкненої інверсної піднапівгрупи K напівгрупи $B^{(n)}$. Якщо $(f,a)\times h$ є ідемпотентом, то $h = \mathrm{id}_T$, тому найменшим ідемпотентом в $\left(\operatorname{Aut}\overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right)\times H$ є $(\mathbf{0},\mathbf{0})\times \mathrm{id}_T$. Тоді $\psi^{-1}((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times \mathrm{id}_T) = \mathrm{id}_{T_{x_k}}$ є найменшим ідемпотентом в $H_0\omega$. Отже, областю визначення найменшого ідемпотента K є T_{x_k}. □

3 Підстановкові зображення узагальнених біциклічних напівгруп

Твердження 2. *Правими ω-класами за замкненою інверсною піднапівгрупою $K = H\omega$, $H < \operatorname{Aut} T_{x_k}$, є множини $(Hs)\omega$, $s \in D_K$, де $D_K = \{s \in S \mid ss^{-1} \in K\}$, причому $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$ тоді і лише тоді, коли $s_2\big|_{T_{x_k}} = \gamma s_1\big|_{T_{x_k}}$, де $\gamma \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$.*

Доведення. Оскільки $K = H\omega$, то для кожного елемента $l \in K$ $l\big|_{T_{x_k}} = h \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$. Тоді $l\big|_{T_{x_k}} s = hs$, $s \in D_K$, отже, $(ls)\big|_{T_{x_k}} = (hs)\big|_{T_{x_k}}$ і $(hs)\ \omega\ (ls)$. Таким чином, $(Ks)\omega \subset (Hs)\omega$. Позаяк справедливо, що $(Hs)\omega \subset (Ks)\omega$, то $(Hs)\omega = (Ks)\omega$.

Нехай $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$, тоді $s_2 \in (Hs_1)\omega$, тобто існує такий елемент $h \in Hs_1$, що $h\ \omega\ s_2$. З цього випливає, що існує автоморфізм $\gamma \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$ такий, що $(\gamma s_1)\big|_{T_{x_k}} = s_2\big|_{T_{x_k}}$, або $\gamma s_1\big|_{T_{x_k}} = s_2\big|_{T_{x_k}}$.

Нехай $s_1, s_2 \in B^{(n)}$ і нехай існує такий $\gamma \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$, що $s_2\big|_{T_{x_k}} = \gamma s_1\big|_{T_{x_k}}$. Тоді $\gamma s_1 \in (Hs_1)$. Оскільки $(\gamma s_1)\big|_{T_{x_k}}\ \omega\ (\gamma s_1)$, то $\gamma s_1 \in (Hs_1)\omega$. З рівності $s_2\big|_{T_{x_k}} = \gamma s_1\big|_{T_{x_k}}$ маємо, що $(\gamma s_1)\ \omega\ s_2$, отже, $s_2 \in (Hs_1)\omega$ і $(Hs_2)\omega \subset (Hs_1)\omega$. З іншого боку, $s_1\big|_{T_{x_k}} = \gamma^{-1}s_2\big|_{T_{x_k}}$. Аналогічно, $(Hs_1)\omega \subset (Hs_2)\omega$, тому $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$. □

Теорема 2. *Нехай $K_1 = H_1\omega$, $K_2 = H_2\omega$ — замкнені інверсні піднапівгрупи узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)}$, де $H_i < \operatorname{Aut} T_{x_{k_i}}$, $i = 1,2$. Два зображення φ_{K_1} та φ_{K_2} напівгрупи $B^{(n)}$ на множині правих ω-класів за замкненими інверсними піднапівгрупами K_1 та K_2 еквівалентні тоді і лише тоді, коли H_1 і H_2 подібні, тобто коли існують ізоморфізми $\psi\colon H_1 \to H_2$ та $\Theta\colon T_{x_{k_1}} \to T_{x_{k_2}}$, такі, що $(\Theta(v))^{\psi(h)} = \Theta(v^h)$, для довільних $h \in H_1$, $v \in VT_{x_{k_1}}$.*

Доведення. Нехай φ_{K_1} та φ_{K_2} — еквівалентні зображення. Тоді піднапівгрупи K_1 і K_2 спряжені, тобто існує такий елемент $b \in B^{(n)}$, що $bb^{-1} \in K_1$, $b^{-1}b \in K_2$, $b^{-1}K_1b \subseteq K_2$, $bK_2b^{-1} \subseteq K_1$. Нехай $T_{x_{k_i}}$ — область визначення найменшого ідемпотента e_i напівгрупи K_i. Надалі для спрощення позначимо $T_i := T_{x_{k_i}}$. Очевидно, що $K_i \subseteq S_i = \{\sigma \in B^{(n)} \mid T_i^\sigma = T_i\}$, $i = 1,2$. Тому $\operatorname{dom}(bb^{-1}) \supset T_1$, $\operatorname{dom}(b^{-1}b) \supset T_2$.

Нехай $\operatorname{dom}(b) = \Gamma_1$, а $\operatorname{dom}(b^{-1}) = \Gamma_2$. Очевидно, що $T_2^{b^{-1}} \subseteq \Gamma_1$. Припустимо, що $T_2^{b^{-1}} \neq T_1$. Тоді існує така вершина $v \in T_2$, що $b^{-1}(v) \in \Gamma_1 \setminus T_1$. Тоді $b^{-1}(v) \notin T_1$, тому $v \notin \operatorname{dom}(u)$, де $u = b^{-1}e_1b \in b^{-1}K_1b \subseteq K_2$, що неможливо. Звідси маємо, що $T_2^{b^{-1}} = T_1$, а тому і $T_1^b = T_2$.

Розглянемо елемент $s = e_1b \in B^{(n)}$. Тоді $\operatorname{dom}(s) = T_1$ і $T_1^s = T_2$, $K_1 \ni ss^{-1} = e_1$, $K_2 \ni s^{-1}s = e_2$. Оскільки напівгрупи K_1 і K_2 спряжені, то отримаємо наступні включення:

$$s^{-1}K_1s \ = \ b^{-1}(e_1K_1e_1)b \ \subseteq \ b^{-1}K_1b \ \subseteq \ K_2$$

і, аналогічно, $sK_2s^{-1} \subseteq K_1$. З цих включень випливає, що

$$s^{-1}(e_1K_1)s \ \subseteq \ s^{-1}K_1s \ \subseteq \ K_2.$$

Розглянемо деякий елемент $\tau \in s^{-1}(e_1K_1)s$. Для цього елемента, з одного боку, вірно, що $\operatorname{dom}(\tau) \subseteq \operatorname{dom}(s^{-1}) = T_2$, а з іншого, що $T_2 \subseteq \operatorname{dom}(\tau)$, бо $\tau \in K_2$. Отже, $\operatorname{dom}(\tau) = T_2$ і $e_2K_2 = \{\tau \in K_2 \mid \operatorname{dom}(\tau) = T_2\}$. Звідси випливає, що $s^{-1}(e_1K_1)s \subseteq e_2K_2$. Звузивши на T_2, отримаємо $s^{-1}H_1s \subseteq H_2$, бо $K_i\big|_{T_i} = H_i$, $i = 1,2$. Розглянувши включення $s(e_2K_2)s^{-1} \subseteq K_1$, аналогічним чином отримаємо $sH_2s^{-1} \subseteq H_1$. Таким чином, $H_2 = s^{-1}H_1s$.

Побудуємо ізоморфізм $\psi\colon H_1 \to H_2$ наступним чином $\psi(h) = s^{-1}hs$, $h \in H_1$, $\psi(h) \in H_2$. Елемент $s \in B^{(n)}$ задає взаємно однозначну відповідність $\Theta\colon T_1 \to T_2$, $v \mapsto v^s$ (так що $x_{k_1}^s = x_{k_2}$), між множинами вершин дерев T_1 і T_2. Для довільних $h \in H_1$, $v \in VT_1$ справедливо

$$(\Theta(v))^{\psi(h)} = (\Theta(v))^{s^{-1}hs} = v^{ss^{-1}hs} = v^{hs} = \Theta(v^h).$$

Отже, ізоморфізми ψ і Θ узгоджені.

Нехай існують ізоморфізми $\psi\colon H_1 \to H_2$ і $\Theta\colon T_1 \to T_2$, такі, що $(\Theta(v))^{\psi(\gamma)} = \Theta(v^\gamma)$, $v \in VT_1, \gamma \in H_1$.

Розглянемо елемент $\alpha \in \Theta^{-1}K_1\Theta$. Нехай $\alpha = \Theta^{-1}h\Theta$, $h \in K_1$. Тоді $(T_2)^{\alpha} = (T_2)^{\Theta^{-1}h\Theta} = T_2$. Тоді для $v \in T_2$ маємо $v^{\alpha} = v^{\Theta^{-1}h\Theta} = v^{\psi(h)}$. Оскільки $\psi(h) \in K_2$, то $\alpha \in K_2$. Отже, $\Theta^{-1}K_1\Theta \subseteq K_2$. Цілком аналогічно доводиться, що $\Theta K_2\Theta^{-1} \subseteq K_1$. Таким чином, напівгрупи K_1 і K_2 спряжені, причому $\Theta\Theta^{-1} = \mathrm{id}_{T_1} \in H_1 \subset K_1$, $\Theta^{-1}\Theta = \mathrm{id}_{T_2} \in H_2 \subset K_2$. Отже, зображення φ_{K_1} і φ_{K_2} еквівалентні. □

Розглянемо тепер випадок, коли замкнена інверсна піднапівгрупа K узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)} = \langle a, \operatorname{Aut} T\rangle$ не містить найменшого ідемпотента. Можна вважати, що зсув a відбувається вздовж шляху P. Розглянемо множину $D = \{t - s \,|\, \sigma a^{-s}a^{t}\tau \in K\}$. Покажемо, що ця множина є підгрупою групи $\mathbb{Z}$. Нехай $\sigma_1 a^{-s_1}a^{t_1}\tau_1, \sigma_2 a^{-s_2}a^{t_2}\tau_2 \in K$ і $\sigma_1 a^{-s_1}a^{t_1}\tau_1 \cdot \sigma_2 a^{-s_2}a^{t_2}\tau_2 = \sigma a^{-s}a^{t}\tau$. Оскільки $t_1 - s_1 + t_2 - s_2 = t - s$, то множина D є замкненою відносно додавання. З інверсності піднапівгрупи K випливає, що коли $\sigma a^{-s}a^{t}\tau \in K$, то $\tau^{-1}a^{-t}a^{s}\sigma^{-1} \in K$, тобто, якщо $t - s \in D$, то й $s - t \in D$, таким чином, множина D замкнена відносно взяття оберненого. Отже, множина D є підгрупою групи $\mathbb{Z}$. Звідси випливає, що $D = d\mathbb{Z}$ для деякого $d \in \mathbb{Z}$. У випадку, коли $D = d\mathbb{Z}$, будемо казати, що K є замкненою інверсною піднапівгрупою типу d.

Розглянемо випадок $d = 0$, тобто коли піднапівгрупа K зберігає рівень вершин шляху $P = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Позначимо через K_i множину таких елементів напівгрупи K, область визначення яких містить дерево T_{x_i}. Тоді K_i є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$. Очевидно, що $K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots$ Отже, замкнена інверсна піднапівгрупа K має вигляд $K = \bigcup_i K_i$.

З а у в а ж е н н я. Піднапівгрупа K_i ізоморфна $\left(\operatorname{Aut}\overline{T}^{(n)} \wr_p E_i\right) \times H_i$, де $H_i < \operatorname{Aut} T_{x_i}$. Оскільки ми розглядаємо випадок, коли піднапівгрупа K зберігає рівень вершин, то кожна підгрупа H_i лишає нерухомим частину шляху P, який починається у вершині x_i. Замкнену інверсну піднапівгрупу K можемо розглядати, як напівгрупу, яка ізоморфна $\varinjlim\left((\operatorname{Aut}\overline{T}^{(n)} \wr_p E_i) \times H_i\right)$.

Такі елементи напівгрупи $\psi \in B^{(n)}$, що $\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)}$ є тотожним, утворюють піднапівгрупу напівгрупи $B^{(n)}$. Позначимо цю піднапівгрупу Ψ_P. Вона є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$. Покажемо, що з того, що $\psi \in \Psi_P$, випливає, що $\psi^{-1} \in \Psi_P$. З визначення напівгрупи Ψ_P маємо, що $\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} = \mathrm{id}_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)}$. Оскільки напівгрупа $B^{(n)}$ є інверсною, то $\mathrm{dom}(\psi^{-1}) = \mathrm{ran}(\psi)$. Тому $\mathrm{dom}(\psi^{-1}) \cap P = \mathrm{ran}(\psi) \cap P = \mathrm{dom}(\psi) \cap P$. Розглянемо рівність $\psi\psi^{-1}\psi = \psi$. Обмежимо обидві її частини на $P \cap \mathrm{dom}(\psi)$. Отримаємо:

$$\psi\psi^{-1}\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} = \psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)};$$

$$\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} \cdot \psi^{-1}\big|_{(P\cap\mathrm{dom}(\psi))^{\psi}} \cdot \psi\big|_{(P\cap\mathrm{dom}(\psi))^{\psi\psi^{-1}}} = \psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)}.$$

Врахувавши, що $\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\psi)}$, $\psi\psi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\psi)}$ та $\mathrm{dom}(\psi^{-1}) \cap P = \mathrm{dom}(\psi) \cap P$, отримаємо $\psi^{-1}\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi^{-1})} = \mathrm{id}_{P\cap\mathrm{dom}(\psi^{-1})}$. Отже, Ψ_P є інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$, а також є замкненою. За сказаним вище, кожна замкнена інверсна піднапівгрупа типу 0 зі стрижнем P міститься в Ψ_P.

Нехай E_P — множина тих ідемпотентів з $E(B^{(n)})$, що для $e \in E_P$ виконується: $\mathrm{root}(e) \in P$. Ця напівгрупа, очевидно, є інверсною. Визначимо піднапівгрупу $\Phi_P = E_P\omega$. Піднапівгрупа Φ_P є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$. Кожна нетривіальна замкнена інверсна напівгрупа зі стрижнем P містить Φ_P. Справді, за визначенням P, $E_P = E(K) \subset E(K)\omega \subset K\omega = K$.

Підсумовуючи, маємо таке твердження:

Твердження 3. *Кожна нетривіальна замкнена інверсна піднапівгрупа типу* 0 *зі стрижнем P, яка не має найменшого ідемпотента, міститься в Ψ_P і містить Φ_P.*

Список використаних джерел

1. *Волошина Т.В.* Зображення інверсних напівгруп частковими підстановками: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Київ. нац. ун-т ім. Т.Шевченка. – К., 2002. – 19 с.

2. *Клиффорд А.*Алгебраическая теория полугрупп: [в двух томах]/Клиффорд А., Престон Г. М.:Наука, 1972. – 283 с., 422 с.

3. *Кочубінська Є.А.* Про одне узагальнення біциклічної напівгрупи/ Кочубінська Є.А. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки – 2004 – №. 34 – Р. 24-30.

Надійшла до редколегії 27.10.2012

УДК 519.21

Ю.С. Мішура[1], *д.ф.-м.н., професор*
О.Л. Банна[2], *к.ф.-м.н., асистент*
В.В. Дорошенко[3], *к.ф.-м.н.*

Відстань дробового броунівського руху до підпросторів гауссівських мартингалів

У роботі розглянуто наближення дробового броунівського руху гауссівськими мартингалами в інтегральній нормі при $H \in (0,1)$. Розглянуто наближення дробових броунівських рухів з ядрами Мандельброта–ван Несса та Молчана при всіх $H \in (0,1)$ та сталих підінтегральних функціях. Доведено, що при степеневих підінтегральних функціях наближення для ДБР з ядром Молчана краще ніж з ядром Мандельброта–ван Несса.

Ключові слова: дробовий броунівський рух, вінерівський процес, інтегральна норма, ядро Мандельброта–ван Несса, ядро Молчана.

[1,2,3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська.

Yu.S. Mishura[1], *Professor*
O.L. Banna[2], *PhD, Assistant*
V.V. Doroshenko[3], *PhD*

Distance of fractional Brownian motion to the subspaces of Gaussian martingales

The paper investigates approximation of fractional Brownian motion by Gaussian martingales in the integral norm for all $H \in (0,1)$. Also we consider the approximation of a fractional Brownian motion with Mandelbrot–van Ness and Molchan kernels and constants integrands. It is proved that approximation of the fBm with Molchan kernel is better than of the fBm with Mandelbrot–van Ness kernel whenever integrand is a power function.

Key Words: fractional Brownian motion, Wiener process, integral norm, kernel of Mandelbrot–van Ness, kernel of Molchan.

[1,2,3]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

E-mails: [1]myus@univ.kiev.ua, [2]okskot@ukr.net, [3]vadym.doroshenko@gmail.com

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

In the paper we continue the investigation of approximation of a fractional Brownian motion by stochastic processes from different classes.

Fractional Brownian motion with Hurst index $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ is a random process with long-term dependence. It is well known that a fractional Brownian motion is neither semimartingale nor a Markov process unless $H = \frac{1}{2}$. And also it is neither martingale nor a process of bounded variation. Semimartingale processes are good models for many problems, from statistics to finance. Therefore, stochastic analysis of semimartingale processes is deeply developed.

However, well studied semimartingale theory demonstrates insufficiency to describe the processes that occur in telecommunication connections, the processes of assets prices with long-term dependence and many others. In this connection, wide range of potential applications of fractional Brownian motion creates an interesting object of study. Fractional Brownian motion is a generalization of ordinary Brownian motion, and is used to simulate natural phenomena, technical and economic phenomena such as changes in weather and climate fluctuations, fluctuations in financial markets, hydromechanical and meteorological processes.

That is why a natural questions arises: is it possible to approximate a fractional Brownian motion in a certain metric by a Markov process, martingale, semimartingale or a process of bounded variation? As for a process of bounded variation and semimartingale, then answer is positive and corresponding results are presented in [1], [2] and [12]. The papers [3, 4, 5, 6, 9, 11] study approximation of a fractional Brownian motion with Gaussian martingales. General questions conc fractional Brownian motion are presented in [8].

In the present paper we continue to consider the approximation of a fractional Brownian motion by Gaussian martingales. In particular, we consider the approximation of a fractional Brownian motion with Mandelbrot–van Ness kernel for all

© Ю.С. Мішура, О.Л. Банна, В.В. Дорошенко, 2013

$H \in (0,1)$, approximation of a fractional Brownian motion with Molchan kernel for $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ and approximation of a fractional Brownian motion by Gaussian martingales in the integral norm for all $H \in (0,1)$.

2 Representation of fractional Brownian motion

(a) Representation of fBm via the Wiener process on a finite interval. The (one-sided) fractional Brownian motion (fBm) with Hurst index $H \in (0,\,1)$ is a Gaussian process $\{B_t^H,\ t \geqslant 0\}$ with zero mean $\mathrm{E}B_t^H = 0$ and covariation $\mathrm{E}B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$, such that $B_0^H = 0$. It is shown in [10] that the fBm $\{B_t^H,\ t \in [0,\,T]\}$ can be represented as ($\Gamma(x)$, $x > 0$ is Gamma function)

$$B_t^H = \int_0^t K(t,s)dW_s, \tag{1}$$

where $\{W_t,\ t \in [0,\,T]\}$ is a Wiener process,

$$K(t,s) = c_H\Big(t^{H-1/2}s^{1/2-H}(t-s)^{H-1/2} - \\ - (H-1/2)s^{1/2-H}\int_s^t u^{H-3/2}(u-s)^{H-1/2}du\Big), \tag{2}$$

and

$$c_H = \Big(\frac{2H\cdot\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(2-2H)}\Big)^{1/2}. \tag{3}$$

Let $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. In this case the kernel $K(t,s)$ can be simplified to $K(t,s) = c_H\Big(H - \frac{1}{2}\Big) \times s^{1/2-H}\int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}du$.

(b) Mandelbrot–van Ness representation of fBm. The (two-sided) fractional Brownian motion (fBm) with Hurst index $H \in (0,\,1)$ is a Gaussian process $\{B_t^H,\ t \in \mathbb{R}\}$ with zero mean $\mathrm{E}B_t^H = 0$ and covariation $\mathrm{E}B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$, such that $B_0^H = 0$. It is shown in [7] that the fBm $\{B_t^H,\ t \in [0,\,T]\}$ can be represented as

$$B_t^H = \int_{-\infty}^t K_H(t,s)dW_s, \tag{4}$$

where $\{W_t,\ t \in [0,\,T]\}$ is a Wiener process,

$$K_H(t,s) = c_H^{(1)}((t-u)_+^\alpha - (-u_+^\alpha)),$$

with $\alpha = H - \frac{1}{2}$ and

$$c_H^{(1)} = \frac{\Big(2H\sin\pi H\cdot\Gamma(2H)\Big)^{1/2}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}. \tag{5}$$

Remark 1. *Constants c_H and $c_H^{(1)}$ from (3) and (5) are equal.*

Proof. We need to prove the following equality.

$$\frac{2H\cdot\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(2-2H)} = \frac{2H\sin\pi H\cdot\Gamma(2H)}{\Gamma^2(H+\frac{1}{2})}.$$

By identical transformation of both side we get

$$\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(2-2H)} = \frac{\sin\pi H\cdot\Gamma(2H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})},$$

or

$$\frac{(\frac{1}{2}-H)\Gamma(\frac{1}{2}-H)}{(1-2H)\Gamma(1-2H)} = \frac{\sin\pi H\cdot\Gamma(2H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}-H)\pi} = \frac{2\sin\pi H\cdot\pi}{\sin 2\pi H},$$

which is reduced to the evident identity

$$\frac{1}{\cos\pi H} = \frac{1}{\cos\pi H}.$$

□

3 Approximation of a fractional Brownian motion by Gaussian martingales in the integral norm for $H \in (0,1)$

At first we approximate fBm with the help of Gaussian martingales in the quadratic integral norm.

Theorem 3.1. *Consider the value*

$$\inf_{a\in L_2[0,1]}\int_0^1\Big(\int_0^t (K(t,s)-a(s))^2\,ds\Big)dt. \tag{6}$$

This infimum is achieved on the function

$$a_0(s) = \frac{\int_s^1 K(t,s)dt}{1-s}. \tag{7}$$

Function $a_0 \in L_2[0,1]$.

Proof.

$$\inf_{a\in L_2[0,1]}\int_0^1\Big(\int_0^t (K(t,s)-a(s))^2\,ds\Big)dt =$$

$$= \inf_{a\in L_2[0,1]}\int_0^1 \mathrm{E}\Big(B_t^H-\int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 dt.$$

$$\int_0^1\int_0^t (K(t,s)-a(s))^2\,dsdt =$$

$$= \int_0^1\int_0^t K^2(t,s)dsdt - 2\int_0^1\int_0^t K(t,s)a(s)dsdt +$$

$$+\int_0^1\int_0^t a^2(s)dsdt =$$

$$= \int_0^1\int_0^t K^2(t,s)dsdt - 2\int_0^1 a(s)\int_s^1 K(t,s)dtds +$$

$$+\int_0^1 a^2(s)(1-s)ds.$$

Minimum is achieved for

$$a_0(s)=\frac{\int_s^1 K(t,s)dt}{1-s},$$

whenever $\frac{\int_s^1 K(t,s)dt}{1-s}\in L_2[0,1]$.

Check now that $a_0\in L_2[0,1]$. Let $C_\alpha := \alpha c_H$.

a) For $H>\frac12$ we have that $0<\alpha=H-\frac12<\frac12$. Taking into account that $s\leqslant u\leqslant 1$, $u^\alpha\leqslant 1$, we get

$$a_0(s)=\frac{C_\alpha s^{-\alpha}\int_s^1(\int_s^t u^\alpha(u-s)^{\alpha-1}du)dt}{1-s} =$$

$$= \frac{C_\alpha s^{-\alpha}\int_s^1 u^\alpha(u-s)^{\alpha-1}(1-u)du}{1-s}\leqslant$$

$$\leqslant C_\alpha s^{-\alpha}\int_s^1 u^\alpha(u-s)^{\alpha-1}du\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_\alpha s^{-\alpha}(1-s)^\alpha}{\alpha} = \frac{C_\alpha}{\alpha}s^{-\alpha}(1-s)^\alpha\in L_2[0,1]$$

b) For $H<\frac12$ we have that $-\frac12<\alpha=H-\frac12<0$ and

$$a_0(s)=\frac{C_\alpha}{\alpha(1-s)}\int_s^1\Big(t^\alpha s^{-\alpha}(t-s)^\alpha -$$

$$-\alpha s^{-\alpha}\int_s^t u^{\alpha-1}(u-s)^\alpha du\Big)dt.$$

Taking into account that $t^\alpha\leqslant s^\alpha$, we obtain

$$|a_0(s)|\leqslant\frac{C_\alpha s^{-\alpha}}{\alpha(1-s)}\int_s^1 t^\alpha(t-s)^\alpha dt +$$

$$+\frac{C_\alpha s^{-\alpha}}{1-s}\int_s^1\int_s^t u^{\alpha-1}(u-s)^\alpha dudt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_\alpha}{\alpha(1-s)}\int_s^1(t-s)^\alpha dt +$$

$$+\frac{C_\alpha s^{-\alpha}}{1-s}\int_s^1 u^{\alpha-1}(u-s)^\alpha(1-u)du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_\alpha(1-s)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\alpha)}+$$

$$+\frac{C_\alpha s^{-\alpha}}{1-s}s^{2\alpha}\int_1^{1/s} x^{\alpha-1}(x-1)^\alpha dx\cdot(1-s) =$$

$$=\frac{C_\alpha(1-s)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\alpha)}+$$

$$+C_\alpha s^{-\alpha}s^{2\alpha}\int_1^{1/s} x^{\alpha-1}(x-1)^\alpha dx,$$

and integral $\int_1^\infty x^{\alpha-1}(x-1)^\alpha dx$ converges.

□

4 Approximation of a fractional Brownian motion with Mandelbrot–van Ness kernel for $H \in (0,1)$

Now we establish the upper bound for c_H.

Lemma 1. *For $0 < H < 1$ the following inequality holds*

$$c_H^2 \leqslant 2H. \tag{8}$$

Proof. Note that $\ln\Gamma(x)$ is convex function for $x \in (0, +\infty)$. Therefore, for any $x > 0$, $y > 0$ Jensen inequality holds:

$$\ln\Gamma\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\ln\Gamma(x) + \frac{1}{2}\ln\Gamma(y).$$

Transforming identically, we get

$$e^{2\ln\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right)} \leqslant e^{\ln\Gamma(x)} \cdot e^{\ln\Gamma(y)},$$

$$\Gamma^2\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \Gamma(x)\cdot\Gamma(y).$$

For $x = 2-2H$, $y = 1$ we obtain

$$\Gamma^2\Big(\frac{3}{2} - H\Big) \leqslant \Gamma(2-2H)\cdot\Gamma(1). \tag{9}$$

For $x = \frac{3}{2} - H$, $y = H + \frac{1}{2}$ we obtain

$$\Gamma^2(1) \leqslant \Gamma\Big(\frac{3}{2} - H\Big)\cdot\Gamma\Big(H + \frac{1}{2}\Big). \tag{10}$$

Multiplying left- and right-hand sides of inequalities (9) and (10) we obtain that

$$\Gamma^2\Big(\frac{3}{2} - H\Big) \leqslant \Gamma(2-2H)\cdot\Gamma\Big(\frac{3}{2} - H\Big)\cdot\Gamma\Big(H + \frac{1}{2}\Big),$$

whence

$$\Gamma\Big(\frac{3}{2} - H\Big) \leqslant \Gamma(2-2H)\cdot\Gamma\Big(H + \frac{1}{2}\Big).$$

Since

$$c_H^2 = \frac{2H\cdot\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(2-2H)},$$

we get the claimed inequality. Note that equality in (8) is achieved when $H = \frac{1}{2}$.

□

Consider $\mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, where B_t^H is fractional Brownian motion admitting the representation (4) with Hurst index $0 < H < 1$, M_t is square-integrable martingale of the form $M_t = \int\limits_0^t a(s)dW_s$. Suppose that the condition $\int\limits_0^1 a^2(s)ds < \infty$ holds, i.e. $a \in L_2[0,1]$. Let's find $\min\limits_{a\in L_2[0,1]} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$ in some partial cases.

Consider the simplest case. Let the function $a(s) = a$ be a constant.

Theorem 4.1. *The following equality holds*

$$\min_a \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = 1 - \frac{c_H^2}{(\alpha+1)^2} \tag{11}$$

and the value of $a_{\min}$ that supplies the minimal value of (11), equals $a_{\min} = \frac{c_H}{\alpha+1}$.

Proof. Consider

$$\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = \mathrm{E}(B_t^H)^2 +$$

$$+\mathrm{E}\Big(\int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 - 2\mathrm{E}B_t^H\int_0^t a(s)dW_s =$$

$$= t^{2H} + \int_0^t a^2(s)ds - 2\int_0^t K_H(t,s)a(s)ds.$$

Assuming that $a(s) = a$ we get

$$\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = t^{2H} +$$

$$+a^2t - c_H 2a\int_0^t ((t-u)_+^\alpha - (-u_+^\alpha))du.$$

Evidently,

$$\int_0^t ((t-u)_+^\alpha - (-u_+^\alpha))du = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

whence

$$\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 =$$

$$= t^{2H} + a^2t - 2ac_H\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} =: f(t).$$

Differentiating function f with respect to t, we get

$$(2\alpha+1)t^{2\alpha} - 2ac_H t^{\alpha} + a^2 = 0$$

Changing the variable $t^{2\alpha} =: y$, we obtain a quadratic equation

$$(2\alpha+1)y^2 - 2ac_H y + a^2 = 0. \qquad (12)$$

The discriminant of the quadratic equation (12) equals

$$D = 4a^2c_H^2 - 4a^2(2\alpha+1) = \\ = (2a)^2(c_H^2 - (2\alpha+1)).$$

According to Lemma 1, this discriminant is negative.

Therefore,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} f(t) = f(1) = \\ = 1 + a^2 - \frac{2ac_H}{\alpha+1}. \qquad (13)$$

The right-hand side of (13) achieves its minimal value with

$$a_{\min} = \frac{c_H}{\alpha+1}.$$

Therefore, $\min\limits_a \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathrm{E}\Big(B_t^H - \int\limits_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = \frac{c_H^2}{(\alpha+1)^2} - \frac{2c_H^2}{(\alpha+1)^2} + 1 = 1 - \frac{c_H^2}{(\alpha+1)^2}$.

Consider more general case that corresponds to power functions with a constant exponent β, i.e., now $a(t) = at^{\beta}$, $a > 0$.

5 Approximation of a fractional Brownian motion with Molchan kernel for $H \in (0, \frac{1}{2})$

The following lemma can be proved by direct calculations.

Lemma 2. *Let $f \in C^3[-2,1]$, then*

$$-f(-2)+3f(-1)-3f(0)+f(1) = \int_{-2}^{1} f'''(t)g(t)\,dt,$$

where $g(t) = \begin{cases} 0{,}5(t+2)^2, & -2 \leqslant t \leqslant -1, \\ -t^2 - t + 0{,}5, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 0{,}5(1-t)^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

Note that $0 \leqslant g(t) \leqslant 0{,}75$ for $t \in [-2,1]$.

Using this result, we establish the following bounds for c_H.

Lemma 3. *We have the inequalities*

$$c_H^2 \left(\frac{\pi\alpha}{\sin(\alpha\pi)}\right)^2 > 2H \quad \text{for } 0 < H < \frac{1}{2}, \\ c_H^2 \left(\frac{\pi\alpha}{\sin(\alpha\pi)}\right)^2 < 2H \quad \text{for } \frac{1}{2} < H < 1. \qquad (14)$$

Proof. Remind that

$$c_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma(1{,}5-H)}{\Gamma(H+0{,}5)\Gamma(2-2H)}}, \qquad \alpha = H - \frac{1}{2}.$$

Transform the left-hand side of the inequality (14). From the classical formula

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

we immediately get that

$$\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Therefore

$$c_H^2 \left(\frac{\pi\alpha}{\sin(\alpha\pi)}\right)^2 = \frac{2H\Gamma(1-\alpha)^3\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)}.$$

So we need to prove the inequalities

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)^3\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} > 1 \qquad \text{for } 0 < H < \frac{1}{2}, \\ \text{and } \frac{\Gamma(1-\alpha)^3\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} < 1 \qquad \text{for } \frac{1}{2} < H < 1.$$

Consider function $f(t) = \ln\Gamma(1+t\alpha)$ with constant α satisfying $|\alpha| < 0{,}5$. Function $f(t)$ is infinitely differentiable on the interval $[-2,2]$, and $f(0) = 0$. Denote $\frac{df(t)}{dt} = (\ln\Gamma(1+t\alpha))' = \frac{\alpha\Gamma'(1+t\alpha)}{\Gamma(1+t\alpha)} =: \psi(1+t\alpha)$. Note that $\psi''(1+t\alpha) < 0$. Therefore the value

$3\ln\Gamma(1-\alpha) + \ln\Gamma(1+\alpha) - \ln\Gamma(1-2\alpha) = -f(-2) + 3f(-1) - 3f(0) + f(1) = \int_{-2}^{1} f'''(t)g(t)\,dt = \alpha^3 \int_{-2}^{1} \psi''(1+t\alpha)g(t)\,dt$ has the same sign as $-\alpha^3$, whence the proof follows. □

Now we establish an auxiliary result.

Lemma 4. *Let $\beta > 0, H \in (0,1)$ and K be Molchan kernel.*

Then

$$\int_0^t s^\beta K(t,s)ds = \\ = \frac{c_H(\beta+1)B(\alpha+1,\beta-\alpha+1)}{\alpha+\beta+1}t^{\alpha+\beta+1}.$$

Доведення. It is well-known that if $\alpha > -1, \beta > -1, t > 0$ then

$$\int_0^t u^\alpha (t-u)^\beta du = B(\alpha+1,\,\beta+1)t^{\alpha+\beta+1}. \quad (15)$$

We have that $\int_0^t s^\beta K(t,s)ds = c_H(I_1 - I_2)$, where

$$I_1 = \int_0^t t^\alpha s^{\beta-\alpha}(t-s)^\alpha ds = (\text{formula (15)})$$

$$= B(\beta-\alpha+1,\alpha+1)t^{\alpha+\beta+1}.$$

$$I_2 = \int_0^t \alpha s^{\beta-\alpha}\Big(\int_s^t u^{\alpha-1}(u-s)^\alpha du\Big)ds =$$

$$= \alpha\int_0^t u^{\alpha-1}\Big(\int_0^u s^{\beta-\alpha}(u-s)^\alpha ds\Big)du =$$

$$= \alpha\int_0^t u^{\alpha+\beta}B(\alpha+1,\beta-\alpha+1)du =$$

$$= \frac{\alpha B(\alpha+1,\beta-\alpha+1)}{\alpha+\beta+1}t^{\alpha+\beta+1},$$

whence the proof follows. □

Consider $\mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, where B_t^H is fractional Brownian motion admitting the representation (1) with the kernel $K(t,s) = c_H\Big(t^\alpha s^{-\alpha}(t-s)^\alpha - \alpha s^{-\alpha}\int_s^t u^{\alpha-1}(u-s)^\alpha du\Big)$ and with Hurst index $0 < H < \frac{1}{2}$. Let M_t be the square-integrable martingale of the form $M_t = \int_0^t a(s)dW_s$, and let the condition $\int_0^1 a^2(s)ds < \infty$ hold, i.e. $a \in L_2[0,1]$. Our goal is to find $\min\limits_{a\in L_2[0,1]}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$ in some partial cases.

Consider the simplest case. Let function $a(s) = a > 0$ be a constant.

Theorem 5.1. *The following equality holds*

$$\min_{a>0}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = \\ = 1 - \Big(\frac{c_H}{\alpha+1}\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\Big)^2, \quad (16)$$

and the value of $a_{\min}$ where the minimum in (16) is achieved, equals $a_{\min} = \frac{c_H}{\alpha+1}\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}$.

Proof. In the case when $a(s) = a > 0$ and $\alpha < 0$ we have that

$$\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = \mathrm{E}(B_t^H)^2 +$$

$$+\mathrm{E}\Big(\int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 - 2\mathrm{E}B_t^H\int_0^t a(s)dW_s =$$

$$= t^{2H} + \int_0^t a^2(s)ds - 2\int_0^t K(t,s)a(s)ds =$$

$$= t^{2H} + a^2t - 2a\int_0^t K(t,s)ds.$$

From Lemma 4 we have that

$$\int_0^t K(t,s) = c_H\frac{B(1+\alpha,1-\alpha)}{\alpha+1} = c_H\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Therefore,

$$\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = t^{2\alpha+1} -$$

$$-2ac_H\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + a^2t =: f(t,a).$$

Differentiate function f in t and equate the derivative to zero:

$$\frac{\partial f(t,a)}{\partial t} = \\ = t^{2\alpha}(2\alpha+1) - 2ac_H\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}t^\alpha + a^2 = 0. \quad (17)$$

The discriminant of quadratic equation (17) equals

$$D = 4a^2c_H^2\Big(\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\Big)^2 - 4a^2(2\alpha+1) =$$

$$= (2a)^2\Big(c_H^2\Big(\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\Big)^2 - (2\alpha+1)\Big) > 0$$

for $\alpha < 0$ according to Lemma 3.

Therefore, the roots of equation (17) equal

$$t^\alpha = \frac{1}{2\alpha+1}(\alpha c_H \frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi} \pm$$

$$\pm a\sqrt{c_H^2\Big(\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\Big)^2 - (2\alpha+1)}) =$$

$$= \frac{a}{2H}(A \pm \sqrt{A^2-2H}) =: t_\pm^\alpha, t_\pm > 0$$

where $A = c_H\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}$.

For $H < \frac{1}{2}$ we have that $A^2 - 2H > 0$ and $A \pm \sqrt{A^2-2H} > 0$.

Taking into account that $a > 0$, we obtain

for $t \in (0, t_-)$ the function $f(t,a)$ is increasing,

for $t \in (t_-, t_+)$ the function $f(t,a)$ is decreasing,

and for $t \in (t_+, +\infty)$ the function $f(t,a)$ is increasing.

Hence, $\max\limits_{t\in[0,1]} f(t,a) = \max(f(1,a), f(t_-,a))$.

Consider

$$f(1,a) = 1 - 2ac_H\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\frac{1}{\alpha+1} + a^2.$$

Find the derivative of $f(1,a)$ with respect to a:

$\frac{\partial f(1,a)}{\partial a} = 0$ when $a_0 = \frac{c_H}{\alpha+1}\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}$, hence,

$$\min_{a>0} f(1,a) = 1 - \Big(\frac{c_H}{\alpha+1}\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\Big)^2.$$

Consider

$$f(t_-,a) = t_-\Big(t_-^{2\alpha} - \frac{2aA}{\alpha+1}t_-^\alpha + a^2\Big) =$$

$$= t_-\Big(\Big(\frac{a}{2H}\Big)^2(A-\sqrt{A^2-2H})^2 -$$

$$-\frac{2aA}{\alpha+1}\frac{a}{2H}(A-\sqrt{A^2-2H}) + a^2\Big) =$$

$$= a^2 t_-\Big(\frac{1}{(2H)^2}(A-\sqrt{A^2-2H})^2 -$$

$$-\frac{A}{H(\alpha+1)}(A-\sqrt{A^2-2H}) + 1\Big).$$

For $a = a_0 = \frac{c_H}{\alpha+1}\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}$ we can check using Mathematica that the following inequality holds:

$$f(t_-, a_0) < f(1, a_0),$$

hence

$$\min_{a>0}\max_{t\in[0,1]} f(t,a) = 1 - \Big(\frac{c_H}{\alpha+1}\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\Big)^2.$$

□

6 Comparison of approximation of fractional Brownian motion with Molchan and Mandelbrot–van Ness kernels.

Let us first prove an auxiliary lemma.

Lemma 5. *Let $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. Then*

$$\frac{(\beta+1)B(\alpha+1, \beta-\alpha+1)}{\alpha+\beta+1} \geqslant B(\alpha+1, \beta+1).$$

Доведення. Simple calculations

$$\frac{(\beta+1)B(\alpha+1,\beta-\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)B(\alpha+1,\beta+1)} =$$

$$\frac{(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta+\alpha+2)}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+2)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} =$$

$$\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta+\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)^2} \geqslant 1.$$

The last inequality follows from that $\ln\Gamma(x)$ is a convex function. □

Theorem 6.1. *Let $a(s) = as^\beta$ where $\beta > 0, s \geqslant 0, a > 0$. Let $B_t^H = \int_{-\infty}^t K_H(t,s)dW_t$ and $B_t^H = \int_0^t K(t,s)d\tilde{W}_s$ be the representations of fractional Brownian motion via Mandelbrot–van Ness kernel K_H and Molchan kernel K. Then* $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int\limits_0^t a(s)dW_s\Big)^2 \geqslant \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\mathrm{E}\Big(B_t^H - \int\limits_0^t a(s)d\tilde{W}_s\Big)^2$.

Доведення. Let $t > 0$.

Consider the Mandelbrot–van Ness kernel

$$h(t) := \mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s\Big)^2 = t^{2H} +$$

$$+a^2\int_0^t s^{2\beta}ds - 2ac_H\int_0^t u^\beta(t-u)^\alpha du =$$

$$= t^{2H} + a^2\frac{t^{2\beta+1}}{2\beta+1} - 2ac_H B(\alpha+1,\,\beta+1)t^{\alpha+\beta+1}.$$

Consider Molchan kernel

$$\tilde{h}(t) = \mathrm{E}\Big(B_t^H - \int_0^t a(s)d\tilde{W}_s\Big)^2 = t^{2H} +$$

$$+a^2\int_0^t s^{2\beta}ds - 2a\int_0^t s^{\beta}K(t,u)du =$$

$$= (\text{Lemma 4}) = t^{2H} + a^2\frac{t^{2\beta+1}}{2\beta+1} -$$

$$-\frac{2ac_H(\beta+1)B(\alpha+1,\beta-\alpha+1)}{\alpha+\beta+1}t^{\alpha+\beta+1}.$$

We immediately get from Lemma 5 that $h(t) \geqslant \tilde{h}(t)$. Therefore, the approximation of the fBm with the power functions is better for the representation with Molchan kernel than for the representation with the Mandelbrot–van Ness kernel.

□

7 Conclusion

We find the best approximation of the fractional Brownian motion by Gaussian martingales in the integral norm for all $H \in (0,1)$. We calculate the best approximation of a fractional Brownian motion with Mandelbrot–van Ness and Molchan kernels and constant integrands. It is proved that the approximation with the Molchan kernel is better than with the Mandelbrot–van Ness kernel if the integrand is a power function.

References

1. Androshchuk T. *Approximation the integrals with respect to fBm by the integrals with respect to absolutely continuous processes* // Theory Prob. and Mathem. Statistics. – 2005. – № 73. – P. 11–20.

2. Androshchuk T., Mishura Yu. *Mixed Brownian–fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics* // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastics Processes. – 2006. – Vol.78, №5. – P.281–300.

3. Banna O. L., Mishura Yu. S. *Approximation of fractional Brownian motion with associated Hurst index separated from 1 by stochastic integrals of linear power functions* // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – Vol.14(30), № 3-4. – P.1–16.

4. Banna O.L., Mishura, Yu.S. *Estimation of the distance between fractional Brownian motion and the space of Gaussian martingales on a segment* // Theory Prob. and Math. Statistics – 2010. – № 83. – P. 12–21.

5. Banna O. L. *The approximation of fractional Brownian motion with Hurst index, close to 1, by stochastic integrals with linear-power integrands* // Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. – 2007. – № 1. – P.60–67. (Ukrainian)

6. Banna O. L., Mishura Yu. S. *The simpliest martingales of the best approximation of fractional Brownian motion* // Bulletin of Kiev National Taras Shevchenko University, Mathematics and Mechanics. – 2008. – № 19. – P. 38–43. (Ukrainian)

7. Mandelbrot B.B., van Ness J.W. *Fractional Brownian motions, fractional noices and applications* // SIAM Review. – 1968. – № 10. – P. 422–437.

8. Mishura Yuliya *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes* / Lecture Notes in Mathematics 1929. Berlin: Springer (ISBN 978-3-540-75872-3/pbk). – 2008. – 393 p.

9. Mishura Yu. S., Banna O. L. *Approximation of fractional Brownian motion by Wiener integrals* // Theory Prob. and Math. Statistics. – 2008. – № 79. – P. 106–115.

10. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions* // Bernoulli. – 1999. – Vol. 5, No. 4. – P.571–587.

11. Shklyar S., Shevchenko G., Mishura Yu., Doroshenko V., Banna O. *The approximation of fractional Brownian motion by martingales* // Submitted to Methodology and Computing in Applied Probability.

12. Thao T. H. *A note on fractional Brownian motion* // Vietnam J. Math. – 2003. – Vol.31, no.3. – P.255—260.

Received: 19.10.2012

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 517.929

А. А. Акбергенов, аспірант

Дослідження структури множини неперервних розв'язків одного класу систем різницевих рівнянь

В даній роботі досліджується структура множини неперервних розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь в околі її стану рівноваги. Запропоновано метод побудови неперервних розв'язків одного класу рівнянь.

Ключові слова: різницеві рівняння.

Інститут математики НАН України,
01601 Київ-4, Україна, вул. Терещенківська, 3

A. A. Akbergenov, postgraduate

Investigation of the set of continuous solutions of one class of systems of difference equations

The structure of the set of continuous solutions of systems of nonlinear difference equations in the neighborhood of its equilibrium has been investigated. The method of construction of continuous solutions of one class of difference equations has been proposed.

Key Words: difference equations

Institute of Mathematics National Academy of Science of Ukraine
01601 Kyiv-4, Ukraine, 3, Tereshchenkivska Str.

E-mail: Akbergenov.Abdivali@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

1. Постановка задачі. Дана стаття присвячена досліженню структури множини неперервних розв'язків системи нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + F(t, x(t)), \qquad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ — деяка дійсна $(n \times n)$-матриця, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, в околі особливої точки $(\infty, 0)$ $\big(F(\infty, 0) = 0\big)$. При різних припущеннях відносно матриць $A(t)$ і вектор-функції $F(t, x(t))$ цій проблемі присвячена велика кількість робіт [3-6] і в даний час досить добре вивчена. Особливо це стосується випадку, коли матриця $A(t)$ не залежить від t, тобто є сталою [4]. Що стосується загального випадку, то тут можна відмітити лише окремі роботи, в яких вивчалися аналогічні питання для системи рівнянь (1). Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі система рівнянь (1) розглядається у випадку, коли $A(t)$ є неперервною N-періодичною (N — ціле додатне число) матрицею такою, що $\det A(t) \neq 0$ при всіх $t \in \mathbb{R}$, а вектор-функція $F(t, x(t))$ — неперервною за всіма змінними і N-періодичною по t.

2. Основний результат. В силу [7] існує неперервна при $t \in \mathbb{R}$ заміна змінних

$$x(t) = C(t)y(t), \qquad (2)$$

де $C(t)$ — неособлива, N-періодична $(n \times n)$-матриця, що приводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda(t)y(t) + \widetilde{F}(t, y(t)), \qquad (3)$$

де $\Lambda(t) = C^{-1}(t+1)A(t)C(t)$ — неперервна, 1-періодична матриця, для якої виконується умова $\det \Lambda(t) \neq 0$, $\widetilde{F}(t, y(t)) = C^{-1}(t+1) \times \times F(t, C(t)y(t))$.

Позначимо через $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, власні значення матриці $\Lambda(t)$ (легко показати, що всі $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, є неперервними і 1-періодичними функціями) і припустимо, що вони задовольняють умови

- $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j$, $t \in [0, 1)$, $i, j = 1, \ldots, n$;
- $|\lambda_1(t)| < |\lambda_2(t)| < \ldots < |\lambda_n(t)|, t \in [0, 1)$.

Не обмежуючи загальності, далі будемо вважати, що $\Lambda(t) = diag(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$. В противному випадку систему (3) можна привести до такого вигляду за допомогою деякої неособливої заміни змінних.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1. *вектор-функція $\widetilde{F}(t, y)$ є неперервною, N-періодичною по t в області $D : t \in \mathbb{R}, |y| = \max\limits_{1 \le j \le n} |y_j| \le b$, $\widetilde{F}(t, 0) \equiv 0$ і такою, що для*

© А.А. Акбергенов, 2013

довільних $(t,y'),(t,y'')\in D$ *виконується співвідношення*

$$|\widetilde{F}(t,y')-\widetilde{F}(t,y'')|\le L(|y'|+|y''|)^{\alpha}|y'-y''|,$$

де $L,\alpha=const>0$;

2. $0<|\lambda_i(t)|<1,\quad i=1,2,\dots,n,t\in[0,1)$;

3. $|\lambda_*|^{-1}\cdot|\lambda^*|^{1+\alpha}=\delta<1$,
де $\lambda_*=\min\limits_{t\in[0,1)}\{|\lambda_1(t)|\}$,
$\lambda^*=\max\limits_{t\in[0,1)}\{|\lambda_n(t)|\}$.

Тоді існує неособлива в області $D^*\subset D$ *заміна змінних*

$$y(t)=z(t)+\varkappa(t,z(t)),\tag{4}$$

де вектор-функція $\varkappa(t,z)$ *є неперервною по всіх змінних,* N*-періодичною по* t, $\varkappa(t,0)\equiv 0$, *що приводить систему рівнянь* (3) *до лінійного вигляду*

$$z(t+1)=\Lambda(t)z(t).\tag{5}$$

Доведення. Розглянемо систему різницевих рівнянь

$$k(t+1,\Lambda(t)z(t))=\Lambda(t)k(t,z(t))+\widetilde{F}(t,k(t,z(t))),\tag{6}$$

для якої (використовуючи метод послідовних наближень) в деякій області $D^*\subset D$ побудуємо розв'язок $k(t,z(t))=z(t)+\varkappa(t,z(t))$, що задовольняє вказаним в теоремі 1 умовам.

Послідовні наближення $k_m(t,z(t))$, $m=0,1,\dots$, визначимо наступним чином

$$\begin{aligned}k_0(t,z(t))&=z(t),\\ k_m(t,z(t))&=\Lambda^{-1}(t)k_{m-1}(t+1,\Lambda(t)z(t))-\\ &\quad-\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t,k_{m-1}(t,z(t))).\end{aligned}\tag{7}$$

Спочатку покажемо, що при всіх $t\ge 0$ та достатньо малих $|z|$ виконується нерівність

$$|k_m(t,z(t))|\le|z(t)|+\tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha},\quad m=0,1,\dots,\tag{8}$$

де $\tilde{L}$ — деяка додатна стала, або

$$|k_m(t,z(t))-z(t)|\le\tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha},\quad m=0,1,\dots\ .\tag{9}$$

Дійсно співвідношення (9) виконується при $m=0$. Нехай воно виконується для деякого $m\ge 0$. Тоді в силу (7) маємо

$$\begin{aligned}k_{m+1}(t,z(t))-z(t)&=\\ &=\Lambda^{-1}(t)k_m(t+1,\Lambda(t)z(t))-\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t,k_m(t,z(t)))-\\ &\quad-\Lambda^{-1}(t)\Lambda(t)z(t)\end{aligned}$$

і, в силу умов теореми, отримуємо

$$\begin{aligned}&|k_{m+1}(t,z(t))-z(t)|\le\\ &\le|\Lambda^{-1}(t)||k_m(t+1,\Lambda(t)z(t))-\Lambda(t)z(t)|+\\ &+L|\Lambda^{-1}(t)||k_m(t,z(t))|^{1+\alpha}\le\\ &\le|\Lambda^{-1}(t)|\tilde{L}|\Lambda(t)z(t)|^{1+\alpha}+\\ &+|\Lambda^{-1}(t)|L\big(|z|+\tilde{L}|z|^{1+\alpha}\big)^{1+\alpha}\le\\ &\le\tilde{L}\big(\delta+\frac{L}{\tilde{L}}\big(1+\tilde{L}|z|^{\alpha}\big)^{1+\alpha}\big)|z|^{1+\alpha}\le\\ &\le\tilde{L}|z|^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

Отже, співвідношення (9) виконуються при $t\ge 0,|z|\le b^*$ та всіх $m\ge 0$.

Тепер доведемо, що послідовність вектор-функцій $k_m(t,z(t)),m=0,\dots,$ рівномірно збігається при всіх $t\in\mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції $k(t,z(t))$. Для цього покажемо, що при всіх $t\in\mathbb{R}^+$ та $m\ge 1$ справедлива оцінка

$$|k_m(t,z(t))-k_{m-1}(t,z(t))|\le M\Delta^{m-1}|z(t)|^{1+\alpha}.\tag{10}$$

Дійсно, в силу умов 1–3 та (7) маємо

$$\begin{aligned}&|k_1(t,z(t))-k_0(t,z(t))|\le|\Lambda^{-1}(t)\Lambda(t)z(t)-\\ &-\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t,z(t))-z(t)|\le M|z(t)|^{1+\alpha},\end{aligned}$$

тобто оцінка (10) виконується при $m=1$. Припустимо, що вона має місце для деякого $m\ge 1$. Тоді, в силу умов теореми і представлення (7) знаходимо

$$\begin{aligned}&|k_{m+1}(t,z(t))-k_m(t,z(t))|=\\ &=|\Lambda^{-1}(t)k_m(t+1,\Lambda(t)z(t))-\\ &-\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t,k_m(t,z(t)))-\\ &-\Lambda^{-1}(t)k_{m-1}(t+1,\Lambda(t)z(t))+\\ &+\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t,k_{m-1}(t,z(t)))|\le\\ &\le|\Lambda^{-1}(t)||k_m(t+1,\Lambda(t)z(t))-\\ &-k_{m-1}(t+1,\Lambda(t)z(t))|+\\ &+|\Lambda^{-1}(t)||\widetilde{F}(t,k_m(t,z(t)))-\widetilde{F}(t,k_{m-1}(t,z(t)))|\le\\ &\le|\Lambda^{-1}(t)|M\Delta^{m-1}|\Lambda(t)|^{1+\alpha}|z(t)|^{1+\alpha}+\\ &+|\Lambda^{-1}(t)|L2^{\alpha}\Big(|z(t)|+\tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}\Big)^{\alpha}\times\\ &\times M\Delta^{m-1}|z(t)|^{1+\alpha}\le\\ &\le M\Delta^{m-1}\Big[\delta+L2^{\alpha}\Big(|z(t)|+\tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}\Big)^{\alpha}\Big]\times\end{aligned}$$

$$\times|z(t)|^{1+\alpha} \le M\Delta^m|z(t)|^{1+\alpha},$$

де $\delta + L2^\alpha\Big(|z(t)| + \tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}\Big)^\alpha < \Delta < 1$ при достатньо малих значеннях $|z(t)|$.

Таким чином, оцінка (10) має місце при $t \ge 0, |z(t)| \le b^*$ та всіх $m \ge 1$, і тому послідовність функцій (7) рівномірно збігається до деякої неперервної функції $k(t,z)$. Переходячи в (7) до границі при $m \to \infty$, можна переконатися, що $k(t,z)$ є розв'язком системи рівнянь (6).

Позначимо

$$\varkappa_m(t,z(t)) = k_m(t,z(t)) - z(t), \ \ t \ge 0, \ \ m = 0,1,\dots \tag{11}$$

Тоді легко переконатися, що $\lim\limits_{m\to\infty} \varkappa_m(t,z(t)) = k(t,z(t)) - z(t) = \varkappa(t,z(t))$ і $\varkappa(t,0) \equiv 0$. Теорема 1 доведена.

Тепер розглянемо випадок, коли умова 3) теореми 1 не виконується, тобто тоді, коли $|\lambda_*|^{-1} \cdot |\lambda^*|^{1+\alpha} \ge 1$. Для зручності перепишемо систему різницевих рівнянь (3) у вигляді

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= \lambda_1(t)y_1(t) + f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}(t+1) &= \lambda_{n-1}(t)y_{n-1}(t) + \\ &\quad + f_{n-1}\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ y_n(t+1) &= \lambda_n(t)\ y_n(t) + f_n\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big). \end{aligned} \tag{12}$$

Для даного випадку теорема 1 не має місця, і тому питання представлення неперервних розв'язків системи рівнянь (12) залишається відкритим. Тим не менш має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1), 2). Тоді в деякій області $D^* \subset D$ існує заміна змінних*

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \bar{y}_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ y_n(t) &= \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)), \end{aligned} \tag{13}$$

де функція $\gamma(t, y_1(t), \dots, y_{n-1}(t))$ є неперервною при $t \in \mathbb{R}^+$, N-періодичною по t, $\gamma(t,0,0,\dots,0) = 0$, та такою, що для довільних $(t, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n-1})$ та $(t, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})$ з області D^* виконується наступне співвідношення

$$\begin{aligned} &|\gamma(t, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n-1}) - \gamma(t, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})| \le \\ &\le K\Big(\sum_{s=1}^{n-1}|\hat{y}_s| + \sum_{s=1}^{n-1}|\tilde{y}_s|\Big)^\alpha(|\hat{y}_1 - \tilde{y}_1| + \\ &+ |\hat{y}_2 - \tilde{y}_2| + \dots + |\hat{y}_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}|), \end{aligned} \tag{14}$$

де $K = const > 0$, яка приводить систему рівнянь (12) до вигляду

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(t+1) &= \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \bar{f}_1\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)\big), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{y}_{n-1}(t+1) &= \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \\ &\quad + \bar{f}_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)\big), \\ \bar{y}_n(t+1) &= \lambda_n(t)\bar{y}_n(t) + \bar{f}_n\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)\big), \end{aligned} \tag{15}$$

де функції $\bar{f}_i(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)), i = 1,2,\dots,n$, є неперервними, задовольняють умову 2) відносно $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ та виконується умова $\bar{f}_n(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, 0) \equiv 0$.

Доведення.

Виконавши в (12) заміну змінних (13), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(t+1) &= \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \\ &+ f_1\big(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{y}_{n-1}(t+1) &= \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \\ &+ f_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big), \\ \bar{y}_n(t+1) &= \lambda_n(t)\Big(\bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \\ &\bar{y}_{n-1}(t))\Big) - \gamma(t+1, \bar{y}_1(t+1), \dots, \bar{y}_{n-1}(t+1)) + \\ &+ f_n\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Безпосередньо із (16) випливає, що для доведення теореми достатньо довести існування в деякій області $D^* \subset D$ розв'язку $\gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))$ рівняння

$$\begin{aligned} &\gamma\Big(t+1, \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + f_1\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \\ &\bar{y}_{n-1}(t), \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big), \dots, \\ &\lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + f_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \\ &\bar{y}_{n-1}(t))\big)\Big) = \lambda_n(t)\gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)) + \\ &+ f_n\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t), \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big). \end{aligned} \tag{17}$$

Розв'язок цього рівняння будується за допомогою методу послідовних наближень, які визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} &\gamma_0(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)) = 0, \quad m \ge 1 \\ &\gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)) = \\ &= \lambda_n^{-1}(t)\gamma_{m-1}\Big(t+1, \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \\ &+ f_1\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t), \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), \dots \\ &\dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big), \dots, \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \end{aligned} \tag{18}$$

$$+ f_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big) -$$
$$- \lambda_n^{-1}(t) f_n\big(t, \bar{y}_1(t), ..., \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big).$$

Використовуючи умови теореми та співвідношення (18) можна показати, що при достатньо малому b^* функції $\gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)), m = 0, 1, \dots,$ є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$ і задовольняють умовам:

$$|\gamma_m(t, \hat{y}_1(t), .., \hat{y}_{n-1}(t)) - \gamma_m(t, \tilde{y}_1(t), .., \tilde{y}_{n-1}(t))| \le$$
$$\le K\big(\sum_{s=1}^{n-1} |\hat{y}_s(t)| + \sum_{s=1}^{n-1} |\tilde{y}_s(t)|\big)^{\alpha} \times$$
$$\times (|\hat{y}_1(t) - \tilde{y}_1(t)| + \ldots + |\hat{y}_{n-1}(t) - \tilde{y}_{n-1}(t)|). \quad (19)$$

$$|\gamma_m(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t)) - \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))| \le$$
$$\le M \cdot \Delta^{m-1} (\sum_{k=1}^{n-1} |\bar{y}_k(t)|)^{1+\alpha}, \quad (20)$$

де $(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1})$, $(t, \hat{y}_1, \dots \hat{y}_{n-1})$, $(t, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}) \in D^*$,$K, M$ — деякі додатні сталі, $0 < \Delta < 1$.

Безпосередньо із (20) випливає, що при $t \ge 0$, $|\bar{y}| \le b_*$ послідовність неперервних функцій $\{\gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)), m \ge 0\}$ рівномірно збігається до деякої неперервної функції $\gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))$. Переходячи в (18) до границі при $m \to \infty$ легко показати, що функція $\gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)) = \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))$, є розв'язком функціонального рівняня (17).

Теорема доведена.

Поклавши в (15) $\bar{y}_n(t) = 0$, ми зведемо дослідження системи рівнянь (15) до дослідження системи $n-1$ порядку. При її дослідженні може трапитись два випадки - коли виконується або не виконується умова

$$|\lambda_{1*}|^{-1} |\lambda^*_{n-1}|^{1+\alpha} < 1. \quad (21)$$

Якщо ця умова не виконується, то до системи (15), при $\bar{y}_n(t) = 0$, можна застосувати знову теорему 2 і звести її дослідження до дослідження системи $(n-2)$-го порядку. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо систему різницевих рівнянь $n-k$ порядку, а саме

$$y^{(k)}(t+1) = \Lambda_{n-k}(t) y^{(k)}(t) + f^{(k)}(t, y^{(k)}, 0, \dots, 0), \quad (22)$$

де $y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_{n-k}^{(k)})$, $\Lambda_{n-k}(t) = diag(\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-k}(t))$, $f^{(k)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, для якої вже буде мати місце умова

$$|\lambda_{1*}|^{-1} |\lambda^*_{n-k}|^{1+\alpha} < 1. \quad (23)$$

і, отже, матиме місце теорема 1.

Оскільки згідно теореми 1, дослідження структури множини неперервних розв'язків системи рівнянь (22) зводиться до дослідження відповідної їй лінійної системи рівнянь, для якої загальний неперервний розв'язок можна легко побудувати, то враховуючи послідовність виконаних замін змінних за допомогою яких дослідження системи рівнянь (1) було зведене до дослідження системи (22), ми зможемо побудувати сім'ю неперервних розв'язків системи рівнянь (1).

Список використаних джерел

1. Kuczma M., Choczewski B., Ger R. Iterative functional equations. — Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

2. Mitropolsky Y. A. , Samoilenko A. M. , Martinyuk D.I. Systems of Evolution Equations with Periodic and Quasiperiodic Coefficients. — Kiev:Naukova Dumka, 1985. — 216 P.

3. Pelyukh G. P. Investigation of the structure of the set of continuous solutions of systems of nonlinear difference equations with continuous argument // Ukrainian Mathematical Journal — 2007, № 1. — P. 99 — 108.

4. Pelyukh, G.P., Rerepresentation of Solutions of Difference Equations with a Continuous Argument // Differ. Uravn. — 1996, vol. 32, no. 2. — pp. 304 — 312.

5. Pelyukh G.P. On the linearization of a system of nonlinear functional-difference equations in a neighbourhood of the equilibrium // Doklady Akademii Nauk. — 2009, No. 9. — pp. 36 — 41

6. A. A. Akbergenov, G. P. Pelyukh Constructing continuous solutions for one class of systems of nonlinear difference equations // Reports of the National Academy of Science of Ukraine. — 2012, No. 10. — pp. 7 — 11

7. Pelyukh G. P. On the theory of linear difference equations with periodic coefficients // Doklady Akademii Nauk — 1994. — 336, No. 4. — pp. 451-452.

Надійшла до редколегії 14.01.2013

УДК 517.925.4

Є.С. Войтушенко, аспірант

Вироджені лінійні диференціальні рівняння з імпульсною дією

У роботі досліджено структуру розв'язків вироджених лінійних диференціально-алгебраїчних систем, які піддаються імпульсній дії в фіксовані моменти часу. Знайдено умови розв'язності та побудовано розв'язки лінійної виродженої імпульсної задачі. Використовуючи теорію нетерових крайових задач із застосуванням методу псевдо-обернених матриць знайдені необхідні й достатні умови існування таких розв'язків.

Ключові слова: вироджена диференціальна система з імпульсною дією , нетерова крайова задача.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4,E-mail: I_ Voitushenko@ukr.net

I.S. Voitushenko, postgraduate

Systems of singular differential equations with pulse action

We consider the problem of existence and construction of solutions of the singular linear systems of ordinary differential equations with impulsive action at fixed points of time. Using the theory of Fredholm boundary-value problem with application a method of pseudo-inverse matrixes the necessary and sufficient conditions of such solutions existence were found.

Key Words: singular differential equations with pulse action, Fredholm boundary-value problem.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 E-mail: I_Voitushenko@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М.О.

1. Вступ.

Відомо, що деякі задачі теорії керування, радіофізики, математичної економіки, лінійного програмування моделюються системами диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній, які піддаються імпульсній дії [1]. Задачі такого типу у літературі часто називають системами диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній та з внутрішніми крайовими умовами (Interface Boundary Value-Problem)[2]. Важливу роль у теорії таких систем грає введене в [3] поняття центральної канонічної форми [4]. Ми будемо розглядати вироджені нетерові задачі загального виду, в яких імпульсні дії в фіксовані моменти часу розглядається як крайові умови задані лінійним векторним функціоналом [5,6]. У розгляд включені недовизначені та перевизначені критичні крайові задачі для вироджених диференціальних систем.

2. Постановка задачі.

Розглянемо вироджену лінійну диференціальну систему рівнянь (часом такі системи називають диференціально-алгебраїчні [7,8])

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), t \neq \tau_i \qquad (1)$$

з імпульсною дією:

$$\Delta J_i\, x|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i - 0) + b_i, t, \tau_i \in [a,b], i = 1, ..., p \qquad (2)$$

Де $A(t), B(t) \in C^{2m}[a,b] - n \times n-$вимірні матриці та $f(t) \in C^{2m}[a,b] - n-$мірна вектор-функція, ($C[a,b]-$ простір неперервних по $t \in [a,b]$ вектор-функцій); $x = x(t) = col(x_1(t), ..., x_n(t))$;$B_i - (1 \times n)-$вимірні сталі матриці, ($i = 1, ..., p$); $\det B(t) = 0, \forall t \in [a,b]$; $J_i - (1 \times n)-$ вимірні сталі матриці такі, що $J_1 = (1, 0, ..., 0), \ldots, J_i = (0, 0, ..., 1, 0, ...0)$, ($i = 1, ..., p$) та b_i-константа; $b_i \in \mathbb{R}^1$; $-\infty < a < \tau_1 < ... < \tau_i < ... < \tau_p < b < \infty, i = 1, ..., p$.

Виникає питання, який вигляд має критерій розв'язності для імпульсної задачі (1), (2)? Та якщо вироджена лінійна диференціальна система рівнянь з імпульсною дією розв'язна, тоді яким повинен бути розв'язок цієї задачі.

3. Вироджена диференціальна система.

У просторі неперервно диференційованих

© Є.С. Войтушенко, 2013

$n-$вимірних вектор-функцій $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ розглянемо оператор L та спряжений до нього оператор L^*: $L(t)=A(t)-B(t)\frac{d}{dt}$, $L^*(t)=A^*(t)+\frac{d}{dt}B^*(t)$.

Нехай $A(t),B(t)\in C^{2m}[a,b], rankB(t)=n-r$ і матриця $B(t)$ має на відрізку $[a;b]$ повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t)$, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_1,s_2,...,s_r$, де $\max\limits_i s_i=m$. Тоді існують неособливі при всіх $t\in[a,b]$ $n\times n-$ матриці $P(t),Q(t)\in C^1[a,b]-$ такі, що множенням на $P(t)$ та заміною $x=Q(t)y$ система рівнянь (1) зводиться до центральної канонічної форми [9]:

$$\left[\begin{array}{cc} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{array}\right]\frac{dy}{dt}=\left[\begin{array}{cc} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{array}\right]y+P(t)f(t),$$

де $s=s_1+s_2+...+s_{r_1}$, $E_s-(s\times s)$ та $E_{n-s}-(n-s)\times(n-s)$ одиничні матриці, $I=diag(I_1,...,I_{r_1})$; I_j-нільпотентні блоки Жордана порядку $s_j(j=\overline{1,r})$.

Загальний розв'язок виродженої диференціальної системи (1) на інтервалі $[a,b]$ має вигляд [9, стор. 67]

$$x(t,c)=X_{n-s}(t)c+\int_a^t X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau-$$

$$-\Phi(t)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)f(t), \quad (3)$$

або

$$x(t,c)=X_{n-s}(t)c+\widetilde{x}(t), c\in\mathbb{R}^{n-s}$$

Де $X_{n-s}(t)-n\times(n-s)$ матриця складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x, t\in[a,b], \quad (4)$$

$$\widetilde{x}(t)=\int_a^t X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau-$$

$$-\Phi(t)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)f(t), \quad (5)$$

частинний розв'язок неоднорідної системи;

$Y_{n-s}(t)-n\times(n-s)$ вимірна матриця складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків спряженої системи

$$\frac{d}{dt}B^*(t)y=-A^*(t)y, t\in[a,b];$$

$c-(n-s)-$вектор довільних констант, та $\Phi(t)$,$\Psi(t)(n\times s)-$матриці складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$:

$\Phi(t)=[\varphi_1^{(1)}(t),...,\varphi_1^{(s_1)}(t);\varphi_2^{(1)}(t),...,\varphi_2^{(s_2)}(t);$ $...;\varphi_r^{(1)}(t),...,\varphi_r^{(s_r)}(t)]$;

$\Psi(t)=[\psi_1^{(1)}(t),...,\psi_1^{(s_1)}(t);\psi_2^{(1)}(t),...,\psi_2^{(s_2)}(t);$ $...;\psi_r^{(1)}(t),...,\psi_r^{(s_r)}(t)]$.

Фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ завжди можна визначити так, щоб виконувалась рівність

$$Y^*_{n-s}(t)B(t)X_{n-s}(t)=E_{n-s}.$$

4. Основний результат.

Будемо дивитись на імпульсну умову (2), як на крайову. В літературі такі задачі мають назву внутрішні крайові умови [2]:

$$\left\{\begin{array}{l} l_1x:=J_1x(\tau_1+)-(J_1+B_1)x(\tau_1-) \\ l_2x:=J_2x(\tau_2+)-(J_2+B_2)x(\tau_2-) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_px:=J_px(\tau_p+)-(J_p+B_p)x(\tau_p-) \end{array}\right. \quad (6)$$

де $l_1,l_2,...,l_p-$ лінійні функціонали. Підставивши рівняння (3) у умову (6), та враховуючи, що $X_{n-s}(\tau_i+)=X_{n-s}(\tau_i-)$ отримаємо

$$\left\{\begin{array}{ll} l_1x:= & -B_1X_{n-s}(\tau_1)c+J_1\widetilde{x}(\tau_1+)- \\ & -(J_1+B_1)\widetilde{x}(\tau_1-) \\ l_2x:= & -B_2X_{n-s}(\tau_2)c+J_2\widetilde{x}(\tau_2+)- \\ & -(J_2+B_2)\widetilde{x}(\tau_2-) \\ & \ldots \\ l_px:= & -B_pX_{n-s}(\tau_p)c+J_p\widetilde{x}(\tau_p+)- \\ & -(J_p+B_p)\widetilde{x}(\tau_p-) \end{array}\right. \quad (7)$$

Систему (7) запишемо у вигляді

$$lx=lX_{n-s}(\cdot)c+l\widetilde{x}(\cdot) \quad (8)$$

де $l=col(l_1,l_2,...,l_p)-$ вектор стовпчик лінійних функціоналів;

$$lX_{n-s}(\cdot)=\left[\begin{array}{c} -B_1X_{n-s}(\tau_1) \\ -B_2X_{n-s}(\tau_2) \\ \vdots \\ -B_pX_{n-s}(\tau_p) \end{array}\right]$$

– $[p\times(n-s)]$-вимірна постійна матриця;

$$l\widetilde{x}(\cdot)=\begin{bmatrix} J_1\widetilde{x}(\tau_1+)-(J_1+B_1)\widetilde{x}(\tau_1-) \\ J_2\widetilde{x}(\tau_2+)-(J_2+B_2)\widetilde{x}(\tau_2-) \\ \vdots \\ J_p\widetilde{x}(\tau_p+)-(J_p+B_p)\widetilde{x}(\tau_p-) \end{bmatrix}$$

– $(p\times 1)$-вектор-стовпчик крайової умови, що відповідає за неоднорідність в рівнянні (3).

Якщо позначити через $Q:=lX_{n-s}(\cdot)-$ відома $(p\times(n-s))-$ вимірна постійна матриця, з імпульсної умови (2) отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$Qc=b-l\widetilde{x}(\cdot)\in\mathbb{R}^p, \tag{9}$$

де $b=\ col(b_1,...,b_p)\in\mathbb{R}^p-$ заданий вектор-стовпчик; c – шуканий вектор-стовпець з $\mathbb{R}^{n-s}$.

Так як прямокутна матриця є нетеровим оператором [6, с.78], тоді алгебраїчна система (9) розв'язна тоді і тільки тоді, коли її вільний член $b-l\widetilde{x}(\cdot)$ приналежить ортогональному доповненню $N^{\perp}(Q)=R(Q)$ підпростору $N(Q^*)$, тобто коли

$$P_{Q^*}\left\{b-l\widetilde{x}(\cdot)\right\}=0. \tag{10}$$

При цьому загальний розв'язок системи (9) має вигляд

$$c=Q^{+}\left(b-l\widetilde{x}(\cdot)\right)+\overline{c},$$

де $Q^{+}-$ псевдо обернена по Муру-Пенроузу $((n-s)\times p)-$ мірна матриця; $\overline{c}-$ довільний вектор з нуль-простору $N(Q)$:

$$\overline{c}=P_Qc=P_Q\overline{c}\in N(Q),$$

де P_Q та $P_{Q^*}(n-s)\times(n-s)-$ і $p\times p-$ вимірні матриці – ортопроектори, які проектують простори $\mathbb{R}^{n-s}$ та $\mathbb{R}^p$ на нуль простори $N(Q)$ та $N(Q^*)$ матриць Q та Q^* відповідно:

$$P_Q:\mathbb{R}^{n-s}\to N(Q);P_{Q^*}:\mathbb{R}^p\to N(Q^*).$$

Якщо $rankP_{Q^*}=d$, тоді умова (10) складається із d лінійно незалежних умов та $p\times p-$ мірну матрицю P_{Q^*} у (10) можливо змінити на $d\times p-$ мірну матрицю $P_{Q_d^*}$ складену з повної системи d лінійно незалежних стрічок матриці P_{Q^*}. Довільний вектор-стовпець $\overline{c}=P_Qc\in N(Q)$ можна записати у вигляді $\overline{c}=P_{Q_r}c_r$, де $P_{Q_r}-((n-s)\times r)-$ мірна матриця, складена з повної системи r лінійно незалежних стовбців матриці P_Q, $c_r\in\mathbb{R}^r$.

Теорема 1. *Якщо* $\operatorname{rank}Q=n_1\le\min(p,n-s)$, *тоді вироджена диференціальна система* (1) *з імпульсною умовою* (2) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли неоднорідності* $f(t)\in C^{2m}[a,b]$ *у виродженої диференціальної системи та* $b\in\mathbb{R}^p$ *в імпульсній умові задовольняють* $d-$ *лінійно-незалежним умовам:*

$$P_{Q_d^*}\left\{b-l\widetilde{x}(\cdot)\right\}=0,d=p-n_1 \tag{11}$$

та при цьому має r*-параметричну* $(r=n-s-n_1)$ *сім'ю лінійно-незалежних розв'язків виду*

$$x(t,c_r)=X_{n-s}(t)P_{Q_r}c_r+X_{n-s}(t)Q^{+}\left\{b-l\widetilde{x}(\cdot)\right\}+$$

$$+\widetilde{x}(t),\forall c_r\in\mathbb{R}^r. \tag{12}$$

Наслідок 1. Якщо $\operatorname{rank}Q=n_1=n-s$, тоді вироджена диференціальна система (1) з імпульсною умовою (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор-стовпець $b-l\widetilde{x}(\cdot)\in\mathbb{R}^p$ задовольняє $d-$ лінійно-незалежним умовам:

$$P_{Q_d^*}\left\{b-l\widetilde{x}(\cdot)\right\}=0,d=p-(n-s)$$

та при цьому має єдиний $(r=0)$ розв'язок

$$x(t)=X_{n-s}(t)Q^{+}\left\{b-l\widetilde{x}(\cdot)\right\}+\widetilde{x}(t).$$

Дійсно, так як $r=0$, то $P_{Q_r}=0$ та $P_{Q_r}c_r=0$.

Наслідок 2. Якщо $\operatorname{rank}Q=n_1=p$, тоді вироджена диференціальна система (1) з імпульсною умовою (2) розв'язна для будь-яких $b-l\widetilde{x}(\cdot)\in\mathbb{R}^p$ і при цьому має розв'язок виду

$$x(t,c_r)=X_{n-s}(t)P_{Q_r}c_r+X_{n-s}(t)Q^{+}\left\{b-l\widetilde{x}(\cdot)\right\}+$$

$$+\widetilde{x}(t),r=(n-s)-p.$$

Дійсно, так як $\operatorname{rank}Q=p$, то $d=p-p=0$, $P_{Q_d^*}\equiv 0$ та умова (11) завжди виконана.

Приклад. Розглянемо систему рівнянь з імпульсним впливом.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\frac{dy}{dt}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}y-\sqrt{2}\begin{bmatrix}2\cos 2t\\ \cos 2t-\sin 2t\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\Delta\, y(t)|_{t=\tau_1}=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}y(\tau_1-)+b_1 \\ \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\Delta\, y(t)|_{t=\tau_2}=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}y(\tau_2-)+b_2 \end{cases} \tag{13}$$

Знайдемо загальний розв'язок першого рівняння системи (13):

$$y(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\0\end{bmatrix}c+\sqrt{2}\begin{bmatrix}-2\frac{\cos 2t+2\sin 2t}{5}\\ \cos 2t-\sin 2t\end{bmatrix}; \tag{14}$$

звідси знайдемо $Q = \begin{bmatrix} -e^{-\tau_1} \\ 0 \end{bmatrix} - 2-$ вимірний вектор-стовпець, тоді можемо записати лінійне алгебраїчне рівняння

$$\begin{bmatrix} -e^{-\tau_1} \\ 0 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} -$$

$$-\sqrt{2}\left\{\begin{bmatrix} -2\frac{\cos 2(\tau_1+0)+2\sin 2(\tau_1+0)}{5} \\ \cos 2(\tau_2+0) - \sin 2(\tau_2+0) \end{bmatrix} -\right.$$

$$\left. - 2\begin{bmatrix} -2\frac{\cos 2(\tau_1-0)+2\sin 2(\tau_1-0)}{5} \\ \cos 2(\tau_2-0) - \sin 2(\tau_2-0) \end{bmatrix}\right\} \quad (15)$$

Імпульсна задача (13) розв'язна тоді і тільки тоді коли виконується умова:

$$P_{Q_d^*}\left\{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} -\right.$$

$$-\sqrt{2}\left\{\begin{bmatrix} -2\frac{\cos 2(\tau_1+0)+2\sin 2(\tau_1+0)}{5} \\ \cos 2(\tau_2+0) - \sin 2(\tau_2+0) \end{bmatrix} -\right.$$

$$\left.\left. -2\begin{bmatrix} -2\frac{\cos 2(\tau_1-0)+2\sin 2(\tau_1-0)}{5} \\ \cos 2(\tau_2-0) - \sin 2(\tau_2-0) \end{bmatrix}\right\}\right\} = 0,$$

де $P_{Q^*} - 2 \times 2-$ вимірна матриця – ортопроектор, яка проектує простір $\mathbb{R}^2$ на нуль-простір $N(Q^*)$ матриці Q^*. Матрицю P_{Q^*} розрахуємо за формулою $P_{Q^*} = E_2 - QQ^+$; спочатку знайдемо матрицю $Q^+ = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(Q^*Q + \varepsilon E_1)^{-1}Q^*$, де $Q^* - (1 \times 2)-$ вимірна транспонована матриця до матриці Q.

Отже, $P_Q = E_1 - Q^+Q = 0$ і

$$Q^+ = \lim_{\varepsilon\to 0}(\begin{pmatrix} -e^{-\tau_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-\tau_1} \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon)^{-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} -e^{-\tau_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{\tau_1} & 0 \end{pmatrix},$$

та

$$P_{Q^*} = E_2 - QQ^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} -e^{-\tau_1} \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{\tau_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

звідки випливає, що $P_{Q_1^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже імпульсна задача (13) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується одна $(d = 1)$ умова:

$$b_2 - \sqrt{2}\{\cos 2(\tau_2+0) - \sin 2(\tau_2+0) -$$
$$- 2(\cos 2(\tau_2-0) - \sin 2(\tau_2-0))\} = 0, \quad (16)$$

$\forall b_1 \in \mathbb{R}$.

При цьому загальний розв'язок системи (15) виглядає:

$$c = -e^{\tau_1}(b_1 + \sqrt{2}(2\frac{\cos 2(\tau_1+0) + 2\sin 2(\tau_1+0)}{5}$$
$$- 4\frac{\cos 2(\tau_1-0) + 2\sin 2(\tau_1-0)}{5})); \quad (17)$$

Підставляючи знайдену константу $c \in \mathbb{R}^1$ у загальний розв'язок (14), приходимо до розв'язку вихідної системи рівнянь (13) з імпульсним впливом, який існує тоді і тільки тоді, коли виконується умова розв'язності (16).

Список використаних джерел

1. A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, Impulsive Differential Equations,Vyshcha Shkola, Kiev (1987) (in Russian).
2. Anton Zettl. Adjoint and Self-Adjoint Boundary Value Problems with Interface Conditions // SIAM Journal on Applied Mathematics. – Vol. 16, №4 (jul., 1968), pp.851-859.
3. Campbell S.L., Petzold L.R. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. – 1983. – N4. – p. 517 – 521.
4. Rheinboldt W.C. Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds // Math. Comp. – 1984. – Vol. 43, N 168. – P. 473 – 482.
5. A.A. Boichuk, L.M. Shegda Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems. Differential Equations. – 2011. – Vol.47, №4. – pp. 459-467 (in Russian).
6. A.A. Boichuk and A.M. Samoilenko. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.
7. Chistyakov V.F., Sheglova A.A. Selected chapters of the theory of differential-algebraic systems. – Novosibirsk: Nauka, 2003. – 317 p.
8. I.I. Korol', The research of solutions Fredholm boundary-value problems for singular differential equations with pulse action // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics Mathematics. –2009. – №3. – p. 71-76.
9. Samoilenko, A. M., Shkil' M.I., Yakovec' V.P. Linear systems of differential equations with Singularities. - Kyiv: Vyshcha Shkola, 2000. – 294 p.

Надійшла до редакції 28.12.12.

УДК 517.929

І. А. Головацька [1], аспірант

Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь

Розглядається задача про існування розв'язків слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь. Використовуючи теорію псевдообернених матриць, знайдено необхідну умову існування розв'язків таких нелінійних систем зі збуренням.

Ключові слова: слабконелінійні інтегро-диференціальні рівняння, ортопроектори, псевдообернені матриці.

[1] Інститут математики НАН України, 01601, м. Київ, вул. Терещенківська 3, e-mail: holovatska.iv@gmail.com

I. A. Golovatska [1], postgraduate

Weakly nonlinear systems of integro-differential equations

Problem about existence of solutions of weakly nonlinear systems of integro-differential equations. Using the theory of pseudoinverse matrixes obtained the necessary condition of solutions existence of such perturbation nonlinear systems.

Key Words: weakly nonlinear integro-differential equations, orthoprojectors, pseudoinverse matrix.

[1] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01601, Kiev, Tereschenkivska st., 3, e-mail: holovatska.iv@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

1. Постановка задачі та допоміжні результати. Дослідження умов розв'язності та структури множини розв'язків інтегро-диференціальних систем [1, 2, 6] за допомогою теорії псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць [3], дозволяє здійснити аналіз роз-в'язності відповідних нелінійних систем. Сис-тематичному вивченню умов розв'язності нелінійних систем присвячено багато робіт [2, 4, 5]. Зокрема, у роботах [7, 8, 9], використо-вуючи теорію псевдообернених матриць, отримано критерії розв'язності та побудовано ітераційні процеси відшукання розв'язків нелінійних систем диференціальних та різницевих рівнянь. Застосування цих результатів дозволяє розглянути задачу про розв'язність слабкозбурених нелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь. У даній статті сформульовано необхідну умову існування розв'язку слабкозбуреної нелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь, який при $\varepsilon = 0$ перетворюються у розв'язок породжуючої системи.

Отже, розглянемо нелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь з малим невід'ємним параметром ε:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = \\ = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t,s) Z(x(s,\varepsilon), s, \varepsilon) ds. \quad (1)$$

де $A(t), B(t)$ — $(m \times n)$, $\Phi(t)$ — $(n \times m)$, $f(t)$ — $(n \times 1)$, $K(t,s)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; стовпчики матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$; $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ — нелінійна по x — n-вимірній вектор-функції, така, що:

$$Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C[a,b],\ Z(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],$$
$$Z(x(t,\cdot),t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0].$$

Будемо шукати умови існування розв'язку системи (1): $x = x(t,\varepsilon)$, визначений у наступ-ному класі вектор-функцій:

© І.А. Головацька, 2013

$$x(\cdot,\varepsilon)\in D_2[a,b],\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b],\quad x(t,\cdot)\in C(0,\varepsilon_0],$$

і який перетворюється при $\varepsilon=0$ в один із розв'язків $x_0(t,c_{r_1})=x(t,0)$ породжуючої системи:

$$\dot{x}(t)-\Phi(t)\int_a^b[A(s)x(s)+B(s)\dot{x}(s)]ds=f(t), \tag{2}$$

який у подальшому будемо називати породжуючим розв'язком нелінійної системи (1). Наведемо, спочатку, критерій розв'язності породжуючої лінійної системи (2) інтегро-диференціальних рівнянь [6].

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} D=n_1$. *Система* (2) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли будь-які неоднорідності* $f(t)\in L_2[a,b]$ *задовольняють умову :*

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}=0,\quad d_1=m-n_1. \tag{3}$$

Тоді система (2) *має* r_1 *— параметричну сім'ю розв'язків:*

$$x(t,c_{r_1})=X_{r_1}(t)c_{r_1}+F(t),\forall c_{r_1}\in\mathbb{R}^{r_1}, \tag{4}$$

де $F(t)=\tilde{f}+\Psi_0(t)D^+\tilde{b}$.

Тут $X_{r_1}(t)=\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}$ — фундаментальна матриця системи (2) розміром $(n\times r_1)$, r_1—кількість лінійно незалежних розв'язків системи (2).

$$\Psi(t)=\int_a^t\Phi(s)ds,\qquad \Psi_0(t)=\Big[\Psi(t),I_n\Big],$$

$\Psi(t),\Psi_0(t)$—$(n\times m)$-,$(n\times(m+n))$-вимірні матриці,

$$\tilde{b}=\int_a^b[A(s)\tilde{f}(s)+B(s)f(s)]ds,$$

$$D=[I_m-\int_a^b[A(s)\Psi(s)+B(s)\Phi(s)]ds,-\int_a^b A(s)ds],$$

— відома $(m\times(m+n))$-вимірна матриця, D^+—псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до D матриця [3], I_n, I_m—одиничні матриці відповідних розмірностей. $P_D(P_{D^*})$— ортопроектор на ядро матриці $D(D^*)$; $P_{D_{r_1}}$ — $((m+n)\times r_1)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи r_1 лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_D, $P_{D^*_{d_1}}$ — $(d_1\times m)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{D^*}; $n_1=rankD$, $r_1=m+n-n_1>0$, $d_1=m-n_1$.

2. Основний результат. Знайдемо необхідну умову існування розв'язку $x(t,\varepsilon)$ системи (1), який при $\varepsilon=0$ перетворюється в один з породжуючих розв'язів (4) $x_0(t,c_{r_1})\in D_2[a,b]$ системи (2). Нехай умова (3) виконується, тоді згідно з теоремою 1 система (1) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли для $q(t,\varepsilon)\in L_2[a,b]$ виконується умова:

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}_1=0, \tag{5}$$

де $q(t,\varepsilon)=f(t)+\varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds$,

$$\tilde{b}_1=\int_a^b\Big[A(s)\tilde{q}(s,\varepsilon)+B(s)q(s,\varepsilon)\Big]ds=$$

$$=\tilde{b}+\varepsilon\int_a^b\Big[A(s)\int_a^s\int_a^b K(\tau,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)dsd\tau$$

$$+B(s)\int_a^b K(s,\tau)Z(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau\Big]ds.$$

Врахувавши (3), умова (5) буде мати вигляд:

$$P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \Big[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau,s) Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s,\tau) Z(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) d\tau \Big] ds = = 0, \quad (6)$$

Використовуючи умови накладені на нелінійну вектор-функцію $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$ у рівності (6), тоді отримаємо необхідну умову існування розв'язку системи (1):

$$P_{D^*_{d_1}} \int_a^b [A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c^0_{r_1}),s,0) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s,\tau) Z(x_0(\tau,c^0_{r_1}),\tau,0) d\tau] ds = = 0, \quad (7)$$

де $x_0(\tau, c^0_{r_1}) \in D_2[a,b]$.

Отже, якщо рівняння (7) має розв'язок $c_{r_1} = c^0_{r_1} \in R^{r_1}$, то вектор $c^0_{r_1}$ визначає той породжуючий розв'язок $x_0(t,c^0_{r_1})$, якому може відповідати розв'язок $x(t,\varepsilon)$ вихідної нелінійної системи (1). Якщо ж рівняння (7) не має розв'язків, то і система (1) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні розв'язки рівняння (7). Аналогічно до періодичних задач [4, 5, 1] для систем звичайних диференціальних рівнянь, відповідну рівність (7) будемо називати *рівнянням для породжуючих констант* $c^0_{r_1}$ *нелінійної системи* (1). Отже, необхідна умова існування розв'язку системи (1) задовольняється вибором константи c_{r_1} у породжуючому розв'язку (4), як дійсного кореня рівняння (7).

Таким чином отримали необхідну умову існування розв'язку системи (1).

Теорема 2. Необхідна умова. *Нехай слабконелінійна система інтегро-диференціальних рівнянь* (1) *має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b],\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* (4) *з константою* $c_{r_1} = c^0_{r_1} \in \mathbb{R}^{r_1}$. *Тоді вектор констант* $c^0_{r_1}$ *обов'язково повинен бути дійсним коренем рівняння* (7) *для породжуючих констант.*

Наслідок. Побудуємо рівняння для породжуючих констант у випадку збуреної лінійної системи, коли

$$Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = A_1(t)x(t,\varepsilon).$$

Відповідна система інтегро-диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t,s) A_1(s) x(s,\varepsilon) ds. \quad (8)$$

Припустимо, що породжуюча система (2) має розв'язок, тобто виконується умова (3), тоді, згідно теореми 2, маємо наступне рівняння:

$$P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \Big[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau,s) A_1(s) x_0(s,c^0_{r_1}) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s,t) A_1(t) x_0(t,c^0_{r_1}) dt \Big] ds = 0. \quad (9)$$

Підставимо породжуючий розв'язок (4) в (9), отримаємо:

$$P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \Big[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau,s)(X_{r_1}(s)c^0_{r_1} + F(s)) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s,\tau)(X_{r_1}(\tau)c^0_{r_1} + F(\tau)) d\tau \Big] ds = 0.$$

Нехай

$$B_0 := P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \Big[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) X_{r_1}(s) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s, \tau) X_{r_1}(\tau) d\tau \Big] ds,$$

$$\tilde{q}_1 := -P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \Big[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) F(s) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s, \tau) F(\tau) d\tau \Big] ds,$$

тоді рівняння для породжуючих констант буде мати вигляд:

$$B_0 c^0_{r_1} = \tilde{q}_1$$

алгебраїчної системи відносно невідомого вектора-констант $c^0_{r_1} \epsilon \mathbb{R}^{r_1}$, яка буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$P_{B^*_0} P_{D^*_{d_1}} = 0, \tag{10}$$

і буде мати хоча б один дійсний розв'язок:

$$c^0_{r_1} = B^+_0 \tilde{q}_1, \; c^0_{r_1} \in \mathbb{R}^{r_1}.$$

Таким чином у випадку лінійної збуреної системи (8) отримали критерій її розв'язності, при умові, що породжуюча система (2) розв'язна.

Якщо ж породжуюча система (2) нерозв'язна, то при умові (10) отримаємо умову біфуркації розв'язку системи (8) [10].

Список використаних джерел

1. *A. A. Boichuk and A. M. Samoilenko,* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Boston: VSP, Mass, 2004.
2. *A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, and A. M. Samoilenko,* Generalized Inverse Operators and Noether Boundary-Value Problems, Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev (1995) (in Russian).
3. *F. R. Gantmakher,* Matrix Theory, Nauka, Moscow (1988)(in Russian).
4. *I. G. Malkin,* Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations, Gostekhizdat, Moscow (1956) (in Russian).
5. *E. A. Grebenikov and Yu. A. Ryabov,* Constructive Methods for Analysis of Nonlinear Systems, Nauka, Moscow (1979) (in Russian).
6. *A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, and S. A. Krivosheya,* "Boundary-value problem for linear systems of integro-differential equations with degenerate kernel", Ukr. Mat. Zh., 48, No. 11, 1576—1579 (1996).
7. *A. Boichuk, J. Diblik, D. Khusainov, M. Ruzickova.* Boundary-Value Problems for Weakly Nonlinear Delay Differential Systems // Abstr.Appl. Anal. 2011 (2011), Article ID 631412. — 19 p.
8. *A. Boichuk, J. Diblik, D. Khusainov, M. Ruzickova,* "Fredholm's boundary-value problems for differential systems with a single delay," Nonlinear Analysis., 72, No 5, 2251–2258 (2010).
9. *A. A. Boichuk, L. M. Shegda,* "Degenerate nonlinear boundary-value problems", Ukr. Mat. Zh., 61, No.9, 1174—1188 (2009).
10. *I. A. Golovatska,* "Weakly perturbed systems of linear integro-differential equations," Nonlinear Oscil., 15, No.2, 151–164 (2012).

Надійшла до редколегії 26.12.2012

УДК 519.9

Гончар М.С.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Кучук-Яценко С.В.[2], інженер

Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах

В моделі економіки обміну знайдено умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Представлено необхідні та достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів
Ключові слова: економічні динамічні системи, арбітраж, економічна рівновага.

[1] Інститут теоретичної фізики ім. Миколи Боголюбова НАН України, 03143, м. Київ, вул. Метрологічна, 14Б, e-mail: mhonchar@i.ua

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: kuchuk.iatsenko@gmail.com

Gonchar N.S., doctor in physics and math., prof.
Kuchuk-Iatsenko S.V., engineer

Arbitrage absence in economy dynamical systems

In the paper the necessary and sufficient conditions of strict positiveness of equilibrium price vectors are found for exchange economy model. For all solutions of the set of equations of equilibrium the inequalities from below are established. The theorem of existence of economy dynamics is stated. The sufficient conditions of absence of space and time arbitrage opportunities for economic agents are presented.
Key words: economy dynamical systems, equilibrium, arbitrage

[1] Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, 03143, Kyiv, Metrologichna str., 14B, e-mail: mhonchar@i.ua

[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: kuchuk.iatsenko@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук професор Перестюк М.О..

Introduction

In reality it is very important to find conditions of absence of space and time arbitrage opportunities in terms of macroeconomic parameters such as price of money and limitations on growth of prices of goods. The existing models give conditions of arbitrage absence in terms of martingale measures (see [1-3]). But in reality one does not know which mathematical model describes evolution of risk assets. Therefore, construction of models of general form and finding conditions under which arbitrage opportunities are absent is very actual. This paper is devoted to the construction of non-arbitrage economic dynamics in the case when strategies of consumer's behavior do not depend on price vector. This model is very important because the problem of finding equilibrium price vector in every period of economy operation is reduced to the solution of linear set of equations (see [5]).

The problem of arbitrage absence it is the problem of effective markets. Therefore, the main aim of the paper is to find general conditions on supply vector of goods under which spatial and time arbitrage opportunities are absent, knowing the demand vectors of consumer in every period of economy operation.

Auxiliary results

In every period of operation a consumer is described by some demand vector that is given on some probability space. From another side every consumer has some goods that he wants to exchange on another set of goods defined by his demand vector. We suppose that the first component of this vector is the supply of money.

Constructing the economy system we assume that the demand on goods of previous period of economy operation defines the supply of goods in the next period of economy operation. The problem being

© M.S. Gonchar, S.V. Kuchuk-Iatsenko, 2013

solved in this paper is to construct such economy dynamics in which spatial and time arbitrage opportunities are not possible. So in this stage of investigation we are not interested in determining the way in which consumers transform their demand vectors of the previous period into supply vectors of the next period. This investigation is the subject of the following papers.

In this section we consider an exchange model of economy with proportional consumption. The main problem is to clarify conditions under which the equilibrium price vector is strictly positive.

Below we consider the set of equations

$$\sum_{i=1}^{l} C_{ki} \frac{\langle b_i, p\rangle}{\langle C_i, p\rangle} = \psi_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

the solutions of which describe equilibrium in such economy systems, where $C = \| C_{ki} \|_{k=1,i=1}^{n,l}$, $B = \| b_{ki} \|_{k=1,i=1}^{n,l}$ are nonnegative matrices, $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^{n}$, and $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^{n}$, $i = \overline{1,l}$, are nonnegative vectors constructed by these matrices correspondingly, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{n}$ is a strictly positive vector.

The next Theorem is the special form of the Theorem 5.1.4 from [5].

Theorem 1. Let $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{n}$ be a strictly positive vector belonging to the interior of the cone generated by the set of vectors $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^{n}, i = \overline{1,l}$, being the column of the matrix $C = \| C_{ki} \|_{k=1,i=1}^{n,l}$, and also let the inequalities

$$\sum_{s=1}^{l} C_{ks} > 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad \sum_{k=1}^{n} C_{ki} > 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{2}$$

hold.

Suppose that there exist a vector $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}$, $y_i > 0, i = \overline{1,l}$, such that

$$\psi = \sum_{i=1}^{l} C_i y_i$$

and a matrix $\tau_1 = \| \tau_{ki}^1 \|_{k=1,i=1}^{l,n}$ satisfying conditions:

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ki}^1 = 1, k = \overline{1,l}.$$

If the matrix elements of the matrix $\tau = \| \tau_{ki} \|_{k=1,i=1}^{l,n}$ constructed by the rule

$$\tau_{ki} = \frac{y_k \tau_{ki}^1}{\psi_i}, \quad k = \overline{1,l}, \quad i = \overline{1,n},$$

are such that the matrix τC is nonnegative and indecomposable, the matrix $\tau C \tau$ is nonnegative and does not contain zero column, then for the matrix $B = \| b_{ik} \|_{i=1,k=1}^{n,l}$ having the representation $B = CB_1$, where

$$B_1 = \| b_{ik}^1 \|_{i=1,k=1}^{l}, \quad b_{ks}^1 = y_s \sum_{i=1}^{n} \tau_{ki} C_{is}, \quad k,s = \overline{1,l},$$

the set of equations (1) has a strictly positive solution. If the rank of the set of the vectors $b_i - y_i C_i, i = \overline{1,l}$, equals $n-1$, then a strictly positive solution is unique up to constant factor.

The next Theorem gives the necessary and sufficient conditions of strict positiveness of solutions of the set of equations (1).

Theorem 2. Let the inequalities (2) hold. The set of equations (1) has a strictly positive solution if and only if there exists a strictly positive vector $y = \{y_i\}_{i=1}^{l}, y_i > 0, i = \overline{1,l}$, and a matrix

$$\tau_1 = \| \tau_{ki}^1 \|_{k=1,i=1}^{l,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} \tau_{ki}^1 = 1, \quad k = \overline{1,l},$$

such that:

1) for a strictly positive vector ψ the following representation holds:

$$\psi = \sum_{i=1}^{l} C_i y_i;$$

2) a matrix

$$\tau = \| \tau_{ki} \|_{k=1,i=1}^{l,n}, \quad \tau_{ki} = \frac{y_k \tau_{ki}^1}{\psi_i}, \quad k = \overline{1,l}, \quad i = \overline{1,n},$$

satisfy conditions: the matrix τC is non-negative and indecomposable, the matrix $\tau C \tau$ is non-negative and does not contain zero column;

3) the conditions

$$\langle b_i, p^0\rangle = \langle \bar{b}_i, p^0\rangle, \quad i = \overline{1,l},$$

hold, where

$$\bar{B} = \| \bar{b}_{ik} \|_{i=1,k=1}^{n,l}, \quad \bar{B} = CB_1, \quad B_1 = \| b_{ik}^1 \|_{i=1,k=1}^{l},$$

$$b_{ks}^1 = y_s \sum_{i=1}^{n} \tau_{ki} C_{is}, \quad k,s = \overline{1,l}, \quad b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^{n},$$

$$\bar{b}_i = \{\bar{b}_{ki}\}_{k=1}^{n},$$

p^0 is a strictly positive vector constructed in the Theorem 1 for the matrix $\bar{B}$ instead of matrix B.

Necessity: Let there exist a strictly positive solution p^0 to the set of equations (1). Denote

$$y_i = \frac{\langle b_i, p^0\rangle}{\langle C_i, p^0\rangle}, \quad i = \overline{1,l},$$

and introduce the matrix

$$\tau_1 = \| \tau_{ki}^1 \|_{k=1,i=1}^{l,n}, \quad \tau_{ki}^1 = \frac{p_i^0 \psi_i}{\langle \psi, p^0\rangle}, \quad k = \overline{1,l}, \quad i = \overline{1,n}.$$

It is evident that $\sum_{i=1}^{n} \tau_{ki}^1 = 1, k = \overline{1,l}.$

A matrix $\tau = \| \tau_{ki} \|_{k=1,i=1}^{l,n}$ with matrix elements

$$\tau_{ki} = \frac{y_k \tau_{ki}^1}{\psi_i} = \frac{y_k p_i^0}{\langle \psi, p^0\rangle}, \quad k = \overline{1,l}, \quad i = \overline{1,n},$$

is such that the matrix

$$\tau C = \left\| \frac{y_k \langle C_s, p^0\rangle}{\langle \psi, p^0\rangle} \right\|_{k,s=1}^{l}$$

is nonnegative and indecomposable, a matrix

$$\tau C \tau = \left\| \frac{y_k p_i^0}{\langle \psi, p^0\rangle} \right\|_{k=1,i=1}^{l,n}$$

is nonnegative and does not contain zero rows.

It is not difficult to show that the vector y is a strictly positive proper vector of the matrix τC with a proper value 1, that is,

$$\tau C y = y. \tag{3}$$

Let us construct the matrix

$$\bar{B} = \| \bar{b}_{ik} \|_{i=1,k=1}^{n,l}, \quad \bar{B} = CB_1, \quad B_1 = \| b_{ks}^1 \|_{k=1,s=1}^{l},$$

where

$$b_{ks}^1 = y_s \sum_{i=1}^{n} \tau_{ki} C_{is} = \frac{y_s y_k \sum_{i=1}^{n} p_i^0 C_{is}}{\langle \psi, p^0\rangle}, \quad k,s = \overline{1,l},$$

$$\bar{b}_{ki} = \sum_{j=1}^{l} C_{kj} b_{ji}^1, \quad k = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,l}.$$

There hold equalities

$$\sum_{i=1}^{l} \bar{b}_{ki} = \psi_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

The conjugate problem

$$\sum_{k=1}^{l} \delta_k^0 \sum_{i=1}^{n} \tau_{ki} C_{is} = \delta_s^0, \quad s = \overline{1,l},$$

to the problem (3) has strictly positive solution $\delta^0 = \{\delta_s^0\}_{s=1}^{l}, \ \delta_s^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 C_{is}.$

In correspondence with the conditions of the Theorem 5.1.4 [5], let us construct the vector $\bar{p}^0 = \{\bar{p}_i^0\}_{i=1}^{n}$. We have

$$\bar{p}_i^0 = \sum_{k=1}^{l} \delta_k^0 \tau_{ki} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} p_i^0 C_{ik} \frac{y_k p_i^0}{\langle \psi, p^0\rangle} = p_i^0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Since

$$\bar{b}_{ki} = \sum_{j=1}^{l} C_{kj} b_{ji}^1 = \frac{\psi_k y_i \sum_{m=1}^{n} p_m^0 C_{mi}}{\langle \psi, p^0\rangle}, \quad k = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,l},$$

we have

$$\langle \bar{b}_i, p^0\rangle = \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{ki} p_k^0 = y_i \sum_{m=1}^{n} p_m^0 C_{mi}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} p_k^0 = \langle b_i, p^0\rangle.$$

The necessity is proved.

Sufficiency: If sufficient conditions of the Theorem (2) are valid, then we are in the conditions of the Theorem (1). From the Theorem (1) and the conditions of the Theorem (2) we obtain that the set of equations

$$\sum_{i=1}^{l} C_{ki} \frac{\langle \bar{b}_i, p\rangle}{\langle \bar{C}_i, p\rangle} = \psi_k, \quad k = \overline{1,n},$$

has a strictly positive solution p^0 satisfying conditions

$$\langle \bar{b}_i, p^0\rangle = \langle b_i, p^0\rangle, \quad i = \overline{1,l}.$$

This proves the Theorem.

Corollary 1. If p^0 is a strictly positive solution to the set of equations (1), then for the vectors b_i the representations

$$b_i = \bar{b}_i + d_i, \quad i = \overline{1,l},$$

hold, where

$$\sum_{i=1}^{l} d_i = 0, \quad \langle p^0, d_i \rangle = 0,$$

$$\bar{b}_i = \frac{\psi y_i \langle C_i, p^0 \rangle}{\langle \psi, p^0 \rangle}, \quad i = \overline{1,l}.$$

Corollary 2. For given strictly positive vectors ψ, y, p^0 and matrix C satisfying conditions (2) and the vector ψ having the representation $\psi = \sum_{i=1}^{l} C_i y_i, C_i = \{c_{ki}\}_{k=1}^{n}, i = \overline{1,l},$ the set of equations (1) has strictly positive solution p^0 if and only if there exist vectors $d_i, i = \overline{1,l},$ such that

$$b_i = \bar{b}_i + d_i, \quad \langle p^0, d_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1,l}, \quad \sum_{i=1}^{l} d_i = 0,$$

where

$$\bar{b}_i = \frac{\psi y_i \langle C_i, p^0 \rangle}{\langle \psi, p^0 \rangle}, \qquad i = \overline{1,l}.$$

Theorem 3. Suppose that the conditions of the Theorem 1 are valid. If additionally matrix elements of the matrix $\tau C \tau$ are strictly positive, the vector $p^0 = \{p_j^0\}_{j=1}^{n}$ being the solution to the set of equations (1) satisfies the condition

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 \psi_i = A, \quad A > 0,$$

then the following inequalities for components of vector p^0 are valid

$$p_j^0 \geq \frac{A \min\limits_{s,k} [\tau C \tau]_{sk}}{\max\limits_{s} \sum\limits_{j=1}^{n} [\tau C \tau]_{sj} \psi_j}, j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Proof: Due to the Theorem 5.1.4 [5] the components of the vector $p^0 = \{p_i^0\}_{i=1}^{n}$ of the solution to the problem (1) is given by the formula

$$p_i^0 = \sum_{k=1}^{l} \delta_k^0 \tau_{ki}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

where the vector $\delta^0 = \{\delta_k^0\}_{k=1}^{l}$ is strictly positive left Frobenius vector of the problem

$$\sum_{k=1}^{l} \delta_k^0 \sum_{i=1}^{n} \tau_{ki} C_{is} = \delta_s^0. \tag{6}$$

From (5) and (6) we have equalities

$$p_j^0 = \sum_{s=1}^{l} \delta_s^0 [\tau C \tau]_{sj}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$A = \sum_{j=1}^{n} p_j^0 \psi_j = \sum_{s=1}^{l} \delta_s^0 \sum_{j=1}^{n} [\tau C \tau]_{sj} \psi_j \leq$$

$$\max_s \sum_{j=1}^{n} [\tau C \tau]_{sj} \psi_j \sum_{s=1}^{l} \delta_s^0.$$

From here we obtain inequality

$$\sum_{s=1}^{l} \delta_s^0 \geq \frac{A}{\max\limits_{s} \sum\limits_{j=1}^{n} [\tau C \tau]_{sj} \psi_j}.$$

The equalities (7) give the inequalities

$$p_j^0 \geq \sum_{s=1}^{l} \delta_s^0 \min_{s,j} [\tau C \tau]_{sj} \geq \frac{A \min\limits_{s,k} [\tau C \tau]_{sk}}{\max\limits_{s} \sum\limits_{j=1}^{n} [\tau C \tau]_{sj} \psi_j}.$$

The Theorem is proved.

Statement of the problem

Let us assume that economy system functions during N periods, $N < \infty$. In the t-th period of economy operation demand vectors $C_i^t(\omega) = \{C_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^{n}, \quad i = \overline{1,l},$ are given on a probability space $\{\Omega, F, P\}$. We also assume that consumption in the t-th period is characterized by some random vector $y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^{l}$ every component of which is strictly positive, that is $y_i^t(\omega) > 0, i = \overline{1,l}.$

This vector we call the vector of degrees of satisfaction of consumers' needs (see [4-5]). So, the supply vector in the t-th period is given by the formula

$$\psi^t(\omega) = \sum_{i=1}^{l} C_i^t(\omega) y_i^t(\omega).$$

Below we formulate a theorem giving sufficient conditions of the existence of economy dynamics and that is a consequence of previous results.

Theorem 4. Let the set of vectors $C_i^t(\omega), \ i = \overline{1,l},$ being the columns of the matrix

$C^t(\omega) = \| C^t_{ki}(\omega) \|^{n,l}_{k=1,i=1}$ satisfy the inequalities

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{l} C^t_{ks}(\omega) > 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad t = \overline{1,N}, \\ &\sum_{k=1}^{n} C^t_{ki}(\omega) > 0, \quad i = \overline{1,l}, \quad t = \overline{1,N}, \end{aligned} \tag{8}$$

and let the vectors $y^t(\omega) = \{y^t_i(\omega)\}^l_{i=1}$ be strictly positive for every $\omega \in \Omega$.

If for every matrix $\tau^t_1 = \tau^t_1(\omega)$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} \tau^{1,t}_{ki}(\omega) = 1, \quad k = \overline{1,l}, \quad t = \overline{1,N},$$

and such that the matrix $\tau^t = \tau^t(\omega) = \left\| \tau^t_{ki}(\omega) \right\|^{n,l}_{k=1,i=1}$, elements of which are constructed by the rule

$$\tau^t_{ki}(\omega) = \frac{y^t_k(\omega)\tau^{1,t}_{ki}(\omega)}{\sum\limits_{i=1}^{l} C^t_{ki}(\omega) y^t_i(\omega)},$$

is such that the matrix $\tau^t C^t$ is nonnegative and indecomposable, the matrix $\tau^t C^t \tau^t$ is nonnegative and does not contain zero columns, then for the matrix $B^t(\omega) = \| b^t_{ik}(\omega) \|^{n,l}_{i=1,k=1}$ having representation $B^t = C^t B^t_1$, where

$$B^t_1 = \| b^{1,t}_{ik} \|^{l}_{i,k=1},$$

$$b^{1,t}_{ks} = y^t_s(\omega) \sum_{i=1}^{n} \tau^t_{ki}(\omega) C^t_{is}(\omega),$$

the set of equalities

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l} \frac{C^t_{ki}(\omega)}{\left\langle p^t, C^t_i(\omega) \right\rangle} \left\langle p^t, b^t_i \right\rangle = \psi^t_k(\omega), \\ &k = \overline{1,n}, \quad t = \overline{1,N}, \end{aligned}$$

have strictly positive solution with probability 1 with respect to price vectors $p^t = \{p^t_1, \ldots, p^t_n\}$.

It is very important to know under which conditions spatial and time arbitrage opportunities for economic agents are absent in the economy system. We suppose that in the t-th period of the economy operation the k-th component $\overline{p}^t_k$ of random equilibrium price vector $\overline{p}^t$ defines value of the k-th goods, $k = \overline{1,n_t}$. We assume that the first component $\overline{p}^t_1$ of this vector defines equilibrium price of money, and $\psi^t_1(\overline{p}^t)$ is the supply of money in the t-th period of economy operation. We also assume that short sales of risk assets are only permitted within the limits of every period of the economy operation.

On a probability space $\{\Omega, F, \overline{P}\}$, where evolution of prices of goods is given in the Theorem 4, denote the evolution of prices of subset of $n_0 \le n_t$, $N_0 \le t \le N_1$, goods by the rule

$$\begin{aligned} &S_t = \left\{ \overline{p}^t_{i_1}, \ldots, \overline{p}^t_{i_{n_0}} \right\}, \quad N_0 \le t \le N_1, \\ &i_k < i_{k+1}, \quad k = \overline{1, n_0 - 1}. \end{aligned} \tag{9}$$

We introduce evolution of risk-free asset by the law

$$B_t = \prod_{i=N_0}^{t} \left(1 + p^i_1\right), \quad t = \overline{N_0, N_1}, \tag{10}$$

where p^t_1 is an equilibrium price of money in the t-th period of economy operation.

Definition. We call the economy dynamics defined in the Theorem 4 *non-arbitrage* if for any subset of goods numbering by indexes $i_1, \ldots, i_{n_0}$ and any numbers $1 \le N_0 < N_1 \le N$ the evolution of prices of which is described by the law (9) and evolution of risk-free asset is given by the law (10) the set of self-financed arbitrage strategies without short selling between periods of economy operation is empty.

Now we give a statement of the general form of absence of arbitrage opportunities in dynamical systems.

Theorem 5. Let on a probability space $\{\Omega, F, P\}$ with filtration F_n, $n = \overline{1,N}$, random evolution of risk-free asset be defined by the law B_n, $n = \overline{1,N}$, satisfying the condition: there exists non-random constant $D < \infty$ such that $1 \le B_n \le D$, $n = \overline{1,N}$, $\omega \in \Omega$, and let evolution of prices of $n_0 \ge 1$ risk assets be given by the law $S_n = \left\{ S^i_n \right\}^{n_0}_{i=1}$, $n = \overline{1,N}$.

If $\left\{ \dfrac{S_n}{B_n}, F_n \right\}$, $n = \overline{1,N}$, is a supermartingale, then the set of self-financed arbitrage strategies without short selling is empty.

Theorem 6. The economic dynamics defined in the Theorem 4 is non-arbitrage one if with probability 1 the following inequalities

$$\overline{p}^{t+1}_k \le \overline{p}^t_k \left(1 + f^{t+1}\left(\overline{p}^{t+1}_1\right)\right), \quad k = \overline{2,n_t}, \quad t = \overline{1,N},$$

are valid, where $\bar{p}^t = \{\bar{p}_k^t\}_{k=1}^{n_t}$ is an equilibrium price vector in the t-th period of economy operation, $f^t(x), t = \overline{1,N}$, is the set of nonnegative functions satisfying conditions $0 \le f^t(x) \le x, t = \overline{1,N}$.

Denote by

$$r_0^t = r_0^t(\omega) = \min_i \psi_i^t(\omega),$$
$$R_0^t = R_0^t(\omega) = \max_i \psi_i^t(\omega),$$
$$A^t = A^t(\omega) = \sum_{i=1}^n p_i^t(\omega)\psi_i^t(\omega).$$

There hold inequalities

$$p_i^t(\omega) \le \frac{A^t(\omega)}{r_0^t(\omega)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Theorem 7. Let the set of vectors $C_i^t(\omega)$, $i = \overline{1,l}$, being the columns of the matrix $C^t(\omega) = \| C_{ki}^t(\omega) \|_{k=1,i=1}^{n,l}$ satisfy the inequalities (8) and let the vectors $y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l$ be strictly positive for every $\omega \in \Omega$. Moreover, let the inequalities

$$\min_{s,j}[\tau^t C^t \tau^t]_{sj}(\omega) > 0,$$
$$\max_{s,j}[\tau^t C^t \tau^t]_{sj}(\omega) < \infty,$$
$$t = \overline{1,N}, \quad \omega \in \Omega,$$

are valid with probability 1.

If for every matrix $\tau_1^t = \tau_1^t(\omega), t = \overline{1,N}$, satisfying conditions:

$$\sum_{i=1}^n \tau_{ki}^{1,t}(\omega) = 1, \quad k = \overline{1,l}, \quad t = \overline{1,N},$$

and such that the matrix $\tau^t = \tau^t(\omega) = \| \tau_{ki}^t(\omega) \|_{k=1,i=1}^{n,l}$, elements of which are constructed by the rule

$$\tau_{ki}^t(\omega) = \frac{y_k^t(\omega)\tau_{ki}^{1,t}(\omega)}{\sum_{i=1}^l C_{ki}^t(\omega) y_i^t(\omega)},$$

is such that the matrix $\tau^t C^t$ is nonnegative and indecomposable, the matrix $\tau^t C^t \tau^t$ is nonnegative and does not contain zero columns, then for the matrix $B^t(\omega) = \| b_{ik}^t(\omega) \|_{i=1,k=1}^{n,l}$ having representation $B^t = C^t B_1^t$, where

$$B_1^t = \| b_{ik}^{1,t} \|_{i,k=1}^l,$$
$$b_{ks}^{1,t} = y_s^t(\omega) \sum_{i=1}^n \tau_{ki}^t(\omega) C_{is}^t(\omega),$$

economy dynamics, defined in the Theorem 4, is non-arbitrage if with probability 1 the set of inequalities

$$\frac{A^{t+1}}{r_0^{t+1}} \le \frac{A^t \min_{s,j}[\tau^t C^t \tau^t]_{sj}(\omega)}{\max_s \sum_{j=1}^n [\tau^t C^t \tau^t]_{sj}(\omega)\psi_j^t(\omega)} \times \left(1 + \delta \frac{A^{t+1} \min_{s,j}[\tau^{t+1} C^{t+1} \tau^{t+1}]_{sj}(\omega)}{\max_s \sum_{j=1}^n [\tau^{t+1} C^{t+1} \tau^{t+1}]_{sj}(\omega)\psi_j^{t+1}(\omega)}\right), \quad t = \overline{1,N}, \tag{11}$$

are valid for some $0 < \delta < 1$.

Proof: provided by inequalities (11) the following inequalities

$$p_i^{t+1} \le p_i^t(1 + \delta p_1^{t+1}), \quad i = \overline{2,n},$$

are valid with probability 1 due to the Theorem 3. Using the Theorem 6 with $f^t(x) = \delta x, 0 < \delta < 1$, we obtain the proof of the Theorem.

References

1. *Harrison J.M., Pliska S.R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Processes and their Application. – 1981. – II ¹3. - P. 215-260

2. *Dalang R.S., Morton A.,Willinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities models // Stochastics and Stochastics Reports. – 1990. – 29, ¹2. P. 185- 201

3. *Shiryaev A.N.* The fundamentals of stochastic financial mathematics: 2 vol. – M. Phasis, 1998, - Vol. 2 – 544p.

4. *Gonchar N.S.* Mathematical Model of Stock Market. // Cond. Matt. Phys. – 2000. – 3,¹3(23). – P.461-496

5. *Gonchar N.S.* Mathematical Foundations of information economics. K.: Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 2008. – 468p.

Стаття надійшла до редколегії 25.12.2012.

УДК 532.517

Городецька Н.С.,[1] д.ф.-м.н., с. н. с.
Нікішов В.І.,[1] чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.
Ткаченко Л.В.,[1] пров. інж.

Розвиток вихорів Гертлера у примежовому шарі над увігнутою поверхнею.

В статті представлено результати чисельного моделювання розвитку вихорів Гертлера, які виникають в круговій течії Куетта між коаксіальними циліндрами при різкій зупинці зовнішнього циліндра. Проведено аналіз впливу нелінійних ефектів на розвиток вихорів і формування грибоподібних структур. Розглянуто нестійкість вихорів (нестійкість Екхауза), розвиток якої призводить до зміни довжини хвилі вихрової системи.

Ключові слова: примежовий шар, Гертлера вихорі, грибоподібні структури.

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 03680, м. Київ, Желябова 8/4

e-mail: vinihm@gmail.com

Статтю представив член редколегії докт. фіз.-мат. наук, проф.. Маципура В.Т.

Gorodetskaya N.S.,[1] Doc. Sci., Senior Sci.
Nikishov V.I., [1]Corr. Mem. of NAS., Dr.Sci., Prof.,
Tkachenko L.V.,[1] Senior engineer

Development of Görtler vortices in boundary layer over concave surface

The results of numerical simulation of the development of Görtler vortices arising in circular Couette flow between coaxial cylinders at sharp stop of the external cylinder are presented. The analysis of the influence of nonlinear effects on the development of vortices and the formation of mushroom-like structures is fulfilled. Instability of vortices (Eckhaus instability) is considered. Its development leads to the change of wavelength of vertical system.

Keywords: boundary layer, Görtler vortices, mushroom-like structures.

[1] Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine, 8/4 Zheliabov str., Kiev, 03680, Ukraine
e-mail: vinihm@gmail.com

Примежовий шар із увігнутими лініями току виникає при обтіканні складних тіл потоком рідини, зокрема, над лопатками газових турбін, у камерах згорання, дифузорах. У таких примежових шарах розвивається конвективна (у даному випадку відцентрова) нестійкість, внаслідок якої в них формуються поздовжні вихорі, з вісю обертання співпадаючою з напрямком основної течії (рис.1).

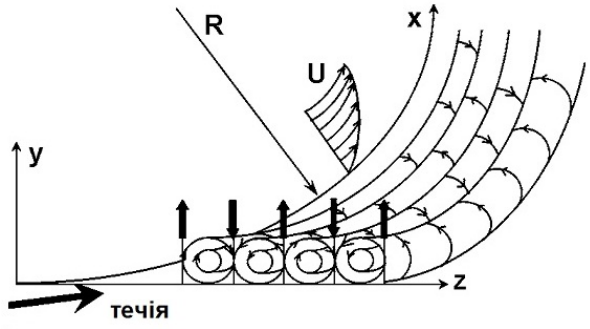


Рис. 1. Схема розташування вихорів над увігнутою стінкою.

Вплив вихорів Гертлера, які знаходяться на лінійній стадії розвитку, на процеси тепло-масообміну в примежовому шарі відносно невеликий: підсилення цих процесів в області між вихорами, де течія направлена від стінки (див. рис. 1), компенсується зменшенням інтенсивності в області, де течія направлена до стінки. З розвитком нестійкості і зростанням енергії вихорів стають визначальними нелінійні ефекти і в цілому процеси тепло масообміну інтенсифікуються [1]. На нелінійній стадії розвитку вихорів у примежовому шарі формуються так звані “грибоподібні” структури, які характеризуються значними зсувами потоку біля їх границь. В області, де потік є направленим від стінки, має місце викидання низькошвидкісної рідини від стінки, внаслідок чого профіль швидкості основної течії різко змінюється і виникає точка перегину. В результаті профіль швидкості стає нестійким. На бокових поверхнях грибоподібних структур внаслідок існування зустрічних потоків, обумовлених дією вихорів, виникають значні зсуви швидкості [2], які приводять до виникнення вторинної нестійкості вихорів і турбулізації потоку.

Нелінійні процеси переносу імпульсу, тепла та маси вниз по потоку тісно пов’язані з

© Н.С. Городецька, В.І. Нікішов, Л.В. Ткаченко, 2013

початковими умовами, зокрема, довжина хвилі початкових збурень та їх енергія є домінуючими параметрами, що визначають нелінійний розвиток вихорів [3]. При штучній генерації вихорів важливе значення має співвідношення між товщиною примежового шару та відстанню місця вводу збурень від поверхні [4]. Вибір цих параметрів стає важливим з точки зору розвитку методів управління процесами переносу в багатьох технічних установках.

В даній роботі проведено чисельне моделювання розвитку поздовжніх вихорів. Основну увагу зосереджено на вивченні внутрішньої структури течії із поздовжніми вихорами, формування грибоподібних структур та їх розвитку.

Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглядається усталена осесимметрична течія Куетта в'язкої нестисливої рідини між коаксіальними циліндрами, які обертаються в одному напрямку з кутовою швидкістю Ω. Радіуси внутрішнього за зовнішнього циліндрів дорівнюють r_1 та r_2, відповідно. Розташування осей координат представлено на рис. 2.

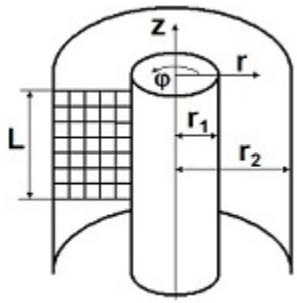


Рис.2. Розташування системи координат та розрахункової області.

Тут вертикальна вісь z направлена вверх, радіальна вісь r направлена вздовж радіуса з початком відліку на вісі обертання, вісь φ направлена вздовж кола. Довжина циліндрів є необмеженою. В момент $t=0$ зовнішній циліндр миттєво зупиняється і на його внутрішній поверхні починає формуватись пограничний шар. Пристінна течія завдяки дисбалансу відцентрових сил і сил тиску стає нестійкою по відношенню до тривимірних поздовжніх збурень – вихорів Тейлора-Гертлера. Система рівнянь Нав'є-Стокса, що описує розвиток осесиметричної течії в зазорі між циліндрами, записана в змінних функція току ψ і завихреності ζ (φ- тої компоненти вектора завихреності) має вигляд [4]

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial r}+w\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\frac{1}{r^4}\frac{\partial V}{\partial z}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+u\frac{\partial V}{\partial r}+w\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

$$r^2\zeta=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$V=rv.$$

Ці рівняння представлено в безрозмірній формі введення характерних масштабів довжини $L_{ch}=r_2$ та часу $T_{ch}=\Omega_2^{-1}$. Число Рейнольдса Re в даному випадку дорівнює $\mathrm{Re}=\Omega_2 r_2^2/\nu$.

Для чисельних розрахунків течії між нескінченими циліндрами використовувався відомий підхід [5], в якому застосовувалось періодичне продовження обмеженої області розрахунків довжиною L (рис.2) вздовж вісі z. З умов непротікання на стінках циліндрів випливає, що функція току є постійною на них. Розглядається випадок, коли є відсутніми витрати вздовж вісі z, тоді

$$\psi=0 \text{ при } r=r_1/r_2 \text{ и } r=1,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \text{ при } r=r_1/r_2 \text{ и } r=1.$$

Граничні умови для циркуляції визначаються конкретною задачею. В даному випадку досліджувався випадок, коли рідина рухається в зазорі в режимі "твердого" обертання, тоді для поздовжньої швидкості маємо

$$v(0,r)=r \quad \text{при} \quad r_1/r_2<r<1.$$

Граничні умови для завихреності використовувались у вигляді, запропонованому Тома або Йенсена [6]. Особливості чисельної схеми та алгоритму розрахунків описано в [4].

Відомо, що в початкові моменти часу після різкої зупинки усі зміни параметрів потоку зосереджені у вузькому пристінному шарі біля поверхні циліндру і розв'язок має сингулярний характер. Враховуючи цю особливість розвитку течії, збурення вносились в потік не в момент зупинки циліндра, а з певним запізненням, коли профіль швидкості стає достатньо плавним. В якості збурень, які вносились в потік, використовувались осесиметричні збурення завихреності, які розташовувались вздовж циліндричної поверхні, яка знаходилась на заданій відстані від поверхні циліндра. Інтенсивність збурень змінювалась періодично вздовж вертикальної (трансверсальної) координати із заданим періодом і описувалась рівнянням

$$\zeta(T_m, r_d, z) = \sin\frac{2\pi z}{\lambda}\cdot 10^{-k}$$

де r_d - радіус циліндричної поверхні, на якій розташовувались збурення, λ - довжина хвилі збурень, T_m - час вводу збурень, k - параметр, що характеризує інтенсивність збурень.

Основні розрахунки проводились для сітки розмірами 600×200, частина розрахунків було виконано для сітки 140×200. Величини просторових кроків дорівнювали $\Delta r = 0.001$, $\Delta z = 0.005$, крок по часу був $\Delta t = 0.001$.

3. Поле течії у примежовому шарі. Вплив вихорів Гертлера.

Одним із характерних параметрів задачі є товщина втрати імпульсу, яку розраховували по формулі

$$\theta(t) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{v(r,t)}{v_0(r)}\left(1-\frac{v(r,t)}{v_0(r)}\right) r\,dr.$$

Товщина втрати імпульсу для течії, що розглядається, відрізняється від випадку течії над плоскою поверхнею, тобто від течії Блазіуса. На рис. 3 представлено криву, яка характеризує зміну товщини втрати імпульсу для нестаціонарної течії Куетта в часі. На рисунку також приведено аналогічну величину для течії Блазіуса. Відмінність кривих обумовлена характером течії між циліндрами, коли після зупинки зовнішнього циліндра у профілі швидкості виникає максимум швидкості на певній відстані від циліндра [4].

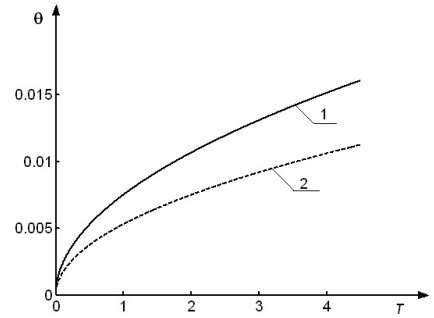


Рис. 3. Зміна товщини втрати імпульсу в часі. Крива 1 відноситься до нестаціонарної течії Куетта, крива 2 – до течії Блазіуса.

Слід відмітити, що результати досліджень характеристик розвитку поздовжніх вихорів у неусталеної течії Куетта можна переносити на випадок просторової течії Блазіуса над увігнутою поверхнею. Але, дана аналогія справедлива, якщо масштаб, що характеризує розвиток нестаціонарного примежового шару $\delta \approx (\nu/t)^{1/2}$, де ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості, малий в порівнянні з радіусом циліндра. В цьому випадку $\delta/r << 1$ і впливом кривизни на в'язкий примежовий шар можна знехтувати. Ефективність підходу, що полягає в перенесенні результатів розрахунку характеристик поздовжніх вихорів, які формуються в нестаціонарній течії Куетта, на просторовий випадок, коли розглядається течія Блазіуса над увігнутою поверхнею, доведена в роботах [3,7]. В них продемонстровано кількісну узгодженість результатів розрахунків з відомими даними експериментальних досліджень.

Було показано, що після формування поздовжніх вихорів, поява яких обумовлена введенням штучних збурень, починається стадія їх розвитку, яка описується лінійними рівняннями (лінійна стадія). Далі під дією нелінійних ефектів виникають грибоподібні структури, які добре ідентифікуються при виконанні експериментальних робіт [2]. В подальшому ці когерентні структури руйнуються внаслідок розвитку вторинної нестійкості, але існує інтервал, у якому дані структури є домінуючими.

На рис. 4 представлено послідовність картин ізоліній поздовжньої швидкості для різних моментів часу. Товщина втрати імпульсу в момент введення збурень дорівнювала $\theta = 0.0053$ і відповідно товщина примежового шару $\delta = 0.04$. Параметр, який характеризує інтенсивність збурень, дорівнював $k = -1$. Відстань місця введення збурень від поверхні

зовнішнього циліндру складала $1-r_d=0.02$, тобто знаходилось в примежовому шарі. Величина зазору між циліндрами була $1-r_1=0.6$. Характерний параметр довжини для приведення величин до безрозмірного виду дорівнював радіусу зовнішнього циліндра r_2.

Поява грибоподібних структур спостерігається в області, де течія по нормалі до поверхні направлена від стінки. Під впливом нелінійних ефектів має місце значна інтенсифікація інжекції рідких частинок, у яких поздовжня компонента швидкості є малою. Потім рідкі частинки розтікаються у площині φ,z і вершина області стає утовщується, і нарешті формується грибоподібна структура; поблизу її ніжки рідкі частинки з малою поздовжньою швидкістю переміщуються від поверхні і повертаються по напрямку до поверхні в області максимального зсуву швидкості, яка приймає форму "капелюха" (рис. 4b та рис. 4c).

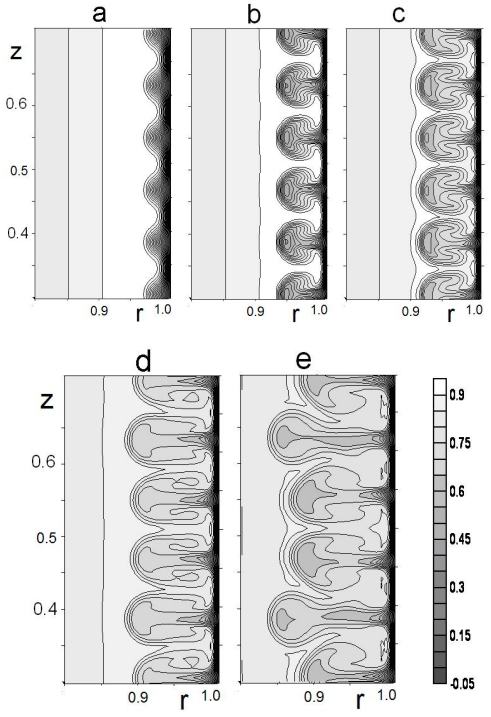


Рис. 4. Картини ізоліній повздовжньої швидкості $v(r,z)$ при введенні збурень в момент $T_m=0.5$. Картини, позначені буквами, відповідають таким моментам часу: a – $T=2$; b – $T=2.7$; c – $T=3$; d – $T=4$; e - $T=4.5$. Час приведено до безрозмірного виду, $T=t\Omega$.

Інжекція рідини з низькою поздовжньою швидкістю призводить до того, що у профілі поздовжньої швидкості виникає точка перегину.

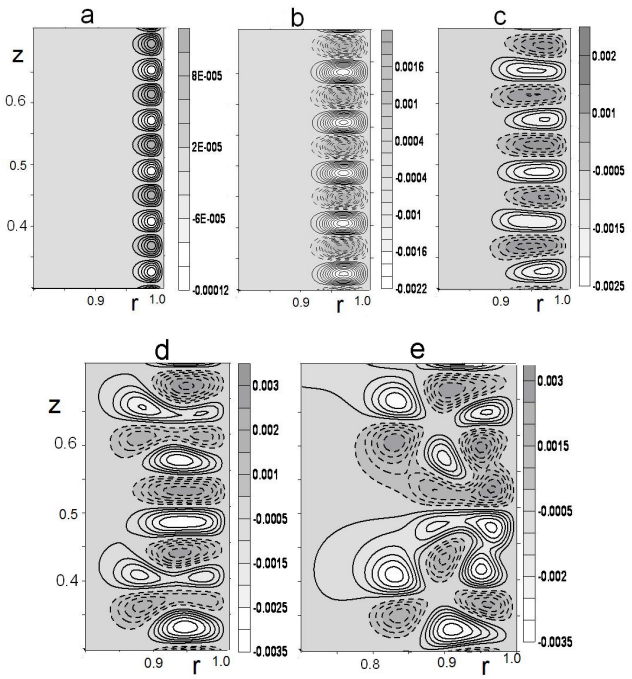


Рис.5. Картини ліній току $\psi(r,z)$ при введенні збурень в момент $T_m=0.5$. Картини, позначені буквами, відповідають таким моментам часу: a – $T=1.5$; b – $T=2$; c – $T=4$; d – $T=4.5$; e - $T=5$. Час приведено до безрозмірного виду, $T=t\Omega$.

Біля області підйому рідини виникають шари із значними зсувами швидкості вздовж нормального та трансверсального напрямків (рис. 4b та рис 4c). Наявність значних зсувів швидкості призводить до розвитку вторинної нестійкості вихорів: виникають підковоподібні вихорі або відбуваються низькочастотні осциляції вихрової системи. Це спричиняє виникнення хаотизації течії, її руйнування та турбулізацію потоку.

Зупинимось ще на одному механізмі вторинної нестійкості вихорів Гертлера, коли вони стають нестійкими по відношенню до трансверсальних збурень (нестійкість Екхауза-Eckhaus instability). Розвиток цієї нестійкості, яка діє на нелінійній стадії, обумовлює об`єднання або розщеплення вихорів, тобто зміну довжини хвилі. Відмітимо, що таку зміну довжини хвилі було зафіксовано при виконанні експериментальних досліджень [8,9]. Послідовність картин розвитку поздовжніх структур і подальшої зміни довжини хвилі

представлено на рис. 5. Параметр, який характеризує інтенсивність збурень, дорівнював $k=-1$. Відстань місця введення збурень від поверхні зовнішнього циліндру складала $1-r_d=0.006$, тобто місце було розташовано близько до стінки. Величина зазору між циліндрами була $1-r_1=0.6$.

Аналізуючи результати розрахунків функцій току, треба зазначити, що вплив нелінійних ефектів призводить до нерівномірності розвитку вихорів (рис. 5c) і картина функцій току змінюється. Насамперед це стосується центральної частини вихорів, яка звужується (рис. 5d). З часом ці викривлення нарощуються, вихорі витягуються в радіальному напрямку, і зростання розмірів не є однаковим в трансверсальному напрямку. Далі розміри окремих пар вихорів різко збільшуються вздовж радіального напрямку і в центральній частині вони стають значно тоншими. В той же час товщина центральної частини пар вихорів, які розташовані поруч, стає значно більшою. В результаті зростаюча вихрова пара приймає форму “метелика”, в якому розміри у верхній частині суттєво перебільшують довжину хвилі вихорів (рис. 5d). Потім вихорі у метеликоподібних структурах розпадаються, зовнішні частини цих вихрових пар втрачають зв'язок з нижніми частинами і за рахунок нелінійної взаємодії виникає об’єднання вихорів одного знаку, і розміри нових утворених вихрових структур стають суттєво більшими за початкову довжину хвилі.

Виникнення грибоподібних структур і їх подальша еволюція призводить до появи метеликоподібних структур і, відповідно, до суттєвого зростання товщини пограничного шару. Таке локальне збільшення товщини втрати імпульсу виявлено при проведенні експериментальних досліджень [2]. На рис. 6 представлено розраховану залежність осередненої в трансверсальному напрямку товщини втрати імпульсу $\bar{\theta}$ від часу при різних значеннях початкової енергії штучних збурень.

Видно, що осереднена у трансверсальному напрямку товщина втрати імпульсу починає суттєво відрізняється від незбурених величин, коли має місце вплив нелінійних ефектів. Як і слід було чекати, відхилення від незбуреної кривої спостерігаються тим раніше, чим більше початкова енергія збурень. Треба враховувати, що в області, де нормальна компонента швидкості направлена до стінки, профіль швидкості є більш наповнений, що призводить до локального зменшення $\bar{\theta}$.

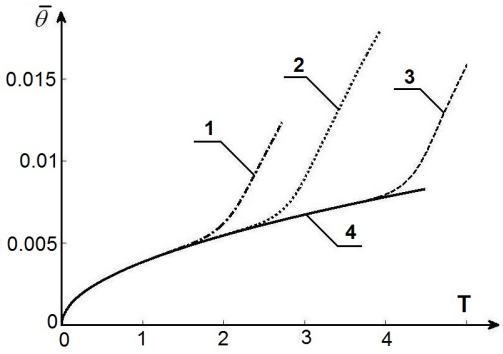


Рис.6. Залежність осередненої в трансверсальному напрямку товщини втрати імпульсу від часу для різних початкових енергій збурень. Час вводу збурень $T_m=0.5$, місце їх вводу $1-r_d=0.06$. Суцільна крива відповідає випадку відсутності збурень, крива 1- інтенсивності початкових збурень, що визначаються параметром $k=-1$, крива 2 - $k=0$, крива 3 - $k=2$, крива 4 - $k=4$.

Незважаючи на ці локальні зменшення, коли нелінійні ефекті є суттєвими, осереднена товщина втрати імпульсу зростає і відхиляється від незбуреної кривої. Можна зробити висновок, що відхилення залежності товщини втрати імпульсу від незбуреної кривої може бути використано в якості критерію, що характеризує вплив нелінійних ефектів.

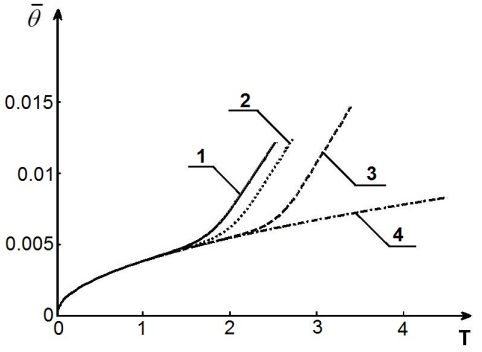


Рис. 7. Залежність осередненої в трансверсальному напрямку товщини втрати імпульсу від часу для різних місць вводу збурень. Час вводу збурень $T_m=0.5$, інтенсивність початкових збурень визначається параметром $k=-1$. Крива 1 відповідає місцю вводу $(1-r_d)=0.006$, крива 2 - $(1-r_d)=0.02$, крива 3 - $(1-r_d)=0.05$, крива 4 – незбуреній течії.

На рис. 7 представлено результати розрахунків залежності осереднених у трансверсальному напрямку значень товщини втрати імпульсу від часу для різних місць вводу збурень. Видно, що результати підтверджують наведений вище висновок про те, що під впливом нелінійних ефектів відбувається різке збільшення товщини втрати імпульсу. Відхилення від кривої, яка відповідає відсутності збурень, може бути використано в якості критерію, що характеризує вплив нелінійних ефектів на розвиток вихорів Гертлера. Відмітимо, що відхилення величини $\overline{\theta}$ від незбурених значень починаються раніше для випадку, коли відстань місця вводу збурень дорівнює $(1-r_d)=0.006$, тобто коли відстань від поверхні практично дорівнює товщині втрати імпульсу $\theta=0.0053$ в момент вводу збурень. У випадках, коли збурення вводились на більшій відстані від поверхні (товщина примежового шару в момент вводу збурень складала $\delta=0.04$), відхилення від незбуреної кривої спостерігалось пізніше, що свідчить про меншу швидкість зростання енергії вихорів і більш пізнім часом початку нелінійної стадії.

Висновки

В роботі розглянуто особливості розвитку вихорів Гертлера в пограничному шарі. Основну увагу зосереджено на стадії розвитку, коли під впливом нелінійних ефектів формуються грибоподібні структури. Показано, що в околі цих структур виникають шари із сильними зсувами швидкості вздовж нормального та трансверсального напрямків.

Розглянуто нестійкість вихорів до трансверсальних збурень (нестійкість Екхауза). Продемонстровано, що її розвиток призводить до збільшення довжини хвили вихрової системи.

Показано, що осереднена товщина втрати імпульсу різко зростає під впливом нелінійних ефектів. Запропоновано використовувати відхилення цієї величини від незбурених величин в якості критерію, який характеризує вплив нелінійних ефектів. Проведено аналіз впливу початкової енергії збурень, місця введення збурень на осереднену товщину втрати імпульсу .

Список використаних джерел

1. Liu J.T.C. Heat transfer in a strongly non-linear spatially developing longitudinal vortices system. / Liu J.T.C., Lee K. // Phys. Fluids.-1995. -**7**.- P. 559–599.

2. Swearingen J. D. The growth and the breakdown of streamwise vortices in the presences of a wall./ Swearingen J. D., Blackwelder R. F. // J. Fluid Mech.-1987.-**182.-** P. 255-290.

3. Sabry A.S. Longitudinal vorticity elements in boundary layers: Non-linear developments from initial Görtler vortices as a prototype problem./ Sabry A.S., Liu J.T.C.// J. Fluid Mech.-1991.- **231**.- P. 615–663.

4. Gorodetskaya N.S. Numerical simulation of the development of Taylor-Görtler vortices in unsteady Couette flow. 1. Effect of initial energy of perturbations./ / Gorodetskaya N.S., Nikishov V.I., Tkachenko L.V.// Applied Hydromechanics.- 2012.- **14 (86)**, №2.- P. 3-16. 2. Different parameters of perturbation generation. / Gorodetskaya N.S., Nikishov V.I., Tkachenko L.V.// Applied Hydromechanics.-2012,-**14(86)**, №3.-P. 37-44.

5. Liu D.C.S. Numerical experiments on time-dependent rotational Couette flow. /Liu D.C.S., Chen C.F. J.// Fluid Mech.- 1973.- **59**.- P.77-95.

6. Roache P. Computational Hydrodynamics.- Moscow: Mir, 1980.- 616 p.

7. Kozlov L. F. Experimental study of the generation of Gortler vortices in an unsteady boundary layer./ Kozlov L. F., Glushko V.N., Nikishova O.D. // Gidromekhanika.- 1982.-**45**.- P. 61-65.

8. Mitsudharmadi H. Splitting and merging of Görtler vortices / Mitsudharmadi H., Winoto S. H., Shah D. A.// Phys. Fluids.- 2005.- **17**, 124102.- P. 1-12.

9. Inagaki K. An experimental study of the transition region of the boundary-layer along a concave wall. / Inagami K., Aihara Y. // Eur. J. Mech. B/Fluids.- 1995.- **14.-** P.143-168.

Надійшла до редколегії 25.12. 2012

УДК 539.3

Горошко О. О. [1], д.ф.-м.н. проф.,
Кикоть* С. В. [2], к.ф.-м.н.

Стійкість та коливання трубопроводу з малою згинною жорсткістю

У статті досліджуються коливання трубопроводу з потоком рідини, який моделюється пружною балкою, наділеною малою згинною жорсткістю. Побудовано безрозмірні параметри оцінки малої згинної жорсткості трубопроводу. Встановлено залежності параметрів які характеризують коливний процес та стійкість руху трубопроводу, від швидкості руху рідини та жорсткості трубопроводу. Встановлені критичні швидкості рухомого навантаження.

Ключові слова: трубопровід, рухоме навантаження, двохвильовий коливний процес, частота коливань, ексцес, критична швидкість.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д.
[2] Національний транспортний університет, 01010,м. Київ, вул.Суворова, 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Oleg O.Goroshko[1], Dr.Sc., Professor,
Sergiy V. Kykot'[2], Ph.D.,

Stability and oscillations of a conduit with small bending rigidity

The paper considers oscillations of a conduit with fluid flow simulated by an elastic beam with small bending rigidity. Some dimensionless estimations of small bending rigidity are obtained. The dependencies of the parameters characterizing oscillation process and conduit stability on the fluid flow velocity and the bending rigidity are determined. The estimations of the critical velocities of the moving loading are obtained.

Key words: conduit, moving loading, double wave oscillation process, oscillation frequency, excesses, critical velocity.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
[2] National Transport University, 01010, Kiev, Suvorova 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Маципура В.Т.

Вступ. Серед наближених методів у різних прикладних та теоретичних дослідженнях застосовуються методи, побудовані на використанні рівнянь, подібних за структурою рівнянням основних задач, що мають точні розв'язки. Деякі з цих методів набули подальшого розвитку в математичному аналізі.

Вартий уваги є метод започаткований у 1926 році Вентцелом, Крамерсом та Бриллюеном – метод ВКБ (WKB), який було застосовано до хвильового рівняння Шредінгера [1]. За цим методом у рівнянні $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+Q^2(t)\psi(t)=0$ переходять від змінних (ψ, t) до нових змінних (φ, w) за формулами $\psi = q^{-1/2}(t)\varphi(w)$, $w(t)=\int^t q(\tau)d\tau$ та одержують рівняння виду: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}+(1+\varepsilon)\varphi=0$.

У загальному випадку маємо похибку

$$\varepsilon=\frac{Q^2(t)-q^2(t)}{q^2(t)}+q^{-3/2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(q^{-1/2}\right).$$

Розв'язок вихідного рівняння будується у формі

$$\psi = D\,q^{-1/2}\cos\int^t q(\tau)d\tau\ .$$

При практичному застосуванні та повільній зміні функції $Q(t)$ значення параметра ε достатньо малі, що сприяло широкому застосуванні цього методу.

Метою даної роботи є побудова спрощеної моделі динаміки трубопроводу малої згинної жорсткості з рухомою рідиною та дослідження поведінки такої механічної системи при різних швидкостях руху потоку рідини.

Вихідні передумови. Власні коливання трубопроводу з потоком рідини, який

© О.О. Горошко, С.В. Кикоть, 2013

моделюється пружною балкою, наділеною згинною жорсткістю EJ, описуються загальноприйнятим диференціальним рівнянням [2,3,7].

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(T-pA-\rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \quad (1)$$

де $\rho=\rho_1+\rho_2$ – сумарна погонна маса труби та рухомого навантаження, T – поздовжній натяг, pA – складова, що характеризує поздовжній натяг залежно від різних конструкційних та фізичних факторів, v – швидкість протікання рідини.

При малій згинній жорсткості рівняння (1) можна значно спростити і провести дослідження коливань та стійкості трубопроводу з достатньою для практичних застосувань точністю. З цією метою розглянемо диференціальне рівняння поперечних коливань трубопроводу з нерухомою рідиною, яке записується у вигляді

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \quad (2)$$

Класичний розв'язок рівняння (2) у випадку шарнірного закріплення кінців трубопроводу, має вигляд

$$u_n\left(x,t\right)=\sum_k a_k \sin\lambda_k \cos\left(\omega_k t+\varphi_k\right), \quad (3)$$

де $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$ – власні числа, $k=1,2,3,...\infty$.

Власні частоти розтягнутого зусиллям T трубопроводу визначаємо формулами

$$\omega_k{}^2=\lambda_k{}^2\frac{T}{\rho}+\lambda_k{}^4\frac{EJ}{\rho}, \quad (4)$$

де перший доданок є квадрат частоти струни, а другий – квадрат частоти балки з відповідними параметрами.

Оцінка впливу згинної жорсткості. Виходячи з відомих співвідношень для труби з круглим поперечним перерізом, представимо жорсткість перерізу у вигляді $EJ=E\frac{\pi\left(r^4-r_0{}^4\right)}{4}$, а поздовжнє зусилля в перерізі – $T=EF=E\pi\left(r^2-r_0{}^2\right)$. Тоді формула (4) набуде вигляду:

$$\omega_k{}^2=\lambda_k{}^2\frac{T}{\rho}\left(1+\lambda_k{}^2\frac{r^2+r_0{}^2}{4}\right). \quad (5)$$

Побудуємо безрозмірну оцінку залежності власних частот від згинної жорсткості та видовження труби.

Формулу (5) приведемо до вигляду:

$$\omega_k=k\pi\sqrt{\frac{T}{\rho l^2}}\left(1+\frac{k^2\pi^2}{8l^2}\left(r^2+r_0{}^2\right)\right). \quad (6)$$

Тут використана залежність $\sqrt{1+\varepsilon}=1+\frac{\varepsilon}{2}$.

У випадку тонкостінної труби одержимо:

$$\omega_k=k\pi\sqrt{\frac{T}{\rho l^2}}\left(1+\theta_k\right), \quad (7)$$

де $\theta_k=\theta_k(k,\frac{d}{l})=\frac{k^2\pi^2 d^2}{16l^2}$ – безрозмірний параметр, яким оцінюється згинна жорсткість труби, d – діаметр тонкостінної труби.

Значення параметра $\theta_k(k,\frac{d}{l})$ при різних довжинах труби для власних коливань наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення параметра $\theta_k(k,\frac{d}{l})$

l/d	k / d/l	1	2	3	4	5	6
5	0,2	0.025	0.099	0.222	0.395	0,617	0,888
10	0,1	0.0062	0.025	0.056	0.099	0,154	0,222
20	0,05	0.0015	0.0062	0.014	0.025	0,039	0,056
40	0,025	0.0004	0.0015	0.0035	0.0062	0.0096	0,014
100	0,01	$6.17\ 10^{-5}$	$2.47\ 10^{-4}$	$5.55\ 10^{-4}$	$9.87\ 10^{-4}$	$1,54\ 10^{-3}$	$2,22\ 10^{-3}$
1000	0.001	$6.17\ 10^{-7}$	$2.47\ 10^{-6}$	$5.55\ 10^{-6}$	$9.87\ 10^{-6}$	$1,54\ 10^{-5}$	$2,22\ 10^{-5}$

Мала згинна жорсткість властива трубам з параметром $\theta < 0.1$. Цьому критерію, згідно з таблицею 1, відповідають труби з відношенням $\frac{l}{d} > 5$. При $\frac{l}{d} = 10$ за критерієм $\theta < 0.1$ з достатньою точністю можна будувати оцінки частот та стійкості перших чотирьох тонів власних коливань. У техніці параметр $\frac{l}{d}$ називають калібром труби.

Постановка і розв'язання задачі. Виходячи з отриманих оцінок жорсткості, перепишемо рівняння коливань трубопроводу з рухомою рідиною (1) у вигляді

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - \left(\tilde{T} - \rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (7)$$

де $\tilde{T} = T\left(1+\theta\right)$.

Рівняння (7) покладемо в основу дослідження трубопроводу з малою жорсткістю при шарнірному закріплені його кінців

$$u\left(0,t\right) = 0, \quad u\left(l,t\right) = 0. \qquad (8)$$

Для розв'язання крайової задачі (7) – (8) використаємо побудований у роботі [5] метод виділення та наближеного дослідження одночастотних двохвильових коливних процесів в механічних системах з рухомим інерційним навантаженням. Точний k – й розв'язок рівняння (7), отриманий в роботах [4,6] має вигляд

$$u_k\left(x,t\right) = a_k \sin\frac{k\pi x}{l}\cos\left(\omega_k t + \gamma_k x + \varphi_k\right). \qquad (9)$$

Формули для визначення частот та ексцесів перших чотирьох тонів коливань, які входять до розв'язку (9), набувають вигляду

$$\omega_k = \lambda_k\sqrt{\frac{\left(\tilde{T} - \rho_2 v^2\right)^2}{\tilde{T}\left(\rho_1+\rho_2\right) - \rho_1\rho_2 v^2}},$$

$$\gamma_k = \lambda_k\frac{\rho_2 v}{\sqrt{\tilde{T}\left(\rho_1+\rho_2\right) - \rho_1\rho_2 v^2}}, \quad k = 1,2,3,4. \qquad (10)$$

Аналітичні формули (10) встановлюють залежність частоти власних коливань ω_k та параметра γ_k від швидкості руху потоку рідини v.

З аналізу отриманих співвідношень визначаємо значення двох критичних швидкостей руху рідини для кожного тону коливань:

$$v_{kp1_k} = \sqrt{\frac{\tilde{T}}{\rho_2}}, \qquad v_{kp2_k} = \sqrt{\frac{\tilde{T}\left(\rho_1+\rho_2\right)}{\rho_1\rho_2}}. \qquad (11)$$

Як зазначено у монографії [3], для гнучких тіл втрата стійкості коливань на всіх власних частотах здійснюється одночасно, а для об'єктів скінченої жорсткості – послідовно на кожній із частот.

Для побудови графічних залежностей, зокрема, приймались такі параметри механічної системи: $\rho_1 = \rho_2 = \rho/2$, $l = 2$ м, $r = 0.15$ м, $r_0 = 0.1$ м, $T/\rho = \Omega^2\left(l/\pi\right)^2$, $\Omega = 2\pi$ с$^{-1}$.

На рисунках 1 та 2 показано залежності частоти власних коливань ω_k та параметра γ_k

від швидкості руху потоку рідини v, що визначаються формулами (10).

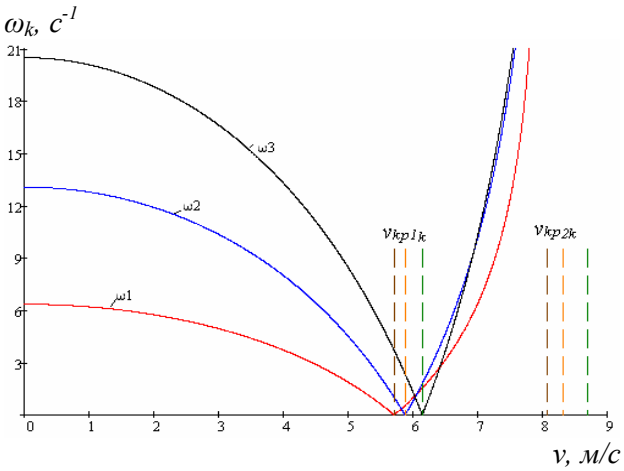


Рис. 1 Залежність частоти від швидкості руху рідини

Рисунок 1 ілюструє послідовність втрати стійкості на частотах перших трьох тонів власних коливань при критичних швидкостях кожного тону. Зокрема, для даної механічної системи втрата стійкості має місце при критичних швидкостях: $v_{kp1} = 5.713\,м/с$ та $v_{kp2} = 8.08\,м/с$ на частоті першого тону; $v_{kp1} = 5.879\,м/с$ та $v_{kp2} = 8.315\,м/с$ на частоті другого тону; $v_{kp1} = 6.146\,м/с$ та $v_{kp2} = 8.692\,м/с$ на частоті третього тону коливань.

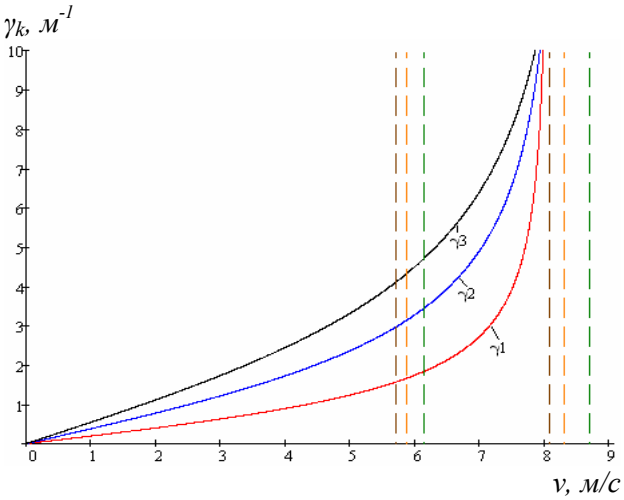


Рис. 2 Залежність ексцесу від швидкості руху рідини

Висновки. Отримані розрахункові формули та графічні залежності дають змогу виявити специфіку коливань і стійкості трубопроводу з малою згинною жорсткістю. Результати дослідження можуть бути сформульовані у вигляді таких висновків:

- Побудовано спрощене рівняння динаміки трубопроводу з малою згинною жорсткістю з рухомою рідиною.
- Отримано безрозмірні оцінки малої згинної жорсткості трубопроводу.
- Знайдено аналітичні розв'язки рівнянь коливань трубопроводу та формули для обчислення частот та ексцесів.
- Визначено дві критичні швидкості руху рідини в трубопроводі на кожному тоні коливань при яких втрата стійкості коливань здійснюється послідовно на кожній із частот.

Список використаних джерел

1. Fröman N. WKB approximation / N. Fröman, P. O. Fröman. – M. : World, 1967. – 168 p.
2. Païdoussis M. P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics / M. P. Païdoussis // Journal of Sound and Vibration, 2008 – 310. – P. 462–492.
3. Goroshko O. O. Two-waves processes in mechanical systems / Goroshko O. O., Kiba S. P., Dem'yanenko A. G. – Kyiv: Lybid, 1991. – 188 p.
4. Goroshko O. O. One-frequency processes in the systems on moving inertial loading / O. O. Goroshko, S. V. Kykot // Complex analysis and flows with free boundaries. K.: Institute of Mathematics, 2010. – Vol. 7, N. 2. – P. 347–356. – (Proceedings/Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine)
5. Goroshko O. O. An investigation of the one-frequency regimes in two-waves systems (in the systems with a moving loading) / O. O. Goroshko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 2. – P. 93–98.
6. Kykot S. V. The estimation of the influence of additional pulling due to friction in the systems with a moving loading / S. V. Kykot // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 4. – P. 59–62.
7. Kykot S. V. The investigations of the oscillations of an elastic beam with movable inertial loading by means of the direct methods / S. V. Kykot // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 1. – P. 101–106.

Надійшла до редколегії 18. 02. 2013

УДК 519.9

Григоренко О.Я. [1], д.ф.-м.н., проф.,
Вовкодав О.В. [2], ас.,
Яремченко С.М. [3], к.ф.-м.н., с.н.с.

Визначення напружено-деформованого стану нетонких сферичних оболонок змінної товщини на основі різних моделей.

В статті розв'язано двовимірні крайові задачі та досліджено напружено-деформований стан нетонких сферичних оболонок при використанні класичної та уточненої постановки, що базується на гіпотезі прямої лінії. За допомогою метода сплайн-колокації зведено двовимірну крайову задачу, яка описує напружено-деформований стан оболонки, до одновимірної, а одновимірну крайову задачу розв'язано методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз впливу використання різних підходів та зміни радіуса оболонки на характер розподілу прогинів цієї оболонки.

Ключові слова: сферична оболонка, напружено-деформований стан, уточнена і класична постановки

[1,2,3] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru,
oxanaukr2111@hotmail.com,
yaremch@gmail.com

A.Ya. Grigorenko[1], prof.,
O.V. Vovkodav[2], PhD student,
S.N. Yaremchenko[3], Ph.D.

Determination of the stress-strain state of nonthin variable thickness spherical shells based on different models.

In the paper two-dimensional boundary value problems are solved and the stress-strain state of nonthin spherical shells is investigated using classical and refined formulations, which is based on straight line hypothesis, are obtained. Using the spline collocation method the two-dimensional boundary value problem, which describes stress-strain state of shell, was reduced to one-dimensional and the one dimensional boundary value problem was solved by stable numerical discrete orthogonalization method. Analysis of different formulations and radius size influence on stress distribution was carried out.

Key words: spherical shell, stress-strain state, refined and classical formulations.

[1,2,3] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterova str.,
E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru,
oxanaukr2111@hotmail.com,
yaremch@gmail.com

Статтю представив член редколегії докт. ф.-м. наук, проф. Маципура В.Т.

1. Вступ

Сферичні оболонки широко застосовуються як елементи конструкцій в різних галузях техніки, зокрема у літакобудуванні, суднобудуванні та ракетно-космічній техніці. Для оцінки міцності та надійності таких конструкцій потрібно знати характеристики їх напруженого стану. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці ефективних методів і підходів до розрахунку оболонок даного класу.

В даній статті порівняно результати розв'язання задачі про напружено-деформований стан сферичної ізотропної незамкненої по координаті φ оболонки сталої товщини, отримані при використанні класичної теорій оболонок та некласичної, що базується на уточненій моделі прямолінійного елемента [1, 2, 4].

У роботі для розв'язання поставленої задачі запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який базується на зведенні двовимірної крайової задачі до системи звичайних диференціальних рівнянь з допомогою застосування методу сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків [3]. Отримана одновимірна крайова задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Запропонована методика достатньо апробована, і ефективно використовується для розв'язання як статичних так і динамічних задач [5, 6].

2. Постановка задачі

Розглянемо нетонкі ортотропні сферичні оболонки змінної в двох координатних

©О.Я.Григоренко, О.В.Вовкодав, С.М.Яремченко,2013

напрямках товщини в класичній постановці. Оболонка віднесена до ортогональної системи координат θ,φ,γ, де θ,φ – сферичні координати, а γ – нормальна до поверхні зведення координата.

Для опису напружено-деформованого стану оболонки використовуємо теорію оболонок Муштари – Донелла – Власова, тобто у виразах для кривини і кручення члени з компонентами вектора переміщення u і v ми не враховуємо.

Компоненти деформації запишемо через переміщення в сферичних координатах:

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\right);\quad \varepsilon_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\cos\theta\right)+\frac{w}{r};$$
$$\varepsilon_{\theta\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}-v\cos\theta\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta};\quad \kappa_\theta=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2};\quad (1)$$
$$\kappa_\varphi=-\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\frac{1}{\sin\theta}+\cos\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right);$$
$$2\kappa_{\theta\varphi}=\frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial\varphi}\right).$$

У виразах (2) $\varepsilon_\theta,\varepsilon_\varphi,\varepsilon_{\theta\varphi}$ – тангенціальні деформації, $\kappa_\theta,\kappa_\varphi,\kappa_{\theta\varphi}$ – деформації згину координатної поверхні.

Співвідношення пружності запишемо у вигляді:

$$N_\theta=C_{11}\varepsilon_\theta+C_{12}\varepsilon_\varphi,\ N_\varphi=C_{12}\varepsilon_\theta+C_{22}\varepsilon_\varphi,$$
$$N_{\theta\varphi}=N_{\varphi\theta}=C_{66}\varepsilon_{\theta\varphi}+2kD_{66}\kappa_{\theta\varphi},\quad (2)$$
$$M_\theta=D_{11}\kappa_\theta+D_{12}\kappa_\varphi,\ M_\varphi=D_{12}\kappa_\theta+D_{22}\kappa_\varphi,$$
$$M_{\theta\varphi}=M_{\varphi\theta}=2D_{66}\kappa_{\theta\varphi}.$$

де

$$C_{11}=\frac{E_\theta h}{1-\nu_\theta\nu_\varphi},\ C_{12}=\nu_\varphi C_{11},\ C_{22}=\frac{E_\varphi h}{1-\nu_\theta\nu_\varphi},$$
$$C_{66}=G_{\theta\varphi}h,\ D_{11}=\frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_\theta\nu_\varphi)},\ D_{12}=\nu_\varphi D_{11},$$
$$D_{22}=\frac{E_\varphi h^3}{12(1-\nu_\theta\nu_\varphi)},\ D_{66}=\frac{G_{\theta\varphi}h^3}{12}.\quad (3)$$

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\cos\theta\left(N_\theta-N_\varphi\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+Q_\theta\right)+\frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}=0$$
$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi}+2\cos\theta\,N_{\theta\varphi}+\sin\theta\left(\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+Q_\varphi\right)=0,\quad (4)$$
$$\cos\theta\,Q_\theta+\frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi}+\sin\theta\left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}-N_\theta-N_\varphi+rq_\gamma\right)=0,$$
$$\cos\theta\left(M_\theta-M_\varphi\right)+\frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\sin\theta\left(\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}-rQ_\theta\right)=0,$$
$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}+2\cos\theta\,M_{\theta\varphi}+\sin\theta\left(\frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial\theta}-rQ_\varphi\right)=0;$$

де $N_\theta,N_\varphi,N_{\theta\varphi},N_{\varphi\theta}$ – тангенціальні зусилля, $M_\theta,M_\varphi,M_{\theta\varphi},M_{\varphi\theta}$ – згинаючі і скручуючі моменти, Q_θ,Q_φ – перерізуючі зусилля, q_γ – поверхневе навантаження.

Оскільки в класичній постановці повні кути повороту не враховуються, то за розв'язувальні функції вибираємо компоненти вектора переміщень u,v,w. Після підстановки (1) і (2) в (4) та після ряду перетворень отримуємо розв'язувальну систему трьох диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=b_{11}\frac{\partial u}{\partial\theta}+b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+b_{13}u+b_{14}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial\varphi}+b_{15}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+b_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}+$$
$$+b_{17}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+b_{18}\frac{\partial w}{\partial\theta}+b_{19}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial\varphi}+b_{1,10}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+b_{1,11}w,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}=b_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\varphi}+b_{22}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+b_{11}\frac{\partial v}{\partial\theta}+b_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+b_{24}v+\quad (5)$$
$$+b_{25}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^2\,\partial\varphi}+b_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial\varphi}+b_{27}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}+b_{28}w,$$
$$\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}=b_{31}\frac{\partial u}{\partial\theta}+b_{32}u+b_{33}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+b_{34}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}+b_{35}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+b_{36}\frac{\partial w}{\partial\theta}+$$
$$+b_{37}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^2\,\partial\varphi^2}+b_{38}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta\,\partial\varphi^2}+b_{39}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}+b_{3,10}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+b_{3,11}w+b_{3,12}q_\gamma,$$

Коефіцієнти b_{ij} в загальному випадку залежать від θ і φ.

Додавши до (5) граничні умови отримаємо двовимірну крайову задачу.

Отримання двовимірної крайової задачі з рівнянь уточненої теорії оболонок, що базується на гіпотезі прямої лінії описано в статті [6].

3. Метод розв'язання

Оскільки в систему (5) входять похідні від розв'язувальних функцій по координаті φ не вище четвертого порядку, то при апроксимації розв'язку по координаті φ можна обмежитись сплайн-функціями п'ятого степеня. Шуканий розв'язок крайової задачі для системи рівнянь (5) з відповідними граничними умовами представимо у вигляді:

$$u=\sum_{i=0}^{N}u_i(\theta)\phi_i(\varphi)\quad v=\sum_{i=0}^{N}v_i(\theta)\phi_i(\varphi)\quad (6)$$
$$w=\sum_{i=0}^{N}w_i(\theta)\psi_i(\varphi)$$

де $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta)$ – шукані функції змінної θ, $\phi_i(\varphi)$ та ψ_i – лінійні комбінації *B*-сплайнів відповідно третього та п'ятого степеня на рівномірній сітці $\Delta: 0 = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_N = b,$ що точно задовольняють граничні умови на контурах $\varphi = 0$ і $\varphi = b$.

Підставляючи вирази (6) в розв'язувальні рівняння (5) та їх граничні умови, а потім використовуючи метод сплайн-колокації, будемо вимагати точного їх задоволення в $N+1$ точках колокації $\xi_k \in [0,b], k = \overline{0,N}$. В результаті отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку $8(N+1)$, яку можна представить в нормальній формі Коші у вигляді:

$$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = A(\theta)\bar{R} + \bar{f}(\theta) \qquad (12)$$

де $\bar{R}$ - шукана вектор-функція; $\bar{f}(\theta)$- вектор правих частин; $A(\theta)$ - квадратна матриця.

У випадку, коли для розв'язання описаних задач використовується уточнена теорія оболонок [6], ми отримуємо систему з п'яти диференціальних рівнянь в частинних похідних, де похідні від розв'язувальних функцій по координаті φ не вище другого порядку. У цьому випадку при апроксимації розв'язку по координаті φ ми обмежуємося сплайн-функціями третього степеня. Отриману одновимірну крайову задачу, як і для класичної постановки, розв'язуємо стійким методом дискретної ортогоналізації.

4. Результати розрахунків

За допомогою розробленого чисельно-аналітичного підходу було розв'язано задачу про напружено-деформований стан сферичної ізотропної незамкненої по параметру φ оболонки $\left(\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}, 0 \le \varphi \le \pi\right)$, яка жорстко закріплена по всьому контуру. Товщина оболонки стала h = 1. Оболонка знаходиться під дією поверхневого рівномірно нормального навантаження $q = q_\gamma = const$ і має такі характеристики: $G_{\theta\varphi} = G_{\theta\gamma} = G_{\varphi\gamma} = 0{,}385\,E_0$, $\gamma_\varphi = 0{,}3$, $E_\theta = E_\varphi = E_0$. Було розглянуто оболонки трьох радіусів: r = 10; 20; 30 та проаналізовано окрім впливу обраної теорії також і вплив радіуса.

На рис. 1 та 2 порівняно значення прогинів, отримані в результаті використання розробленого в роботі підходу. Суцільною лінією показано розподіл прогинів, при використанні уточненої постановки; трикутниками – результати, отримані при використанні класичної теорії.

На рис. 1 та 2 показано як змінюється прогин оболонки в залежності радіуса оболонки та теорії, яку використовують для отримання двовимірної крайової задачі: суцільною лінією показано результати, отримані при використанні уточненої теорії, результати використання класичної постановки показано трикутниками.

З наведених рисунків видно, що результати використання різних теорій оболонок практично не впливає на результати розрахунку напружено-деформованого стану оболонок, що розглядаються. Ці результати були дуже важливі при аналізі достовірності нових чисельно-аналітичних підходів, які розробляються у відділі нашого наукового інституту.

Також з рис. 2 видно, що при невеликих радіусах оболонки різниці між прогинами отриманими при використанні різних підходів практично немає. Але зі зростанням радіуса з'являється різниця у максимальних значеннях прогинів. Так, вже при $r = 30$, різниця між максимальними значеннями прогинів при використанні уточненої та класичної теорії перевищує 2 %.

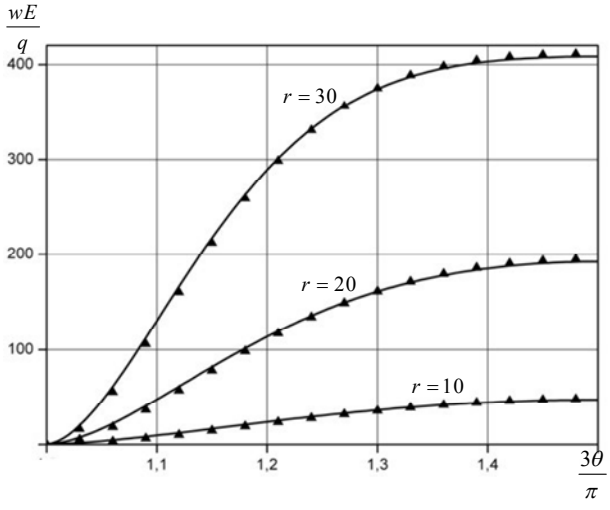


Рис.1 Розподіл прогинів вздовж координати θ для оболонки $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}, 0 \le \varphi \le \pi$.

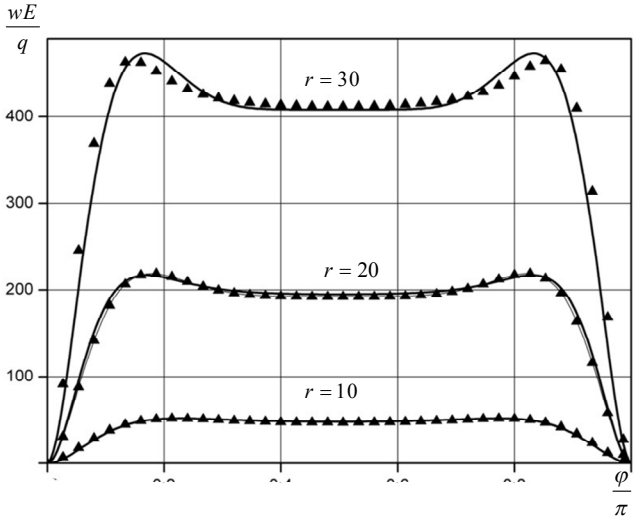


Рис. 2 Розподіл прогинів вздовж координати φ для оболонки $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}, 0 \le \varphi \le \pi$.

Список використаних джерел

1. *Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G., Grigorenko A.Ya.* Numerical-analytical solution of problems in the mechanics of shells on the basis of various models. – Kiev: Academperiodika, 2006. – 472 p.
2. *Zavyalov Yu.S., Kvasov Yu.I., Miroshnichenko V.L.* Spline functions methods. – Moscow: Nauka, 1980. – 352 p.
3. *Peleh B.L.* Theory of Shells with Finite Shear Stiffness. – Kiev: Naukova Dumka, 1973. – 246p.
4. *Grigorenko A.Ya.* Stress-strain state of nonthin spherical shells of variable thickness with different ways of edge fastening / A.Ya. Grigorenko, O.V. Vovkodav, S.N. Yaremchenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv – 2012. – № 1. – P. 69-72.
5. *Grigorenko A.Ya.* Stress-strain state of nonthin orthotropic spherical shells of variable thickness / A.Ya. Grigorenko, O.V. Vovkodav, S.N. Yaremchenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, № 1. – P.80- 93.

Надійшла до редколегії 26.12.2012

УДК 531.395

Ольшанський В.П[1], д.ф.-м.н., проф.,
Ольшанський С.В.[2], к.ф.-м.н.

Перший інтеграл рівняння Мещерського при дробово-лінійному законі зменшення радіуса кулі, що летить вгору

Розглянуто випадок вертикального руху в повітрі тіла, радіус якого зменшується в часі за дробово-лінійним законом. Використовуючи спеціальне перетворення змінних, одержано розв'язок нелінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами в функціях Бесселя.
Ключові слова: сферичне тіло змінної маси, аеродинамічний опір, реактивна сила, рівняння Ріккаті, вертикальний рух.

[1] Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П.Василенка, 61002, м. Харків, вул. Артема, 44
[2] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21,
e-mail: stasolsh77@gmail.com

V. P. Olshanskii[1], Doctor of Sciences (Physics & Mathematics), Full Professor,
S. V. Olshanskii[2], Ph.D. (Physics & Mathematics)

The first integral of the Meshcherskiy equation at fractionally linearly decreasing radius ball that flies up

The case of motion in the air, the body radius decreases in time by fractional-linear law was considered. Through special conversion variables failed to find the solution of the nonlinear differential equation with variable coefficients in the Bessel functions.
Key Words: spherical body of variable mass, aerodynamic resistance, reactive force, Riccati equation, vertical motion.

[1] Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, 61002, Kharkiv, Artema str., 44
[2] National Technical University Kharkiv Polytechnic Institute, 61002, Kharkiv, Frunze st., 21,
e-mail: stasolsh77@gmail.com

Статтю представив член редколегії д.ф.-м. наук, проф. Маципура В.Т.

Вступ

Не дивлячись на те, що пройшло більше ста років з часу публікації перших робіт з динаміки тіла змінної маси, отримання аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, які описують рух таких тіл представляє науковий інтерес. В цій галузі механіки доводиться розв'язувати нелінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які відносяться до класу Ріккаті [1]. Тільки в окремих випадках вдається знайти їх точний аналітичний розв'язок. Нижче, при достатньо загальних припущеннях, які стосуються сили опору та реактивної сили, перший інтеграл рівняння вертикального руху тіла вгору виражено у замкнутому вигляді за допомогою циліндричних функцій. Відмітимо, що І.В. Мещерський [1] перший звів до функцій Бесселя розв'язок задачі про вільні коливання математичного маятника змінної маси. Надалі цей напрямок розвивався в роботах [2,3].

Рух кулі змінної маси та розмірів розглядають при вивченні польоту згораючих частинок палив, дрібнодисперсних хімічно активних відходів (викидів) виробництв, падаючих догораючих метеоритів і т.д. Тому вивчення особливостей балістики тіл, у яких змінюються розміри в часі, відноситься до актуальних науково-технічних задач.

При русі тіла змінного розміру проявляється ряд особливостей. Процес руху стає нестаціонарним. Тому при падінні тіла змінної маси втрачає сенс поняття "швидкості витання", величину якої визначив М.Є. Жуковський [4]. Траєкторія тіла, маса якого зменшується, може обриватися внаслідок повного згорання або випаровування рухомого тіла, що неможливо при польоті тіла сталої маси. Заслуговує також уваги ефект відбиття легкого тіла зустрічним потоком [5], та існування екстремуму швидкості [6], характерних тільки при русі малої частки змінної маси.

При вивченні руху кулі розглядали різні закони зміни розміру тіла [7,8], у тому числі лінійний, експонентний та закон В. Срезневського. Використовували також дробово-лінійний закон, якому приділено менше уваги. Його розглядали В.О. Сапа та М.М. Сагітов [9] для лінійного аеродинамічного

© В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, 2013

опору рухові. На відміну від [9] тут розглядається випадок квадратичного опору газового середовища.

Постановка задачі та загальні гіпотези

Допускаємо, що сила аеродинамічного опору F_c пропорційна площі перерізу сферичного тіла та квадрату швидкості його центру мас:

$$F_c = C_v S \upsilon^2.$$

Тут C_v – коефіцієнт опору; S – площа поперечного перерізу тіла; $\upsilon(t)$ – швидкість центру мас тіла.

Дотримуючись публікацій [7,8], реактивну силу F_p вважаємо пропорційною швидкості підйому тіла та похідній $\frac{dM}{dt}$, де $M = M(t)$ – маса тіла. Для сферичної частки сталої щільності ρ маємо:

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\,;\ \frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho \frac{dr}{dt}\,.$$

При обчисленні величини реактивної сили, аналогічно [2], вважаємо абсолютну швидкість руху частинок, які від'єднуються від кулі рівною нулю.

Тоді, обчислення реактивної сили зводимо до формули

$$F_p = 4\pi r^2 \rho \mu \upsilon \frac{dr}{dt}\,.$$

Тут $0 \le \mu \le 1$ – поправка на те, що при всебічному зменшенні маси кулі тільки частина маси, яка від'єднується, йде на створення реактивної сили.

В роботах [8,9] приймалося $\mu = 1$, а в роботах [6,10] – $\mu = 0$.

Таким чином, для визначення швидкості підйому $\upsilon = \upsilon(t)$ доводиться розв'язувати диференціальне рівняння

$$M \frac{d\upsilon}{dt} \pm F_p + F_c = -Mg\,. \qquad (1)$$

Тут g – прискорення вільного падіння, знак "+" перед F_p відповідає прискорювальній, а знак "-" – гальмівній реактивній силі.

Вважаємо, що зміна радіуса r сферичного тіла, яке летить вгору, описується дробово-лінійною функцією часу t:

$$r = \frac{r_0}{1+\gamma t}\,, \qquad (2)$$

де $r_0 = r(0)$; $\gamma > 0$– параметр, який характеризує інтенсивність зменшення радіуса та маси однорідної кулі.

Побудова розв'язку для реактивної сили, що прискорює рух

З урахуванням вищевикладеного вертикальний підйом однорідної кулі описуємо диференціальним рівнянням:

$$\frac{d\upsilon}{dt} + 3\mu \frac{\dot r}{r}\upsilon + \frac{k}{r}\upsilon^2 = -g\,, \qquad (3)$$

де $k = \frac{3}{4}\frac{C_v}{\rho}$ – зведений коефіцієнт опору; точка над символом означає похідну за часом.

Початковою умовою до (3) приймаємо:

$$\upsilon(0) = \upsilon_0, \qquad (4)$$

позначивши через υ_0 початкову швидкість польоту.

Враховуючи (2), перетворенням

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma}{r_0} r^2 \frac{d}{dr} \qquad (5)$$

представляємо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{d\upsilon}{dr} + \frac{3\mu}{r}\upsilon - k_0 \frac{\upsilon^2}{r^3} = \frac{g_0}{r^2}, \qquad (6)$$

де $k_0 = \frac{kr_0}{\gamma},\ g_0 = \frac{gr_0}{\gamma}$.

Далі (6) зводимо до загального рівняння Ріккаті [11]:

$$\upsilon_r' = f(r)\upsilon^2 + g(r)\upsilon + h(r), \qquad (7)$$

в якому $f(r) = \frac{k_0}{r^3};\ g(r) = -\frac{3\mu}{r};\ h(r) = \frac{g_0}{r^2}$.

Підстановкою [11]:

$$\upsilon = \exp\left(-\int f(r)u(r)dr\right), \qquad (8)$$

перетворюємо (7) в лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{3}{r}(1+\mu)\frac{du}{dr} + \frac{k_0 g_0}{r^5}u = 0\,. \qquad (9)$$

Вираз (9) відноситься до рівнянь типу Бесселя і його загальним розв'язком є:

$$u(r) = r^{\frac{3}{2}\nu}\left[c_1 J_\nu(\xi) + c_2 Y_\nu(\xi)\right]. \qquad (10)$$

Тут $\nu = -\frac{2}{3} - \mu$; $\xi = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{k_0 g_0}}{r^{3/2}}$; c_1, c_2 – довільні сталі; $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ – відповідно функція Бесселя та функція Неймана індексу ν.

Зворотне перетворення, для одержання розв'язку рівняння Ріккаті має вигляд

$$\upsilon = -\frac{u_r'}{uf(r)}. \qquad (11)$$

Для знаходження похідних використовуємо формули [12]:

$$\frac{d}{d\xi}J_\nu(\xi) = -J_{\nu+1}(\xi) + \frac{\nu}{\xi}J_\nu(\xi),$$
$$\frac{d}{d\xi}Y_\nu(\xi) = -Y_{\nu+1}(\xi) + \frac{\nu}{\xi}Y_\nu(\xi).$$

У підсумку отримуємо інтеграл рівняння (3):

$$\upsilon = -\sqrt{\frac{rg_0}{k_0}}\cdot\frac{cJ_{\nu+1}(\xi) + Y_{\nu+1}(\xi)}{cJ_\nu(\xi) + Y_\nu(\xi)}. \qquad (12)$$

Тут $c = c_1 c_2^{-1}$; $J_{\nu+1}(\xi)$, $Y_{\nu+1}(\xi)$ – відповідно функція Бесселя та функція Неймана індексу $\nu+1$.

Розв'язок (12) задовольняє початковій умові (4), при

$$c = \frac{bY_\nu(\xi_0) - Y_{\nu+1}(\xi_0)}{J_{\nu+1}(\xi_0) - bJ_\nu(\xi_0)}, \qquad (13)$$

де $\xi_0 = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{k_0 g_0}}{r_0^{3/2}}$; $b = -\upsilon_0\sqrt{\frac{k_0}{r_0 g_0}}$.

Таким чином, за допомогою формул (12) та (13), можна визначити швидкість підйому в будь-який момент часу.

Побудова розв'язку для реактивної сили, яка сповільнює рух

Спираючись на вищевикладені допущення, рівняння підйому кулі під дією реактивної сили, яка сповільняє рух, має вигляд

$$\frac{d\upsilon}{dt} - 3\mu\frac{\dot{r}}{r}\upsilon + \frac{k}{r}\upsilon^2 = -g. \qquad (14)$$

Рівняння (14) доповнюємо початковою умовою (4).

Використовуючи перетворення (5), представляємо рівняння (14) у вигляді

$$\frac{d\upsilon}{dr} - \frac{3\mu}{r}\upsilon - k_0\frac{\upsilon^2}{r^3} = \frac{g_0}{r^2}, \qquad (15)$$

де k_0, g_0 – мають попередній зміст.

Рівняння (15) зводимо до (7), але з новим значенням коефіцієнта $g(r) = \frac{3\mu}{r}$. Інші коефіцієнти залишаються незмінними.

Використовуючи перетворення (8), отримуємо

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{3}{r}(1-\mu)\frac{du}{dr} + \frac{k_0 g_0}{r^5}u = 0. \qquad (16)$$

Диференціальне рівняння (16), є рівнянням типу Бесселя, із загальним розв'язком:

$$u(r) = r^{\frac{3}{2}\psi}\left[c_1 J_\psi(\xi) + c_2 Y_\psi(\xi)\right]. \qquad (17)$$

Тут $\psi = \mu - \frac{2}{3}$.

Для знаходження розв'язку рівняння Ріккаті, використовуємо зворотне перетворення (11) та формули диференціювання функцій Бесселя.

В результаті отримуємо

$$\upsilon = -\sqrt{\frac{rg_0}{k_0}}\cdot\frac{cJ_{\psi+1}(\xi) + Y_{\psi+1}(\xi)}{cJ_\psi(\xi) + Y_\psi(\xi)}, \qquad (18)$$

де константа c визначається виразом

$$c = \frac{bY_\psi(\xi_0) - Y_{\psi+1}(\xi_0)}{J_{\psi+1}(\xi_0) - bJ_\psi(\xi_0)}.$$

Числові результати та їх аналіз

Вивчимо вплив реактивної сили, яка прискорює рух, на швидкість польоту. Для цього приймемо такі вихідні дані: $r_0 = 2\cdot10^{-4}$ м; $k = 3{,}12\cdot10^{-5}$; $\gamma = 3$ с$^{-1}$ та $\upsilon_0 = 60$ м/с. На рис. 1 показано графіки, отримані для різних значень μ, цифрами 1,2,3 позначено криві, що відповідають $\mu = 0$; 0,5; 1. Видно, що при збільшенні реактивної сили збільшується швидкість центру мас та зростає час підйому тіла до повної зупинки

Для реактивної сили, яка сповільняє рух, графіки представлені на рис. 2. Цифри 1,2,3 на рисунку мають попередній зміст. Порівнюючи графіки на рис.1 та рис. 2, видно, що у другому випадку куля летить із значно меншою швидкістю і зупиняється за більш короткий проміжок часу.

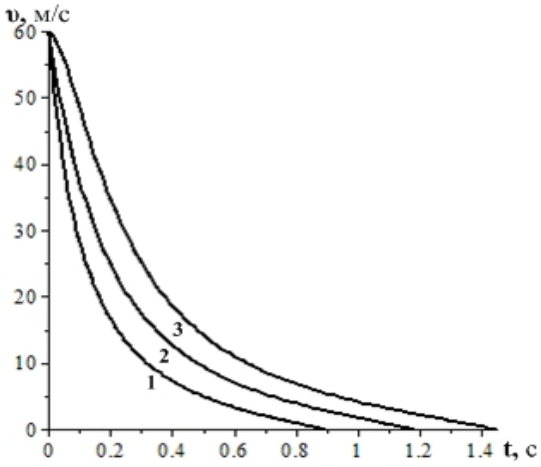


Рис. 1 Залежності швидкості від часу, для реактивної сили, що прискорює рух, за різних μ

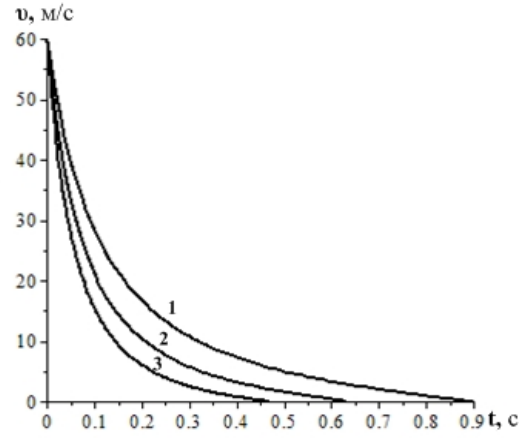


Рис. 2 Залежності швидкості від часу, для реактивної сили, що сповільняє рух, за різних μ

Висновки

Перший інтеграл рівняння Мещерського при русі вертикально вгору однорідної кулі, радіус якої зменшується в часі за дробово-лінійним законом, виражається через функції Бесселя. Індекс функцій Бесселя залежить від величини і напрямку дії реактивної сили. Серед індексів є такі, що швидкість кулі можна обчислювати за допомогою таблиць циліндричних функцій.

Список використаних джерел

1. *Meshchersky I.V.* Works on the mechanics of bodies with variable mass. – Moscow: GITTL, 1952. – 276 p. (in Russian).
2. *Novoselov V.S.* Analytical mechanics of systems with variable masses. – Leningrad: Leningrad University Publishing, 1969. – 240 p. (in Russian).
3. *Karagodin V.M.* Theoretical basis of body mechanics of variable composition. – Moscow: Oborongiz, 1963. – 178 p. (in Russian).
4. *Zhukovsky N.E.* The Works. V. 3. – Moscow: DSTI-NKTP, 1936. – 380 p. (in Russian).
5. *Kucherenko S.I, Olshanskii V.P, Olshanskii S.V., Tischenko L.M.* Simulation flight droplets that evaporate when moving in the gas. – Kharkov: Eden, 2006. – 203 p. (in Ukrainian).
6. *Olshanskii V.P., Olshanskii S.V.* On the conditions of extreme fall speed of a spherical body radius // Visn. of NTU "KPI". Topics. no.: System analysis, management and information technology. Kharkov: NTU "KPI". – 2008. – N. 26. – P. 67–78. (in Russian).
7. *Olshanskii V.P., Olshanskii S.V.* Analytical solution of the Meshchersky equation describing of the vertical motion of the sphere with decreasing mass // Technical mechanics. – 2009. – № 4. – P. 36-42. (in Russian).
8. *Olshanskii V.P., Avramov K.V., Olshanskii S.V.* Closed solutions of the Meshchersky equation at the different laws reduction of the radius of the sphere flying // Mechanics of Solids. – 2009. – №. 39. – P. 207-214. (in Russian).
9. *Sagitov M.N.* Some cases of the motion of a rotating sphere with variable mass axis horizontal // Proceedings of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Series Sci. Science. Mathematics and Mechanics. – 1963. – № 15. – P. 88-99. (in Russian).
10. *Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V.* On the maximum of the vertical fall velocity of a homogeneous sphere whose radius changes by the exponential law // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2009. – Vol. 82, – № 4. P. 732-736.
11. *Kamke E.* Handbook of Ordinary Differential Equations. – Moscow: Nauka, 1976. – 576 p. (in Russian).
12. *Gradshteyn I.M., Ryzhik I.S.* Table of Integrals, Series, and Products. – Moscow: Fizmatgiz, 1962. – 1100 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.12.2012

УДК 517.938

Страх О.П.[1], аспірант

Нетерові крайові задачі для слабконелінійних динамічних систем на часовій шкалі

Розглядається крайова задача для слабконелінійної динамічної системи на часовій шкалі. Встановлено необхідну й достатню умови існування розв'язків цієї задачі, а також знайдено алгоритм для їх побудови.

Ключові слова: динамічна система, часова шкала, нетерова крайова задача.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: strah_o@ukr.net

O.P. Strakh[1], postgraduate

Fredholm boundary-value problems for weakly nonlinear dynamic systems on time scales

Boundary-value problem for weakly nonlinear dynamic system on time scales is considered. The necessary and sufficient conditions of solutions existence of this problem are established and an algorithm for the construction of these solutions is found.

Key Words: dynamic system, time scale, Fredholm boundary-value problem.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: strah_o@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

Розглянемо крайову задачу наступного вигляду:

$$\begin{cases} z^{\Delta} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \\ lz = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{1}$$

де z^{Δ} — дельта похідна, визначена в [1, с. 5], $\mathbb{T}$ — часова шкала, $A(t)$ — регресивна $n \times n$-вимірна матриця, елементи якої дійсні й rd-неперервні на $[a,b]_{\mathbb{T}}$ функції, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція $f(t) \in C_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $Z(z,t,\varepsilon)$ — n-вимірна нелінійна по z вектор-функція, для якої $Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[z]$, $\|z - z_0\| \le q$, $Z(z,\cdot,\varepsilon) \in C_{rd}[t]$, $Z(z,t,\cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, q та ε_0 — достатньо малі константи, l — m-вимірний векторний функціонал, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений m-вимірний векторний функціонал неперервно диференційовний по z (в розумінні Фреше) і неперервний по ε в деякому околі породжуючого розв'язку. Нашим завданням є дослідити умови існування та знайти алгоритм для побудови розв'язку $z = z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1) такого, що $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $z(t,\cdot) \in C[\varepsilon]$ і перетворюється на один з розв'язків крайової задачі

$$\begin{cases} z^{\Delta} = A(t)z + f(t), \\ lz = \alpha,\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{2}$$

при $\varepsilon = 0$. Задача (2) у цьому випадку отримується з задачі (1) підстановкою $\varepsilon = 0$ і називається породжуючою для задачі (1).

Загальний метод, що використовувався для аналізу сформульованої проблеми у випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, тобто $[a,b]_{\mathbb{T}} = [a,b]$ [2, с. 118; 3], ґрунтується на переході від вихідної крайової задачі (1) до певної операторної системи, що розв'язується за допомогою методу малого параметра Ляпунова-Пуанкаре чи його ітераційного аналога — методу простих ітерацій [4]. Проведемо аналогічні міркування для випадку довільної часової шкали $\mathbb{T}$.

Нехай $\operatorname{rank} Q = n_1 < m$, де $Q = le_A(\cdot,a)$, $e_A(t,a)$ — фундаментальна матриця породжуючої системи (2). Тоді крайова задача (2) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли $f(t) \in C_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$ та $\alpha \in \mathbb{R}^m$ задовольняють d $(d := m - n_1)$ лінійно незалежні умови:

$$P_{Q_d^*}(\alpha - lF) = 0_d, \tag{3}$$

де $P_{Q_d^*}$ — $d \times n$-вимірна матриця, що складається з d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*}, проектора на коядро матриці Q, $F(t) := \int_a^t e_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau$. За виконання умов (3) задача (2) має

© О.П. Страх, 2013

r-параметричну ($r := n - n_1$) сім'ю розв'язків

$$z(t) = z_0(t, c_r) = e_A(t, a)P_{Q_r}c_r + \\ + G[f](t) + e_A(t, a)Q^+\alpha,\ c_r \in \mathbb{R}^r, \quad (4)$$

де P_{Q_r} — $n \times r$-вимірна матриця, що складається з r лінійно незалежних стовпців матриці P_Q, проектора на ядро матриці Q, $G[f] := F(t) - e_A(t, a)Q^+lF$ — узагальнений оператор Гріна крайової задачі (2), Q^+ — псевдо-обернена до Q матриця [5]. Нам потрібно дослідити умови існування і знайти алгоритм для побудови розв'язку $z = z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1) такого, що $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1_{rd}[a, b]_{\mathbb{T}}$, $z(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$ і при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один з розв'язків породжуючої крайової задачі (2), в припущенні що вона розв'язна, тобто виконуються умови (3).

Теорема 1. (Необхідна умова існування розв'язків). *Нехай крайова задача* (1)*, для якої породжуюча задача* (2) *є розв'язною, має розв'язок $z(t, \varepsilon)$ такий, що $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1_{rd}[a, b]_{\mathbb{T}}$, $z(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$ і при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий розв'язок $z_0(t, c_r)$ з константою $c_r = c_r^0$. Тоді вектор-константа $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння:*

$$P_{Q_d^*}\Big(J(z_0(\cdot, c_r^0), 0) - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot, \sigma(\tau))\times \\ \times Z(z_0(\tau, c_r^0), \tau, 0)\,\Delta\tau\Big) = 0_d. \quad (5)$$

Доведення. Умови (3) існування породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r) \in C_{rd}[a, b]_{\mathbb{T}}$ вигляду (4) вважаються виконаними. Якщо тепер розглянемо векторну функцію $Z(z, t, \varepsilon)$ і векторний функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ як неоднорідності задачі (1), то отримуємо наступну умову розв'язності крайової задачі (1):

$$P_{Q_d^*}\Big(J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot, \sigma(\tau))\times \\ \times Z(z(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\,\Delta\tau\Big) = 0_d. \quad (6)$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо необхідну умову (5). □

Рівняння (5), як і у випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, будемо називати рівнянням для породжуючих констант. Слід також зазначити, що для періодичних крайових задач ($m = n$, $d = r$, $lz = z(a) - z(b) = \alpha = 0$) рівняння (5) називається рівнянням для породжуючих амплітуд, яке є добре відомим в теорії нелінійних коливань [3, 6].

Якщо рівняння (5) є розв'язним (має дійсний корінь c_r^0), то вектор c_r^0 визначає породжуючий розв'язок $z_0(t, c_r^0)$, що пов'язується рівністю $z(t, 0) = z_0(t, c_r^0)$ з розв'язком $z(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$ крайової задачі (1).

Дослідження достатніх умов існування розв'язків крайової задачі (1) будемо проводити по аналогії з випадком $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ [2, с. 118], тобто, початково проблема існування розв'язків вихідної крайової задачі (1) буде розв'язною після застосування аналізу крайової задачі для знаходження першого наближення точного розв'язку.

Припустимо, що вектор-константа $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння (5). За допомогою заміни змінних:

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^0) + x(t, \varepsilon) \quad (7)$$

в крайовій задачі (1) ми отримуємо наступну проблему: потрібно дослідити умови існування і знайти алгоритм для побудови розв'язку $x(t, \varepsilon)$ крайової задачі

$$\begin{cases} x^{\Delta} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^0) + \\ +x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \\ lx = \alpha + \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \end{cases} \quad (8)$$

такий, що $x(\cdot, \varepsilon) \in C^1_{rd}[a, b]_{\mathbb{T}}$, $x(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ і перетворюється в нуль при $\varepsilon = 0$. Враховуючи той факт, що векторна функція $Z(z, t, \varepsilon)$ і векторний функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ є неперервно диференційовними по z в околі точки $\varepsilon = 0$, ми можемо відокремити з векторфункції $Z(z_0 + x, t, \varepsilon)$ та векторного функціоналу $J(z_0(\cdot, c_r^0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ лінійну частину як функцію від x та вирази нульового степеня відносно ε. Таким чином, отримуємо наступні розклади:

$$\begin{gathered} Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = f_0(t, c_r^0) + A_1(t)x + \\ + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \\ J(z_0(\cdot, c_r^0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J_0(z_0(\cdot, c_r^0) + \\ + l_1 x(\cdot, \varepsilon) + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \end{gathered} \quad (9)$$

де

$$f_0(t,c_r^0)=Z(z_0(t,c_r^0),t,0)\in C_{rd}[t],$$
$$J_0(z_0(\cdot,c_r^0))=J(z_0(\cdot,c_r^0),0),$$
$$A_1(t)=A_1(t,c_r^0)=$$
$$=\partial Z(z,t,0)/\partial z|_{z=z_0(t,c_r^0)}\in C_{rd}[t],$$

$l_1x(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціоналу $J(z_0(\cdot,c_r^0)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Нелінійний векторний функціонал $R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить до класів $C^1[x]$, $C_{rd}[t]$, $C[\varepsilon]$ в області $\|x\|\le q$, $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, більш того виконуються рівності:

$$R(0,t,0)=0,\qquad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial x}=0,$$
$$R_1(0,0)=0,\qquad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial x}=0.$$

Побудуємо тепер операторну систему, еквівалентну крайовій задачі (8) в класі функцій $C[\varepsilon]$, що перетворюються в нуль при $\varepsilon=0$. Оскільки неоднорідностями задачі (8) є нелінійності $Z(z_0+x,t,\varepsilon)$ і $J(z_0(\cdot,\varepsilon)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, то отримуємо

$$x(t,\varepsilon)=e_A(t,a)P_{Q_r}c+x^{(1)}(t,\varepsilon).$$

У цьому випадку невідомі вектор-константа $c=c(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r$ і вектор-функція $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначаються відповідно з умов розв'язності крайової задачі (8) та наступного спеціального розв'язку $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ задачі у такий спосіб:

$$P_{Q_d^*}\Big\{J_0\big(z_0(\cdot,c_r^0)\big)+l_1\Big(e_A(\cdot,a)P_{Q_r}c+$$
$$+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int\limits_a^{\cdot}e_A\big(\cdot,\sigma(\tau)\big)*$$
$$\star\Big[f_0(\tau,c_r^0)+A_1(\tau)\big(e_A(\tau,a)P_{Q_r}c+x^{(1)}(\tau,\varepsilon)\big)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]\Delta\tau\Big\}=0_d,$$
$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0)+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t)+\varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0(z_0(\cdot,c_r^0))+$$
$$+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Враховуючи те, що вектор-константа c_r^0 задовольняє рівняння (5), для розв'язку $x(t,\varepsilon)\in C[\varepsilon]$, $x(t,0)=0$ крайової задачі (8) маємо еквівалентну операторну систему:

$$x(t,\varepsilon)=e_A(t,a)P_{Q_r}c+x^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$B_0c=P_{Q_d^*}\Big\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-l\int\limits_a^{\cdot}e_A\big(\cdot,\sigma(\tau)\big)\Big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]\Delta\tau\Big\},\qquad(10)$$
$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0)+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t)+\varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0\big(z_0(\cdot,c_r^0)\big)+$$
$$+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\},$$

де B_0 — $d\times r$-вимірна матриця

$$B_0=P_{Q_d^*}\Big\{l_1e_A(\cdot,a)P_{Q_r}-$$
$$-l\int\limits_a^{\cdot}e_A(\cdot,\sigma(\tau))A_1(\tau)e_A(\tau,a)P_{Q_r}\,\Delta\tau\Big\}.$$

Нехай P_{B_0} — $r\times r$-вимірна матриця ортопроектор $\mathbb{R}^r\to N(B_0)$. Друге рівняння операторної системи (10) розв'язне відносно $c\in\mathbb{R}^r$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Big\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-l\int\limits_a^{\cdot}e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Delta\tau\Big\}=0_d,\quad(11)$$

де $P_{B_0^*}$ — $d\times d$-вимірна матриця ортопроектор на коядро матриці $B_0\colon\mathbb{R}^d\to N(B_0^*)$. Якщо $P_{B_0^*}=0$, тобто $\operatorname{rank}B_0=d$, то остання рівність завжди виконується. Таким чином $d\le r$, а це означає, що число m крайових умов не перевищує розмірності n динамічної системи, оскільки $d=m-n_1\le r=n-n_1$. Отже, для $P_{B_0^*}=0$ друге рівняння операторної системи (10) є розв'язним відносно $c\in\mathbb{R}^r$ з точністю до довільної вектор-константи $P_{B_0}\overline{c}$ $(\forall\,\overline{c}\in\mathbb{R}^r)$ з нуль про-

стору матриці B_0. Отримуємо

$$c = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \\ + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\,\Delta\tau\Big\} + P_{B_0}\overline{c}(\forall c\in\mathbb{R}^r).$$

Тоді один з розв'язків $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (8), для якого $x(\cdot,\varepsilon)\colon [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$, $x(\cdot,\varepsilon)\in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $x(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$ і $x(t,0)=0$ може бути знайденим з наступної операторної системи:

$$x(t,\varepsilon) = e_A(t,a)P_{Q_r}c + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$c = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \\ + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\,\Delta\tau\Big\}, \qquad (12)$$
$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \\ + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t) + \varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0(z_0(\cdot,c_r^0)) + \\ + l_1 x(\cdot,\varepsilon) + R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Такого типу операторна система може бути розв'язаною методом простих ітерацій [4]. За допомогою цього методу ми отримуємо наступну збіжну при достатньо малих $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ процедуру для побудови розв'язку $x(t,\cdot)\in C[\varepsilon]$, $x(t,0)=0$ крайової задачі (8)

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \\ + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\,\Delta\tau\Big\},$$
$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0) + A_1(\tau)\times \qquad (13)$$
$$\times\big(e_A(\tau,a)P_{Q_r}c_k + x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon)\big) + \\ + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t) + \varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0(z_0(\cdot,c_r^0)) + \\ + l_1\Big[e_A(\cdot,a)P_{Q_r}c_k + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big] + R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Таким чином, справедлива наступна теорема:

Теорема 2. (Достатня умова існування розв'язків). *Нехай для крайової задачі* (1) ($\operatorname{rank} Q = n_1 < m$) *відповідна породжуюча крайова задача* (2) *має* r*-параметричну* ($r := n - n_1$) *сім'ю розв'язків* (4) *за виконання* d ($d := m - n_1$) *лінійно незалежних умов* (3). *Тоді для кожного дійсного кореня* $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ *рівняння для породжуючих констант* (5), *за умови, що* $\operatorname{rank} B_0 = d$, *крайова задача* (8) *має принаймні один розв'язок* $x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $x(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$, *що перетворюється в нуль при* $\varepsilon = 0$. *Цей розв'язок можна отримати зі збіжного при* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу* (13), *Крайова задача* (1) *при цьому має принаймні один розв'язок* $z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon)\in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $z(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$, *що перетворюється в породжуючий розв'язок* $z_0(t,c_r^0)$ *вигляду* (4) *при* $\varepsilon = 0$ *і може бути отриманий як результат ітераційного процесу* (13) $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^0) + x_k(t,\varepsilon)$, $k = 0,\dots,$ ε_0 *визначає область збіжності цього процесу.*

Приклад 1. Нехай маємо нелінійну двоточкову крайову задачу

$$\begin{cases} z^{\Delta} = z + f(t) + \varepsilon z^2 g(t), \quad t\in[0,1]\cup[2,3]_{\mathbb{Z}}, \\ lz = M_1 z(0) - M_2 z(3) = \alpha\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \qquad (14)$$

де $f(t), g(t)\in C_{rd}\big\{[0,1]\cup[2,3]_{\mathbb{Z}}\big\}$ — 2-вимірні вектор-функції,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4e+1 & 0 \\ 0 & 4e \end{pmatrix}, \quad M_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— 2×2-вимірні матриці, z^2— скалярний квадрат вектора z.

Використовуючи властивості Δ-диференціювання, знайдемо фундаментальну матрицю відповідної породжуючої однорідної системи $z^{\Delta} = z$, нормовану в точці $t_0 = 0$. Нехай $X(t) := e_A(t,t_0) = e_{I_2}(t,0)$ — фундаментальна матриця системи $z^{\Delta} = z$. Тоді мають місце рівності $X^{\Delta}(t) = X(t)$, $X^{\Delta}(1) = X(2) - X(1)$, $X^{\Delta}(2) = X(3) - X(2)$. Оскільки для $t\in[0,1]$ $X(t) = e^t I_2$, то фундаментальна матриця буде мати вигляд:

$$X(t) = \begin{cases} e^t I_2, & t\in[0,1], \\ 2^{t-1}eI_2, & t\in[2,3]_{\mathbb{Z}} = \{2,3\} \end{cases}$$

і матриця $Q = lX$ матиме вигляд: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що $Q^+ = Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_Q = P_{Q^*} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $P_{Q_r} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, $P_{Q^*} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$ $(d = r = 1)$. $F(t) = \int\limits_0^t X(t-\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau$, тобто lF буде мати вигляд:

$$lF = -\int\limits_0^1 e^{3-\tau}f(\tau)\,d\tau - \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau}ef(\tau).$$

Тоді умова розв'язності породжуючої крайової задачі:

$$\begin{cases} z^{\Delta} = z + f(t), \\ lz = \alpha \end{cases} \qquad (15)$$

буде мати вигляд

$$(0 \quad 1)\left(\alpha + \int\limits_0^1 e^{3-\tau}f(\tau)\,d\tau + \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau}ef(\tau)\right) = 0,$$

тобто, при $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}$ маємо лише одну умову:

$$\left(\alpha_2 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau}f_2(\tau)\,d\tau + \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau}ef_2(\tau)\right) = 0. \quad (16)$$

У випадку виконання умови (16), задача (15) має одно-параметричну сім'ю розв'язків вигляду:

$$z_0(t,c_r) = X(t)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}c_r + \int\limits_0^t X(t-\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau + X(t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\left(\alpha_2 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau}f(\tau)\,d\tau + \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau}ef(\tau)\right), c_r \in \mathbb{R}^1$$

і, підставляючи відповідні вирази для фундаментальної матриці, маємо:

$$z_0(t,c_r) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^t\left(\alpha_1 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau}f_1(\tau)\,d\tau + \right. \\ \left. + e\sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau}f_1(\tau)\right) \\ e^t c_r + \int\limits_0^t e^{t-\tau}f_2(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}, & t \in [0,1], \\ \begin{pmatrix} 2^{t-1}e\left(\alpha_1 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau}f_1(\tau)\,d\tau + \right. \\ \left. + e\sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau}f_1(\tau)\right) \\ 2^{t-1}ec_r + \int\limits_0^1 e^{1-\tau}f_2(\tau)\,d\tau + \\ + e\sum_{\tau=1}^{t-1}\left(2^{t-\tau-1}f_2(\tau)\right) \end{pmatrix}, & t \in \{2,3\}. \end{cases}$$

Тепер для крайової задачі (14) знайдемо необхідні умови існування розв'язку $z(t,\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один з породжуючих розв'язків $z_0(t,c_r)$. Нехай $f(t) = \begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}e^3 - e^2\\ \\ -\frac{3}{2}e^3 - e^2\end{pmatrix}$. Тоді умова розв'язності (16) виконана й одно-параметрична сім'я розв'язків задачі (15) має вигляд:

$$z_0(t,c_r) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^t\left(c_r + t\right)\end{pmatrix}, & t \in [0,1], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ e\left(2^{t-1}(c_r+1) + 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{e-2}(e^t - 2^{t-1}e)\right)\end{pmatrix}, & t \in \{2,3\}. \end{cases}$$

Складаємо рівняння для породжуючих констант задачі (14):

$$\int\limits_0^1 e^{3-\tau}e^{2\tau}(c_r+\tau)^2 g_2(\tau)\,d\tau + e\sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau}e^{2\tau}(c_r+\tau)^2 g_2(\tau) = 0, \quad t \in [0,1],$$

$$\int_0^1 e^{3-\tau}e^2\left(2^{\tau-1}(c_r+1)+1+\frac{1}{e-2}e^{\tau}-\right.$$
$$\left.-2^{\tau-1}e\right)^2 g_2(\tau)\,d\tau+e\sum_{\tau=1}^{2}2^{1-\tau}e^2\left(2^{\tau-1}(c_r+1)+\right.$$
$$\left.+1+\frac{1}{e-2}e^{\tau}-2^{\tau-1}e\right)^2 g_2(\tau)=0,\quad t\in\{2,3\}.$$

Поклавши $g_2(t)=t-1$, отримаємо

$$F(c_r)=e^3\int_0^1 e^{\tau}(c_r+\tau)^2(\tau-1)\,d\tau+$$
$$+2e^5,\quad t\in[\,0,1],$$

$$e^5\int_0^1\left(2^{\tau-1}(c_r+1)+1+\frac{1}{e-2}e^{\tau}-\right.$$
$$\left.-2^{\tau-1}e\right)^2 g_2(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}e^3\Big(2c_r+$$
$$+4+e\Big)^2=0,\quad t\in\{2,3\},$$

звідки c_r має наступні корені:

$$c_r\approx\begin{cases}\{-4,9;4,1\},\quad t\in[\,0,1],\\ \{-3,6;-6,3\},\quad t\in\{2,3\}.\end{cases}$$

Таким чином, $\operatorname{rank}B_0=1$ і за теоремою 2 крайова задача (14) має принаймні один розв'язок.

Список використаних джерел

1. M. Bohner and A. Peterson. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications.– Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2001.– 358 p.

2. A. A. Boichuk and A. M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.– Utrecht: VSP, 2004.– 317 p.

3. A. A. Boichuk, J. Diblík, D. Y. A. Khusainov, and M. Ružičková. Boundary value problems for weakly nonlinear delay differential systems// Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, vol. 2011, Article ID 631412, 19 pages, 2011.

4. E. A. Grebenikov and Yu. A. Ryabov. Constructive Methods for Analysis of Nonlinear Systems.– Moscow: Nauka, 1979.-– 431 p. (in Russian)

5. A. Boichuk and M. Bohner. Fredholm boundary-value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales// Mathematische Nachrichten, In press.

6. I. G. Malkin. Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations.– Moscow: Gostekhizdat, 1956.– 491 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 17.12.2012

УДК 517.9

Яременко М.І. [1], к.ф.-м.н.

Дослідження щільності множини області визначення генератора напівгрупи в множині області визначення самої напівгрупи в просторах Лебега

Доведено теорему про щільність множини області визначення локального генератора напівгрупи стиску в множині області визначення цієї напівгрупи стиску.

Ключові слова: напівгрупа стиску, локальний генератор,фільтр.

[1] ММЦ НАН України, Київ 4, вул. Терещенківська, 3.

N.I. Yaremenko[1], Ph.D

Investigation of the density of the set domain of the generator semigroup in the set of the domain of definition of the semigroup in Lebesgue spaces

The theorem on the density of the set domain of the local generator semigroup of contraction set in the domain of semigroup of contraction.

Key Words: semi-group of contraction, infinitesimal generator, filter .

[1] IMC NAS of Ukraine, Kyiv 4, Tereshchenkivska st., 3.

*E-mail: math.kiev@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., М. О. Перестюк

1. Вступ. У даній статті розглядається проблема щільності множини області визначення генератора напівгрупи [2] нелінійних операторів в множині області визначення самої напівгрупи стиску в просторах $L^p(R^l, d^l x), \quad p > 2$ [1–3].

2. Попередні відомості. Оператор A визначає відображення $\mathrm{A}: L^p(R^l, d^l x) \to L^p(R^l, d^l x)$, яке можна розглядати як (багатозначне) відображення з $C_{L_2(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t]$ в $L_{L_2(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t]$, тобто

$C_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t] \ni u \to \{v \in L_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t] : v(s) \in \mathrm{A}u(s)$ майже скрізь $\{s\}\}$.

Означення 1. Відображення $\tilde{\mathrm{A}}$ називається розширенням відображення A , якщо

$$\tilde{\mathrm{A}}: C_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t] \ni u \to$$

$$\{ v \in L_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t] : \exists u_n \in D(\mathrm{A}) \subset C_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t], n \in N$$

,

$$v_n \in \mathrm{A}u_n, \ \lim_{n\to\infty} u_n = u, \ \sigma - \lim_{n\to\infty} v_n = v \},$$

де $\sigma = \sigma(L_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t], C_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t])$ – σ-слабка топологія в $L_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t]$ відносно $C_{L^p(R^l, d^l x)}[\mathbf{0}, t]$.

Означення 2. Нелінійне, можливо, багатозначне відображення $\mathrm{A}: L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$, називається дисипативним, якщо

$$\left\langle f^{'} - g^{'}, (f - g)\left|f - g\right|^{p-2} \right\rangle \le \mathbf{0}$$

$\forall f^{'} \in \mathrm{A}f, q^{'} \in \mathrm{A}g$, де $\mathrm{A}f, \mathrm{A}g$ – множина значень відображення A елементів f і g відповідно. Позначимо $\mathrm{A}_{\mathbf{0}} f \equiv \lim\limits_{h \downarrow \mathbf{0}} \dfrac{\mathrm{T}_h f - f}{h}$, для всіх елементів $f \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

Відображення $\mathrm{A}_\phi : L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$, де

$$\mathrm{A}_\phi f = w - \lim_{h \in \varphi \in \phi} \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h}, \quad f \in L^p\left(R^l, d^l x\right),$$

називається ϕ-локальним генератором нелінійної напівгрупи $\mathrm{T}_t, t \ge \mathbf{0}$, якщо $\phi = \{\varphi\}$ – максимальний фільтр множин $\varphi \subset (\mathbf{0}, \infty)$, що збігається до нуля, за умови, що границя існує в просторі $L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

3. Теорема про щільність множини $D(A_0)$ в множині $D(\mathrm{T}_t)$. *Нехай $D(\mathrm{T}_t)$ – область визначення напівгрупи стиску T_t, при цьому $D(\mathrm{T}_t)$ є випуклою і замкнутою множиною в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Тоді область визначення $D(\mathrm{A}_\mathbf{0})$*

© М.І.Яременко, 2012

локального генератора $\mathrm{A_0}$ *напівгрупи* T_t *всюди щільна в* $D(\mathrm{T}_t)$.

Доведення теореми почнемо з деяких необхідних в подальшому позначень:

$$\mathrm{A_0}f \equiv \lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathrm{T}_h f - f}{h}, \quad \mathrm{A}_h \equiv \frac{\mathrm{T}_h - \mathrm{I}}{h},$$

або

$$\mathrm{A_0}f \equiv \lim_{h\downarrow 0}\mathrm{A}_h f, \qquad \mathrm{A}_\phi f \equiv w - \lim_{h\in\varphi\in\phi}\mathrm{A}_h f,$$

де ϕ – максимальний фільтр підмножини $\varphi \subset (0,\infty)$, що збігається до 0.

Тут як і раніше

$$\sup_{h>0}\|\mathrm{A}_h f\| < \infty,$$

$$\mathrm{A}_\lambda f = \{f - q : q \in L^p\left(R^l, d^l x\right),$$

$$f = w - \lim_{h\in\varphi\in\phi}(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} q, \lambda > 0\}.$$

Встановимо низку властивостей

а) Має місце рівність

$$[D(\mathrm{A_0})] = [D(\mathrm{A}_\phi)], \qquad (1)$$

де $[D]$ означає замикання області D в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

Дійсно, за побудовою $D(\mathrm{A}_\phi) \subset D(\mathrm{A_0})$. Отже $[D(\mathrm{A}_\phi)] \subset [D(\mathrm{A_0})]$. Покажемо, що $[D(\mathrm{A_0})] \subset [D(\mathrm{A}_\phi)]$. Для будь-якого $f \in D(\mathrm{A}_\phi)$ існує така послідовність $t_n \downarrow 0$, що $\mathrm{T}_{t_n} f \in D(\mathrm{A_0})$. Отже $\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{t_n} f = f$, тобто $[D(\mathrm{A_0})] \subset [D(\mathrm{A}_\phi)]$. Отже (1) доведено.

b) Нехай $f \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$ – довільний фіксований елемент і існують послідовність $\{q_n, n \in N\} \subset D(\mathrm{T}_t)$, послідовність $t_n \downarrow 0$ і число $k > 0$, для яких виконуються нерівності: $\|\mathrm{T}_{t_n} q_n - f\| > \|q_n - f\| + k$, $n \in \mathrm{N}$. (2)

Тоді елемент $f \notin D(\mathrm{T}_t)$.

Дійсно, припустимо супротивне, тобто нехай $f \in D(\mathrm{T}_t)$. Тоді з (2) і властивості стиску оператора T_t маємо

$$k = \|q_n - f\| + k - \|q_n - f\| \le$$

$$\|\mathrm{T}_{t_n} q_n - f\| - \|\mathrm{T}_{t_n} q_n - \mathrm{T}_{t_n} f\| \le$$

$$\le \|\mathrm{T}_{t_n} q_n - f - (\mathrm{T}_{t_n} q_n - \mathrm{T}_{t_n} f)\| = \|\mathrm{T}_{t_n} f - f\|. \qquad (3)$$

З неперервності напівгрупи T_t випливає, що $\forall f \in D(\mathrm{T}_t) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : t \in (0, \delta) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \|\mathrm{T}_t f - f\| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Тоді при $t_n \downarrow 0$ і $k > 0$ нерівність (3) суперечить (4), тобто елемент f не може належати $D(\mathrm{T}_t)$.

c) Нехай $f \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$ – довільний фіксований елемент і існує послідовність $\{q_n, n \in N\} \subset D(\mathrm{T}_t)$, $h \downarrow 0$ і число $k > 0$, для яких виконуються рівності: $\mathrm{A}_{h_n} q_n = \nu_n (q_n - f)$ для деякої послідовності $\nu_n > 0, h_n \downarrow 0$, де $\mathrm{A}_{h_n} = \frac{\mathrm{T}_{h_n} - \mathrm{I}}{h_n}$, $\lim_{n\to\infty}\|\mathrm{A}_{h_n} q_n\| = \infty$, $\|q_n - f\| \ge k > 0$.

Тоді елемент $f \notin D(\mathrm{T}_t)$.

Доведення також проведемо методом від супротивного. Нехай $f \in D(\mathrm{T}_t)$. Виберемо елемент $f_1 \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$ і послідовність елементів $\{f_{2n}, n \in N\} \subset L^p(R^l, d^l x)$ так, щоб виконувалися умови

$$\|f_1 - f\| \le \frac{k}{2},$$

$$f_{2n} - f = \frac{\left\langle f_1 - f, (q_n - f)|q_n - f|^{p-2}\right\rangle}{\|q_n - f\|^p}(q_n - f). \qquad (5)$$

Позначимо

$$\alpha_n \equiv \frac{\left\langle f_1 - f, (q_n - f)|q_n - f|^{p-2}\right\rangle}{\|q_n - f\|^p}. \qquad (6)$$

Тоді $|\alpha_n| \le \frac{1}{2}$.

З умови $A_{h_n} q_n = \nu_n (q_n - f)$ одержуємо $\mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n = h_n \nu_n (q_n - f)$. Тоді, враховуючи (5), (6), можна записати

$$\mathrm{T}_{h_n} q_n - f_{2n} = q_n - f + h_n \nu_n (q_n - f) + f - f_{2n} =$$

$$= (1 + h_n \nu_n - \alpha_n)(q_n - f). \qquad (7)$$

звідки

$$\left\langle \mathrm{T}_{h_n} q_n - f_{2n}, (f_1 - f_{2n})|f_1 - f_{2n}|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= (1 + h_n \nu_n - \alpha_n)\left\langle q_n - f, (f_1 - f_{2n})|f_1 - f_{2n}|^{p-2}\right\rangle = 0.$$

Далі використаємо лему Ріса про те що якщо $L \subset L^p\left(R^l, d^l x\right)$, тоді для будь якого $\delta > 0$ існує елемент $z \notin L$ з нормою одиниця, такий що $\|z - f\| > 1 - \delta$ для любого $f \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$, маємо

$$\|\mathrm{T}_{h_n} q_n - f_1\| \ge \|\mathrm{T}_{h_n} q_n - f_{2n}\| + \|f_1 - f_{2n}\| - \delta.$$

Далі використовуючи нерівність трикутника можемо записати

$$\| q_n - f_1 \| \le \| q_n - f_{2n} \| + \| f_{2n} - f_1 \| .$$

Враховуючи ці нерівності та використовуючи позначення, що були введені раніше одержуємо наступну нерівність

$$\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - f_1 \| - \| q_n - f_1 \| \ge h_n c(m) \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \| \qquad (8)$$

В (8) використано наслідок з властивості b) про те, що якщо $f \in D(\mathrm{T}_t)$, то $\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - f \| \le \| q_n - f \| + m$ для всіх $n \ge n(m)$.

Стала $c(m)$ в (8) залежить лише від m і не залежить від номера n.

Нехай далі $\| \mathrm{T}_{lh_n} f - f \| \le \frac{k}{2}$, де $l = 1, 2, ..., k$. Поклавши в (8) $f_1 \equiv \mathrm{T}_{lh_n}$, $l = 1, 2, ..., k$, одержимо

$$\| q_n - \mathrm{T}_{(l-1)h_n} f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{lh_n} f \| \ge$$

$$\ge \| \mathrm{T}_{h_n} q_n - \mathrm{T}_{lh_n} f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{lh_n} f \| \ge c(m) h_n \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \| .$$

Оскільки

$$\| q_n - f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{kh_n} f \| \ge c(m) k h_n \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \| , \qquad (9)$$

то можна покласти сталу $k = \left[\frac{\delta}{h_n} \right]$, отримаємо

$$\| q_n - f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{kh_n} f \| \le \| f - \mathrm{T}_{kh_n} f \| < \varepsilon . \qquad (10)$$

Нерівності (9) і (10) суперечливі, оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} h_n \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \| = \infty$.

d) Нехай $f \in L^p(R^l, d^l x)$ – довільний фіксований елемент. Тоді для будь-яких $h > 0$, $\lambda \ge 0$ існує такий елемент $q_{h\lambda} \in D(\mathrm{T}_t)$, що $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h) q_{h\lambda} = f$, причому $q_{h\lambda}$ залежить неперервно від $h > 0$ (при фіксованому $\lambda \ge 0$) і залежить неперервно від $\lambda \ge 0$ (при фіксованому $h > 0$).

Для доведення властивості d) потрібно побудувати відображення яке діє за правилом $\mathrm{E} : \varphi \to \frac{h}{1+h} f + \frac{1}{1+h} \mathrm{T}_h \varphi$, де $\varphi \in L^p(R^l, d^l x)$. Очевидно, що справедливі наступні оцінки

$$\| \mathrm{E}\varphi - \mathrm{E}\psi \| \le \frac{1}{1+h} \| \mathrm{T}_h \varphi - \mathrm{T}_h \psi \| \le \frac{1}{1+h} \| \varphi - \psi \| .$$

Тоді на підставі принципу стискаючих відображень можемо стверджувати, що рівняння $q = \mathrm{E}q$ має розв'язок [4].

Неперервна залежність елемента $q_{h\lambda}$ від h і λ очевидні.

Зауваження. За визначенням умова $q - \mathrm{A}_h q = f$, де $q \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$, еквівалентна рівності $q = (\mathrm{I} - \mathrm{A}_h)^{-1} f$ або $q = \frac{h}{1+h} f + \frac{1}{1+h} \mathrm{T}_h q$.

e) Нехай $f \in L^p(R^l, d^l x)$ – довільний фіксований елемент, $h > 0$ – довільна (фіксована) стала, множина F_f визначена таким чином

$$F_f \equiv \left\{ \psi : \psi \in D(\mathrm{T}_t), \left\langle f, \left(\mathrm{T}_h \psi - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h \psi - \psi \right|^{p-2} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Тоді для всіх $\psi \in F_f$ і елемента $q \in D(\mathrm{T}_t)$, що який задовольняє нерівність дисипативності $\left\langle \mathrm{T}_h q - \psi, \left(\mathrm{T}_h \psi - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h \psi - \psi \right|^{p-2} \right\rangle < 0$, має місце нерівність $\| q - \psi \| \ge \| \mathrm{T}_h q - \psi \|$.

Доведення властивості e) випливає з означення множини F_f і нерівності $\left\langle \mathrm{T}_h q - \psi, \left(\mathrm{T}_h \psi - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h \psi - \psi \right|^{p-2} \right\rangle < 0$. Дійсно, маємо:

$$\| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p = \| \mathrm{T}_h q - \mathrm{T}_h \psi + \mathrm{T}_h \psi - \psi \|^p =$$

$$= \left\langle \mathrm{T}_h q - \psi + \mathrm{T}_h \psi - \mathrm{T}_h \psi, \left(\mathrm{T}_h q - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h q - \psi \right|^{p-2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{T}_h q - \mathrm{T}_h \psi, \left(\mathrm{T}_h q - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h q - \psi \right|^{p-2} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \mathrm{T}_h \psi - \psi, \left(\mathrm{T}_h q - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h q - \psi \right|^{p-2} \right\rangle \le$$

$$\le \frac{\| \mathrm{T}_h q - \mathrm{T}_h \psi \|^p}{p} + \frac{\| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p}{q} , \text{ отже, маємо}$$

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{1}{p} \| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p \le \| q - \psi \|^p , \qquad \text{де}$$

$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, тобто $\| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p \le \| q - \psi \|^p$.

f) Нехай $f \in D(\mathrm{T}_t)$ – довільний фіксований елемент. Тоді при кожному $\lambda > 0$ множина елементів

$$\{ q_{h\lambda} = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f : h > 0 \} \qquad (11)$$

обмежена в просторі $L^p(R^l, d^l x)$. Більш того, існує слабка границя $q_\phi = w - \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f$, причому $q_\phi \in \{ q \in D(\mathrm{T}_t) : \| q - f \| < \rho \}$ для деякого $\rho > 0$.

Доведення цього факту проводиться методом від супротивного і випливає з властивості d) і наступних міркувань. Дійсно, нехай дано деяке $\rho > 0$. Позначимо $\lambda_0 \le \frac{\rho}{2M}$.

Якщо $\| q_{h\lambda_0} - f \| \geq \rho$, то існує таке число $h > 0$, що з рівності $(\mathrm{I} - \lambda_0 \mathrm{A}_h) q_{h\lambda_0} = f$ випливає нерівність

$$\| \mathrm{A}_h q_{h\lambda_0} \| = \frac{1}{\lambda_0} \| q_{h\lambda_0} - f \| \geq 2M . \qquad (12)$$

Згідно властивості d) існує елемент $q_{h\lambda} \in D(\mathrm{T}_t)$, для якого $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h) q_{h\lambda} = f$. З необмеженості сукупності (11) випливає, що для будь-якого $\rho > 0$ існує таке число $h = h(\rho) > 0$, що для елемента $q_{h\lambda} \in D(\mathrm{T}_t)$ виконується нерівність $\| q_{h\lambda} - f \| \geq \rho$. Тоді згідно властивості c) існує така стала $M > 0$, що якщо має місце нерівність $\| \mathrm{A}_h q_{h\lambda} \| < M$, то $\| q_{h\lambda} - f \| \geq \rho$, що протирічить (12).

Отже

$$\| q_{h\lambda_0} - f \| \leq \rho \quad \text{при всіх} \quad h > 0 . \qquad (13)$$

Оскільки обмежені множини в $L^p(R^l, d^l x)$ є слабо компактними, то існує слабка границя $q_\phi = w - \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} q_{h\lambda_0}$, причому $q_\phi \in \{q : \| q - f \| < \rho\}$ при деякому $\rho > 0$. Оскільки множина $D(\mathrm{T}_t)$ – випукла і слабо замкнена в $L^p(R^l, d^l x)$, то $q_\phi \in D(\mathrm{T}_t)$. Таким чином, із (13) і рівності $\lambda_0 = \dfrac{\rho}{2M}$ випливає нерівність $\| q_{h\lambda_0} - f \| \leq 2\lambda_0 M$, що означає обмеженість множини $\{q_{h\lambda_0} : h > 0\}$ в просторі $L^p(R^l, d^l x)$.

g) Нехай $f \in D(\mathrm{T}_t)$ – довільний фіксований елемент і

$$w - \lim_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f = q . \qquad (14)$$

Тоді існує така послідовність $h_n \downarrow 0$, що

$$\lim_{n \to \infty} \| (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f - q \| = \rho > 0 \qquad (15)$$

і навпаки, якщо виконується (15) для деякої послідовності $h_n \downarrow 0$, то має місце властивість (14).

Дійсно, із рівності $w - \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f = q$ внаслідок метризуємості множини $\left\{(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f, h > 0\right\}$, що в свою чергу є наслідком сепарабельності і обмеженості множини $\left\{(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f\right\}$ в слабкій топології та властивості f), випливає, що існує такий напрям $\{h > 0\}$, для якого виконується співвідношення (14). Якщо послідовність, що задовольняє умову (14), сильно збігається до елемента q, то для неї виконується рівність $\lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f = q$. Таким чином, при згаданих вище умовах існує послідовність $\left\{(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f, n \geq 1\right\}$ і виконуються (14) і (15) одночасно.

h) Нехай $f \in L^p(R^l, d^l x)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n(\varepsilon) > 0$, що для всіх $n \geq n(\varepsilon)$ і $h_n > 0$ виконуються нерівності

$$\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n \| < \varepsilon, \quad \left| \left\langle q_n - q, (f - q) \middle| f - q \right|^{p-2} \right\rangle \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \| q_n - q \|^p - \rho^p \right| < \varepsilon , \qquad (16)$$

де $q_n = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f$, елемент $q \in D(\mathrm{T}_t)$, $\rho > 0$ – деяке число.

Більш того, якщо ε – достатньо мале, то при фіксованому $n \geq n(\varepsilon)$ існують такі $k_n > 0$ і $m(\varepsilon, n) > n$, що

$$\sup_{0 < h < h_n} \left| \left\langle \mathrm{T}_h - q_n, (q_m - q) \middle| q_m - q \right|^{p-2} \right\rangle \right| < \varepsilon ,$$

$$\left| \left\langle q - q_n, (q_m - q) \middle| q_m - q \right|^{p-2} \right\rangle \right| < \varepsilon$$

для всіх $m \geq m(\varepsilon, n)$; (16)

$$\| q - q_m \| + k_n < \| \mathrm{T}_{h_n} q_n - q_m \| \quad \text{для всіх} \quad m \geq m(\varepsilon, n) \mathbf{1} ; \qquad (17)$$

$$\| \mathrm{T}_h q_n - \mathrm{T}_{h_n} q_n \| < k_n , \text{ де } h = \left[\frac{h_n}{h_m} \right] h_m , \text{ для всіх } m \geq m(\varepsilon, n) . \qquad (18)$$

Дійсно, із умови $\mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n = h_n \mathrm{A}_{h_n} q_n = h_n \lambda^{-1} (q_n - f) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ одержуємо, що $\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n \| < \varepsilon$.

Якщо врахувати (16) і (17), то (18) є очевидним.

Із компактності множини $\{\mathrm{T}_{h_n} q_n - q : h \in [0, h_n]\}$ випливає співвідношення $\lim\limits_{n \to \infty} \left\langle q_n - q, \left(\mathrm{T}_h q_n - q\right) \middle| \mathrm{T}_h q_n - q \right|^{p-2} \right\rangle = 0$, де збіжність є рівномірною відносно h. Отже властивість (17) доведено.

Властивість (17) випливає із леми Ріса,а властивість (18) – із рівності $\lim\limits_{m \to \infty} \left[\dfrac{h}{h_m} \right] h_m = h$.

i) Нехай виконуються умови п. h). Тоді якщо $n > n(\varepsilon)$ для довільного (фіксованого) $\varepsilon > 0$, то існує така послідовність η_n, де

$\mathbf{0} < \eta_n < h_n$,

що $\left\langle \mathrm{T}_{\eta_n} q_n - q, (f-q)\left|f-q\right|^{p-2} \right\rangle < -\rho^p + \mathbf{3}\varepsilon$, (19)

де $q_n = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f$, елемент $q \in D(\mathrm{T}_t)$ і число $\rho > \mathbf{0}$ визначені рівностями (12),(13) відповідно.

Для доведення (19) використаємо твердження е), де покладемо $\psi = q_m$, $h = h_m$, $q = \mathrm{T}_{ph_m}$ при $p = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \left[\frac{h_n}{h_m}\right]$. Із нерівності $\left\langle \mathrm{T}_{ph_m} q_n - q_m, \left(\mathrm{T}_{h_m} q_m - q_m\right)\left|\mathrm{T}_{h_m} q_m - q_m\right|^{p-2} \right\rangle \le \mathbf{0}$ при всіх p одержуємо

$\| \mathrm{T}_{ph_m} q_n - q_m \| \ge \| \mathrm{T}_{(p+1)h_m} q_n - q_m \|$.

Використовуючи (18), для деяких $k_n > \mathbf{0}$ маємо

$$\| \mathrm{T}_{ph_m} q_n - q_m \| \le \| \mathrm{T}_{h_n} q_n - \mathrm{T}_{\left[\frac{h_n}{h_m}\right]h_m} q_n \| +$$

$$+ \| \mathrm{T}_{\left[\frac{h_n}{h_m}\right]h_m} q_n - q_m \| < k_n + \| q_n - q_m \|. \quad (20)$$

Таким чином, з (20) і (18) одержуємо протиріччя.

Отже маємо $\eta = ph_m$, де $\eta \in (\mathbf{0}, h_n)$, $\left\langle \mathrm{T}_{\eta} q_n - q_m, \left(\mathrm{T}_{h_m} q_m - q_m\right)\left|\mathrm{T}_{h_m} q_m - q_m\right|^{p-2} \right\rangle > \mathbf{0}$.

Із рівності $\mathrm{T}_{h_m} q_m - q_m = -h_m \lambda^{-1}(f - q_m)$, яка вже використана при доведенні нерівностей (20), маємо $\left\langle \mathrm{T}_{\eta} q_n - q_m, (f - q_m)\left|\mathrm{T}_{h_m} q_m - q_m\right|^{p-2} \right\rangle < \mathbf{0}$. Використовуючи нерівність (20) отримуємо $\left\langle \mathrm{T}_{\eta} q_n - q\ , (f - q_m)\left|\mathrm{T}_{h_m} q_m - q_m\right|^{p-2} \right\rangle < -\rho^p + \mathbf{2}\varepsilon$, звідки, знаходимо:

$$\left\langle \mathrm{T}_{\eta} q_n - q, (f-q)\left|f-q\right|^{p-2} \right\rangle < -\rho^p + \mathbf{3}\varepsilon,$$

тобто (19) доведено.

j) Нехай $f \in D(\mathrm{T}_t)$ – довільний елемент. Тоді, якщо виконується співвідношення $q_\lambda = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_\lambda)^{-1} f$, то $q_\lambda = \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f$.

Доведення проведемо методом від супротивного. Згідно з властивістю d) маємо, що елемент $q_{h\lambda} = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f$ належить області $D(\mathrm{T}_t)$. Нехай існує послідовність $\{q_n\} \in \{q_{h\lambda}\}$, яка не прямує до q сильно. Тоді, використовуючи нерівності Гельдера та Юнга, маємо

$$\| q_\lambda - f \|^p = \left\langle q_\lambda - f, (q_\lambda - f)\left|q_\lambda - f\right|^{p-2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle q_\lambda - f - \mathrm{T}_{\eta_n} q_n + \mathrm{T}_{\eta_n} q_n, (q_\lambda - f)\left|q_\lambda - f\right|^{p-2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{T}_{\eta_n} q_n - q_\lambda, (q_\lambda - f)\left|q_\lambda - f\right|^{p-2} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle f - \mathrm{T}_{\eta_n} q_n, (q_\lambda - f)\left|q_\lambda - f\right|^{p-2} \right\rangle \le$$

$$\le \frac{\mathbf{1}}{p}\left\| \mathrm{T}_{\eta_n} q_n - q_\lambda \right\|^p + \mathbf{2}\frac{\mathbf{1}}{q}\left\| q_\lambda - f \right\|^p + \frac{\mathbf{1}}{p}\left\| f - \mathrm{T}_{\eta_n} q_n \right\|^p,$$

отже

$$\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{q}\right) p \left\| q_\lambda - f \right\|^p \le \left\| \mathrm{T}_{\eta_n} q_n - q_\lambda \right\|^p.$$

Оскільки множина $\{\| q_n - f \| : n \in N\}$ – обмежена, то існують таке $k_n > \mathbf{0}$, що для будь яких $n > n(\varepsilon)$ і деяких $\eta_n \in (\mathbf{0}, h_n)$ справедлива нерівність $\| \mathrm{T}_{\eta_n} q_n - f \| > \| q_n - f \| + k_n$,

Використовуючи властивість b), маємо $f \notin D(\mathrm{T}_t)$. Одержана суперечність доводить властивість j).

k) Нехай елемент $q \in D(\mathrm{T}_t)$. Якщо існує такий елемент $f \in D(\mathrm{T}_t)$, що $q = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_\lambda)^{-1} f$ для деякого $\lambda > \mathbf{0}$, то $q \in D(\mathrm{A}_\phi)$.

Дійсно, з властивості j) випливає існування такої послідовності $h_k \downarrow \mathbf{0}$, що послідовність $q_k = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_k})^{-1} f \to q$ сильно при $k \to \infty$. При фіксованому $h > \mathbf{0}$ і $k = \left[\frac{h}{h_k}\right] n_k$, згідно рівності $\lambda(\mathrm{T}_{h_k} q_k - q_k) = h_k (q_k - f)$ маємо

$$\lambda \| \mathrm{T}_{n_k h_k} q_k - q_k \| \le \lambda \sum_{n=1}^{n_k} \| \mathrm{T}_{nh_k} q_k - \mathrm{T}_{(n-1)h_k} q_k \| \le$$

$$\le \lambda n_k \| \mathrm{T}_{h_k} q_k - q_k \| \le n_k h_k \| q_k - f \|.$$

Звідси, враховуючи співвідношення $q_k \to q$, $n_k h_k \to h$, $\mathrm{T}_{n_k h_k} q_k \to \mathrm{T}_\eta q$, при достатньо великих значеннях k одержуємо $\left\| \frac{\mathrm{T}_h q - q}{h} \right\| \le \frac{\| q - f \|}{\lambda}$ для всіх $h > \mathbf{0}$.

Оскільки множина $\{\mathrm{A}_h q : h > \mathbf{0}\}$ обмежена, то внаслідок її слабкої компактності існує слабка границя $w - \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} \mathrm{A}_h q$.

l) Нехай $D(\mathrm{T}_t) = L^p(R^l, d^l x)$. Тоді для того, щоб елемент $f \in \mathrm{A}_\lambda q$ необхідно і достатньо, щоб існувала така послідовність q_h, що

$$\lim_{h\in\varphi\in\phi} q_h = q, \quad \lim_{h\in\varphi\in\phi} \mathrm{A}_h q_h = f.$$

Дійсно, нехай $q = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_\lambda)^{-1}(q - \lambda f)$. Тоді генератор A_λ не залежить від λ, тобто $\mathrm{A}_\lambda = \mathrm{A}_\mu$ при $\lambda, \mu > \mathbf{0}$.

Покажемо, що A_λ не залежить від вибору максимального фільтра ϕ. Нехай ϕ_1, ϕ_2 – максимальні фільтри. Позначимо

$$q_1 = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{\lambda\phi_1})^{-1} f, \quad q_2 = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{\lambda\phi_2})^{-1} f.$$

Тоді існують такі послідовності $h_n \downarrow \mathbf{0}$, $\eta_n \downarrow \mathbf{0}$, що виконуються рівності

$$q_1 = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f, q_2 = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{\eta_n})^{-1} f.$$

Припустимо, що $q_1 \neq q_2$, причому, нехай для визначеності $\| q_1 - f \| \geq \| q_2 - f \|$. Тоді існує число $k > \mathbf{0}$, для якого виконується нерівність

$$\left| \left\langle q_2 - f, (f - q_1) \left| f - q_1 \right|^{p-2} \right\rangle \right| + k \leq \| f - q_1 \|^p,$$

звідки, застосовуючи властивість j), для достатньо великих чисел n, m одержуємо нерівність

$$\sup_{\mathbf{0}<h<\eta_n} \left\langle \mathrm{T}_h q_{2n} - f, (q_{1m} - f) \left| q_{1m} - f \right|^{p-2} \right\rangle \geq \| q_{1m} - f \|^p.$$

Тут використано співвідношення $\sup_{\mathbf{0}<h<\eta_n} \| \mathrm{T}_h q_2 - f \|^p \geq \| q - f \|^p - \frac{k}{\mathbf{4}}$, яке виконується для достатньо великих n.

Далі одержимо оцінки

$$\| f - q_1 \|^p = \| q_1 - \mathbf{2}f + f + \mathrm{T}_h q_2 - \mathrm{T}_h q_2 \|^p =$$

$$= \left\langle \mathrm{T}_h q_2 - (\mathbf{2}f - q_1), (f - q_1) \left| f - q_1 \right|^{p-2} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle f - \mathrm{T}_h q_2, (f - q_1) \left| f - q_1 \right|^{p-2} \right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{\left\| \mathrm{T}_h q_2 - (\mathbf{2}f - q_1) \right\|^p}{p} + \frac{\left\| f - q_1 \right\|^p}{q} +$$

$$+ \frac{\left\| f - \mathrm{T}_h q_2 \right\|^p}{p} + \frac{\left\| f - q_1 \right\|^p}{q},$$

отже, остаточно для $h \in (\mathbf{0}, \eta_n)$ маємо

$$\frac{\left\| \mathrm{T}_h q_2 - (\mathbf{2}f - q_1) \right\|^p}{p} \geq \frac{\left\| f - q_1 \right\|^p}{q} - const. \qquad (21)$$

Таким чином маємо, що $\mathbf{2}f - q_1 \notin D(\mathrm{T}_t)$. Згідно властивості b) нерівність (21) суперечить припущенню $D(\mathrm{T}_t) = L^p(R^l, d^l x)$.

Доведення твердження теореми. Згідно властивості f) для довільного елемента $f \in D(\mathrm{T}_t)$ існує такий елемент $q \in D(\mathrm{T}_t)$, що виконується рівність $q = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_\lambda)^{-1} f$, причому $\| f - q \| \leq \rho$ для деякого числа $\rho > \mathbf{0}$. Використовуючи властивість k), маємо $q \in D(\mathrm{A}_\phi)$. Оскільки ρ – довільне число, з рівності $[D(\mathrm{A}_\mathbf{0})] = [D(\mathrm{A}_\phi)]$ випливає твердження теореми.

4. Висновки. Досліджено властивості щільності множини області визначення локального генератора напівгрупи нелінійних операторів стиску в множині області визначення самої напівгрупи стиску в просторах $L^p(R^l, d^l x), \quad p > 2$ [5].

Список використаних джерел

1. *Yosida K.* Functional analysis / K. Yosida. – M.: Mir, 1967. – 624 c.
2. *Komura Y.* Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493 – 507.
3. *Kato T.* Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.
4. *Minty G.* Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / G. Minty // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341 – 346.
5. *Yaremenko M.I.* Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi- groups of contraction in L^p / M.I.Yaremenko // Матеріали конференції «International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008). May 12-17, 2008.» – 2008. – С.43.

Надійшла до редколегії 29.05.12

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.9

Rukhaia Kh.[1], prof., Tibua L., Chankvetadze G., Mikhanadze G.

An Algorithm of the Classification of Unranked Propositional Logic Formulas

Formulas of propositional logic are proved as algorithmic processes. It is established that all these processes can be completed and their final values are one of the following halting constants: T (a valid formula), F (an inconsistent formula) and S (an indefinite formula).

Key words: Unranked logic, Classification of formulas, Directive operator of the process.

[1] VIAM, Tbilisi State University and Sokhumi State University, Georgia,
e-mail: khimuri.rukhaia@viam.sci.tsu.ge

Х.М. Рухая[1], проф., Л.М. Тибуа, Г.О. Чанкветадзе, Г.М. Миканадзе

Об одном алгоритме классификации формул безранговой логики высказываний

В работе рассматривается безранговая логика высказываний, каждая формула которой рассматривается, как определенный алгоритмический процесс стратегиями T, F и $T+F$. Установлено, что все алгоритмические процессы завершаются и ответом является либо тождественно истинная формула, либо тождественно ложная формула, либо строго выполнимая формула.

Ключевые слова: безранговая логика, классификация формул, оператор управляющий процессом.

[1] Тбилисский Государственный Университет, Сухумский Университет

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012)

The following symbols of unranked propositional logic are considered in the present paper

I. **Basic symbols::**

1) Propositional constants: $t,\ f,\ s$
2) Propositional variables: $P_0, P_1, \ldots$
3) Logical connectives: $\wedge, \vee, \neg$
4) **[,]**

II. **Signs introduced by the definition of type I from [2].**

III. Auxiliary symbols T (halting constant «a valid formula»), F (halting constant «an inconsistent formula»), S (halting constant «an indefinite formula»);

IV. Meta-variables $A, B, A_1, \ldots$ to denote formulae and Meta-variables $\Phi, \Phi_1, \ldots$ to denote sequence formulae.

We define formulas as follows:

1) The simplest formulas are propositional constants and propositional variables.

2) $\neg A$ is a formula.

3) $[A \wedge B]$, $[A \vee B]$, $\wedge \Phi A$ and $\vee \Phi A$ are formulas.

4) If σ is an $n-$ place logical-relative operator introduced by the definition of type I, then $[\sigma A_1 \ldots A_n]$ are formulas.

5) We do not have other formulas than those defined by items 1-4.

As an example of *n+1*-ary logical operator we define the operators $\bigvee^{n+1}$ and $\bigwedge^{n+1}$ as:

1. $\vee^1 A - A.\ \vee^{n+1} A_1 \ldots A_n A - \vee\vee^n A_1 \ldots A_n A$ to be read as: «disjunction of formulas $A_1, \ldots, A_n, A$», $n = 1, 2, \ldots$

2. $\wedge^1 A - A.\ \wedge^{n+1} A_1 \ldots A_n A - \wedge\wedge^n A_1 \ldots A_n A$ to be read as: «Conjunction of formulas $A_1, \ldots, A_n, A$», $n = 1, 2, \ldots$

Note that if we remove the place measure from the operators $\bigvee^{n+1}$ and $\bigwedge^{n+1}$, then we get usual unranked connectives $\bigvee$ and $\bigwedge$.

Rank of these operators can be any natural number, which can be read from the context.

The given occurrence of an operator σ in a formula A is called **main operator,** if it is not in the scope of any other operator occurring in A.

The given occurrence of an operator σ in a part B of a formula A is called **main operator,** if it is not in the scope of any other operator occurring in B.

Assume that $A_1, \ldots, A_n$, $(n \geq 2)$ are the main operators of the formulas, which differ in the sign $\vee$, then any formula constructed by means of these formulas and disjunctive sign $\vee$ is **called a formula of disjunctive type** and $A_1, \ldots, A_n$, are called the disjunctive parts of the constructed formula.

Assume that $A_1, \ldots, A_n$, $(n \geq 2)$ are the main operators of the formulas, which differ in the sign $\wedge$,

© Х.М Рухая, Л.М. Тибуа, Г.О. Чанкветадзе, Г.М. Миканадзе, 2013

then any formula constructed by means of these formulas and conjunctive sign $\vee$ is called a formula of conjunctive type and $A_1,\ldots,A_n$, are called the conjunctive parts of the constructed formula.

We define **the main part of a formula** as follows:

1) If a formula is of type $\neg A$, then its main part is A.
2) If a formula is of disjunctive type, then its main parts are disjunctive ones.
3) If a formula is of conjunctive type, then its main parts are conjunctive ones.
4) If a formula is of type $\sigma A_1,\ldots,A_n$, then its main parts are $A_1,\ldots,A_n$.
5) If a formula is of type $\wedge\Phi A$ and $\vee\Phi A$, then its main parts are A and Φ.

Every formula is considered as the definite algorithmic process. We describe this process as follows.

An algorithmic process begins from the main operator of the formula, which is called **the directive operator** of the process.

An immediate **consequence of the directive operator of the process** is formulated in the manner as:

1) An immediate consequence of the formula(operator) *t is* T;
2) An immediate consequence of the formula(operator) *f* is F;
3) An immediate consequence of the formula(operator) *s* is *S*;
4) An immediate consequence of the propositional variable(operator) *p* and propositional Φ is *s*;
5) If a formula is of type $\neg A$, then we have the following immediate consequences of the operator $\neg$:
   a) *t*. if $A \cong f$;
   b) *f*, if $A \cong t$ A≅t;
   c) *B*, if $A \cong \neg B$;
   d) $\wedge\neg A_1\ldots\neg A_n$ is a formula of conjunctive type if A is a formula of disjunctive type and a complete enumeration of its disjunctive parts is $A_1,\ldots,A_n$.
   e) $\vee\neg A_1\ldots\neg A_n$ is a formula of disjunctive type if A is a formula of conjunctive type and a complete enumeration of its conjunctive t parts is $A_1,\ldots,A_n$.
   f) s, if A≅s;
   g) expectation in all other cases.
6) If a formula is of disjunctive type, then an immediate consequence of the operator $\vee$ is:
   a) *t*, if some disjunctive part is *t*.
   b) *f*, if all its disjunctive parts are *f*.
   c) *t*, if some disjunctive part is the negation of one or several disjunctive parts;
   d) a formula which is obtained from a formula of disjunctive type by elimination of disjunctive parts which are equal to *f*.
   e) a formula which is obtained from a formula of disjunctive type by elimination of repeated disjunctive parts.
   f) a formula of conjunctive type $\wedge[\vee A_1\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_nB_k]\ldots[\vee A_1\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_nB_1]$ where $A_1,\ldots,A_n$ is a complete enumeration of disjunctive parts of a given formula, while A_i ($i\in\{1,\ldots,n\}$) is the first disjunctive part which is a formula of conjunctive type and $B_1,\ldots,B_k$ is a complete enumeration of its conjunctive parts;
   g) expectation in all other cases.
7) If a formula is of conjunctive type, then an immediate consequence of the operator $\vee$ is:
   a) *f*, if some conjunctive part is *f*.
   b) *t*, if all its conjunctive parts are *t*.
   c) *f*, if some conjunctive part is the negation of one or several conjunctive parts;
   d) a formula which is obtained from a formula of conjunctive type by elimination of conjunctive parts which are equal to *t*.
   e) a formula which is obtained from a formula of conjunctive type by elimination of repeated conjunctive parts.
   f) a formula of disjunctive type $\vee[\wedge A_1\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_nB_1]\cdots[\wedge A_1\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_nB_k]$ where $A_1,\ldots,A_n$ is a complete enumeration of conjunctive parts of a given formula, while A_i ($i\in\{1,\ldots,n\}$) is the first conjunctive part which is a formula of disjunctive type and $B_1,\ldots,B_k$ is a complete enumeration of its disjunctive parts;
   g) expectation in all other cases.
8) If a formula is of the form $\sigma A_1,\ldots,A_n$, where σ is the operator introduced by the definition, then an immediate consequence of the operator σ is the formula on the right-hand side of its definition.

When we get an immediate consequence of the directive operator or passes in the expectation state, then control is given to some other operator. After a defined operation, it gets the control. In particular:

If during the performance of the process defined by the formula $\neg A$, the negation operator passed in the state of expectation, then control is given over to the main operator of the main part A. After obtaining an immediate consequence of this operator, the negation operator recovers control.

If during the performance of the process defined by a formula of disjunctive(conjunctive) type the directive operator passes in the expectation state, then control is given to the first from the right main operator of the main part of this formula; after ending its performance, this operator recovers control. If after recovering control, the disjunctive(conjunctive) operator again passes in the expectation state, then control is given to the main operator of the main part having the same property. This process goes on until the main operator of all those main parts, the length of which does not exceed 2, receives control.

If after this, the directive operator again passes in the expectation state, then control is given to the main operator of the disjunctive(conjunctive) part of maximal length until this part becomes a formula of conjunctive (disjunctive) type or a propositional variable or the negation of a variable.

Since at every stage of the process performance there may occur a change in the main operator of the obtained formula, the process has one or several control operators.

In particular, we consider the algorithmic process by the T-strategy, F-strategy and $T+F$-strategy. A difference between these strategies arises only at the time of the process performance when the conditions f) for formulas of disjunctive and conjunctive type are satisfied. For the T-strategy the condition f) of the disjunctive type formula is fulfilled, but the condition f) of the conjunctive type formula is left out. For the F-strategy the condition f) of the conjunctive type formula is fulfilled, but the condition f) for the disjunctive type formula is left out. In the case of the $T+F$-strategy a parallel process begins to take place from a certain stage. In particular, the latter process begins when the formula obtained during the first realization of the condition f) is fulfilled simultaneously with the preceding formula according to the following rule. If the realized condition f) is a formula of disjunctive(conjunctive) type, then the fulfillment of the obtained formula of conjunctive (disjunctive) types continued by T-strategy (F-strategy), while the processing of the given formula of disjunctive(conjunctive) type is continued by the -F-strategy (T-strategy). The $T+F$ process is halted only if some parallel process produces the halting constant T or F or two halting constants S.

The following theorems are immediate consequence of the algorithm process and [4;5]

Theorem 1. A formula A considered as an algorithmic process is fulfilled by the $T+F$-strategy and its final value is equal to: a) the halting constant T, if A is a valid formula; b) the halting constant F, if A is an inconsistent formula, and c) the halting constant S, if A is a satisfiable formula.

Theorem 2. A valid formula considered as an algorithmic process is fulfilled by the T-strategy and its final value is equal to the halting constant T.

Theorem 3. An inconsistent formula considered as an algorithmic process is fulfilled by the F-strategy and its final value is equal to the halting constant F.

Theorem 4. A satisfiable formula differing from a valid formula and considered as an algorithmic process T or F or $T+F$-strategy is fulfilled and its final value is the halting constant S.

Theorem 5. A formula A considered as an algorithmic process is fulfilled.

Acknowledgements

This research has been Supported by the Georgian Rustaveli National Science Foundation under the project № D/16/4 - 120/11.

Authors would like to thank the editorial board of this bulletin for their sincere help with the paper.

References

1) Rukhaia K.H; Tibua L.M.; Chankvetadze G., Mikhanadze G.; Unranked Formal Mathematical Theory. // Reports of The Russian Conference of the Sobolov Institute of Mathematics.- 2012. (in Russian)

2) Pkhakadze Sh.; Some Problems of the Notation Theory// TSU-1977.-p.195.

3) Kutsia T., Theorem Proving with Sequence Variables and Flexible Arity Symbols.// In: Proceedings of LPAR 2002.-p. 278-291.

4) N. Nikitchenko.; Applicative compositions of Partial Predicates. Kibernetika i systemny analiz, No.2 (2000) 3-19. (In Russian)

5) C. Chen, R. Li; Mathematical Logic and Automated Theorem Proving. a//- M.- 1983.

6) Burbaki N. ; Set Theory. M.- 1965;.- p.453.

7) Rukhaia Kh.M.,Tibua L., Chankvetadze G., Dundua B.; One Method of constructing a formal system // AMIM - 2006. – Т. 11. – № 2. –p. 3–15.

Надійшла до редколегії 03.12.2012

УДК 519.682.1

Буй Д.Б.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Кахута Н.Д.[2], к.ф.-м.н., доц.,
Шишацька О.В.[3]

Композиційна семантика SQL-подібних мов та суміжні питання

Представлено основні результати роботи наукової групи НДС «Проблем програмування» Київського національного університету імені Тараса Шевченка, ключовим напрямком роботи якої є дослідження алгебр композиційного типу. Наведено теоретико-практичні досягнення в дослідженні теорії програмних алгебр композиційного типу, проілюстровано можливість застосування цієї теорії до нагальних потреб.

Ключові слова: композиційна семантика, програмна алгебра, бази даних, таблична алгебра.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
[2] Університет економіки і права «Крок», 03313, м.Київ, вул. Лагерна, 30-32, e-mail: kahuta@krok.edu.ua
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: oshyshatska@gmail.com

D.B. Buy[1], PhD, professor,
N.D. Kahuta[2], PhD,
O.V. Shyshatska[3]

Compositional semantics of the family of the SQL languages and related questions

The main results of the research group research sector "Programming problems" of Taras Shevchenko National University of Kyiv presents. A key area of work is to study algebra composite type. Theoretical and practical advances in achievements of the theory of program algebras composite type presented. The applicability of this theory to immediate needs illustrated.

Key Words: compositional semantics, software algebra, database, table algebra.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
[2] University of Economics and Law "Krok", 03313, Kyiv, Lagerna st., 30-32,
e-mail: kahuta@krok.edu.ua
[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: oshyshatska@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Аналіз причин сучасного критичного стану в застосуванні формальних моделей до створення складних промислових програмних систем дозволяє сформулювати наступні вимоги, яким повинні відповідати сучасні моделі програм: експлікативність; композиційність; інтенсіональність; явне використання структур іменування; чітка витримка рівнів абстракції моделей.

Серед потенційно можливих моделей, які задовольняють наведеним вимогам, для дослідження обрані програмні алгебри композиційного типу, які базуються на композиційному програмуванні, закладеному в працях академіка В. Н. Редька у 70-х роках минулого століття.

Реальні теоретико-практичні досягнення теорії програмних алгебр композиційного типу і можливість застосування цієї теорії до нагальних потреб практичного програмування визначають актуальність дослідження.

В роботі наведено основні результати роботи наукової групи під керівництвом Д.Буя.

Структура роботи є наступною: наведено напрямок дослідження, перелік науковців, що займаються даними питаннями, основні публікації та основні результати.

Композиційна семантика SQL-подібних мов (*Ю.Брона, Д.Буй, С.Поляков, В.Редько*) [1-5]

Побудовано програмну алгебру, орієнтовану на визначення семантики операторів маніпулювання даними SQL-подібних мов.

Носій цієї алгебри складається з часткових багатомісних функцій вигляду

© Д.Б.Буй, Н.Д. Кахута, О.В. Шишацька, 2013

$$f^{(n)}: X_1 \times ... \times X_n \tilde{\to} X \text{, де } n \geq 1,$$

$$X, X_1, ..., X_n \in \{D, 2^D, S, T, T_g, Bool\}.$$

Сигнатура містить композиції фільтрації, взяття повного образу, агрегування, рекурсії та стандартну підстановку.

Множину базових функцій та предикатів формують елементи: теоретико-множинні функції об‘єднання, перетину та різниці таблиць; функція вилучення дублікатів; функція побудови упорядкованих таблиць; предикати та функції для побудови агрегатних функцій композицією агрегування; функція групування; функції внутрішнього і зовнішнього з‘єднання; операції кон‘юнкції, диз‘юнкції та заперечення тризначної сильної логіки Кліні; операція об‘єднання сумісних рядків, функції іменування та розіменування рядків; операції та предикати універсального домену.

Основним результатом дослідження є

Теза: Замикання множини базових функцій та предикатів композиціями фільтрації, взяття повного образу, агрегування, підстановки та рекурсії містить функції, які є семантиками всіх операторів маніпулювання даними SQL-подібних мов, включаючи CTE вирази в їх рекурсивній формі.

Теорія табличних алгебр (*Ю.Брона, Д.Буй, С.Загорський, В.Редько*) [6-11]

Побудована спеціальна програмна алгебра, носієм якої виступають функції на табличних даних, а в якості сигнатурних операцій використовуються композиції (оператори), які дозволяють будувати складні запити з атомарних функцій. Проведений огляд та класифікація основних типів моделей даних, до яких відносяться табличні, ієрархічні, мережні моделі, а також моделі, які базуються на багаторівневих таблицях та рекурсивних таблицях.

Вдосконалена та розширена композиційна SQL-орієнтована алгебра табличних функцій. Нове визначення таблиць за рахунок внесення схеми відповідає розумінню таблиць в реляційних базах даних. Це надало можливість більш точного та адекватного задання семантики операторів запитів мови SQL. Функції та композиції задані як на множинах так і на мультимножинах.

Задана семантика рекурсивних запитів в SQL. Визначена як операційна, так і денотаційна семантика рекурсивних запитів, а також доведена їх еквівалентність при виконанні природних достатніх умов, таких, як дистрибутивність операції за першим аргументом та збереження порожньої таблиці за першим аргументом.

Досліджена композиційна структура операторів запитів та проведена класифікація операторів за їх синтаксичною структурою. Виділено три класи запитів, кожний з яких будується за чітко визначеною схемою.

Нове визначення композиції агрегації дозволяє більш точно задати семантику агрегатних функцій при роботі з невизначеними значеннями.

Проведено дослідження реляційної, ієрархічної, квазіреляційної та мережної моделі даних. Задана їх класифікація на основі поняття колекцій та відношень видів один до одного та один до багатьох на елементах колекцій. Побудована класифікаційна схема дозволила виявити та описати нові моделі даних, такі як рекурсивні таблиці, багаторівневі таблиці та таблиці з варіантними рядками.

Спеціальні теоретико-множинні конструкції: повний образ, обмеження, сумісність, проекція, узагальнений прямий добуток (*Д.Буй, Н.Кахута*) [12-17]

Досліджено теоретико-множинні конструкції повного образу, обмеження, конфінальності, сумісності, узагальненого прямого добутку. Отримані результати перенесено в теорію табличних алгебр, що суттєво її збагачує: монотонність та дистрибутивність проекції, з’єднання, насичення, перейменування; коректне означення перейменування та з’єднання; комутативність та асоціативність з’єднання; явний вигляд часткового порядку піврешітки таблиць за з’єднанням; властивості проекції, насичення та активного доповнення; комутативність, асоціативність узагальненого з’єднання, існування одиниць за цим з’єднанням.

Побудовано узагальнену табличну алгебру зняттям вимог фінітності таблиць та односхемності рядків таблиць.

Узагальнена таблична алгебра та відповідні числення на доменах та кортежах (*Д.Буй, І.Глушко*) [18-21]

Побудовано табличну алгебру нескінченних (скінченних) таблиць, яка є узагальненням класичної табличної алгебри. Під реляцією розуміється довільна множина односхемних рядків, зокрема, нескінченна, при цьому кожній таблиці приписується певна схема.

Класичне числення рядків та числення на домені поповнено довільними предикатними та функціональними сигнатурами на універсальному домені. Показана еквівалентність

табличної алгебри нескінченних таблиць і відповідних реляційних числень.

Узагальнене числення рядків та узагальнене числення на домені обмежені для використання скінченних таблиць шляхом розгляду лише так званих безпечних виразів. Показано еквівалентність табличної алгебри скінченних таблиць, обмеженого узагальненого числення рядків і обмеженого узагальненого числення на домені.

Сигнатуру табличної алгебри нескінченних (скінченних) таблиць розширено новими операціями над таблицями: операціями внутрішніх і зовнішніх з'єднань, операцією напівз'єднання, зовнішніми множинними операціями, агрегатними операціями. Для задання агрегатних операцій (*Sum, Avg , Min , Max , Count*) використовується поняття мультимножини, а для задання зовнішніх операцій введено особливий елемент універсального домену *NULL*.

Побудувано мультимножинну табличну алгебру, в якій поняття таблиці уточнюється, використовуючи поняття мультимножини, причому кожній таблиці приписана певна схема. Задано основні операції над таблицями: об'єднання, перетин, різниця, селекція, проекція, з'єднання, активне доповнення й перейменування. Для кожної операції визначено основу результуючої таблиці та кількість дублікатів кожного рядка. Побудовані мультимножинні аналоги операцій внутрішніх і зовнішніх з'єднань, операції напівз'єднання, агрегатних операцій.

Теорія нормалізації табличних БД (*Д.Буй, А.Пузікова*) [22-23]

Наведено строге та повне доведення повноти аксіоматики Армстронга щодо функціональних залежностей в реляційних базах даних, яке наслідує традиції встановлення повноти в математичній логіці: введені відношення синтаксичного та семантичного слідування та показана їх збіжність. В якості математичного апарата використані властивості теоретико-множинної конструкції обмеження функції за множиною.

Уточнено умови, в межах яких аксіоматика Армстронга є повною.

Теорія мультимножин та її застосування в табличних БД (*Ю.Богатирьова, Д.Буй*) [24-29]

Досліджено властивості операцій над мультимножинами, що є наслідками властивостей теоретико-числових функцій мунімума, максимума, зрізаної різниці, модуля. Операції додавання, перетину, різниці, з врахуванням та без врахування дублікатів, є адекватними уточненнями аналогів теоретико-множинних операцій над таблицями в БД.

Розглянуто частково впорядковану множину мультимножин, яка відноситься до відомих класів частково впорядкованих множин: решіток, умовно повних множини, повних півршіток. Решітка мультимножин допускає два простих та природних вкладення у повні решітки.

Знайдено системи породжуючих множинної та мультимножинної примітивної програмної алгебри, що є спорідненими між собою.

Продемонстровано адекватність моделі примітивної програмної алгебри для репрезентативних предметних областей: ДНК-обчислення та маніпуляції над таблицями у сучасних СУБД.

Сильна та слабка тризначні логіки Кліні (*Д.Буй, С.Поляков, О.Шишацька*) [30-32]

Продемонстровано природнє виникнення трьохзначної сильної логіки Кліні з алгебри класичної булевої логіки шляхом застосування загальнозначущої конструкції розповсюдження операцій з елементів на множини елементів в термінах повного образу.

Побудована решітка логічних значень трьохелементньої логіки Кліні, яка використовується для компактного задання логіки.

Запропоновано механізм інтерпретації формул з кванторами в трьохзначних логіках Кліні.

ER-модель та CASE-засоби її підтримки (*Д.Буй, Л.Сільвейструк*) [33-37]

Головним результатом є побудова розділу математичної теорії моделі „сутність-зв'язок", який є формальним підґрунтям для створення загальноприйнятого стандарту моделі і має істотне значення для користувачів цієї моделі та розробників CASE-засобів підтримки моделі „сутність-зв'язок":

На основі аналізу моделі „сутність-зв'язок" уніфіковані її основні елементи: тип сутності, сутність, тип зв'язку, зв'язок, слабкий тип сутності, сильний тип сутності, слабкий тип зв'язку, сильний тип зв'язку, тип сутності суперклас, тип сутності підклас, тип сутності категорія, тип зв'язку суперклас/підклас, тип зв'язку isa. Уточнення понять моделі „сутність-зв'язок" проводиться на найбільш абстрактному рівні – на рівні множин та відношень.

Формалізована вимога коректності моделі по слабким типам зв'язків (щодо успадкування). Введенням операторів $\min, \max, \text{mop}$

формалізовані базові типи обмежень кардинальності для бінарних та багатосторонніх типів зв'язків.

Проаналізовано сучасний стан обмежень кардинальності моделі „сутність-зв'язок". Розглянуто і формалізовано обмеження кардинальності: кардинальність „дивитися через", кардинальність участі, узагальнена кардинальність участі. Проведені уточнення вказують на єдину природу походження всіх підходів до визначення обмежень кардинальності.

Доведена низка тверджень про логічні зв'язки між: 1) min та mop обмеженями кардинальності для підходів „дивитися через" і участі, обґрунтована необхідність їх одночасного використання; 2) обмеженнями кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності, показано, що за допомогою min і max обмеження кардинальності для необмеженої кардинальності можна виразити інші базові типи обмеження кардинальності; 3) обмеженями кардинальності для бінарних та багатосторонніх типів зв'язків при підходах „дивитися через" і участі, показано, що дані підходи принципово різні при розгляді тільки багатосторонніх типів зв'язків.

Доведено твердження про сумісність значень операторів $\min, \max$ на взаємоінверсних бінарних відношеннях (отриманий аналогічний результат для уточнень багатосторонніх типів зв'язків): для довільного розподілу значень операторів існує відношення, на якому ці значення досягаються. Таким чином, в загальному випадку немає логічного зв'язку між значеннями операторів $\min, \max$ на вихідному бінарному та оберненому відношеннях. Отже, при накладанні значень min і max обмежень кардинальності (необмежена кардинальность) на бінарний тип зв'язку за обома типами сутностей відсутня необхідність перевірки сумісності значень.

Об'єктно-реляційні БД (*Д.Буй, С.Компан*) [38-40]

Проведено формальне уточнення поняття об'єкту, класу, методів, успадкування класів, та життєвого циклу об'єкту. За допомогою операції накладання формально описано просте та множинне успадкування.

Формальні методи розробки програм (*Д.Буй, І.Ткачук*) [41-42]

Запропоновано формалізацію одного з ключових інструментів побудови специфікацій в рамках формального Бі-методу, так званих узагальнених підстановок (generalized substitutions). Формалізація проводиться на основі принципів композиційно-номінативного підходу.

Список використаних джерел

1. *Buy D.B.* Compozition semantics of the recursive queries in family of the SQL languages / D.B.Buy, S.A.Polyakov // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2010. – No.1. – P. 45-56. (in Ukrainian).
2. *Redko V.N.* Relational data base: table algebras and family of the SQL languages / V.N.Redko, U.I.Brona, D.B.Buy, S.A.Polyakov. – Kiev: Publisher "Academperiodica", 2001. – 196 p. (in Ukrainian).
3. *Brone U.I.* Compositional semantics of the family of the SQL languages: aggregation functions/ U.I.Brona, D.B.Buy, S.P.Zagorskiy, S.A.Polyakov // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2000. – No.1. – P. 178-192. (in Ukrainian).
4. *Buy D.B.* Compozition semantics of the family of the SQL languages: table data structures / D.B.Buy, S.A.Polyakov // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 1999. – No.1. – P. 130-140. (in Ukrainian).
5. *Buy D.B.*Compositional structures of the family of the SQL languages: filters and complete image / D.B.Buy, S.A.Polyakov // Bulletin of the Lviv. Series Physics & Mathematics. – 1998. – No.50. – P. 24-26. (in Ukrainian).
6. *Redko V.N.* Relational algebra: operations projection and connection / V.N.Redko, U.I.Brona, D.B.Buy // Cybernetics and Systems Analysis. – 1997. – No. 4. – P. 89-100. (in Ukrainian).
7. *Redko V.N.* Relational algebra: operation of division and rename operation / V.N.Redko, U.I.Brona, D.B.Buy // Cybernetics and Systems Analysis. – 1997. – No. 5. – P. 3-15. (in Ukrainian).
8. *Buy D.B.* Set-theoretic construction in the theory of relational databases / D.B.Buy, U.I.Brona // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 1996. – No.1. – P. 216-224. (in Ukrainian).

9. *Redko V.N*. On the foundations of the theory of relational database models / V.N.Redko, D.B.Buy // Cybernetics and Systems Analysis. – 1996. – No 4. – P. 3-13. (in Ukrainian).
10. *Redko V.N*. Mutual non-derivative and the expressive power of relational algebra operations / V.N.Redko, U.I.Brona, D.B.Buy // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Math. Natural. Engineering. – 1996. – No. 11. – P. 84-88.
11. *Redko V.N*. Manipulative aspects of databases: a compositional approach / V.N.Redko, D.B.Buy, S.P.Zagorskiy // Cybernetics. – 1989. – No. 6. – P. 105-113. (in Ukrainian).
12. *Buy D.B.*. Full image, restriction, projection, relationship compatibility / D.B.Buy, N.D.Kahuta // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, December 8-10, 2009: abstracts. – Kyiv, Ukraine. – 2009. – C.244-260.
13. Kahuta N.D. Criterions injectivity of binary relations / N.D.Kahuta // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2007. – No.3. – P. 141-146. (in Ukrainian).
14. Kahuta N.D. Compatibility relation, generalized connection and generalized direct product / N.D.Kahuta // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2007. – No.4. – P. 167-173. (in Ukrainian).
15. *Buy D.B.* Properties of the relation cofinality and device set of partial functions / D.B.Buy, N.D.Kahuta // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2006. – No.2. – P. 125-135. (in Ukrainian).
16. *Buy D.B.* Set-theoretic construction of a complete image, restrictions, cofinality and consistency in the foundations of relational databases / D.B.Buy, N.D.Kahuta // Intelligent Systems and Computer Science: International Conference, 23-27 October 2006, Moscow, Faculty of Mechanics and Mathematics. MSU: Proceedings.– 2006. – Vol. 1. – P. 72-76.
17. *Buy D.B.* Properties of set-theoretic constructions full image and restrictions / D.B.Buy, N.D.Kahuta // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2005. – No.2. – P. 232-240. (in Ukrainian).
18. Glushko I.M. Extending (nonclassical) table algebra / I.M. Glushko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2012. – No.2. – P. 116-123. (in Ukrainian).
19. Buy D.B. Generalized table algebra, generalized tuple calculus, generalized domain calculus and theirs equivalence / D.B. Buy, I.M. Glushko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2011. – No.1. –P. 86-95. (in Ukrainian).
20. Buy D. Equivalence of Table Algebras of Finite (Infinite) Tables and Corresponding Relational Calculi / D. Buy, I. Glushko // Proceedings of the Eleventh International Conference on Informatics INFORMATICS'2011, November 16-18, 2011, Rožňava, Slovakia. – P. 56-60.
21. Glushko I.M. Multiset table algebra / I.M. Glushko // Proceedings of the International Scientific Conference of Student and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics" (TAAC'2011, Kyiv, Ukraine, February 21–25, 2011). –P. 77-79.
22. Puzikova A.V. Completeness of Armstrong's axiomatic / A.V. Puzikova // Bulletin of Taras Shevchenko Kyiv National University. Series Physics & Mathematics. – 2011. – No.3. – P. 103-108. (in Ukrainian).
23. Puzikova A.V. Completeness criterion for Armstrong's axiomatic / A.V. Puzikova // In Proceedings of the International Conference «Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development» (TAAPSD'2011, Ukraine, Yalta, 2011 September 19-23). – P. 30-34.
24. Bogatyreva J. Primitive programming algebras of functions with set (multiset) arguments and values / J. Bogatyreva, D. Buy, V. Redko // Reports of National Academy of Science of Ukraine. №9. – 2011. – P. 32-35.
25. Buy D. Modern state of multiset theory / D. Buy, J. Bogatyreva // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: physical and mathematical science. – 2010. – No.1. – P. 51-58. (in Ukrainian).
26. Buy D. Multiset Bibliography. Methods of Multiset Lattice Construction / Dmitry Buy, Juliya Bogatyreva // Papers of 9th International Conference on Applied Mathematics, February 2-5, 2010. – Bratislava. – 2010. – P. 407-413.
27. Buy D. Structure of Partially Ordered Family of Multisets / Dmitry Buy, Juliya Bogatyreva // Proceedings of CSE 2010

International Scientific Conference on Computer Science and Engineering, September 20-22, 2010, Košice – Stará Ľubovňa, Slovakia. – P. 40-43.
28. Buy D. Multiset as alternative of theoretical-set platform in mathematical grounds of information technologies / D. Buy, J. Bogatyreva // Information Model of Knowledge. – ITHEA №19. – P. 377-386.
29. Buy D. Towards the question of multiset lattice / D. Buy, J. Bogatyreva // Materials of X International Seminar "Discrete mathematics and its applications" (Moscow, MSU, February 1–6, 2010) / Edited by O. Kasim-Zade. Publisher: mechanical and mathematical department of MSU, 2010. – P. 220-222.
30. Buy D.B. Three-valued logic of Kleene and three-element chains / D.B.Buy, O.V.Shyshatska // International Book Series "Information Science & Computing". N1:Supplement to International Jornal "Information Technologies & Knowledge“. – 2008. – V.2. – C. 230-236.
31. Buy D.B. Three comments on three-valued logic of Kleene / D.B.Buy, S.A.Polyakov, O.V.Shyshatska // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, September 4-9, 2007: abstracts. – Kyiv, Ukraine. – 2007. – C. 47-51.
32. Shyshatska O.V. Three-valued logic of Kleene and three-element chains / O.V.Shyshatska // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2007. – No.4. – P. 230-236. (in Ukrainian).
33. Silveistruk L. Binary and multiway relationship types of ER-model / L. Silveistruk // First International Workshop Critical Infrastructure Safety and Security (CrISS-DESSERT’11), Kirovograd, Ukraine, May, 11-13 2011, Proceedings Volume 2. – P.112-116.
34. Buy D. Formalization of model entity-relationship / D. Buy, L. Silveystruk // Kyiv: Publishing center "Kyiv University", 2011. – 176 p. (in Ukrainian).
35. Silveistruk L. Generalized participation cardinality in entity-relationship model / L. Silveistruk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2011. – No. 2. – P. 142-146. (in Ukrainian).
36. Buy D. Specification of constraints min and max common cardinality in entity-relationship model / D. Buy, L. Silveystruk // Mathematical Machines and Systems – 2009. – No. 4. – P. 67-81. (in Ukrainian).
37. Buy D. Formalization of structural constraints of relationships in model "entity-relationship" / D. Buy, L. Silveystruk // Electronic Computers and Informatics’2006: international scientific conference, September 20-22, 2006, Kosice, Slovakia: proceedings. – Kosice. – 2006.– P. 96-101.
38. Buy D.B. Using object-relational mapping when working with relational databases / D.B. Buy, S.V. Kompan / Proceedings of the Eighth International Scientific Conference on Programming UkrProg’2011, 19-23 september 2011, Yalta: – P. 35-41.
39. Buy Dmitriy. The Concepts of Object, Class, Inheritance, Life Cycle: Formalization / Dmitriy Buy, Sergiy Kompan // First International Workshop Critical infrastructure safety and security (CrlSS-Dessert'11), Kirovograd, Ukraine, May, 11-13, 2011, Proceedings Volume 2. – P. 235-243.
40. Buy D.B. Union and intersection operations of classes specifications in geterogen algebraic system for object-oriented rogramming / D.B. Buy, S.V. Kompan / Collection of scientific works SWorld. Materials of the International Scientific Conference “Modern Problems and Solutions in science, transportation, manufacturing and obrazovanii'2012”. – Issue 4. Volume 3. – Odessa Kuprienko, Ukraine, 2012. – P.45-48.
41. Buy Dmitriy. Fault-Free Programs Using B Formal Method / Dmitriy Buy, Ihor Tkachuk // First International Workshop Critical infrastructure safety and security (CrlSS-Dessert'11), Kirovograd, Ukraine, May, 11-13, 2011, Proceedings. – Volume 2. – P. 244-248.
42. Tkachuk I.Y. Formalizing substitutions Bi-method / I.Y.Tkachuk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2010. – No.4. – P. 189-192. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 17.01.13

УДК [004.89:004.422.61]:004.2

Вергунов В.В.[1], студент магістр

Інтелектуальні системи збереження даних як інструмент для підтримки оптимальної структури даних та архітектури бази даних

У статті розглядається інтелектуальна система збереження даних як об'єднання реляційної моделі та NoSQL моделі для оптимізації структур баз даних, їхніх представлень та запитів до баз даних.

Наведено приклад архітектури такої системи для комп'ютерних систем з декількома джерелами даних, які мають різну швидкість взаємодії з даними та можливістю масштабування їх кількості.

Ключові слова: реляційна модель, NoSQL модель, інтелектуальні системи.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: victor.verg@hotmail.com

Vergunov V.V.[1], master student

Intelligent data storage systems as tool for support in an optimized data structure and database architecture

This article is represented an intelligent storage system as association relational model and NoSQL models for optimizing database structures, their representations and queries to databases.

In this article represented example of such system architecture for computer systems with multiple sources of data, which have different speed of interaction with data and ability to scale the number of sources.

Key Words: relational model, NoSQL model, intelligent systems.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: victor.verg@hotmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф.Буй Д.Б.

At this moment of time is possible choose only one of the database models with whole features one of them but losing whole features of another model [1]. There are some attempts in this area, such like OLAP (online analytical processing) [2]. For firstexplore the two models and determine which properties are key features. Then compare those features with OLAP model for full understanding what featurs are missing. And implement those features in intelligent data storage system and bind with computer architecture for best performance.

The relational model for database management is a database model based on first-order predicate logic, first formulated and proposed in 1969 by Edgar F. Codd. In the relational model of a database, all data is represented in terms of tuples, grouped into relations. A database organized in terms of the relational model is a relational database.The purpose of the relational model is to provide a declarative method for specifying data and queries: users directly state what information the database contains and what information they want from it, and let the database management system software take care of describing data structures for storing the data and retrieval procedures for answering queries.

NoSQL databases are often compared by various non-functional criteria, such as scalability, performance, and consistency. This aspect of NoSQL is well-studied both in practice and theory because specific non-functional properties are often the main justification for NoSQL usage and fundamental results on distributed systems like the CAP theorem apply well to NoSQL systems. At the same time, NoSQL data modeling is not so well studied and lacks the systematic theory found in relational databases.

OLAP overview

OLAP tools enable users to analyze multidimensional data interactively from multiple perspectives. OLAP consists of three basic analytical operations: consolidation (roll-up), drill-down, and slicing and dicing [3]. Consolidation involves the aggregation of data that can be accumulated and computed in one or more dimensions. For example, all sales offices are rolled up to the sales department or sales division to anticipate sales trends. By contrast, the drill-down is a technique that allows users to navigate through the details. For instance, users can view the sales by individual products that make up a region's sales. Slicing and dicing is a

©В.В. Вергунов, 2013

feature where by users can take out (slicing) a specific set of data of the OLAP cube and view (dicing) the slices from different viewpoints.

There are three main types of OLAP systems [4]:

- Multidimensional (MOLAP) is the 'classic' form of OLAP and is sometimes referred to as just OLAP. MOLAP stores this data in an optimized multi-dimensional array storage, rather than in a relational database. Therefore it requires the pre-computation and storage of information in the cube - the operation known as processing. MOLAP tools generally utilize a pre-calculated data set referred to as a data cube. The data cube contains all the possible answers to a given range of questions. MOLAP tools have a very fast response time and the ability to quickly write back data into the data set.
- Relational (ROLAP) works directly with relational databases. The base data and the dimension tables are stored as relational tables and new tables are created to hold the aggregated information. Depends on a specialized schema design. This methodology relies on manipulating the data stored in the relational database to give the appearance of traditional OLAP's slicing and dicing functionality. In essence, each action of slicing and dicing is equivalent to adding a "WHERE" clause in the SQL statement. ROLAP tools do not use pre-calculated data cubes but instead pose the query to the standard relational database and its tables in order to bring back the data required to answer the question. ROLAP tools feature the ability to ask any question because the methodology does not limit to the contents of a cube. ROLAP also has the ability to drill down to the lowest level of detail in the database.
- Hybrid (HOLAP). There is no clear agreement across the industry as to what constitutes "Hybrid OLAP", except that a database will divide data between relational and specialized storage. For example, for some vendors, a HOLAP database will use relational tables to hold the larger quantities of detailed data, and use specialized storage for at least some aspects of the smaller quantities of more-aggregate or less-detailed data. HOLAP addresses the shortcomings of MOLAP and ROLAP by combining the capabilities of both approaches. HOLAP tools can utilize both pre-calculated cubes and relational data sources.
- Real-Time (RTOLAP) [5]. Whilst many OLAP Servers like Microsoft Analysis Services store pre-calculating consolidations and calculated elements to achieve rapid response times. A Real Time OLAP Server will calculate the values on the fly, when they are required. The essential characteristic of RTOLAP system is in holding all the data in RAM.It is a protocol which analyzes fly values when required. It saves every bit of information in RAM. The calculations are executed in a “right-away” manner which reduces the setback linked with “information outburst” since it only saves information under the RAM size standard.

NoSQL conceptual models

First, should be note that SQL and relational model in general were designed long time ago to interact with the end user. This user-oriented nature had vast implications:

- The end user is often interested in aggregated reporting information, not in separate data items, and SQL pays a lot of attention to this aspect.
- No one can expect human users to explicitly control concurrency, integrity, consistency, or data type validity. That’s why SQL pays a lot of attention to transactional guaranties, schemas, and referential integrity.

On the other hand, it turned out that software applications are not so often interested in in-database aggregation and able to control, at least in many cases, integrity and validity themselves. Besides this, elimination of these features had an extremely important influence on the performance and scalability of the stores. And this was where a new evolution of data models began:

- Key-Value storage is a very simplistic, but very powerful model. Many techniques that are described below are perfectly applicable to this model.
- One of the most significant shortcomings of the Key-Value model is a poor applicability to cases that require processing of key ranges. Ordered Key-Value model overcomes this limitation and significantly improves aggregation capabilities.
- O rdered Key-Value model is very powerful, but it does not provide any framework for

value modeling. In general, value modeling can be done by an application, but BigTable-style databases go further and model values as a map-of-maps-of-maps, namely, column families, columns, and time stamped versions.

- Document databases advance the BigTable model offering two significant improvements. The first one is values with schemes of arbitrary complexity, not just a map-of-maps. The second one is database-managed indexes, at least in some implementations. Full Text Search Engines can be considered a related species in the sense that they also offer flexible schema and automatic indexes. The main difference is that Document database group indexes by field names, as opposed to Search Engines that group indexes by field values. It is also worth noting that some Key-Value stores like Oracle Coherence gradually move towards Document databases via addition of indexes and in-database entry processors.
- Finally, Graph data models can be considered as a side branch of evolution that origins from the Ordered Key-Value models. Graph databases allow one model business entities very transparently (this depends on that), but hierarchical modeling techniques make other data models very competitive in this area too. Graph databases are related to Document databases because many implementations allow one model a value as a map or document.

General Notes on NoSQL:

- NoSQL data modeling often starts from the application-specific queries as opposed to relational modeling. Relational modeling is typically driven by the structure of available data. NoSQL data modeling is typically driven by application-specific access patterns, i.e. the types of queries to be supported.
- NoSQL data modeling often requires a deeper understanding of data structures and algorithms than relational database modeling does.
- Data duplication and denormalization are common.
- Relational databases are not very convenient for hierarchical or graph-like data modeling and processing. Graph databases are obviously a perfect solution for this area, but actually most of NoSQL solutions are surprisingly strong for such problems.

Main requirements for modern databases

At present appeared the so-called phenomenon “Big Data”. Generally accepted opinion that data is now so much that process them with traditional database and program methods are difficult or impossible. This caused a wave of non-relational databases (NoSQL), in which the emphasis is on high scalability.They have the three most important features that are not present at the relational databases:

- Fast access to data.
- Fast replication (data distribution across multiple nodes).
- Flexible (new columns can be add immediately).

There are a few key things that made relational databases most popular databases in the world:

- Supported modeling of relationships and business logic;
- Query Languages;
- Triggers;
- Working with large amounts of data that does not fit in RAM.

Most features of ROLAP can be seen in the list of relational and NoSQL models. Those that have not listed mainly necessary only for Business Intelligence. It is much more concerned with data analysis rather than with data storage and level of data availability. That's why will be considered that all ROLAP features for data storage and availability of this data are represented in association of relational and NoSQL model.

General assumption about system

For the adequacy of the system will be make several assumptions:

- There areminimum three storages with different levels of capacity and availability.
- System have full control on the file system of the storage devices.
- Different data have different numbers of queries to build sample based on their (requests for data are different with different intensity).
- Data are inhomogeneous.
- There are a large number of users using the same data in different representations.

- Assume that with more than 90 percent probability is possible to predict the demand for data [7], [8].

Based on of the foregoing is possible to begin description of the system. Just wanted to point constant on research and attempts to build the hybrid system as the direction of the development of systems forstorage and management data. Storage and management of data becomes every day is much more important and challenging than ever before.

Also, like to point out that the assumption as stated above about the fact that forecasts deemed sufficient as possible [9], because there are quite a few approaches for qualitative solution of the problem [10]. Will only use the results of the existence of such algorithms. In addition, it can be seen as a system of mass service with three type's devices, with infinitely requests and known limitations on the queue for each type of device. This is common task for theory of querying that why it would not be considered. It will only used as an element of the system acceleration and allow it to function as OLAP.

General descriptionof system architecture

In Figure 1 can be seen the general scheme of architecture and its interaction with users.

The figure shows that for storing data uses three types of devices:

- Main storage, it acts as the main storage for the data. It can include any number of nodes. I.e. it is considered as one but it can be the network of devices.

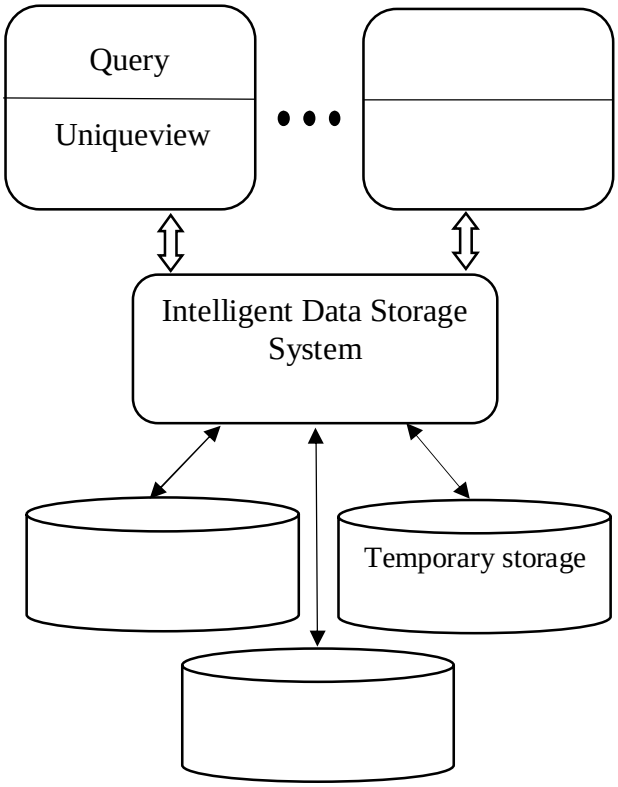


Fig. 1 Systemsgeneralscheme.

- Temporary storage is storage that can also consist of multiple physical devices. They have a much better availability than primary storage. Also, have a smaller capacity. I.e. acts as a buffer store. It can be a RAID or SSD, but cannot be RAM (reasons for this will be explained below).
- Control storage are storing transactions and archives stats. It must maintain the integrity to ensure control and monitor data redundancy. As well as possible supports work in atomic operations.

Also on the scheme is Intelligent data storage System. This is module that controls the whole process of data access, organization their storage and constructing representations [9]. Thus is considered that it included ability to predict queries [10]. Completely it will be described below.

In addition, on the scheme there is no conceptual level. It just would not be. To get the maximum flexibility in the management of data, user will have only that views what he needs [11], [12]. This means that not exist hard schema for the data itself. It also means that data cannot follow the rules of normal forms. But still will not complete distancing from these rules. Simply complete adherence to these rules makes it impossible to use approaches of NoSQL model. Nevertheless, completely abandon them are not possible because it means loss ability to use Data Definition Languages.

Construction of Main storage

The main store is storage that stores all the data. I.e. it is a target for the all data in the system. In some cases, not all data may be located in Main storage (small part may be in the Fast storage). The reasons of this situation will been explained later but all of the data still should get to the Main storage, it is the end point for all data in the system.

The basis for the physical representation of data will be tables and linked lists. Since there is full control over the file, system possible to use absolute addresses. That is in the linked list, we can link directly to the physical address of the next element in linked list. Get something similar on a linked list with gaps. The complexity of finding it a little bit better than the average of a linked list. But still worse than in table by unique index.In order to find out which of the types of data will be slower in the search, it is necessary carry out tests of both data structures. Only then possible say for sure.

Find the physical address is quite simple. There is also an opportunity to streamline transactions for optimal use HDD. How it will effected on the transactions will described below.Because even at normal difficulty of the search and reading on it imposing that if the cell is inside cylinders, speed of reading it falling. According to this table with bigger elements will be on the outside of the cylinders.CHS (cylinder/head/sector) tuples can be mapped to LBA address with the following formula:

$$LBA = ((C \times HPC) + H) \times SPT + S - 1$$

Where:

- , H and S are the cylinder number, the head number, and the sector number
- BA is the logical block address
- PC is the maximum number of heads per cylinder (reported by disk drive, typically 16 for 28-bit LBA)
- PT is the maximum number of sectors per track (reported by disk drive, typically 63 for 28-bit LBA)

LBA addresses can be mapped to CHS tuples with the following formulas:

$$C = LBA \div (SPT \times HPC)$$

$$H = (LBA \div SPT) \bmod HPC$$

$$S = (LBA \bmod SPT) + 1$$

Construction of Temporary storage

This storage is building on the principle of key-value database, something like Berkley DB.Quite a lot of databases is building on them. Search key with value already are implementing in different ways, through the trees or hash tables, etc.

It exists to ensure the atomicity of operations and accelerate the system. Atomicity creates by creating elements in the Temporary storage with entering the mark in the Control storage. After the elements have been put in the Main storage. Will be check in the integrity of the elements. Only after this operation, elements will be removed from the Temporary storage and then removing mark from Control storage. As mentioned possible to predict with high accuracy requirements. So we can put there views which will soon be called.

Construction of Control storage

This storage serves storage views (as a scheme to build them based on the data) and the archives states.

Archives can have four states:

- ormalizated archive, that why executing all Codd rules. Possible to say that this is simple relational table state [14].
- enormalizated archive, this is the archive where do no executing at least one Codd rules and archive is not in any of the four normal forms state [15].
- ot prepared archive it is archive, which in this moment of time does not available for querying. It might changing scheme but in that, moment possible to made query to unchanged archive (before changing of scheme). In addition, it can be replicate of some archive.
- ggregated. It is archive, which already prepared to by view for some user or group of users. Such archive always have archive perent from which it created (Normalized or Denormalizated archive).

A very important task, which relied on Control storage, is monitoring relationships for protection from the consequences of breaking the Codd's rules.

Main tasks designated for the Control storage:

- racking data redundancy;
- ropaganding updates;
- ransaction;
- ata integrity;
- ata independence.

All this things are done by the marks of states. I.e. if there is a failure of Codd rules, they are marked and monitored.

Organization concept of transaction

The nature of the transaction will not explain. Just proceed to the description of how it works in the proposed system.The main purpose of transactions guarantee atomic operation. In cases of this are added the additional verification if the archive is not in the normalization condition. In cases of denormalizated, data transaction occurs as references replacement after checking the data equivalence.

Just knowing the physical address on the cylinder possible order elements of the transaction in such

way, which will accelerate its execution. Maximum overcome Seek Time. For HDD with averagerotation speed 7200 Seek Time is 4,2 ms. At such approach Seek Time will always minimal.

Description ofIntelligent data storage systems like management node

For optimal control of all the processes necessary Intellectual system that will predict, prepare and forward the packet to the nodes [8]. Of course should be possible for user set the whether his view require aggregation or every time a new sample. Besides, the package and query management system should work on improving transactions. Sort elements in it if it will increase speed up.This will require the preservation of different types of query statistics. However, how will be selected the weightswhich defining relevance is question of specific realization or system configuration.It is important that managing task is solved. Moreover, have a good description of solutions this task in many publications. The prediction results are using not only to control the data issue and storage, but also for managing their view. Because, for example by varying the amount of data can be completely rebuilt database schema.

Conclusion

System prototypewas created but without including the intellectual part. It includes only the Main storage and Control storage. The system worked on emulate operating system. HDD for accommodating a Main storage also emulated but like separated area, that why it have own physical addressing field of virtual drive. For the physical storage of data used key value library (Berkeley db can redistribute as library). Further established two data structures as described above. For Control storage used RAM.

Tests have shown that in the case of tables, the search speed is slightly better than in mixing data structure, but very close. However, on join tables best result was shown by mixed data structure. In addition, it is possible make the assumption that Seek Time equally influenced on the sample construction speed in both cases.

List of used sources:

1. *Date, C. J.* (2007). An Introduction to Database Systems (8 ed.). Boston [u.a.]: Pearson Education. ISBN 0-321-19784-4.
2. *Codd E.F., Codd S.B., and Salley C.T.* (1993). "Providing OLAP (On-line Analytical Processing) to User-Analysts: An IT Mandate". Codd& Date, Inc. Retrieved 2008-03-05.
3. *O'Brien&Marakas.* OLAP2011, p. 402-403.
4. *Nigel Pendse* (2006-06-27). OLAP architectures. Retrieved 2008-03-17.
5. *Bach Pedersen, Torben; S. Jensen, Christian* (December 2001). "Multidimensional Database Technology". Distributed Systems Online (IEEE): 40–46. ISSN 0018-9162.
6. *Owen Kaserand Daniel Lemire,* Attribute Value Reordering for Efficient Hybrid OLAP, Information Sciences, Vol. 176, Issue 16, p. 2279-2438, 2006.
7. *Dinda P.* (2001) On line Prediction of the Running Time of Tasks. In: Proceedingsof 10-th IEEE International Symposium on High Performance Distributed Computing, p. 383-394.
8. *Zijiang Yan,* Researchon Server Load Prediction Based on Wavelet Packet Theory, 23-25 Nov. 2007, p.610 – 613.
9. *Khotanzad A., Sadek N.* Multi-scale high-speed network traffic prediction using combination of neural networks. Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, 2003, p. 1071-1075.
10. *Skicewicz J., Dinda P., Schopf J.M.* Multi-resolution resource behavior queries using wavelets [A]. High Performance Distributed Computing, 2001 [C]. Proceedings: 10th IEEE International Symposium on 7-9 Aug. 2001, p. 395-405.
11. *Rachel Pottinger, Philip A. Bernstein* Schema merging and mapping creation for relational sources. EDBT '08 Proceedings of the 11th international conference on Extending database technology: Advances in database technology, p. 73-84, ISBN: 978-1-59593-926-5.
12. *Peter Buneman, Susan B. Davidson, Anthony Kosky.* Theoretical Aspects of Schema Merging. EDBT '92 Proceedings of the 3rd International Conference on Extending Database Technology: Advances in Database Technology, p. 152-167, ISBN:3-540-55270-7.
13. *Codd, E.F.*Further Normalization of the Data Base Relational Model. Presented at Courant Computer Science Symposia, Series 6, "Data Base Systems", N. York City, May 24–25, 1971. IBM Research Report RJ909 (Aug. 31, 1971).
14. *C.J. Date, Hugh Darwen, Nikos Lorentzos.* Temporal Data and the Relational Model. Morgan Kaufmann, 2002, p. 176-181.

Надійшла до редколегії 26.02.2013

УДК 519.7

О.А. Галкін, аспірант

Проблема перенавчання у процедурі вибору моделі на основі структурної мінімізації ризику

Об'єктом дослідження є методологія вибору моделі, як одна із проблем інтелектуального аналізу даних. Метою дослідження є вивчення проблеми перенавчання, коли доступною є множина гіперпараметрів або моделей. В статті розглядається методологія оптимізації гіперпараметрів з використанням методу градієнтного спуску, а також проблема перенавчання у виборі моделі з використанням критерію помилки перевірки.

Ключові слова: вибір моделі, проблема перенавчання, оптимізація гіперпараметрів.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д., e-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

Oleksandr A. Galkin, postgraduate (PhD)

The problem of over-fitting in the procedure of model selection based on structural risk minimization

The object of study is the methodology of model selection as one of the problems of data mining. The aim of the investigation is to study the problem of over-fitting when a set of hyperparameters or models is available. The paper contains the methodology of optimizing of hyperparameters using the gradient descent and also the problem of over-fitting in model selection using the criterion of validation error.

Key words: model selection, over-fitting problem, optimizing hyperparameters.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova str., 4d, e-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

Статтю представив: чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

В рамках статистичної теорії навчання, навчальні дані генеруються незалежно з ідентичним розподілом з деякого невідомого розподілу $P(x,y)$, в якому закодована залежність між входом x та виходом y. Тобто, якщо вхідні дані відповідають ймовірнісному розподілу $P(x)$, а вихідним даними є функція $f(x)$, що знаходиться під впливом дисперсії гауссівського шуму σ^2, тоді:

$$P(x,y) = P(x)\mathrm{N}_\sigma(f(x)-y),$$

де N_σ є розподілом Гаусса із щільністю $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$.

Якість функції, яка моделює дане співвідношення, вимірюється шляхом використання очікування функції втрат відносно $P(x,y)$. Розглядаючи задачу класифікації даних, функція втрат буде мати наступний вигляд:

$$\ell(f(x),y) = \mathrm{I}_{f(x)\neq y},$$

де I є функцією-показником, тобто $\mathrm{I}_A = 1 \Leftrightarrow A$ є істинним. Оскільки, одне з припущень в рамках даного дослідження є те, що дані, вихідні значення яких повинні бути заздалегідь передбачені, також генерується з того ж самого розподілу, метою статистичного навчання є знаходження функції мінімізації втрат

$$R(f) = \int \ell(x, f(x))dP(x,y). \qquad (1)$$

Проблема навчання зводиться до пошуку функції $f \in F$, що мінімізує очікування (1) функції-показника втрат $\ell(f(x),y) = \mathrm{I}_{f(x)\neq y}$. Дане очікування не може бути обчислено, оскільки розподіл $P(x,y)$ є невідомим. Однак, враховуючи навчальну множину $\{(x_i,y_i)\}_{1\le i\le n}$, ми можемо мінімізувати *емпіричний ризик*:

$$R_{емп}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ell(f(x_i),y_i). \qquad (2)$$

Використовуючи принцип індукції емпіричної мінімізації ризику, вибір множини функцій F має вирішальне значення: якщо дана множина буде надто великою, ми можемо зіткнутися з проблемою *перенавчання*. Це означає, що емпіричний ризик буде дуже малим, а відповідний реальний ризик дуже великим. З іншої сторони, якщо F буде дуже малим, ми зіткнемося з проблемою *незавершеного навчання*:

© О.А. Галкін, 2013

$\min_{f\in F} R(f)$ буде знаходитись далеко від $\min R(f)$.

Структурна мінімізація ризику у проблемі вибору моделі

У даній статті ми розглядаємо методологію вибору моделі, як одну із проблем інтелектуального аналізу даних. Розглядаючи задачу класифікації даних, F повинно бути обмежено для того, щоб мати відповідну складність. Вибір класу функцій F називається *вибором моделі*.

Вибір моделі є досить складною проблемою, однак в рамках теорії Вапника-Червоненкіса (ВЧ) можна спробувати знайти клас функцій, який мінімізує границю наступного твердження:

Твердження 1. Нехай F є класом функцій розмірності ВЧ h, тоді для будь-якого розподілу P та деякої вибірки $\{(x_i, y_i)\}_{1\le i\le n}$, що отримана з цього розподілу, справедливою є наступна нерівність з ймовірністю $1-\eta$:

$$\forall f\in F,\ R(f)\le R_{емп}(f)+\sqrt{\frac{h\left(\log\frac{2n}{h}+1\right)-\log\left(\frac{\eta}{4}\right)}{n}}+\frac{1}{n}.$$

Це є ідеєю принципу індукції структурної мінімізації ризику, що представлена на рисунку 1.

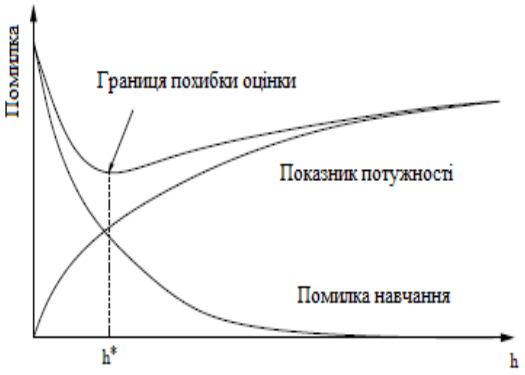


Рисунок 1: *Гіперплощина відповідає вирівнюванню точок у верхній частині рисунку.*

Розглянемо сімейство класу функцій F_i, кожна з яких має розмірність ВЧ h_i. У традиційному формулюванні структурної мінімізації ризику [1], класи функцій є вкладеними ($F_i \subset F_{i+1}$), що призводить до підвищення складності ($h_i \ge h_{i+1}$). Однак, дане припущення не є необхідним.

Нехай для даного i, f_n^i є функцією мінімізації емпіричного ризику по F_i. З твердження 1 ми маємо, що з ймовірністю $1-\eta_i$,

$$R(f_n^i)\le R_{емп}(f_n^i)+\sqrt{\frac{\varphi(h_i)-\log(\eta_i/4)}{n}}+\frac{1}{n}, \quad (3)$$

де $\varphi(h)$ є показником складності,

$$\varphi(h)=h\left(\log\frac{2n}{h}+1\right).$$

Для одного класу функцій ми зафіксували одне значення η_i. Зафіксуємо рівняння (3) рівномірним по i: з ймовірністю $1-\sum\eta_i$,

$$\forall i,\ R(f_n^i)\le R_{емп}(f_n^i)+\sqrt{\frac{\varphi(h_i)-\log(\eta_i/4)}{n}}+\frac{1}{n}. \quad (4)$$

Припустимо, що існує p класів функцій $F_1,\dots,F_p$, а також виберемо $\eta_i=\eta/p$. Якщо $\hat{i}$ є моделлю, що вибрана за принципом системної мінімізації ризику, тобто $\hat{i}$ мінімізує праву частину рівняння (3), тоді з рівняння (4) ми маємо, що з ймовірністю $1-\eta$,

$$R(f_n^{\hat{i}})\le \min_{1\le i\le p} R_{емп}(f_n^i)+ +\sqrt{\frac{\varphi(h_i)+\log(p)-\log(\eta_i/4)}{n}}+\frac{1}{n}. \quad (5)$$

Додатковим фактором є той факт, що протестованим моделям p відповідає лише $\log(p)$. Якщо значення p є малим, використання цього фактору не має сенсу. Однак, коли кількість моделей є експоненціально великою або навіть нескінченною, необхідно встановити для моделі заздалегідь визначену вагу шляхом вибору постійних величин η_i. Для нескінченного числа моделей, двома можливими варіантами є $\eta_i=\eta 2^{-i}$ або $\eta_i=\eta 2^{-i}/(\pi^2/6)$. Перший варіант призводить до більшого відхилення в сторону першої моделі, оскільки показник $\log(\eta_i)$ в рівнянні (3) є лінійним у першому випадку та логарифмічним в другому випадку.

Проблема перенавчання у процедурі вибору моделі

Як уже було зазначено, у випадку коли доступними є багато моделей, границі ризику стають більшими. Ігнорування даного факту

може призвести до феномену перенавчання на стадії вибору моделі. Для вивчення цієї проблеми спочатку узагальнимо процедуру вибору моделі.

У загальному випадку, параметри α та гіперпараметри θ алгоритму навчання повинні бути певним чином оцінені. У випадку емпіричної мінімізації ризику, гіперпараметри θ відповідають за вибір класу функцій F, тоді як параметри α відповідають за опис самої функції в класі.

Процес навчання є процедурою, що складається з двох етапів:

1. При фіксованому значенні θ, необхідно знайти найкращі параметри α^0,
$$\alpha^0(\theta) = \arg\min_{\alpha} T(\alpha, \theta).$$
2. Знайти найкраще значення θ,
$$\theta^0 = \arg\min_{\theta} V(\alpha^0(\theta), \theta).$$

Перший етап полягає в класичній мінімізації ризику: модель, що описана θ є фіксованою, а емпірична мінімізація ризику є випадком, коли T є емпіричною помилкою. Вибір моделі виконується на другому етапі (вибір θ). Для структурної мінімізації ризику, V є верхньою границею, що представлена в твердженні 1. Зауважимо, що виконання класичної моделі вибору може зайняти багато часу, оскільки для кожного протестованого значення θ вимагається мінімізація по α.

Як правило, критерієм V є оцінка або верхня границя помилки узагальнення, що призводить до прямої залежності від виконання алгоритму. Тим не менш, досить ефективним критерієм є помилка перевірки. Цей критерій не залежить від алгоритму навчання, а також досить легко обчислюється. Враховуючи цей факт, даний критерій буде використовуватися нами в подальших дослідженнях.

Припустимо, що моделі $\theta_1, ..., \theta_p$ знаходяться в режимі тестування. Для кожної моделі θ_i застосовується алгоритм навчання та виводиться функція f_i. Нехай F^* є множиною функцій $\{f_1, ..., f_p\}$. Крок вибору моделі полягає у виборі найкращої функції в F^* за допомогою критерію вибору моделі V.

Припустимо, що V є помилкою перевірки:
$$R_{перев}(f) = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} \ell(f(x_i'), y_i'),$$
де $\{(x_i', y_i)\}_{1 \le i \le n'}$ є незалежною вибіркою, що взята з того ж розподілу, що і навчальна множина.

Оскільки для всіх $f \in F^*$, $\mathrm{R}_{\text{перев}}(f)$ є незміщеною оцінкою істинного ризику $R(f)$, стандартним способом виконання вибору моделі є вибір функції f_i, що мінімізує $\mathrm{R}_{\text{перев}}(f)$.

Емпіричний ризик $\mathrm{R}_{\text{емп}}$ не є незміщеною оцінкою істинного ризику, оскільки функції в F^* вибираються з використанням навчальних прикладів. У цьому і полягає причина, чому "невидимі" приклади необхідні для того, щоб мати незміщену оцінку ризику.

Нехай f^* є мінімізатором помилки перевірки,
$$\mathrm{f}^* = \arg\min_{f \in F^*} R_{перев}(f).$$
Як і для емпіричної мінімізації ризику, $\mathrm{R}_{\text{навч}}(f^*)$ не є незміщеною оцінкою $\mathrm{R}(\mathrm{f}^*)$. Для визначення верхньої границі $\mathrm{R}(\mathrm{f}^*)$, ми повинні мати єдиний аргумент збіжності. Для цього виведемо верхню границю:
$$P\left\{ \sup_{f \in F^*} \left| R(f) - R_{навч}(f) \right| > \varepsilon \right\}.$$
Використовуючи нерівність Хефдінга [2], ми стверджуємо, що
$$\forall \mathrm{f} \in \mathrm{F}^*,\ \mathrm{P}\left\{ \left| \mathrm{R(f)\text{-}R}_{\text{навч}}(f) \right| > \varepsilon \right\} < 2\exp(-2n'\varepsilon^2).$$
Оскільки потужність множини F^* дорівнює p, об'єднання границь призводить до
$$P\left\{ \sup_{f \in F^*} \left| R(f) - R_{навч}(f) \right| > \varepsilon \right\} \le 2p\exp(-2n'\varepsilon^2).$$
З цього ми можемо зробити висновок, що з упевненістю $1-\eta$,
$$R(f^*) \le R_{перев}(f) + \sqrt{\frac{\log(p) - \log(\eta/2)}{2n'}}. \qquad (6)$$

Поки значення p є не надто великим, $\mathrm{R}_{\text{навч}}(f)$ буде ефективною оцінкою $\mathrm{R(f)}$, а зведення до мінімуму помилки перевірки буде мати сенс. Однак, якщо значення p є великим (тобто $\log(p)$ має порядок n'), може виникнути проблема перенавчання. Дану проблему можна порівняти з класом функцій, що є досить великим при проведенні емпіричної мінімізації ризику. Два етапи є фактично еквівалентними: етап вибору моделі полягає в проведенні емпіричної мінімізації з використанням множини перевірки на множині F^*. Таким чином, якщо значення F^* є надто великим (тобто існує надто багато

моделей), перенавчання буде відбуватися під час цього етапу [3].

Застосування методу градієнтного спуску для оптимізації гіперпараметрів

Використовуючи результати попередніх досліджень, оптимізація параметрів моделі займає багато часу, а використання різних моделей має непомірно високу обчислювальну складність. Використовуваний нами підхід полягає в оптимізації гіперпараметрів з використанням методу градієнтного спуску. У цьому випадку, як і для емпіричної мінімізації ризику, значення p в рівнянні (6) не повинно бути числом моделей, що проходять тестування (наприклад, число кроків градієнта). Однак, значення p може бути числом різних можливих значень гіперпараметрів, яке є дуже великим [4].

При намаганні оптимізувати m гіперпараметрів $(\beta_1,...,\beta_m)$ на множині перевірки, кожен з яких може приймати q різних значень, число функцій в F^* буде дорівнювати $p = q^m$, а рівняння (6) буде вказувати на те, що додаткова похибка оцінки з етапу вибору моделі буде мати порядок $\sqrt{m/n'}$,

$$R(f^*) \le R_{перев}(f) + \sqrt{\frac{m\ln(q) - \ln(\eta/2)}{2n'}}. \qquad (7)$$

У випадку, якщо гіперпараметри приймають неперервні значення, побудова верхньої границі є більш складним завданням, однак це можна зробити за допомогою чисел покриття та традиційних границь ВЧ.

Однак розмірність F^* взагалі неможливо обчислити, оскільки функції в цій множині є власне розв'язками задачі оптимізації. З інтуїтивної точки зору, необхідно провести заміну розмірності ВЧ F^* на число гіперпараметрів m , як і в дискретному випадку. Це можна зробити з припущенням того, що функції в F^* "гладко" залежать від параметрів моделі θ . Приведемо лише скорочене доведення.

Нехай Ω є множиною можливих значень параметрів моделі. Для кожного з них, $f_\theta = f_{\alpha^0(\theta)}$ є оптимальною функцією в моделі θ , тобто мінімізацією навчального критерію T . Ми маємо, що

$$F^* = \{f_\theta,\ \theta \in \Omega\}.$$

Будемо вважати, що f_θ суттєво не змінюється з θ , тобто виконується наступна умова Ліпшиця:

$$\forall(\theta,\theta') \in \Omega^2,\ \left\| f_\theta - f_{\theta'} \right\|_\infty \le C \left\| \theta - \theta' \right\|_\infty .$$

Для надання сенсу такому припущенню, ми повинні розглянути клас дійсних функцій. Число покриття F^* може бути обмежено постійною величиною (в залежності від C), помноженою на число покриття Ω . Нарешті, стандартні результати класифікації даних з використанням дійсних функцій забезпечують оцінки помилки узагальнення в контексті чисел покриття та похибок поля.

Висновки

Підводячи підсумки викладеного матеріалу, зазначимо, що нашим завданням було визначити в чому полягає небезпека перенавчання, коли доступними є багато гіперпараметрів (моделей). Встановлено, що додаткова похибка оцінки зростає відповідно до квадратного кореня з числа гіперпараметрів. Зауважимо, що в даній статті ми вивчали проблему перенавчання у виборі моделі з використанням критерію помилки перевірки, однак те ж саме відбувається з будь-яким визначеним критерієм. Використовуючи отримані нами результати експериментальних досліджень для проблеми вибору характеристик з використанням методу структурної мінімізації ризику, можна зробити висновок, що коли число вибраних характеристик є великим, границя очікуваного ризику стає більшою.

Список використаних джерел

1. *Vapnik V., Chervonenkis A.* Theory of Pattern Recognition. Nauka, 1974.
2. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables. Journal of the American Statistical Association. 58(301): 13-30, 1963.
3. *Ng A.Y.* Preventing over-fitting of cross-validation data. In Proceedings of the 14th International Conference on Machine Learning. Morgan Kaufmann, 1997.
4. *Bengio Y.* Gradient-based optimization of hyper-parameters. Neural Computation, 12(8), 2000.

Надійшла до редколегії 28.01.2013

УДК 519.7

О.А. Галкіна, аспірантка

Побудова послідовного за часом ефективного портфеля умовних значень ризику

У даній роботі розглянуто багатоетапну проблему оптимізації портфеля. Представлено сучасні характеристики ризику в багатоетапних проблемах оптимізації портфеля та досліджено процедуру побудови послідовної за часом багатоетапної міри ризику з точки зору динамічних рівнянь.

Ключові слова: портфель, актив, міра ризику

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: o.a.galkina@yandex.ru

Olga A. Galkina, postgraduate (PhD)

Building of the time consistent efficient portfolio of the conditional risk values

This paper considers the problem of multi-stage portfolio optimization. The modern risk characteristics in multi-stage portfolio optimization problems are presented and the sequential procedure for constructing a multi-stage risk measure in terms of the dynamic equations is investigated.

Key words: portfolio, asset, risk measure

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova str., 4d, e-mail: o.a.galkina@yandex.ru

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Опис проблеми

Класична одноступенева проблема оптимізації портфеля може бути розширена до багатоступеневої проблеми. Метою задачі багатоступеневої оптимізації портфеля є визначення оптимального портфеля для заданого скінченного горизонту інвестування T, визначеного множиною етапів $T := \{1,...,T\}$. Після початкових інвестицій в момент часу $t = 1$, портфель може бути збалансований по часовим етапам $t = 2,...,T-1$ та виплачений в кінці останнього етапу $t = T$. Розглянемо фільтрований ймовірнісний простір $(R^k, F, (F)_{t\in T}, P)$. Загальний дохід представлений у вигляді $\xi := (\xi_1,...,\xi_t) \in R^{k_t}$, де підвектори $\xi_t \in R^{k_t}$ є сукупним доходом у момент часу $t \in T$. Історія усіх сукупних доходів до етапу t позначається у вигляді $\xi_t := (\xi_1,...,\xi_t) \in R^{k_t}$, де $k^t := \sum_{s=1}^{t} k_s$. Рішення про інвестиції $w_t(\xi^t)$ проводиться в момент часу t після того як були виявлені ξ^t, але до будь–яких майбутніх результатів $\{\xi_s\}_{s>t}$. Ми пов'язуємо з процесом виявлення ξ_t відповідну фільтрацію $F_1 \subset ... \subset F_T$ з $\delta-$ алгебри на R^k. Позначимо через P_t ймовірнісний розподіл ξ_t. Відзначимо, що одноетапну модель можна розглядати як окремий випадок багатоетапної моделі, в якій $\xi^T = \xi$ та $k^T = k$.

Кожен інвестор прагне максимізувати очікувану прибутковість портфеля при мінімізації своїх ризиків. Очікувана прибутковість багатоетапного портфеля $\bar{r}_p$ може бути розрахована як середній капітал на етапі $t = T-1$, помножений на середній дохід останнього етапу ξ_t, тобто

$$\bar{r}_p = E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T)$$

Використовуючи припущення, що загальні доходи поетапно незалежні, очікувана прибутковість може бути записана у вигляді:

$$\bar{r}_p = E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1}))E(\xi_T)$$

Значення ризику

Значення ризику (*Value at risk – VaR*) являє собою міру ризику, що усуває основні недоліки дисперсії як міри ризику. Вона визначається як величина втрат порогу $\alpha \in R$, тобто в кінці періоду інвестування, перевищуючи ймовірність $(1-\beta) \in R$. Нехай $f(w,\xi)$ – втрати, пов'язані з вектором прийняття рішень $W \in R^I$ та

© О.А. Галкіна, 2013

випадковим вектором $\xi \in R^I$. Основний розподіл ймовірностей $\xi \in R^I$ має щільність $p(\xi)$. Ймовірність того, що $f(w,\xi)$ не перевищує поріг $\alpha \in R$ визначається у наступному вигляді:

$$\Psi(w,\alpha) = \int\limits_{f(w,\xi)\le\alpha} p(\xi)d\xi$$

β–VaR значення для випадкової величини втрат, пов'язаних з w та будь–якої заданої ймовірності рівня $\beta \in (0,1)$ позначається $\alpha_\beta(w)$ та визначається за наступною формулою:

$$\alpha_\beta(w) = \min\{\alpha \in R : \Psi(w,\alpha) \ge \beta\}$$

Умовна величина ризику

Умовне значення ризику (*Conditional Value at Risk* $-CVaR$) є когерентною мірою ризику, що враховує умовну очікувану величину втрат, за умови, що вона перевищує значення VaR. Математично це визначається у наступному вигляді:

$$\phi_\beta(w) = (1-\beta)^{-1} \int\limits_{f(w,\xi)\ge\alpha_\beta(w)} f(w,\xi)p(\xi)d\xi$$

Для подальших міркувань ми визначаємо функцію $F_\beta(w,\alpha) : R^I \times R \to R$ за допомогою:

$$F_\beta(w,\alpha) =$$

$$= \alpha + (1-\beta)^{-1} \int\limits_{\xi\in R^I} [f(w,\xi)-\alpha]^+ p(\xi)d\xi =$$

$$= \alpha + (1-\beta)^{-1} E([f(w,\xi)-\alpha]^+)$$

де $[x]^+ = x, x \ge 0$ та $[x]^+ = 0, x \le 0$

Ми вводимо функцію $z \in L^\infty_{I,1}$ таку, що $f(w,\xi)-\alpha \le z(\xi)$ та $0 \le z(\xi)$. Задача мінімізації $F_\beta(w,\alpha)$ може бути записана у наступному вигляді:

$$\min \alpha + (1-\beta)^{-1} E(Z(\xi))$$

$$\begin{cases} \alpha \in R, w \in R^I, z \in L^\infty_{I,1} \\ z(\xi) \ge 0 \\ z(\xi) \ge f(w,\xi) - \alpha \end{cases}$$

де $L^\infty_{k,n}$ позначає простір всіх вимірних борелівських функцій з R^k в R.

Властивості мір ризику

Розглянемо ймовірнісний фільтрований простір $(\Omega, F, (F)_{t\in T}, P)$ з $F_1 = \{\varnothing, \Omega\}$. Ми пов'язуємо з процесом виявлення ξ_t відповідну фільтрацію $F_1 \subset ... \subset F_T$ $\delta-$алгебри на Ω. Позначимо $L^\infty_t := L^\infty_T(\Omega, F_t, P), t \in T$ – векторний простір усіх обмежених F_t – вимірних випадкових змінних. Більше того, визначимо Z_t як простір усіх F_t- вимірних функцій: $Z_t := \{Z : L^\infty_t \to R\}$.

Ризик в багатоетапній оптимізації, що задається послідовністю відображень

$$p_t : L^\infty_T \to L^\infty_t, t = 1,...,T-1, \text{ де } p_t(X), X \in L^\infty_T$$

може бути визначений як оцінка ризиків, пов'язаних з позицією X, обумовлена на інформацію ξ_t, що доступна в момент часу t.

Умовна опукла міра ризику

Зображення $p_t : L^\infty_T \to L^\infty_t, t = 1,...,T-1$ називається умовною опуклою мірою ризику, якщо вона задовольняє наступні властивості. Для кожного $X_1, X_2 \in L^\infty_T$:

- Умовна інваріантність грошових коштів

$$p_t(X_1 + m_t) = p_t(X_1) - m_t, m_t \in L^\infty_t$$

- Монотонність

$$X_1 < X_2 \Rightarrow p_t(X_1) \ge p_t(X_2)$$

- Умовна опуклість

$$\lambda \in L^\infty_t, 0 \le \lambda \le 1$$

$$p_t(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda p_t(X_1) + (1-\lambda)p_t(X_2)$$

- Нормалізація

$$p_t(0) = 0$$

Когерентна міра ризику

Умовна опукла міра ризику є когерентною, якщо вона задовольняє властивість умовної позитивної однорідності:

$$\lambda \in L^\infty_t, \lambda \ge 0$$

$$p_t(\lambda X_1) = \lambda p_t(X_1)$$

Динамічна опукла міра ризику: послідовність $(p_t)_{t\in T}$ називається динамічною

опуклою мірою ризику, якщо p_t є умовною опуклою мірою ризику для кожного $t \in T$.

Послідовна за часом міра ризику: динамічна опукла міра ризику $(p_t)_{t\in T}$ є послідовною за часом, якщо виконується кожна з наступних еквівалентних умов:

- для усіх $t = 1,...,T-1$ та для усіх $X_1, X_2 \in L_T^\infty$

$$p_{t+1}(X_1) \geq p_{t+1}(X_2) \Rightarrow p_t(X_1) \geq p_t(X_2)$$

Іншими словами, якщо портфель X_1 є більш ризикованим, ніж портфель X_2 в момент часу $t+1$, тоді портфель X_1 повинен бути більш ризикованим, ніж портфель X_2 також в момент часу t.

- для усіх $t = 1,...,T-1$ та для усіх $X_1, X_2 \in L_T^\infty$

$$p_{t+1}(X_1) = p_{t+1}(X_2) \Rightarrow p_t(X_1) = p_t(X_2)$$

Іншими словами, якщо портфель X_1 настільки ж ризикований, як портфель X_2 в момент часу $t+1$, тоді портфель X_1 повинен бути в рівній мірі ризикованим, як портфель X_2 також в момент часу t.

- $(p_t)_{t\in T}$ є рекурсивною

$$p_t = p_t(-p_{t+s}), t, s \geq 0, t, t+s \in T$$

Принцип Белмана

Припустимо на кожному періоді $t = 1,...,T$ можна порахувати дійсну функцію втрат $f_t(x_t(\xi^t), \xi^t)$ та цільову функцію $F_t(Z_t,...,Z_T \mid \xi^t) : Z'_t \times ... \times Z'_T \times R^{k_t} \to R$. Для спрощення позначимо $x_t := x_t(\xi^t), t \in T$. На кожному етапі $t \in T$ багатоетапної моделі необхідно мінімізувати всі втрати, які можуть виникнути з поточного етапу t до останнього етапу T з урахуванням інформації по всім реалізаціям невизначених параметрів ξ_t в момент часу t. Іншими словами, на кожному етапі $t \in T$, необхідно розв'язати наступну задачу оптимізації:

$$\min_{x_t,...,x_T} F_t(f_t(x_t, \xi_t),..., f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^t)$$

Важливо зазначити, що кожне правило прийняття рішення $x_\tau(\xi^\tau), \tau = t,...,T$ є функцією параметрів ξ^τ обумовлене на усі відповідні параметри ξ^t етапу t. Одноетапна модель для $t = 1$ визначена у наступному вигляді:

$$\min_{x_t,...,x_T} F_1(f_1(x_1, \xi_1),..., f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^1)$$

де ми включаємо $\xi_1 = 1$ для постійності. Модель на останньому етапі $t = T$ визначається:

$$\min_{x_T} F_T(f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^T)$$

Оптимальне значення $V_t(x_{t-1}, \xi^t)$ оптимізаційної проблеми є функцією ξ^t та останнього рішення x_{t-1}. Проблему можна представити у наступному вигляді:

$$\min_{x_t} \begin{bmatrix} \inf\limits_{x_t,...,x_T} F_t(f_t(x_t, \xi_t), f_{t+1}(x_{t+1}, \xi_{t+1}),... \\ ..., f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^t) \end{bmatrix}$$

Витрати транзакцій

У багатоетапній оптимізації портфеля, інвестори можуть збалансувати свій портфель на кожному етапі. Тим не менш, зміна балансу не є безкоштовною. Таким чином, мають бути прийняті до уваги витрати транзакцій. Представимо, що на кожному етапі $t, t = 1,...,T-1$, вектор вагових активів $w_t(\xi^t)$ позначає поточний капітал, $b_t(\xi^t)$ – активи, що купуються на даному етапі та $s_t(\xi^t)$ – активи, що продаються на даному етапі. Без витрат транзакцій, баланс портфелю може бути розрахований у наступному вигляді:

$$w_t(\xi^t) = \xi_t w_{t-1}(\xi^{t-1}) + b_t(\xi^t) - s_t(\xi^t)$$

Операційні витрати розраховуються як фіксований відсоток $c_b(c^s)$ активів, що купуються (продаються) на кожному періоді часу. Включаючи це в рівняння, баланс портфеля повинен задовольняти:

$$w_t(\xi^t) = \\ = \xi_t w_{t-1}(\xi^{t-1}) + (1-c_b) b_t(\xi^t) - (1+c_s) s_t(\xi^t)$$

Послідовний за часом ефективний портфель середніх умовних значень ризику

Припустимо, що W_0 позначає початковий капітал для інвестування. Введемо наступні множини:

$$W_t := \{w_t \in L_{k^t,n} : w_{\min} \le w_t(\xi^t) \le w_{\max}\}$$

$$S_t := \{s_t \in L_{k^t,n} : 0 \le s_t(\xi^t) \le s_{\max}\}$$

$$B_t := \{b_t \in L_{k^t,n} : 0 \le b_t(\xi^t) \le b_{\max}\}$$

де $b_{\max} \in R^I$ та $s_{\max} \in R^I$ позначають максимальний обсяг активів, що купуються та продаються, відповідно; $w_{\max} \in R^I$ та $w_{\min} \in R^I$ позначають максимальний та мінімальний дохід, допустимий для кожного з активів, відповідно. Якщо короткі продажі не дозволено, необхідно встановити $w_{\min} \ge 0$. Для останнього інвестиційного періоду $t = T-1$, значення функції $V_{T-1}([w_{T-2}, \alpha], \xi^{T-1})$ визначається оптимальним значенням проблеми:

$$\min \alpha_{T-1}(\xi^{T-1}) + (1-\beta)^{-1}\Xi_{P_T}([-w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T - -\alpha_{T-1}(\xi^{T-1})]^+)$$

$$\begin{cases} w_{T-1} \in W_{T-1}, s_{T-1} \in S_{T-1}, b_{T-1} \in B_{T-1}, \alpha_{T-1} \in L_{k^{T-1},1} \\ E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T) \ge \bar{r}_p \\ 1^T b_{T-1}(\xi^{T-1}) - 1^T s_{T-1}(\xi^{T-1}) = 0 \\ w_{T-2}(\xi^{T-2})\xi_{T-1} + (1-c_b)b_{T-1}(\xi^{T-1}) - \\ -(1+c_s)s_{T-1}(\xi^{T-1}) = w_{T-1}(\xi^{T-1}) \end{cases}$$

Значення функції $V_t(w_{t-1}, \xi^t), t = T-2, \ldots, 2$ визначається оптимальним значенням проблеми:

$$\min \alpha_t(\xi^t) + +(1-\beta)^{-1}E_{P_{t+1}}([V_{t+1}([w_t(\xi^t), \xi^{t+1}) - \alpha_t(\xi^t)])$$

$$\begin{cases} w_t \in W_t, s_t \in S_t, b_t \in B_t, \alpha_t \in L_{k^t,1} \\ 1^T b_t(\xi^t) - 1^T s_t(\xi^t) = 0 \\ w_{t-1}(\xi^{t-1})\xi_t + (1-c_b)b_t(\xi^t) - (1+c_s)s_t(\xi^t) = \\ = w_t(\xi^t) \end{cases}$$

та на першому етапі $t = 1$ відповідна проблема має вигляд

$$\min \alpha_1(\xi^1) + (1-\beta)^{-1}E_{P_2}([V_2([w_1(\xi^1), \xi^2) - \alpha_1(\xi^1)]^+)$$

$$\begin{cases} w_1 \in W_1, s_1 \in S_1, b_1 \in B_1, \alpha_t \in L_{k^t,1} \\ 1^T b_t(\xi^t) - 1^T s_t(\xi^t) = 0 \\ (1-c_b)b_1(\xi^1) - (1+c_s)s_1(\xi^1) = w_1(\xi^1) \end{cases}$$

Поєднуючи динамічні рівняння в одну модель та вводячи змінні $z_t(\xi^t), t = 2, \ldots, T$ для того, щоб уникнути виразів $[x]^+$, що виникають в цільовій функції, отримуємо наступну проблему:

$$\min a_1(\xi^1) + (1-\beta)^{-1}\Xi_{P_2}(z_2(\xi^2))$$

$$\begin{cases} w_t \in W_t, s_t \in S_t, b_t \in B_t, t = 1, \ldots, T-1 \\ \alpha_t \in L_{k^t,1}, z_t \in L_{k^t,1} \\ -w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T - \alpha_{T-1}(\xi^{T-1}) \le z_T(\xi^T) \\ E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T) \ge \bar{r}_p \\ 1^T b_1(\xi^1) - 1^T s_1(\xi^1) = W_0 \\ z_t(\xi^T) \ge 0, t = 2, \ldots, T \\ (1-c_b)b_1(\xi^1) - (1+c_s)s_1(\xi^1) = w_1(\xi^1) \\ 1^T b_t(\xi^t) - 1^T s_t(\xi^t) = 0, t = 2, \ldots, T \\ w_{t-1}(\xi^{t-1})\xi_t + (1-c_b)b_t(\xi^t) - (1+c_s)s_t(\xi^t) = w_t(\xi^t) \\ t = 2, \ldots, T-1 \\ z_t(\xi^t) + \alpha_{t-1}(\xi^{t-1}) \ge \alpha_t(\xi^t) + (1-\beta)^{-1}E_{P_{t+1}}(z_{t+1}(\xi^{t+1})) \\ t = 2, \ldots, T-1 \end{cases}$$

Висновки

У даній роботі розглянуто багатоетапну проблему оптимізації портфеля. Представлено сучасні характеристики ризику в багатоетапних проблемах оптимізації портфеля та досліджено процедуру побудови послідовної за часом багатоетапної міри ризику з точки зору динамічних рівнянь.

Список використаних джерел

1. F. J. Fabozzi. Robust portfolio optimization and management, (2007), pp.17-111.
2. H.M. Markowitz. Portfolio selection, J. Finance 7, (1952), pp. 77–91.
3. S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications. Financial engineering news, (2000).

Надійшла до редколегії 28.01.2013

УДК 519.876.5

Громадченко Т.В.[1], аспірант,
Мартинюк П.М.[2], к.ф.-м.н., доц.

Математичне моделювання впливу техногенних факторів на розподіл вологи в ґрунті

Побудовано математичну модель процесу вологоперенесення в ґрунтовому середовищі з врахуванням впливу тепла і концентрації сольового розчину у порах ґрунту. Відповідну крайову задачу розв'язано методом скінченних елементів. На чисельних експериментах показано можливість значного впливу техногенних факторів на зміну вологості.
Ключові слова: вологоперенос, метод скінченних елементів, моделювання, тепло-масоперенесення.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: Grotan_nuwmnru@ukr.net
[2] Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

T. V. Gromadchenko[1], Postgraduate Student,
P. M. Martinyuk[2], Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor

Mathematical Modeling of the Impact of Technological Factors on the Soil Moisture Distribution

Mathematical model of soil moisture transfer was built including the impact of the heat and the concentration of salt solution in soil pores. The corresponding boundary value problem was solved by finite element method. With the numerical experiments it is showed the possibility of a significant effect of technological factors on moisture change.
Key Words: moisture transfer, finite element method, modeling, heat and mass transfer.

[1] National University of Water Management and Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: Grotan_nuwmnru@ukr.net
[2] National University of Water Management and Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н. Акіменко В.В.

1. Вступ. В теорії руху ґрунтових вод велика увага приділяється вологопереносу. Вивченню руху води у ненасичених ґрунтах та процесам фільтрації у насичених пористих середовищах присвятили свої роботи багато вчених [1-4]. Увага до цих процесів зумовлена можливістю нанесення значної шкоди спорудам в результаті просідання та деформації їх ґрунтових основ, сільському господарству (підтоплення територій), спричиненню зміни рельєфу (зсуви, обвали) та загрозі людським життям. Однак всі вищезгадані вчені в якості порової рідини розглядали чисту воду і нехтували впливом температури на зміну вологості ґрунту.

При засоленні відбувається зміна фізико-механічних характеристик ґрунту. При вологоперенесенні солі розчиняються і знижуються міцнісні параметри у ґрунті, а температура може впливати на зміну динаміки цих процесів.

Одним із факторів стійкості ґрунтових укосів та схилів є саме зміна вологості ґрунту, з якого вони складаються. Дослідження впливу вологоперенесення на стійкість зсувонебезпечних масивів наведено в роботі [5]. Однак там не врахована можливість впливу техногенних факторів на ці процеси. Тому метою даної статті є дослідження впливу процесів тепло- та масопереносу на розподіл вологості в ґрунті.

Математичному моделюванню процесу вологоперенесення в ґрунтових середовищах присвячені роботи [3, 4, 6, 7]. Елементи математичного моделювання впливу тепло-масопереносу на розподіл вологості в ґрунті наведено в роботах [8, 9]. Як відмічено в [8], аналіз фізичних механізмів переносу енергії та речовини в ґрунтах показує, що рух вологи відбувається в основному під впливом градієнтів потенціалу ґрунтової вологи та температури, перерозподіл тепла відбувається в результаті механізмів теплопровідності та переносу тепла рідиною і перенос солей - в результаті механізмів конвективної дифузії та термодифузії. Однак, на нашу думку, на рух вологи в ґрунті також

© Т.В. Громадченко, П.М. Мартинюк, 2013

впливає і хімічний потенціал [10] та нелінійна залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей і температури [11].

2. Постановка задачі та її математична модель. Розглянемо двовимірну задачу вологоперенесення у ґрунтовому середовищі, який займає область Ω з межею Γ. Вважаємо, що ґрунт є однорідним та ізотропним за своїми характеристиками. Зміну вологості у ґрунті опишемо рівняннями Річардса [7]. За шукану приймемо функцію насичення пористого середовища

$$s(\mathbf{X},t)=\frac{\theta-\theta_{\min}}{\theta_{\max}-\theta_{\min}},$$

де $\theta=\frac{V_в}{V}$ - об'ємна вологість; $V_в$ - об'єм порової рідини у виділеному об'ємі V ґрунту; $\theta_{\min}$ - залишкова (мінімальна) вологість (або кількість рідини, яка залишається в ґрунті після повного осушення); $\theta_{\max}$ - значення максимальної вологості; $\mathbf{X}=(x,z)$. Такий підхід дозволяє розглядати межу розподілу зон повного та неповного насичення внутрішньою і явно не визначати її в процесі розв'язання задачі. Ця ідея була використана в [6]. У випадку двофазного пористого середовища (відсутня газова складова) $\theta_{\max}=n$, де n - пористість ґрунту. Тому справедливо $0\le\theta_{\min}\le\theta\le\theta_{\max}=n$.

Математичну модель досліджуваного процесу в умовах тепло-масопереносу можна описати наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\nabla\cdot\big(D(s,c,T)\nabla s\big)-\big(\nabla\cdot(k(s,c,T)\nabla z)+\\+\nabla\cdot\big(\mu\nabla T\big)+\nabla\cdot\big(\nu\nabla c\big)\big)\frac{1}{n-\theta_{\min}};\quad(1)$$

$$\big(s(n-\theta_{\min})+\theta_{\min}\big)\frac{\partial c}{\partial t}=\nabla\cdot\big(D_c(s,c,T)\nabla c\big)+\\+\nabla\cdot\big(D_T(s,c,T)\nabla T\big)-\mathbf{q_s}\,\nabla c-\gamma_m(c-C_m);\quad(2)$$

$$C_{еф}\,\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot\big(\lambda_{еф}\nabla T\big)-\rho C_\rho\mathbf{q_s}\nabla T;\quad(3)$$

$$\mathbf{q_s}=-((n-\theta_{\min})D(s,c,T)\nabla s-k(s,c,T)\nabla z)+\\+\nu(c)\nabla c+\mu\nabla T;\quad(4)$$

$$\mathbf{q_c}=c\mathbf{q_s}-D\nabla c-D_T\nabla T\,;\quad(5)$$

$$\mathbf{q_T}=\rho C_\rho T\mathbf{q_s}-\lambda_{еф}\nabla T\,;\quad(6)$$

$$(\mathbf{q_s},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(S)}}=0;\ s(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(S)}}=s_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(S)};\quad(7)$$

$$(\mathbf{q_c},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(C)}}=0;\ c(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(C)}}=c_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(C)};\quad(8)$$

$$(\mathbf{q_T},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(T)}}=0;\ T(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(T)}}=T_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(T)};\quad(9)$$

$$s(\mathbf{X},0)=s_0(\mathbf{X}),\quad c(\mathbf{X},0)=c_0(\mathbf{X}),\\T(\mathbf{X},0)=T_0(\mathbf{X}),\quad\mathbf{X}\in\overline{\Omega};\quad(10)$$

$$\Gamma_1^{(s)}\cup\Gamma_2^{(s)}=\Gamma_1^{(c)}\cup\Gamma_2^{(c)}=\Gamma_1^{(T)}\cup\Gamma_2^{(T)}=\Gamma,$$

$$\Gamma_1^{(s)}\cap\Gamma_2^{(s)}=\varnothing,\ \Gamma_1^{(c)}\cap\Gamma_2^{(c)}=\varnothing,\ \Gamma_1^{(T)}\cap\Gamma_2^{(T)}=\varnothing.$$

Рівняння (1) описує процес вологопереносу в масиві ґрунту Ω в умовах тепло-масопереносу. Рівняння (2), (3) описують сольовий та тепловий режими відповідно. Тут: $D(s,c,T)$ – нелінійний коефіцієнт дифузії ґрунтової вологи; $\mathbf{q_s},\mathbf{q_c},\mathbf{q_T}$ – питомі потоки ґрунтової вологи, розчинених солей і тепла відповідно; $k(s,c,T)$ – коефіцієнт фільтрації у випадку насиченого ґрунту і гідравлічна провідність при неповній насиченості ґрунту; μ,ν – коефіцієнти термічного та хімічного осмосу при повній насиченості та коефіцієнти термічної та хімічної дифузії ґрунтової вологи для зони неповного насичення [10]; T – температура середовища; $\lambda_{еф}$ – коефіцієнт ефективної теплопровідності вологого ґрунту; ρ – густина порового розчину; C_ρ – питома теплоємність порового розчину; c – концентрація сольового розчину; $D_c(s,c,T)$ – коефіцієнт конвективної дифузії; $D_T(s,c,T)$ – коефіцієнт термодифузії розчинених речовин; γ_m – коефіцієнт масообміну; C_m – концентрація граничного насичення; $C_{еф}$ – ефективна об'ємна теплоємність ґрунту; $s_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$, $s_1(\mathbf{X},t)$, $c_1(\mathbf{X},t)$, $T_1(\mathbf{X},t)$ – задані функції.

Для визначення нелінійних функцій $D(s,c,T)$ та $k(s,c,T)$ можна використати наступні емпіричні залежності:

1. Модель BC (R. H. Brooks and A. T. Corey model [7]):

$$k(s,c,T)=K_0(c,T)\cdot s^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}},$$

$$D\big(s,c,T\big)=D_0 s^{2+\frac{1}{\lambda}},$$

$$D_0=-\frac{K_0(c,T)\psi_b}{\lambda\big(\theta_{\max}-\theta_{\min}\big)},$$

де $K_0(c,T)$ - коефіцієнт фільтрації [12]; λ - характеристичний параметр розподілу розміру пор ґрунту; ψ_b - тиск повітря у ґрунті. Зауважимо, що ψ_b є від'ємним, тому D_0 і $D\big(s,c,T\big)$ будуть додатними.

2. Модель MvG (Mualem–Van Genuchten model [7]):

$$k(s,c,T)=K_0(c,T)\cdot\sqrt{s}\Big[1-(1-s^{c/\lambda})^{\lambda/c}\Big]^2,$$

$$D(s,c,T)=D_0\frac{\left[1-\left(1-s^{\frac{r}{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{r}}\right]^2\left(1-s^{\frac{r}{\lambda}}\right)^{\frac{1}{r}-1}}{s^{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2}}},$$

де r - емпіричний параметр. Існують також інші залежності для коефіцієнтів дифузії та гідравлічної провідності, деякі з яких наведено в [12].

Крайова задача (1)-(10) є нелінійною. Тому знайти її аналітичний розв'язок неможливо. Великої популярності серед чисельних методів розв'язання крайових задач здобув метод скінченних елементів (МСЕ) [11, 13, 14]. Саме тому його і було використано при знаходженні чисельних розв'язків відповідної крайової задачі. Проте, враховуючи наявність в рівняннях (2), (3) членів конвективного переносу, потрібно застосовувати стабілізаційні схеми МСЕ [13].

3. Чисельне розв'язування задачі. Нехай замикання $\overline{\Omega}$ області Ω покрите скінченноелеметною сіткою, яка налічує n вузлів. Визначимо наступні множини номерів вузлів:

$$\omega=\{j:\mathbf{X}_j=(x_j,z_j)\in\Omega\},$$
$$\gamma_1^{(S)}=\{j:\mathbf{X}_j=(x_j,z_j)\in\Gamma_1^{(S)}\},$$
$$\gamma_2^{(S)}=\{j:\mathbf{X}_j=(x_j,z_j)\in\Gamma_2^{(S)}\},$$
$$\omega\cup\gamma_1^{(S)}\cup\gamma_2^{(S)}=\{1,2,...,n\}.$$

Аналогічно визначаються множини $\gamma_1^{(C)},\gamma_1^{(T)}$, $\gamma_2^{(C)},\gamma_2^{(T)}$.

Наближений узагальнений розв'язок задачі (1) - (10) шукаємо у вигляді

$$s_n(\mathbf{X},t)=\sum_{j\in\omega\cup\gamma_2^{(S)}}c_j^{(S)}(t)\varphi_j(\mathbf{X})+W^{(S)}(\mathbf{X},t);$$
$$c_n(\mathbf{X},t)=\sum_{j\in\omega\cup\gamma_2^{(C)}}c_j^{(C)}(t)\varphi_j(\mathbf{X})+W^{(C)}(\mathbf{X},t); \quad (11)$$
$$T_n(\mathbf{X},t)=\sum_{j\in\omega\cup\gamma_2^{(T)}}c_j^{(T)}(t)\varphi_j(\mathbf{X})+W^{(T)}(\mathbf{X},t),$$

де $\varphi_j(\mathbf{X})$ - базисні функції МСЕ, що визначені для кожного вузла; $c_j^{(S)}(t),c_j^{(C)}(t),c_j^{(T)}(t)$ - невідомі коефіцієнти, що залежать від часу; $W^{(S)}(\mathbf{X},t),W^{(C)}(\mathbf{X},t),\ W^{(T)}(\mathbf{X},t)$ - деякі відомі функції такі, що $W^{(S)}(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1}=s_1(\mathbf{X},t)$, $W^{(C)}(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1}=c_1(\mathbf{X},t)$, $W^{(T)}(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1}=T_1(\mathbf{X},t)$ [14].

Функції $W^{(S)}(\mathbf{X},t),\ W^{(C)}(\mathbf{X},t),\ W^{(T)}(\mathbf{X},t)$ апроксимуються, використовуючи множини номерів вузлів $\gamma_1^{(S)},\gamma_1^{(C)},\gamma_1^{(T)}$ та самі базисні функції МСЕ. Тоді

$$W^{(S)}(\mathbf{X},t)=\sum_{j\in\gamma_1^{(S)}}c_j^{(S)}(t)\varphi_j(\mathbf{X});$$
$$W^{(C)}(\mathbf{X},t)=\sum_{j\in\gamma_1^{(C)}}c_j^{(C)}(t)\varphi_j(\mathbf{X}); \quad (12)$$
$$W^{(T)}(\mathbf{X},t)=\sum_{j\in\gamma_1^{(T)}}c_j^{(T)}(t)\varphi_j(\mathbf{X}).$$

Підставляючи (12) в (11), отримуємо

$$s_n(\mathbf{X},t)=\sum_{j=1}^{n}c_j^{(S)}(t)\varphi_j(\mathbf{X});\ c_n(\mathbf{X},t)=\sum_{j=1}^{n}c_j^{(C)}(t)\varphi_j(\mathbf{X});$$
$$T_n(\mathbf{X},t)=\sum_{j=1}^{n}c_j^{(T)}(t)\varphi_j(\mathbf{X}).$$

Використовуючи стандартну процедуру [11, 14], а для стабілізації числових розв'язків рівнянь (2), (3) протипотокову схему Петрова-Гальоркіна [13], отримаємо наступну задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь стосовно векторів невідомих $\mathbf{S}(t)=\{c_j^{(S)}(t)\}_{j=1}^n$, $\mathbf{C}(t)=\{c_j^{(C)}(t)\}_{j=1}^n$, $\mathbf{T}(t)=\{c_j^{(T)}(t)\}_{j=1}^n$:

$$\mathbf{A}^{(T)}\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}+\mathbf{L}^{(T)}(\mathbf{S},\mathbf{C},\mathbf{T})\cdot\mathbf{T}(t)=\mathbf{F}^{(T)}, \quad (13)$$

$$\mathbf{A}^{(C)}\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}+\mathbf{L}^{(C)}(\mathbf{S},\mathbf{C},\mathbf{T})\cdot\mathbf{C}(t)=$$
$$=\mathbf{F}^{(C)}+\mathbf{G}^{(C)}\cdot\mathbf{T}(t), \quad (14)$$

$$\mathbf{A}^{(s)}\frac{d\mathbf{S}(t)}{dt}+\mathbf{L}^{(S)}(\mathbf{S},\mathbf{C},\mathbf{T})\cdot\mathbf{S}(t)=$$
$$=\mathbf{F}^{(S)}+\mathbf{G}^{(S)}\cdot\mathbf{T}(t)+\mathbf{M}^{(S)}\cdot\mathbf{C}(t), \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(T)}\cdot\mathbf{T}(0)=\tilde{\mathbf{F}}^{(T)},\ \tilde{\mathbf{A}}^{(C)}\cdot\mathbf{C}(0)=\tilde{\mathbf{F}}^{(C)},$$
$$\tilde{\mathbf{A}}^{(S)}\cdot\mathbf{S}(0)=\tilde{\mathbf{F}}^{(S)}, \quad (16)$$

$$\mathbf{A}^{(T)}=\{a_{ij}^{(T)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},\ \mathbf{L}^{(T)}=\{l_{ij}^{(T)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},$$
$$\mathbf{F}^{(T)}=(f_1^{(T)},\ldots,f_n^{(T)})^T,\ \tilde{\mathbf{A}}^{(T)}=\{\tilde{a}_{ij}^{(T)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},$$
$$\tilde{\mathbf{F}}^{(T)}=(\tilde{f}_1^{(T)},\ldots,\tilde{f}_n^{(T)})^T,\ \mathbf{A}^{(C)}=\{a_{ij}^{(C)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},$$
$$\mathbf{L}^{(C)}=\{l_{ij}^{(C)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},\ \mathbf{F}^{(C)}=(f_1^{(C)},\ldots,f_n^{(C)})^T,$$
$$\tilde{\mathbf{A}}^{(C)}=\{\tilde{a}_{ij}^{(C)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},\ \tilde{\mathbf{F}}^{(C)}=(\tilde{f}_1^{(C)},\ldots,\tilde{f}_n^{(C)})^T,$$
$$\mathbf{G}^{(C)}=\{g_{ij}^{(C)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},\ \mathbf{A}^{(S)}=\{a_{ij}^{(S)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},$$
$$\mathbf{L}^{(S)}=\{l_{ij}^{(S)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},\ \mathbf{F}^{(S)}=(f_1^{(S)},\ldots,f_n^{(S)})^T,$$
$$\tilde{\mathbf{A}}^{(S)}=\{\tilde{a}_{ij}^{(S)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},\ \tilde{\mathbf{F}}^{(S)}=(\tilde{f}_1^{(S)},\ldots,\tilde{f}_n^{(S)})^T,$$
$$\mathbf{G}^{(S)}=\{g_{ij}^{(S)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},\ \mathbf{M}^{(S)}=\{m_{ij}^{(S)}\}_{i=1;j=1}^{n;n},$$

$$a_{ij}^{(T)} = \iint\limits_{\Omega} C_{e\phi}\varphi_j\varphi_i dxdz + \sum_{\Omega e}\tau_e^{(T)}\iint\limits_{\Omega e} C_{e\phi}\rho C_\rho\varphi_j\mathbf{q_S}\nabla\varphi_i dxdz,$$

$$l_{ij}^{(T)} = \iint\limits_{\Omega}\lambda_{e\phi}\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i dxdz + \iint\limits_{\Omega}\rho C_\rho\mathbf{q_S}\nabla\varphi_j\varphi_i dxdz + \sum_{\Omega e}\tau_e^{(T)}\left[(\rho C_\rho)^2\iint\limits_{\Omega e}(\mathbf{q_S})^2\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i dxdz - \rho C_\rho\iint\limits_{\Omega e}\nabla\cdot(\lambda_{e\phi}\nabla\varphi_j)\mathbf{q_S}\nabla\varphi_i dxdz\right],$$

$$f_i^{(T)} = 0,\ \tilde{f}_i^{(T)} = \iint\limits_{\Omega} T_0(x,z)\varphi_i dxdz,$$

$$\tilde{a}_{ij}^{(T)} = \iint\limits_{\Omega}\varphi_j\varphi_i dxdz,\ a_{ij}^{(S)} = \iint\limits_{\Omega}\varphi_j\varphi_i dxdz,$$

$$a_{ij}^{(C)} = \iint\limits_{\Omega}(s(n-\theta_{\min})+\theta_{\min})\varphi_j\varphi_i dxdz + \sum_{\Omega e}\tau_e^{(C)}\iint\limits_{\Omega e}(s(n-\theta_{\min})+\theta_{\min})\varphi_j\mathbf{q_S}\nabla\varphi_i dxdz,$$

$$l_{ij}^{(C)} = \iint\limits_{\Omega} D_C\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i dxdz + \iint\limits_{\Omega}\mathbf{q_S}\nabla\varphi_j\varphi_i dxdz + \gamma_m\iint\limits_{\Omega}\varphi_j\varphi_i dxdz + \sum_{\Omega e}\tau_e^{(C)}\left[\iint\limits_{\Omega e}\nabla\varphi_j(\mathbf{q_S})^2\nabla\varphi_i dxdz - \iint\limits_{\Omega e}\nabla\cdot(D_C\nabla\varphi_j)\mathbf{q_S}\nabla\varphi_i dxdz + \gamma_m\iint\limits_{\Omega e}\varphi_j\mathbf{q_S}\nabla\varphi_i dxdz\right],$$

$$f_i^{(C)} = \iint\limits_{\Omega} C_m\gamma_m\varphi_i dxdz + \sum_{\Omega e}\tau_e^{(C)}\iint\limits_{\Omega e} C_m\gamma_m\mathbf{q_S}\nabla\varphi_i dxdz,$$

$$\tilde{f}_i^{(C)} = \iint\limits_{\Omega} C_0(x,z)\varphi_i dxdz,\ \tilde{a}_{ij}^{(C)} = \iint\limits_{\Omega}\varphi_j\varphi_i dxdz,$$

$$g_{ij}^{(C)} = -\iint\limits_{\Omega} D_T\nabla T\nabla\varphi_i dxdz + \sum_{\Omega e}\tau_e^{(C)}\iint\limits_{\Omega e}\nabla\cdot(D_T\nabla T)\mathbf{q_S}\nabla\varphi_i dxdz,$$

$$l_{ij}^{(S)} = \iint\limits_{\Omega} D(s,c,T)\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i dxdz + \frac{1}{n-\theta_{\min}}\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial k(s,c,T)}{\partial s}\nabla\varphi_j\nabla z\varphi_i dxdz,\ f_i^{(S)} = 0,$$

$$\tilde{a}_{ij}^{(S)} = \iint\limits_{\Omega}\varphi_j\varphi_i dxdz,\ g_{ij}^{(S)} = -\frac{1}{n-\theta_{\min}}\iint\limits_{\Omega}\left(\mu\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i + \frac{\partial k(s,c,T)}{\partial T}\nabla\varphi_j\nabla z\varphi_i\right)dxdz,$$

$$m_{ij}^{(S)} = \frac{1}{n-\theta_{\min}}\iint\limits_{\Omega}\left(\nu\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i + \frac{\partial k(s,c,T)}{\partial c}\nabla\varphi_j\nabla z\varphi_i\right)dxdz,\ \tilde{f}_i^{(S)} = \iint\limits_{\Omega} s_0(x,z)\varphi_i dxdz.$$

Параметри регуляризації для рівнянь (2), (3) вибиралися наступними згідно [13]:

$$\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a\left\|\rho c_\rho\mathbf{q_s}\right\|_{\infty,e}}\gamma(Pe_T),\ \tau_e^{(C)} = \frac{h_e}{a\left\|\mathbf{q_s}\right\|_{\infty,e}}\gamma(Pe_c),$$

де $a=3$, $\gamma(z)=\begin{cases} z, & 0\le z\le 1;\\ 1, & 1\le z\le\infty;\end{cases}$ $Pe_c = \frac{1}{2}h_e\frac{\left\|\mathbf{q_s}\right\|_{\infty,e}}{\left\|D_c\right\|_{\infty,e}}$,

$Pe_T = \frac{1}{2}h_e\frac{\left\|\rho c_\rho\mathbf{q_s}\right\|_{\infty,e}}{\left\|\lambda_{e\phi}\right\|_{\infty,e}}$, $\left\|\bullet\right\|_{\infty,e}$ - рівномірна норма.

Наближений розв'язок задачі Коші (13) – (16) можна знайти, наприклад, за допомогою повністю неявної різницевої схеми, лінійної відносно шуканих функцій [15]. Для прикладу покажемо дискретизацію в часі системи (13), яка відповідає рівнянню теплопереносу:

$$\mathbf{A}^{(T)}(\mathbf{S}^{(k)})\frac{\mathbf{T}^{(k+1)}-\mathbf{T}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(T)}(\mathbf{S}^{(k)},\mathbf{C}^{(k)},\mathbf{T}^{(k)})\cdot\mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(T)(k)},\quad k=0,1,...,m-1,$$

де k - відповідний часовий шар; m - кількість часових шарів.

4. Результати чисельних експериментів. Для вияснення ступеня впливу тепло-масопереносу на процес розподілу вологи, була проведена серія чисельних експериментів. Розглядався масив ґрунту у вигляді схилу, показаний на рис. 1. Координати точок межі області покладались наступними: $A(0;22)$, $B(0;2)$, $C(20;4)$, $D(30;14)$, $E(40;16)$, $F(40;24)$. Розмірність визначається в метрах. Границя $\Gamma_1^{(S)} = BC\cup CD\cup DE$ знаходиться під впливом інтенсивних атмосферних опадів у вигляді дощу, тобто постійно змочується. На початковому етапі ґрунт на схилі вважався сухим.

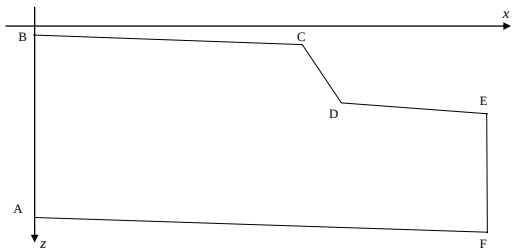


Рис. 1. Досліджувана область

Використовувались наступні вихідні дані:

$$D_1 = D_2 = 2\cdot10^{-3}\ м^2/доба,\ \gamma_m = 0\ доба^{-1},$$

$$D_{T_1} = D_{T_2} = 2\cdot10^{-4}\ кг/^0C\cdot доба\cdot м,$$

$$c_\rho = 4{,}2\,{}^{кДж}\!/_{кг\cdot{}^0C},\ c_T = 2137\,{}^{кДж}\!/_{м^3\cdot{}^0C},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 108\,{}^{кДж}\!/_{м\cdot{}^0C\cdot доба},\cdot\ \rho = 1100\ {}^{кг}\!/_{м^3},$$

$$\mu = 2.8\cdot 10^{-6}\ м^2/{}^0C\cdot доба,$$

$$\nu = 2.8\cdot 10^{-5}\ м^5/кг\cdot доба,\ C_m = C_{\max} = 160\,{}^{кг}\!/_{м^3},$$

$$C_{\min} = 8\,{}^{кг}\!/_{м^3},\ T_{\max} = 30\ {}^0C,\ T_{\min} = 10\ {}^0C.$$

Для експериментів враховувались такі граничні

$$(\mathbf{q_s},\mathbf{n})\big|_{AB\cup EF\cup AF} = 0;\quad s(\mathbf{X},t)\big|_{BC\cup CD\cup DE} = 1;$$

$$(\mathbf{q_c},\mathbf{n})\big|_{AB\cup CD\cup DE\cup EF\cup AF} = 0;\quad c(\mathbf{X},t)\big|_{BC} = C_{\max};$$

$$(\mathbf{q_T},\mathbf{n})\big|_{AB\cup EF\cup AF} = 0;\quad T(\mathbf{X},t)\big|_{BC\cup CD\cup DE} = T_{\max}$$

та початкові умови

$$T_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} T_{\max}, & \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(S)};\\ T_{\min}, & \mathbf{X}\notin\Gamma_1^{(S)}; \end{cases} c_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} c_{\max}, & \mathbf{X}\in BC;\\ c_{\min}, & \mathbf{X}\notin BC; \end{cases}$$

$$s_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(S)};\\ 0.6, & \mathbf{X}\notin\Gamma_1^{(S)}. \end{cases}$$

Параметри вологопереносу визначались згідно моделі ВС для пісковиків [16]

$$\overline{K}_0 = 1.08\ \ {}^{м}\!/_{добу};\ \theta_{\max} = 0.250;\ \theta_{\min} = 0.153;$$

$$\lambda = 8.4;\ \psi_b = -1.27\ м.$$

Тут $\overline{K}_0$ - коефіцієнт фільтрації у випадку чистої води та при температурі 20^0C. Залежність $k_0 = k_0(c,T)$ апроксимувалась методом радіальних базисних функцій за експериментальними даними, наведеними в [17].

Область покривалась трикутними скінченними квадратичними елементами. Кількість вузлів у скінченних елементах – 3491, кількість скінченних елементів – 1684. Середня довжина сторони одного скінченного елемента приблизно дорівнює 0,9 м. Крок по часу $\tau = 0.1$ доба.

Результати чисельних експериментів в графічному вигляді представлені на рис. 2 - 6.

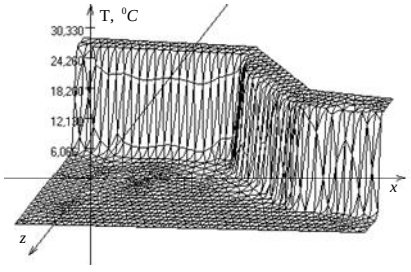


Рис.2. Графік розподілу температури при t=3 доби

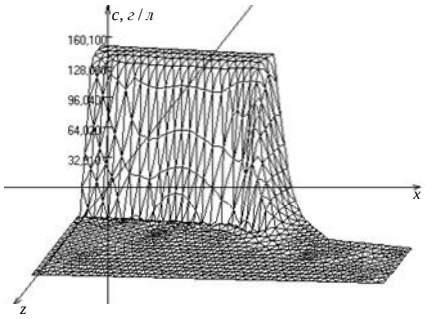


Рис.3. Графік розподілу концентрації солей при t=3 доби

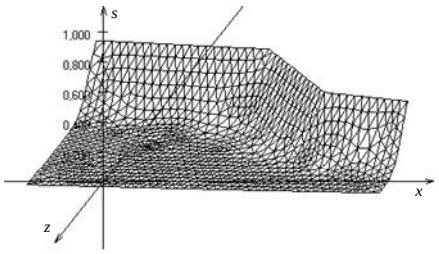


Рис.4. Графік розподілу насичення при t=3 доби

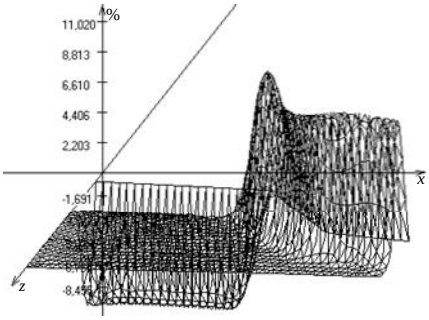


Рис. 5. Графік різниці розподілу вологості з урахуванням та без урахування впливу тепло-масопереносу при $C_{\max} = 160\ {}^{кг}\!/_{м^3}$

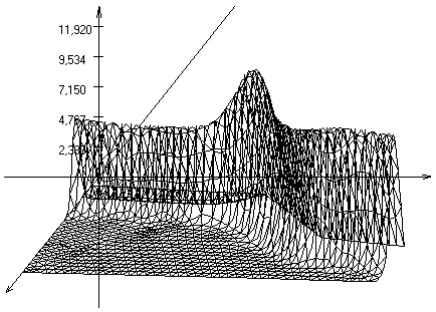


Рис. 6. Графік різниці розподілу вологості з урахуванням та без урахування впливу тепло-масопереносу при $C_{\max} = 50\ {}^{кг}\!/_{м^3}$

5. Висновки. На рис. 5, 6 можна побачити, що процеси тепло- та масопереносу суттєво впливають на розподіл вологості у ґрунтовому масиві. Різниця при врахуванні та неврахуванні даних факторів досягає подекуди 12 %. А

оскільки на сьогодні важливе місце займають процеси глобального потепління та антропогенний вплив людини на природу, зокрема забруднення промисловими відходами ґрунтів, підземних і надземних вод, то важливо враховувати вплив таких факторів як для будівель і споруд, що вже експлуатуються, так і для таких, що знаходяться на етапі будівництва. Однак вплив забруднень на розподіл вологи не є однозначним, бо процеси вологопереносу можуть як прискорюватися (див. рис. 6), так і сповільнюватися (див. рис. 5) у цьому випадку. А при зростанні температури процес зволоження пористого середовища однозначно пришвидшується.

Отже, в даній роботі запропонована математична модель переносу ґрунтової вологи з урахуванням техногенних факторів і відповідна крайова задача розв'язана методом скінченних елементів. Подальші дослідження будуть стосуватися врахування впливу рівня ґрунтових вод на розподіл вологи у ґрунті, а також стійкості ґрунтових масивів при таких умовах.

Список використаних джерел

1. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* Theory of groundwater movement. – Moscow: Nauka, 1977. - 664 p. (in Russian).
2. *Ivanov P.L.* Soils and foundation of hydrotechnical constructions. Soil mechanics. – Moscow: Vyshaya shkola, 1991. – 447 p. (in Russian).
3. *Delleur J.W.* The Handbook of Groundwater Engineering – CRC Press LLC, 1999. – 940 p.
4. *Marinoschi G.* Functional Approach to Nonlinear Models of Water Flow in Soils. – Springer, 2006. – 324 p.
5. *Gromadchenko T.V., Martiniuk P.M.* Mathematical modeling of the dry soil wetting as a result of damage of the non-pressure aqueduct // Visn. of OSABA. – 2012. – N 48. – P. 103-111. (in Ukrainian).
6. *Vabishchevich P.N., Daniyarov A.O.* Mathematical modeling of the aeration zone wetting in case of close groundwater // Mathematical Modeling. – 1994. – N 11. – P. 11-24. (in Russian).
7. *Caputo J.-G., Stepanyants Y. A.* Front Solutions of Richards' Equation. // Transport in Porous Media. – 2007. – V. 74, Issue 1. – P. 1-20.
8. *Rex L.M., Rex I.S., Yakirevich A.M.* Calculation of moisture and heat transfer in soil (one-dimensional problem) // GFAP №P003456. – Moscow, 1978. (in Russian).
9. *Globus A.M.* Physics of nonisothermal subsurface water exchange. – L.:Hidrometeoizdat, 1983. – 279 p. (in Russian).
10. *Soler Josep M.* Coupled Transport Phenomena in the Opalinus Clay: Implications for Radionuclide Transport // Journal of Contaminant Hydrology. – 2001. - V. 53. – P. 63-84.
11. *Vlasyuk A.P., Martiniuk P.M.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. – Rivne: NUVGP, 2008. – 416 p. (in Ukrainian).
12. *Feike J. Leij, Walter B. Russell, Scott M. Lesch* Closed Form Expressions for Water Retention and Conductivity Data // Ground Water. – 1997. – Vol. 35, No 5. – P. 848 – 858.
13. *Savula Ya.G., Shynkarenko O.G.* Numerical solution stabilization of variational problem of contaminants migration: streamline upwind scheme // Visn. Lviv. Un-ty. Ser. Meh.-Mat. – 1997. – N 46. – P. 3-9. (in Ukrainian).
14. *Sergienko I.V., Skopetskiy V.V., Deineka V.S.* Mathematical modeling and processes investigation in heterogeneous environments. – Kyiv: Nauk. Dumka, 1991. – 432 p. (in Russian).
15. *Samarskiy A.A, Gulin A.V.* Numerical methods of mathematical physics. – Moscow: Nauchnyi Mir, 2003. – 316 p. (in Russian).
16. *Van Genuchten M.Th.* A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils // Soil Science Society of America Journal. – 1980. – Vol. 44, № 5. – P. 892 – 898.
17. *Vlasyuk A.P., Martiniuk P.M.* Numerical solution of consolidation problems and filtration destruction of soil in conditions of heat and mass transfer by radial basis functions method. – Rivne: NUVGP, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 26.12.12

УДК 621.391:519.24

Дегтяр О.С., аспірантка

Адаптивна апроксимація сигналів за допомогою системи базисних функцій зі змінною розмірністю

Приведено метод апроксимації сигналів за допомогою системи базисних функцій зі змінною розмірністю. Виписано алгоритм переходу для випадку збільшення та зменшення кількості базисних функцій – виключенню тих, що не дають бажаного результату та введенню нових функцій.

Ключові слова: адаптивна апроксимація, зміна розмірності базису, динамічна система.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: olga.degtiar@gmail.com

O. Degtiar, postgraduate (PhD)

Adaptive signal approximation with the help of basis functions system of variable dimension

The approximation signals approaches with the help of basis functions system of variable depth develop. Transition algorithm for the case of increasing and decreasing the number of basis functions eliminating those that do not give desired result and introduction of the new functions is written out.

Key Words: adaptive approximation, basis dimension variation, dynamic system.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: olga.degtiar@gmail.com

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

При розгляді задач пов'язаних з апроксимацією даних, що надходять в реальному часі, найбільшу ефективність мають адаптивні алгоритми. Це дає змогу знаходити параметри системи та класифікувати дані по мірі надходження нової інформації. Розпізнавання структури даних та знаходження параметрів системи дозволяє не лише апроксимувати вимірюваний сигнал, але й зробити прогнозування процесу та будувати адаптивне керування динамічними об'єктами. Ефективність вирішення таких проблем суттєво залежить від структури отримуваних експериментальних даних та можливості її врахування в процесі розв'язування вказаних задач.

Один з конструктивних підходів при розв'язуванні поставлених задач ґрунтується на введенні системи базисних функцій [1, 2]. Але при цьому часто виникає потреба у зміні базисних функцій - виведенню функцій, що не входять в структуру сигналу на деякому інтервалі часу, і введення нових базисних функцій. У статті наведено алгоритм апроксимації експериментальних даних для випадку зміни розмірності системи базисних функцій. Подібні алгоритми можна ефективно використовувати при апроксимації швидкозмінних процесів: в задачах керування, економічного прогнозування, розповсюдження хімічного забруднення тощо [3, 4].

Постановка задачі

Нехай маємо скалярний сигнал $x = \varphi(t), t_0 \le t \le T$, який необхідно представити у структурно-параметричному вигляді.

Припустимо, що ми маємо систему базисних функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t), \quad t \ge t_0 . \qquad (1)$$

Задача полягає в побудові апроксимації у вигляді лінійної комбінації

$$\psi(t, \alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(t) . \qquad (2)$$

У процесі знаходження апроксимації сигналу початковий набір базисних функцій не завжди дає бажані результати, в такому випадку виникає потреба в зміні системи базисних функцій – виключенні одних і введенню інших.

Позначимо через $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N$ точки, в яких приймається рішення про зміну системи базисних функцій ($t_N < t_{N+1} = T$). Ці точки можуть бути як заданими наперед, так і визначатися в ході роботи алгоритму. Досліджується відхилення знайденої апроксимації сигналу від реальних значень сигналу, у момент, коли апроксимація перестає задовольняти знайденій точності, приймається

© О.С. Дегтяр, 2013

рішення про зміну системи базисних функцій. Іншими словами точка t_i визначається моментом, коли перестає виконуватися нерівність

$$\left|\sum_{j=1}^{K}\alpha_j\varphi_j(t)-x\right|\le\varepsilon, \qquad (3)$$

де K - натуральне число, що визначає кількість базисних функцій на поточній ітерації, ε визначає точність апроксимації ($\varepsilon>0$). З практичної точки зору нас буде цікавити найменше натуральне K, для якого виконуються співвідношення (3).

Надалі ставиться задача апроксимації сигналу на інтервалах $[t_0,t_1),[t_1,t_2),...,[t_N,T)$, на кожному з яких система базисних функцій буде незмінною.

Розглянемо i-й підінтервал $[t_i,t_{i+1})$ [4]. Випишемо для нього схему знаходження невідомих параметрів для обраного на даному кроці набору базисних функцій $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_l(t),\ t\in[t_i,t_{i+1})$. Апроксимацію шукатимемо у вигляді лінійної комбінації. На інтервалі $[t_i,t_{i+1})$ вона матиме вигляд

$$\psi_i\left(t,\alpha^{(i)}\right)=\sum_{j=1}^{l}\alpha_j^{(i)}\varphi_j(t). \qquad (4)$$

Якщо сигнал відомий на $[t_i,t)$, то ставиться задача адаптивної корекції вектора параметрів $\alpha^{(i)}$ таким чином, щоб мінімізувати певну нев'язку[3, 4]. Для цього ми будемо розглядати нев'язку безпосередньо в момент t

$$I_1\left(\alpha^{(i)}\right)=\left(\psi_i\left(t,\alpha^{(i)}\right)-\varphi(t)\right)^2; \qquad (5)$$

Для корекції параметрів з метою мінімізації нев'язки (5) запишемо неперервну ітераційну процедуру відносно елементів вектора параметрів $\alpha^{(i)}$

$$\frac{d\alpha_k^{(i)}}{dt}=-2\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{l}\varphi_j(t)\alpha_j^{(i)}+2\varphi(t)\varphi_k(t) \qquad (6)$$

з деякими початковими даними

$$\alpha^{(i)}(t_i)=\alpha_0^{(i)}. \qquad (7)$$

Цю систему можемо записати у векторно-матричній формі

$$\frac{d\alpha^{(i)}}{dt}=A^{(i)}(t)\alpha^{(i)}+f^{(i)}(t),\ t\in[t_i,t_{i+1}). \qquad (8)$$

Тут $\alpha^{(i)T}=\left(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},...,\alpha_l^{(i)}\right)$,

$f^{(i)T}(t)=2\varphi(t)(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_l(t))$,

$$A(t)=\begin{pmatrix}-2\varphi_1^2(t) & -2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & \dots & -2\varphi_1(t)\varphi_l(t)\\ -2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & -2\varphi_2^2(t) & \dots & -2\varphi_2(t)\varphi_l(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -2\varphi_1(t)\varphi_l(t) & -2\varphi_2(t)\varphi_l(t) & \dots & -2\varphi_l^2(t)\end{pmatrix}$$

Для відшукання вектора параметрів $\alpha^{(0)}$ необхідно розв'язувати задачу Коші (6), (7). Остаточно розв'язок системи (8) має вигляд

$$\alpha^{(i)}(t)=W^{(i)}(t,t_i)\alpha_0^{(i)}+ +\int_{t_i}^{t_{i+1}}W^{(i)}(t,\tau)f^{(i)}(t)d\tau,\ t\in[t_i,t_{i+1}), \qquad (9)$$

де початкові дані $\alpha_0^{(i)}$ обиралися з області збіжності ітераційної процедури.

Доцільним є використання методів практичної стійкості для аналізу розв'язку поставленої задачі [1]. Як тільки всі елементи розв'язку $\alpha^{(0)}(t)$ задовольняють умовам $\{G_0^{(0)},\Phi_t^{(0)},t_0,t_1\}$-стійкості, за ними можна знайти апроксимацію сигналу на інтервалі $[t_0,t_1)$, скориставшись формулою (4).

Нагадаємо, розв'язок $\alpha^{(0)}(t)=0$ називається $\{G_0^{(0)},\Phi_t^{(0)},t_0,t_1\}$-стійким, якщо для будь-якого $\alpha_0^{(0)}\in G_0^{(0)}$ відповідний розв'язок $\alpha^{(0)}(t)=\alpha^{(0)}\left(t,\alpha_0^{(0)},t_0\right)$ належить $\Phi_t^{(0)}$ для всіх $t\in[t_0,t_1)$. Тут $\Phi_t^{(0)}\subset R^n$ - компакти, $0\in\Phi_t^{(0)},t\in[t_0,t_1),G_0^{(0)}\subset R^n,0\in G_0^{(0)}$.

У задачі, що розглядається, в якості $\Phi_t^{(0)}$ виступає обмеження (3).

Запишемо ітераційну процедуру на $(i+1)$ кроці для випадків введення нових базисних функцій та виключення тих базисних функцій, що вже використовувалися на $i-$й ітерації і не дали бажаного результату (відповідні елементи $\alpha^{(i)}$ збігалися до 0, розв'язки не були асимптотично-стійкими тощо).

Випадок нарощування базисних функцій

Нехай в момент часу t_{i+1} приймається рішення про введення m нових базисних функцій. Тобто система базисних функцій на інтервалі $[t_{i+1},t_{i+2})$ матиме вигляд $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_l(t),\varphi_{l+1}(t),...,\varphi_{l+m}(t)$. Тоді апроксимація сигналу буде шукатися у вигляді лінійної комбінації

$$\psi_{i+1}\left(t,\alpha^{(i+1)}\right)=\sum_{j=1}^{l+m}\alpha_j^{(i+1)}\varphi_j(t). \qquad (10)$$

Для знаходження вектора невідомих параметрів $\alpha^{(i)}$ запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\alpha_k^{(i+1)}}{dt} = -2\left(\sum_{j=1}^{l+m}\alpha_j^{(i+1)}\varphi_j(t) - \varphi(t)\right)\varphi_k(t) \quad (11)$$

де $k = 1,2,...,l+m,\ i = 1,2,...,N-1$ [4].

Модель (11) є лінійною неоднорідною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\alpha_k^{(i+1)}}{dt} = -2\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{l+m}\varphi_j(t)\alpha_j^{(i+1)} + 2\varphi(t)\varphi_k(t), \quad (12)$$

де $k = 1,2,...,l+m,\ i = 1,2,...,N-1,$ або у векторно-матричній формі

$$\frac{d\alpha^{(i+1)}}{dt} = A^{(i+1)}(t)\alpha^{(i+1)} + f^{(i+1)}(t), \quad (13)$$

при $t \in [t_{i+1}, t_{i+2})$, $i = 1,2,...,N-1$.

Позначимо

$$\overline{\alpha}^{(i+1)T} = \left(\alpha_{l+1}^{(i+1)}, \alpha_{l+2}^{(i+1)}, ..., \alpha_{l+m}^{(i+1)}\right),$$

$$\overline{f}^{(i+1)T}(t) = 2\varphi(t)\left(\varphi_{l+1}(t), \varphi_{l+2}(t), ..., \varphi_{l+m}(t)\right),$$

$$\overline{A}^{(i+1)}(t) = \begin{pmatrix} -2\varphi_1(t)\varphi_{l+1}(t) & -2\varphi_1(t)\varphi_{l+2}(t) & \dots & -2\varphi_1(t)\varphi_{l+m}(t) \\ -2\varphi_2(t)\varphi_{l+1}(t) & -2\varphi_2(t)\varphi_{l+2}(t) & \dots & -2\varphi_2(t)\varphi_{l+m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2\varphi_l(t)\varphi_{l+1}(t) & -2\varphi_2(t)\varphi_{l+2}(t) & \dots & -2\varphi_l(t)\varphi_{l+m}(t) \end{pmatrix}$$

– матриця розмірності $m \times l$,

$$\overline{\overline{A}}^{(i+1)}(t) = \begin{pmatrix} -2\varphi_{l+1}^2(t) & -2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & \dots & -2\varphi_{l+1}(t)\varphi_{l+m}(t) \\ -2\varphi_{l+1}(t)\varphi_{l+2}(t) & -2\varphi_{l+2}^2(t) & \dots & -2\varphi_{l+2}(t)\varphi_{l+m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2\varphi_{l+1}(t)\varphi_{l+m}(t) & -2\varphi_{l+2}(t)\varphi_{l+m}(t) & \dots & -2\varphi_{l+m}^2(t) \end{pmatrix}$$

– симетрична матриця розмірності $m \times m$.

Тоді рівняння (13) можна переписати

$$\frac{d\alpha^{(i+1)}}{dt} = \begin{pmatrix} A^{(i)}(t) & \overline{A}^{(i+1)}(t) \\ \overline{A}^{(i+1)T}(t) & \overline{\overline{A}}^{(i+1)}(t) \end{pmatrix}\alpha^{(i+1)} + \begin{pmatrix} f^{(i)}(t) \\ \overline{f}^{(i+1)}(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Розв'язок системи шукається аналогічно попереднім ітераціям згідно формули Коші, початкові дані при цьому беруться

$$\begin{cases} \alpha_{k,0}^{(i+1)} = \alpha_0^{(i)}(t_{i+1}), k = 1,...l \\ \alpha_{k,0}^{(i+1)} = \alpha_0^{(i+1)}, k = l+1,...l+m \end{cases} \quad (15)$$

де $\alpha_0^{(i+1)}$ обираються з області збіжності ітераційної процедури.

Випадок виключення базисних функцій

Нехай в момент часу t_{i+1} приймається рішення про виключення p-ї базисної функції. Тобто система базисних функцій на інтервалі $[t_{i+1}, t_{i+2})$ матиме вигляд $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{p-1}(t), \varphi_{p+1}(t), ..., \varphi_l(t)$.

Для цього випадку можна розглядати алгоритм, що використовувався для випадку l базисних функцій, при цьому вважати, що $\varphi_p(t) = 0$. Тоді система рівнянь у векторно-матричній формі матиме вигляд

$$\frac{d\alpha^{(i+1)}}{dt} = A^{(i+1)}(t)\alpha^{(i+1)} + f^{(i+1)}(t), \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \quad (16)$$

де

$$f^{(i+1)T}(t) = 2\varphi(t)\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{p-1}(t), 0, \varphi_{p+1}(t), ..., \varphi_l(t)\right),$$

$$A^{(i+1)}(t)=\begin{pmatrix} -2\varphi_1^2(t) & -2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & \dots & -2\varphi_1(t)\varphi_{p-1}(t) & 0 & -2\varphi_1(t)\varphi_{p+1}(t) & \dots & -2\varphi_1(t)\varphi_l(t) \\ -2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & -2\varphi_2^2(t) & \dots & -2\varphi_2(t)\varphi_{p-1}(t) & 0 & -2\varphi_2(t)\varphi_{p+1}(t) & \dots & -2\varphi_2(t)\varphi_l(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2\varphi_1(t)\varphi_{p-1}(t) & -2\varphi_2(t)\varphi_{p-1}(t) & \dots & -2\varphi_{p-1}^2(t) & 0 & -2\varphi_{p-1}(t)\varphi_{p+1}(t) & \dots & -2\varphi_{p-1}(t)\varphi_l(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2\varphi_1(t)\varphi_{p+1}(t) & -2\varphi_2(t)\varphi_{p+1}(t) & \dots & -2\varphi_{p-1}(t)\varphi_{p+1}(t) & 0 & -2\varphi_{p+1}^2(t) & \dots & -2\varphi_{p+1}(t)\varphi_l(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2\varphi_1(t)\varphi_l(t) & -2\varphi_2(t)\varphi_l(t) & \dots & -2\varphi_{p-1}(t)\varphi_l(t) & 0 & -2\varphi_{p+1}(t)\varphi_l(t) & \dots & -2\varphi_l^2(t) \end{pmatrix}$$

Початкові дані беруться зі знайденого вектору параметрів на $i-$й ітерації в момент часу t_{i+1}: $\alpha_0^{(i+1)}=\alpha_0^{(i)}(t_{i+1}), k=1,..l.$

Висновки

В даній роботі запропоновано адаптивний алгоритм обробки експериментальних даних, що базується на знаходженні апроксимації сигналу за допомогою системи базисних функцій. Наведено схему для випадку зміни розмірності базису по мірі надходження нової інформації: введенню нових базисних функцій та виведенню тих, що не є ефективними для представлення сигналу на поточній ітерації.

Важливо зазначити, що метод є універсальним і може використовуватися для випадку неоднорідних даних, сигналів зі скачками тощо.

Список використаних джерел

1. *Bashnyakov A.M., Garashchenko F.G., Pichkur V.V.* Practical stability and structural optimization of dynamic systems. - Kyiv, STPC "Kyiv University", 2000. - 197p.
2. *Boublik B.N., Garashchenko F.G., N.F. Kirichenko* Structural stability and parametric optimization of beam dynamics. - Kiev, Nauk.dumka, 1985. - 304p.
3. *Garashchenko F.G., Shvets O.F., Degtyar O.S* Adaptive models of approximation of signals in structural and parametric classes of functions. // Journal of Automation and Information Sciences. - 2011. Volume 2. - P. 69 – 77.
4. *Shvets O.F., Degtyar O.S.* About one adaptive approach of piecewise continuous signals approximation // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2008. N 3. – P.192–198

Надійшла до редколегії 21.01.13

УДК 004.934

Донченко В.С.[1], д.ф.-м.н., проф. В.С.,
Голік А.О.[2], аспірант А.О.

Застосування еліпсоїдальної та ортогональної відстаней відповідності у задачах розпізнавання мови та жестів.

Проведені паралелі між задачею розпізнавання мови одного диктора на обмеженій множині слів та розпізнаванням дактильної мови жестів. Наведений варіант формування векторів ознак у матричному вигляді для обох задач. Запропоновано використати еліпсоїдальну та ортогональну відстані.

Ключові слова: розпізнавання мови та жестів, ортогональні проектори, еліпсоїдальна відстань, псевдообернення, SVD – розклад.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: voldon@bigmir.net
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: analytical@ukr.net

V.S. Donchenko[1], doctor of ph.-math. s., prof. V.S.
A.O. Golik[2], post-graduate student A.O.

Usage of ellipsoidal and orthogonal distances in speech and gesture recognition.

Parallels between speech recognition of one speaker on a limited set of words and recognition of a tactile sign language are drawn. Variant of formation of feature vectors in a matrix form is given for both problems. Ellipsoidal and orthogonal compliance distances are suggested.

Key Words: speech and gesture recognition, orthogonal projectors, ellipsoidal distance, pseudoinverse, SVD – decomposition.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: voldon@bigmir.net
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: analytical@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Серед багатьох задач, які розглядаються в рамках такого напрямку досліджень, як Computer Vision, чільне місце посідають задачі розпізнавання мови та жестів. В пропонованій статті проведені паралелі між цими задачами з подальшим виділенням під проблем, які мають схожий характер та можуть бути розв`язані з використанням однакових інструментів та підходів. Для реалізації та тестування були обрані окремі випадки вище згаданих задач: розпізнавання мови одного диктора на обмеженій множині слів та розпізнавання дактильної мови жестів.

В статті пропонується розгляд матриць, як «природніх» векторів ознак: представників об'єкта, що піддається аналізу. Такий підхід є природнім, коли аналізуються , зокрема, мовні сигнали, які, як відомо, вичерпно представляються спектрограмою, або жести, які на перших етапах обробки вхідних даних представлені у вигляді зображень (або послідовності зображень), що захоплені з веб-камери чи іншого записуючого пристрою.

Запропоновані алгоритми розпізнавання, які використовують як стандартні уявлення про відстані відповідності, так і так звані «еліпсоїдальні відстані». Еліпсоїдальні відстані будуються на основі певного «мінімального еліпсу», що «накриває» навчальну вибірку того чи іншого класу. Крім того, в статті пропонується ще одна альтернатива – використання ортогональних відстаней, що будуються на основі кортежних групуючи операторів та ортогональних проекторів.

Кластеризація з встановленням відстаней відповідності на базі псевдо обернення та SVD-розкладу може бути успішно застосована до числових векторів. Проте актуальним є випадок, коли навчальну вибірку складають не вектори, а матриці. Однією із головних цілей наведеного дослідження є перенесення властивостей псевдо обернення та SVD-розкладу на множину матричних векторів ознак.

© В.С. Донченко, А.О. Голік, 2013

Розглянутий алгоритм розпізнавання «порівняння з еталоном». Наведені результати роботи реалізованих у середовищі Java + CUDA та C# + EmguCV програм розпізнавання, що обґрунтовують введення відповідних підходів, і, зокрема, відстані відповідності на базі ортогональних проекторів.

Результати свідчать про ефективність запропонованих відстаней відповідності та перспективність подальшої роботи над їх вдосконаленням.

Спектрограма як «представник» мовного сигналу в математичній моделі сигналу

Стандартним в аналізі мовних сигналі є гармонійний аналіз: представлення аудіо сигналу сумішшю гармонік. Стандартним математичним апаратом, який використовується для реалізації згаданого підходу за цифрової обробки є дискретне перетворення Фур'є у формі, яка позначається терміном швидке перетворення Фур'є (ШПФ).

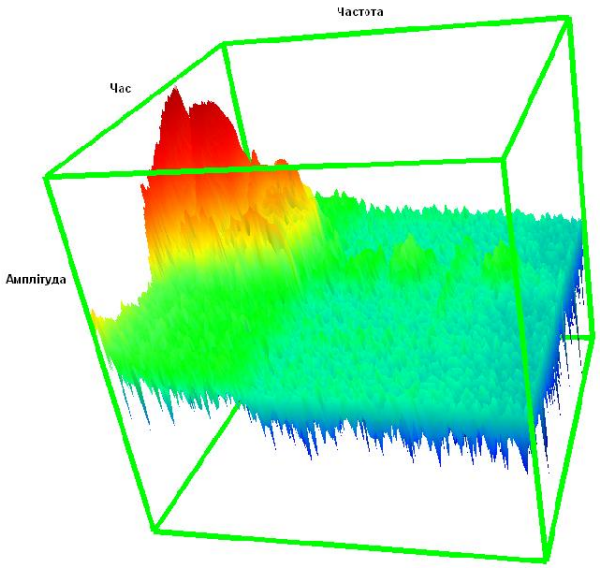


Рис 1.Тривимірний варіант представлення спектрограми мовного сигналу.

За такого підходу числовому вектору, що представляє весь дискретизований аудіо сигнал чи його частину ставиться у відповідність вектор тої самої довжини, але з комплексними компонентами – ШПФ сигналу. Комплексний вектор ШПФ сигналу стандартним чином описується через вектор модулів відповідних компонент чи вектор квадратів модулів згаданих компонент та вектором фаз відповідних компонент. Власне вектор квадратів модулів компонент ШПФ сигналу, прив'язаний до дискретного набору частот, визначеного ШПФ, називається енергетичним спектром аналізованого сигналу. В практиці використання гармонійного аналізу замість розгляду ШПФ всього сигналу, що відповідає, наприклад вимовленому слову, використовується набір ШПФ частин сигналу у рухомому віконці фіксованої довжини, що зсувається з певним кроком. Відповідно, з досліджуваним аудіо сигналом пов'язується матриця ШПФ ділянок сигналу у кожному з віконець. Відповідно, матриця складена із векторів енергетичних спектрів сигналу для кожного з віконець називають спектрограмою сигналу, що піддається обробці.

Наявна матриця спектрограми, яка описує сигнал с точністю до фазових характеристик, власне, є природнім представником аудіо сигналу в математичному описі такого сигналу. Тому питання про побудову ефективних алгоритмів розпізнавання аудіо сигналів є питанням про те, яким чином її доцільно використати для ідентифікації слів.

Контур як представник жесту

Перший етап розв`язання задачі розпізнавання жестів полягає у захопленні зображення з веб-камери чи іншого записуючого пристрою з подальшим пошуком та виділенням на отриманому зображенні долоні та її контуру. Саме контур дає досить повну інформацію, що може бути використана для ідентифікації жесту.



Рис 2. Зображення жесту захоплене з веб-камери. Контур долоні знайдений та виділений.

Цю інформацію не можна назвати вичерпною, оскільки в більшості випадків вона не включає в себе дані про положення окремих пальців. Звісно

для відкритої долоні це не є проблемою, але коли вона хоча б частково закрита, що характерно для реальних жестів дактильної мови, дані про положення та степінь зігнутості окремих пальців отримати складно. Загалом, ця проблема може бути частково вирішена за допомогою застосування алгоритмів скелетизації. В пропонованій статті розглядається варіант розв`язання задачі розпізнавання жестів дактильної мови шляхом аналізу контуру долоні на зображенні.

Аналізувати контур можна декількома способами, наприклад, як послідовність взаємопов`язаних точок. Крім того, існує ряд числових характеристик, що можуть бути обчислені для контуру: моменти, ланцюги Фрімена тощо. Далі ж мова піде про представлення отриманого для жесту контуру у матричній формі.

Перехід до матричного вигляду починається з пошуку найменшого охоплюючого прямокутника для зображення контуру долоні.



Рис 3. Найменший охоплюючий прямокутник для зображення (контуру) долоні.

Отримавши його координати, можна вирізати з загального зображення ту частину, яка відповідає цьому прямокутнику та конвертувати її у бінарну матрицю. Детально процес конвертації буде описано у наступному розділі статті.

«Характеристичні» матриці

Ідентифікація слова у задачі розпізнавання мовного сигналу може бути здійснена як шляхом побудови тих чи інших числових векторів ознак, так і безпосередньо аналізом спектрограми у матричній формі. Аналогічне твердження має місце і для задачі розпізнавання жестів, адже, як було згадано у попередньому розділі, контур жесту так само може бути поданий у вигляді матриці. Проте для обох випадків, актуальною є проблема стандартизації розмірності такої матриці. Одним з можливих варіантів вирішення цієї проблема є побудова характеристичної матриці: захоплення зображення (двовимірного, кольорового) матриці спектрограми (чи контуру відповідно) та його подальше стискання чи розтягнення до встановленого стандартного розміру з подальшою конвертацією у матричну форму за певними правилами.

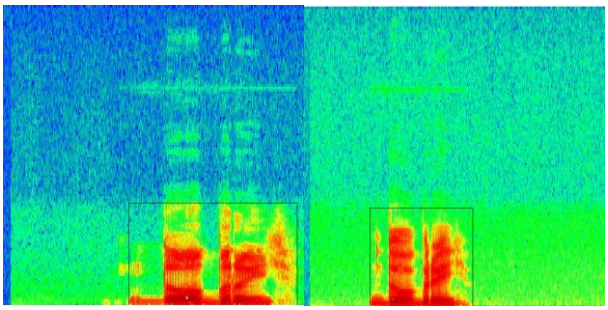


Рис 4. Приклад записів одного й того ж слова промовленого в різному середовищі.

Слід зазначити, що можна помітити схожість у під задачах для розпізнавання мови та жестів, а саме той факт, що на даному етапі постає питання стандартизації зображень – матриці спектрограми та мінімального охоплюючого прямокутника контуру – з подальшою їх конвертацією у матричну форму.

Пропонований підхід можна назвати методом «характеристичних матриць», тобто аналізу сигналу на основі матиць, побудованих певним чином за спектрограмою як зображенням (чи зображенням мінімального охоплюючого прямокутника для контуру) з використанням форматів перетворення зображень. До згаданих перетворень зображень відноситься, зокрема масштабування.

Сам процес формування характеристичної матриці для задачі розпізнавання мови починається з побудови двовимірного кольорового зображення спектрограми. З метою відокремлення інформативно цінної складової на зображенні виділяється прямокутник, який охоплює частину зображення, що відповідає сказаному слову. Пошук аналогічного прямокутника для задачі розпізнавання жестів був згаданий у попередньому розділі. Такий підхід дозволяє відкинути все до сказаного слова та після нього, а також залишити лише ті

частоти, на яких є сенс проводити аналіз. В свою чергу у застосування до зображення контуру залишається лише та область яка безпосередньо охоплює зображення долоні. Частина зображення, що потрапляє в прямокутник зберігається та направляється на подальшу обробку. Слід зазначити, що розмір розглянутих прямокутників для одного й того ж слова промовленого різними дикторами, на різній швидкості, з різною інтонацією буде відрізнятися. Так само, як будуть відрізнятися розміри мінімальних охоплюючих прямокутників для зображення контуру жесту, адже вони залежать від багатьох факторів: розмір долоні людини, відстань від долоні до записуючого пристрою ітд. Тому має місце задача стандартизації, яка може бути вирішена масштабуванням зображення. Іншими словами, розміри збереженого зображення приводяться до певних стандартних величин по висоті та ширині. Доцільним також може бути застосування згладжування та інших операцій над зображеннями.

Проте, є принципова різниця у техніці масштабування зображень для задачі розпізнавання мови та для задачі розпізнавання жестів. Коли мова йде про масштабування за віссю часу для зображення мовного сигналу, то достатньо його просто стиснути чи розтиснути, адже загалом ширина зображення відповідає швидкості вимови слова і від такого роду масштабування інформація не буде втрачена. Якщо ж розглянути задачу розпізнавання жестів, то виникає потреба у більш складному варіанті масштабування.



Рис 5. Літера «в»

На рисунку 5 наведений приклад жесту, який красномовно свідчить про необхідність внесення змін у вищезгаданий алгоритм стандартизації.

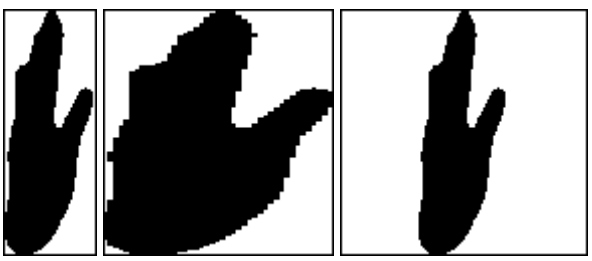


Рис 6. Різні варіанти стандартизації зображення

Виділимо на рисунку 6 3 частини: перша – побудований мінімальний охоплюючий прямокутник для жесту, інші дві - варіанти його стандартизації. Припустимо, що в якості розміру еталону було обрано квадрат певного розміру. В такому разі розтягнувши зображення звичайним чином ми отримаємо результат, що наведений у другій частині рисунку 6. Не важко помітити, що в такому випадку зображення жесту в значній мірі втратило свою інформативну цінність, адже співвідношення ширини та висоти, яке є важливим у цій задачі, було змінене. Більш правильним є підхід ілюстрований у третій частині рисунку 6. У цьому разі додаткові порожні зони були розміщені зліва та справа від основної частини. Розмір цих зон однаковий і знайдений таким чином, щоб результуюче зображення відповідало встановленому для еталонів стандарту.

На наступному кроці пропонується зробити зворотній перехід від зображення до матриці. У зв`язку з цим нагадаймо, що RGB – формат представлення кольору, як комбінації червоного, зеленого та синього. Експериментальним шляхом встановлюються допустимі значення RGB, які дозволяють прийняти рішення: чи слід розглядати піксель на зображенні як значущий чи ні. Саме перетворення зображення полягає у заміні пікселів, які задовольняють встановлені допустимі значення RGB одиницями і нулями всіх інших. В результаті отримується матриця з нулів та одиниць, яку називатимемо характеристичною. Її зображення можна відтворити у чорно-білому вигляді, що характерно для бінарних матриць.



Рис 7. Приклад зображення «характеристичних» матриць одного слова.

Перетворення спектрограм як матриць через використання перетворень за форматами зображень має свої переваги. Зокрема, такий підхід дозволяє розв’язати проблему стандартизації спектрограми за довжиною мовного сигналу і отримати придатні до аналізу об’єкти. Аналогічним чином отримані в результаті стандартизації «характеристичні» матриці для зображень жестів дактильної мови можуть бути використані для подальшого їх розпізнавання. Єдиною відмінністю процесу

конвертації для цієї задачі є той факт, що зображення жесту може бути розглянуто у чорно-білому варіанті і встановлення допустимих значень RGB не є необхідністю, адже фактично кожен піксель однозначно є чорним або білим. Всі точки які потрапили в контур маркуються як чорні, всі інші – як білі. Тому на виході процесу конвертації отримується бінарна характеристична матриця.

Відстані відповідності: еліпсоїдальна відстань

Після формування векторів ознак на етапі кластеризації виникає необхідність у їх порівнянні, встановленні так званої відстані відповідності між двома векторами. У пропонованій статті розглянута можливість застосування еліпсоїдальної та ортогональної відстаней.

Їх основною особливістю є навчання системи шляхом роботи не з одним еталоном, а з набором (для різних умов середовища).

Еліпсоїдальна відстань будується засобами псевдо обернення для тих чи інших варіантів лінійних операторів. Така відстань спирається на концепцію «мінімальні еліпси групування». Власне, це ті еліпси які «накривають» кожну із навчальних вибірок «мінімальним» і «оптимальним» чином. Еліпсоїдальні відстані будуються для матриць як матриць лінійних операторів між матричними евклідовими просторами засобами псевдообернення для згаданих просторів. Вони реалізуються, як і у випадку векторних евклідових просторів, через так звані «групуючі оператори» теорії псевдообернення. Такі оператори визначаються за матрицею оператора A, оператора між векторними евклідовими просторами, і визначаються співвідношенням:

$$R(A) = A^{+}A^{+T}, R(A^{T}) = (A^{T})^{+}(A)^{T+T} = A^{+T}A^{+}.$$

Принципова роль групуючих операторів полягає в тому, що вони дають можливість побудувати «мінімальні еліпси групування»: еліпсоїди, які містять всі вектори набору $a_k, k = \overline{1,n}$ і є оптимальними в певному сенсі. Зміст оптимальності еліпсів групування полягає у тому, що його вісі утворені ортонормованим набором векторів, суми квадратів проекцій на які є максимальними, а квадрати довжин відповідних вісей співпадають із відповідними сумами квадратів проекцій. Точніше є справедливими наступні чотири теореми [4].

Теорема 1. Для довільного набора векторів $a_k \in R^m, k = \overline{1,n}$ розв'язком оптимізаційної задачі пошуку максимуму суми квадратів проекцій на підпростір, породжений нормованим вектором $u \in R^m : \| u \| = 1$ є вектор u_1 із сингулярності (u_1, λ_1) сингулярного розкладу матриці $A = (a_1 \vdots \ldots \vdots a_n)$:

$$u_1 = \arg \min_{u \in R^m : \|u\| = 1} \sum_{k=1}^{r} \| \mathrm{Pr}_u a_k \|^2 ,$$

$$\min_{u \in R^m : \|u\| = 1} \sum_{k=1}^{r} \| \mathrm{Pr}_u a_k \|^2 = \lambda_1^2 .$$

Теорема 2. Для довільного набора векторів $a_k \in R^m, k = \overline{1,n}$ розв'язком оптимізаційної задачі пошуку максимуму суми квадратів проекцій на підпростір, породжений нормованим вектором $u \in R^m : \| u \| = 1$ є вектор u_1 із сингулярності (u_1, λ_1) сингулярного розкладу матриці $A = (a_1 \vdots \ldots \vdots a_n)$:

$$u_k = \arg \min_{u \in R^m : \|u\| = 1, u \perp (u_1, \ldots, u_k)} \sum_{k=1}^{r} \| \mathrm{Pr}_u a_k \|^2 ,$$

$$\min_{u \in R^m : \|u\| = 1, u \perp (u_1, \ldots, u_k)} \sum_{k=1}^{r} \| \mathrm{Pr}_u a_k \|^2 = \lambda_{k+1}^2 ,$$

$$k = \overline{1, r-1},$$

де (u_k, λ_k), $k = \overline{1, r}$, як і в попередній теоремі сингулярності сингулярного розкладу матриці, побудованої із елементів досліджуваного набору векторів.

Теорема 3. Для довільного набора векторів $a_k \in R^m, k = \overline{1,n}$

$$a_k^T R(A^T) a_k \le r_{\max}^2 < r$$

$$r_{\max}^2 = \max_{k=\overline{1,n}} a_k^T R(A^T) a_k$$

де, як і в двох попередніх теоремах A матриця складена із векторів набору як із стовпчиків.

Еліпсоїд теореми 3 групує вектори набору за центральним розташуванням еліпсу групування: за еліпсом, що має центром початок координат. В практичних застосуваннях центром еліпсу вибирають середнє значення $\bar{a}$ елементів набору:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum a_k .$$

У цьому випадку групуючий оператор будується за матрицею $\tilde{A}$, що будується за центрованими середніми векторами набору

$\tilde{a}_k : \tilde{a}_k = a_k - \bar{a}, k = \overline{1,n}$. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 4. Для довільного набору векторів $a_k \in R^m, k = \overline{1,n}$

Виконуються наступні нерівності

$$(a_k - \bar{a})^T R(\tilde{A}^T)(a_k - \bar{a}) \le \tilde{r}^2_{\max} \le r, k = \overline{1,n}$$

$$r^2_{\max} = \max_{k=1,n} \tilde{a}_k^T R(\tilde{A}^T)\tilde{a}_k$$

.

В якості набору векторів використовуються, як правило, навчальні вибірки тих чи інших класів $Kl_l, l = \overline{1,L}$. В якості відстаней відповідності (точніше їхнім квадратам): функціоналів $\rho^2(x, Kl_l), x \in R^m, l = \overline{1,L}$, за мінімумом значення яких здійснюється віднесення до класу, - можна використовувати мінімальні еліпси групування. Це означає, що відстані відповідності визначаються співвідношеннями:

$$\rho^2(x, Kl_l) = (x - \bar{a}_l)^T \frac{R(A_1^T)}{r^2_{1\max}}(x - \bar{a}_l), x \in R^m$$

$l = \overline{1,L}$

Саме така еліпсоїдальна відстань використовується для характеристичних матриць.

Відстані відповідності: ортогональна відстань

Разом з еліпсоїдальною відстанню у статті пропонується ортогональна відстань відповідності. Вона надає можливість перенести властивості псевдообернення та SVD– розкладу на випадок матричних векторів ознак.

Позначатимемо $R^{(m\times n),K}$ - евклідів простір $m \times n$ матричних кортежів довжини К $\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$ з «природним» по компонентним скалярним добутком:

$$(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{K} (A_k, B_k)_{tr} = \sum_{k=1}^{K} trA_k^T B_k ,$$

$$\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K), \beta = (B_1 \vdots ... \vdots B_K) \in R^{(m\times n),K}.$$

Позначимо також $\wp_\alpha : R^K \to R^{m\times n}$ лінійний оператор між відповідними евклідовими просторами, що задається матричним кортежем $\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$ і визначається за допомогою матричних кортежних операцій у відповідності із співвідношенням:

$$\wp_\alpha y = \sum_{k=1}^{K} y_k A_k, \alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_K \end{pmatrix} \in R^K$$

Теорема 5[5]. Спряженим $\wp_\alpha^*$ до оператора $\wp_\alpha : R^K \to R^{m\times n}$ є лінійний оператор, що, очевидячки, діє у зворотному до $\wp_\alpha$ напрямку: $\wp_\alpha^* : R^{m\times n} \to R^K$, і визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha^* X = \begin{pmatrix} trA_1^T X \\ \cdots \\ trA_K^T X \end{pmatrix}.$$

Доведення.

Дійсно,

$$\left(\wp_\alpha y, X\right)_{tr} = \left(\sum_{k=1}^{K} y_k A_k, X\right)_{tr} = \sum_{k=1}^{K} y_k \left(A_k, X\right)_{tr} = \sum_{k=1}^{K} y_k \left(trA_k^T X\right) = \left(y, \begin{pmatrix} trA_1^T X \\ \cdots \\ trA_K^T X \end{pmatrix}\right)$$

,що й доводить теорему

Теорема 6[5]. Добуток двох операторів є лінійний оператор $\wp_\alpha^* \wp_\alpha : R^K \to R^K$, що задається матрицею, що її ототожнюватимемо із самим оператором , яка визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha^* \wp = \begin{pmatrix} trA_1^T A_1, ..., trA_1^T A_n \\ \cdots \\ trA_n^T A_1, ..., trA_n^T A_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Зауважимо, що матриця, визначена співвідношенням (1) є матрицею Грама елементів $A_1, ..., A_K$ матричного кортежу $\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K)$, що задає оператор $\wp_\alpha$.

Доведення. Дійсно,

$$\wp_\alpha^*\wp_\alpha y=\wp_\alpha^*(\wp_\alpha y)=\begin{pmatrix} trA_1^T\sum_{i=1}^n A_i y_i \\ \cdots \\ trA_n^T\sum_{i=1}^n A_i y_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} tr\sum_{i=1}^n A_1^T A_i y_i \\ \cdots \\ tr\sum_{i=1}^n A_n^T A_i y_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n trA_1^T A_i y_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n trA_n^T A_i y_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} trA_1^T A_1,...,trA_1^T A_n \\ \cdots \\ trA_n^T A_1,...,trA_n^T A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}=(tr(A_i^T A_j))y$$

, що й доводить теорему.

Сингулярний розклад для матриці (1) є очевидним: це симетрична та невід'ємно визначена матриця. Він визначається набором сингулярностей $(v_i,\lambda_i^2),i,j=\overline{1,r}$:

ортонормованим набором векторів

$\|v_i\|=1,v_i\perp v_j,i\neq j;i,j=\overline{1,r};\lambda_1>\lambda_2>...>\lambda_r>0$,

що є власними для оператора $\wp_\alpha^*\wp_\alpha:R^K\to R^K$:

$\wp_\alpha^*\wp_\alpha v_i=\lambda_i^2 v_i,i=\overline{1,r}$.

Визначені за сингулярностями $(v_i,\lambda_i^2),i=\overline{1,r}$ матриці $U_i\in R^{m\times n}:U_i=\frac{1}{\lambda_i}\wp_\alpha v_i,i=\overline{1,r}$ є елементами набору сингулярностей $(U_i,\lambda_i^2),i=\overline{1,r}$ оператора $\wp_\alpha\wp_\alpha^*$.

Сингулярний розклад кортежного оператора. Сингулярності двох операторів: $\wp_\alpha^*\wp_\alpha,\wp_\alpha\wp_\alpha^*$, очевидним чином визначають сингулярний розклад оператора $\wp_\alpha$.

Теорема7[5]. (сингулярний розклад кортежного оператора).

$$\wp_\alpha=\sum_{k=1}^K\lambda_k U_k v_k^T.$$

Варіант сингулярного розкладу. Приймаючи до уваги співвідношення

$U_i\in R^{m\times n}:U_i=\frac{1}{\lambda_i}\wp_\alpha v_i,i=\overline{1,r}$ та його наслідок $\lambda_i U_i=\wp_\alpha v_i,i=\overline{1,r}$, маємо

$$\wp_\alpha=\sum_{k=1}^K\lambda_k U_k v_k^T=\sum_{k=1}^K(\wp_\alpha v_k)v_k^T$$

Зауваження загального характеру: потрібний загальний варіант теореми про сингулярний розклад. Це твердження мусить стосуватися загальних евклідових просторів. Його потрібно формулювати для лінійних операторів над загальними евклідовими просторами. Його вигляд мусить бути таким.

Теорема 8[5]. Для довільного лінійного оператора $\wp_E:E_1\to E_2$ над парою евклідових просторів $(E_i,(,)_i),i=1,2$ існує набір сингулярностей $(v_i,\lambda_i^2),(u_i,\lambda_i^2)i=\overline{1,r},r=rank\wp_E$ операторів $\wp_E^*\wp$, $\wp\,\wp_E^*$ відповідно із спільним набором власних чисел $\lambda_i^2,i=\overline{1,r}$,що

$$\wp_E x=\sum_{i=1}^r u_i\lambda(v_i,x)_1,\wp_E^* y=\sum_{i=1}^r v_i\lambda(u_i,y)_2.$$

Крім того, виконуються співвідношення:

$u_i=\lambda_i^{-1}\wp v_i,i=\overline{1,r}$,

$v_i=\lambda_i^{-1}\wp_E^* u_i,i=\overline{1,r}$.

Основні оператори ПдО теорії для кортежних операторів: псевдообернення за SVD-розкладом.

У відповідності до SVD-визначення ПдО кортежного оператора задається [5] співвідношенням

$$\wp_\alpha^+=\sum_{k=1}^K\lambda^{-1}v_k\left(U_k,\cdot\right)_{tr}=\sum_{k=1}^K\lambda^{-2}v_k\left(\wp_\alpha v_k,\cdot\right)_{tr}$$

Стандартним чином за SVD-поданням кортежного оператора визначаються ортогональні проектори базових підпросторів оператора та, відповідно, - групуючи оператори.

Теорема 9. Оператори, позначені як $P(\wp_\alpha^*),P(\wp_\alpha)$ та визначені співвідношеннями

$$P(\wp_\alpha^*)=\sum_{k=1}^r U_k\left(U_k,\cdot\right)_{tr}$$

$$P(\wp_\alpha)=\sum_{k=1}^r v_k\left(v_k,\cdot\right)=\sum_{k=1}^r v_k v_k^T.$$

є ортогональними проекторами $P_{L_{\wp_\alpha}},P_{L_{\wp_\alpha^*}}$ на підпростори $L_{\wp_\alpha}$, $L_{\wp_\alpha^*}$ можливих значень операторів $\wp_\alpha$, $\wp_\alpha^*$ відповідно :

$$P(\wp_\alpha^*)=P_{L_{\wp_\alpha}},P(\wp_\alpha)=P_{L_{\wp_\alpha^*}}$$

а самі ці підпростори є лінійними оболонками відповідних ортонормованих наборів:

$$L_{\wp_\alpha}=L(U_1,...,U_r),\ L_{\wp_\alpha^*}=L(v_1,...,v_r)$$

Доведення. Доведення проводиться так само, як у випадку лінійних операторів між евклідовими просторами числових векторів:

нескладно перевіряється симетричність та ідемпотентність обох операторів.. Так само очевидними є твердження про те, що $U_k \in L_{\wp_\alpha}$, $v_k \in L_{\wp_\alpha^*}$, а, отже із міркувань розмірності $L_{\wp_\alpha} = L(U_1,...,U_r)$, $L_{\wp_\alpha^*} = L(v_1,...,v_r)$. Крім того, як випливає із визначення $P_{L_{\wp_\alpha}}, P_{L_{\wp_\alpha^*}}$ останні простори є для них просторами можливих значень відповідно. Для завершення доведення залишається зауважити, що підпростір, на який здійснює ортогональне проектування ортогональний проектор, може бути описаний, зокрема, як простір можливих значень для нього.

Теорема 10. Оператори $Z(\wp_\alpha^*), Z(\wp_\alpha)$, що є доповненнями до тотожного оператора ортогональних проекторів: $P(\wp_\alpha^*), P(\wp_\alpha)$ відповідно:

$$Z(\wp_\alpha^*)X = X - P(\wp_\alpha^*)X, \quad Z(\wp_\alpha) = E_K - P(\wp_\alpha).$$

є ортогональними проекторами на ядра операторів відповідно.

Доведення. Доведення випливає із того, що, по-перше, к $\wp_\alpha^*$, $\wp_\alpha$ кожен із операторів $Z(\wp_\alpha^*), Z(\wp_\alpha)$ є симетричним та ідемпотентним .

Крім того вони є ортогональними проекторами на ортогональні доповнення до підпросторів $L_{\wp_\alpha} = L(U_1,...,U_r)$, $L_{\wp_\alpha^*} = L(v_1,...,v_r)$, відповідно. А саме це ортогональні доповнення і є ядрами операторів $\wp_\alpha^*, \wp_\alpha$ відповідно.

Теорема 11. Квадрат відстані $\rho^2(X, L_{\wp_\alpha})$ довільної $m \times n$ матриці X до лінійного підпростору $L_{\wp_\alpha}$, , що є множиною можливих значень кортежного оператору $\wp_\alpha$ задається формулою

$$\rho^2(X, L_{\wp_\alpha}) = (X, Z(\wp_\alpha^*)X)_{tr} = \| X \|^2 - \sum_{k=1}^{r} (X, U_k)_{tr}^2$$

Доведення. Дійсно,

$$\rho^2(X, L_{\wp_\alpha}) = \| X_{L_{\wp_\alpha}^\perp} \|^2$$

у розкладі $X = X_{L_{\wp_\alpha}} + X_{L_{\wp_\alpha}^\perp}$ за розкладом $R^{m \times n} = L_{\wp_\alpha} + L_{\wp_\alpha^*}$. Очевидним чином

$$X_{L_{\wp_\alpha^\perp}} = Z(\wp_\alpha^*)X,$$

а, отже,

$$\rho^2(X, L_{\wp_\alpha}) = \| X_{L_{\wp_\alpha^\perp}} \|^2 = \| Z(\wp_\alpha^*)X \|_{tr}^2 = \left(Z(\wp_\alpha^*)X, Z(\wp_\alpha^*)X_{tr} \right) = \left(X, Z(\wp_\alpha^*)Z(\wp_\alpha^*)X_{tr} \right)_{tr} = \left(X, Z(\wp_\alpha^*)X_{tr} \right)_{tr}$$

Оскільки ортонормований набір $U_i, i = \overline{1,r}$ є ортонормованим базисом в $L_{\wp_\alpha} = L(U_1,...,U_r)$, а $(X, U_i)_{tr}, i = \overline{1,r}$ є координатами розкладу $X_{L_{\wp_\alpha}}$ за цим ортонормованим базисом, то

$$\| X_{L_{\wp_\alpha}} \|^2 = \sum_{i=1}^{r} (X, U_i)_{tr}^2 .$$

Залишається зауважити, що за теоремою Піфагора в абстрактному варіанті $\| X \|^2 = \| X_{L_{\wp_\alpha}} \|^2 + \| X_{L_{\wp_\alpha}^\perp} \|^2$, а, отже,

$$\| X_{L_{\wp_\alpha^\perp}} \|^2 = \| X \|^2 - \| X_{L_{\wp_\alpha}} \|^2 = \| X \|^2 - \sum_{k=1}^{r} (X, U_k)_{tr}^2$$

теорема доведена.

Теорема12. Квадрат відстані $\rho^2(X, L)$ довільної $m \times n$ матриці X до лінійного підпростору $L = L(A_1,...,A_K)$, що є лінійною оболонкою набору $m \times n$ матриць $A_1,...,A_K$

Задається формулою

$$\rho^2(X, L) = \rho^2(X, L_{\wp_\alpha}) = (X, Z(\wp_\alpha^*)X)_{tr} = \| X \|^2 - \sum_{k=1}^{r} (X, U_k)_{tr}^2$$

для кортежного оператора $\wp_\alpha$, породженого набором $A_1,...,A_K$:

$$\wp_\alpha = (A_1,...,A_K).$$

Доведення. Доведення випливає із того, що підпростори $L = L(A_1,...,A_K)$ та $L_{\wp_\alpha}$ співпадають між собою

Теорема 13. Квадрат відстані $\rho^2(X, \Gamma(a, L))$ довільної $m \times n$ матриці X до гіперплощини $\Gamma(\bar{a}, L)$:

$$\bar{a} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} A_k, L = L(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_K), \tilde{A}_k = A_k - \bar{a}, k = \overline{1,K}$$

, породженого набором

$$\rho^2(X,\Gamma(\bar{a},L)) = (X-\bar{a},Z(\wp^*_{\tilde{\alpha}})(X-\bar{a}))_{tr} = \| X-\bar{a} \|^2 - \sum_{k=1}^{r}(X-\bar{a},\tilde{U}_k)^2_{tr}$$

, в якій кортежний оператор $\wp_{\tilde{\alpha}}$ визначається співвідношенням $\wp_{\tilde{\alpha}} = (\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_K)$,а $\tilde{U}_i, i = \overline{1,r}$ ортонормований набір власних матриць оператора $\wp^*_{\tilde{\alpha}}$.

Доведення. Доведення очевидним чином випливає з того, що

$\rho^2(X,\Gamma(\bar{a},L)) = \rho^2(X-\bar{a},L)$

та попередньої теореми.

Алгоритм розпізнавання

В статті пропонується алгоритм розпізнавання «порівняння з еталоном». Після того як сформований словник слів чи жестів, для кожного з елементів зі словника формується та зберігається набір характеристичних матриць, які відповідають записам слів чи зображенням жестів в різних умов середовища. Цей словник використовується у процесі кластеризації. Після перетворення вхідного сигналу у відповідну характеристичну матрицю, ця матриця, використовуючи одну з розглянутих у статті відстаней відповідності, перевіряється на близькість до кожного елементу зі словника. Елемент, який виявляється найближчим у термінах відповідної відстані відповідності приймається за результат.

Тестування та результати

Для тестування довільним чином була відібрана множина із 32 – ох слів (діалог). На базі цієї множини були проведені експериментальні дослідження. Тестування розпізнавання жестів проводилося на множині дактилів.

Спеціально розроблений модуль навчання сформував навчальну вибірку (базу еталонів) для кожного елементу зі словника, використовуючи характеристичні матриці. В залежності від конфігурації системи, використовувалась еліпсоїдальна чи ортогональна відстань. Також для порівняльної характеристики у тестуванні була перевірена і евклідова.

$m \times n$ матриць $A_1,...,A_K$ задається формулою

Для реалізації програмної частини задачі розпізнавання мови було обране середовище Java. Це об`єктно-орієнтована мова програмування, яка охоплює багатий набір інструментарію для розробки програмного забезпечення різних напрямків. Крім того, Java підтримує роботу з CUDA- технологіями та має ряд бібліотек, зокрема JCublas, JCufft, в яких реалізовані основні математичні операції із застосуванням паралельних обчислень.

Для реалізації програмної частини задачі розпізнавання жестів була обрана мова програмування C#. Для цього середовища розроблена оболонка бібліотеки Open CV, яка називається Emgu CV. Вона включає в себе багатий інструментарій, який дозволяє працювати з потоками даних, що отримується з записуючого пристрою у реальному часі. Крім того, в ній реалізований ряд функцій та класів, які можуть бути ефективно застосовані при розпізнаванні.

Хоча запропоновані у статті відстані відповідності вимагають подальшого вивчення та оптимізації, вже на даному етапі для задач розпізнавання мови одного диктора на обмеженій множині слів та розпізнавання жестів дактильної мови, отримані математичні результати проілюстровані застосуванням у даних задачах розпізнавання показали свою працездатність. Зокрема, в задачі розпізнавання дактильної мови жестів.

Недолік застосування характеристичних матриць для задачі розпізнавання мови полягає у чутливості до вибору RGB параметрів, адже для цієї задачі конвертація пікселя малюнку в елемент 0\1 матриці не є такою тривіальною задачею як для розпізнавання жестів, де вхідний малюнок чорно-білий і може бути легко конвертований у бінарну матрицю. Тому при правильній конфігурації та ряду додаткових етапів обробки можна достягти значного покращення.

Загалом, перспективним напрямком є застосування багаторівневої кластеризації, де ряд технік та алгоритмів застосовується поетапно. Запропоновані у статті матричні вектори ознак та відстані відповідності можуть скласти основу одного з таких етапів.

Отже, в пропонованій статті були розглянуті проблеми класифікації мовних сигналів та мови жестів. Зазначимо, що природними представниками об'єктів класифікації в згаданих задачах є матриці. Запропонований розвиток математичного апарату псевдообернення аналізу таких об'єктів на основі розвитку теорії псевдообернення для матричних евклідових просторів.

Список використаних джерел

1. *Golik A.O.* Designing the feature vectors: implementation of speech recognition algorithms using parallel computing capabilities. Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 3. – P. 141-150. (in Ukrainian).
2. *Donchenko V.S., Golik A.O.* Implementation of algorithms of speech recognition using parallel computing capabilities // XVI International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU - 2010),– October 4-8, 2010.–Yalta, Ukraine
3. Donchenko V.S., Golik A.O. Using of parallel computing technology in speech recognition problems // XVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU -2011),– May 23-27, 2011.–Skhidnytsia, Ukraine
4. *Donchenko V.S.* Euclidian space of vectors and matrixes: constructive methods of description of basic structures and their usage // International Journal "Information technologies & Knowledge".- 2011.- Vol. 5.- Number 3.-P.203-216.
5. Donchenko V., Zinko T., Skotarenko F.'Feature vectors' in grouping information problem in applied mathematics: vectors and matrixes /Problems of Computer Intellectualization..- Editors Vitali Velichko, Aleksey Voloshin O, Krassimir Markov.-Kyiv,Ukrain- Sofia Bulgaria: NASU, V.M.Glushkov Institute of Cybernetics, ITHEA : 2012- p.111-124.
6. *Donchenko V., Krivonos U., Omardibirova V.* Basic structures of Euclidian space: methods of description and usage / Information Models of Knowledge.- Editors: Krassimir Markov, Vitalii Velichko, Oleksy Voloshin - ITHEA.- Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria. Number 16.– P. 155-169.- ISBN 978-954-16-0048-1
7. *Kirichenko N.F., Donchenko V.S.* Pseudoinverse in problems of grouping of information // X International Conference "System analyses and information technologies"– 20-24 May 2008 y. Kyiv. – p.86.
8. *Kirichenko N.F., Donchenko V.S.* Linear structures in problems of clustering and pseudoinverse // Abstracts: International Conference 'Problems of Decision making under uncertainties (PDMU-2008)'.– May, 13-17, 2008. – Kyiv-Rivne, Ukraine. – 2008. – P.72-75.
9. *Kirichenko N.F., Donchenko V.S.* Hyperset clustering and pseudoinverse // Abstracts: International Conference 'Problems of Decision making under uncertainties (PDMU-2007)'.– May, 21-25, 2007. – Chernivtsi, Ukraine.– 2007.– P.143 -144.
10. *Kirichenko N.F., Donchenko V.S.* Pseudoinverse in clustering // Cybernetics and System Analyses– 2007 – №4.– p.73-92.
11. *Kirichenko N.F. Analytical representation of pseudoinverse matrixes* // Cybernetics and System Analyses - №2. –1997.– p.98-122.
12. *Kirichenko N.F., Donchenko V.S.* Pseudoinverse and linear structures in problems of prediction and clustering // Abstracts/ International Conference "Problems of Decision Macing under Uncertainties"(PDMU -2009),– April 27-30, 2009.–Skhidnyysia, Ukraine.– p.114.
13. *Kirichenko N.F., Donchenko V.S.* Pseudoinverse in clustering // Cybernetics and System Analyses- №4, 2007– p.98-122.
14. *Bondhugula, V., Govindaraju, N. and Manocha, D.* 2006. Fast Singular Value Decomposition on Graphics Processors. Technical report. University of North Carolina
15. *Moore E.H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix.//Bull. Amer. Math. Soc. – 26, 1920. – p. 394-395.
16. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices.// Proc. Cambr. Philosophical Soc.- 51, 1955.– p.406-413.
17. *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery*. 2.6 Singular Value Decomposition // Numerical Recipes in C. — 2nd edition. — Cambridge: Cambridge University Press.

Надійшла до редколегії 17.02.13

УДК 519.9

Зубенко В.В.[1], к.ф.-м.н., доц.

Про комунікативну інформатику

Розглядається комунікативна платформа інформатики.

Ключові слова: комунікативний процес, комунікативний система, інформатика.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: vvz@unicyb.kiev.ua

V.V.Zubenko[1], doc.

On the communicative informatics

The communicative platformot of informatics is desided.

Key Words: communicative process, informatics, communicative system.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: vvz@unicyb.kiev.u

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012)

Не зважаючи на стрімкий розвиток індустрії інформатики протягом останніх кількох десятиріч, процес її становлення як фундаментальної науки все ще не можна вважати завершеним. Перебігає він досить суперечливо між кількома напрямами – інженерним, математичним, комунікативним, а останнім часом і інформаційним. Кожен із них має своє підґрунття й зорієнтований на ті чи інші аспекти процесів обробки інформації. Такий плюралізм у підходах до визначення задач та предмета інформатики актуалізує проблему пошуку її базової парадигми (парадигм) та ідентифікації як наукової дисципліни.

Робота присвячена комунікативній платформі інформатики та уточненню предмета інформатики у цій платформі.

1.Традиційно, коли говорять про інформатику, то мають на увазі сферу збереження, пошуку, передачі та обробки інформації [1] і ті проблеми, які тут виникають (інженерні, наукові тощо). Важливо, що при цьому не можна обмежитися інформацією взагалі – потрібна певна її стуктуризація. А саме, коли мова йде про інформаційні об'єкти, то в них явно виділяють повідомлення, його значення та зв'язок між ними. Перші є формою, завдяки якій інформацію ідентифікують і передають, другі відповідають за зміст інформації і враховуються при її перетворенні, а треті (комунікативні) подають спосіб зв'язку між першими двома, та, можливо, з іншими інформаційними об'єктами[1]. Слід зазначити, що в теорії програмуваня – важливій складовій інформатики - елемент зв'язку довгий час, якщо й не був поза кадром, то без належної уваги. З ускладненням людино-машинних систем та появою об'єктно-орієнтованого та інших напрямків сучасного программування ситуація кардинально змінюється і цей комунікативний елемент стає важливою складовою теоретичних досліджень програм.

У світлі становлення науки інформатики було б цікаво подивитися як формувалися сусідні, вже класичні, точні науки (а саме такою ми хочемо бачити й інформатику). Якщо взяти, наприклад, фізику, то побачимо, що: 1) вона як природнича наука має справу з певними моделями природних явищ (руху, твердого тіла, рідини, звуку, світла тощо), 2) ці моделі є фізичними за суттю, математичними за формою, 3) їх може бути не одна, а декілька, навіть для одного і того самого явища; наприклад, корпускулярна та хвильова теорія світла тощо, 4) кожна з моделей, орієнтуючись на відображення тих чи інших аспектів природних явищ, спирається на певну методологічну платформу, 5) моделі не є чимось сталим, а час від часу в процесі

[1] Є спроби трактувати інформацію більш загально та долучати до інформатики аспекти, не пов'язані безпосередньо з передачою та обробкою інформації [2]. На наш погляд, вони мають стосуватись вже не інформатики, а якоїсь іншої науки, наприклад, такої як Information Science в США і в Західній Європі чи інформології в РФ тощо.

© В.В. Зубенко, 2013

розвитку удосконалюються і збагачуються новими фактами (в межах платформи), 6) самі платформи теж можуть змінюватись і, як наслідок, можуть з'являтися нові, якісно інші, моделі тих самих явищ.

Як відомо (див., наприклад, [3].), фізика розпочиналась з вивчення механіки та оптики на базі механістичної платформи Ньютона, потім перейшли до теорії поля (електрика) і нарешті до квантової фізики (теорія відносності). Нові і старі платформи можуть якийсь час співіснувати паралельно, доповнювати одна одну (корпускулярна і хвильова теорія світла), відходити у минуле з передаванням своїх здобутків наступникам (корпускулярні елементи у квантовій платформі) та відмирати з часом (як планетарна модель Пталомея).

Повертаючись до інформатики, можемо зробити висновок, що плюралізм серед існуючих в ній моделей та платформ явище цілком природне. Питання полягає в іншому - у цілях та якості існуючих моделей, на скільки вони адекватні поставленим задачам тощо.

На сьогодні однією з найбільш загальних та вивчених платформ інформатики є платформа, відома під назвою *дискретні системи* [4]. Завдяки своєму апріорі високому рівню абстрактності вона знайшла широке коло застосувань в інформатиці, але в багатьох випадках цей рівень є занадто високим і потребує суттєвого зниження. Серед інших платформ, насамперед, виділимо загальні та спеціалізовані платформи програмування. Однією з найбільш загальних та глибоких є *сутнісна* платформа [5], яка є розвитком більш ранніх платформ – *денотативної* [6,7] та *композиційної* [8-10,11,12], направлених на уточнення та вивчення семантики програм. Спеціалізовані платформи, відомі під назвами *парадигм програмування,* орієнтуються на побудову програм і підтримують різних стилі програмування, кожний з яких характеризується своїми моделями програм і даних, засобами їхнього опису й методами реалізації.

Нас цікавлять комунікативні аспекти процесів обміну та обробки інформації, і розробка математичної платформи для моделювання таких аспектів.

У *комунікативних системах* [13] обміну та обробки інформації (КС)[2] обов'язковою є наявність:

1) предметної області (ПрО) з певною сукупністю інформаційних об'єктів та співвідношень між ними;

2) суб'єкта-ініціатора, що формує і передає суб'єкту-обробнику певну вхідну та приймає від нього певну вихідну інформацію;

3) суб'єкта-обробника, що приймає вхідну інформацію, аналізує її, обробляє та повертає як вихідну суб'єкту-ініціатору.

Далі суб'єкти-ініціатори та суб'єкти-обробники будемо називати скорочено *ініціаторами* та *обробниками*. Головне призначення комунікативних систем полягає у здійсненні *комунікативних процесів*, кожний з яких розгортається в певному часовому просторі і встановлює зв'язок між певними об'єктами предметної області системи. За своєю роллю в процесі ці об'єкти розподіляються на *вхідні* та *вихідні*. З перших розпочинається процес, другими закінчується. Комунікативний процес складається з етапів, які разом утворюють його *життєвий цикл*.

Останній розпочинається ініціатором, який формує й передає обробнику за допомогою засобів зв'язку повідомлення, що містить *запит*[3] на обробку певних вхідних інформаційних об'єктів. Запит окрім останніх містить інформацію про *мету* обробки, яка може бути сформульована неявно – як вимоги до очікуваних вихідних об'єктів або явно – як детальний опис їх отримання за вхідними об'єктами. Перший спосіб превалює, наприклад, в пошукових інформаційних системах, другий – в обчислювальних системах з процедурними мовами програмування. В обох випадках мета декларує певне співвідношення між об'єктами і сама подається у вигляді спеціального інформаційного об'єкту - *програми*. Вихідні дані є результатом

[2] У кібернетиці подібні системи називають системами зі зворотним зв'язком.

[3] Не змішувати з запитами в інформаційно-пошуковими системах. Тут термін "запит" трактується як загальне поняття з більш широким змістом.

реалізації програми (мети) на конкретних вхідних даних.

Запит оформлюється у вигляді набору дескрипцій[4] і сам є спеціальним інформаційним об'єктом, зрозумілим обробнику. Останній приймає запит, виконує в межах певного часового інтервалу відповідні дії для реалізації програми й повертає ініціатору за допомогою засобів зв'язку отримані й декодовані вихідні дані.

Таким чином, кожний запит породжує певне співвідношення між об'єктами ПрО. Це співвідношення може бути не кінцевим, а тільки проміжним. У деяких випадках ініціатор повинен уміти аналізувати вихідні дані. Після відповідного аналізу (або без нього) він формує новий запит, знову передає його обробнику і так далі аж доки не буде отримано кінцевий результат комунікативного (діалогового) процесу.

Зазвичай обробник має власні інформаційні об'єкти – *внутрішні* (сукупності яких утворюють його стани), на відміну від *зовнішніх* - тих, що фігурують в предметній області, Тому сам запит містить не вхідні об'єкти обробника, а тільки їхні прообрази, які після кодування утворюють початковий стан обробника. Це стосується й вихідних даних, поданих у заключному стані процесу обробки. Вони потребують декодування. В деяких системах з метою безпеки вхідні й вихідні дані перед кодуванням (декодуванням) шифрують (дешифрують).

Ключовим моментом в комутативному процесі є його реалізаційний . компонент – частина процесу, яка відбувається "на території" обробника. Отримавши запит, обробник трансформує його у вхідний стан та в послідовність дій, які необхідно виконати, щоб перейти у заключний стан. В теорії цю послідовність дій називають *обчисленням*. В кожний момент часу обробник перебуває у певному стані, в якому подана та чи інша інформація. Обчислення зводиться до цілеспрямованої зміни станів обробника. Щоб змінити стан, обробник виконує певну дію (операцію). Існує механізм, який визначає порядок застосування операцій в обчисленні. Є два варіанти реалізації цього механізму. Перший - характерний для *спеціалізованих* систем, які орієнтовані на обробку запитів з фіксованою метою. У цьому випадку порядок застосування операцій відображений безпосередньо у струтурі обробника, він є її елементом. Другий притаманний, так званим, *універсальним* системам, які можуть обробляти запити з різною метою. Базується він на використанні обробником спеціальних інформаційних об'єктів – *внутрішніх процедур*, які задають правило для проведення обчислень - визначають над якими об'єктами і які дії необхідно виконати на кожному з кроків обчислення. В структурі такого обробника є механізм для переводу (трансляції) програм запитів у внутрішні процедури (або сукупності процедур), які їх реалізуть. У цьому випадку процес обчислення складається з двох фаз – трансляції та виконання внутрішньої процедури на вхідних даних.

На практиці зустрічаються і системи з мішаним варіантом реалізації запитів, коли одні запити реалізуються як спеціалізовані, а інші – за допомогою універсального механізму.

Комунікативні системи теж мають свій життєвий цикл, пов'язаний з їх появою та функціонуванням у часовому просторі. Він складається з етапів і розпочинається з аналізу варіантів вхідних даних та усіх можливих запитів системи. Наступні етапи охоплюють: проектування і побудову обробника та експлуатацію системи.

В межах комунікативної платформи інформатику можна було б визначити *як науку, що вивчає моделі комунікативних процесів та систем.* Однак, зважаючи на дискусійний характер обговорення, зробимо кілька принципових зауважень щодо даного означення.

Насамперед зазначимо, що в такому вигляді воно постає занадто загальним і багатоаспектним. Моделі комунікативних процесів і систем, які є спрощеним поданням реальних комунікативних процесів та систем, можуть дуже відрізнятися й вимагати принципово різних підходів. Достатньо послатися на різноманіття тільки кібернетичних моделей (від систем автоматичного регулювання, ймовірнісних і статистичних моделей до автоматних та компютерних моделей). Тому було б доречно обмежити моделі комунікативних процесів і систем.

[4] Дескрипція (від англ. description – опис) – мовна конструкція, що замінює назву предмета, виражаючи його зміст іншими мовними засобами.

Опустимо далі розгляд спеціалізованих систем, де вирішальну роль відіграє специфіка запитів та її відображення в структурі обробника, і зосередимо увагу на **універсальних** системах. В залежності від способу, яким обробники знаходять вихідні дані в таких системах, вони поділяються на *породжуючі* та *і синтезуючі*. У першому випадку обробник породжує певну надмножину вихідних даних (або використовує вже готову таку надмножину як, наприклад, у пошукових системах), з якої відбирає остані, згідно з умовами, які визначено у внутрішній процедурі як інформаційному об'єкті, у другому – вихідні дані генеруються (будуються) з вхідних даних за допомогою цілеспрямованих імперативних дій. Обидва способи широко представлені в комунікативних системах.

Далі, нагадаємо, що інформація в комунікативній системі представляється інформаційними об'єктами. В кожній з них є свої правила побудови таких об'єктів. Без цих правил і без розуміння їх суб'єктами системи ніякий комунікативний процес неможливий. Модель комунікативної системи повинна враховувати цей аспект, а це значить, що вона має бути **дескриптивною.** Дескриптивність моделі означає, що до складу її елементів входять дескриптивні системи (ДС), в яких подаються (описуються) усі її інформаційні об'єкти: вхідні і вихідні дані, запити та внутрішні процедури. Мова йде не про одну, а, як правило, про декілька ДС, тому що інформаційні об'єкти різних суб'єктів системи потребують різних дескриптологічних засобів. Як мінімум – *мову специфікації* запитів для ініціатора і *внутрішню мову* для обробника. Остання описує внутрішні інформаційні об'єкти та процедури. Ці мови можуть співпадати, але тільки тоді, коли обидва суб'єкти КС співпадають.

Таким чином, в центрі уваги комунікативної платформи мають бути не просто моделі комунікативних процесів і систем, а саме дескриптивні їхні моделі.

Характеристичною особливістю таких моделей є те, що в них присутній часовий фактор і властивості деяких об'єктів (їхні значення і навіть їхній тип та зв'язки) можуть з часом змінюватись. Про такі об'єкти говорять, що вони є мінливі (*динамічні)*. Моделі, які допускають динамічні об'єктами, самі називаються *динамічними.* Це означає, що моделі комунікативних систем і процесів апріорі мають бути **динамічними.**

Відомо три види дескриптивних моделей – екстенсіональні, інтенсіональні й мішані (інтегровані) в залежності від того, якими є їхні ДС.

Для *екстенсіональних* ДС характерним є предикативний опис об'єктів через їх обсяг. Вони виділяють об'єкти за конкретним іменем υ і певними спільними ознаками його можливих значень або за тією роллю, яку вони відіграють у тих чи інших контекстах. Подібні ознаки та ролі отримали назву - *характеристичних властивостей.* Характеристичні властивості описують об'єкти таким чином, що можливі розбіжності між ними поза межами цих властивостей не приймаються до уваги. Одну й ту ж роль можуть грати абсолютно різні за значенням об'єкти. При екстенсіональному підході здійснюється перехід на вищий рівень абстракції до узагальненого об'єкта - *змінної,* яка має своє ім'я - υ, а значенням - клас допустимих значень (екстенсіонал).

Можна *конкретизувати* змінну, пов'язавши з її ім'ям υ конкретне допустиме значення a. Факт конкретизації змінної подається тріадою $\upsilon \mapsto a$. Конкретне ім'я υ абстрактне у тому сенсі, що воно ніяк не пов'язане з конкретною структурою його поточного значення, яка міняється від значення до значення. Слід зазначити, що предикат може описувати і рівно один об'єкт (і його можна навіть взяти за його ім'я!), але і в цьому випадку він не буде мати прямого відношення до структури значення. . Наприклад, лінійне рівняння $2x = 8$ може розглядатися як синонім для свого єдиного розв'язку (числа 4), але воно немає ніякого відношення до структури числа 4 в десятковій системі числення.

В *інтенсіональних* моделях кожний з об'єктів представлений не тільки конкретним своїм ім'ям, але і своїм конкретним значенням (*інтенсіоналом*). При цьому, на відміну від екстенсіональних моделей, структури імен та значень, як правило, певним чином пов'язані, а саме так, що за іменем може бути установлено його значення (в екстенсіональних моделях для цього потрібен ще додатковий компонент-зв'язок).

Різницю між екстенсіональними та інтенсіональними засобами проілюструємо наступними двома важливими прикладами.

Перший стосується натуральних чисел. З одного боку, їх можна визначити інтенсіонально, за допомогою числа 0 і відповідної конкретної сукупності операцій збільшення на 1 або скориставшись якоюсь позиційною, наприклад, звичайною десятковою, системою числення, взявши відповідну конкретну кількість одиниць, десятків, сотень тощо. В обох випадках значення числа – є результат конкретних дій в часі, які обумовлені його іменем. З іншого боку існує екстенсіональне означення натурального числа як кардинального через потужність множин.

Якщо взяти, наприклад, число три. Інтенсіонально його можна подати виразами $1+1+1$ чи десятковою цифрою 3. Екстенсіонально ж воно визначається як кількість елементів (кардинал) в таких множинах як { груша, яблуко, слива }, { a,b,c } та усіх їм рівнопотужних. Характеристичною властивістю тут є предикат штибу *три(x)=*"множина x - рівнопотужна множині { груша, яблуко, слива }". Кількість елементів в цих множинах – це те, що об'єднує усі триелементні множини. Ім'я кардинала "три" замінює їх в усіх контекстах, пов'язаних з їхньою потужністю[5].

Другий приклад пов'язаний з поняттям функції. Відомо два підходи до означення функції: процедурний – з функціями як конкретними правилами для обчислення результату (інтенсінальний) та теоретико-множинний – з функціями як відношеннями у теорії множин (екстенсіональний).

Мішані моделі використовують обидва види засобів. Моделі обробників навіть конкретних комунікативних систем є **мішаними**. Це випливає з подвійного характеру внутрішніх процедур, кожна з яких має, і інтенсіонал - правило для знаходження вихідних даних за вхідними, і екстенсіонал - сукупність обчислень, яку це правило породжує. Наявність екстенсіоналу (він може бути і одноелементним) є наслідком *масовості* внутрішніх процедур. Масовість означає здатність процедури застосовуватись до вхідних даних з певної не порожньої їх сукупності (немає жодного варіанту вхідних даних – немає і жодного обчислення!). Це вимагає, щоб останні були представлені в процедурі екстенсіонально - не конкретними значеннями (хоча і це можливо у випадку одного єдиного варіанту вхідних даних), а своєю роллю в обчисленні.

І нарешті про головне. Якщо звернутись до реальних обробників КС, то побачимо, що їхні ДС є **фінітними**, тобто в них усі об'єкти, і зовнішні, і внутрішніх є скінченно поданими. Це стосується, як запитів, так і внутрішніх процедур. КС та їхні моделі з фінітними ДС називаються *конструктивними.*

Наголосимо окремо, що конструктивність КС розповсюджується не на всю предметну область КС, а тільки на ту її частину, яка представлена у мові специфікацій КС. В останній представлена (наближено або точно) певна конструктивна модель предметної області. На цьому базується ідея інформаційного моделювання в різних галузях.

Враховуючи сказане, запропонуємо таке загальне визначення предмета інформатики в комунікативній платформі:

Комунікативна інформатика – це наука, що вивчає конструктивні моделі комунікативних процесів і систем.

Моделі, що вивчає комунікативна інформатика, будемо назвати *комунікативними інформаційними*, як і самі конструктивні комунікативні процеси та системи.

2.Конструктивний характер комунікативних аспектів інформаційних моделей фіксує границі комунікативної інформатики та вберігає її від надмірного узагальнення й ототожнення з іншими науками, насамперед з кібернетикою як наукою про загальні закони перетворення інформації в системах зі зворотним зв'язком та з інформологією – узагальнюючою наукою про інформацію в цілому, усі її вияви в живій і неживій природі, властивості й види загальних інформаційних процесів, а також з інформаційною наукою (Information Science). Взаємовідносини між цими науками, з одного боку, та комунікативною інформатикою – з іншого, приблизно такі, як між загальним поняттям і та його конкретизацією.

Як приклад можна навести взаємовідносини між загальною теорією груп і групою дійсних матриць або між класичним математичним аналізом і конструктивним

[5] Але воно не може це зробити в тих же теоретико-множинних операціях, кулінарних рецептах тощо, де суттєвими є конкретні елементи множин.

тощо. Останній приклад є особливо характерним: класичний аналіз базується на теоретико-множинній (екстенсіональній) платформі, а конструктивний - на алгоритмічній (інтенсіональній). І як математичні теорії вони дуже різні, хоч і мають значний спільний перетин (спільні теореми тощо). Якщо порівняти доведення однакових теорем в обох теоріях, то в конструктивному аналізі вони, як правило, значно довші і складніші. Про велику різницю між конструктивними і неконструктивними методами свідчать і складність отримання точних оцінок поведінки функцій чи процесів (конструктивних за означенням) у порівнянні з аналогічними асимптотичними (екстенсіональними) оцінками в межах навіть однієї теорії.

Таким чином, не можна ототожнювати кібернетику чи інформаційну науку з комунікативною інформатикою та стверджувати, як іноді можна сьогодні почути, що, наприклад, кібернетика вже "вмерла", залишилася лише інформатика тощо. Це просто різні, хоч і споріднені науки зі своїми предметами та методами дослідження. Це ж стосується і таких сучасних напрямів інформаційної науки як соціальна інформатика, біоінформатика тощо, в яких комунікативні інформаційні моделі є лише засобом досліджень, а предмети в них різні.

Висновки. В роботі введено поняття комунікативної інформатики як науки, що вивчає конструктивні моделі комунікативних процесів і систем. Комунікативна платформа інформатики є доволі загальною, але хочеться сподіватися, і достатньо змістовною для того, щоб відобразити основні проблеми теорії й практики обробки та передачі інформації, у тому числі, і програмування та сприяти їхньому розв'язку.

Список використаних джерел

1. *Le Garf A.* Dictiormairie de 1'infor-matique. Paris: Presses Universitaires de France. 1982.
2. *Kolin K. K.* Evolution of Informatics. /K.K. Kolin // Information technologies.- 2005, № 1, с.2-16
3. *Einstein A, Infeld L.* The growth of ideas from early concepts to relativity and quanta. – NY: Simon & Shuster, 1954.
4. *Kapitinova J.V., Letichevskij A.A*. Mathematical theory of computer systems design. – M.: Nauka, 1988.- 296 с.
5. *Red'ko V.N.* The descriptive foundations of the essential platform / V.N. Red'ko, I.V.Red'ko, N.V.Grishko // Problems of Programming – 2008. – № 2-3. – P. 75-83.
6. *Scott D.S.* Outline of a mathematical theory of computation.- Technical Monograph RPG-3, Programming Research Group, Uni. of Oxford, 1970.
7. *Stoy, J. E.* The Scott-Sterachey Aproach to Programming Language Theory / J. E. Stoy. – Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1979.
8. *Basarab I.A., Nikitchenko M.S., Red'ko V.N.* Compositional databases.– K.: Lybid', 1992. – 192 p.
9. *Red'ko V.N., Brona J., Buj D.B., Poljakov V.A.* Relational databases: Table algebras & SQL-likely languages.-K.: Publishers «Akademperiodika», 2001.-198 p
10. *Nikitchenko M.S.* Theory of programming. Part I / M.C.Нікітченко – Nizhin: Publishers of Mykoly Gogolja NDU, 2010.- 119 p.
11. *Red'ko V.N.* Foundations of compositional programming. / V.N. Red'ko // Programming. – M., 1979. – № 3.
12. *Zubenko V.* Applied Program Algebra. – Kiel: CAU Kiel.-1985.- Bericht. – № 8504.- 50 p.
13. *Zubenko V.V., Omel'chuk L.L.* Programming.– K.: Publishers of University of Kyiv, 2011. - 625 .c.

Надійшла до редколегії 03.12.2012

УДК 519.87

Ивохин Е.В., д.ф.-м.н, доцент,
Алмодарс Баррак Субхи Камл, аспирант

Об одном подходе к решению задач линейного программирования с нечеткими ограничениями

В статье рассмотрена и решена задача линейного программирования с нечеткими ресурсами, которые задаются в виде нечетких чисел с линейной функцией принадлежности. Предложены два метода оптимизации, приведены примеры решения нечетких задач линейного программирования с нечеткими ограничениями.

Ключевые слова: задача линейного программирования, нечеткое множество, нечеткое число, метод решения ЗЛП с нечеткими ограничениями

Ivokhin E.V., Ph.D., associate professor,
Almodars Barrak Subhi Kaml, post-graduate

On approach for the solving of the linear programming problem with fuzzy constraints

In this paper linear programming problem in which resources are fuzzy numbers with linear membership function was studied and solved. Two methods of optimization were request for this task. Some examples of fuzzy linear programming problem solving were given.

Key words: linear programming problem, fuzzy set, fuzzy number, method of solving of linear programming problem with fuzzy constraints

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua, burraq_1978@yahoo.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Статью представил доктор технических наук, проф. Волошин А.Ф.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЧЕТКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача линейного программирования (ЗЛП) возникает из необходимости оптимально использовать имеющиеся ресурсы. Это задачи, связанные с целевым выбором и анализом решений; задачи разработки или совершенствования структур (производственных структур предприятий и объединений); задачи проектирования (проектирование сложных автоматизированных комплексов, гибких производственных систем).

В качестве конкретных примеров задач, которые относятся к области линейного программирования, можно назвать задачу об использовании сырья, задачу об использовании мощностей, задачу на составление оптимальной производственной программы.

Рассмотрим следующую практическую задачу планирования производства на фирме. Пусть некоторая производственная фирма планирует выпуск различных изделий $x_1,...,x_n$ на текущий период (квартал или год). Обозначим через c_j ожидаемую прибыль на единицу реализованной продукции типа $j, j=\overline{1,n}$. Для производства любого из изделий используются ресурсы $b_1,...,b_m$ – производственные мощности фирмы, причем удельные расходы *i*–го ресурса, $i=\overline{1,m}$, при производстве единицы продукции типа *j*, $j=\overline{1,n}$ составляют a_{ij} единиц. Необходимо найти такой рациональный план выпуска изделий каждого типа, который обеспечивает максимальную прибыль фирмы. Математическая модель этой задачи следующая:

$$max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$x \ge 0; x \in R^n$.

Эта задача при фиксированных известных значениях параметров c_j, a_{ij}, $j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$, является стандартной задачей линейного программирования, а когда они являются случайными величинами с известными функциями распределения $F(c_j)$, $F(a_{ij})$, ее

©Є.В.Івохін, Субхи Камл Алмодарс Баррак, 2013

можно решить методами стохастичного программирования. Однако на практике бывает, что эти параметры неизвестны и для параметров c_j, a_{ij} можно только указать интервал возможных значений. Задачу такого типа можно назвать задачей с множественными значениями коэффициентов. В рамках этой задачи не имеет смысла говорить о максимизации целевой функции, поскольку значения этой функции – не числа, а множества чисел. В этом случае необходимо выяснить, какое отношение предпочтения во множестве альтернатив порождает эта функция, а затем определить, какие изделия следует считать рациональными в смысле этого отношения предпочтения.

Следующим этапом на пути детализации и уточнения рассматриваемой здесь модели является описание параметров задачи в форме нечетких множеств. В модель вводится дополнительная информация в виде функции принадлежности этих нечетких множеств. Эти функции можно рассматривать как способ приближенного отражения экспертом имеющегося у него неформализованного представления о реальной величине данного параметра. Значения функций принадлежности – это весовые коэффициенты, которые эксперты приписывают различным возможным значениям этого параметра.

После такого уточнения можно перейти к следующей постановке задачи нечеткого математического программирования [1]. Задана линейная модель вида

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_j x_j \to \max \ , \qquad (3)$$

в которой значения коэффициентов $\widetilde{c}_j$ заданы нечетко в форме нечетких множеств заданных универсальных множеств. Кроме того, заданы ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} x_j \le \widetilde{b}_i \ , \quad i=\overline{1,m} \ , \ x_j \ge 0, \ j=\overline{1,n} \ , \qquad (4)$$

причем значения коэффициентов $\widetilde{a}_{ij}$, $\widetilde{b}_i$ также описаны в форме соответствующих нечетких множеств. Требуется осуществить рациональный выбор решения $x \in R^n$, которое в некотором смысле максимизирует заданную нечетко линейную форму.

2. СПОСОБЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Понятие нечеткого множества, сформулированное Л.Заде[2], предполагает рассмотрение множеств, каждый элемент которых может иметь некоторую степень принадлежности соответствующему множеству, причем промежуточную между полной принадлежностью и полной непринадлежностью.

В соответствии с идеей Заде [2], нечеткое множество заданного универсального множества X формулируется следующим образом.

Определение 1. Нечетким множеством $\widetilde{A}$ универсального множества X, называется совокупность пар $\widetilde{A} = \{(\mu_{\widetilde{A}}(x), x)\}$, где $\mu_{\widetilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ – отображение множества X в единичный отрезок [0,1], называющееся функцией принадлежности нечеткому множеству.

Величина функции принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ для элемента $x \in X$ называется степенью принадлежности. Интерпретацией степени принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ есть субъективная мера того, насколько элемент $x \in X$ соответствует понятию, смысл которого формализован нечетким множеством $\widetilde{A}$. Для сравнения, в классической теории множеств принадлежность элемента x некоторому множеству $\widetilde{A}$ можно записать в виде:

$$x \in A \text{ или } x \notin A \, .$$

По аналогии с обычными множествами для нечетких множеств рассматриваются различные операции и свойства. Традиционные операции дополнения, пересечения и объединения в случае нечетких множеств определяются следующим образом:

- дополнением нечеткого множества $\widetilde{A}$, которое обозначается как $\widetilde{A}^c$, является нечеткое множество, для которого

$$\mu_{\widetilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x), \forall x \in X.$$

- пересечением двух нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называют нечеткое множество $\widetilde{C}$, для которого

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}} = \min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)), \forall x \in X.$$

- объединением нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называют нечеткое множество $\widetilde{C}$, для которого

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}} = \max(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)), \forall x \in X.$$

- нечеткое множество $\widetilde{A}$ называют пустым, если $\mu_{\widetilde{A}}(x) \equiv 0, \forall x \in X$.

Множествами α–уровня (α–срезами), $\alpha \in [0,1]$, нечеткого множества $\widetilde{A}$ называют

обычные множества

$A_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$.

Множество $\operatorname{supp} \tilde{A} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ называют носителем нечеткого множества $\tilde{A}$.

Для понятий выпуклости и нормальности нечетких множеств используются следующие определения.

Определение 2. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется выпуклым, если

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y))$$

для всех $x, y \in X, \lambda \in [0,1]$.

Определение 3. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется нормальным, если существует по крайней мере одно значение $x \in X$, для которого $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

В прикладных задачах при формализации нечеткости для конструктивности используются другие определения нечеткого множества, эквивалентные классическому определению 1.

Рассмотрим в качестве универсального множества X пространство над полем действительных чисел R^1, т.е. $X = R^1$.

Определение 4. [3] Нечетким числом называется упорядоченная пара функций $(u(r), v(r))$, $r \in [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям

1. $u(r)$ ограниченная, непрерывная слева, неубывающая функция на $[0,1]$;

2. $v(r)$ ограниченная, непрерывная слева, невозрастающая функция на $[0,1]$;

3. $u(r) \leq v(r)$, $r \in [0,1]$.

При этом, произвольное четкое число a представляется в виде нечеткого числа, у которого $u(r) = v(r) = a$, $r \in [0,1]$, и для любых двух нечетких чисел $x = (u_1(r), v_1(r))$, $y = (u_2(r), v_2(r))$ и $\lambda \in R$ можно определить арифметические операции и отношения в виде

- $x = y$, если $u_1(r) = u_2(r)$ и $v_1(r) = v_2(r)$, $r \in [0,1]$;
- $x + y = (u_1(r) + u_2(r), v_1(r) + v_2(r))$, $r \in [0,1]$;
- $x - y = (u_1(r) - v_2(r), v_1(r) - u_2(r))$, $r \in [0,1]$;
- $\lambda x = \begin{cases} (\lambda u_1(r), \lambda v_1(r)), \lambda > 0, \\ (\lambda v_1(r), \lambda u_1(r)), \lambda < 0. \end{cases}$

Предположим далее, что любое множество $\tilde{A}$, принадлежащее совокупности нечетких множеств $K_X(\tilde{A})$ универсального множества $X = R^1$, является нормальным и выпуклым.

Определение 5. [4] Нечетким треугольным числом $\tilde{A}$ называется упорядоченная тройка чисел *(a, b, c)*, определяющих функцию принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вида:

1. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]$;
2. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{c-x}{c-b}, x \in [b,c]$;
3. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x \notin [a,c]$.

Очевидно, что нечеткое треугольное число *(a, b, c)*, иногда называемое триплетом, является нечетким числом с функциями $u(r) = \dfrac{cr-a}{b-a}$, $r \in [a/c, b/c]$, $v(r) = \dfrac{c-rc}{c-b}$, $r \in [b/c, 1]$. Кроме этого, нечеткое треугольное число вида *(a, b, b)*, называемое левым нечетким треугольным числом, задается функцией принадлежности вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x < a; \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b];$$
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x > b,$$

а нечеткое треугольное число вида *(b, b, c)*, называемое правым нечетким треугольным числом, - функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x < b; \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c];$$
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x > c.$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РЕСУРСЫ

Рассмотрим задачу линейного программирования вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{5}$$

с нечеткими ограничениями на ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где правые части ограничений (6) задаются в виде нечетких треугольных чисел $\tilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^0)$, $b_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Здесь допустимые отклонения $b_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, определяют величины граничных изменений ресурсов модели.

С учетом тождественности определенных выше понятий нечетких чисел, задача линейного программирования (5), (6) может быть

переписана как задача оптимизации целевой функции (5) с ограничениями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + b_i^0 - \lambda b_i^0\ ,\ \ \lambda \in [0,1],\ \ i=\overline{1,m}\ ,$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}\ . \qquad (7)$$

Полученная оптимизационная задача может быть решена как задача параметрического линейного программирования [5]. Этот способ является универсальным, не всегда учитывающим специфику поставленной задачи.

В данном случае для нахождения решения воспользуемся идеей, предложенной в работе [4]. Обозначим через L - величину функции цели, полученную на оптимальном решении задачи (5), (7) при $\lambda = 1,$ а через U - величину функции цели, полученную на оптимальном решении задачи (5), (7) при $\lambda = 0$, т.е.

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*1},\ U = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*0},$$

где $x_j^{*0}, x_j^{*1},\ \ j=\overline{1,n}$ - оптимальные решения задач оптимизации (5), (7) при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответственно.

Очевидно, что $U \ge L$ и оптимальное значение функции цели задачи (5), (6) будет лежать в интервале $[L,U]$ при некотором значении параметра $\lambda^* \in [0,1]$. Для нахождения λ^* сформулируем задачу, эквивалентную начальной (5), (6). Так как параметр λ определяет гарантированный уровень нечетко заданных ресурсов, то определим следующую задачу оптимизации: найти значение параметра $\lambda \in [0,1]$, являющегося решением задачи линейного программирования

$$\lambda \ \to \max \qquad (8)$$

с ограничениями вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda(U-L) \ge L\ , \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \lambda b_i^0 \le b_i + b_i^0\ ,\ i=\overline{1,m}\ , \qquad (10)$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}\ .$

Эта задача является классической задачей линейного программирования, для нахождения решений которой можно применить любой вариант симплекс-метода.

4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Параметр $\lambda \in [0,1]$ в формулировке оптимизационной задачи (8)-(10) определяет общий гарантированный уровень нечетко заданных ресурсов. На практике величина допустимых отклонений зависит от вида и специфики ресурсов, что позволяет обобщить предложенный выше подход на случай использования нескольких параметров.

Пусть известно, что допустимые отклонения в ограничениях на ресурсы независимы и могут быть формализованы в виде системы неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + b_i^0 - \lambda_i b_i^0\ ,\ \ \lambda_i \in [0,1],\ \ i=\overline{1,m}\ ,$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}\ . \qquad (11)$$

Как и в вышеизложенном методе, введем обозначения

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*1},\ U = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*0},$$

где $x_j^{*0}, x_j^{*1},\ \ j=\overline{1,n}$ - оптимальные решения задач оптимизации (5), (7) при $\lambda_i = 0$ и $\lambda_i = 1$, $i=\overline{1,m}$, соответственно.

Для нахождения оптимальных значений параметров $\lambda^* = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ можно сформулировать следующую задачу многокритериальной оптимизации: найти значения $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, \lambda_i \in [0,1],\ i=\overline{0,m}$, являющиеся решением задачи линейного программирования с несколькими критериями

$$\lambda_0 \ \to \max\ ,\ \lambda_1 \ \to \max\ ,\ \ldots,\ \lambda_m \ \to \max \qquad (12)$$

с ограничениями вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda_0(U-L) \ge L\ , \qquad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \lambda_i b_i^0 \le b_i + b_i^0\ ,\ i=\overline{1,m}\ , \qquad (14)$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}\ .$

Решение данной задачи в предположении равнозначности критериев может быть получено различными методами, например, на основе свертки критериев.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЧЕТКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1.Рассмотрим в качестве тестового примера следующую задачу

$$x_1 + x_2 \to \max \quad (15)$$

$$4x_1 + x_2 \le 20, \quad (16)$$

$$x_1 + 2x_2 \le 12, \quad (17)$$

$$0.5x_1 + 2x_2 \le 11, \quad (18)$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2$.

Предположим, что в ограничении (16) нечетко задана величина ресурса (правая часть ограничения). Для определенности зададим объем ресурса в виде правого нечеткого треугольного числа $\tilde{20} = (20,20,22)$. Решение задачи (8)-(10) в этом случае имеет вид $\lambda^* = 1$, а решение задачи (15)-(18) - $x_1^* = 2, x_2^* = 5, f(x_1^*, x_2^*) = 17$.

Данный результат заставил обратить внимание на характер ограничений. Оптимальный план задачи (15)-(18) определяется ограничениями (17) и (18), и следовательно, не зависит от величины ресурса в ограничении (16).

2. Рассмотрим ту же задачу линейного программирования (15)-(18), предположив, что нечетко заданы в виде правых нечетких треугольных чисел ресурсы ограничений (17),(18): $\tilde{12} = (12,12,15)$, $\tilde{11} = (11,11,13)$.

Пусть гарантированный уровень ресурсов определяется единственным параметром λ. Решение задачи (8)-(10) в этом случае имеет вид $\lambda^* = 0.5$, а соответствующее решение задачи (15)-(18) - $x_1^* = 2.98, x_2^* = 5.24, f(x_1^*, x_2^*) = 18.7$.

3. Предположим, что в случае нечеткого задания ограничений (17), (18) гарантированные уровни ресурсов определяются независимо, т.е. рассмотрим решение задачи (12)-(14) с тремя параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3$. Оптимальное решение данной задачи $\lambda_0^* = 1, \lambda_2^* = 1, \lambda_3^* = 0.67$, а решение задачи (15)-(18) при полученных значениях параметров - $x_1^* = 0., x_2^* = 5.83, f(x_1^*, x_2^*) = 17.5$.

Как видно из приведенных результатов, значение функции цели задачи оптимизации может быть улучшено за счет изменения гарантированного уровня величины ресурсов в заданной системе ограничений. Однако, при практическом использовании данного подхода необходимо проводить процедуру выбора оптимального решения из полученных при различных значениях параметров с учетом специфики конкретной задачи.

Список використаних джерел

1. *Dubois D.* Linear programming with fuzzy data / D. Dubois // Analysis of Fuzzy Information / J. C. Bezdek (ed.). Boca Raton : CRC Press, 1987. - Vol. 3 : Applications in Engineering and Science. - P. 241-263.
2. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Inf. Contr., 1965. – 8. - P.338-353.
3. *Dehghan M., Hashemi B.* Iterative solution of fuzzy linear systems// Appl. Math. Comput., 2006. – 175. - P.645-674.
4. *Bablu Jana, Tapan Kumar Roy.* Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 2005. - 21(2). - P.243-268.
5. *Yudin D.B., Golshtein E.G.* Linear programming. - M.: Nauka, 1969. – 424p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 22.01.2013

УДК 519.87

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, доцент,
Апанасенко Д.В., студент

Про застосування методів кластеризації нечітких даних спеціального вигляду

В статті розглянуто та розв'язано задачі групування станів нечіткої системи, що описуються сукупністю складених нечітких множин. Запропоновано та проаналізовано декілька методів кластеризації.

Ключові слова: кластеризація, невизначеність, нечітка множина, методи групування даних.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua, diminio7@gmail.com

Ivokhin E.V., MD, associate professor,
Apanasenko D.V., student

On use of clusterization methods for fuzzy data of special form

In this article the problem of grouping the states of fuzzy system, which formalized by complex fuzzy sets, are discussed and solved. A few methods of clusterization are proposed and analyzed.

Key words: clusterization, uncertainty, fuzzy set, methods of data grouping.

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Статтю представив доктор технічних наук, проф. Волошин А.Ф.

Традиційна задача групування даних у відносно однорідні групи, що виникає в самих різних сферах науки, економіки, соціуму та ін., включає в себе проблему виділення кластерів та задачу знаходження еталонних вузлів. В реалізації методів кластерізації важливу роль грають показники належності даних до групи, способи обчислення відстаней між елементами, вагові коефіцієнти, що залежать від конкретної предметної області та спостережень в рамках цієї області. Методи мають різну обчислювальну складність та різний ступінь ефективності при вирішенні конкретних прикладних задач.

Для проведення процесу кластеризації існує багато підходів, більшість з яких є евристичними методами, що базуються на певних алгоритмах дій дослідника і не вимагають складних статистичних розрахунків. Однак, їх використання у випадку обробки інформації нечіткого характеру суттєво ускладнюється або взагалі стає неможливим через специфічне представлення нечіткості. Розглянемо методику кластеризації неточно заданої інформації, для формалізації якої використовуються сукупності складених нечітких множин.

Означення 1 [1]. Нечіткою множиною $\tilde{A}$ в універсальному просторі X називається сукупність пар виду $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{A}}(x): X \to [0,1]$ - функція належності нечіткої множини $\tilde{A}$.

Величину функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для довільного елемента $x \in X$ називають ступенем належності x нечіткій множині $\tilde{A}$. Інтерпретацією ступеня належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ є суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x \in X$ відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною $\tilde{A}$.

При цьому, звичайна множина $L_0 = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ називається носієм нечіткої множини $\tilde{A}$, а множини $L(\alpha) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ - множинами рівня $\alpha \in (0,1]$ нечіткої множини $\tilde{A}$.

Традиційно в якості універсального простору розглядається довільний скінченновимірний простір $X \subseteq R^N, x = (x_1, ..., x_N) \in R^N$. У випадку $X \subseteq R^1$ нечітка множина $\tilde{A}$ містить сукупність пар, що складаються з двох скалярних значень $x \in R^1$ та $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Нехай задано сукупність нечітких множин $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$, що визначені у відповідних універсальних просторах $X_1, \ldots, X_m$. Для простоти будемо вважати, що $X_i \subseteq R^1, i = \overline{1,m}$.

Розглянемо універсальний простір X у вигляді декартового добутку $X = \overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$.

©Є.В.Івохін, Д.В.Апанасенко, 2013

Сформуємо множину $\tilde{A}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m))\}$ де $x^i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$. Очевидно, що множина $\tilde{A}^m$ належить декартовому добутку нечітких множин $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$: $\tilde{A}^m \in \tilde{A}_1 \times \ldots \times \tilde{A}_m$.

Означення 2. Нечітку множину $\tilde{A}^m$ назвемо складеною нечіткою множиною в універсальному просторі $\overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$.

Означення 3. Звичайну множину $L^m(\alpha) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, ..., x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \alpha, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \alpha, ..., \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) \geq \alpha\}$ назвемо множиною рівня $\alpha \in (0,1]$ складеної нечіткої множини $\tilde{A}^m$.

Сукупність всіх складених нечітких множин $\tilde{A}^m$ в просторі $X = \overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$ позначимо $K(\tilde{A}^m)$.

Розробка конструктивного алгоритму проведення кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю складених нечітких множин з $K(\tilde{A}^m)$, включає в себе формалізацію способів пошуку кластерного центру множини та реалізацію процедури групування нечітких даних в межах заданої кількості кластерів.

У літературі, присвяченій проблемам кластеризації [2,3,4], найчастіше розглядаються три алгоритми: C-means, пікового групування та різницевого групування. Ці методи представляють собою кардинально різні підходи до вирішення проблеми кластерізації. Як правило, перший з них потребує від дослідника точного знання кількості кластерів, на базі чого будується алгоритм. Другий метод вимагає багато часу для виконання, бо має багато нетривіальних умов для перевірки щодо належності елемента до кластеру та побудови самого кластеру. Третій – найбільш оптимальний, але для його застосування необхідне детальне знання специфічних залежностей в системі для встановлення значень важливих параметрів, без яких метод не дає бажаного результату.

Задачу кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю складених нечітких множин з $K(\tilde{A}^m)$, за допомогою алгоритму нечіткого групування C-*means* було розглянуто в роботі [5]. Використовуючи попередню загальну характеристику методів, проведемо аналіз конструктивності інших методів.

Для цього визначимо деякі поняття. Нехай є дві довільні складені нечіткі множини $\tilde{U}^m = \{(x^1, \mu^U_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu^U_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu^U_{\tilde{A}_m}(x^m))\}$ та $\tilde{V}^m = \{(\mu^V_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu^V_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu^V_{\tilde{A}_m}(x^m))\}$.

Обчислимо величину $\gamma = \min\limits_{Z \in \{U,V\}, i=\overline{1,m}} \mu^Z_{\tilde{A}_i}(x^i)$, яка є мінімальним значенням серед величин мір належності окремих елементів обох множин $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$. Це значення дозволяє побудувати дві множини рівня γ у вигляді звичайних множин $L^m_{\tilde{U}}(\gamma), L^m_{\tilde{V}}(\gamma)$, що представляють собою точки універсального простору $X = \overset{m}{\underset{i=1}{\times}} X_i$, між якими може бути обчислена евклідова відстань $d = \left\| L^m_{\tilde{U}}(\gamma) - L^m_{\tilde{V}}(\gamma) \right\|$.

Означення 4. Нечітка скалярна величина

$$\tilde{D}(\tilde{A}^m) = \{(d, \gamma) : d = \left\| L^m_{\tilde{A}}(\gamma) \right\|,$$

$\gamma = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \mu_{\tilde{A}_i}(x^i) \in (0,1]\}$, де $\|\cdot\|$ - евклідова норма простору R^m, визначає метрику простору складених нечітких множин $K(\tilde{A}^m)$.

Таким чином, кожна складена нечітка множина $\tilde{A}^m$ вимірюється за допомогою нечіткої величини $\tilde{D}(\tilde{A}^m)$, а для знаходження нечіткої відстані $\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m)$ між довільними складеними нечіткими множинами $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ можна використати вираз

$$\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m) = \{(d, \gamma) : d = \left\| L^m_{\tilde{U}}(\gamma) - L^m_{\tilde{V}}(\gamma) \right\|, \quad \gamma = \min_{Z \in \{U,V\}, i=\overline{1,m}} \mu^Z_{\tilde{A}_i}(x^i)\}, \tag{1}$$

де $L^m_{\tilde{U}}(\gamma)$, $L^m_{\tilde{V}}(\gamma)$ - множини рівня $\gamma \in (0,1]$ складених нечітких множин $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ відповідно.

Порівняння відстаней між довільними парами складених нечітких множин будемо проводити за допомогою нечіткого відношення переваги.

Нехай $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1)$, $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2)$ - нечіткі відстані між складеними нечіткими множинами $\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1$ та $\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2$ відповідно. Визначимо ту нечітку відстань з двох заданих, яка є меншою у розумінні нечіткого відношення переваги "$<$". Для визначення «найменшої» відстані, як правило, користуються технікою обробки нечітких відношень переваги, введеною Орловським [6]. В рамках даного підходу вважається, що нечітке відношення переваги

$g(a,b)$ для довільних нечітких елементів $a,b \in R_+^m$ за умов $\mu_g(a,b)>0$ визначає співвідношення у вигляді $a<b$ із степенем $g(a,b)=\mu_g(a,b)$. За його допомогою можна порівняти відстані $\tilde{\rho}_1=\rho(\tilde{U}_1^m,\tilde{V}_1^m)$ та $\tilde{\rho}_2=\rho(\tilde{U}_2^m,\tilde{V}_2^m)$: вираз $g(\tilde{\rho}_1,\tilde{\rho}_2)$ визначає ступінь того, наскільки $\tilde{\rho}_1$ «менше», ніж $\tilde{\rho}_2$. Це надає можливість визначити "найближчий" до заданої складеної нечіткої множини $\tilde{Z}^0$ елемент $\tilde{Z}^*$, де $\tilde{Z}^*$ - складена нечітка множина з недомінованих наборів $x^i \in X_i$, $i=\overline{1,m}$, для функцій належності яких справедливо

$$\mu_{\tilde{A}_i}^{Z^*}(x_i)=\min_{x\in X_i}(1-\mu_T(x_i,x))=$$

$$=1-\max_{x\in X_i}\mu_T(x_i,x),\ i=\overline{1,m},$$

де через *T* позначено нечітке відношення строгої переваги, що відповідає $g(a,b)$

$$\mu_T(a,b)=\begin{cases}0, \text{ якщо } \mu_g(a,b)<\mu_g(b,a)\\ \mu_g(a,b)-\mu_g(b,a), \text{в іншому випадку}\end{cases},$$

$$a,b\in X_i,\ i=\overline{1,m}.$$

На основі введеного поняття відстані між складеними нечіткими множинами та способу їх порівняння можна сформулювати алгоритми нечіткого групування даних, поданих у вигляді сукупності складених нечітких множин $\{\tilde{A}^{m(j)}, j=\overline{1,p}\}$ з $K(\tilde{A}^m)$. Будемо вважати, що цю сукупність можна згрупувати в *k* кластерів.

На початку процесу задаємо величину $\gamma\in(0,1]$, яка буде визначати рівень нечіткості даних, що розглядаються. Припустимо, що складені нечіткі множини $\tilde{A}^{m(j)}$, $j=\overline{1,q}$, $q\le p$, мають непорожні множини рівня $L^m(\gamma)$. Будемо розглядати їх як звичайні вектора $S(\tilde{A}^{m(j)})=\{x^{1(j)},x^{2(j)},...,x^{m(j)}\}$, $j=\overline{1,q}$.

Алгоритм пікового групування. У алгоритмі пікового групування, який був запропонований Р. Єгером та Д. Фільовим [7], розглянуто міру щільності розміщення векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, на базі чого генеруються так звані пікові функції. При застосуванні *p* вхідних векторів створюється сітка, що рівномірно накриває простір векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$. Вузли цієї сітки розглядаються як потенційні нечіткі центри

$$\tilde{C}^{m(i)}=\{(x^{1(i)},\mu_{\tilde{A}_1}(x^{1(i)})),(x^{2(i)},\mu_{\tilde{A}_2}(x^{2(i)})),...,(x^{m(i)},\mu_{\tilde{A}_m}(x^{m(i)}))\}$$

$i=\overline{1,k}$, і для кожного з них розраховується пікова функція $M(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$,

$$M\left(S(\tilde{C}^{m(i)})\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{p}exp\left(-\frac{\left\|S(\tilde{C}^{m(i)}),S(\tilde{A}^{m(j)})\right\|^{2b}}{2\sigma^2}\right) \quad (2)$$

де $\left\|S(\tilde{C}^{m(i)}),S(\tilde{A}^{m(j)})\right\|$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,p}$ - це евклідові відстані між парами векторів, що визначають центри $\tilde{C}^{m(i)}, i=\overline{1,k}$ та складені нечіткі множини $\tilde{A}^{m(j)}$, $j=\overline{1,p}$, відповідно, коефіцієнт σ – це константа, що індивідуально підбирається для кожної конкретної задачі, а *b* – показник ступеню узагальненої функції Гауса, яка застосовується в нечіткій сітці.

Величина функції $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, розглядається як оцінка висоти пікової функції. Вона пропорційна кількості векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, що знаходяться в околі потенційного центра $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$. Мале значення $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, свідчить про те, що центр $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$, розташований в області, в якій зосереджено невелику кількість векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$. Слід звернути увагу на те, що коефіцієнт σ має незначний вплив на кінцеві пропорції між $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, для різних значень $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$, тому підбір його величини не є критичним.

Після обрахунку значень $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$ для усіх потенціальних центрів відбираються перші k_1 точки, що мають найбільше значення $M(S(\tilde{C}_1^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}_1$. Для вибору наступних центрів необхідно перш за все виключити k_1 центрів та вузли, що розташовані в безпосередній близькості від них. Це можна зробити шляхом перевизначення пікової функції за рахунок відсікання від неї функції Гауса з центрами в точках $S(\tilde{C}_1^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}_1$. Якщо цю

знов визначену функцію позначити як $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, то

$$M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)}))=M(S(\tilde{C}^{m(i)}))-$$

$$-M(S(\tilde{C}_1^{m(i)}))\exp\left(-\frac{\left\|S(\tilde{C}^{m(i)}),S(\tilde{A}^{m(j)})\right\|^{2b}}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

Необхідно звернути увагу на те, що функція $M_{new}(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$ набуває нульового значення в точках $S(\tilde{C}_1^{m(i)})$, $i=\overline{1,k_1}$. Звідси зрозуміло, що послідовне відсікання центрів (з максимальним значенням пікової функції) дозволяє виявляти та усувати чергові центри.

Процес знаходження наступних центрів $S(\tilde{C}_2^{m(i)})$, $i=\overline{k_1+1,k_2}$, $S(\tilde{C}_3^{m(i)})$, $i=\overline{k_2+1,k_3}$, … , здійснюється послідовно на модифікованих значеннях функції $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, що отримуються при видаленні близького оточення центру, виявленого на попередньому етапі. Він завершується в момент локалізації усіх центрів, що використовуються в моделі нечіткої сітки. Метод пікового групування ефективний, якщо розмірність вектора $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$ не занадто велика. В протилежному випадку (при великій кількості компонент $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$) число потенціальних центрів наростає лавиноподібно, і процес розрахунку чергових пікових функцій стає занадто довгим, а процедура малоефективною.

Алгоритм різницевого групування даних [7] – це модифікація алгоритму пікового групування, в якій навчальні вектори $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, розглядаються в якості потенційних центрів $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$. Пікова функція $D(S(\tilde{A}^{m(j)}))$, $j=\overline{1,q}$, в цьому алгоритмі задається у вигляді

$$D\left(S(\tilde{A}^{m(i)})\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\exp\left(-\frac{\left\|S(\tilde{A}^{m(i)}),S(\tilde{A}^{m(j)})\right\|^{2b}}{\left(\frac{r_a}{2}\right)^2}\right), \quad (4)$$

$i=\overline{1,q}$.

Значення коефіцієнта r_a визначає сферу сусідства. На значення $D(S(\tilde{A}^{m(j)}))$, $j=\overline{1,q}$, істотно впливають лише ті вектори $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, що розташовані в межах цієї сфери. При великій щільності точок в околі $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, (потенційного центра) значення функції $D(S(\tilde{A}^{m(j)}))$, $j=\overline{1,q}$, велике. Навпаки, її мале значення свідчить про те, що в околі $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, незначна кількість даних. Така точка вважається «невдалим» кандидатом в центри. Після розрахунку значень пікової функції для кожної точки $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$ відбирається вектор $S(\tilde{A}^{m})$, для якого міра щільності $D(S(\tilde{A}^{m}))$ виявилась найбільшою. Саме ця точка стає першим відібраним центром $S(\tilde{C}_1^{m})$. Вибір наступного центра можливий після виключення попереднього центру і всіх точок, що лежать в його околі. Так само, як і в методі пікового групування, пікова функція перевизначається у вигляді

$$D_{new}(S(\tilde{A}^{m(i)}))=D(S(\tilde{A}^{m(i)}))-$$

$$-D(S(\tilde{C}_1^{m}))\exp\left(-\frac{\left\|S(\tilde{A}^{m(i)}),S(\tilde{C}_1^{m})\right\|^{2b}}{\left(\frac{r_b}{2}\right)^2}\right), \quad (5)$$

$i=\overline{1,q}$.

При новому визначенні функції *D* коефіцієнт r_b визначає нове значення константи, що задає сферу сусідства чергового центра. Зазвичай дотримується умова $r_b \geq r_a$. Пікова функція $D_{new}(S(\tilde{A}^{m(j)}))$, $j=\overline{1,q}$ приймає нульове значення при $S(\tilde{A}^{m(j)}) = S(\tilde{C}_1^{m})$, $j=\overline{1,q}$, і близька до нуля в найближчому околі цієї точки.

Після модифікацій значень пікової функції знаходиться наступна точка $S(\tilde{A}^{m})$, для якої величина $D_{new}(S(\tilde{A}^{m}))$ максимальна. Ця точка стає наступним центром $S(\tilde{C}_2^{m})$. Процес пошуку чергового центра поновлюється після видалення компонентів, відповідних вже отриманим точкам.

Зрозуміло, що кожен метод має свої власні особливості та уточнення в залежності від умов застосування та його структурно-концептуальної реалізації. Головним чинником, звичайно, виступає показник конструктивності метода, що на практиці суттєво залежить від умов конкретної задачі. Наведемо аналіз результатів практичного використання методів кластеризації

для заданої нечіткої сітки з двомірними векторами складених нечітких даних.

Якщо у методі ***C-means*** необхідно було обирати початкові коефіцієнти [5], що показують ступінь належності кластеру для кожного двомірного критерію, виключно випадково, то в алгоритмі ***пікового групування*** головну роль грає покриття площини рівномірною сіткою з розмірами залежними від максимального та мінімального значення двомірних критеріїв по-координатно. Вузли цієї сітки будуть виступати як претенденти в центри майбутніх кластерів і виявляється, що обрати розміри клітин цієї сітки також є задачею, залежною від конкретної проблемної області. У даному випадку пропонується вирішити цю задачу за правилом Рунге, що полягає в знаходженні такого розбиття області, при якому величина $\Delta_{2n} \approx \Theta|I_{2n} - I_n|$ досягає свого наперед заданої точності (в обчислювальному експерименті для знаходження інтегралів за формулами прямокутників або трапецій вважалось $\Theta = \frac{1}{3}$). Точність правила Рунге задається користувачем залежно від потреб прикладної області.

Параметри b та σ, що використовуються у методі, також підбираються індивідуально для кожної задачі. При обрахунку експоненціального виразу для оцінки згущення точок навколо кандидата, виникає проблема нульового значення виразу для деяких претендентів (через обмеженість розміру чисел в машинній інтерпретації), тому перед тим, як підставляти отримані в перетвореннях значення в показник експоненти, їх бажано поділити на 1000. Крім цього, при реалізації виникає проблема врахування близькості вузла сітки – кандидата в центри кластера, що робить значення суми експоненціальних виразів дуже великим, навіть без урахування значення цієї функції для інших точок. Тому також необхідно ввести обмеження на ступінь близькості можливого кандидата в центри кластера до точок. Як варіант, пропонується визначати мінімально допустиму відстань за правилом Рунге.

Алгоритм ***різницевого групування*** представляє собою більш просту та ефективну модифікацію алгоритму пікового групування. Всі зауваження, зроблені для метода пікового групування, в цьому випадку несуттєві. Єдиним невирішеним питанням залишається значення коефіцієнта r_a, що визначає сферу сусідства. Але це значення на практиці може також підбиратися за правилом Рунге з заданою точністю. Головним же плюсом алгоритму є те, що кандидатами в центри кластерів виступають самі нечіткі вхідні дані.

Для перевірки результатів дослідження продемонстровано роботу алгоритмів на прикладі задачі групування станів нечіткої системи, що функціонує у двовимірному просторі [8]. Програмна реалізація зроблена на базі об'єктно-орієнтованої мови програмування Java в середовищі розробки Eclipse. Попереднє розташування станів системи здійснюється випадково, кількість точок обирається користувачем. Реалізовано можливість будувати кластери у графічному вигляді.

Список використаних джерел

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets //Information and control. 1965.V.8.
2. *Jamba M.* Hierarchical cluster analysis and compliance. - Moscow: Finance and Statistics, 1988. – 345 c.
3. *Durand B., Odell P.* Cluster analysis. - Moscow: Statistics, 1977. – 128 c.
4. *Viattchenin D.A.* Fuzzy methods of automatic classification. - Minsk: Tehnoprint, 2004. – 219 c.
5. *Ivohin E.V., Kosinskiy K.O.* The method of clusterization of complex fuzzy sets// Journ. of Comp. & Appl. Math. - 2007.– № 2.– C. 54 – 58.
6. *Orlovskiy S.A.* The problems of decision making for fuzzy input information. Moscow: Nauka, 1981. – 206 c.
7. *Osovski C.* Neural networks for information processing. - Moscow: Finance and Statistics, 2002. – 344 c.
8. *Shumetov V.G. Shumetova L.* Cluster analysis: an approach to the use of computers. - Orel: OrelGTU, 2000. - 118 c.

Надійшла до редколегії 29.01.2013

УДК 004.512

Л.О.Катеринич[1], к.ф.-м.н.

Адаптація системи керування нейронною мережею

Розглянуто деякі підходи щодо можливості адаптації системи керування нейронною мережею, а саме параметрична адаптація, структурна адаптація, адаптація об'єкта та цілей керування .

Ключові слова: нейронні мережі; штучний інтелект; адаптація.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: katerinich@rambler.ru

L.Katerynych[1], PhD.

Adaptation of neural network control

Considers some approaches the possibility of adapting the control system of neural networks, namely parametric adaptation, structural adaptation, adaptation of the object and purpose of control.

Key words: neural networks, artificial intelligence, adaptation.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: katerinich@rambler.ru

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Вступ

Адаптація або корекція всієї системи курування (всіх етапів) розглядається, як більш глибокий аналіз процесу керування складної системи. Поняття адаптації як інструмента цілеспрямованого впливу на об'єкт останніми роками стало фігурувати в математичній, технічній літератур [1,2,3].

У широкому розумінні адаптація нічим не відрізняється від управління, тобто, адаптація, як і будь-яке управління, є організація такого цілеспрямованого впливу на об'єкт, при якому досягаються задані цілі.

Під час проектування необхідність введення адаптації добре відчуває будь-який проектувальник, якому доводиться створювати систему при значній апріорній невизначеності про умови її функціонування. Осереднення по цій невизначеності рідко буває вдалим. З іншого боку, будь-яке осереднення поведінки середовища дозволяє спроектувати систему, оптимально працюючу тільки при середньому стані середовища. Усяке ж відхилення середовища від середнього призводить до не оптимальності функціонування системи.

Складні системи, як правило, не мають єдиного критерію функціонування. Такого роду системи функціонують в стані багатокритеріальності, причому ці критерії можуть бути не тільки екстремальними, але й мати характер обмежень. Це вимагає формулювати відразу кілька критеріїв та варіювати їх вибір залежно від ситуації, що склалася і внутрішніх потреб самої системи. Таким чином, вже вибір критеріїв адаптації є процесом адаптивним і повинен враховуватися при визначенні адаптації.

Тому, з урахуванням особливостей складних систем, адаптацію в широкому сенсі можна визначити як процес цілеспрямованого зміни параметрів і структури системи, який полягає в визначенні критеріїв її функціонування і виконанні цих критеріїв. Виділяють наступні підсистеми адаптації: апаратний рівень, алгоритмічний рівень, програмний рівень, системний та мережевий рівень [4].

Параметрична адаптація пов'язана з корекцією та налаштуванням параметрів моделі. Така адаптація має місце при будь-якій змінні характеристик керуючого об'єкта. Адаптація дозволяє налаштовувати модель на кожному кроці керування. Вихідною інформацією для цього виду адаптації - є неспівпадання вихідної/вхідної інформації та необхідною вхідною для керуючого об'єкта.

© Л.О. Катеринич, 2013

Оскільки процес керування нейронною мережею з керуючим об'єктом не завжди здатен представити необхідну інформацію для найбільш точного остаточного результату, необхідно вводити додаткові елементи керування, а саме поповнювати вхідною інформацією початкову структуру вхідних даних нейронної мережі (НМ).

Структурна адаптація має місце при неспівпаданні структури моделі та структури НМ. За різних обставин структура НМ може змінитися, що в свою чергу буди вимагати зміни структури моделі, а саме до механізмів структурної адаптації. Перехід від однієї структури до іншої виконується процедурою вибору альтернативної структури моделі. Різниця може полягати як у кількості входів/виходів до моделі, варіантами декомпозиції або структурою елементів моделі. Слід зазначити, що альтернативні моделі при ідентифікації параметрів теж використовують методи параметричної адаптації. [5]

Адаптація об'єкта необхідна у тому випадку, коли структурна адаптація не ефективна, тобто деякі цілі керування не досягаються. Ця адаптація пов'язана зі зміною організації потоків інформації в НМ. Додавання нової інформації призводить до підвищення його керованості, але вимагає більше затрат при параметричній та структурній адаптації. Вибір найкращого варіанту розподілення та переміщення потоків інформації у НМ в процесі керування і є основою процесу адаптації на цьому етапі.

Адаптація цілей керування. Інколи виникає ситуація коли зв'язок об'єкта і середовища настільки сильний, що їх відокремити неможливо. Коли предметна область чітка, то така задача не виникає. Це буває у таких випадках, коли предметна область автономна. Однак у реальному житті предметні області настільки пов'язані, що визначити чітку межу майже не можливо. Ця обставина є поштовхом для виділення процесу визначення меж предметної області та/або об'єкта в окремий етап [5,6].

У середовищі, що має формальний опис виділення об'єкта не є проблемою. Обмежуючи певні фактори середовища ми отримуємо певний екземпляр об'єкта і перевіряємо на моделі досяжність поставлених цілей. Також можливо оцінити чисельно ступінь некерованості цього варіанту об'єкта. Повторюючи цю процедуру для інших варіантів об'єктів буде отримано той екземпляр об'єкта на якому може бути досягнута максимальна керованість процесом [7].

Маючи формальний опис середовища це не було б проблемою. Оскільки існування такого опису майже неможливо звертаються до експертів. Для цього необхідно експертно синтезувати декілька варіантів об'єкта, а потім за допомогою експерта оцінити їх за критерієм і обрати найкращий.

Таким чином виникає потреба виділити процес визначення об'єкта (КЕ) в самостійний етап керування. Задача зводиться до того, щоб для заданої множини цілей $\{Z^*\}$ і ресурсів R визначити такий КЕ, який по критеріям досяжності цілей буде найкращий.

В робочому режимі системи де використовується НМ може виникати ситуація, коли виникають нові цілі, або їх уточнення. В цьому випадку необхідно визначити нову множину цілей $\{Z^*\}'$, адаптовану під поточні потреби. Це є основою цього етапу [8, 9].

Розглянемо задачу адаптації об'єкта F^0, як задачу керування. Ціль Z^* адаптації визначає вимоги до критеріїв. Ці потребі можуть бути записні наступним чином:

1. Критерій-нерівність
$H(U) = (h_1(U),...,h_p(U)) \geq 0$
2. Критерій -рівність:
$G(U) = (g_1(U),...,g_s(U)) = 0$
3. Критерії, що мінімізують:
$Q(U) = (q_1(U),...,q_l(U)) \to \min$, де

$h_i = M_x h_i'(Y) = M_x h_i'(F^0(X,U))$ $(i = 1,...,p)$;

$g_i = M_x g_j'(Y) = M_x g_j'(F^0(X,U))$ $(j = 1,...,s)$;

$g_k(U) = M_x q_k'(Y) = M_x q_k'(Y) = M_x q_k'(F^0(X,U))$
$k = (1,...,l)$;

M_x - оператор усереднення по X: $M(\bullet) = \int (\bullet)\rho(X)dX$, де $\rho(X)$ - щільність розподілу стану X середовища.

Ціль адаптації це розв'язок наступної задачі:

$$Q(U) \to \min_{U \in S} \Rightarrow U^*, \qquad (1)$$

де $S: \begin{cases} H(U) \geq 0; \\ G(U) = 0 \end{cases}$.

Такі задачі при заданій моделі F об'єкта F^0 і розподілу $\rho(X)$ називають задачам стохастичного програмування [6]. Проблема розв'язку поставлених задач очевидна. Але задачі адаптації ускладнюються ще й тим фактором, що модель об'єкта F відсутня. Також відсутні інформація о розподілі $\rho(X)$. Більш того, ці фактори мають тенденцію змінюватися у часі.

Отже, маючи алгоритм φ розв'язку задачі (1) с обмеженнями у вигляді

$$U^* = \varphi(F, \rho(X)) \qquad (2)$$

не можна вважати задачу адаптації розв'язаною. Необхідно додатково ідентифікувати об'єкт, що змінюється F^0 і статистичні властивості середовища, щоб отримати

$$W = V(F_t, \rho_t(X)) \qquad (3)$$

де F_t - модель об'єкта, а ρ_t - щільність розподілу X. Ці обставини змушують відмовитися від пошуку алгоритму φ розв'язку поставленої задачі адаптації., оскільки для складного об'єкта адаптації залежності F_t і $\rho_t(X)$ достатньо складні.

Тому для розв'язку задачі (1) необхідно звертатися к алгоритмам адаптації, використовуючи лише значення функцій $h_i^{'}(\bullet), g_j^{'}(\bullet)$ і $q_k^{'}(\bullet)$ $(i = 1,...,p; j = 1,..,s; k = 1,...,l)$ у визначені моменти часу. У загальному випадку має такий вигляд:

$$U_{N+1} = \psi(\overrightarrow{U_N}, \overrightarrow{H_N^{'}}, \overrightarrow{G_N^{'}}, \overrightarrow{Q_N^{'}}), \qquad (10)$$

де ψ - алгоритм рекурентної адаптації.

$\overrightarrow{U_N} = (U_N, U_{N-1},...,U_{N-W})$;

$\overrightarrow{H_N^{'}} = (H_N^{'}, H_{N-1}^{'},...,H_{N-W}^{'})$;

$\overrightarrow{G_N^{'}} = (G_N^{'}, G_{N-1}^{'},...,G_{N-W}^{'})$;

$\overrightarrow{Q_N^{'}} = (Q_N^{'}, Q_{N-1}^{'},...,Q_{N-W}^{'})$;

$H^{'} = (h_1^{'},...,h_p^{'})$;

$G^{'} = (g_1^{'},...,g_s^{'})$;

$Q^{'} = (q_1^{'},...,q_l^{'})$

де $U_N^{'}, H_N^{'}, G_N^{'}, Q_N^{'}$ - значення параметрів, що адаптуються, N - момент часу, W – глибина пам'яті алгоритму ψ.

Як будь-яке керування, адаптацію необхідно розглядати з позиції функціонування об'єкта адаптації. Розглядати задачу глобальної адаптації усієї нейронної мережі (НМ) з повною системою критеріїв на предмет ефективного функціонування не має сенсу.

Розглядаються локальні задачі адаптації, які охоплюють лише окремі аспекти функціонування НМ, і лише з цих підсистем формується повна система адаптації, яка буде дозволяти оперативно пристосовувати НМ до нових станів середовища. Розглядаються відповідні підсистемі адаптації НМ.

1. Апаратний рівень – адаптація налаштувань, параметрів і структури апаратних засобів.
2. Алгоритмічний рівень – адаптація алгоритмів обробки інформації з метою урахування специфіки задач, що розв'язуються НМ.
3. Програмний рівень – процес адаптації програм роботи з НМ при виборі їх з альтернативної множини.
4. Системний рівень – покращення функціонування системного забезпечення для підтримки та роботи НМ.
5. Мережевий рівень – адаптація процесів передачі інформації по НМ.

Алгоритмічний рівень адаптації НМ - адаптація алгоритмів обробки інформації в НМ. Мета такої адаптації - пристосувати алгоритми до специфіки задач, що розв'язуються. Критеріями ефективності, зазвичай, є середній час розв'язання задачі,

точність цього розв'язку, об'єм займаної пам'яті, ймовірність помилки, тощо.

Однак адаптація алгоритму може мати і структурний характер. Це означає, що потрібно вміти переходити від одного альтернативного алгоритму пошуку до іншого, з тим щоб весь час підтримувати в процесі оптимізації той алгоритм, який найкращим чином здійснює розв'язання даної задачі.

Програмна адаптація пов'язана з маніпулюванням окремими програмами і вибором тієї, яка працює найкращим чином в сенсі заданого критерію. Алгоритмічно програмна адаптація реалізується у вигляді альтернативного варіанту структурної адаптації.

Розглянемо алгоритмічний рівень адаптації для НМ. Мета такої адаптації - пристосувати алгоритми до специфіки задач, що розв'язуються НМ. Критеріями ефективності є середній час розв'язання задачі, точність цього розв'язку, ймовірність помилки тощо.

Специфіка задач, що розв'язуються, проявляється у вигляді статистично стійкою протягом деякого часу особливості цих задач, облік якої дозволяє підвищити ефективність функціонування НМ за обраним критерієм. Зазначена особливість не ідентифікується, тобто не визначається в явній формі, а враховується в процесі адаптації.

Побудуємо відповідну модель. Нехай

$$P_i = P(\Omega_i, \omega_i) \qquad (4)$$

задачі, що розв'язує НМ, відрізняються структурою (Ω_i) і параметрами (ω_i). Розглянемо задачі однієї структури Ω:

$$P_i = P(\Omega_i, \omega_i) \qquad (5)$$

Нехай

$$q_i = q(P_i, C) \qquad (6)$$

- значення критерію ефективності розв'язання задачі P_i алгоритмом, який має параметри $C = (c_1, ..., c_k)$.

Для вибору оптимального значення цих параметрів необхідно осереднити критерії (3) для всіх задачами, що розв'язує НМ зі структурою Ω (інша структура задачі вимагає іншого алгоритму розв'язання):

$$Q(C) = \int q(P, C) p(P) dP \qquad (7)$$

де $p(P)$ - щільність розподілу задач, що розв'язуються. Очевидно, що такої інформації практично ніколи не буває. Ця обставина змушує звертатися до адаптації параметрів алгоритму за спостереженнями окремих значень критерію (6), що з'являються при розв'язанні різних задач.

Адаптація параметрів алгоритму розв'язання задачі можлива не тільки від завдання до завдання, але і в процесі розв'язання однієї задачі і застосовується для рекурентних методів, коли можлива оцінка ефективності одного циклу - наприклад, у процесах пошукової оптимізації. Покажемо це. Алгоритм оптимізації, тобто алгоритм розв'язання задачі

$$Q(X) \to \min_{x \in S} \Rightarrow X^* \qquad (8)$$

являє собою оператор F переходу від одного стану X_N об'єкта, що оптимізуємо, до іншого X_{N+1}, більш кращого за заданим критерієм Q:

$$X_{N+1} = X_N + \Delta X_{N+1}, \qquad (9)$$

де $\Delta X_N = F(X_N, C)$, а C - параметри оператора оптимізації. Очевидно, що параметри C повинні змінюватися так, щоб процес оптимізації протікав найбільш успішно. Інакше кажучи, необхідна адаптація цих параметрів:

$$C_{N+1} = C_N + \Delta C_{N+1}, \qquad (10)$$

де $\Delta C_{N+1} = \varphi(C_N, X_N)$ - алгоритм адаптації.

Однак адаптація алгоритму може мати і структурний характер. Це означає, що потрібно вміти переходити від одного альтернативного алгоритму пошуку до іншого, з тим щоб весь час підтримувати в процесі оптимізації той алгоритм, який найкращим чином здійснює розв'язання даної задачі. Такі алгоритми альтернативної

адаптації лежать в основі адаптивного пакета програм оптимізації.

Розглянемо альтернативну адаптацію в процесах пошукової оптимізації як приклад структурної адаптації. Проблема пошукової оптимізації виникла у зв'язку з необхідністю розв'язання складних задач математичного програмування:

$$Q(X) \to \min_{x \in \Omega} Q(X) \qquad (11)$$

виникаючих при алгоритмізації процесів управління, прийнятті оптимальних рішень тощо. Тут $Q(X)$ - скалярна функція якості векторного аргументу $X = (x_1,..., x_n)$, визначеного в області Ω. Ця область може бути або континуальної і задаватися системою рівностей і нерівностей:

$$\Omega : \begin{cases} g_i(X) = 0 & (i = 1,..., l < n) \\ h_j(X \ge 0 & (j = 1,..., p) \end{cases} \qquad (12)$$

або кінцевою множиною, тобто визначати дискретні значення аргументу:

$$\Omega : \{X_i\} \quad (i = 1,...) \qquad (13)$$

або поєднанням цих обмежень. Можливі й інші форми завдання області Ω.

Складність розв'язку (8) для більш-менш реальних задач полягає насамперед у тому, що функція $Q(X)$ і область Ω задані не аналітично, а алгоритмічно, тобто у вигляді будь-якого роду правил, інструкцій і вказівок, що мають як формальний, так і неформальний (експертний) характер. Ця обставина практично виключає застосування стандартних методів математичного програмування, що спираються на відому структуру і вид функції $Q(X)$ і області Ω.

Задача, таким чином, полягає у відшуканні хоча б одного розв'язку X^*, що задовольняє очевидній умові

$$Q(X^*) = \min_{X \in \Omega} Q(X) \qquad (14)$$

Суть пошукового методу відшукання X^* зводиться до побудови послідовності

$$X_0, X_1,..., X_N,... \qquad (15)$$

яка повинна сходитися до досить малої околиці розв'язку X^*. Алгоритм пошуку F пов'язує один за одним наступні стани:

$$X_{N+1} = F(X_N, W_N) \qquad (16)$$

де W_N - фактор передісторії, наприклад $W_N = \{X_{N-1},..., X_{N+l}\}$; l -глибина передісторії. Однак зручніше алгоритм F визначати для зміщення

$$\Delta X_{N+1} = F(X_N, W_N) \qquad (17)$$

зв'язує два сусідніх стану $X_{N+1} = X_N + \Delta X_{N+1}$ в просторі параметрів, що оптимізуються $\{X\}$.

Очевидно, що алгоритм F повинен задовольняти певним вимогам, що пред'являються до процесу пошуку розв'язку задачі. Ці вимоги можна представити у вигляді набору критеріїв, що характеризують ефективність процесу пошуку:

$$K = (k_1,..., k_m) \ . \qquad (18)$$

Кожен з критеріїв залежить від алгоритму F і ситуації L, що склалися в процесі оптимізації:

$$L = \langle Q(X), L \rangle . \qquad (19)$$

Таким чином, кожен критерій в (18) має вигляд

$$k_i = k_i(F, L) \quad (i = 1,..., m) \qquad (20)$$

Задача вибору оптимального алгоритму зводиться тим самим до задачі оптимізації:

$$\Theta(F, L) \to \min_{F \in E} \Rightarrow F_L^* \qquad (21)$$

де - Θ критерій, що оптимізується, ефективності алгоритму F, обраний з множини (17); E - множина допустимих алгоритмів, що задовольняють іншим критеріям з (17). Розв'язання задачі (18) є оптимальний алгоритм F_L^* залежний від ситуації l. Ввівши поняття класу ситуацій

$$\{L\} = \{Q(X), L\} \qquad (19)$$

і правило оцінки критерію Θ на цьому класі (наприклад, як максимуму або середнього на

класі), отримуємо оптимальні алгоритми пошуку.

Програмна адаптація пов'язана з маніпулюванням окремими програмами і вибором тієї, яка працює найкращим чином в сенсі заданого критерію. У експертній системі (ЕС) Н-Гомеопат відповідну роль виконує комутаційний елемент.[8, 9]

Алгоритмічно програмна адаптація реалізується у вигляді альтернативного варіанту структурної адаптації. Формалізуємо цю задачу. Нехай є альтернативні програми

$$A_1,...,A_m, \qquad (22)$$

що розв'язують певний клас задач Ω задач (5) у НМ. Критерій ефективності розв'язання конкретної задачі P_j за допомогою i-й програми:

$$q_{ij} = q(P_j, A_j) \qquad (23)$$

Це означає, що, розв'язавши задачу, завжди можна оцінити критерій апостеріорно; апріорних міркувань звичайно не мається. Задача полягає в тому, щоб для наявного потоку завдань Р вибрати програму, що мінімізувала інтегральний критерій

$$Q(A) = \int q(P, A)p(P)dp \qquad (24)$$

тобто вирішити задачу

$$Q(A) \to \min_{A_i (i=1,...,m)} \Rightarrow A^* \qquad (25)$$

використовуючи тільки спостереження значень критерію (23).

Цю задачу слід вирішувати методами альтернативної адаптації, тобто так переходити від однієї програми (22) до іншої, щоб процес привів до програми A^*, оптимальної по обраному критерієм (24) в сформованій ситуації.

Список використаних джерел

1. *Rutkovskaya D. Pylynskyy M., L. Rutkovskyy*. Neural networks, algorithms and henetycheskye nechetkye system. - M: Hotline - Telecom, 2006. – P.452. (in Russian).
2. Andon F., Balabanov A., Identification of knowledge and research in databases: approaches, models, methods and systems / / Problems of programming. -2000. - N1-2. – P.513-526. (in Russian).
3. Rutkovskaya D. Pilinsky M. Rutkowski L. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems. - M: Hotline - Telecom, 2006. – 452p. (in Russian).
4. *Winston P.* Artificial Intelligence. - Academic Press, 1980. - 519s.
5. S. Haykin. Neural networks: a complete course. - Moscow: OOO " Williams ", 2006. - 220C. (in Russian).
6. *Kruglov VV, The length MI, Golunov RY* Fuzzy Logic and Artificial Neural Networks: A Handbook. allowance. - Moscow: Publishing House of Physical-Mathematical Literature, 2001. - 224.
7. Yudin D, Mathematical methods of control under incomplete information. Moscow, Sov. Radio, 1974. 400 p. . (in Russian).
8. *Katerynych L., A. Provotar*. Dyahnostyrovanye on neural setyah in the system Homeopath / / XIII-th International Conference: Knowledge Dialogue Solution. - Sofia, 2007. - V1. - P.64-68. (in Russian).
9. *Katerynych L.* Control synthesis of neural networks / / Problems of programming. 2009. Issue 1. P.53-59. (in Russian).

Надійшла до редколегії 04.02.13

УДК 519.633

Кацалова Л.М., к. ф.-м. н.

Один метод реалізації спрощеної моделі циркуляції атмосфери

В роботі наведена спрощена модель циркуляції атмосфери й представлено різницевий метод її реалізації. Суть методу полягає у зведенні двохвимірних рівнянь конвективної дифузії до послідовності одновимірних рівнянь за допомогою адитивно-усередненого методу розщеплення. Кожне рівняння отриманої системи розвн'язується за схемою явного рахунку.

Описується дискретизація задачі запропонованим методом. Представлені результати реалізації моделі на ЕОМ при різних значеннях часових кроків, проведено аналіз отриманих даних.

Ключові слова: модель циркуляції атмосфери, рівняння конвективної дифузії, адитивно-усереднене розщеплення, схема явного рахунку.

Український науково-дослідний гідрометеорологічний інститут, 03028, м. Київ, прос. Науки, 37, e-mail: lessiagook@bigmir.net

L. M. Katsalova, Ph.D.

One method of implementation of simplified atmospheric circulation model

Simplified atmospheric circulation model and a finite-difference method of implementation is presented in this paper. Essence of method consists of taking of two-dimensional equations of convective diffusion to the sequence of one-dimensional equations by the additive-averaged splitting. Each of equations of the got system is solved by explicitly accounts scheme. Discretization of problem by the proposed method is described. Results of implementation of model for different values of the time step are presented. Analysis of the data is performed.

Key words: atmospheric circulation model, convective diffusion equation, additive-averaged splitting, explicitly accounts scheme.

Ukrainian Hydrometeorological Institute, 03028, Kyiv, avenue of Science, 37,
e-mail: lessiagook@bigmir.net

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Точність чисельних прогнозів погоди значно залежить від ефективності чисельного інтегрування вихідних рівнянь математичної моделі. Основу моделей атмосферної циркуляції складають двох чи трьохвимірні рівняння конвективної дифузії. Тому природнім видається застосувати до них розщеплення за напрямками, звівши, тим самим, складну систему багатовимірних рівнянь до послідовності одновимірних задач конвективної дифузії, повязаних між собою початковими даними. В такому випадку, ефективність розвязання вихідної моделі залежить від ефективності розвязання одновимірних рівнянь конвективної дифузії.

В статтях [2, 3] було представлено різницевий метод, що дозволяє ефективно: швидко і з достатньою точністю, розвязувати одновимірні рівняння конвективної дифузії.

Застосуємо цей метод у поєднанні з адитивно-усередненим розщепленням [4] при реалізації спрощенної моделі циркуляції атмосфери. Порівняємо чисельні розв'язки спрощених диференціальних рівнянь моделі циркуляції атмосфери з архівними точними даними.

Вибір спрощеної моделі для фізичних процесів, які мають кількісно і якісно відтворюватися у разі заданого часового і просторового розв'язання, дозволили зосередити увагу на досліджені якості чисельного методу. І хоча висновки, що ґрунтуються на аналізі розв'язків спрощених рівнянь мають обмежений характер, вони є корисними для аналізу властивостей розв'язків повних рівнянь моделі.

Спрощена модель

Поставимо вимогу, аби атмосфера була вертикально-однорідним нестисливим середовищем, в якому траєкторії частинок лежать у горизонтальних площинах. Для цього розглянемо рух повітря у горизонтальній площині (λ,φ) на висоті, де впливом неоднорідності підстильної поверхні на атмосферний рух можна знехтувати (для даного експерименту було взято ізобаричну поверхню 500 гПа). Знехтуємо також впливом усіх зовнішніх джерел, окрім турбулентності. Оскільки $w = 0$, то рівняння руху, теплообміну та поширення вологості можна записати у вигляді системи:

© Л. М. Кацалова, 2013

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}= \left(2\Omega+\frac{u}{r\cos\varphi}\right)v\sin\varphi-\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+ +\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(K_G\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(K_G\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}= =-\left(2\Omega+\frac{u}{r\cos\varphi}\right)u\sin\varphi-\frac{1}{r}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+ +\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(K_G\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(K_G\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}= =\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(K_G\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(K_G\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial q}{\partial\varphi}= =\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(K_G\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(K_G\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right). \quad (4)$$

У рівняннях (1)–(4) введені позначення: t [с] – час; λ [рад] – довгота; φ [рад] – широта; Ω [1/с] – кутова швидкість обертання Землі; p [гПа] – тиск, u, v [м/с] – складові швидкості вітру по довготі і широті відповідно; ρ [кг/м^3] – густина повітря; T [K] – температура, θ [K] – температура потенційного потоку; q [кг/кг] – вологість, K_G [м^2/с] – коефіцієнт горизонтального турбулентного обміну.

Якщо тиск $p(\lambda,\varphi)$ вважати заданим, то наведена система рівнянь є замкнутою.

Постановка дискретної задачі

Чисельні експерименти прогнозування полів метеорологічних величин на 500-мілібаровій поверхні були проведені для території Європи. Як вихідною інформацією для завдання поля тиску та нестаціонарних граничних умов для інших змінних скористалися даними об'єктивного аналізу та прогнозу, що отримувалися по каналах INTERNET з німецької національної служби Deutscher Wetterdienst (DWD) Offenbach у двійковому форматі GRIB для території ($0^o-90^o N, 0^o-90^o E$) у вузлах регулярної широтно-довготної сітки з кроком $1{,}5^o$. Німецька національна служба DWD Offenbach надає Україні, як члену Всесвітньої метеорологічної організації, набір даних аналізу та прогнозу метеорологічних величин двічі на добу кожні 12 год. Один повний набір даних, що складається із 255 файлів, містить дані об'єктивного аналізу за 00 чи 12 год поточної доби та дані прогнозу на термін 12, 24, 36, 48 годин за Гринвічем.

Для задання граничних умов крайові значення метеорологічних даних (тиску, температури, вологісті та горизонтальних компонент вітру), що належать до об'єктивного аналізу і прогнозу на терміни 0, 12 і 24 год, методом гладкого поповнення на основі кубічної сплайн-інтерполяції [5] перераховувалися у граничні вузли горизонтальної сітки, яка належить проміжним крокам за часом. Для розглядуваного чисельного методу явного рахунку досить обмежитися гладкістю порядку $p=1$. Тоді в області $t\in[t_n,t_{n+1}]$ многочлен третього ступеня $u(t)$ можна записати у вигляді

$$u(t)=a_0+a_1(t-t_n)+a_2(t-t_n)^2+a_3(t-t_n)^3$$

з коефіцієнтами, що обчислюються за формулами:

$$a_0=u^n,\ a_1=\frac{u^{n+1}-u^n}{t_{n+1}-t_n},$$

$$a_2=\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{(t_{n+1}-t_{n-1})^2},\ a_3=-\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{(t_{n+1}-t_{n-1})^2}.$$

Реалізацію побудованої моделі було проведено за допомогою адитивно-усередненого розщеплення та методу явного рахунку[1].

Дискретизуємо просторову-часову область

$$\Omega=\{(\lambda,\varphi):0\le\lambda\le\pi/2,0\le\varphi\le\pi/2\},$$

$$\Gamma_\lambda=\{(\lambda,\varphi)\in\Omega:\lambda\in\{0,\pi/2\}\},$$

$$\Gamma_\varphi=(\lambda,\varphi)\in\Omega:\varphi\in\{0,\pi/2\},\ \Gamma=\Gamma_\lambda\cup\Gamma_\varphi,$$

$$t\in\Omega_\tau=[0;T],\ T=12\cdot3600\,c.,$$

та перейдемо до сіткових множин:

$$\omega_\tau=\{t^n:t^n=n\tau,n=\overline{0,N},\tau=T/N\},$$

$$\omega=\{(\lambda_i,\varphi_j):\lambda_i=i\Delta\lambda,\varphi_j=j\Delta\varphi,i=\overline{0,J_\lambda},j=\overline{0,J_\varphi}\},$$

$$\gamma_\lambda=\{(\lambda_i,\varphi_j)\in\omega:i\in\{0,J_\lambda\}\},$$

$$\gamma_\varphi=\{(\lambda_i,\varphi_j)\in\omega:j\in\{0,J_\varphi\}\},\ \gamma=\gamma_\lambda\cup\gamma_\varphi.$$

Розглянемо дискретизацію рівняння (1). Перепишемо його у наступному вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Lambda_\lambda u+\Lambda_\varphi u=f, \quad (5)$$

де $f=\left(2\Omega+\frac{u}{r\cos\varphi}\right)v\sin\varphi-\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda}$,

$$\Lambda_\lambda u=\frac{1}{r\cos\varphi}\left(u\frac{\partial u}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(K_G\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)\right),$$

$$\Lambda_\varphi u = \frac{1}{r}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{K}_G\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right),$$

Розщеплення рівняння (5) на підзадачі на відрізку $t\in[t^n,t^{n+1}]$ має вигляд

$$\frac{1}{2}\frac{u_{\lambda,i}-u_i}{\tau} + \frac{1}{2r\cos\varphi}\left\{u_i\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_\lambda}+\frac{u_{\lambda,i}-u_{\lambda,i-1}}{h_\lambda}\right) - \right.$$
$$-\frac{1}{h_\lambda}(\mathrm{K}_{G,i+1}+\mathrm{K}_{G,i})\frac{u_{i+1}-u_i}{h_\lambda} +$$
$$\left.+\frac{1}{h_\lambda}(\mathrm{K}_{G,i-1}+\mathrm{K}_{G,i})\frac{u_{\lambda,i}-u_{\lambda,i-1}}{h_\lambda}\right\}+\frac{1}{2}f_i,$$

$$\frac{1}{2}\frac{u_{\varphi,i}-u_i}{\tau} + \frac{1}{2r}\left\{u_i\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_\varphi}+\frac{u_{\varphi,i}-u_{\varphi,i-1}}{h_\varphi}\right) - \right.$$
$$-\frac{1}{h_\varphi}(\mathrm{K}_{G,i+1}+\mathrm{K}_{G,i})\frac{u_{i+1}-u_i}{h_\varphi} +$$
$$\left.+\frac{1}{h_\varphi}(\mathrm{K}_{G,i-1}+\mathrm{K}_{G,i})\frac{u_{\varphi,i}-u_{\varphi,i-1}}{h_\varphi}\right\}+\frac{1}{2}f_i,$$

$$u^{n+1} = \frac{u_\lambda + u_\varphi}{2},$$

$$f_i = \left(2\Omega_i + \frac{u_i}{r\cos\varphi}\right)\nu_i\sin\varphi - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{p_{i+1}-p_{i-1}}{2h_\lambda},$$

$i=1,\ldots,N$, $N=J_\lambda J_\varphi - 1$.

Аналогічним чином рівняння (2) – (4) також перетворюються до низки дискретних підзадач. Коефіцієнт горизонтального турбулентного обміну знаходимо за формулою Смагоринського [6]:

$$\nu_h = \left(\frac{\chi}{\sqrt{2}}\Delta s\right)^2 |D|,\ |D| = \sqrt{D_1^{\,2}+D_2^{\,2}},$$

$\chi = 0.4$ – постійна Кармана, $\Delta s = \sqrt{\Delta\lambda^2+\Delta\varphi^2}$,

$$D_{1,ij} = \frac{u_{i+1j}-u_{i-1jk}}{2\Delta\lambda\cos\varphi_j} - \frac{v_{ij+1}-v_{ij-1}}{2\Delta\varphi} - v_{ij}tg\varphi_j,$$

$$D_{2,ij} = \frac{v_{i+1j}-v_{i-1j}}{2\Delta\lambda\cos\varphi_j} + \frac{u_{ij+1}-u_{ij-1}}{2\Delta\varphi} - u_{ij}tg\varphi_j.$$

Чисельний експеримент

За допомогою запропонованого методу було отримано прогноз погоди на 12 годин, оскільки через значні спрощення моделі циркуляції не можна отримати достатньо адекватні дані на довший період. Результати розрахунків проведених з часовими кроками 60, 120, 300, 600, 1800 та 3600с, наведені у табл. 1. Результати представлені через максимальне відхилення отриманого розв'язку від прогнозу служби DWD Offenbach δ_M, та середньоквадратичне відхилення σ:

$$\delta_M = \max_{0\le i\le N}\left|\Re(x_i,T)-y_i^K\right|,\ \sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N-1}(\Re(x_i,T)-y_i^K)^2}}{\sqrt{\Re^2(x_i,T)}},$$

де $\Re(x_i,T)$ - значення деякого метеорологічного параметру в точці x_i в момент часу T, надане службою DWD Offenbach, y_i^T – значення того ж метеорологічного параметру в точці x_i в момент часу T отримане запропонованим вище методом, $T=12$ год., M – номер вузла сітки, в якому отримано максимальне відхилення y від $\Re$.

Таблиця 1.

Відхилення чисельного прогнозу, отриманого реалізацією спрощеної моделі циркуляції за допомогою методу явного рахунку від прогнозу служби DWD Offenbach.

τ (сек)	Значення для горизонтальної координати вітру u (м/с.)			
	U_M^K	$u(x_M,T)$	δ_M	σ
60	-1.7874	-3.6229	1.8354	0.0340
120	-1.7445	-3.6207	1.8762	0.0652
300	-1.6154	-3.6139	1.9985	0.1572
600	-1.4040	-3.6026	2.1985	0.3100
1800	-1.3646	7.1193	6.5271	0.9621
3600	34.7581	16.5030	18.255	1.9496
	Значення для горизонтальної координати вітру v (м/с.)			
	V_M^K	$v(x_M,T)$	δ_M	σ
60	2.3804	0.5857	1.7947	0.0568
120	2.4046	0.5883	1.8162	0.1107
300	4.4232	1.8604	2.5628	0.2708
600	6.9559	1.8477	5.1082	0.5303
1800	19.9477	1.7868	18.161	0.1395
3600	41.1365	1.6665	39.470	2.1632
	Значення для температури T (K)			
	$\Im_M^K$	$\mathrm{T}(x_M,T)$	δ_M	σ
60	256.770	256.517	0.2525	0.0023
120	257.086	256.518	0.5681	0.0043
300	256.720	256.449	0.2708	0.0102
600	257.104	256.453	0.6512	0.0207
1800	279.485	280.251	0.7659	0.0688
3600	278.201	280.116	1.9149	0.1609

τ (сек)	Значення для вологості q (кг/м^3)			
	Q_M^K	$q(x_M, T)$	δ_M	σ
60	0.00143	0.00210	0.00067	$2, e^{-6}$
120	0.00143	0.00210	0.00067	$3, e^{-6}$
300	0.00144	0.00211	0.00066	$7, e^{-6}$
600	0.00145	0.00211	0.00065	$12, e^{-6}$
1800	0.00152	0.00212	0.00060	$33, e^{-6}$
3600	0.00141	0.00238	0.00097	$70, e^{-6}$

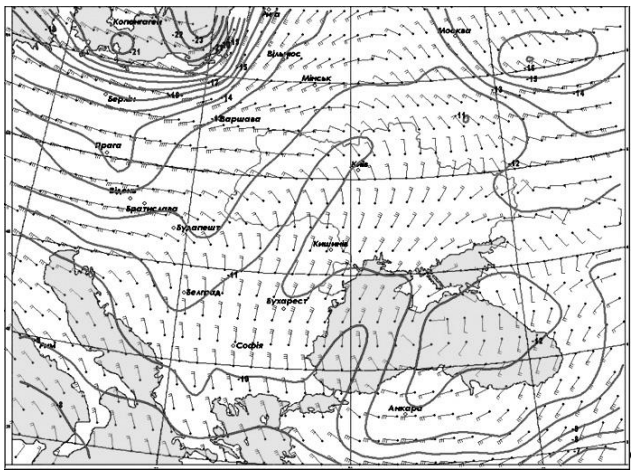


Рис.1а. Прогноз (12:00, 31.07.09) для ізобаричної поверхні 500 гПА, даний службою Deutscher Wetterdienst (DWD) Offenbach.

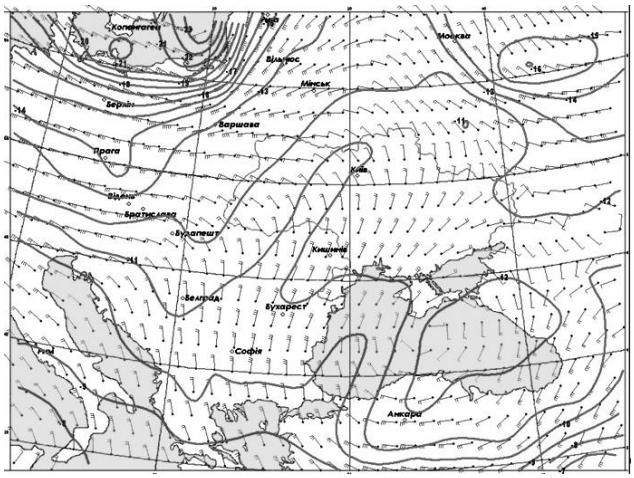


Рис. 1б. Прогноз на 12 годин (12:00, 31.07.09) для ізобаричної поверхні 500 гПА, розрахований на основі спрощеної моделі циркуляції за допомогою адитивно-усередненого розщеплення та методу явного рахунку з часовим кроком 60 с.

Висновок

З таблиці та рисунків видно, що при малих часових кроках прогноз значень метеорологічних величин, отриманий за допомогою методу явного рахунку не значно відрізняється від прогнозу служби DWD Offenbach. Зокрема, для $\tau = 120$ с. середньоквадратична похибка складає приблизно 10% для компонент вітру і не перевищує 1% для температури і вологості. Із збільшенням часового кроку похибка зростає, що є логічним наслідком порядку збіжності методу явного рахунку [7]. При $\tau = 3600$ с. середньоквадратична похибка для компонент вітру вже перевищує 100%, проте для температури і вологості залишається в допустимих межах. Це наслідок умовної апроксимації запропонованого методу. Із рисунків видно, що поле вітру описується задовільно навіть при найбільшому часовому кроці, тобто завдяки стійкості методу якісна картинка прогнозу отримана вірно, хоча величини модулів можуть мати похибку.

Таким чином, можна стверджувати, що отриманий розв'язок задовільно описує якісну і кількісну картину розподілу полів метеорологічних величин, що цілком достатньо в умовах спрощеної моделі.

Список використаних джерел

1. Prusov V.A., Doroshenko A.Y. Simulation of natural and anthropogenic processes in the atmosphere. – Kyiv: Naukova Dumka, 2006. – 542 p. (in Ukrainian).
2. Prusov V.A., Doroshenko A.Y. Chernish R.I., Huk L.M. Efficient difference scheme numerical solution of the convective diffusion problem. // Cybernetics and Systems Analysis. - 2007. - №3. - P. 64 – 74 (in Russian).
3. Huk L.M. Explicit account method for realization of atmospheric circulation model. Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – N 4. – P. 102-106. (in Ukrainian).
4. Gordeziani D.G., Meladze G.V. Simulation of the third boundary value problem for multidimensional parabplic equations in an arbitrary domain by one-dimensional equations. // Zn vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1974. - №1. – P. 246- 250 (in Russian).
5. *Marchuk G.I.* Numerical methods in weather forecasting. - Leningrad: Gidrometeoizdat, 1967, 353 p. (in Russian).
6. *Smagorinski J.* General circulation experiment with the primitive equations: Part I. The basic experiment / J. Smagorinski // Monthly Weather Review. – 1963. - V. 91, №1. - P. 99–164.
7. Prusov V.A., Doroshenko A.Y. Chernish R.I., Huk L.M. Theoretical study of a numerical method solving convective diffusion problem. // Cybernetics and Systems Analysis. - 2008. - №2. - P. 161 – 170 (in Russian).

Надійшла до редколегії 27.12.2012

УДК 004.932.2

Кобзар А.Ю., аспірант

Калібрування камери через пошук відстаней до ключових точок

Детально описано метод пошуку внутрішніх параметрів камери всього лише за одним знімком доволі простого об'єкта калібрування.

Метод перевірено на працездатність та збіжність на реальних даних. Проведено порівняння з іншими існуючими алгоритмами.

Ключові слова: параметри камери, обробка зображень, комп'ютерне бачення.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: taras55@gmail.com

A. Kobzar, postgraduate (PhD)

On calibration of a camera through estimation of the distances to the key points of the image

The proposed method of getting the internal parameters of a camera is described in detail with a single photo of a rather simple object of calibration.

The method was tested for operability and convergence on real data. The comparative analysis of existing methods was performed.

Key Words: camera parameters, image processing, computer vision.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: taras55@gmail.com

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Побудова просторових об'єктів та панорам за знімками з камери починається з визначення їх параметрів. Вони діляться на внутрішні та зовнішні. Внутрішні параметри, такі як: кут огляду, середина зображення та величина викривлення (distortion) – сталі для конкретної камери. Зовнішні ж параметри, такі як: ейлерові кути та зміщення – залежать від положення камери в просторі та змінюються від кадру до кадру. Процедура пошуку внутрішніх параметрів також називається калібруванням камери. Саме розв'язку цієї задачі присвячена дана стаття.

Всього розрізняють два чисто алгоритмічні підходи до пошуку параметрів:

- Перший полягає в тому, що внутрішні параметри камери знаходяться на ряду з зовнішніми параметрами, прямо під час роботи алгоритму. Такий підхід називається самокалібруванням. Зазвичай він дає доволі низьку точність, однак його використання не потребує ніяких попередніх розрахунків.
- Другий метод передбачає обробку спеціально зроблених знімків. Зазвичай в якості таких зображень служать знімки об'єктів з наперед відомим характеристиками. Зокрема шахівниці, для якої ми можемо ввести такий координатний простір, що положення клітин буде відомим. Такий метод дозволяє отримати високу точність, але він потребує попередніх розрахунків щонайменше для кожної моделі камери.

На даний момент розроблено доволі багато алгоритмів, які ведуть пошук внутрішніх параметрів камери за зовнішніми об'єктами. Класичним є алгоритм представлений Tsai в [1] та [2]. Також це питання вирішують Zhengyou Zhang в роботі [3] та Xiaoqiao Meng з Zhanyi Hu в [4].

Загальною схемою роботи таких алгоритмів є:

1. Пошук початкового наближення для параметрів камери за допомогою геометричних властивостей простору. Таке наближення може ігнорувати деякі параметри, або ж вести неточний розрахунок.
2. Уточнення параметрів алгоритмом Левенберга-Марквардта. В якості похибки найдоцільніше брати відхилення знятої точки на зображенні від спроектованої на нього ж.

Деякі з алгоритмів, зокрема [4], не використовують другий етап. Однак це веде до слабкої стійкості відносно шумів.

Також слід відмітити підхід до пошуку кута огляду камери завдяки побудові кільцевих панорамних знімків. Згідно цього методу слід зняти кільцеву панораму. Похибка для певного

© А.Ю. Кобзар, 2013

кута вимірюється як похибка при побудові панорамного знімку алгоритмом описаним в [5]. Мінімізувавши цю похибку отримується оптимальне значення кута оглядку камери.

В даній роботі пропонується алгоритм аналітичного розрахунку зовнішніх параметрів камери при заданих внутрішніх параметрах. Які визначаються на другому етапі алгоритмом Левенберга-Марквардта. Об'єктом для калібрування обирається рівномірна сітка на площині.

Просторова модель

В рамках задачі розглядається простір об'єкту з правою системою координат. В цьому просторі розташована камера, яка теж в свою чергу має локальну систему координат (рис. 1).

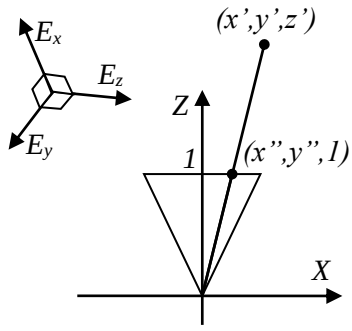


Рис. 1 Системи координат.

В якості внутрішніх параметрів камери обираються: деякий фіксований кут огляду α (по ширині), центр зображення як центральна точка камери, точки на зображенні вважаються квадратними, а викривлення лінз (distortion) ігнорується.

Щоб визначити положення точки (x, y, z) простору на зображенні, слід спочатку перевести її в систему координат камери:

$$(x', y', z')^T = E_x x + E_y y + E_z z,$$

де E_x, E_y, E_z – базисні вектори простору об'єкту в просторі камери. Далі отриманий вектор проектується на площину $z = 1$, в результаті отримуємо:

$$(x'', y'') = \left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right)^T.$$

Переводимо отриману точку до масштабу знімку камери:

$$(x_s, y_s)^T = \left(\frac{W}{2}\left(\frac{x''}{\tan\frac{\alpha}{2}} + 1\right), \frac{H}{2}\left(\frac{y''}{\frac{H}{W}\tan\frac{\alpha}{2}} + 1\right)\right)^T,$$

розміри якого W та H.

Тепер за відомими координатами проекції на зображення $(x_s, y_s)^T$ знайдемо координати точки в системі координат камери:

$$(x', y', z')^T = de,$$

$$e = \frac{\left(\left(2\frac{x_s}{W} - 1\right)\tan\frac{\alpha}{2}, \left(2\frac{y_s}{H} - 1\right)\frac{H}{W}\tan\frac{\alpha}{2}, 1\right)^T}{\left\|\left(\left(2\frac{x_s}{W} - 1\right)\tan\frac{\alpha}{2}, \left(2\frac{y_s}{H} - 1\right)\frac{H}{W}\tan\frac{\alpha}{2}, 1\right)^T\right\|},$$

тут d – відстань від центру проекції до точки, а e – одиничний вектор направлений з центру проекції до точки.

Пошук відстаней від камери до точок

Нехай нам відомі координати трьох точок в просторі об'єкту $(x_i, y_i, z_i), i = \overline{1,3}$ та координати їх положення на зображенні (x_{si}, y_{si}). Знайдемо відстані між цими точками:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, i, j = \overline{1,3}.$$

При переході до системи координат камери відстані l_{ij} не змінюються.

Розглянемо площину що проходить через перші дві точки та центр проекції камери (рис. 2). Кут ω – знаходиться як $\omega = \arccos(e_1 e_2)$, l_{12} – ми вже знайшли. При відомому d_1, значення d_2 знаходиться з теореми синусів:

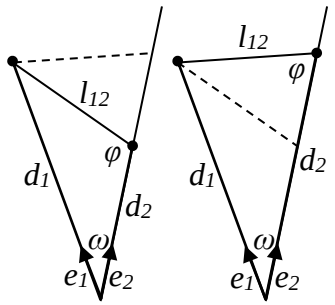


Рис. 2 Площина що містить дві точки та центр проекції.

$$d_2(d_1) = d_1\cos\omega \pm \sqrt{l_{12}^2 - d_1^2\sin^2\omega} =$$
$$= d_1 e_1 e_2 \pm \sqrt{l_{12}^2 - d_1^2\left(1 - (e_1 e_2)^2\right)}.$$

Два варіанти відповідають гострому та тупому куту φ. Аналогічно запишемо формулу для першої і третьої точки:

$$d_3(d_1) = d_1 e_1 e_3 \pm \sqrt{l_{13}^2 - d_1^2\left(1 - (e_1 e_3)^2\right)}.$$

Далі можемо записати формулу для відстані l_{23}:

$$l_{23}^2 = (p_2' - p_3')^2.$$

Після деяких перетворень це рівняння можна переписати як:

$$C_1 d_1^8 + C_2 d_1^6 + C_3 d_1^4 + C_4 d_1^2 + C_5 = 0,$$

в якому коефіцієнти знаходяться як:

$$c_{ij} = e_i e_j, s_{ij}^2 = 1 - c_{ij}^2,$$
$$A_1 = c_{12}^2 + c_{13}^2 - 2c_{12}c_{13}c_{23} - s_{12}^2 - s_{13}^2,$$
$$A_2 = l_{12} + l_{13} - l_{23},$$
$$A_3 = -(\pm_1 1)(\pm_2 1)2c_{23},$$
$$A_4 = \pm_1(c_{13}c_{23} - c_{12}),$$
$$A_5 = \pm_2(c_{12}c_{23} - c_{13}),$$
$$B_1 = A_1^2 + A_3^2 s_{12}^2 s_{13}^2 + A_4^2 s_{12}^2 + A_5^2 s_{13}^2,$$
$$B_2 = -A_3^2(s_{12}^2 l_{13} + s_{13}^2 l_{12}) + 2A_1A_2 - A_4^2 l_{12} - A_5^2 l_{13},$$
$$B_3 = A_2^2 + A_3^2 l_{12} l_{13},$$
$$B_4 = 2A_4A_5 - 2A_1A_3,$$
$$B_5 = -2A_2A_3,$$
$$C_1 = B_1^2 - B_4^2 s_{12}^2 s_{13}^2,$$
$$C_2 = 2B_1B_2 + B_4^2(l_{12}s_{13}^2 + l_{13}s_{12}^2) - 2B_4B_5 s_{12}^2 s_{13}^2,$$
$$C_3 = B_2^2 + 2B_1B_3 - B_4^2 l_{12} l_{13} + 2B_4B_5(l_{12}s_{13}^2 + l_{13}s_{12}^2) -$$
$$- B_5^2 s_{12}^2 s_{13}^2,$$
$$C_4 = 2B_2B_3 - 2B_4B_5 l_{12} l_{13} + B_5^2(l_{12}s_{13}^2 + l_{13}s_{12}^2),$$
$$C_5 = B_3^2 - B_5^2 l_{12} l_{13}.$$

Тут знаки $\pm_1$ та $\pm_2$ обираються незалежно. Таким чином отримуємо 4 варіанти рівняння 8-го степеня, яке зводиться до рівняння 4-го степеня і розв'язується методом Феррарі. Зі специфіки задачі випливає, що нас задовольняють лише додатні значення. Знаючи d_1 відповідні значення d_2 та d_3 знаходяться за описаними вище формулами.

В результаті ми отримуємо, не більше 16-ти, варіантів розташування точок в координатах камери. Ця процедура знаходить точні розв'язки не використовуючи ітераційні чисельні методи.

Після цього розглянемо $n+1$ точку $p, p_1, p_2, ..., p_n$. Застосуємо вище описану схему до трійок (p, p_1, p_2), (p, p_2, p_3), …, (p, p_n, p_1). Серед отриманих варіантів здійснюється повний перебір і в результаті вибирається той, який дає найменшу похибку. Таким чином ми однозначно отримали розташування точки p в системі координат камери.

Визначення положення камери

Положення камери знаходиться на основі співставлення координат точок в системі координат об'єкту та знайдених на попередньому етапі координатах в системі координат камери.

Найкращим об'єктом для даної цілі є шахівниця, або ж будь-яка плоска поверхня розділена на квадратні клітини. В даній роботі автор використовує сітку, яка зображена на екрані монітора (рис. 3).

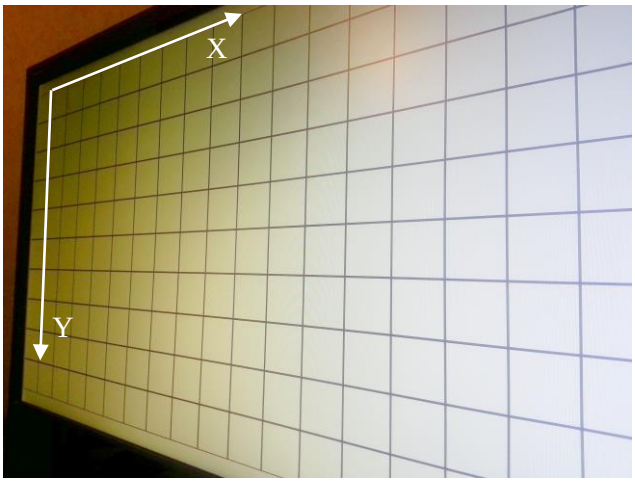


Рис. 3 Об'єкт калібрування.

Простір об'єкту обираємо таким чином, щоб площина екрану задовольняла рівнянню $z = 0$ в цьому просторі. Розмір клітини приймаємо за одиничний, а вісі абсцис та ординат направляємо по сітці.

В якості точок обираються вузли сітки, їх можна отримати як перетин вертикальних та горизонтальних ліній зображення. Положення ліній уточняється алгоритмом на базі методу найменших квадратів. Це збільшує точність, якість вхідних даних та стійкість до шумів.

Виділивши точки, можемо скористатись алгоритмом, запропонованим раніше. Він дозволяє знайти відстань від камери до всіх обраних точок та їх координати в системі координат зображення.

Схема вибору точок дозволяє без проблем знайти базис системи координат об'єкту в системі координат камери. Він однозначно визначає ейлерові кути перетворення з системи координат об'єкту в систему координат камери. Зміщення ж знаходиться на основі центрів мас точок в цих системах координат.

Градієнтна оптимізація параметрів

Для знаходження кута скористаємося алгоритмом Левенберга-Марквардта. В якості параметрів для оптимізації будемо розглядати всі параметри камери. За початкове наближення візьмемо деякий кут та розраховані для нього зовнішні параметри камери, знайдені вище описаним способом. Критерієм для мінімізації береться відстань між спроектованими на зображення точками об'єкту та їх реальним

положенням на цьому зображенні. Розмірністю такої похибки є піксель зображення.

Завдяки точному визначенню параметрів для певного кута та неперервності функції похибки ітераційна процедура оптимізації збігається до оптимального значення, успішно оминаючи локальні мінімуми функції похибки.

Чисельний експеримент

Для перевірки результатів роботи алгоритму, він був реалізований у вигляді програми на мові C#. Застосовувалась ця програма для пошуку кута огляду камер декількох пристроїв. Для цього було зроблено серію знімків та на їх основі виміряно шукане значення (табл. 1).

Таблиця 1

Результати вимірів

Пристрій	Вимір 1	Вимір 2	Вимір 3	Вимір 4	Вимір 5	Вимір 6	Середнє
Samsung Galaxy S3	62,9626°	63,2276°	62,0787°	62,7392°	61,7678°	62,6444°	**62,5701°**
Samsung Wave	50,7110°	50,1112°	50,7612°	50,7472°	49,2832°	49,9386°	**50,2587°**
Nokia Asha 300	58,0514°	56,7530°	59,3823°	56,4061°	58,9862°	58,8680°	**58,0745°**

Можлива неточність пошуку зовнішніх параметрів ніяк не впливає на похибку, оскільки вона нівелюється на етапі градієнтної оптимізації. Отриману ж похибку можна пояснити відсутністю серед внутрішніх параметрів оптичного викривлення та неідеальними умовами проведення експерименту.

Найкращого результату алгоритм досягає, якщо в межах кадру значно міняється відстань від камери до вузлів сітки. Зокрема автор нахиляв камеру під кутом близьким до 45° (рис. 3). Таким чином забезпечується достатня зміна відстані та практично вся сітка попадала в фокус.

Висновки

Проведене дослідження черговий раз підтвердило ефективність роздільного пошуку зовнішніх та внутрішніх параметрів камери. Це не тільки прискорює роботу алгоритму, а й збільшує точність його роботи.

За сучасного розвитку алгоритмів калібрування, все більше постає питання зручності цього процесу. Однією з вимог стає як найменша попередня підготовка об'єктів калібрування. Для роботи запропонованої схеми достатньо одного знімку об'єкту калібрування. Також можна відмітити алгоритм на базі панорам, об'єктом для якого служить практично будь-яке навколишнє середовище.

Неможна переоцінити заключний етап уточнення результату на базі градієнтних методів. Завдяки йому зникає похибка утворена в результаті роботи попереднього етапу, яка до того ж немає геометричної інтерпретації.

В цілому автор пропонує ще один ефективний підхід до вирішення задачі калібрування, елементи якого можна використовувати для вирішення інших задач.

Список використаних джерел

1. *Tsai, Roger Y.* An Efficient and Accurate Camera Calibration Technique for 3D Machine Vision // Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Miami Beach, FL. – 1986. – P.364–374.
2. *Tsai, Roger Y.* A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses // IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA–3. – 1987. – N 4. – P.323–344.
3. *Z. Zhang* A flexible new technique for camera calibration // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.22. – 2000. – N 11. – P.1330–1334.
4. *Xiaoqiao Menga, and Zhanyi Hub* A new easy camera calibration technique based on circular points // Pattern Recognition 36. – 2003. – P.1155–1164.
5. *Verchenko A., Kobzar A.* About one of the algorithms of panoramic images building // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2011. N 3. – P.109–114.

Надійшла до редколегії 26.12.12

УДК 519.925.51

Кулян В.Р.[1], к.т.н., доц., Юнькова О.О.[2], к.ф.-м.н., доц., Рутицька В.В.[1], к.т.н., Кулян А.В.[1], студент

Деякі задачі математичного моделювання при управлінні банківськими активами

Розглядається проблема побудови математичної моделі та управління портфелем банківських активів як задача оптимізації динамічної системи.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, інвестиційний портфель, банківські активи

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2] Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, 03068, м. Київ, пр. Перемоги, 54/1
e-mail: olenayunkova@mail.ru
Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

V.R.Kulyan[1], Ph.D., Ass. Prof., O.O.Yunkova[2], Ph.D., Ass. Prof., V.V. Rutytskaya[1] , Ph.D., A.V.Kulyan[1], Stud.

Some problems of mathematical modeling in the management of bank assets

The problems of constructing a mathematical model and portfolio management of bank assets as a problem of optimization of dynamic systems are investigated.

Key Words: mathematical model, identification of parameters, portfolio management, bank assets

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: v.kulyan@gmail.com

[2] Vadim Getman National Ekonomy University of Kyiv, 03068,Kyiv, Peremogy ave, 54/1
e-mail: olenayunkova@mail.ru

Динамічні та статичні моделі управління активами і зобов'язаннями знайшли успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади застосування таких моделей реалізовано для інвестиційних задач фондового ринку, страхових та інвестиційних компаній, банків та університетських фондів.

Разом з тим, деякі класичні постановки задач моделювання на фондовому ринку знайшли своє застосування в інших прикладних сферах, наприклад, у банківському секторі економіки. Серед них можна виділити задачі Г. Марковиця та Д. Тобіна про інвестування у портфелі цінних паперів однорідної та змішаної структури відповідно. Задача Г. Марковиця про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його прибутковості у статичному випадку має такий вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x ,$$

де x_i – частка акцій і-того виду у портфелі; r_i – очікувана прибутковість акції і-того виду. Очевидно, що інвесторами задача розглядається у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \to \max_x ,$$

тут Т- горизонт інвестування;
і полягає у побудові оптимального за прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля. Дослідження математиків і економістів у галузі фінансового аналізу спрямовані на вивчення різних змістових інтерпретацій і узагальнень існуючих постановок задач та поширення їх на нові сфери застосування.

Прикладами такого підходу можуть бути:

1. Задача про оптимальний розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку.
2. Задача про оптимальне кредитування комерційним банком.

© Кулян В.Р., Юнькова О.О., Рутицька В.В., Кулян А.В., 2013

3. Задача про оптимізацію розподілу активів комерційного банку з урахуванням обов'язкового резервування.

Для ознайомлення із математичною постановкою та підходами до розв'язання перших двох можна звернутись до [2]. Додамо лише, що формально задача про розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку ідентична задачі інвестування у цінні папери на фондовому ринку, тому підходи, описані в [2], повністю або частково можна застосувати при розв'язанні задач п.1 та п.2.

Третя згадана задача є новою у сучасному банківському менеджменті, тому розглянемо її детально. При формальному математичному записі цієї задачі звернемо увагу на те, що іноді зручніше розглядати процеси інвестування не у частках капіталу, що виділяється для інвестування, а безпосередньо у сумі коштів W_i, що виділяються для інвестування у $i-$тий напрямок; W – загальна сума коштів. Тоді задача матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}(r_i - p_i)W_i \to \max_{W}, \qquad (1)$$

де $\overline{W} = (W_1, W_2 ... W_n)^T$ - вектор-стовпчик, координатами якого є суми коштів, що виділяються для інвестування у відповідні напрямки; r та p – вектор-стовпчики розмірності $n \times 1$, перший з яких характеризує очікувану прибутковість $i-$того інвестиційного напрямку, а другий - відсоток від суми, що може бути інвестована у відповідний напрямок і який є обов'язковим для резервування. Згідно Марковицю, другий критерій класичної двокритеріальної задачі про оптимальний інвестиційний портфель має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i \sigma_{ij} W_j \to \min_{W}, \qquad (2)$$

де σ_{ij} – коваріація між $i-$тим та $j-$тим інвестиційними напрямками.

Векторно-матричний вигляд задачі є таким

$$\begin{cases} R^T \overline{W} \to \max\limits_{\overline{W}} \\ (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{W} \\ I^T \overline{W} = 1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}, \qquad (3)$$

де V – коваріацйна матриця; R – вектор розмірності $n \times 1$, координатами якого є $r_i - p_i$, $i = \overline{1,n}$; символ Т- знак транспонування. Сформульована вище задача є двокритеріальною із суперечливими критеріями. Як правило, для розв'язання такого типу задач застосовують методи, що дозволяють будувати множини розв'язків. Серед них виділимо суб'єктивно-орієнтований підхід з прийняття інвестиційних рішень, що ґрунтується на побудові та аналізі допустимої та ефективної множин, а також метод побудови Парето – оптимальної множини розв'язків. Маючи на меті побудову аналітичного розв'язку задачі, і, виходячи із практичних міркувань, перший критерій в (3) замінимо рівністю

$R^T \overline{W} = S$.

Тоді (3) матиме вигляд нелінійної задачі одномірної оптимізації при обмеженнях

$$\begin{cases} (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ R^T \overline{W} = S \\ I^T \overline{W} = 1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}, \qquad (4)$$

де S – бажаний рівень прибутку інвестиційної операції.

Застосуємо для її розв'язання метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа

$$L = (\overline{W})^T V \overline{W} + \lambda_1 (R^T \overline{W} - S) + \lambda_2 (I^T \overline{W} - 1)$$

містить два невідомі параметри λ_1 і λ_2 і задача полягає у визначенні елементів вектора $\overline{W}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{W}} = 2V\overline{W} + \lambda_1 R + \lambda_2 I,$$

$$\overline{W} = (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I). \qquad (5)$$

Параметри λ_1 та λ_2 визначимо із системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} R^T (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = S, \\ I^T (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = 1. \end{cases}$$

Із першого рівняння

$$-\lambda_1 R^T (2V)^{-1} R = S + \lambda_2 R^T (2V)^{-1} I,$$

$$-\lambda_1 = (R^T (2V)^{-1} R)^{-1}(S + -\lambda_2 R^T (2V)^{-1} I). \qquad (6)$$

Із другого рівняння

$$-\lambda_1 I^T (2V)^{-1} R = 1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I,$$

$$-\lambda_1 = (I^T (2V)^{-1} R)^{-1}(1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I). \qquad (7)$$

Прирівняємо (6) та (7)

$$(R^T(2V)^{-1}R)^{-1}(S+\lambda_2 R^T(2V)^{-1}I)= \\ (I^T(2V)^{-1}R)^{-1}(1+\lambda_2 I^T(2V)^{-1}I). \quad (8)$$

Отримали лінійне рівняння відносно λ_2. Розв'яжемо його і знайдене значення параметра λ_2 підставимо у (6) або (7) і визначимо λ_1.

Після підстановки визначених значень їх у (5) отримаємо шукані частки банківських інвестицій.

Для зменшення ризику портфеля часто банківські активи розподіляють не тільки серед ризикованих напрямків інвестування, але також і серед неризикованих. Прикладом такого вкладення ресурсів можуть бути державні та недержавні боргові зобов'язання, і це дозволяє ефективно диверсифікувати інвестиційний портфель.

Математична постановка задачі може бути такою

$$\begin{cases} R^T\overline{W}+R^0W^0 \to \max\limits_{\overline{W}} \\ (\overline{W})^T V\overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ I^T\overline{W}+W^0=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}, \quad (9)$$

де W^0 – сума коштів, що виділяються на інвестування у неризиковані цінні папери. Як і у випадку попередньої задачі, розглянемо однокритеріальну її постановку.

$$\begin{cases} (\overline{W})^T V\overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ R^T\overline{W}+R^0W^0=S \\ I^T\overline{W}+W^0=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}. \quad (10)$$

Функція Лагранжа

$$L=(\overline{W})^T V\overline{W}+\lambda_1(R^T\overline{W}+R^0W^0-S)+ \\ \lambda_2(I^T\overline{W}+W^0-1)$$

на відміну від попереднього випадку, містить додаткову невідому W^0.

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{W}}=2V\overline{W}+\lambda_1 R+\lambda_2 I=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial W^0}=\lambda_1 R^0+\lambda_2=0, \quad (11)$$

$$\overline{W}=(2V)^{-1}(-\lambda_1 R-\lambda_2 I).$$

$$\lambda_2=-\lambda_1 R^0. \quad (12)$$

Для визначення невідомих параметрів λ_1 та λ_2 скористаємось другим та третім рівняннями системи (10). Після підстановки в них λ_2 із (12) отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$R^0(1-I^T\overline{W}(\lambda_1))=S-R^T\overline{W}(\lambda_1),$$

що містить одне невідоме λ_1. Розв'яжемо його, підставимо λ_1 у (12) та визначимо λ_2. Тепер маємо можливість визначити оптимальні суми коштів, що можуть бути інвестовані у ризиковані та неризиковані проекти.

Як сказано раніше, поряд з наведеною вище задачею мінімізації ризику інвестиційної операції для заданого рівня прибутковості за умови обов'язкового резервування можна навести спряжену з нею задачу про максимізацію прибутку для заданого рівня ризику за умови обов'язкового резервування. Формальна постановка задачі оптимізації інвестиційного портфеля однорідної структури має такий вигляд

$$\begin{cases} R^T\overline{W} \to \max\limits_{\overline{W}} \\ (\overline{W})^T V\overline{W}=\tau \\ I^T\overline{W}=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases},$$

де τ - заданий допустимий рівень ризику. Цю задачу можна сформулювати і для випадку інвестиційного портфеля змішаної структури

$$\begin{cases} R^T\overline{W}+R^0W^0 \to \max\limits_{\overline{W},W^0} \\ (\overline{W})^T V\overline{W}=\tau \\ I^T\overline{W}+W^0=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}.$$

Підходи до розв'язання двох останніх задач можуть бути аналогічними застосованим вище.

Розглянута вище задача є цікавою та актуальною у сучасному банківському менеджменті, хоча більш глибокий її аналіз вказує на деякі важливі проблеми, що залишились поза увагою. Одним із таких важливих питань є питання про побудову очікуваної прибутковості інвестиційного напрямку. Це питання короткострокового прогнозування очікуваної прибутковості і для його розв'язання скористаємось динамічною моделлю формування ринкової вартості [2]. Відповідне звичайне диференціальне рівняння є

лінійним і заданим параметрично. Структура його відповідає структурі ринкової моделі Шарпа, а права частина враховує найбільш важливі фактори, що впливають на динаміку формування очікуваної прибутковості. У загальному вигляді воно може бути записано так:

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_0,\ t \in (t_0, T),\ i = \overline{1,n}.$$

Наведена система є лінійною, що задана параметрично, і для її інтегрування побудуємо процедуру визначення параметрів моделі α. Скористаємось при цьому відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних інвестиційних напрямків $\overline{r_i}(t)$.

На її основі розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для $i-$того напрямку інвестування і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0),\ r_i(t_0) = r_{i0},\ t \in (t_0, t_1).$$

Нехай розв'язком цієї задачі буде траєкторія

$$r_1(t),\ t \in (t_0, t_1).$$

Далі сформулюємо оптимізаційну задачу з метою отримання оптимального значення параметра α_1^*

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha}(r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r_i}(t))^2 \qquad (13)$$

або

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} \max_{t}(r^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r_i}(t))^2. \qquad (14)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, вище наведено процедуру ідентифікації параметрів динамічної математичної моделі оптимальних у розумінні критеріїв оптимальності (13) або (14).

Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах функціонування системи. На $k-$тому кроці алгоритму процедура визначення оптимальних значень параметрів динамічної моделі може бути такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}),\quad r_i(t_{k-1}) = r_{k-1}\quad t \in (t_{k-1}, t_k),\ i = \overline{1,n}.$$

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.
3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_{k-1}^* = arg \min_{\alpha}(r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^*) - \overline{r}_{k-1}(t))^2$$

або

$$\alpha_{k-1}^* = arg \min_{\alpha} \max_{t}(r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^*) - \overline{r}_{k-1}(t))^2,$$

розв'язком кожної з них буде значення параметра α_{k-1}^*, що переводить систему із точки r_{k-1} у точку r_k.

Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі, яка дозволяє моделювати поведінку та прогнозувати очікувану прибутковість інвестиційного напрямку r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу. Варто відмітити, що при розбитті інтервалу інтегрування на підінтервали необхідно враховувати також значення складових вектора станів системи для коректного застосування знайдених параметрів при розв'язанні відповідних траєкторних задач.

Таким чином, у роботі розглянуто деякі актуальні задачі математичного моделювання при управлінні банківськими активами, сформульовано нові постановки задач банківського інвестиційного менеджменту та побудовано процедури розв'язання деяких з них.

Список використаних джерел

1. Bublik B.N.,Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural and self-reactance optimization and stability of dynamics of bunches. -Kyiv, Naukova dumka, 1985. –304p. (in Russian).
2. Garashchenko F.G., Kulyan V.R., Rutitskaya V.V. Quality analysis of mathematical models of investment management. –Kyiv, //Cybernetics and computing engineering. – 2005. –N 148. –p.3-10. (in Russian).
3. Krylov I.A., Chernousko F.L. Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems. – Moskow, Nauka, 1971. –247p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 10.01.2013р.

УДК 004.89

Лиман К.С. м.н.с.

Моделі тематик в застосуванні до зняття семантичної неоднозначності

Задача визначення значення слова, з множини можливих значень – онтології, відома як зняття семантичної неоднозначності (WSD, Word Sense Disambiguation). Значення конкретного слова у тексті залежить від його контексту. Значною перевагою використання онтологій, є те, що в них описано відношення між поняттями.

В тематичних моделях, таких як LDA (Latent Dirichlet Allocation), документ представляється як вектор пропорцій тематик, а кожна тематика як розподіл над словами. Але для потреб WSD необхідно мати розподіл над значеннями слів, як наприклад в LDAWN (розширення LDA на WordNet). Але LDAWN не враховує значення семантичної схожості і пов'язаності між концептами. Тому було запропоновано тематичну модель пов'язаних концептів, одним з параметрів якої є взаємне «розташування» концептів задане матрицею пов'язаності.

Ключові слова: семантична неоднозначность, тематичні моделі, семантична схожість.

[1] Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем НАН України та МОН України, 03680 м.Київ Глушкова 40, e-mail: lyman.kostiantyn@gmail.com

Lyman K.S. researcher

Topic models application to word sense disambiguty

The problem of choosing a sense for a particular word from fixed set – ontology, is known as Word Sense Disambiguation (WSD). The main advantage of ontologies is that they contain information about semantic relationships among senses, although meaning of a word in a text depends on its context.

Within topic models, such as LDA(Latent Dirichlet Allocation), a document is presented as a vector of topic proportions, and each topic is a distribution over words. But for WSD purposes the distribution over senses is required, as for example in LDAWN (an extension of LDA over WordNet). Unfortunately, LDAWN does not taking into account a sematic similarity and relatedness estimations between concepts. That's why a topic model of related concepts was introduced, which has a matrix of relatedness as one of its parameters.

Key Words: word sense disambiguation, topic models, semantic similarity.

[1] International Research and Training Center for Information Technologies and Systems 03680, Kyiv, Glushkova st. 40, e-mail: lyman.kostiantyn@gmail.com

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Зняття семантичної неоднозначності (Word Sense Disambiguation, WSD) є класичною задачею комп'ютерної лінгвістики. Вона полягає в тому, що комп'ютерна система повинна вибрати з запропонованих правильне значення слова в даному контексті. Питання про те якою має бути множина цих значень, наскільки повною та детальною, і те як вона представляється є, напевне, одними з найпроблематичніших у сфері комп'ютерного семантичного аналізу та

© Лиман К.С.

інжинірингу знань. Проблема в тому, що люди, хоча і розуміють один одного, не зважаючи на різний мовленнєвий досвід, все таки не завжди відчувають різницю між різними значеннями слова[1]. То чи варто очікувати, що комп'ютер зможе краще? Виділяють два основні підходи до визначення значення слів [1]. Перший, назвемо його *дистрибутивним*, базується на факті, що смисл слова визначається його контекстом. Відомий приклад – вірш Jabberwocky Льюїса Керрола[2].

Інший підхід використовує задані наперед множини можливих значень слів, такі як словники, онтології чи бази знань, створені експертами які і визначають структуру та рівень деталізації семантики слів. Онтології зазвичай, не покривають всі можливі смисли та їх варіації, вони обмежуються або спеціальним доменом знань або деякою частиною загальновживаної лексики (як наприклад WORDNET [8]). Назвемо цей підхід *знання-залежним* (knowledge based). Використання таких джерел структурованої семантики має ту перевагу, що прописані взаємозв'язки між поняттями відображають певні знання експерта про предметну область, але їх створення та підтримання в актуальному стані є трудомісткою задачею.

Задача автоматичного визначення всіх можливих смислів кожного слова відома як Word Sense Induction, WSI [6]. Вона тісно пов'язана з WSD, але відрізняється від неї: в WSD ми знаємо множину понять і нашою задачею є обрати такий елемент цієї множини, що найкраще пасує до контексту. Натомість WSI представляється як задача розділення контексту цільового слова на кластери, кожен з яких відповідає певному смислу цього слова. Приклади таких систем описані в [10] та [6].

Моделі тематик (наприклад, Latent Dirichlet Allocation [4]) є генеративними імовірнісними моделями колекції документів D, тобто вони описують імовірнісний процес генерації спостережуваної колекції документів (задаючи розподіл $p(x|y)$, де x – спостереження, а y – приховані змінні): кожен документ є вектором пропорцій у просторі тематик отриманим з певного тематичного розподілу; тематики при цьому задаються певним розподілом у просторі всіх слів. Інформація закладена у тому яким чином слова сумісно зустрічаються дають змогу знайти такі параметри моделі, що отримані тематичні розподіли можна інтерпретувати саме як тематики. В останні роки з'являються багато робіт покликаних об'єднати WSD та моделі тематик. В цій статті буде розглянуто та проаналізовано одну з таких моделей - LDAWN [5], в якій тематичний розподіл включає розподіл над прихованими змінними, що відповідають синсетам WordNet. В [7], наприклад, розподіл над синсетами не залежить від тематики і слова генеруються або з тематики, або з синсета.

Більш детальний огляд сучасного стану справ в області зняття семантичної неоднозначності, а також огляд систем, підходів та результатів можна знайти в наступних оглядових роботах [12], [13] та збірнику [1].

LDAWN: Тематично-залежне випадкове блукання по онтології

В LDAWN тематика описується не поліноміальним розподілом над елементами словника, як в LDA, а випадковим блуканням по WordNet – WORDNET-WALK . Основною структурною одиницею WordNet є синсет – множина синонімів, об'єднаних певним значенням. Кожен синсет пов'язаний з іншим певними семантичними та лексичними відношеннями.

WORDNET-WALK це імовірнісний процес генерації слів, що використовує для цього гіпонімічні зв'язки[3] між синсетами у WordNet. Згідно [5], уявімо агента, що починає рух з синсету s_0 `entity` – кореня ієрархії іменників (організовану у вигляді таксономії). Агент обирає наступний вузол в своєму випадковому блуканні серед гіпонімів поточного концепту. Дана процедура повторюється поки не буде досягнуто листкового вузла, який відповідає певному слову. Вибір наступного синсету в блуканні визначається відповідним розподілом над множиною синсетів, яка є множиною прихованих випадкових змінних, розподіл яких впливає на

[1] Особливо враховуючи, те що погоджуються люди між собою теж не так часто: в експерименті з двома анотаторами, які виконували розмітку текстів значеннями з WORDNET, згода була досягнута лише в 72.5% випадках [13]

[2] У перекладі Інни Коваль (2004):

Шов печір. Яштпорки слибкі
В трамичці дзигали якраз
Свистали свердлов'ї бідкі
І звинки мрюкали весь час.

[3] Гіпоніми певного поняття є конкретизація ми цього поняття

процес генерації послідовності слів $p\left(\boldsymbol{w}^d \mid \boldsymbol{z}^d, \boldsymbol{\Lambda}^d\right)$.

Для позначення змінних, які приймають значення зі скінченної множини, будемо використовувати нотацію фіктивних змінних:

$$b \in \mathrm{A}: b = \mathrm{A}_a \Leftrightarrow b = a \Leftrightarrow b = \left(0_1, \ldots, 1_a, \ldots, 0_A\right) \quad (1)$$

де $A = \left|\mathrm{A}\right|$. Також замість $b \in \mathrm{A}$ іноді будемо писати $b \in 1:A$, при цьому запис $b = 1:A$ означає, що b послідовно приймає всі значення з A. Введемо наступні позначення:

- $\boldsymbol{w}^d = \left(w_1^d, \ldots, w_{N_d}^d\right)$ – вектор випадкових величин, що приймають значення зі словника V, і представляють документ розміром у N_d слів, $V = \left|\mathrm{V}\right|$;
- $\boldsymbol{z}^d = \left(z_1^d, \ldots, z_{N_d}^d\right)$ – вектор випадкових величин, значення яких вказують на одну з обраних для кожного слова тематик $z_i^d \in \mathrm{K}$, $K = \left|\mathrm{K}\right|$;
- $\boldsymbol{\Lambda}^d = \left(\Lambda_1^d, \ldots, \Lambda_{N_d}^d\right)$ – вектор шляхів від кореня онтології до синсета з якого було згенеровано відповідне слово. Кожен шлях Λ_i^d отримано з відповідного тематичного блукання, обраного згідно значення z_i^d.

Множину всіх синсетів позначимо S, $S = \left|\mathrm{S}\right|$.

LDAWN провадить наступний генеративний процес:

1) Для кожної тематики $t = 1:K$:
   a. Для кожного синсету $s \in \mathrm{S}$, обираємо розподіл переміщень $\boldsymbol{\beta}_s^t \sim \mathrm{Dir}^{c(s)}\left(\boldsymbol{\tau}_s\right)$ – імовірність переходу від s до i-того гіпоніма c_i^s.
2) Для кожного документу $\boldsymbol{w}^d \in \mathrm{D}$, $d = 1:D$:
   a. Обираємо тематичний розподіл $\boldsymbol{\theta}^d \sim \mathrm{Dir}^{\mathrm{K}}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$;
   b. Для кожного слова w_u^d, $u = 1:N_d$:
      i. Обираємо тематику $z_u^d \sim \mathrm{Mult}^K\left(1, \boldsymbol{\theta}^d\right)$;
      ii. Будуємо шлях Λ_n^d який починається в кореневому вузлі λ_0.
      iii. Серед нащадків λ_i:
         1. Обираємо наступний вузол у блуканні $\lambda_{i+1} \sim \mathrm{Mult}^{\mathrm{c}(\lambda_i)}\left(1, \boldsymbol{\beta}_{\lambda_i}^{z_n^d}\right)$;
         2. Якщо λ_{i+1} є листковим вузлом, то генеруємо відповідне слово. Інакше повторюємо.

де $\mathrm{Dir}^X\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$ – X-вимірний розподіл Діріхле, $\mathrm{Mult}^{\mathrm{X}}(1, \boldsymbol{\theta})$ – X-значний поліноміальний розподіл з однією спробою, а $c\left(s\right)$. – множина нащадків (гіпонімів) синсету s.

Прихованими змінними цієї моделі є параметри K різних тематичних випадкових блукань WORDNET-WALK $\boldsymbol{\beta}_{1:K}^t$, вектор пропорції тематик у документі $\boldsymbol{\theta}^d$, вектор змінних $\boldsymbol{z}^d$, що визначають тематику для кожного слова, а також шлях у онтології для кожного слова $\boldsymbol{\Lambda}^d$.

Для даної колекції документів $\boldsymbol{w}_{1:D}$ повна апостеріорна імовірність прихованих параметрів:

$$p\left(\boldsymbol{\beta}_{1:D}, \boldsymbol{z}_{1:D}, \boldsymbol{\theta}_{1:D}, \boldsymbol{\Lambda}_{1:D} \mid \boldsymbol{w}_{1:D}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}\right) \propto$$
$$\propto \prod_{t=1}^{K} p\left(\boldsymbol{\beta}_t \mid \boldsymbol{\tau}\right) \prod_{d=1}^{D} p\left(\boldsymbol{\theta}_d \mid \alpha\right) \times$$
$$\times \prod_{u=1}^{N_d} p\left(w_u^d \mid \Lambda_u^d\right) p\left(\Lambda_u^d \mid \boldsymbol{\beta}_{z_u^d}\right) p\left(z_u^d \mid \boldsymbol{\theta}_d\right) \quad (2).$$

Тепер задачу визначення значення слова можна поставити наступним чином: яка імовірність, що слово w_u^d було отримано зі шляху, що закінчується синсетом s. Тобто потрібно отримати апостеріорний розподіл прихованих змінних.

Інтуїтивне припущення, на якому базується LDAWN, полягає в тому, що слова однієї тематики семантично близькі і тому будуть поділяти шляхи в WORDNET. При спостереженні певного синсета s (збільшується імовірність спостерігати далі синсети, чиї геренеруючі шляхи мають спільні вузли з аналогічним шляхом для s, тобто мають спільних пращурів.

Нехай апріорне значення $\tau_{s,c}$ імовірності переходу від синсету s до його нащадка c є пропорційним загальній кількості спостережуваних слів, які є нащадками c [5]. В цьому випадку отримаємо імовірнісну інтерпретацію поняття ІНФОРМАЦІЙНОГО КОНТЕНТУ [14].

$$IC(s) = -\ln p(s) \qquad (3)$$

Де $p(s)$ імовірність зустріти s або одного з його нащадків. Цю величину можна оцінити наступним чином

$$\hat{p}(s) = \frac{\left|w \in d : \text{cover}(s, w)\right|}{N_d} \qquad (4)$$

тобто яка частина слів документу D покривається синсетом s (слово w покривається синсетом s, $cover(w,s) = True$, якщо w входить до s або будь-якого його нащадка).

Апостеріорний розподіл для LDAWN

Обчислення апостеріорного розподілу прихованих параметрів пов'язано з інтегруванням по всіх можливих значеннях цих параметрів (для обчислення граничного розподілу спостережуваних даних). Тому на практиці використовуються методи Monte Carlo Markov Chains (MCMC). Одним з них є Гіббсівське семплювання[4]. Для записати умовну імовірність одного елементу вектору випадкових величин, від фіксованих значень решти елементів, таким чином одночасно переміщуючись тільки в одному напрямку.

В LDAWN для кожного слова w_u^d в кожному документі семплюється призначення тематики z_u^d і тематично-залежний шлях через WordNet Λ_u^d. Для обох змінних потрібно обчислити умовний розподіл від спостережуваних даних. Призначення тематики та шляху семплються спільно, при умовній залежності від значень прихованих змінних обраних для всіх інших слів. Запишемо апостеріорний розподіл тематик і шляхів:

$$p\left(z_u^d = t, \Lambda_u^d = \pi \mid \boldsymbol{z}_{-u}^d, \boldsymbol{\Lambda}_{-u}^d, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}\right) = \underbrace{p\left(z_u^d = t \mid \boldsymbol{z}_{-u}^d, \boldsymbol{\alpha}\right)}_{\text{тематика}} \underbrace{p\left(\Lambda_u^d = \pi \mid z_u^d = t, \boldsymbol{\Lambda}_{-u}^{d,t}, \boldsymbol{\tau}\right)}_{\text{шлях}} \qquad (5)$$

Позначимо $n_{-u}^{d,t}$ кількість слів відмінних від u, яким було призначено тематику t в документі d, якому слово w_u належить. Також, нехай $b_{-u}^{t,s,c}$ позначає кількість переходів в випадковому блуканні t-тої тематики від синсету s до його нащадка c, не враховуючи при цьому шлях π пов'язаний зі словом u, тобто кількість переходів від s до c у шляхах $\boldsymbol{\Lambda}_{-u}^{d,t}$. Розглянемо перший множник (імовірність тематики) спільного розподілу:

$$\begin{aligned} &p\left(z_u^d = t \mid \boldsymbol{z}_{-u}^d, \boldsymbol{\alpha}\right) = \\ &= \int_\theta p_{Mult}\left(z_u^d = t \mid \boldsymbol{\theta}\right) p_{Dir}\left(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{z}_{-u}^d, \boldsymbol{\alpha}\right) d\boldsymbol{\theta} = \\ &= \int_\theta \theta_t \frac{\Gamma\left(\sum_{k=1}^K \left[n_{-u}^{d,k} + \alpha_k\right]\right)}{\prod_{k=1}^K \Gamma\left(n_{-u}^{d,k} + \alpha_k\right)} \prod_{k=1}^K \theta_k^{n_{-u}^{d,k} + \alpha_k - 1} d\theta = \\ &= \frac{\Gamma\left(\sum_{k=1}^K \left(n_{-u}^{d,k} + \alpha_k\right)\right)}{\prod_{k=1}^K \Gamma\left(n_{-u}^{d,k} + \alpha_k\right)} \int_\theta \theta_t \prod_{k=1}^K \theta_k^{n_{-u}^{d,k} + \alpha_k - 1} d\theta \end{aligned} \qquad (6)$$

Нехай $\tilde{n}_{d,k} = n_{-u}^{d,k}$ для $k \neq t$ і $\tilde{n}_{d,k} = n_{-u}^{d,k} + 1$ для $k = t$. Тоді, враховуючи рівність $\int_\theta \prod_{k=1}^K \theta_k^{\alpha_k - 1} = \frac{\prod_{k=1}^K \Gamma(\alpha_k)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k\right)}$ отриману з визначення розподілу Діріхле і властивість Гамма-функції $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, отримуємо вираз (7) для імовірності тематики.

$$\begin{aligned} &p\left(z_u^d = t \mid \boldsymbol{z}_{-u}^d, \boldsymbol{\alpha}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\sum_{k=1}^K \left[n_{-u}^{d,k} + \alpha_k\right]\right)}{\prod_{k=1}^K \Gamma\left(n_{-u}^{d,k} + \alpha_k\right)} \times \frac{\prod_{k=1}^K \Gamma\left(\tilde{n}_{d,k} + \alpha_k\right)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^K \left[\tilde{n}_{d,k} + \alpha_k\right]\right)} = \\ &= \frac{n_{-u}^{d,t} + \alpha_t}{\sum_{k=1}^K \left[n_{-u}^{d,k} + \alpha_k\right]} \end{aligned} \qquad (7)$$

Аналогічним чином, розкривається другий множник. Зазначимо, що в цьому випадку доречніше було б писати $\boldsymbol{\Lambda}_{-\pi}^d$ замість $\boldsymbol{\Lambda}_{-u}^d$, щоб

[4] Семплювання – процес отримання зразків деякої випадкової величини.

підкреслити те, що беремо всі шляхи окрім π – шляху, що веде від вершини онтології до слова w_u, але для однорідності нотації продовжимо використовувати Λ_{-u}^d, пам'ятаючи про альтернативне написання. Запишемо (8) – імовірність шляху $\pi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_L\}$, що дорівнює добутку по всім переходам шляху, $|\pi| = L$, $\lambda_i \in \mathrm{S}$:

$$p\left(\Lambda_u^d = \pi \mid z_u^d = t, \Lambda_{-u}^d, \tau\right) = \prod_{l=0}^{L-1} \frac{b_{-u}^{t,\lambda_i,\lambda_{i+1}} + \tau_{\lambda_i,\lambda_{i+1}}}{\sum_{c=1}^{C_{\lambda_i}} \left[b_{-u}^{t,\lambda_i,c} + \tau_{\lambda_i,c} \right]} \quad (8)$$

Отже, отримаємо спільний розподіл призначення тематики і вибору шляху за умови зафіксованих тематик і шляхів для решти слів документу:

$$p\left(z_d^u = t, \Lambda_d^u = \pi | \boldsymbol{z}_d^{-u}, \boldsymbol{\Lambda}_d^{-u}, \tau, \alpha\right) \propto \frac{n_{-u}^{d,t} + \alpha_t}{\sum_{k=1}^{K} \left[n_{-u}^{d,k} + \alpha_k \right]} \left(\prod_{l=0}^{L-1} \frac{b_{-u}^{t,\lambda_i,\lambda_{i+1}} + \tau_{\lambda_i,\lambda_{i+1}}}{\sum_{c=1}^{C_{\lambda_i}} \left[b_{-u}^{t,\lambda_i,\lambda_{i+1}} + \tau_{\lambda_i,c} \right]} \right) \quad (9)$$

Схожість та пов'язаність

Як було сказано вище, для гіперпараметрів τ апріорними значеннями обираються значення їх інформаційного контенту, що у [14] було використано для визначення семантичної схожості синсетів наступним чином:

$$sim_{RES}\left(s,c\right) = IC\left(LCS\left(s,c\right)\right)$$

де $LCS\left(s,c\right)$ – найближчий спільній родовий вузол синсетів s та c, тобто такий предок s та c, що має мінімальну кількість вузлів у шляхах від нього до s та c, відповідно. Інший приклад [10]:

$$sim_{LIN}\left(s,c\right) = \frac{2 \times IC\left(LCS\left(s,c\right)\right)}{IC\left(s\right) + IC\left(c\right)}$$

Leacock Claudia та Chodorow Martin в [8] застосували ідею, що чим більша відстань між двома поняттями на графі онтології, тим менш вони семантично схожі:

$$sim_{LCH}\left(s,c\right) = -\log \frac{minPath\left(s,c\right)}{2D}$$

де D – діаметр таксономії, а $minPath\left(s,c\right)$ – довжина найкоротшого шляху між s та c.

Третій підхід до визначення семантичної схожості було запропоновано у [9], який базується на простій ідеї: чим більше спільних слів у словниковому описі двох понять, тим більше вони семантично схожі. Деякі результати порівняння цих методів і суджень людей про схожість слів можна знайти в [2].

Центральною проблемою з оцінкою семантичної схожості двох понять чи слів є визначення того, що ми розуміємо під схожістю. В літературі часто виділять два поняття: схожості і пов'язаності. Два концепти можуть бути просто семантично пов'язаними, наприклад «двигун» і «коробка передач», тобто зустрівши одне з цих понять, зустріч іншого не буде несподіванкою. Але при цьому не можна сказати, що «двигун» і «коробка передач» у чомусь схожі, принаймні не більше ніж «двигун» і «мотор». Остання пара слів, взагалі кажучи є синонімами і це нам вказує на основну властивість схожості: схожі сутності в деякому контексті взаємозамінні . Зауважимо, для наведених мір «схожості» важко визначити чим вони є насправді мірами схожості чи пов'язаності, тому будемо розглядати вихід цих методів як оцінку семантичної пов'язаності.

Уявімо документ не як набір слів $\boldsymbol{w}^d = \left(w_1^d, \ldots, w_N^d\right)$, $w_i^d \in \mathrm{V}$, а як набір синсетів $\boldsymbol{c}^d = (c_1^d, \ldots, c_N^d)$, $c_i^d \in \mathrm{S}$. Тобто, у випадку LDAWN генеративний процес зупиняється, не генеруючи слів.

Тоді, виходячи з попередніх аргументів, семантична пов'язаність двох синсетів s_m та s_h пропорційна імовірності їх одночасної появи у певному контексті. Тобто, імовірності того, що випадкові величини c_u^d та c_v^d одночасно приймуть значення s_m та s_h в документі d. При цьому розглядаємо лише одну певну тематику t :

$$rel_{d,t}\left(s_m, s_h\right) = p\left(c_u^d = s_m, c_v^d = s_h \mid \boldsymbol{c}_{-u,v}^d\right) = \quad (10)$$
$$= p_{LDAWN}\left(\Lambda_u^d = \pi_m \mid \Lambda_{-u}^d, \boldsymbol{z}_u = t\right) \times$$
$$\times p_{LDAWN}\left(\Lambda_v^d = \pi_h \mid \boldsymbol{\Lambda}_{-u,v}^d, \boldsymbol{z}_v = t\right) =$$
$$= \prod_{j=0}^{L_m - 1} p_t\left(\lambda_{j+1}^m \mid \lambda_j^m, \boldsymbol{\Lambda}_{-u}^d\right) \prod_{j=0}^{L_h - 1} p_t\left(\lambda_{j+1}^h \mid \lambda_j^h, \boldsymbol{\Lambda}_{-u,v}^d\right)$$

де, згідно з результатом (8) для апостеріорного розподілу шляхів Λ_u^d :

$$\prod_{j=0}^{L_m-1} p_t\left(\lambda_{j+1}^m \mid \lambda_j^m, \boldsymbol{\Lambda}_{-u}^d\right) = \prod_{j=0}^{L_m-1} \frac{b_{-u,v}^{t,\lambda_j^m,\lambda_{j+1}^m} + \tau_{\lambda_j^m,\lambda_{j+1}^m}}{\sum_{c=1}^{C_{\lambda_j^m}} \left[b_{-u,v}^{t,\lambda_j^m,c} + \tau_{\lambda_j^m,c} \right]} \quad (11)$$

Другий множник (10) розкладається аналогічно. Введемо наступні позначення: $\pi_{m,h} = \pi_m \cap \pi_h = \left\{\lambda_0 = s_0, ..., \lambda_{m,h} = LCS\left(s_m, s_h\right)\right\}$ та $\pi_{m\setminus h} = \pi_m \setminus \pi_h = \left\{\lambda_{m\setminus h} = LCS\left(s_m, s_h\right), ..., \lambda_{L_m} = s_m\right\}$, $\pi_{h\setminus m}$ аналогічно. Тоді:

$$rel_{d,t}\left(s_m, s_h\right) = p\left(\pi_{m,h} \mid \boldsymbol{\Lambda}_{-u,v}^d\right)^2 p\left(\pi_{m\setminus h} \mid \boldsymbol{\Lambda}_{-u}^d\right) p\left(\pi_{h\setminus m} \mid \boldsymbol{\Lambda}_{-u,v}^d\right) \quad (12)$$

Відмітимо, що для отримання граничної пов'язаності s_m та s_h потрібно просумувати по всіх можливих шляхах до цих синсетів та всіх контекстах $d = 1:D$.

Тематична модель пов'язаних концептів

Як було показано вище, апостеріорна імовірність вибору певного синсету $p_t\left(c_u^d = s_m \Leftrightarrow \Lambda_u^d = \pi_m \mid \boldsymbol{\Lambda}_{-u}^d\right)$ в LDAWN, а також сумісний розподіл двох синсетів $p_t\left(c_u^d = s_m, c_v^d = s_h \mid \boldsymbol{\Lambda}_{-u,v}^d\right) = rel_t\left(s_m, s_h\right)$ залежить лише від кількості спостережуваних переходів у тематичному випадковому блуканні між синсетами, що входять до шляхів π_m та π_h.

Наявність чи відсутність сиблінгів синсету s (вузлів таксономії того ж рівня, що і s) не впливає на його розподіл. Тому розглянемо наступну генеративну тематичну модель, в якій буде можливо врахувати інформацію про «відстані» між синсетами, що обчислюються за допомогою мір схожості таких як LIN чи LESK.

Розіб'ємо множину синсетів S на рівні: $\mathrm{S}_\delta = \left\{s \in \mathrm{S} : depth\left(s\right) = \delta, \delta = 0:\Delta\right\}$

Генеративний процес:

1) Для кожної тематики $t \in 1:K$
   a. Для кожного рівня $\delta = 0:\Delta$ обираємо розподіл для множини випадкових величин, що відповідають синсетам, $\boldsymbol{s}_\delta^t \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{s}_\delta \mid \boldsymbol{\mu}_\delta^t\left(\boldsymbol{\mu}_{\delta-1}^t\right), \boldsymbol{\Sigma}_\delta\right)$, де $\boldsymbol{\Sigma}_\delta$ – матриця коваріацій, чиє апріорне значення відповідає rel_δ – матриці попарних схожостей синсетів рівня δ, а $\boldsymbol{\mu}_\delta$ – вектор середніх значень синсетів рівня δ, що в загальному випадку залежить від $\boldsymbol{\mu}_{\delta-1}$: чим більше $\mu_{\delta-1,s}$ тим більші $\mu_{\delta,c}$, де c є нащадком s : $c \in c\left(s\right)$.
2) Для кожного документу $\boldsymbol{w}^d \in \mathrm{D}$, $d = 1:D$:
   a. Обираємо тематичний розподіл $\boldsymbol{\theta}^d \sim \mathrm{Dir}^K\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$.
   b. Обираємо розподіл рівнів $\boldsymbol{G}^d \sim \mathrm{Dir}^\Delta\left(\boldsymbol{\gamma}\right)$.
   c. Для кожного слова w_u^d , $u = 1:N_d$:
      i. Обираємо тематику $z_u^d \sim \mathrm{Mult}^{\mathrm{K}}\left(1, \boldsymbol{\theta}^d\right)$
      ii. Обираємо рівень $g_u^d \sim \mathrm{Mult}^{\Delta}\left(1, \boldsymbol{G}^d\right)$
      iii. Обираємо синсет $c_u^d \sim Mult^S\left(1, \sigma\left(\boldsymbol{s}_{g_u}^{z_u} \mid \boldsymbol{\mu}_{g_u}^{z_u}, \boldsymbol{\Sigma}_{g_u}^{z_u}\right)\right)$
      iv. Генеруємо слово w_u^d з обраного синсету c_u^d .

де $\sigma_i\left(\boldsymbol{\alpha}\right) = \frac{\exp\left(\alpha_i\right)}{\sum_j \exp\left(\alpha_j\right)}$ – softmax функція, яка приймає значення в інтервалі $\left[0;1\right]$. Тобто імовірність, що u-те слово буде згенеровано з m-того синсету s_m:.

$$p\left(c_u^d = s_m \mid \mu_\delta^t, \Sigma_\delta^t\right) = \sigma_m\left(\boldsymbol{s}_\delta^t \mid \boldsymbol{\mu}_\delta^t, \boldsymbol{\Sigma}_\delta^t\right) \quad (13)$$

Повна апостеріорна імовірність прихованих параметрів:

$$p\left(\boldsymbol{\theta}^d, \boldsymbol{G}^d, \boldsymbol{g}^d, \boldsymbol{z}^d, \boldsymbol{c}^d, \boldsymbol{s}^d, \boldsymbol{\mu}^d \mid \boldsymbol{w}^d, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}\right) = \frac{p\left(\boldsymbol{w}^d \mid \boldsymbol{\theta}^d, \boldsymbol{G}^d, \boldsymbol{g}^d, \boldsymbol{z}^d, \boldsymbol{c}^d, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}\right)}{\int_{\theta,G,g,s,c,z} p\left(\boldsymbol{w}^d \mid \boldsymbol{\theta}^d, \boldsymbol{G}^d, \boldsymbol{g}^d, \boldsymbol{z}^d, \boldsymbol{c}^d, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}\right)} \quad (14)$$

Запишемо функцію правдоподібності для документу $\boldsymbol{w}^d$:

$$\begin{aligned} &p\left(\boldsymbol{w}^d \mid \boldsymbol{\theta}^d, \boldsymbol{G}^d, \boldsymbol{g}^d, \boldsymbol{z}^d, \boldsymbol{c}^d, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}\right) = \\ &= p\left(\boldsymbol{\theta}^d \mid \boldsymbol{\alpha}\right) p\left(\boldsymbol{G}^d \mid \boldsymbol{\gamma}\right) \times \\ &\times \prod_{t=1}^{K} p\left(\boldsymbol{s}^t \mid \boldsymbol{\mu}^t, \boldsymbol{\Sigma}^t\right) \prod_{u=1}^{N_d} p\left(w_u^d \mid c_u^d\right) \times \\ &\times p\left(c_u^d \mid \sigma\left(\boldsymbol{s}_{g_u}^{z_u}\right)\right) p\left(g_u^d \mid \boldsymbol{G}^d\right) p\left(z_u^d \mid \boldsymbol{\theta}^d\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Вивід апостеріорного розподілу для рівнів $\boldsymbol{g}^d$ і пропорції рівнів $\boldsymbol{G}^d$, схожий на такий для тематик $\boldsymbol{z}^d$ та пропорцій тематик у документі $\boldsymbol{\theta}^d$, бо вони мають однакову структуру розподілу: $p_{\text{Mult}}\left(y \mid \boldsymbol{\theta}\right) p_{\text{Dir}}\left(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\alpha}\right)$. Для пропорції рівнів легко отримати оцінку максимальної правдоподібності $\hat{G}_\delta = \frac{n_\delta}{N_d}$, де n_δ – кількість спостережуваних синсетів рівня δ.

Розглянемо вивід для розподілу синсетів при фіксованій тематиці t. Нехай ми спостерігаємо документ у вигляді синсетів $\boldsymbol{c}^d = \left(c_1^d, \ldots, c_{N_d^t}^d\right)$, $c_i \in \mathrm{S} : c_i = \mathrm{S}_m \Leftrightarrow c_i = \left(0_1, \ldots, 1_m, \ldots, 0_S\right)$; верхній індекс t в N_d^t використано, щоб підкреслити, що розглядаються лише ті синсети для яких було обрано тематику t, але далі опустимо цей індекс, щоб спростити запис. Згідно опису моделі

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^d \sim \text{Mult}\left(N_d, \sigma\left(\boldsymbol{s}\right)\right) = \\ &= \frac{N_d!}{c^{(1)}! c^{(2)}! \ldots c^{(S)}!} p_1^{c^{(1)}} \cdot p_2^{c^{(2)}} \cdot \ldots \cdot p_S^{c^{(S)}} \end{aligned} \quad (16)$$

де $p_m = \sigma\left(s_m\right)$, а $c^{(m)}$ – кількість таких c_u^d, що $c_u^d = s_m$. Пригадаємо, що $\boldsymbol{s} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$ і тоді апостеріорний розподіл синсетів:

$$p\left(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{c}\right) = \frac{p\left(\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{s}\right) p\left(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)}{\int_{\boldsymbol{s}} p\left(\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{s}\right) p\left(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)} \quad (17)$$

Цей інтеграл не обчислюється аналітично, із-за входження softmax-фнукції, тому апроксимуємо його методом Лапласа нормальним розподілом $q\left(\boldsymbol{s}\right)$. Для цього запишемо логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\begin{aligned} &L = -\ln p\left(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{c}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} \left(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\mu}\right) - \\ &\quad - \sum_{u=1}^{N_d} \sum_{m=1}^{S} c_u^m \ln \sigma\left(s_m\right) + const \end{aligned} \quad (18)$$

Тепер розглянемо першу і другу похідну другого доданку:

$$\begin{aligned} &\nabla_{s_j} \left(\sum_{m=1}^{S} c^{(m)} \ln \sigma\left(s_m\right) \right) = \\ &= -\sum_{m=1}^{S} c^{(m)} \left(I_{m,j} - \sigma\left(s_j\right) \right) \\ &= \begin{cases} N_d \sigma(s_j) & , m \neq j \\ N_d \sigma(s_j) - c^{(m)} & , m = j \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\nabla_{s_k} \nabla_{s_j} L = \nabla_{s_k} \left(-\sum_{m=1}^{S} c^{(m)} \left(I_{m,j} - \sigma\left(s_j\right) \right) \right) = \\ &= N_d \nabla_{s_k} \sigma\left(s_j\right) = N_d \sigma\left(s_j\right) \left(I_{j,k} - \sigma\left(s_k\right) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Тоді:

$$\nabla\nabla L = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + N_d \left(\sigma\left(\boldsymbol{s}\right) I - \sigma\left(\boldsymbol{s}\right) \sigma^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{s}\right) \right) \quad (21)$$

Тепер можемо записати апроксимуючий розподіл $q\left(\boldsymbol{s}\right)$ [3]:

$$q\left(\boldsymbol{s}\right) = \mathrm{N}\left(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{\mu}_{MAP}, \boldsymbol{\Sigma}_N\right) \quad (22)$$

де $\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} = \nabla\nabla L$, а $\boldsymbol{\mu}_{MAP}$ максимальна апостеріорна оцінка, яку можна отримати з ∇L.

Розглянемо тепер дві випадкові величини c_u^d та c_v^d, що відповідають u-тому та v-тому слову і мають значення s_m та s_h відповідно. Нехай для них було обрано однакову тематику $z_u^d = t$, $z_v^d = t$, і обрано рівні $g_u^d = \delta_u$ та $g_v^d = \delta_v$ відповідно. Запишемо вираз для пов'язаності синсетів s_m та s_h, тобто сумісний розподіл

$p_t\left(c_u^d = s_m, c_v^d = s_h \mid \boldsymbol{\mu}^d, \boldsymbol{\Sigma}\right)$, де $\boldsymbol{\mu}^d$ – апостеріорне значення середніх для розподілу синсетів, $\boldsymbol{s}^d \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\mu}^d, \boldsymbol{\Sigma}\right)$ після спостереження частини документу $\boldsymbol{w}_{-u,v}^d$, тобто контексту для c_u^d я u та v:

$$rel_{d,t}\left(s_m, s_h\right) = p_t\left(c_u^d = s_m, c_v^d = s_h \mid \boldsymbol{\mu}^d, \boldsymbol{\Sigma}^d\right) \approx \approx \sigma\left(s_m\right)\sigma\left(s_h\right) q\left(\boldsymbol{s}^d \mid \boldsymbol{\mu}^d, \boldsymbol{\Sigma}^d\right) \quad (23)$$

де $\left(\boldsymbol{\Sigma}^d\right)^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \left(N_d - 2\right)\left(\sigma\left(\mathbf{s}\right) I - \sigma\left(\mathbf{s}\right)\sigma^T\left(\mathbf{s}\right)\right)$

Висновок

Таким чином, в запропонованій моделі дистрибутивна пов'язаність прямо залежить від значення структурної пов'язаної – матриці Σ.

Список використаних джерел

[1] *E.Agirre, P.Edmonds* Word Sense Disambiguation: Algorithms and Applications. - Dordrecht, Netherlands : Springer, 2006. - p. 388.

[2] *Anisimov A.V., Lyman K.S., Marchenko O.O.* The computational methods for the semantic proximity measures of natural language words // Artificial Intelligence (Штучний інтелект). - 2010. - 3. - pp. 170-176.

[3] *Christopher M. Bishop* Pattern recognition and Machine learning. - : Springer, 2006.

[4] *D.Blei, A.Ng, M. Jordan* Latent dirichlet allocation // Journal of Machine Learning Research. - : JMLR.org, 2003. - cc. 993-1022.

[5] *J. Boyd-Graber, D.Blei, X. Zhu* A topic model for word sense disambiguation // Proceedings of the 2007 Joint Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and Computational Natural Language Learning (EMNLP-CoNLL). - 2007. - pp. 1024-1033.

[6] *S. Brody, M.Lapata* Bayesian word sense induction // Proceedings of the 12th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics. - : Association for Computational Linguistics, 2009. - стр. 103-111.

[7] *C.Chemudugunta et al.* Modeling Documents by Combining Semantic Concepts with Unsupervised Statistical Learning // The Semantic Web - ISWC 2008 - Berlin : Springer, 2008. - Vol. 5318.

[8] *C.Fellbaum ed.* WordNet: an electronic lexical database.. - Cambridge, MA : The MIT Press, 1998.

[9] *M.Lesk* Automatic sense disambiguation using machine readable dictionaries: How to tell a pine cone from a ice cream cone. // Proceedings of SIGDOC '86.. - 1986. - стр. 24-26.

[10] *D.Lin* Automatic retrieval and clustering of similar words // Proceedings of COLING-ACL 98. - Montreal, Canada :, 1998.

[11] *D.McCarthy* Word Sense Disambiguation: An Overview // Language and Linguistics compass. - : Wiley Online Library, 2009 - 2 : Vol. 3. - стр. 537-558.

[12] *R.Navigli* Word Sense Disambiguation: A Survey // ACM Computing Surveys (CSUR). - : ACM, 2009. - 2 : Vol. 41. - pp. Article 10.

[13] *B.Snyder, M.Palmer* The English all-words task // Proceedings of the ACL senseval-3 workshop. - Barcelona, Spain : ACL, 2004. - стр. 41-43.

[14] *P.Resnik* Using Information Content to Evaluate Semantic Similarity in a Taxonomy // Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence. - 1995. - pp. 448-453.

Надійшла до редколегії 12.02.2013

УДК 519.21

Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

Двокритеріальна задача розподілу зовнішнього навантаження для мережі з періодичною інтенсивністю вхідного потоку

Для багатоканальної мережі з періодичним зовнішнім навантаженням розглянуто задачу максимізації середнього прибутку та мінімізації величини ризику. В явному вигляді, через параметри моделі знайдені цільові функції оптимізаційної задачі і показано, що вони є лінійними відносно контрольваних параметрів.

Ключові слова: мережа, оптимізаційна задача, періодична інтенсивність, процес обслуговування, інтегральне рівняння.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: iamak@ukr.net

I.A. Makushenko, Ph.D.

Two-criterion problem of distribution of external load for the network with periodic rate of the input flow

The problem of maximization of average income and risk minimization for the multi-channel network with periodic external load is considered. The goal functions of optimization problem are found via system parameters in explicit form. It is shown that the goal functions are linear over controlled parameters.

Key Words: network, optimization problem, periodic rate, service process, integral equaption.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: iamak@ukr.net

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

1. Вступ

Моделювання мереж передачі даних, інформаційно-обчислювальних мереж і систем є потужним засобом дослідження характеристик їх роботи, який дозволяє знаходити пропускну спроможність, затримки в обробці інформації, виявляти резерви по завантаженню різних пристроїв, обирати об'єм буферної пам'яті, параметрів управління інформаційними потоками в мережі. На сьогоднішній день теорія стохастичних мереж є одним з основних перспективних напрямків моделювання систем мережевої структури. Тісний зв'язок з практикою весь час розширює клас моделей мережевої структури і цим обумовлюється інтенсивний розвиток теорії стохастичних мереж.

Важливим класом задач у дослідженні стохастичних мереж є оптимізаційні задачі пов'язані з розподілом інформаційних потоків, вибором пропускних спроможностей і топологічної структури мережі. Розв'язки таких задач надають можливість вирішувати практичні задачі управління ресурсами інформаційно-обчислювальних мереж та мереж зв'язку. Сучасний стан досліджень в цій області представлено в роботах [1], [2].

Тема даної роботи пов'язана з проблемою оптимального поділу між вузлами мережі зовнішнього навантаження. Її можна віднести до згаданих вище оптимізаційних задач першого типу. У роботі для багатоканальної стохастичної мережі з періодичним зовнішнім навантаженням розглянуто задачу оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі як середній прибуток від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку.

Розглянемо мережу обслуговування, яка складається з *"r"* однотипних обслуговуючих вузлів. На обслуговуючі вузли надходить один зовнішній неоднорідний пуассонівський потік вимог $v(t)$ інтенсивності $\lambda(t)$, яка є періодичною функцією з періодом T. Вимога, що надійшла на вхід мережі, з ймовірністю q_i, $i=1,2,...,r$ $(q_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} q_i = 1)$ надходить на обслуговування в "i" вузол. Для обслуговування вимоги в і-ому вузлі є необмежена кількість обслуговуючих приладів. Час обслуговування розподілений за показниковим законом з параметром μ_i. Після завершення обслуговування в і-ому вузлі вимога з ймовірністю p_{ij} надходить на обслуговування у j-ий вузол та з ймовірністю $p_{ir+1} = 1 - \sum_{j=1}^{r} p_{ij}$

© І.А. Макушенко, 2012

залишає мережу. Матрицю $P = \|p_{ij}\|_1^r$ будемо називати матрицею маршрутизації мережі. Мережі такого типу для зручності будемо позначати через $[M_t \mid M \mid \infty]^r$.

Основною метою роботи є вибір такого управління q_i, $i = 1,2,...,r$ вхідним потоком, яке б максимізувало середній прибуток і мінімізувало величину ризику на періоді *T*.

2. Постановка оптимізаційної задачі

Розглянемо процес обслуговування вимог у $[M_t \mid M \mid \infty]^r$ - мережі. Через $X_i(t)$, $i = 1,2,...,r$ будемо позначати кількість зайнятих приладів у *i*-ому вузлі в момент часу *t*. Процес $X(t) = (X_1(t), X_2(t),..., X_r(t))$ приймає значення у фазовому просторі $S = \{\alpha = (\alpha_1,...\alpha_r): \alpha_i \in Z^+, i = 1,2,...,r\}$, $Z^+ = \{0,1,2,...\}$ і є ланцюгом Маркова з неперервним часом. У подальшому будемо вважати, що $X(0) = (0,0,...,0)$, тобто у початковий момент часу $t = 0$ мережа порожня. На процесі $X(t), t \geq 0$ визначимо адитивний функціонал $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t),..., Y_r(t))$, де $Y_i(t)$, $i = 1,2,...,r$ - число вимог, обслуговування яких завершилося в *i*-ому вузлі за час t. Будемо вважати, що $\lambda(t), \mu_i, i = 1,2,...,r, P$ - задані, а вибір вектора $q = (q_1,...,q_r)$ знаходиться в нашому розпорядженні.

Перейдемо до постановки оптимізаційної задач.

Нехай c_i, $i = 1,2,...,r$ - прибуток від обслуговування однієї вимоги в і-ому вузлі. Позначимо через $c' = (c_1, c_2,..., c_r)$, $V(t) = \|V_{ij}(t)\|_1^r$, де $V_{ij}(t) = \operatorname{cov}(Y_i(t), Y_j(t))$. Тоді важливою є наступна оптимізаційна задача:

$$M(q) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r} c_i M[Y_i((n+1)T) - Y_i(nT)] \to \max, \quad (1)$$

$$D(q) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \int_{nT}^{(n+1)T} c'V(t)cdt \to \min, \quad \sum_{i=1}^{r} q_i = 1. \quad (2)$$

3. Знаходження явного виду цільової функції

Для того, щоб розв'язати оптимізаційну задачу (1) − (2), необхідно подати функціонали *M(q)* і *D(q)* через параметри мережі. Для цієї мети служить наступний результат.

Теорема. Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P менше 1, то $M(q), D(q)$ існують і

$$M(q) = \Lambda(T) q'(I - P)^{-1} \Delta(\delta) c, \quad (3)$$

$$D(q) = \Lambda(T) c' V c, \quad (4)$$

де

$$q' = (q_1,...,q_r), \ \Lambda(T) = \int_0^T \lambda(t)dt,$$

$$\Delta(\delta) = \|\delta_i \delta_{ij}\|_1^r, \ V = \|V_{\alpha\beta}\|_1^r,$$

$$V_{\alpha\beta} = \delta_\alpha q'(I - P)^{-1} \Delta^{(\beta)} P_0 (I - P)^{-1} e_\alpha +$$

$$+ \delta_\beta q'(I - P)^{-1} \Delta^{(\alpha)} P_0 (I - P)^{-1} e_\beta +$$

$$+ \delta_{\alpha\beta} \delta_\alpha q'(I - P)^{-1} e_\alpha,$$

$$\delta_\alpha = 1 - p_{\alpha\alpha} - p_{\alpha r+1}, \ \Delta^{(\beta)} = \|\delta_{i\beta} \delta_{ij}\|_{i,j=1}^r,$$

$$e_\alpha' = (0,...,0,1,0,...,0), \ \alpha, \beta = 1,2,...,r,$$

$$P_0 = \|(1 - \delta_{ij}) p_{ij}\|_1^r.$$

Доведення теореми базується на наступному результаті.

Розглянемо гіллястий процес Беллмана-Харріса ([3])

$$Z(t) = (Z^1(t),...,Z^r(t), Z^{(r+1)}(t),...,Z^{(2r)}(t)), \quad t \geq 0$$

$$Z^{(i)}(t) = (Z_1^{(i)}(t),...,Z_r^{(i)}(t), Z_{r+1}^{(i)}(t),...,Z_{2r}^{(i)}(t)),$$

з *2r* типами частинок $T_1,...,T_r,T_{r+1},...,T_{2r}$. Кожна з частинок типу T_i має випадкову тривалість життя з функцією розподілу $G^{(i)}(t)$, причому

$$G^{(i)}(t) = 1 - e^{-\mu_i(1-p_{ii})t}, t \geq 0, i = 1,2,...,r, \quad (5)$$

$$G^{(i)}(t) = \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}, \quad i = r+1,...,2r. \quad (6)$$

Генератриси $f^{(i)}(z)$ безпосередніх нащадків від однієї частинки типу T_i дорівнюють

$$f^{(i)}(z) = z_{r+i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} z_j, i = 1,2,...,r, \quad (7)$$

$$f^{(i)}(z) = z_i, i = r+1,...,2r. \quad (8)$$

Лема. Нехай виконуються умови теореми, тоді

$$MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t) = A_\alpha^{(i)}(t), \quad (9)$$

$$MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t)(Z_{r+\beta}^{(i)}(t) - \delta_{\alpha\beta}) = B_{\alpha\beta}^{(i)}(t), \quad (10)$$

$$\alpha, \beta = 1,2,...,r,$$

де $A_\alpha^{(i)}$ - єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$A_\alpha^{(i)}(t)=\delta_{i\alpha}(1-\frac{p_{ir+1}}{1-p_{ii}})(1-e^{-\mu_i(1-p_{ii})t})+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\int_0^t A_\alpha^{(j)}(t-u)e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du, i=1,2,...,r, \quad (11)$$

а $B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)$ - єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)=\delta_{i\alpha}\int_0^t\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}A_\beta^{(j)}(t-u)\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$
$$+\delta_{i\beta}\int_0^t\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}A_\alpha^{(j)}(t-u)\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+ \quad (12)$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\int_0^t B_{\alpha\beta}^{(j)}(t-u)e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du.$$

Доведення:

Відомо ([3], стор. 231), що генератриси

$$F^{(i)}(t,z)=\sum_\alpha P(Z^{(i)}(t)=\alpha)z^\alpha, \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r,\alpha_{r+1},...,\alpha_{2r}),$$
$$z=(z_1,...,z_r,z_{r+1},...,z_{2r}), i=1,2,...2r,$$

задовольняють системі інтегральних рівнянь, яка для функцій (5)-(8) приймає вигляд

$$F^{(i)}(t,z)=z_i e^{-\mu_i(1-p_{ii})t}+ \quad (13)$$
$$+\int_0^t F^{(r+i)}(t-u,z)\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}F^{(j)}(t-u,z)\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du,$$
$$i=1,2,...,r,$$
$$F^{(i)}(t,z)=z_i\left[1-G^{(i)}(t)\right]+\int_0^t F^{(i)}(t-u,z)dG^{(i)}(u),$$
$$i=r+1,...,2r.$$

З останнього рівняння випливає, що $F^{(i)}(t,z)=z_i, i=r+1,...,2r$. Тоді з системи (13) одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(i)}(t,z)=\delta_{i\alpha}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$
$$+z_{r+i}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du, \quad (14)$$
$$\alpha=1,2,...,r, \quad i=1,2,...,r.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{r+\alpha}\partial z_{r+\beta}}F^{(i)}(t,z)= \quad (15)$$
$$=\delta_{i\alpha}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{r+\beta}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$
$$+\delta_{i\beta}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$
$$+z_{r+i}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_{r+\alpha}\partial z_{r+\beta}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du,$$
$$\alpha,\beta=1,2,...,r, i=1,2,...,r.$$

Нехай

$\frac{\partial^2}{\partial z_{r+\alpha}\partial z_{r+\beta}}F^{(j)}(t,z)\Big|_{z=\bar{1}}=B_{\alpha\beta}^{(j)}(t), \alpha,\beta=1,2,..,r$, в той час, як $\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(j)}(t,z)\Big|_{z=\bar{1}}=A_\alpha^{(j)}(t)$. Тоді підстановка $z=\bar{1}$ в рівняння (14), (15) дає рівняння (11), (12).

Лема доведена.

Доведення теореми.

Процес обслуговування вимог у $[M_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$ - мережі разом з адитивним функціоналом можна подати у такому вигляді

$$(X(t),Y(t))=(X_1(t),...,X_r(t),Y_1(t),...,Y_r(t))\overset{d}{=}$$
$$\overset{d}{=}\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t)}(Z_1^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)}),...,Z_{2r}^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)})), \quad (16)$$

де $\overset{d}{=}$ означає рівність за розподілом, $\nu^{(i)}(t)$ - число вимог, що надійшли у мережу через i-ий вузол за час t, $\tau_j^{(i)}$ - час надходження у мережу j-ої вимоги через i-ий вузол, $Z^{(m,1)}(t),Z^{(m,2)}(t),...$ - незалежні випадкові величини, розподіл яких співпадає з розподілом $Z^{(m)}(t)$.

Спочатку доведемо співвідношення (3).

З рівності (16) маємо, що

$$MX_i(t)=\sum_{m=1}^{r}M\left\{\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t)}MZ_i^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)})\right\}=$$
$$=\sum_{m=1}^{r}\int_0^t\left[MZ_i^{(m)}(t-u)\right]dM\nu^{(m)}(u), \quad (17)$$
$$i=1,2,...,r.$$

$$MY_i(t)=\sum_{m=1}^{r}M\left\{\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t)}MZ_i^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)})\right\}=$$

$$=\sum_{m=1}^{r}\int_0^t\left[MZ_i^{(m)}(t-u)\right]dM\nu^{(m)}(u), \qquad (18)$$

$$i=r+1,\ldots,2r\ .$$

З леми 1 маємо, що $MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t)=A_{r+\alpha}^{(i)}(t),\alpha=1,2,\ldots,r$, де функції $A_{r+\alpha}^{(1)}(t),A_{r+\alpha}^{(2)}(t),\ldots,A_{r+\alpha}^{(r)}(t)$ задовольняють системі інтегральних рівнянь (11), яка є еквівалентною системі диференціальних рівнянь

$$A_{r+\alpha}^{(i)}{}'(t)=m_i\delta_{i\alpha}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}A_{r+\alpha}^{(j)}(t)-\mu_i(1-p_{ii})A_{r+\alpha}^{(i)}(t),$$

$$A_{r+\alpha}^{(i)}(0)=0,i=1,2,\ldots,r, \qquad (19)$$

де $m_i=\mu_i(1-p_{ii}-p_{ir+1})$.

Нехай e_i - r-вимірний вектор, що є i-им рядком одиничної матриці відповідної розмірності. Тоді система рівнянь (19) у векторно-матричному запису має вигляд

$$A_\alpha'(t)=QA_\alpha(t)+m_\alpha e_\alpha\ ,\quad A_\alpha(0)=\bar{0}\ , \qquad (20)$$

де $Q=\Delta(\mu)(P-I),\Delta(\mu)=\left\|\delta_{ij}\mu_i\right\|_1^r$.

Застосовуючи метод варіації сталої, знаходимо

$$A_\alpha(t)=m_\alpha Q^{-1}(e^{Qt}-I)e_\alpha. \qquad (21)$$

Таким чином

$$MY_i(t)=\sum_{m=1}^{r}q_m\int_0^t A_i^{(m)}(t-u)\lambda(u)du. \qquad (22)$$

Нехай $t=nT$, де T - період функції $\lambda(t)$. Тоді неважко перевірити, що

$$\int_0^{nT}A_i^{(m)}(nT-u)\lambda(u)du=\sum_{k=1}^{n}\int_0^T A_i^{(m)}(kT-u)\lambda(u)du\ ,$$

і звідси маємо

$$M\left\{Y_i((n+1)T)-Y_i(nT)\right\}= \qquad (23)$$

$$=\sum_{m=1}^{r}q_m\int_0^T A_i^{(m)}((n+1)T-u)\lambda(u)du\ .$$

Нехай $A_\alpha^{(i)}(s)=\int_0^\infty e^{-st}A_\alpha^{(i)}(t)dt, s\geq 0$. Тоді в термінах перетворень Лапласа диференціальне рівняння (20) записується у вигляді

$$sA_\alpha(s)=QA_\alpha(s)+\frac{1}{s}m_\alpha e_\alpha\ , \qquad (24)$$

де $A_\alpha(s)=(A_\alpha^1(s),A_\alpha^2(s),\ldots,A_\alpha^r(s))$.

Розв'язком рівняння (24) буде

$$A_\alpha(s)=\frac{1}{s}m_\alpha(Is-Q)^{-1}e_\alpha\ . \qquad (25)$$

Звідси знаходимо, що

$$\lim_{t\to+\infty}A_\alpha(t)=\lim_{s\to0+}s\frac{1}{s}m_\alpha(Is-Q)^{-1}e_\alpha=$$

$$=m_\alpha(I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu)e_\alpha. \qquad (26)$$

Із співвідношень (23) та (26) одержуємо (3).
Доведемо співвідношення (4).
Розглянемо випадковий вектор

$$(X(t_1),Y(t_1),X(t_2),Y(t_2))\overset{d}{=}$$

$$\overset{d}{=}\sum_{m=1}^{r}\Big(\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)}Z^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)}),\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)}Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})+ \qquad (27)$$

$$+\sum_{k=\nu^{(m)}(t_1)+1}^{\nu^{(m)}(t_2)}Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})\Big).$$

Введемо такі позначення

$$F=\sigma\{\nu'(u)=(\nu^{(1)}(u),\nu^{(2)}(u),\ldots,\nu^{(r)}(u)),0\leq u\leq t\},$$

$$\xi=\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)}Z^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)})\ ,$$

$$\eta=\sum_{m=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)}Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})+\sum_{k=\nu^{(m)}(t_1)+1}^{\nu^{(m)}(t_2)}Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})\right].$$

Тоді

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M\operatorname{cov}_F(\xi,\eta)+$$

$$+M[M_F\xi\cdot M_F\eta']-M[M_F\xi]\cdot M[M_F\eta']\ , \qquad (28)$$

де $\operatorname{cov}_F(\xi,\eta)=M_F\xi\eta'-M_F\xi\cdot M_F\eta'$

В нашому випадку будемо мати

$$M\operatorname{cov}_F(\xi,\eta)= \qquad (29)$$

$$= \sum_{m=1}^{r} M\left[\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} \operatorname{cov}\left(Z^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)}), Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})\right)\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} M\left[\int_0^{t_1} \operatorname{cov}\left(Z^{(m)}(t_1-u), Z^{(m)}(t_2-u)\right) d\nu^{(m)}(u)\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_1} \operatorname{cov}\left(Z^{(m)}(t_1-u), Z^{(m)}(t_2-u)\right) dM\nu^{(m)}(u).$$

Введемо позначення

$$a_{i\alpha}(t) = MZ_\alpha^{(i)}(t), b_{i\beta}(t) = MZ_\beta^{(i)}(t), A = \left\|a_{ij}(t)\right\|_1^r,$$

$$B = \left\|b_{ij}(t)\right\|_1^r, \alpha = 1,2,...,r, \beta = r+1,...,2r.$$

Тоді можемо записати

$$M_F\xi = \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} (a_m(t_1-\tau_k^{(m)}), b_m(t_1-\tau_k^{(m)})) =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_1} (a_m(t_1-u), b_m(t_1-u)) d\nu^{(m)}(u),$$

$$M_F\eta' = \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} (a_m(t_2-\tau_k^{(m)}), b_m(t_2-\tau_k^{(m)}))' +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=\nu^{(m)}(t_1)+1}^{\nu^{(m)}(t_2)} (a_m(t_2-\tau_k^{(m)}), b_m(t_2-\tau_k^{(m)}))' =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_2} (a_m(t_2-u), b_m(t_2-u))' d\nu^{(m)}(u),$$

де $a_m(\cdot), b_m(\cdot)$ - m-ті рядки матриць A і B відповідно, розташовані, як вектор-стовпці.

Потоки вимог $\nu^{(i)}(t)$ для різних $i=1,2,\ldots,r$ є незалежними неоднорідними пуассонівськими потоками. Тому

$$M\left[M_F\xi \cdot M_F\eta'\right] - M\left[M_F\xi\right] \cdot M\left[M_F\eta'\right] = \qquad (30)$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \left\{ M\left[\left(\int_0^{t_1} (a_m(t_1-u), b_m(t_1-u)) d\nu^{(m)}(u)\right) \times \right.\right.$$

$$\times \left.\left(\int_0^{t_2} (a_m(t_2-u), b_m(t_2-u))' d\nu^{(m)}(u)\right)\right] -$$

$$- M\left[\int_0^{t_1} (a_m(t_1-u), b_m(t_1-u)) d\nu^{(m)}(u)\right] \times$$

$$\left. \times M\left[\int_0^{t_2} (a_m(t_2-u), b_m(t_2-u))' d\nu^{(m)}(u)\right]\right\}.$$

У співвідношенні (30) при $t_1 = t_2 = t$ зробимо заміну інтегралів на суми і, враховуючи зв'язок пуассонівського процесу з порядковими статистиками ([5]), будемо мати

$$M \sum_{k_1,k_2=1}^{\nu^{(m)}(t)} \left(a_m(t-\tau_{k_1}^{(m)}), b_m(t-\tau_{k_1}^{(m)})\right)\left(a_m(t-\tau_{k_2}^{(m)}), b_m(t-\tau_{k_2}^{(m)})\right)' =$$

$$= q_m \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u))(a_m(t-u), b_m(t-u))' \lambda(u) du +$$

$$+ q_m^2 \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u)) \lambda(u) du \times$$

$$\times \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u))' \lambda(u) du,$$

а також

$$M \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u)) d\nu^{(m)}(u) =$$

$$= q_m \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u)) \lambda(u) du,$$

$$M \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u))' d\nu^{(m)}(u) =$$

$$= q_m \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u))' \lambda(u) du.$$

Звідси випливає, що при $t_1 = t_2 = t$

$$M\left[M_F\xi \cdot M_F\eta'\right] - M\left[M_F\xi\right] \cdot M\left[M_F\eta'\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} q_m \int_0^t (a_m(t-u), b_m(t-u))(a_m(t-u), b_m(t-u))' \lambda(u) du.$$

Тоді коваріація компонент, що нас цікавлять, дорівнює

$$\sum_{m=1}^{r} q_m \int_0^t b_m(t-u) b_m'(t-u) \lambda(u) du = \qquad (31)$$

$$= \int_0^t B'(t-u) \Delta(q) B(t-u) \lambda(u) du.$$

Неважко перевірити, що для періодичної функції $\lambda(t), t \ge 0$ з періодом T має місце таке співвідношення

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \left[\int_0^t k(t-u)\lambda(u) du\right] dt = \int_0^T \lambda(T-u) du \int_0^{nT+u} k(t) dt. \quad (32)$$

З леми 1 випливає, що $MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t)(Z_{r+\beta}^{(i)}(t) - \delta_{\alpha\beta}) = B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)$, $\alpha,\beta = 1,2,\ldots,r$, де

функції $B_{\alpha\beta}^{(1)}(t), B_{\alpha\beta}^{(2)}(t), \ldots, B_{\alpha\beta}^{(r)}(t)$ задовольняють системі інтегральних рівнянь (12), яка є еквівалентною системі диференціальних рівнянь

$$B_{\alpha\beta}^{(i)\prime}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \mu_i p_{ij} B_{\alpha\beta}^{(j)}(t) - \mu_i(1-p_{ii})B_{\alpha\beta}^{(i)}(t) +$$

$$+ \delta_{i\beta} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \mu_i p_{ij} A_{\alpha}^{(j)}(t) + \delta_{i\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \mu_i p_{ij} A_{\beta}^{(j)}(t), \qquad (33)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(i)}(0) = 0, \alpha,\beta = 1,2,\ldots,r.$$

Введемо позначення

$$\Delta^{(\beta)} = \left\| \delta_{i\beta}\delta_{ij} \right\|_{i,j=1}^{r}, \ \Delta_d = \left\| \delta_{ij}\mu_i(p_{ii}-1) \right\|_1^r.$$

Тоді диференціальне рівняння (33) можна подати у вигляді

$$B_{\alpha\beta}'(t) = QB_{\alpha\beta}(t) + \Delta^{(\beta)}(Q-\Delta_d)A_{\alpha}(t) + \qquad (34)$$

$$+ \Delta^{(\alpha)}(Q-\Delta_d)A_{\beta}(t),$$

$$B_{\alpha\beta}(0) = \bar{0}, \alpha,\beta = 1,2,\ldots,r,$$

де $B_{\alpha\beta}(t) = (B_{\alpha\beta}^{(1)}(t), B_{\alpha\beta}^{(2)}(t), \ldots, B_{\alpha\beta}^{(r)}(t)), A_{\alpha}(t) =$

$$= (A_{\alpha}^{(1)}(t), A_{\alpha}^{(2)}(t), \ldots, A_{\alpha}^{(r)}(t)).$$

Введемо перетворення Лапласа

$$B_{\alpha\beta}^{(i)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)dt, s \geq 0.$$

Для перетворень Лапласа рівняння (34) приймає вигляд

$$sB_{\alpha\beta}(s) = QB_{\alpha\beta}(s) + \Delta^{(\beta)}(Q-\Delta_d)A_{\alpha}(s) + \qquad (35)$$

$$+ \Delta^{(\alpha)}(Q-\Delta_d)A_{\beta}(s).$$

Розв'язком рівняння (35) буде вектор

$$B_{\alpha\beta}(s) = \frac{1}{s} m_{\alpha}(sI-Q)^{-1}\Delta^{(\beta)}(Q-\Delta_d)(sI-Q)^{-1}e_{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{s} m_{\beta}(sI-Q)^{-1}\Delta^{(\alpha)}(Q-\Delta_d)(sI-Q)^{-1}e_{\beta}.$$

Звідси знаходимо граничне значення

$$\lim_{t\to+\infty} B_{\alpha\beta}(t) = \lim_{s\to 0+} sB_{\alpha\beta}(s) =$$

$$= \delta_{\alpha}(I-P)^{-1}\Delta^{(\beta)}P_0(I-P)^{-1}e_{\alpha} + \qquad (36)$$

$$+ \delta_{\beta}(I-P)^{-1}\Delta^{(\alpha)}P_0(I-P)^{-1}e_{\beta},$$

де $\delta_{\alpha} = 1 - p_{\alpha\alpha} - p_{\alpha r+1}$, $P_0 = \left\| (1-\delta_{ij})p_{ij} \right\|_1^r$.

Із співвідношень (31), (32) та (36) одержуємо (4).

Теорема доведена.

4. Висновок

З теореми можна зробити висновок, що цільові функції $M(q)$, $V(q)$ оптимізаційної задачі (1) – (2) є лінійними відносно контрольованих параметрів. Відповідні функціонали задаються співвідношеннями (3), (4). Таким чином двокритеріальна оптимізаційна задача максимізації середнього прибутку та мінімізації величини ризику може бути розв'язана стандартними методами багатокритеріальної оптимізації (див., наприклад, [6]), які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв. Розв'язок задачі (1) − (2) $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_r^*)$ є таким керуванням вхідним потоком, що максимізує прибуток від роботи мережі та мінімізує ризик на періоді *T*.

Список використаних джерел

1. *Lebedev E.A., Makushenko I.A.* Risk optimization for multi-channel stochastic network. − Kyiv: National Library of Ukraine, 2007. – 65 c.
2. *Vishnevsky M.V.* The theoretical basis of the design of computer networks. - Moscow: Technosphere, 2003. - 512 p.
3. *Sevastyanov B.A.* Branching processes. Moscow: Nauka, 1971. - 436 p.
4. *Vatutin V.A.* The critical Bellman-Harris branching processes with immigration and several types of particles. Probability theory and its applications. - 1976. - V. 21, № 2. - S. 447-454.
5. *Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Y., Shurenkov V.M.* Random processes. - Kyiv: Naukova dumka, 1983. - 366 p.
6. *Volkovich V.L., Voloshin A.F., Zaslavsky V.A., Ushakov I.A.* Models and methods of optimization of reliability of complex systems / Pod red. Mikhalevicha V.S. - Kiev: Naukova dumka, 1993. - 312 p.

Надійшла до редколегії 27.12.12

УДК 681.3

Олександр О. Марченко, к.ф.-м.н., доц.

Метод автоматичної прив'язки статей Вікіпедії в якості нових вузлів україномовної онтологічної бази знань UkrWordNet

У роботі описаний метод автоматичного зв'язування статей електронної енциклопедії з вузлами понять онтологічної бази знань. Метод перевірено в експериментах з он-лайн енциклопедією Wikipedia та онтологією WordNet. Алгоритм розроблено для автоматизації процесів збагачення онтологій знаннями з енциклопедичних ресурсів.

Ключові слова: штучний інтелект, комп'ютерна лінгвістика. онтологічні бази знань.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: rozenkrans@yandex.ua

Oleksandr O. Marchenko, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

A method for automatic linking of Wikipedia entries as new nodes of Ukrainian ontological knowledge base UkrWordNet

A method for automatic assignment of articles from an electronic encyclopedia to concept nodes in ontology is considered. It has been approved in experiments with Wikipedia and WordNet. The algorithm is developed for automation of filling ontologies with knowledge from encyclopedic sources.

Key words: artificial intelligence, computational linguistics, ontological knowledge bases.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail:*rozenkrans@yandex.ua*

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Сьогодні в штучному інтелекті дуже актуальним напрямом є розробка алгоритмів автоматизації процесів здобування знань та наповнення ними онтологічних семантичних баз. Чи не найбільш багатими ресурсами для отримання знань є електронні енциклопедії, серед яких, безумовно, перше місце займає Wikipedia[1]. Тому ряд дослідницьких проектів спрямовано саме на розробку засобів формалізації знань з Wikipedia та інтеграції їх в різні онтології, зокрема в лексико-семантичну онтологію WordNet. Це проекти BabelNet[2], DBpedia[3], WikiTax2WordNet[4], WordNet++[5]. Саме цей напрям інтеграції даних з Wikipedia до ієрархічних структур таксономії WordNet виглядає найбільш перспективним з огляду на те, що WordNet має високоякісно пророблену впродовж двох с половиною десятиріч структуру гіпонімічних відношень, на відміну від Wikipedia, яка є суспільним проектом і має доволі несистематизовані зв'язки, містить цикли та помилки. WordNet містить лише приблизно 120 тисяч понять-вузлів. Цього явно недостатньо для якісного аналізу та обробки текстів довільної тематики. Українська Wikipedia на сьогодні містить приблизно 500 тисяч статей, тобто різних за змістом понять. Інтегрування даних понять в якості нових вузлів WordNet шляхом прикріплення до найбільш семантично близьких синсетів мережі WordNet(в якості синівських або як тотожних) може надати можливість формування онтологічної семантичної бази знань з якісною структурою WordNet і з покриттям 500 тисяч вузлів-концептів. Це має бути найбільш потужним структурованим україномовним джерелом знань на сьогоднішній день.

© О.О. Марченко, 2013

Переважна більшість методів прив'язки статей Wikipedia в якості нових вузлів WordNet використовують різні міри семантичної близькості тексту енциклопедійної статті до лексичного складу певного синсету та його глосарію. При цьому враховуються як лексичний перетин типу міри Леска[6], так і реляційна позиція статті, тобто відношення-посилання даної сторінки всередині Wikipedia та семантичні зв'язки відповідного вузлу WordNet до інцедентних йому синсетів, які також мають бути подібними. Прикладами подібних методів прив'язки статей Wikipedia до семантично найближчих їм вузлів WordNet є роботи *Maria Ruiz-Casado, Enrique Alfonseca and Pablo Castells* "Automatic assignment of Wikipedia encyclopedic entries to WordNet synsets" [7] та *R. Navigli, S. P. Ponzetto* BabelNet: Building a Very Large Multilingual Semantic Network[2].

Новий метод прив'язки статей Wikipedia в якості вузлів до онтології WordNet

Для покращення якості прив'язки статей Wikipedia до семантично найближчих вузлів WordNet було запропоновано розробити нові міри семантичної близькості за допомогою латентного семантичного аналізу[8], як методу визначення подібності значень слів і документів шляхом статистичних обчислень над великим текстовим корпусом, яким і виступає в даному випадку україномовна Wikipedia.

Метод

1. ***Побудова TD-матриці на основі обробки Wikipedia***. На першому етапі відбувається послідовна обробка статей україномовної Wikipedia з метою побудови матриці *статті*×*слова* де зберігається частота використання слів в текстах статей Wikipedia. Звичайно в *слова* можуть потрапляти і словосполучення (наприклад, *Майдан Незалежності*, *сірчана кислота*) Для української мови в якості передобробки необхідне виконання морфологічного аналізу текстів для отримання нормальної форми слів – лем. В процесі складання матриці *статті*×*слова* необхідно не розглядати загальнозначущі слова, які використовуються у майже всіх текстах. Для цього можна використати стоп-список загальнозначущих слів або застосувати показник TF-IDF для динамічного видалення загальнозначущих слів.

Дуже важливим фактором є позиція слова, яку воно займає в тексті статті Wikipedia. Якщо певне слово використано в першому реченні – воно є частиною визначення поняття, яке описується в даній статті. Тому таке слово має найвищий пріоритет і при підрахунку частоти його використання в тексті має отримати найбільшу оцінку (нехай буде +3 за кожну появу в даній позиції). Якщо слово використано в першому абзаці тексту (починаючи з другого речення), то це є також ознакою його досить високого пріоритету, тому таке слово отримає оцінку +2 за кожну появу в даній позиції. Слова з решти тексту отримають оцінку +1 за кожну появу про складенні матриці *статті*×*слова.*

2. ***Розкладення TD-матриці.*** Після складення матриці *статті*×*слова* потрібно виконати її розклад згідно алгоритмам латентного семантичного аналізу на добуток двох матриць, перша з яких буде представляти відображення множини статей Wikipedia у k-тематичних вимірів прихованого семантичного простору, а друга - відображення множини слів у k-тематичних вимірів прихованого семантичного простору. Вектори-стовпчики з цих матриць зменшеного рангу k дають можливість швидкого обчислення семантичної близькості між словами, між текстами, а також між словами та текстами, через обчислення скалярного добутку відповідних їм векторів. Для отримання подібного розкладу найчастіше використовуються сингулярний розклад матриці або невід'ємна матрична факторизація NMF.

Загалом, NMF є розкладом (або факторизацією) матриці V в добуток двох матриць W і H. Причому, на елементи матриць V, W, H накладаються додаткове

обмеження невід'ємності. Важливо відмітити, що такий розклад не є обов'язково унікальним і матриці W та H не повинні бути ортогональними. Дана факторизація матриць стала популярною після публікації статті Лі і Суна[9]. В цій роботі було запропоновано два алгоритми побудови невід'ємного розкладу матриці. Після чого було розроблено ряд інших методів, таких як: метод проективного градієнту, метод чергованих невід'ємних квадратів та метод розрідженого кодування. В даній роботі використовується оригінальний метод Лі і Суна[9], також відомий під назвою «мультиплікативні правила оновлення» В якості цільової функції використовується норма Фробеніуса.

У області обробки природномовних текстів NMF зазвичай застосовується до (Терм ×Документ)TD-матриці. Кожен рядок матриці TD відповідає одному документу, а кожен стовпець матриці відповідає одному слову. Якщо задано m документів і загальна кількість унікальних слів у них рівна n, то розмір TD матриці V рівний m на n. NMF використовується для розкладу матриці V у добуток двох матриць W і H з розмірами m на k і k на n відповідно, де зазвичай $k << \min(m,n)$. Наприклад, k може бути встановлено в значення очікуваної кількості кластерів. Часто, параметр k називають - «кількість ознак».

Інтуїтивно, параметр k може бути пояснений наступним чином: TD матриця V ("документи" на "слова") розкладається у добуток двох матриць. Матриця W пов'язує «документи» і «ознаки», а матриця H пов'язує «ознаки» і «слова». Тому, як випливає з властивостей добутку матриць, кожен документ представляється у вигляді лінійної комбінації виділених ознак. Після цього, традиційні методи кластеризації можуть бути застосовані до рядків матриці W.

В цілому, повний процес кластеризації виглядає наступним чином:

1. Побудувати TD-матрицю V
2. Нормалізувати стовпці матриці V
3. Застосувати NMF: V = W H
4. Побудувати кластеризацію на основі матриць W і H

NMF, як засіб обробки природної мови, має кілька переваг над іншими методами виділення ознак. По-перше, матриці W і H мають тільки позитивні елементи, що робить процес їх інтерпретації, у термінах обробки природної мови, простішим і інтуїтивнішим. По-друге, стовпці W не повинні бути ортогональними, а отже виділені теми можуть мати спільні риси, що є досить звичайним для реальних документів.

Алгоритм NMF

В цьому розділі наведено алгоритм NMF, який було запропоновано Лі і Суном[9]. У якості цільової функції використовується норма Фробеніуса, що записується так:

$$\min_{W,H} \| V - WH \|_F^2,$$

причому елементи матриць W та H повинні бути невід'ємними.

Для такої цільової функції, та для двох початкових матриць W_0 і H_0, NMF алгоритм складається з ітераційного виконання двох кроків:

1. $(H_t)_{i,j} = (H_{t-1})_{i,j} \times \frac{(W_{t-1}^T V)_{i,j}}{(W_{t-1}^T W_{t-1} H_{t-1})_{i,j}}$
2. $(W_t)_{i,j} = (W_{t-1})_{i,j} \times \frac{(V H_{t-1}^T)_{i,j}}{(W_{t-1} H_{t-1} H_{t-1}^T)_{i,j}}$

На практиці, кроки алгоритму повторюються доки не буде досягнута нерухома точка або не буде виконана максимальна кількість ітерацій. Лі і Сун довели дві основні властивості цього алгоритму: по-перше, цільова функція є монотонно спадною під час застосування правил; по-друге, матриці W і H стають постійними, тільки у випадку досягнення стаціонарної точки цільової функції. Важливо зазначити, що такий розклад не є унікальним.

Після того, як було оброблено україномовну Wikipedia, була згенерована матриця V(*статті×слова),* яка розкладається

на добуток двох матриць W і H , є можливість легко обчислювати міру μ_{sem} семантичної близькості між двома словами (скалярний добуток відповідних векторів-стовпчиків з H), між двома статтями (скалярний добуток відповідних векторів-рядків з W) та між словом та текстом статті(скалярний добуток відповідного рядка W та транспонованого стовпчика H). Ця міра μ_{sem} є ключовим засобом прив'язки статей української Wikipedia до вузлів WordNet.

3. ***Прив'язка статей української Wikipedia до вузлів WordNet.*** На вхід системи подається україномовний UkrWordNet, а також україномовна Wikipedia. Алгоритм представлено у вигляді псевдокоду. Основний зовнішній цикл алгоритму має вигляд

Begin
i = 1
While not end of UkrWikipedia do
begin
If i-та сторінка Wikipedia не прив'язана до жодного вузлу WordNet then Linking(i) /привязуємо i-ту статтю української Wikipedia до семантично найближчого до неї синсету українського WordNet /;
Inc(i);
end;
End.

Функція привязки i-тої статті української Wikipedia до найближчого до неї синсету українського WordNet має вигляд:

Procedure **Linking**(i:longint;
var Sset:SynsetOfWordNet;
var MeasureSem:double);

begin
Взяти i-ту статтю україномовної Wikipedia і відповідний їй вектор-рядок W[i];
Знайти за допомогою індексного файлу всі синсети україномовного WordNet, що містять в якості одного з слів назву i-тої статті Wikipedia;

(A)- Якщо знайдений один такий синсет Sset, тоді виконати обчислення значень семантичної близькості μ_{sem} між W[i] та векторами H[t] для всіх слів з цього синсету та обчислити середнє арифметичне :

$$\mu_{\text{sem-average}}=\frac{\sum_{word_t \in SSet[j]} \mu_{sem}(W[i],H[t])}{count(word_t \in Sset[j])};$$

Якщо $\mu_{\text{sem-average}} >$ Thrshld (де Thrshld – пороговий рівень виведений експериментально), тоді прив'язати i-ту статтю україномовної Wikipedia до знайденого синсету Sset в якості тотожного вузла; MeasureSem отримує значення $\mu_{\text{sem-average.}}$ (A)

(B)- Якщо знайдено множину{SSets} з k синсетів (де k>1), кожен з яких містять в якості одного з його слів ім'я-назву i-тої статті української Wikipedia, тоді для кожного синсета {SSets} виконати:
for synset:Ssets do

begin
виконати обчислення значень семантичної близькості μ_{sem} між W[i] та векторами H[t] для всіх слів з цього j-го синсету та обчислюємо середнє значення

$$\mu_{\text{sem-average}}=\frac{\sum_{word_t \in SSet[j]} \mu_{sem}(W[i],H[t])}{count(word_t \in Sset[j])};$$

end;

Із множини {SSets} обираємо синсет synset з найбільшим значенням середнього $\mu_{\text{sem-average}}$ і прив'язуємо до нього i-ту статтю україномовної Wikipedia в якості тотожного вузла; MeasureSem отримує відповідне значення $\mu_{\text{sem-average}}$; Sset=synset; (B)

(C)- Якщо не знайдено жодного синсету WordNet, який би містив в якості одного зі слів назву i-тої статті Wikipedia, тоді виконати:

Взяти з i-тої статті української Wikipedia множину посилань в розділі *Категорії* та отримати множину відповідних їм сторінок $\{P_{links}\}$;
for p: P_{links} do

begin
взяти чергову сторінку ***p*** з $\{P_{links}\}$ та перевірити чи прив'язана вона вже до якогось із синсетів WordNet :
-якщо так, то запам'ятовуємо p та обчислюємо оцінку семантичної близькості MeasureSem1= $\mu_{sem\text{-}average}$ від ***p*** до даного синсету WordNet;
-якщо ні, тоді запустити рекурсивно Linking(p,sset1,MeasureSem1), запам'ятовуємо найближчий поточний із синсетів Sset1 та його найкращу оцінку MeasureSem1 близькості до ***p***;
If MeasureSem1> Best then begin Best= MeasureSem1; pbest=p; end
end;

Фіксуємо таку сторінку ***pbest*** української Wikipedia та відповідний їй синсет Sset1, які відповідають найкращій отриманій оцінці семантичної близькості.

Далі запускаємо рекурсивну функцію пошуку найкращого потомка синсету Sset1, який би мав найкращу оцінку семантичної близькості μ_{sem} до і-тої сторінки української Wikipedia:
FindBest(i, Sset1, 0, BestSynset,BestValue);
Опис функції FindBest див. нижче;

Якщо BestValue >0 то прив'язуємо і-ту статтю української Wikipedia в якості нового синівського вузлу до синсету BestSynset;
Sset= BestSynset;
MeasureSem= BestValue;(C)

End of Function Linking;

Функція FindBest описується наступним чином:

Function **FindBest**(i:longint, Sset:SynsetOfWordNet, Cut:double;
var BestSynset:SynsetOfWordNet;
var BestValue:double)
begin
Отримати множину W всіх слів з Sset;
Обчислити M:

$$M= \frac{\sum_{w_t \in SSet} \mu_{sem}(W[i], H[t])}{count(w_t \in Sset)}$$

If M<Cut then Return else
begin BestSynset= Sset; BestValue= M end;
По відношенням Hyponymy отримати множину *Sons* всіх синів Sset;
For Son:Sons do
begin FindBest(i,Son, M, BestSynset1, BestValue1)
If BestValue1> BestValue then begin BestValue= BestValue1; BestSynset= BestSynset1 end;
End;
End of Function FindBest;

Тестування методу

Методологія тестування. Перевірка була виконана на мережі іменників україномовної бази WordNet. На початку проекту, як вже було сказано, всі англомовні оригінальні синсети було замінено на україномовні відповідники. В результаті ручної обробки мережа іменників українського WordNet отримала 82 тисячі синсетів (близько 145 тисяч іменників у лексиконі системи). При створенні матриці V(*статті*×*слова*) були оброблені ті статті української Wikipedia, що в якості назви містять ці 145 тисяч іменників(1-ша група статей)+ 50 тисяч інших статей української Wikipedia (2-га група), які в ієрархії категорій знаходяться нижче статей 1-шої групи. Статті 2-ї групи були обрані випадковим чином за нормальним розподілом в різних частинах та на різних рівнях категоріальної ієрархії української Wikipedia. Потім згенерована матриця V(*статті*×*слова*) була

розкладена за допомогою вищезгаданого методу Лі і Суна[9], який був значно пришвидшений із застосуванням GPU-технології розпаралелювання, як це було описано в роботі[10]. Як вказано вище, алгоритм прив'язки і-тої статті української Wikipedia до семантично найближчого до неї синсету WordNet структурно розкладається на 3 частини:

(A) коли одній статті відповідає один синсет – однозначний випадок;

(B) коли одній статті відповідає декілька синсетів – неоднозначний випадок (полісемія);

(C) коли не існує синсету, який би містив в собі назву *і*-тої статті української Wikipedia – тоді треба знайти найближчий за семантикою синсет та прив'язати до нього статтю в якості синівського вузла (назвемо цей випадок *невизначеним*).

Якість роботи алгоритму прив'язки і-тої статті української Wikipedia до семантично найближчого до неї синсету WordNet оцінювалося окремо по кожному з випадків. Для тестування алгоритму прив'язки було оброблено 50 тисяч статей української Wikipedia, які були прив'язані до деяких синсетів WordNet. Під час роботи алгоритму в лог-файли системи рівномірно вносилися записи про прив'язку статей Wikipedia то синсетів WordNet (кожен дев'ятий випадок) з помітками якого типу відбулася прив'язка (A, B чи C). Потім ця вибірка була поділена на вибірки A, B, та C. Кожна вибірка результатів була оцінена експертами на точність прив'язки (precision), на повноту (recall) та, відповідно, F1. Наведемо таблицю зведених оцінок якості роботи представленого алгоритму Табл. 1.

	A (non-ambiguity)	B(ambi-guity)	C(indefinite case)
precision	95,7 %	89.4 %	85.7 %
recall	91,7 %	81.9 %	77.2 %
F1	93,6 %	85,5 %	81,2 %

Табл. 1. Таблиця зведених оцінок якості роботи алгоритму прив'язки статей Wikipedia до синсетів WordNet

Для порівняння, метод прив'язки сторінок Wikipedia то синсетів WordNet, описаний в роботі *Maria Ruiz-Casado, Enrique Alfonseca and Pablo Castells* "Automatic assignment of Wikipedia encyclopedic entries to WordNet synsets" має оцінки роботи 91.1%(загальна оцінка) та 83.9% (у випадках полісемії)[7]. В роботі *R. Navigli, S. P. Ponzetto* BabelNet: Building a Very Large Multilingual Semantic Network описується методологія побудови відображення множини понять Вікіпедії у множину концептів WordNet, яка має оцінки якості роботи та коректності P=81.9, R=77.5, F1=79.6[2]. У порівнянні з запропонованими раніше методами, наш метод при тестуванні продемонстрував в основному кращі показники як у точності прив'язки (precision), так і у повноті (recall) та, відповідно, і в мірі F1.

Висновки

Робота присвячена дослідженню та розробці методів автоматизації побудови та наповнення онтологічної семантичної мережі UkrWordNet. Був розроблений метод створення та прив'язки до синсетів UkrWordNet нових вузлів, які породжуються із множини статей української Wikipedia. Таким чином семантичне поле UkrWordNet значно розширюється. Тестування створеного методу продемонструвало високі оцінки якості роботи відносно існуючих найкращих в світі аналогів методів прив'язки статей Wikipedia до мережі WordNet.

В якості подальших можливих перспективних напрямків досліджень по створенню та збагаченню онтології на базі WordNet пропонується розробка алгоритмів автоматизації упорядкування в таксономічні ієрархічні структури нових приєднаних до синсетів вузлів з Wikipedia. Також заплановані дослідження та розробка алгоритмів автоматичного виявлення різних типів семантичних відношень між вузлами онтології в процесі асоціативно-семантичної обробки корпусів текстів.

Список використаних джерел

1. Wikipedia [Електронний ресурс] Електронна адреса: http://www.wikipedia. org/
2. *R. Navigli, S. P. Ponzetto* BabelNet: Building a Very Large Multilingual Semantic Network./ R. Navigli, S. P. Ponzetto // Proc. of the 48th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL 2010). – Uppsala. – Sweden. 2010. – pp. 216–225.
3. *C. Bizer, J. Lehmann, G. Kobilarov, S. Auer, C. Becker, R. Cyganiak, S. Hellmann* DBpedia – A crystallization point for the Web of Data./ C. Bizer, J. Lehmann, G. Kobilarov, S. Auer, C. Becker, R. Cyganiak, S. Hellmann // Web Semantics. – 7(3). – 2009. – pp. 154–165
4. *S. Ponzetto, R. Navigli* Large-Scale Taxonomy Mapping for Restructuring and Integrating Wikipedia/ S. Ponzetto, R. Navigli // In Proc. of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2009). – Pasadena. – California. – 2009. – pp. 2083–2088.
5. *S. P. Ponzetto, R. Navigli* Knowledge-rich Word Sense Disambiguation rivaling supervised systems/ S. P. Ponzetto, R. Navigli // In Proc. of the 48th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). – 2010. – pp. 1522–1531.
6. *M. Lesk* Automatic sense disambiguation using machine readable dictionaries: how to tell a pine cone from an ice cream cone. In SIGDOC '86: Proceedings of the 5th annual international conference on Systems documentation. – 1986. – pp. 24-26, New York, NY, USA. ACM.
7. *Maria Ruiz-Casado, Enrique Alfonseca and Pablo Castells* Automatic assignment of Wikipedia encyclopedic entries to WordNet synsets/ Maria Ruiz-Casado, Enrique Alfonseca and Pablo Castells // Proceedings of the Atlantic Web Intelligence Conference. – AWIC-2005.
8. *Scott Deerwester, Susan T. Dumais, George W. Furnas, Thomas K. Landauer, Richard Harshman* Indexing by Latent Semantic Analysis. Journal of the American Society for Information Science. – 41 (6). – 1990. – pp. 391–407.
9. *D.D. Lee and H. S.* Seung Algorithms for Non-Negative Matrix Factorization [Електронний ресурс] /D.D. Lee and H. S. Seung // NIPS. – 2000. – Електронна адреса статті: http://hebb.mit.edu/ people /seung/papers/nmfconverge.pdf.
10. *V. Kysenko, K. Rupp, O. Marchenko, S. Selberherr, A. Anisimov* GPU-Accelerated Non-negative Matrix Factorization for Text Mining;in: "Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7337", G. Bouma, A. Ittoo, E. Metais, H. Wortmann (Hrg.); Springer, 2012, ISBN: 978-3-642-31177-2, pp. 158 - 163

Надійшла до редколегії 11.02.2013

УДК 510.6

Нікітченко М.С.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Потапенко Ю.І.[2], студент

Алгебри багатозначних предикатів стабільних відносно відношення толерантності

У статті досліджується клас багатозначних предикатів стабільних відносно відношення толерантності. Областю значень предикатів є повна решітка з інволюцією. Будується алгебра таких предикатів, знаходиться система її твірних, а також визначається нормальна форма її елементів.

Ключові слова: відношення толерантності, багатозначний предикат, алгебра предикатів, система твірних.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: julepka@gmail.com

M. S. Nikitchenko[1], Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor,
I. I. Potapenko[2], student

Algebras of multivalued tolerant-stable predicates

In this paper the class of multivalued tolerant-stable predicates is investigated. The range of predicates is a complete lattice with involution. The algebra of such predicates is built, the set of its generators is identified, and a normal form of its elements is constructed.

Key Words: tolerance relation, multivalued predicate, algebra of predicates, set of generators.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: julepka@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012)

Дослідження властивостей бінарних відношень є невід'ємною складовою математичної логіки. Вивченню властивостей відношення часткового порядку та відношення еквівалентності приділялося багато років. У той же час порівняно небагато досліджень проведено стосовно відношення толерантності, яке є більш загальним ніж відношення еквівалентності та є не менш актуальним. Відношення толерантності широко використовуються у таких областях інформатики, як розпізнавання образів, штучний інтелект, бази даних та знань тощо [2-6].

Метою цієї роботи є вивчення багатозначних предикатів, стабільних відносно відношення толерантності. Використовуються позначення робіт [7, 8].

Постановка проблеми

Нехай D – довільна множина. Бінарне відношення $\approx \in D \times D$ називається відношенням толерантності, якщо воно рефлексивне та симетричне на D. Пара $< D, \approx >$ називається множиною з відношенням толерантності (або просто толерантною множиною).

Нехай $L = \{l_i \mid i \in I\}$ – повна решітка з інволюцією [1]; $PL = D \xrightarrow{p} L$ – множина часткових предикатів. Вираз $p(d)\uparrow$ означає, що предикат p не визначений на d, $p(d)\downarrow$ – p визначений на d, $p(d)\downarrow = l$ – p визначений на d зі значенням l. Операції на L позначаємо як $\bigsqcup$ та $\bigsqcap$, інволюцію – як $\sim$. Елементи решітки L задовольняють наступним властивостям [2]:

$$(\forall l \in L)(\sim(\sim(l)) = l) - \text{інволюція};$$

$$(\{l_i \mid i \in I\} \subseteq L)(\sim(\bigsqcup\{l_i \mid i \in I\}) = \bigsqcup\{\sim(l_i) \mid i \in I\}) - \text{правило де Моргана};$$

$$(\bigsqcup_{i \in I}(\bigsqcup_{j \in J_i}(l_{ij})) = \bigsqcup_{j \in J_i, i \in I}(l_{ij})) - \text{асоціативність}$$

$$(l_{ij} \in L,\ i \in I,\ j \in J).$$

Означення 1. Предикат $p \in PL$ називається стабільним відносно відношення толерантності (у подальшому також

© М.С. Нікітченко, Ю.І. Потапенко, 2013

толерантним предикатом), якщо для усіх $d, d' \in D$ і $l \in L$ таких що $d \approx d'$, $p(d)\downarrow = l$ і $p(d')\downarrow = l'$, маємо $l' = l$. Отриманий клас толерантних предикатів позначимо *PLTS*.

Проблема, що досліджується в роботі, полягає в побудові алгебри предикатів, стабільних відносно відношення толерантності, знаходження системи її твірних, та нормальної форми таких предикатів.

Почнемо з дослідження відношення толерантності $\approx$. Надалі під D будемо розуміти множину з відношенням толерантності $\approx$.

Властивості множин з відношенням толерантності

Означення 2. Елементи $a, b \in D$ називаються нетолерантними, якщо $(a,b) \notin \approx$ це позначається $a \not\approx b$. Зрозуміло, що нетолерантне відношення також є симетричним.

Означення 3. Нехай $A, B \subseteq D$. Множини A та B називаються нетолерантними (позначається $A \not\approx B$), якщо $A \times B \cap \approx = \varnothing$. Інакше кажучи, множини A та B нетолерантні, якщо немає таких $a \in A$ і $b \in B$, що $a \approx b$.

Означення 4. Нехай $d \in D$. Множина $d^{\#} = \{a \mid a \not\approx d, a \in D\}$ називається нетолерантним доповненням елемента d.

Означення 5. Нехай $A \subseteq D$. Множина $A^{\#} = \{d \mid \forall a \in A (d \not\approx a), d \in D\}$ називається нетолерантним доповненням множини A.

З означень випливає, що $A^{\#} = \cap\{a^{\#} \mid a \in A\}$.

Лема 1. Нехай A, $B \subseteq D$ і $A \not\approx B$. Тоді $A \cap B = \varnothing$, $B \subseteq A^{\#}$ і $A \subseteq B^{\#}$.

Доведення леми тривіальне.

Властивості предикатів стабільних відносно відношенням толерантності

Означення 6. Нехай $p \in PL$. Областю l-значення предиката p називається множина $p^l = \{d \mid p(d)\downarrow = l, d \in D\}, l \in L$.

Наведемо декілька очевидних тверджень.

Лема 2. Нехай $p \in PL$. Тоді $(\forall l, l' \in L, l \neq l')(p^l \cap p^{l'} = \varnothing)$. Обернено, нехай $A_l \subseteq D, l \in L$, $A_l \cap A_{l'} = \varnothing, l, l' \in L, l \neq l'$. Тоді існує єдиний предикат $p \in PL$, для якого $p^l = A_l, l \in L$.

Лема 3. Нехай $p \in PLTS$. Тоді p^l, $l \in L$ – нетолерантні множини, що не перетинаються. Обернено, нехай $A_l \subseteq D, l \in L$ – нетолерантні множини, що не перетинаються. Тоді існує єдиний $p \in PLTS$, для якого $p^l = A_l, l \in L$

Інфінітарна алгебра часткових предикатів

Основними операціями над частковими предикатами є унарна операція заперечення $\neg : PL \xrightarrow{t} PL$ і аналоги операцій сильної диз'юнкції $\vee$ і сильної кон'юнкції $\wedge$, введених Кліні. На відміну від традиційних алгебр із *n*-арними операціями, введені операції є множинними – їхніми аргументами є не *n*-ки предикатів, а множини предикатів, тобто ці операції мають тип $2^{PL} \xrightarrow{t} PL$. Тут функціональна стрілка $\xrightarrow{t}$ задає клас тотальних (всюди визначених) відображень.

Означення 7. Інфінітарні операції множинної диз'юнкції, кон'юнкції і унарна операція заперечення задаються наступним чином при $p, p_i \in PL (i \in I), l \in L$:

$$\left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^T = \{d \mid d \in D, \llcorner\!\lrcorner\{p_i(d) \mid i \in I\} = T\} \cup$$
$$\cup \{d \mid d \in D, \exists k \in I (p_k(d) = T)\};$$
$$\left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^l = \{d \mid d \in D, \llcorner\!\lrcorner\{p_i(d) \mid i \in I\} = l\}, l \neq T;$$
$$\left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^F = \{d \mid d \in D, \ulcorner\!\urcorner\{p_i(d) \mid i \in I\} = F\} \cup$$
$$\cup \{d \mid d \in D, \exists k \in I (p_k(d) = F)\};$$
$$\left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^l = \{d \mid d \in D, \ulcorner\!\urcorner\{p_i(d) \mid i \in I\} = l\}, l \neq F;$$
$$(\neg p)^l = \{d \mid d \in D, l = \sim(p(d))\}.$$

Слід зауважити, що: $\cup\{p_i^T \mid i \in I\} \subseteq$ $\subseteq \left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^T$, $\cap\{p_i^F \mid i \in I\} = \left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^F$, де $T = \llcorner\!\lrcorner L$, $F = \ulcorner\!\urcorner L$; аналогічно для кон'юнкції.

Означення 8. Алгебра $AKL(PL, D, L) =$ $= < PL, \vee, \wedge, \neg >$ називається L-значною інфінітарною предикатною алгеброю Кліні.

Будемо використовувати бінарні диз'юнкцію і кон'юнкцію, як скорочення формул $p \vee q = \vee\{p, q\}$, $p \wedge q = \wedge\{p, q\}$. Будемо використовувати найбільший елемент T та найменший – F, причому $\overline{T} = \wedge\varnothing$, $\overline{F} = \vee\varnothing$. Всюди невизначений предикат позначимо $\perp$. Через $\bar{l}$ позначимо константний предикат такий, що $\bar{l}(d)\downarrow = l, \forall d \in D$, $l \in L$.

Теорема 1. Множина предикатів *PLTS* утворює підалгебру алгебри *AKL(PL,D)*.

Доведення. Необхідно показати замкненість класу *PLTS* відносно операцій алгебри.

Нехай $\{p_i \mid i \in I\} \subseteq PLTS$. З однозначності $\vee\{p_i \mid i \in I\}$ випливає, що множини $(\vee\{p_i \mid i \in I\})^l, l \in L$ не перетинаються. Покажемо, що ці множини нетолерантні.

Нехай $(\vee\{p_i \mid i \in I\})(d)\downarrow = l$ та $(\vee\{p_i \mid i \in I\})(d')\downarrow = l'$, $d \approx d'$, $d, d' \in D$. Доведемо, що $l = l'$. Треба розглянути два випадки: $l \neq T$ та $l = T$. Нехай $l \neq T$. Тоді всі предикати на d визначені. Нехай $p_i(d) = l_i, i \in I$. Тепер треба розглянути два наступні підвипадки:

1) Предикати на d' визначені і $p_i(d') = l_i'$, $i \in I$. Оскільки предикати стабільні відносно відношення толерантності, то $l_i = l_i', i \in I$.

2) Не всі предикати визначені на d'; це можливо лише для випадку $l' = T$. Тоді для деякого $p_{i*}(d) = T$, що суперечить $l \neq T$.

Випадок $l = T$ розглядається аналогічно. Для кон'юнкції доведення будується аналогічно. Доведення, для заперечення тривіальне бо інволюція є бієктивною операцією на *L*.

Означення 9. Алгебра $ALTS(PLTS, D, L) = < PLTS, \vee, \wedge, \neg >$ називається інфінітарною алгеброю *L*-значних толерантних предикатів.

Саме алгебра $ALTS(PLTS, D, L)$ є центральним об'єктом дослідження у даній роботі.

Попередньо визначимо важливу підалгебру алгебри $ALTS(PLTS, D, L)$, задану на множині *PBTS* двозначних часткових толерантних предикатів з класу $D \xrightarrow{p} \{T, F\}$. В роботі [8] доводиться замкненість *PBTS* відносно інфінітарних композицій Кліні. Отримуємо наступне твердження.

Лема 4. Алгебра $ABTS(PBTS, D) = < PBTS, \vee, \wedge, \neg >$ є підалгеброю алгебри $ALTS(PLTS, D, L)$.

Система твірних алгебри толерантних предикатів

Для подання класів предикатів звичайно використовують характеристичний предикат χ_d, що однозначно визначає елемент $d \in D$. У термінах областей істинності і хибності він задається так: $\chi_d{}^T = \{d\}$, $\chi_d{}^F = D \setminus \{d\}$. Однак цей предикат не є стабільним відносно відношення толерантності, якщо знайдеться d', відмінне від *d*, таке що $d \approx d'$. Тому замість характеристичного предиката будемо використовувати його найкраще толерантне наближення.

Означення 8. Характеристичним толерантним предикатом елемента $d \in D$ називається предикат τ_d, для якого: $\tau_d^T = \{d\}$, $\tau_d^F = d^\#$.

Очевидно, що предикат τ_d є толерантним.

Означення 10. Характеристичним толерантним предикатом множини $A \subseteq D$ називається предикат $TC(A) = \vee\{\tau_a \mid a \in A\}$.

В силу теореми 1 $TC(A)$ є толерантним.

Лема 5. Нехай $A \subseteq D$. Тоді $TC(A)^T = A$, $TC(A)^F = A^\#$, $TC(A)^l = \varnothing$, $l \in L \setminus \{T, F\}$.

Доведення. Оскільки предикати τ_d та $TC(A)$ є двозначними предикатами з класу *PBTS*, то $TC(A)^l = \varnothing$, $l \notin \{T, F\}$. Двозначність предикатів спрощує також обчислення інших множин. Зокрема, для $TC(A)$, маємо, що

$$TC(A)^T = (\vee\{\tau_a \mid a \in A\})^T = \cup\{\tau_a{}^T \mid a \in A\} = \cup\{a \mid a \in A\} = A;$$

$$TC(A)^F = (\vee\{\tau_a \mid a \in A\})^F = \cap\{\tau_a{}^F \mid a \in A\} = \cap\{a^\# \mid a \in A\} = A^\#.$$

Характеристичний толерантний предикат *TC(A)* є найкращим толерантним предикатом, який характеризує множину *A* своєю областю істинності. Введемо також характеристичний толерантний предикат для множин $\{A_l \mid l \in L\}, A_l \subseteq D$ такий, що A_l характеризується його областю *l*-значення. Для цього додатково знадобиться усюди невизначений предикат, який позначимо $\perp$. Цей предикат є двозначним толерантним предикатом для якого $\perp^T = \perp^F = \varnothing$.

Означення 11. Характеристичним предикатом множини для нетолерантних *L*-індексованих множин $\{A_l \mid l \in L\}, A_l \subseteq D$ називається предикат вигляду:

$$NF(\{A_l \mid l \in L\}) = \vee\{TC(A_l) \wedge \bar{l} \mid l \in L \setminus \{F\}\} \vee \vee(\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp).$$

З теореми 1 та леми 4 випливає, що предикат $NF(\{A_l \mid l \in L\})$ є двозначним і толерантним.

Лема 6. Нехай $\{A_l \mid l \in L\}$ – множина нетолерантних *L*-індексованих підмножин *D*. Тоді $NF(\{A_l \mid l \in L\})^k = A_k$, $k \in L$.

Доведення. З означення випливає:

$$NF(\{A_l \mid l \in L\})^k = \\ = \{d \mid (\vee\{TC(A_l) \wedge \bar{l} \mid l \in L \setminus \{F\}\} \vee \\ \vee (\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp))(d) = k\}.$$

Розглянемо декілька випадків. Якщо $k \notin \{T, F\}$, тоді вираз $(\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp)(d)$ визначений і може приймати значення лише *F*. Зауважимо, що існує єдиний елемент $l \in L$, для якого $(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) = l$, а також існує єдиний елемент $l \in L$, для якого $TC(A_l)(d) = T$. Решта визначена зі значенням *F*. Це означає, що

$$k = \{(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) \mid l \in L \setminus \{F\}\} \vee \\ \vee (\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp)(d) = l.$$

Якщо $k = T$, то знайдеться таке *l*, що $(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) = T$. Тобто $TC(A_l)(d) = T$, а це означає, що $d \in A_l$ і $k = l = T$.

Якщо $k = F$, то для будь-якого $l \in L \setminus \{F\}$ маємо, що $(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) \downarrow = F$, а також $\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp)(d) \downarrow = F$. З цього випливає, що $TC(A_F)(d) \downarrow = T$, тобто $d \in A_F$.

В результаті отримуємо, що будь-який толерантний предикат однозначно характеризується нетолерантними множинами $A_l \subseteq D, l \in L$, тому він задається формулою $NF(\{A_l \mid l \in L\})$. Ця формула побудована з (символів) всюди невизначеного предиката $\perp$, константних предикатів $\{\bar{l} \mid l \in L\}$ і характеристичних предикатів τ_d, де $d \in D$. Одержуємо наступні твердження.

Теорема 2. Множина предикатів $\{\perp\} \cup \{\tau_d \mid d \in D\} \cup \{\bar{l} \mid l \in L\}$ є системою твірних алгебри $ALTS(PLTS, D, L)$.

Теорема 3. Кожен толерантний предикат $p \in PLTS$ однозначно задається виразом (термом алгебри *ALTS*(*PLTS, D,L*)): $NF(\{p^l \mid l \in L\})$. Обернено, кожен терм вигляду $NF(\{A_l \mid l \in L\})$, де множини $A_l \subseteq D, l \in L$ є нетолерантними, однозначно задає толерантний предикат.

Висновки

У статті досліджено клас багатозначних предикатів стабільних відносно відношення толерантності. Побудована алгебра таких предикатів, знайдена система її твірних, а також визначена нормальна форма її елементів. В подальших статтях автори планують побудувати коректне та повне еквaційне числення толерантних предикатів.

Список використаних джерел

1. *Birkhoff G.* Theory of Lattices / *Birkhoff G.* — Moscow: Nauka, 1984. — 568 p. (In Russian).
2. *Shreider Ju. A.* Equality, Resemblance, and Order / *Shreider Ju.* — Moscow: Nauka, 1975. — 266 p. (In Russian).
3. *Cai Wanjing* Knowledge discovery in tolerance relations / *Cai Wanjing, Li Yongli* // 7th International Conference ICT and Knowledge Engineering. — 2009. — P. 89–93.
4. *Skowron A.* Learning Tolerance Relations by Boolean Descriptors: Automatic Feature Extraction from Data Tables / *Skowron A., Polkowski L., Komorowski J.* // Proc. of the Fourth International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets and Machine Discovery. – Tokyo, Japan. — 1996. — P. 11-17.
5. *Dai Ying.* Image clustering using semantic tolerance relation model / *Dai Ying, Cai Dawei* // Proceedings of the Third IASTED European Conference on Internet and Multimedia Systems and Applications. — 2007. — P. 278-283.
6. *Dasa M.* Fuzzy tolerance relation, fuzzy tolerance space and basis / *Dasa M. Chakrabortyb M.K., Ghoshal T.K.* // Fuzzy Sets and Systems. — Vol. 97. — 1993. — P. 361–369.
7. *Nikitchenko M.S.* Algebras of multivalued equitone predicates / *Nikitchenko M.S., Milko S.I.* // Visn., Ser Fiz-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. — 2004. — N 2. — P. 286-295. (in Ukrainian).
8. *Nikitchenko M.S.* Equational logics of partial predicates stable under tolerance relations / *Nikitchenko M.S., Rossada T.V.* // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences, Kharkov: Apostrophe Pupl. — 2012.

Надійшла до редколегії 03.12.2012

УДК 517.956

Номіровський Д.А.[1], д.ф.-м.н., доц.

Апріорні нерівності для лінійних диференціальних псевдогіперболічних моделей

Для лінійного диференціального псевдогіперболічного оператора доведено апріорні нерівності в деяких класах узагальнених функцій скінченного порядку.

Ключові слова: псевдогіперболічне рівняння, апріорні нерівності, рівняння з частинними похідними, узагальнені функції.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д, e-mail: kashpir@mail.ru

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

D.A. Nomirovskii[1], Ph.D.

A priori inequalities for linear differential pseudohyperbolic equations

For linear differential pseudohyperbolic equations a priori inequalities in some classes of finite order distributions are proved.

Key words: pseudohyperbolic equation, a priori inequalities, partial differential equation, distributions.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: kashpir@mail.ru

Псевдогіперболічним називають лінійне еволюційне диференціальне рівняння з частинними похідними, яке має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} A(u) + B(u) = f(t, \xi),$$

де $u(t, \xi)$ — шукана функція, $t \in \mathbb{R}$ — часова змінна, $\xi \in \mathbb{R}^n$ — вектор просторових змінних, $(t, \xi) \in Q$ — область функціонування системи, A та B — лінійні диференціальні оператори (найчастіше другого порядку) за просторовими змінними.

Такі рівняння виникають при дослідженні багатьох актуальних прикладних процесів. Наприклад, одна з поширених моделей тепломасопереносу з урахуванням теплової нерівноважності середовища базується на узагальненому законі Фур'є. При такому підході основне рівняння, що описує процес, має вигляд:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta u = f.$$

Псевдогіперболічні моделі також описують нестаціонарні процеси у середовищах з малою в'язкістю; процеси міграції хімічних речовин в неоднорідних середовищах; гетеродифузію двома шляхами (процеси типу сорбції-десорбції та конвективне перенесення домішок); взаємодію акустичних хвиль з твердими частками з урахуванням дії радіаційного тиску (напруги); високотемпературні процеси горіння; рух рідини в деформованому пористому середовищі з урахуванням реологічних властивостей скелета тощо [1-4].

Властивості псевдогіперболічних моделей вивчалися в багатьох роботах. Наприклад, у статтях [5,6] досліджується глобальна регулярна розв'язність крайових задач для псевдогіперболічного оператора, зокрема, випадок рівняння з нелінійними молодшими членами, крайові задачі з косою похідною тощо. Формули для розв'язку псевдогіперболічного рівняння при гладких вхідних даних та за певних умов, накладених на оператори рівняння, знайдено в [7].

У даній статті доведено низку апріорних нерівностей для лінійного псевдогіперболічного оператора, які розвивають результати отримані в роботах [8, 9].

У циліндричній області $(t, \xi) \in Q = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена однозв'язна область з регулярною межею $\partial\Omega$, розглянемо лінійний псевдогіперболічний оператор третього порядку:

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B(u), \qquad (1)$$

де оператор A не залежить від змінної t і задається диференціальним виразом:

$$A(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(a_{ij}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_i} + a(\xi)u.$$

Диференціальний оператор B задається аналогічним виразом.

© Д.А. Номіровський, 2013

Нехай $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ — матриці коефіцієнтів операторів A і B. Уведемо до розгляду вектори ($\mathcal{L}$-градієнт та відповідно $\mathcal{L}^*$-градієнт функції u):

$$\operatorname{grad}_{\mathcal{L}} u = \mathbf{A}' \operatorname{grad} u_t + \mathbf{B}' \operatorname{grad} u,$$
$$\operatorname{grad}_{\mathcal{L}^*} u = -\mathbf{A} \operatorname{grad} u_t + \mathbf{B} \operatorname{grad} u$$

та числа ($\mathcal{L}$-похідна та відповідно $\mathcal{L}^*$-похідна функції u за вектором $\vec{n}$):

$$\frac{\partial_{\mathcal{L}} u}{\partial \vec{n}} = (\operatorname{grad}_{\mathcal{L}} u, \vec{n})_{\mathbb{R}^n},$$
$$\frac{\partial_{\mathcal{L}^*} u}{\partial \vec{n}} = (\operatorname{grad}_{\mathcal{L}^*} u, \vec{n})_{\mathbb{R}^n}.$$

Припустимо, що межа $\partial\Omega$ області Ω складається з трьох регулярних частин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Покладемо $\Gamma_i = (0,T) \times \gamma_i$, де $i \in \{1,2,3\}$.

Нехай шукана функція $u(t,x)$ задовольняє крайові умови:

$$u|_{\Gamma_1} = \frac{\partial_{\mathcal{L}} u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_2} = \Big(a_0(x)u + \frac{\partial_{\mathcal{L}} u}{\partial \vec{n}}\Big)|_{\Gamma_3} = 0, \quad (2)$$

де $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$, a_0 — неперервна на $\overline{\gamma}_3$ функція.

Позначимо через L_0 множину функцій $u(t,\xi) \in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють крайові умови (2) і однорідні початкові умови:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \ldots = 0. \quad (3)$$

Будемо використовувати таке позначення: $u^{(k)}$ — похідна k-го порядку функції $u(t,\xi)$ за змінною t.

Нехай простори W_0^k та H_0^k, де $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, утворені як поповнення лінійної множини L_0 відповідно за нормами:

$$\|u\|^2_{W_0^k} = \sum_{i=1}^n \int_Q \Big(u^{(k)}_{\xi_i}\Big)^2 dQ, \quad (4)$$

$$\|u\|^2_{H_0^k} = \int_Q \Big(u^{(k)}\Big)^2 + \sum_{i=1}^n \Big(\Big(\int_0^t u_{\xi_i} d\tau\Big)^{(k)}\Big)^2 dQ.$$

Нехай L_T — множина функцій $v(t,\xi) \in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють спряжені однорідні початкові та крайові умови:

$$v|_{t=T} = \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=T} = \ldots = 0,$$
$$v|_{\Gamma_1} = \frac{\partial_{\mathcal{L}^*} v}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_2} = \Big(a_0(x)v + \frac{\partial_{\mathcal{L}^*} v}{\partial \vec{n}}\Big)|_{\Gamma_3} = 0.$$

Покладемо W_T^k та H_T^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — поповнення множини L_T відповідно за нормою (4) та за нормою:

$$\|v\|^2_{H_T^k} = \int_Q \Big(v^{(k)}\Big)^2 + \sum_{i=1}^n \Big(\Big(\int_T^t v_{\xi_i} d\tau\Big)^{(k)}\Big)^2 dQ.$$

Порівнюючи між собою наведені норми і перевіряючи для них умову π), неважко довести, що справджується така лема.

Лема 1. *Для довільного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мають місце щільні неперервні вкладення:*

1) $H_0^{k+1} \subset W_0^k \subset H_0^k \subset L_2(Q)$;

2) $H_T^{k+1} \subset W_T^k \subset H_T^k \subset L_2(Q)$.

Щільні та неперервні вкладення леми 1 дозволяють розглянути гільбертові оснащення. Позначимо через $(W_0^k)^*$, $(W_T^k)^*$, $(H_0^k)^*$, $(H_T^k)^*$ відповідні спряжені простори. Тоді:

1) $L_2(Q) \subset (H_0^k)^* \subset (W_0^k)^* \subset (H_0^{k+1})^*$;

2) $L_2(Q) \subset (H_T^k)^* \subset (W_T^k)^* \subset (H_T^{k+1})^*$.

На парах позитивних і негативних просторів задано білінійні форми (розширення за неперервністю скалярного добутку в $L_2(Q)$). Наприклад, білінійну форму на $(W_0^k)^* \times W_0^k$ будемо позначати $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_0^k}$.

Будемо вважати, що коефіцієнти a_{ij}, b_{ij}, a_i, b_i, a і b — неперервні в $\overline{\Omega}$ функції. Крім цього, нехай $a_{ij} = a_{ji}$; також припускаємо, що оператор A є рівномірно еліптичним в області $\overline{\Omega}$, тобто для довільних дійсних λ_i при кожному $\xi \in \overline{\Omega}$ має місце нерівність

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi)\lambda_i\lambda_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad (5)$$

де α — додатна стала, яка не залежить від $\xi \in \overline{\Omega}$ і $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що в даній роботі невід'ємність оператора B не вимагається.

Для довільних функцій $u \in L_0$, $v \in L_T$ розглянемо вираз $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}$. Використовуючи формулу інтегрування за частинами, неважко встановити рівність:

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = -(u_t, v_t)_{L_2(Q)} + (a_0 u, v)_{L_2(\Gamma_3)} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{\xi_i t} + b_{ij}u_{\xi_i}, v_{\xi_j})_{L_2(Q)} + \quad (6)$$
$$+ \sum_{i=1}^n (a_i u_{\xi_i t} + b_i u_{\xi_i}, v)_{L_2(Q)} + (au_t + bu, v)_{L_2(Q)}.$$

Якщо до доданків правої частини рівності (6) застосувати нерівність Коші-Буняковського в інтегральній формі і нерівності Фрідріхса (за часовою і просторовими змінними), то отримаємо:

$$|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}| \leqslant c\|u\|_{W_0^1}\|v\|_{H_T^1},$$

де c — деяка додатна стала, що не залежить від функцій u і v.

Це означає, що праву частину рівності (6) можна розглядати як означення лінійного і неперервного оператора, що діє з простору W_0^1 в простір $(H_T^1)^*$ і визначений на всьому просторі W_0^1. Цей оператор є розширенням класичного псевдогіперболічного оператора (1). За усіма розширеннями оператора $\mathcal{L}$, тут і далі, зберігатимемо попереднє позначення.

Отже, для псевдогіперболічного оператора $\mathcal{L}\colon W_0^1 \to (H_T^1)^*$ і довільної функції $u \in W_0^1$ справджується нерівність:

$$\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^1)^*} \leqslant c\|u\|_{W_0^1}. \tag{7}$$

Використовуючи формулу інтегрування за частинами і початкові умови, перетворимо деякі з доданків правої частини рівності (6):

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{\xi_i t}, v_{\xi_j})_{L_2(Q)} = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{\xi_i}, v_{\xi_j t})_{L_2(Q)},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i u_{\xi_i t}, v)_{L_2(Q)} = -\sum_{i=1}^{n}(a_i u_{\xi_i}, v_t)_{L_2(Q)}.$$

Тоді отриманий вираз буде визначати лінійний та неперервний оператор $\mathcal{L}$, що діє у просторах $\mathcal{L}\colon H_0^1 \to (W_T^1)^*$.

Аналогічно наведеному вище можна показати, що для всіх $u \in H_0^1$ справджується нерівність

$$\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^1)^*} \leqslant c\|u\|_{H_0^1}. \tag{8}$$

Доведемо, що для лінійного псевдогіперболічного оператора $\mathcal{L}$ виконуються апріорні нерівності в негативних нормах.

Теорема 1. *Для довільної функції $u \in W_0^1$ мають місце нерівності*

$$\|u\|_{W_0^0} \leqslant c_1\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^1)^*} \leqslant c_2\|u\|_{H_0^1} \leqslant$$
$$\leqslant c_3\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^1)^*} \leqslant c_4\|u\|_{W_0^1}, \tag{9}$$

де c_i — додатні сталі, що не залежать від функції $u(t,\xi)$.

Нерівності, які оцінюють норму оператора $\mathcal{L}$ зверху, співпадають з нерівностями (7), (8), доведеними вище. Доведення нерівностей, що встановлюють коерцитивність оператора $\mathcal{L}$, розіб'ємо на декілька частин.

Сформулюємо дві прості допоміжні леми.

Лема 2. *Лінійний оператор $lv = \beta v_{tt} - v_t + v$, де $\beta > 0$, що діє в просторах $l\colon W_T^2 \to W_0^0$, здійснює гомеоморфізм між цими просторами.*

Доведення. Обмеженість оператора l випливає з нерівності Фрідріхса і нерівності Коші-Буняковського в інтегральній формі.

Доведемо коерцитивність оператора l. Для довільної функції $v \in L_T$ розглянемо вираз

$$P = (lv, e^{2\alpha t}(v_{tt} - v_t))_{L_2(Q)},$$

де α — деяка дійсна стала. Використовуючи формулу інтегрування за частинами, неважко довести нерівність:

$$P \geqslant \int_Q e^{2\alpha t}\left(\beta v_{tt}^2 + v_{tt}v + \alpha v^2 + v_t^2\right) dQ.$$

Тоді при достатньо великих α знайдеться таке $c > 0$, що

$$c\|lv\|_{L_2(Q)}\left(\|v_{tt}\|_{L_2(Q)} + \|v_t\|_{L_2(Q)}\right) \geqslant$$
$$\geqslant P \geqslant c^{-1}\left(\|v_{tt}\|_{L_2(Q)}^2 + \|v_t\|_{L_2(Q)}^2\right).$$

Звідси $c_1\|lv\|_{L_2(Q)} \geqslant \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}$.

Аналогічно доводиться, що

$$c_1\sum_{i=1}^{n}\left\|(lv)_{\xi_i}\right\|_{L_2(Q)}^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left\|v_{\xi_i tt}\right\|_{L_2(Q)}^2.$$

Таким чином, для довільної функції $v \in L_T$ має місце нерівність $c_2\|lv\|_{W_0^0} \geqslant \|v\|_{W_T^2}$. Беручи до уваги щільність множини $R(l)$ в просторі W_0^0 і доведені вище нерівності, робимо висновок, що оператор l здійснює гомеоморфізм між просторами W_T^2 і W_0^0. □

Аналогічно можна довести і таку лему.

Лема 3. *Лінійний оператор $lv = v_t - v$, що діє у просторах $l\colon W_T^1 \to W_0^0$, здійснює гомеоморфізм між цими просторами.*

Перейдемо до доведення нерівностей, що встановлюють коерцитивність оператора $\mathcal{L}$.

Лема 4. *Нехай* $\mathcal{L}\colon H_0^1 \to (W_T^1)^*$. *Для довільної функції* $u \in H_0^1$ *має місце нерівність*

$$\|u\|_{W_0^0} \leqslant c\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^1)^*}, \qquad (10)$$

де c *— додатна стала, що не залежить від функції* $u(t,\xi)$.

Доведення. Розглянемо $\mathcal{L}u$ на елементі v (тут під $\mathcal{L}u$ розуміється функціонал з $(W_T^1)^*$), де функція $v(t,\xi)$ — розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$e^{Mt}(v_t - v) = -u(t,\xi), \quad v|_{t=T} = 0. \qquad (11)$$

Значення додатної сталої M наведемо пізніше.

Відзначимо, що легко встановити належність функції $v(t,\xi)$ простору W_T^1. Справді, оскільки функція $u(t,\xi)$ належить простору H_0^1, то за лемою 1 можна стверджувати, що функція $-e^{-Mt}u(t,\xi)$ є елементом простору W_0^0. Використовуючи лему 3 і посилаючись на рівність (11), маємо, що $v \in W_T^1$.

За теоремою про сліди норма простору H_0^1 утримує значення функцій цього простору у точці $t = 0$, тобто для кожної функції $u \in H_0^1$ виконується рівність $u|_{t=0} = 0$.

Перетворимо та оцінимо вираз $\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{W_T^1}$. Для цього розглянемо доданок $-(u_t, v_t)_{L_2(Q)}$. Використовуючи рівність (11), маємо:

$$-(u_t, v_t)_{L_2(Q)} = \left(u_t, e^{-Mt}u\right)_{L_2(Q)} - (u_t, v)_{L_2(Q)}.$$

Застосовуючи формулу

$$e^{-Mt}u_t u = \frac{1}{2}(e^{-Mt}u^2)_t + \frac{M}{2}e^{-Mt}u^2,$$

переходячи до поверхневих інтегралів і беручи до уваги умову $u|_{t=0} = 0$, отримаємо:

$$\left(u_t, e^{-Mt}u\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\int_\Omega e^{-MT}u^2|_{t=T}d\Omega + \frac{M}{2}\int_Q e^{-Mt}u^2 dQ \geqslant \frac{M}{4}\|e^{-Mt/2}u\|_{L_2(Q)} + \frac{M}{4}\int_Q e^{Mt}(v_t - v)^2 dQ.$$

Оцінимо доданок $(u_t, v)_{L_2(Q)}$. При $M > 8$ маємо:

$$-(u_t, v)_{L_2(Q)} = (u, v_t)_{L_2(Q)} = (u, v)_{L_2(Q)} - \|e^{-Mt/2}u\|_{L_2(Q)} = \left(ve^{Mt}, v\right)_{L_2(Q)} - \left(v_t e^{Mt}, v\right)_{L_2(Q)} - \|e^{-Mt/2}u\|_{L_2(Q)} \geqslant \frac{M}{4}\int_Q e^{Mt}2v^2 dQ - \frac{M}{8}\|e^{-Mt/2}u\|_{L_2(Q)}.$$

Таким чином, ураховуючи нерівність

$$(v_t - v)^2 + 2v^2 \geqslant \frac{1}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v^2,$$

можна записати:

$$-(u_t, v_t)_{L_2(Q)} \geqslant \frac{M}{8}\left(\|e^{-Mt/2}u\|_{L_2(Q)} + \|e^{Mt/2}v_t\|_{L_2(Q)} + \|e^{Mt/2}v\|_{L_2(Q)}\right).$$

Розглянемо другий доданок. Маємо:

$$-\left(a_{ij}u_{\xi_i}, v_{\xi_j t}\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\left(a_{ij}e^{Mt}(v_{\xi_i t} - v_{\xi_i}), v_{\xi_j t}\right)_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\left(a_{ij}u_{\xi_i}, (e^{-Mt}u_{\xi_j} - v_{\xi_j})\right)_{L_2(Q)}.$$

Використовуючи симетричність коефіцієнтів $a_{ij} = a_{ji}$ і умову $v|_{t=T} = 0$, маємо:

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}e^{Mt}v_{\xi_i}, v_{\xi_j t}\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}v_{\xi_i}v_{\xi_j}|_{t=0}d\Omega + \frac{M}{4}\sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij}e^{Mt}v_{\xi_i}v_{\xi_j}dQ.$$

Використовуючи рівномірну еліптичність оператора A, тобто умову (5), отримуємо

$$-\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}u_{\xi_i}, v_{\xi_j t}\right)_{L_2(Q)} \geqslant \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n \int_Q e^{-Mt}u_{\xi_i}^2 + e^{Mt}v_{\xi_i t}^2 + \frac{M}{2}e^{Mt}v_{\xi_i}^2 dQ - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}u_{\xi_i}, v_{\xi_j}\right)_{L_2(Q)}. \qquad (12)$$

Всі інші доданки виразу $\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{W_T^1}$, а також останній доданок правої частини нерівності (12), оцінимо знизу. Для цього скористаємося нерівністю Коші у вигляді $ab \geqslant -\varepsilon a^2 - \frac{1}{4\varepsilon}b^2$, де $\varepsilon > 0$, інтегральною нерівністю Коші-Буняковського, нерівністю Фрідріхса та обмеженістю всіх коефіцієнтів оператора $\mathcal{L}$.

Тоді неважко встановити, що сума I всіх цих доданків задовольняє нерівність

$$I \geqslant -\varepsilon\int_Q \sum_{i=1}^n e^{-Mt}u_{\xi_i}^2 dQ - c_1\int_Q e^{-Mt}u^2 + e^{Mt}v^2 + e^{Mt}v_t^2 + \sum_{i=1}^n e^{Mt}v_{\xi_i}^2 dQ,$$

де додатна стала c_1 залежить лише від коефіцієнтів оператора $\mathcal{L}$ та області Q (не залежить від функцій u та v).

Якщо значення сталої M обрати досить великим і скористатися отриманими оцінками, то буде справджуватися нерівність

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{W_T^1} \geqslant c^{-1}\|u\|^2_{W_0^0} + c^{-1}\|v\|^2_{W_T^1}.$$

Застосовуючи до лівої частини нерівність Шварца, а до правої частини нерівність Коші, отримаємо:

$$\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^1)^*}\|v\|_{W_T^1} \geqslant \langle \mathcal{L}u, v\rangle_{W_T^1} \geqslant$$
$$\geqslant c^{-1}\|u\|^2_{W_0^0} + c^{-1}\|v\|^2_{W_T^1} \geqslant 2c^{-1}\|u\|_{W_0^0}\|v\|_{W_T^1}.$$

Якщо в останній нерівності ліву і праву частини скоротити на $\|v\|_{W_T^1}$, то отримаємо нерівність (10). □

Лема 5. *Нехай $\mathcal{L}\colon W_0^1 \to (H_T^1)^*$. Для довільної функції $u \in W_0^1$ має місце нерівність*

$$\|u\|_{H_0^1} \leqslant c\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^1)^*}, \qquad (13)$$

де c — додатна стала, що не залежить від функції $u(t,\xi)$.

Доведення. Розглянемо значення функціоналу $\mathcal{L}u \in (H_T^1)^*$ на елементі v_t, де функція $v(t,\xi)$ — розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку:

$$e^{Mt}\left(v - v_t + \beta v_{tt}\right) = -u_t(t,\xi), \qquad (14)$$
$$v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0. \qquad (15)$$

Значення додатних сталих M та β наведемо пізніше.

Відзначимо, що легко встановити належність функції v_t простору H_T^1. Справді, оскільки функція $u(t,\xi)$ належить простору W_0^1, то $u_t \in W_0^0$. Використовуючи лему 2 і посилаючись на рівність (14), маємо, що $v \in W_T^2$. Звідси функція v_t належить простору W_T^1, а отже, з огляду на лему 1, і простору H_T^1.

За теоремою про сліди норма простору W_0^1 утримує значення функцій цього простору у точці $t = 0$ і на межі області Ω, тобто для кожної функції $u \in W_0^1$ виконуються рівності $u|_{t=0} = 0$ і $u|_{x\in\partial\Omega} = 0$.

Перетворимо та оцінимо вираз $\langle \mathcal{L}u, v_t\rangle_{H_T^1}$. Для цього підставимо значення функції u_t (див. рівність (14)) в означення оператора $\mathcal{L}$ і розглянемо кожний доданок окремо.

Розглянемо доданок $-(u_t, v_{tt})_{L_2(Q)} = I_1 + I_2 + I_3$. Застосовуючи рівність (14), формулу $avv_t = \frac{1}{2}\left(av^2\right)_t - \frac{1}{2}a_t v^2$, формулу інтегрування за частинами, переходячи до поверхневих інтегралів і приймаючи до уваги умови $v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0$, отримаємо:

$$I_1 = \int_Q e^{Mt} v v_{tt} dQ = \int_\Omega \Big(\frac{Mv^2}{2} - vv_t\Big)|_{t=0} d\Omega +$$
$$+\frac{M^2}{2}\int_Q e^{Mt} v^2 dQ - \int_Q e^{Mt} v_t^2 dQ.$$

Міркуючи аналогічним чином, розглянемо доданок I_2. Маємо:

$$I_2 = -\int_Q e^{Mt} v_t v_{tt} dQ = \frac{1}{2}\int_\Omega v_t^2|_{t=0} d\Omega +$$
$$+\frac{M}{2}\int_Q e^{Mt} v_t^2 dQ.$$

Доданок I_3 має вигляд:

$$I_3 = \beta \int_Q e^{Mt} v_{tt}^2 dQ.$$

Перейдемо до розгляду доданку

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{t\xi_i}, v_{t\xi_j})_{L_2(Q)} = I_4 + I_5.$$

Ураховуючи рівність (14), симетричність матриці $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ і умову (5) рівномірної еліптичності оператора A, маємо:

$$I_4 = -\sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} v_{\xi_i} v_{t\xi_j} dQ \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega v_{\xi_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha M}{2}\sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{\xi_i}^2 dQ.$$

Міркуючи аналогічним чином, перетворимо доданок I_5.

$$I_5 = -\sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt}\left(-v_{t\xi_i} + \beta v_{tt\xi_i}\right) v_{t\xi_j} dQ \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha\beta}{4}\sum_{i=1}^n \int_\Omega v_{t\xi_i}^2|_{t=0} d\Omega +$$
$$+\frac{\alpha\beta M}{4}\sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{t\xi_i}^2 dQ -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} \beta v_{tt\xi_i} v_{t\xi_j} dQ.$$

Позначимо останній доданок отриманої рівності через J. Ураховуючи рівність $\beta v_{tt} = v_t - v - e^{-Mt}u_t$, перетворимо доданок J.

$$J = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}e^{Mt}\left(v_{t\xi_i} - v_{\xi_i}\right)v_{t\xi_j}dQ + \\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}u_{t\xi_i}v_{t\xi_j}dQ.$$

Проінтегруємо за частинами відносно змінної t другу суму в правій частині останньої рівності і замість отриманого члена $v_{tt\xi_j}$ підставимо $\frac{1}{\beta}\left(v_{t\xi_j} - v_{\xi_j} - e^{-Mt}u_{t\xi_j}\right)$. Отримуємо:

$$J = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}e^{Mt}\left(v_{t\xi_i} - v_{\xi_i}\right)v_{t\xi_j}dQ - \\ -\frac{1}{2\beta}\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}u_{\xi_i}\left(v_{t\xi_j} - v_{\xi_j}\right)dQ + \\ +\frac{1}{2\beta}\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}e^{-Mt}u_{\xi_i}u_{t\xi_j}dQ.$$

Останній доданок оцінимо наступним чином:

$$\frac{1}{2\beta}\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}e^{-Mt}u_{\xi_i}u_{t\xi_j}dQ \geqslant \\ \geqslant \underline{\frac{\alpha e^{-MT}}{4\beta}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u^2_{\xi_i}|_{t=T}d\Omega + \\ +\frac{\alpha M}{4\beta}\sum_{i=1}^{n}\int_Q e^{-Mt}u^2_{\xi_i}dQ.}$$

Міркуючи так само, як і при доведенні леми 4, решту доданків виразу $\langle \mathcal{L}u, v_t\rangle_{H_T^1}$ можна оцінити знизу через підкреслені невід'ємні члени, отримані в доданках $I_1, \ldots, I_5$. Для цього спочатку сталу β треба обрати достатньо малою, а потім сталу M — достатньо великою.

Таким чином, має місце нерівність

$$\langle \mathcal{L}u, v_t\rangle_{H_T^1} \geqslant c^{-1}\int_Q e^{Mt}\Big(v_{tt}^2 + \sum_{i=1}^{n}v_{t\xi_i}^2\Big)dQ + \\ +c^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_Q e^{-Mt}u_{\xi_i}^2dQ.$$

З нерівності Фрідріхса випливає існування такої додатної сталої c, що $\|u_t\|^2_{L_2(Q)} \leqslant c\|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)}$. Отже,

$$\langle \mathcal{L}u, v_t\rangle_{H_T^1} \geqslant c_1^{-1}\|v_t\|^2_{H_T^1} + c_1^{-1}\|u\|^2_{H_0^1}.$$

Застосовуючи до лівої частини нерівність Шварца, а до правої частини нерівність Коші, і скорочуючи на $\|v_t\|_{H_T^1}$, завершуємо доведення нерівності леми 5 і теореми 1:

$$\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^1)^*}\|v_t\|_{H_T^1} \geqslant \langle \mathcal{L}u, v_t\rangle_{H_T^1} \geqslant \\ \geqslant 2c_1^{-1}\|v_t\|_{H_T^1}\|u\|_{H_0^1}.$$

□

Список використаних джерел

1. Voyt S.S. The spread of the initial sealing in a viscous gas // Uchenye Zapiski MGU. Mechanics. 1954. V.172, N 5. P. 125-142. (in Russian).

2. Fushchich V.I., Galitsyn A.S., Polubinskii A.S. A new mathematical model of heat conduction processes // Ukrainian Math. J. 1990. V.42, N 2. P. 210-216.

3. Ismatov M. On a mixed problem for the equation describing the propagation of sound in a viscous gas // Differential Equations. 1984. V. 20, N 6. P. 1013-1024. (in Russian).

4. Suveyka I.I. Mixed problems for the propagation of perturbations in viscous media // Differential Equations. 1983. V. 19, N 2. P. 337-347. (in Russian).

5. Kozhanov A.I. A problem with an oblique derivative for some pseudo-parabolic equations and equations close to them // Sibirsk. Mat. Zh. 1996. V. 37, N 6. P. 1335 1346.

6. Kozhanov A.I. Some classes of nonstationary equations with increasing lower terms // Sibirsk. Mat. Zh. 1998. V. 39, N 4. P. 875-885.

7. Fomin V.I. On the solution of the cauchy problem for a second-order linear differential equation in a banach space // Differential Equations. 2002. V. 38, N 8. P. 1219-1222.

8. Nomirovsky D.A. Numerical methods of optimization and modelling in pseudohyperbolic systems. Dissertation for the degree of a cand. of physical and math. sciences. Kyiv, 1999. 157p. (in Ukrainian).

9. Nomirovskii D.A. Unique solvability of pseudohyperbolic equations with singular right-hand sides // Mat. Zametki. 2006. V. 80, N 4. P. 582-595.

Надійшла до редколегії 21.01.2013

УДК 519.681

[1]Россада Т.В., асист.

Моделі реляційних номінативних даних

У статті будуються та досліджуються моделі реляційних номінативних даних та програм над ними.

Ключові слова: моделі даних, мови програм, індексування

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,0$_3$680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: trossada@mail.ru

[1]Rossada T.V., assist.

Models of relational nominative data

In article constructed and investigated relational model of nominative data and applications on them.

Key Words: data model, language programs, indexing

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: trossada@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Полісемія є необхідною складовою будь-якої природної мови [1]. Але у формальних системах (мовах програмування, специфікацій та їх формальних моделях) довгий час намагалися притримуватися принципу однозначності іменування [2-3]: кожне ім'я може мати лише один денотат, тобто позначати лише один предмет, клас предметів або властивість.

Аналіз сучасних мов програмування та специфікацій дозволяє стверджувати, що цей принцип, насправді, не є абсолютним: неоднозначність у формальних системах може не тільки допускатися, але й використовуватися для збільшення виразності. У статті будемо будувати моделі реляційних номінативних даних [4] із багатозначним іменуванням та полісемією.

Моделі реляційних номінативних даних

Стаття є продовженням дослідження [5-6]. Будемо використовувати наступні визначення та позначення ($d, d' \in ND(V, W), v \in V$).

- (іменний) шлях в даному d довжиною $k \in \mathbb{N}$ – не порожня послідовність імен $(v_1, v_2, .., v_k)$ (де $v_i \in V$ для $i = \overline{1..k}$) така, що $d(v_1, v_2, .., v_k)\downarrow$.
- термінальний шлях в d – іменний шлях t такий, що $d(t) = d'$ і $d' \in W$;
- $f(x)\downarrow$ - функція f визначена на x.
- $f(x)\uparrow$ - функція f не визначена на x.
- $f(x) \simeq g(x)$ – значення функції f на x рівне у смислі «=» значенню функції g на у у випадку, якщо вони обидві визначені.
- $d(v_1,v_2,..,v_k)$, де $k \in \mathbb{N}$ визначається індуктивно наступним чином:
  - для k=1: $d(v_1)=d'$ якщо $v_1 \longmapsto d' \in_n d$;
  - для k=2: $d(v_1, v_2)=(d(v_1))(v_2)$;
  - для k>2: $d(v_1, v_2, .., v_k)=(d(v_1))(v_2, .., v_k)$;
- $\in_{Rn}$ – предикат номінативної належності, запис $v \mapsto d' \in_{Rn} d$ означає, що в d існує шлях $t=(v_1,..,v_k)$, де $k > 0$, $v_k=v$ і $d(t)=d'$.
- множина кореневих імен даного d: $rn(d)=\{u|d(u)\downarrow\}$;
- множина атомних кореневих імен даного d: $ra(d) = \{u|d(u)=d' \text{ і } d' \in W\}$;
- множина імен даного d: $nms(d) = \{v \in V \mid$ існує шлях t такий, що $d(t, v)\downarrow\}$.

Решту позначень трактуємо у смислі [4]. Розглянемо відношення R на множині номінативних даних класу $ND(V,W)$, що базується на відношення еквівалентності, заданому на множині базових значень W. Визначаємо індуктивно за рангом номінативного даного k:

- k=0 ($ND_0(V,W)=W$): $\forall w_1,w_2 \in W$ будемо казати, що $(w_1,w_2) \in R$ тоді і тільки тоді, коли $w_1 \sim w$;
- k>0: $\forall d_1,d_2 \in ND_k(V,W)$ будемо казати, що $(d_1,d_2) \in R$ тоді і тільки тоді, коли $rn(d_1)=rn(d_2)$ і для $\forall v \in rn(d_1)$, $\forall r_1, r_2$ таких, що $r_1=d_1(v)$ і $r_2=d_2(v)$ вірно, що $(r_1, r_2) \in R$ (і $(r_2, r_1) \in R$).

Твердження 1. Для $\forall d_1,d_2 \in ND(V,W)$ вірно наступне: якщо $(d_1, d_2) \in R$, то $nms(d_1)=nms(d_2)$.

Розглянемо підклас реляційних номінативних даних $RND(V,W) \subseteq ND(V,W)$, для яких відношення R є рефлексивним. Це означає, що кожен елемент цього класу є номінативним даним, в якому однакові імена приймають значення, що перебувають у відношенні R.

Твердження 2. R є відношенням еквівалентності на множині даних класу $RND(V,W)$.

Доведення.

© Т.В. Россада, 2013

Відношення R є рефлексивним і симетричним за визначенням. Доводимо транзитивність індукцією за рангом реляційного номінативного даного. Нехай $(d_1,d_2)\in R$ і $(d_2,d_3)\in R$.

База індукції. Якщо $d_1,d_2,d_3\in W$, то транзитивність випливає із транзитивності відношення еквівалентності на W.

Індуктивний крок. Нехай транзитивність виконується для всіх даних класу $RND_k(V,W)$. Тоді, якщо $d_1,d_2,d_3\in RND_{k+1}(V,W)$, $(d_1,d_2)\in R$ і $(d_2,d_3)\in R$, то вірно наступне:

1) $rn(d_1)=rn(d_2)$ і $rn(d_2)=rn(d_3)$, а отже і $rn(d_1)=rn(d_3)$ (випливає із транзитивності «=»);

2) для $\forall v\in nms(d_1)$ (а отже і $nms(d_2)$, і $nms(d_3)$) і для $\forall r_1,r_2,r_3$ таких, що $r_1=v\Rightarrow_R d_1$, $r_2=v\Rightarrow_R d_2$ і $r_3=v\Rightarrow_R d_3$ виконується наступне: $(r_1,r_2)\in R$ (і $(r_2,r_1)\in R$), $(r_2,r_3)\in R$ (і $(r_3,r_2)\in R$). А оскільки $r_1,r_2,r_3\in RND_k(V,W)$, то $(r_1,r_3)\in R$ (і $(r_3,r_1)\in R$).

Отже індуктивне припущення вірне.

Твердження доведено.

Приклад реляційного номінативного даного із полісемією подано на рис. 1.

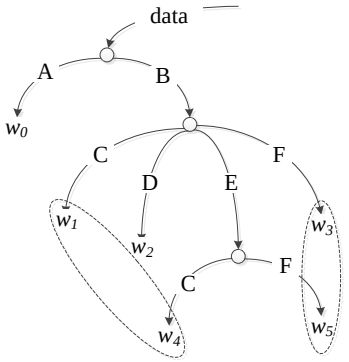


Рис. 1. Приклад даного класу $RND(V,W)$

Оскільки R є відношенням еквівалентності на множині даних класу $RND(V,W)$, будемо використовувати позначення «~».

Індексація даних класу $RND(V,W)$

Визначимо операцію індексації над даними класу $RND(V,W)$. Нас цікавить індекс реляційного номінативного даного як реляційна множина із множиною значень, що включає в себе прості і складені, позначимо клас. Для $d\in RND(V,W)$: $ind_R(d)=[v\mapsto r|v\in nms(d)$ і $v\mapsto r\in_{Rn}d]$. Приклад номінативного даного та його індексу подано на рис. 2.

Твердження 3. Для $\forall d\in RND(V,W)$ вірним є: $ind_R(d)\in RND(V,W)$, $ind_R(d)\in RN\tilde{S}(V,W\cup W')$, де $W'\subseteq RND(V,W)$.

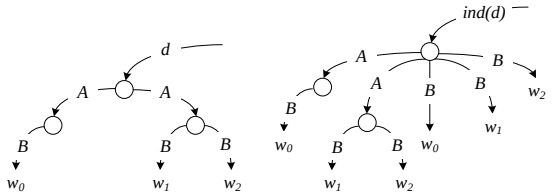
Доведення слідує із визначення.

Зауваження. Існують такі $d, d'\in RND(V,W)$, які не еквівалентні, але $ind_R(d)\sim ind_R(d')$.

Приклад 1. Нехай $d_1=[A\mapsto[B\mapsto 1],\ B\mapsto 1]$, $d_2=[A\mapsto[B\mapsto 1]]$. Тоді $ind(d_1)=[A\mapsto[B\mapsto 1],\ B\mapsto 1,\ B\mapsto 1]$, $ind(d_2)=[A\mapsto[B\mapsto 1],\ B\mapsto 1]$. Тоді вірно наступне: $d_1\not\sim d_2$, але $ind(d_1)\sim ind(d_2)$.

Будемо казати, що $d, d'\in RND(V,W)$ – порівнювані (позначатимемо $d\equiv d'$), якщо виконується умова: $ind_R(d)//ind_R(d')\sim ind_R(d')//ind_R(d)$, тобто якщо однакові імена приймають еквівалентні значення.

Приклад реляційного номінативного даного та його індексу подано на рис. 2.



а) б)

Рис. 2. Приклад а) реляційного номінативного даного та б) його індексу

Визначимо базові функції (б.ф.) та операції над даними класу $RND(V,W)$ ($v\in V$, $d,d'\in RND(V,W)$):

- розіменування: $v\Rightarrow_R(d)=v\Rightarrow_r(ind_R(d))$;
- реляційне оновлення: $d\dagger_R[v\mapsto d']\uparrow$ якщо $d\not\equiv d'$ або $v\in nms(d)$; інакше, якщо $d\equiv[v\mapsto d']$, то:

- якщо $v\notin rn(d)$, то $d\dagger_R[v\mapsto d']=d\dagger_R[t\mapsto\mapsto(r\dagger_R[v\mapsto d'])|t\in rn(d)$, $r=t\Rightarrow_R(d)$ і $v\in nms(r)]$;
- якщо $v\in rn(d)$, то $d\dagger_R[v\mapsto d']=d\dagger_R[v\mapsto\mapsto d']\dagger_R[t\mapsto(r\dagger_R[v\mapsto d'])|t\in rn(d)$, $r=t\Rightarrow_R d$ і $v\in nms(r)]$;

інкаше, якщо $d\not\equiv[v\mapsto d']$, то:

- якщо $v\notin rn(d)$, то $d\dagger_R[v\mapsto d']=d\dagger_R[t\mapsto\mapsto(r\dagger_R^{all}[v\mapsto d'])|t\in rn(d)$, $r=t\Rightarrow_R d$ і $v\in nms(r)]$;
- якщо $v\in rn(d)$, то $d\dagger_R[v\mapsto d']=d\dagger_R^{all}[v\mapsto\mapsto d']\dagger_R[t\mapsto(r\dagger_R^{all}[v\mapsto d'])|t\in rn(d)$, $r=t\Rightarrow_R d$ і $v\in nms(r)]$;

- функція-константа: $\overline{\varnothing}(d)=\varnothing$.

Приклад 2. Для $d=[A\mapsto[B\mapsto w_0],\ C\mapsto w_1]$, $d'=w_2$, $(w_0,w_2)\in R$: $d\dagger_R[B\mapsto d']=r$, де r приймає одне із значень: $[A\mapsto[B\mapsto w_0],\ C\mapsto w_1]$, $[A\mapsto[B\mapsto w_2],\ C\mapsto w_1]$, $[A\mapsto[B\mapsto w_0,\ B\mapsto w_2]$, $C\mapsto w_1]$.

Приклад 3. Для $d=[A\mapsto[B\mapsto w_0],\ C\mapsto w_1]$, $d'=[C\mapsto w_2]$, $(w_1,w_2)\in R$: $d\dagger_R[A\mapsto d']=r$, де r приймає одне із значень: $[A\mapsto[C\mapsto w_2],\ C\mapsto w_1]$, $[A\mapsto[C\mapsto w_2],\ C\mapsto w_2,\ C\mapsto w_1]$, $[A\mapsto[B\mapsto w_0]$, $C\mapsto w_2]$.

Алгебра програм над класом RND(V,W)

Алгебра програм над класом даних *RND(V,W)* визначається сигнатурою $\{v\Rightarrow, \overline{\varnothing}; S^{[v_1,..,v_n]}, As^x, \bullet, IF, WH\}$, де операція $v\Rightarrow$ інтерпретується як $v\Rightarrow_R$; As^v, залежне від $v\in V$ – як унарна композиція, що задається формулою $As^v_R(f)(d) = d \dagger_R [v\mapsto f(d)]$; суперпозиція інтерпретується наступним чином: $S^{[v_1,v_2,..,v_n]}(f,g_1, ..,g_n)(d)=f(d\dagger_R [v_1\mapsto g_1(d),...,v_n\mapsto g_n(d)])$. Інтерпретації композицій послідовного виконання, умовного оператора та циклу задаються в цих алгебрах звичайним чином. Кожен семантичний терм *Pr* інтерпретується в алгебрах програм над класом даних *RND*(*V*,*W*) як певна функція (клас таких функцій позначимо як $F_R(V,W)$), або предикат (клас таких предикатів позначимо як $P_R(V,W)$). Наведені композиції та класи функцій утворюють програмну алгебру: $A_Prog_R(RND(V,W),V,W)=<SF_m, SP_m, v\Rightarrow, \overline{\varnothing}; S^{[v_1,..,v_n]}, As^x, \bullet, IF, WH>$. Доведемо це.

Теорема 1. Для $\forall d\in RND(V,W)$ $\forall$ терму f в A_Prog_R вірно наступне: $f(d)\in RND(V,W)$.

Доведення.

Лема 1. Для $\forall d\in RND(V,W)$ вірно наступне: $v\Rightarrow(d)$, $\overline{\varnothing}(d)\in RND(V,W)$.

Доведення леми випливає із визначення б.ф.

Лема 2. Для $\forall d, d'\in RND(V,W)$, $v\in V$ вірно наступне: $d\dagger_R [v\mapsto d']\in RND(V,W)$.

Доведення слідує із визначення операції оновлення.

Доводимо теорему індукцією за рангом k операторного терму f.

База індукції, k=0. Для $\forall f\in F_R^0$, де $F_R^0=\{v\Rightarrow_R, \overline{\varnothing}\}$ виконується за лемою 1.

Індуктивний крок, k>0. Припустимо, твердження вірне для $\forall f\in F_R^k$ (інд.п.). Перевіримо для $f\in F_R^{k+1}\setminus F_R^k$. Можливі такі варіанти.

1) f визначається як $S^{[v_1,v_2..,v_n]}(g, f_1, f_2, .., f_n)$, де $g, f_1, f_2, .., f_n \in F_R^k$ (тут і далі, формально, k є сумою рангів операторних термів, до яких застосовується композиція, у даному випадку: $g, f_1, f_2, .., f_n$; це означає, що ранг кожного з них $\le k$); тоді, за інд. п., $f_1(d), f_2(d) ,.., f_n(d)\in RND(V,W)$; тоді, за інд. п., $g(f_1(d), f_2(d) ,.., f_n(d))\in RND(V,W)$;
2) f визначається як $As^v_R(f_1)$, де $f_1\in F_R^k$; за визначенням $As^v_R(f_1)(d)\downarrow = d \dagger_R [v\mapsto f_1(d)]$, якщо $v\notin nms(f_1(d))$ і $d\equiv f_1(d)$; тоді, за інд.п., $f_1(d)\in RND(V,W)$, отже , за визначенням РНД, $[v\mapsto f_1(d)]\in RND(V,W)$; тоді, за лемою 2, $d \dagger_R [v\mapsto f_1(d)] \in RND(V,W)$;
3) f визначається як $f_1 \bullet f_2$, де $f_1, f_2 \in F_R^k$, тоді $f_1(d)\in RND(V,W)$ за припущенням, отже і $f_2(f_1(d))\in RND(V,W)$;
4) f визначається як IF(p, f_1, f_2), де $p \in P_R^k$, $f_1, f_2 \in F_R^k$; тоді можливі два випадки:
   a. $p(d)\downarrow=true$, і тоді IF(p, f_1, f_2)(d)= $f_1(d)$, а за інд.п. $f_1(d)\in RND(V,W)$;
   b. $p(d)\downarrow=false$, і тоді IF(p, f_1, f_2)(d)= $f_2(d)$, а за інд.п. $f_2(d)\in RND(V,W)$;
5) f визначається як WH(p, g), де $p \in P_R^k$, $g\in F_R^k$. Тоді WH(p, g)(d) $\downarrow$ тоді і тільки тоді, коли $p^{(k)}(d)\downarrow=true$, і $p^{(i)}(d)\downarrow=false$ для $i=\overline{1..k}$, при цьому WH(p, g)(d)=$g^{(k)}(d)$; використовуючи інд. п. k разів, маємо, що $g^{(k)}(d)\in RND(V,W)$.

Індукційний перехід завершено.

Теорему доведено.

Теорема 2. Для $\forall d, d'\in RND(V,W)$, $f\in F_R$ вірно наступне: $d\sim d' \Rightarrow f(d)\simeq f(d')$.

Доведення.

Для доведення необхідна наступна лема.

Лема 3. Для $\forall d,d'\in RND(V,W)$ таких, що $d\sim d'$, вірно наступне: $v\Rightarrow_R(d) \sim v\Rightarrow_R(d')$ і $\overline{\varnothing}(d) \sim \overline{\varnothing}(d')$.

Доведення випливає із визначення б.ф.

Лема 4. Для $\forall d_1, d_1', d_2, d_2'\in RND(V,W)$ таких, що $d_1\sim d_1'$ і $d_2\sim d_2'$, $\forall v\in V$ вірно наступне: $d_1\dagger_R[v\mapsto d_1']\simeq d_2\dagger_R[v\mapsto d_2']$.

Доведення випливає із визначення операції оновлення.

Доводимо теорему індукцією за рангом k побудови операторного терму f.

База індукції, k=0. Для $\forall f\in F_R^0$, де $F_R^0=\{v\Rightarrow_R, \overline{\varnothing}\}$ виконується за лемою 3.

Індуктивний крок, k>0. Нехай твердження вірне для $\forall f\in F_R^k$. Перевіримо для $f\in F_R^{k+1}\setminus F_R^k$. Можливі такі варіанти.

1) f визначається як $S^{[v_1,v_2..,v_n]}(g, f_1, f_2, .., f_n)$, де $g, f_1, f_2, .., f_n\in F_R^k$; тоді, за інд.п., $f_1(d)\sim f_1(d')$, $f_2(d)\sim f_2(d')$, .., $f_n(d)\sim f_n(d')$;

тоді, за інд. п., $g(f_1(d), f_2(d), .., f_n(d)) \sim g(f_1(d'), f_2(d'), .., f_n(d'))$;

2) f визначається як $As_R^v(f_1)$, де $f_1 \in F_R^k$; за визначенням $As_R^v(f_1)(d)\downarrow = d \dagger_R [v \mapsto f_1(d)]$, якщо $v \notin nms(f_1(d))$ і $d \equiv f_1(d)$; тоді, за інд.п., $f_1(d) \sim f_1(d')$; тоді, за лемою 4, вірно наступне: $d \dagger_R [v \mapsto f_1(d)] \sim d' \dagger_R [v \mapsto f_1(d')]$.

3) f визначається як $f_1 \bullet f_2$, де $f_1, f_2 \in F_R^k$, тоді $f_1(d) \sim f_1(d')$ за припущенням, отже і $f_2(f_1(d)) \sim f_2(f_1(d'))$;

4) f визначається як IF(p, f_1, f_2), де $p \in P_R^k$, $f_1, f_2 \in F_R^k$; тоді можливі два випадки:

   a. $p(d)\downarrow = true$, і тоді $p(d')\downarrow = true$ за інд.п.; тоді IF(p,f_1,f_2)(d)=$f_1(d)$, IF(p,f_1,f_2)(d')=$f_1(d')$, а за інд.п. $f_1(d) \sim f_1(d')$;

   b. $p(d)\downarrow = false$, і тоді $p(d')\downarrow = false$ за інд.п.; тоді IF(p,f_1,f_2)(d)=$f_2(d)$, IF(p,f_1,f_2)(d')=$f_2(d')$, а за інд.п. $f_2(d) \sim f_2(d')$;

5) f визначається як WH(p, g), де $p \in P_R^k$, $g \in F_R^k$. Тоді $WH(p, g)(d)\downarrow$ тоді і тільки тоді, коли $p^{(k)}(d)\downarrow = true$, і $p^{(i)}(d)\downarrow = false$, причому $p^{(k)}(d')\downarrow = true$, і $p^{(i)}(d')\downarrow = false$ для $i = \overline{1..k}$; тоді $WH(p, g)(d)=g^{(k)}(d)$ і $WH(p, g)(d')=g^{(k)}(d')$; використовуючи інд. п. k разів, маємо, що $g^{(k)}(d) \sim g^{(k)}(d')$.

Індукційний перехід завершено.

Теорему доведено.

Теорема 3. Для $\forall d \in RND(V,W)$, для будь-якого операторного терму $f \in F_R$ мови SiCoN виконується наступне: $ind_R(f(d)) \simeq f(ind_R(d))$.

Доведення.

Для доведення необхідна наступна лема.

Лема 5. Для $\forall d \in RND(V,W)$ вірно наступне: $ind_R(d) \sim d$.

Доведення слідує із визначення.

Лему доведено.

За лемою 5 $\forall d \in RND(V,W)$ вірно наступне: $ind_R(d) \sim d$. Тоді, з теореми 2 випливає, що $f(ind_R(d)) \simeq f(d)$. Тоді, за лемою 5 вірно наступне: $f(ind_R(d)) \simeq ind_R(f(d))$.

Теорему доведено.

Висновки

Побудовано реляційні номінативні дані із полісемією, введено семантичні інтерпретації мови програм SiCoN над цими даними та індексація. Ці результати можуть використовуватись для задач, в яких доцільно використовувати багатозначне іменування та еквівалентні значення.

Список використаних джерел

1. *Gluschevskaya N.V.* Polysemantic word in the speech of the child of preschool age: Dissertation for the degree of PhD: 10.02.01 / Gluschevskaya Nadezhda – Cherepovets, 2004 (in Russian).
2. *Frege G.* Meaningful and meaningless/ «Zeitschrift i'iir philosophic und philosophische kritik». – 1892. – Vol 100. – Pp. 25-50 (in German).
3. *Biryukov B.V.* Gottlob Frege: modern view / B.V. Biryukov // Frege. Logic and logical semantics. Collection of Works –M., 2000 (in Russian).
4. Nikitchenko N.S. A Composition Nominative Approach to Program Semantics // Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark.– 1998.– 103 p.
5. *Rossada T.V.* The formalization of multi-valued naming in program languages over nominative data // Bulletin of Kyiv National Taras Shevchenko University. Series: Physics & Mathematics. – 2012. – № 1. – P. 218–227 (In Ukrainian).
6. Rossada T.V. Properties of semistructed data with multi-valued naming and their use / T. Rossada, A. Sklar // Bulletin of Kyiv National Taras Shevchenko University. Series: Physics & Mathematics. – № 2. – 2012. –P. 217–222.

Надійшла до редколегії 10.01.2013

УДК 514.17, 515.1

Рубльов Б.В.[1], д.ф.-м.н., проф.
Танцюра Б.В., студент
Молодцов О.І., к.ф.-м.н., доц.

Визначення метрики на деревах спеціального вигляду

У цій статті розглядаються деякі попередні підходи до розв'язання задачі розрізнення топологічних форм функцій, їх переваги та недоліки, а також ідея нового підходу

Ключові слова: функція, топологічна форма, метрика

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики,
e-mail: rublyovbv@gmail.com

B. V. Rublov[1], PhD
B. V. Tantsiura, student
O. I. Molodcov, PhD

Definition of metrics on trees of special shape

In this article some previous approaches for solving the problem of distinguishing topological shapes of functions, their advantages and disadvantages, and the idea of a new approach are considered

Key words: function, topological shape, metrics

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova st., 6, faculty of cybernetics
e-mail: rublyovbv@gmail.com

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

Вступ

Порівняння функції є важливим елементом у сучасній прикладній математиці. Якщо ці функції задані своїми формулами чи графіками, то методів їх порівняння багато, майже будь-яка відома метрика дає змогу тим чи іншим чином оцінити близькість функцій. На практиці функції можуть визначатися самими різноманітними засобами, тому і порівнювати доводиться об'єкти досить складної природи. В цій статті ми плануємо досліджувати топологічну близькість функцій.

Позначимо через $S^{(0)}$ сукупність усіх неперервних функцій, що визначені на $[a; b]$, та мають скінченну кількість екстремумів. Крім того ми будемо розглядати кусково-лінійні функції, оскільки для вивчення топологічних властивостей, які нас цікавлять, цього цілком достатньо. Розглянемо довільну функцію $f \in S^{(0)}$, і зробимо з цією функцією такі перетворення.

Якщо $f(a) \neq f(b)$, то продовжимо функцію f до функції f_1, що визначена на проміжку $[a; b] \cup [b; 2b-a]$ „парним чином", тобто $\forall t \in [0; b-a]$ виконується рівність: $f_1(b-t) = f_1(b+t)$ (рис. 1). В подальшому будемо вважати, що $f \in S^{(0)}$ та $f(a) = f(b)$.

Якщо $f(a) = f(b)$ не є глобальним мінімумом функції, то нехай f має глобальний мінімум у точці $c \in (a; b)$. Тоді розглянемо замість функції f таку функцію f_2, яка визначена на проміжку $[c; c+b-a]$ шляхом перенесення відповідного шматка функції з проміжку $[a; c]$ на проміжок $[b; c+b-a]$ (рис. 2).

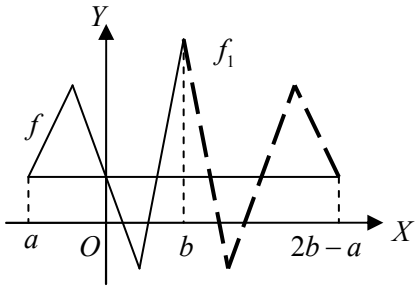


Рис. 1

Паралельним переносом зсунемо графік функції таким чином, щоб вона стала визначеною на проміжку $[0; b-a]$, а множина значень дорівнювала $[0; d]$. Тепер стисканням (чи розтягуванням) вздовж координатних осей досягнемо того, щоб

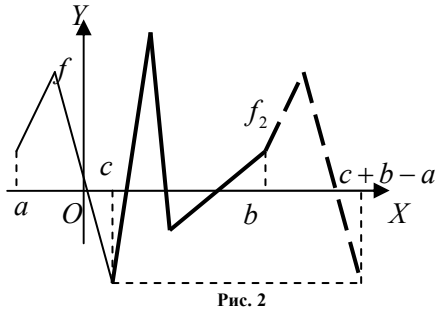


Рис. 2

© Б.В. Рубльов, Б.В. Танцюра, О.І. Молодцов, 2013

$D(f) = E(f) = [0; 1]$. Множину усіх таких функцій назвемо класом S.

Опишемо більш точно представника класу функцій S: тобто

$f \in S \quad \Leftrightarrow \quad f \in C[0; 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $E(f) = [0; 1]$,

f має скінченну кількість екстремумів на $[0; 1]$.

Легко зрозуміти, що ми тепер можемо порівнювати неперервні функції, що визначені на сегменті, а також періодичні неперервні функції.

Через S_1 позначимо такий підклас функцій класу S, у яких кожні два екстремуми мають різну амплітуду, окрім двох глобальних мінімумів. Ці мінімуми однакові за побудовою функцій класу S, для періодичної функції це фактично одне й те ж значення.

Розрізнювання топологічної форми функцій є важливим не тільки з теоретичної точки зору, а й з прикладної і має важливе застосування в таких науках як медицина та біологія. Це питання вивчали багато математиків (див. [1]). Метою даної роботи є розробка нового дескриптора топологічних форм одновимірних функцій. Дескриптором в даному випадку будемо вважати деяку метрику, яка має бути близькою до нуля для топологічно схожих функцій та неблизькою до нуля для несхожих. Топологічно схожими будемо вважати функції із схожими послідовностями локальних мінімумів та максимумів з певним урахуванням їх амплітуд. Наведемо приклади схожих та несхожих функцій. На рис. 3 а) та рис. 3 б) функції топологічно схожі, а на рис. 3 а) та рис. 3 в) – несхожі.

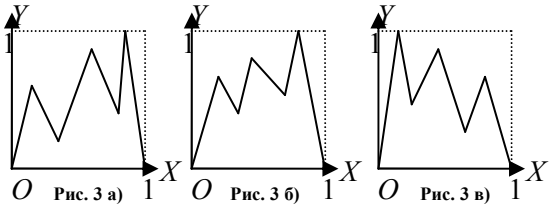


Рис. 3 а) Рис. 3 б) Рис. 3 в)

Два методи інтерпретації функцій

Найбільш поширеним підходом для цих цілей зараз використовується метод «діаграм стійкості» («Persistence diagrams») (див. [1]), опишемо його більш детально. По-перше, це буде корисно читачам, які мало обізнані поки що в цій тематиці, по-друге, ми будемо показувати недоліки запропонованого методу та порівнювати його з новим підходом. Для зручності, опишемо паралельно також і новий підхід.

Нехай є деяка функція $f \in S_1$. Для кожного y із області значень функції f розглянемо множину $E_y = \{ x \mid f(x) \le y \}$. На рис. 4 E_y позначена суцільною лінією. Зазвичай, E_y є об'єднанням деякої кількості відрізків. Розглянемо як буде змінюватись E_y при збільшенні y від найменшого до найбільшого. В кожній точці локального мінімуму буде з'являтись новий відрізок, а в кожній точці локального максимуму два відрізки будуть «зливатись». При «злитті» відрізків будемо вважати, що відрізок, який з'явився пізніше «помирає», а інший продовжує «жити».

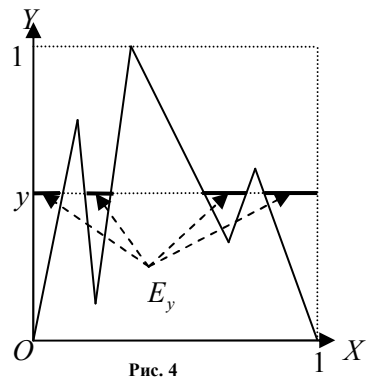
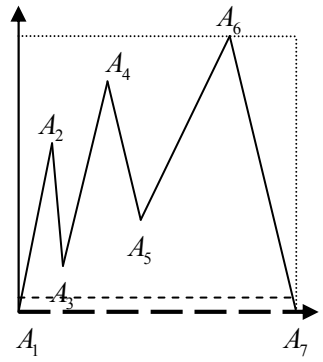
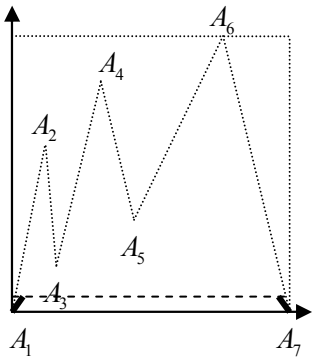
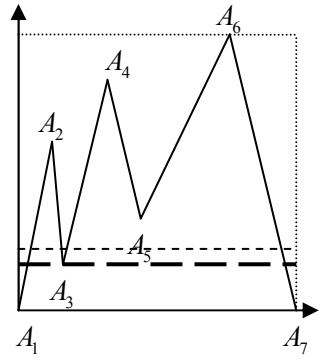
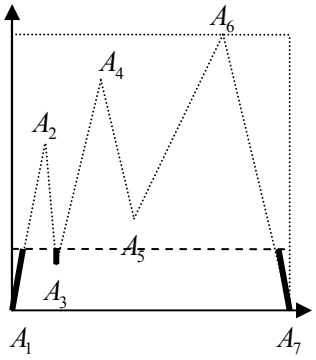
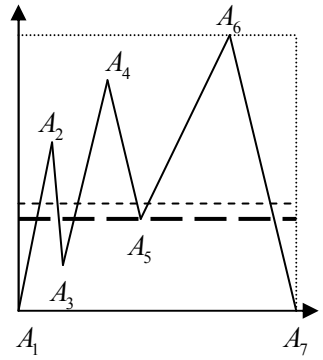
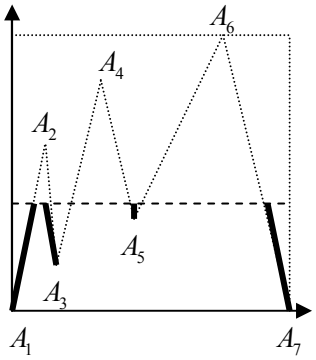
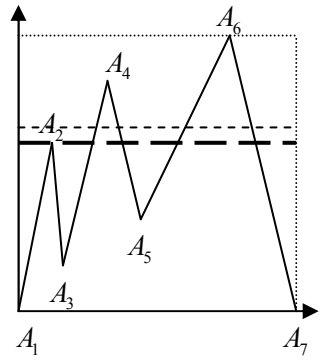
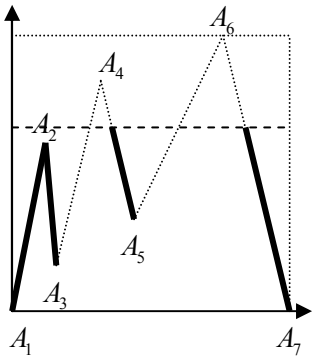
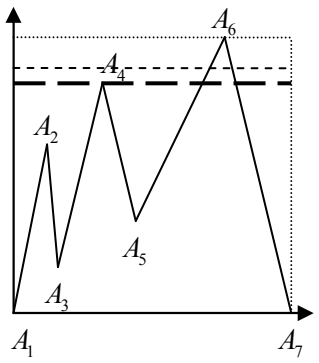
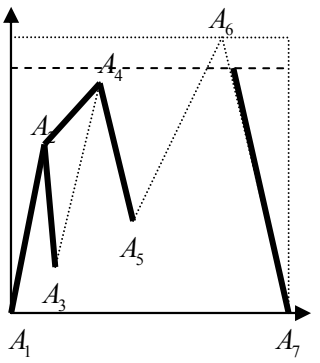
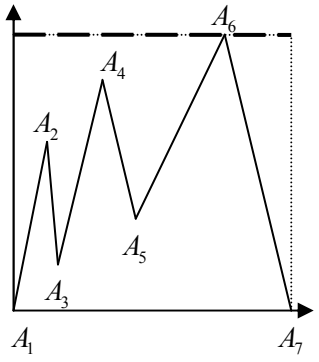
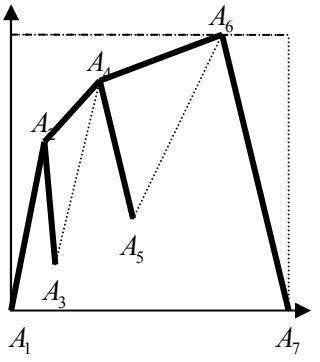


Рис. 4

Для нового алгоритму, який ми назвемо «двійкове дерево», у кожний момент нова компонента зв'язності множини E_y (тобто прохід через локальний мінімум функції) породжує нове ребро графу, а зникнення компоненти зв'язності (прохід через локальний максимум функції) – з'єднання двох ребер. При цьому будемо зберігати абсциси та ординати відповідних точок.

Розглянемо виконання алгоритмів, що реалізовують обидва методи, на прикладі.

Графік функції	Двійкове дерево	Діаграма стійкості
		При $y=0$ з'являються два відрізки.
		При $y=0.2$ з'являється ще один відрізок.
		При $y=0.4$ з'являється ще один відрізок.
		При $y=0.6$ відрізок, що з'явився при $y=0.2$ зливається з тим, що з'явився при $y=0$. Тому на діаграмі стійкості з'являється точка $(0.2;0.6)$.

		При $y=0.8$ відрізок, що з'явився при $y=0.4$ зливається з тим, що з'явився при $y=0$. Тому на діаграмі стійкості з'являється точка $(0.4;0.8)$.
		При $y=1$ відрізок, що з'явився при $y=0$ зливається з іншим, що з'явився при $y=0$. Тому на діаграмі стійкості з'являється точка $(0;1)$.
Рис. 5 а)–е)	Рис. 6 а)–е)	

Як легко бачити з реалізації двійкового алгоритму, отриманий граф, який ми будемо називати графом з класу T_1, має вузли у точках локальних екстремумів функції f, при цьому ми в точності зберегли при побудові графа їх координати. Таким чином в подальшому ми можемо стверджувати, що один вузол графа лежить вище за інший та навпаки.

Розглянемо декілька прикладів побудови діаграм стійкості. Для функції з рис. 3а отримуємо діаграму з трьох точок: $(0.2;0.6)$, $(0.4;0.8)$ та $(0;1)$. Абсолютно таку ж діаграму отримаємо для функції з рис. 3в. Для функції з рис. 3б отримаємо: $(0.4;0.7)$, $(0.55;0.85)$ та $(0;1)$.

Порівняння функцій методом діаграми стійкості

У відповідність кожному відрізку, який з'являвся в множині E_y будемо ставити точку на площині координатами якої є час «народження» та час «смерті» відрізка, тобто точка буде в першій четверті вище бісектриси кута першої четверті, оскільки точка «помирає» пізніше, ніж «народжується». Тоді функції буде відповідати діаграма з точок, яку і будемо називати «діаграмою стійкості» («Persistence diagram»). Для двох функцій, які потрібно порівняти, побудуємо діаграми стійкості. Тепер ці діаграми намалюємо на одному малюнку, але різними кольорами (наприклад, точки, що відповідають першій функції, намалюємо червоним, а ті, що другій – зеленим). Також намалюємо бісектрису кута першої четверті. Тепер кожну червону точку з'єднаємо відрізком з зеленою, або з бісектрисою, кожну зелену точку з'єднаємо відрізком з червоною або з бісектрисою. Тобто побудуємо бієкцію між червоними та зеленими точками, але дозволимо ставити у відповідність будь-яким точкам бісектрису (це необхідно, наприклад, коли кількість червоних точок не дорівнює кількості зелених). Відстанню між діаграмами стійкості при даному з'єднанні будемо вважати суму довжин всіх відрізків (відстань можна визначати також інакше, наприклад, максимум довжин відрізків). Нам потрібно знайти таке з'єднання, для якого відстань між діаграмами буде якнайменшою, і саме цю відстань і будемо вважати відстанню між діаграмами, а відповідно і між функціями.

Аналіз двійкового дерева типу T_1

Нагадаємо, що ми спочатку вивчаємо функцію з класу S_1, які відрізняються від функцій класу S тим, що усі максимуми мають різну амплітуду. Тепер опишемо властивості графу класу

Властивість 1. Граф, отриманий за алгоритмом двійкового дерева, є деревом.

Властивість 2. Дерево типу T_1 розташоване на координатний площині у квадраті $[0;1]\times[0;1]$.

Властивість 3. Дерево типу T_1 має вузли з відмінними абсцисами та ординатами від інших вузлів.

Властивість 3. Дерево типу T_1 має один вузол степені 1–3:

- вузол степені 2, який ми назвемо ***коренем***, має координати $(x_0;1)$, де $0<x_0<1$;
- з кожного вузла степені 1, які ми будемо називати ***листочками***, виходить ребро, що направлене вгору, тобто до вузла з більшою ординатою; до листочків обов'язково належать точки $(0;0)$ та $(1;0)$;
- з кожного вузла степені 3, які ми будемо називати ***гілками***, виходить одне ребро нагору та 2 донизу.

Назвемо ***піддеревом*** дерева типу T_1, що відповідає вузлу A, усі вузли дерева, до яких можна дістатись ребрами дерева з вузла A, рухаючись донизу. Нехай з вузла A виходять два ребра у вузол A_1, що має меншу від A абсцису, та A_2, що має більшу від A абсцису. Тоді піддерево, що відповідає вузлу A_1 (A_2) разом з ребром AA_1 (AA_2) називається ***лівим (правим) піддеревом***, що відповідає вузлу A. При цьому вузол A_1 (A_2) називається ***лівим*** (***правим***) ***сином*** вузла A.

Так на рис. 7 для вузла A_4 правим піддеревом є лише ребро A_4A_5, а лівим – ребра A_4A_2, A_2A_1 та A_2A_3. Разом усі ці 4 ребра утворюють піддерево, що відповідає вузлу A_4. Лівим сином вузла A_4 є вузол A_2, а правим – A_5.

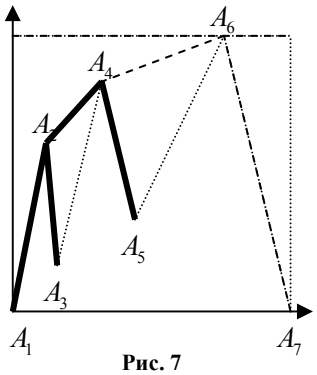


Рис. 7

Властивість 4. Кожне піддерево будь-якого вузла A має властивості аналогічні властивостям 1–3 за виключенням координат кореня та вузлів $(0;0)$ та $(1;0)$.

Доведення цих властивостей випливає безпосередньо з класу функцій S_1 та алгоритму його побудови. Дерево – це зв'язний граф, який не має циклів. З властивостей функцій класу S_1, зрозуміло, що це так. З неперервності функції на сегменті випливає, що усі відрізки, які утворюють множину E_y врешті решт при $y\ge 1$ зіллються у один, тобто граф буде зв'язним. Якщо дивитись на утворення ребер графу, тобто розглядати множину E_y при зростанні ординати y, то жодного разу не буде ситуації, щоб з вузла вгору пішло 2 чи більше ребер. А при наявності циклу, повинний бути вузол з найменшою ординатою, тоді з нього вгору повинно йти щонайменше 2 ребра. Аналогічним чином доводяться й решта властивостей.

Теорема 1. Якщо розглянути дерево t, яке має властивості 1–4, то існує функція $f\in S_1$, для якої двійковий алгоритм дає дерево t.

Доведення. Достатньо просто навести приклад такої функції. Для цього усі вузли дерева t відсортуємо по абсцисах зліва направо і позначимо їх B_1, B_2, ..., B_n. Тепер з'єднаємо відрізками

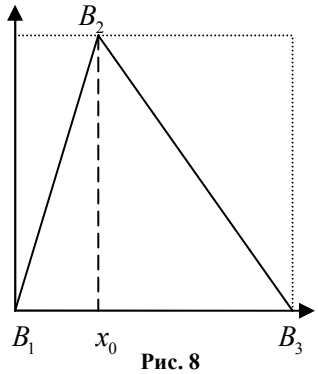


Рис. 8

послідовно ці вершини. Покажемо, що одержана функція f належить класу S_1 та задовольняє потрібні умови.

Будемо доводити твердження методом математичної індукції по кількості вершин. За визначенням класів T_0 та T_1 $n \geq 3$, оскільки точки $(0;0)$, $(1;0)$ є вузлами дерев, а крім того існує також вузол $(x_0;1)$, де $0 < x_0 < 1$, який також повинен бути у деревах кожного типу.

Для $n = 3$ твердження очевидно виконується, бо тут і граф і функція співпадають (рис. 7).

Нехай $n > 3$. Позначимо корінь дерева B_s, а лівого сина B_l. Для піддерева B_l твердження теореми виконується за припущенням індукції, оскільки в ньому вершин менше ніж у всьому дереві. Зазначимо, що вершина B_l має найбільшу ординату серед всіх вершин розташованих лівіше B_s. Тому після проходу прямою (тією, що рухається знизу вгору) вершини B_l від неї буде продовжуватись ребро, яке з'єднається з деяким іншим вже в вершині B_s. Таким чином в дереві, що відповідає функції f, отримуємо ребро, яке було в дереві t. Отже, ліва частина дерева, що відповідає функції f, співпадає з лівою частиною дерева t. Абсолютно аналогічні міркування справедливі і для правої частини дерева.

Теорема доведена.

Перетворення дерева типу T_1 у дерево типу T_2

Тепер зробимо перетворення дерева типу T_1 у подібне дерево, але з певним зсувом по горизонталі його вузлів, яке будемо називати деревом типу T_2. Корінь $A_0(x_0;1)$ дерева типу T_1 переміщуємо в точку дерева типу T_2 з координатами $C_0\left(\frac{1}{2};1\right)$. Далі задамо процес побудови ітераційним чином. Нехай вузол A_k має координати $(x_k; y_k)$ у дереві типу T_1, а координати відповідного йому вузлу C_k у дереві типу T_2 дорівнюють $\left(\frac{2l+1}{2^m}; y_k\right)$. Розглянемо вузли $A_{k+1}(x_{k+1}; y_{k+1})$ та $A_{k+2}(x_{k+2}; y_{k+2})$ – лівого та сина цього вузла A_k, тоді абсциси x'_{k+1} та x'_{k+2} відповідних вузлів C_{k+1} та C_{k+2} знаходяться таким чином (рис. 9) $x'_{k+1} = \frac{4l+1}{2^{m+1}}$ та $x'_{k+2} = \frac{4l+3}{2^{m+1}}$. Якщо вузол A_k є листочком, то переходимо до аналогічного переміщення синів вже переміщених вузлів.

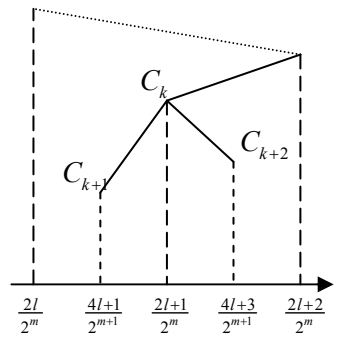


Рис. 9

Так на рис. 10 показане перетворення дерева типу T_1 з рис. 7 до дерева типу T_2. Абсциси вершин мають двійково-раціональні координати, а ординати – зберігаються.

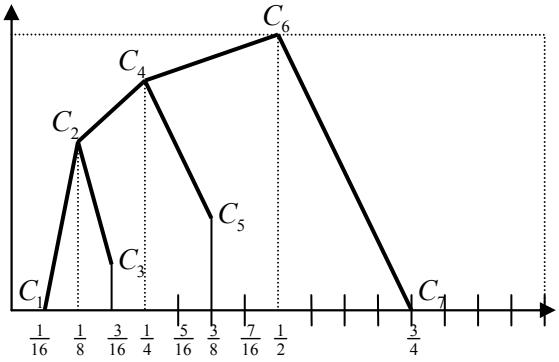


Рис. 10

Список використаних джерел

1. Herbert Edelsbrunner, John Harer, Computational topology. – Departments of Computer Science and Mathematics, Duke University.
2. H. Edelsbrunner, D. Letscher and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. Discrete Comput. Geom.
3. A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing persistent homology. Discrete Comput. Geom.

Надійшла до редколегії 18.02.2013

УДК 517.9: 519.7

Сандраков Г.В.[1], д.ф.-м.н., с.н.с.
Базілєва М.І.[2], студентка

Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток

Розглядається спектральна задача на двовимірному та трьохвимірному «струнному хресті» з умовами контакту, умовами натягу та крайовими умовами періодичності та а-періодичності. У результаті розрахунків отримано розв'язок задачі, який формує одновимірний та двовимірний простір для випадку двовимірного струнного хреста та одновимірний та трьохвимірний простір для випадку трьохвимірний струнного хреста.

Ключові слова: спектральна задача, рівняння Матьє, власні функції, модель «струнний хрест»

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: sandraco@mail.ru,
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: mbazileva91@gmail.com

G.V. Sandrakov, Ph.D.
M.I. Bazileva, student

Spectral problem for fragments of grids and lattices

In the article a spectral problem is considerate on two-dimensional and three- dimensional «string cross» with contact, balance, periodicity and a-periodicity boundary conditions. Solutions of the problem what form one—dimensional, two – dimensional space for the case of two-dimensional string cross and one—dimensional, three-dimensional space for the case of three-dimensional string cross, is obtain as result of calculations.

Keywords: spectral problem, Mathieu equation, Eigen functions, model "string cross"

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: sandraco@mail.ru
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: mbazileva91@gmail.com

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

Розглядається спектральна задача на хресті та фрагменті решітки. За допомогою методів теорії спеціальних функцій будуть описані всі власні значення та підпростори для цієї задачі. Подібні задачі при відсіченні потенціалу розглядаються у [1]. Результати даної роботи можуть бути використані для усереднення спектральних задач на сітках та решітках.

Визначимо множину Y, як об'єднання двох замкнених натягнутих струн σ_1 та σ_2, які зв'язані у спільній середині та розташованих під прямим кутом відносно одна одної. Струни містяться у прямокутнику $Q = [0,\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^2$. Таку множину Y прийнято називати геометричним графом [2]. Позначимо через C^∞(Y) множину функцій u:$Y \to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y гладких функцій, визначених на прямокутнику Q. Функцію u на струнному хресті будемо розглядати, як набір гладких звужень функції на кожну струну хреста, які позначені через $u_1(y_1)$, $u_2(y_2)$ та параметризовані природним чином координатами y_1 із $[0,\pi]$ та y_2 із $[0,\pi]$, [1] у відповідності з [1].

1. Для деяких так визначених u_1 та u_2 та деякого числа $q \neq 0$ розглянемо наступну спектральну задачу на цьому хресті:

$$\begin{aligned} -u_1'' + 2qu_1 \cos 2x &= \lambda u_1, \\ -u_2'' + 2qu_2 \cos 2x &= \lambda u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

з наступною умовою зв'язку у вузлі:

$$u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_2\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{2}$$

умовою балансу натягу у спільному вузлі

$$\begin{aligned} u_1'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - u_1'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \\ + u_2'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) + \left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

та крайовими умовами періодичності та а-періодичності для обох рівнянь, які будуть наведені далі.

© Г.В. Сандраков, М.І. Базілєва, 2013

Спочатку нагадаємо основні відомості про рівняння Матьє. Для однієї функції y, визначеної на відрізку $[0,\pi]$, такі рівняння мають вигляд

$$-y'' + 2qy\cos 2x = \lambda y, q \neq 0, \quad (4)$$

де λ позначає спектральний параметр.

Розглянемо рівняння (4) з граничними умовами Діріхлє

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

Цим умовам відповідає множина злічених дійсних власних значень, які позначаються $B = \{b_n\}_{n=1,2,\dots}$. Для кожного такого $\lambda \in B$ власна функція (4) позначається так

$$se_n(x,q) \quad (5)$$

Такі функції називають непарними розв'язками Матьє [3].

Для *n=2k+1, k=0,1,2…* функції (5) мають період 2π. Відповідно для *n=2k, k=1,2…* функції (5) мають період π.

Рівняння (4) з граничними умовами Неймана

$$y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

має множину злічених дійсних власних значень позначається $A = \{a_n\}_{n=1,2,\dots}$.

Для кожного такого $\lambda \in$ A власна функція (4) позначається так

$$ce_n(x,q) \quad (6)$$

Для *n=2k+1, k=0,1,2…* функції (6) мають період 2π. Відповідно для *n=2k, k=0,1,2…* функції (6) мають період π.

Розв'язки вигляду (6) отримали назву парних розв'язків Матьє.

Інколи рівняння (4) називають загальним рівнянням Матьє. Власні значення та функції рівняння (4) називають значеннями та функціями Матьє [3].

Відомо [3], що визначені власні значення Матьє a_n та b_n впорядковуються наступним чином

$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots$, $q > 0$, та

$a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < \cdots$, $q < 0$.

Розв'язок рівняння Матьє, що відповідає власному значенню a_n(b_n) має n нулів на інтервалі $0 \leq x \leq \pi$.

Розглянемо множину власних функцій

$$\begin{matrix} ce_k(x,q), & k = 2n+1, & n = 0,1\dots, \\ se_k(x,q), & k = 2n, & n = 1,2\dots \end{matrix}$$

Такі функції, у відповідності з [3], у точці $x = \frac{\pi}{2}$ приймають значення $y(\frac{\pi}{2})=0$.

Відповідні функції Матьє

$$\begin{matrix} ce_k(x,q), & k = 2n, & n = 0,1\dots \\ se_k(x,q), & k = 2n+1, & n = 0,1,2\dots \end{matrix}$$

у точці $x = \frac{\pi}{2}$ приймають значення $y(\frac{\pi}{2})\neq 0$.

Розглянемо непарні функції Матьє з номерами *n=2k, k=1,2…*, що мають період π. Граничні умови для цих функцій записуються в такому вигляді [4]:

$$\begin{matrix} u(0) = u(\pi), \\ u'(0) = u'(\pi). \end{matrix} \quad (9)$$

Такі умови називаються періодичними умовами.

Непарні функції Матьє з номерами n=2k+1, k=0,1,2… мають період 2π. Граничні умови для цих функцій записуються в такому вигляді [4]:

$$\begin{matrix} u(0) = -u(\pi) \\ u'(0) = -u'(\pi) \end{matrix} \quad (10)$$

Такі умови називаються аперіодичними умовами. Парні функції Матьє з номерами *n=2k+1, k=0,1,2…* мають період 2π та визначаються граничними умовами (10). Парні функції Матьє з номерами *n=2k, k=0,1,2…* мають період π та визначаються граничними умовами (9).

Теорема 1. Кожне власне значення задачі (1)-(3) з умовами (9) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для *n=2k, k=1,2,… або* $\lambda = a_0$.

Якщо $\lambda = b_n$ *для деякого* $b_n \in B$ та n=2k, *k=1,2,…*, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mse_n \text{ та } u_2 = Kse_n.$$

Якщо $\lambda = a_n$ *для деякого* $a_n \in A$ та *n=2k, k=0,1,…*, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mce_n \text{ та } u_2 = Mce_n.$$

Тут *M, K* позначають довільні сталі.

Доведення. Через те, що за визначенням у обох рівняннях (1) значення λ однакове, то розв'язком відповідних рівнянь буде деяка власна функція Матьє, тобто розв'язки будуть мати вигляд для непарних функцій

$$u_1 = M_1 se_n, u_2 = M_2 se_n$$

відповідно, для парних функцій

$$u_1 = L_1 ce_n, u_2 = L_2 ce_n$$

де $n=2k$, $k=1,2,\ldots$ та M_1, M_2, L_1, L_2 – деякі сталі.

З умови зв'язку (2) випливає, що:

$$M_1 se_n(\frac{\pi}{2}) = M_2 se_n(\frac{\pi}{2})$$
$$L_1 ce_n(\frac{\pi}{2}) = L_2 ce_n(\frac{\pi}{2})$$

Оскільки $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому маємо $L_1 = L_2$. Позначимо ці константи через M. Знайдені розв'язки формують одновимірний простір. Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, тому константи M_1, M_2 можуть набувати довільних значень. Такі розв'язки формують двовимірний простір.

Умова (3) буде виконана за рахунок гладкості функції. Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

Розглянемо задачу (1)-(3) з крайовими умовами (10). Тоді маємо теорему:

Теорема 2. Кожне власне значення задачі (1)-(3) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для $n=2k+1$, $k=0,1,\ldots$

Якщо $\lambda = b_n$ для деякого $b_n \in B$ та $n=2k+1$, $k=0,1,\ldots$, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (10) будуть наступні функції

$$u_1 = Mse_n \text{ та } u_2 = Mse_n.$$

Якщо $\lambda = a_n$ для деякого $a_n \in A$ $n=2k+1$, $k=0,1,\ldots$, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (10) будуть наступні функції

$$u_1 = Mce_n \text{ та } u_2 = Kce_n.$$

Тут M, K позначають довільні сталі.

Доведення. За аналогією до розглянутого вище доведення отримаємо загальні розв'язки для парних функцій

$$u_1 = K_1 ce_n, u_2 = K_2 ce_n,$$

відповідно, для непарних функцій

$$u_1 = N_1 se_n, u_2 = N_2 se_n,$$

де $n=2k+1$, $k=1,2,\ldots$ та K_1, K_2, N_1, N_2 – деякі сталі. То з умови зв'язку (2) випливає:

$$K_1 ce_n(\frac{\pi}{2}) = K_2 ce_n(\frac{\pi}{2})$$
$$N_1 se_n(\frac{\pi}{2}) = N_2 se_n(\frac{\pi}{2})$$

Оскільки $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, тому константи, K_1, K_2 можуть набувати довільних значень. З цього випливає, що розв'язки формують двовимірний простір.

Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому $N_1 = N_2$. Позначимо ці константи через M. Знайдені розв'язки формують одновимірний простір

Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

2. Розглянемо також трьохвимірну задачу.

Визначимо множину Y, як об'єднання трьох замкнених натягнутих струн σ_1, σ_2 та σ_2 , які зв'язані у спільній середині та розташованих під прямим кутом відносно одна одної (рис.).

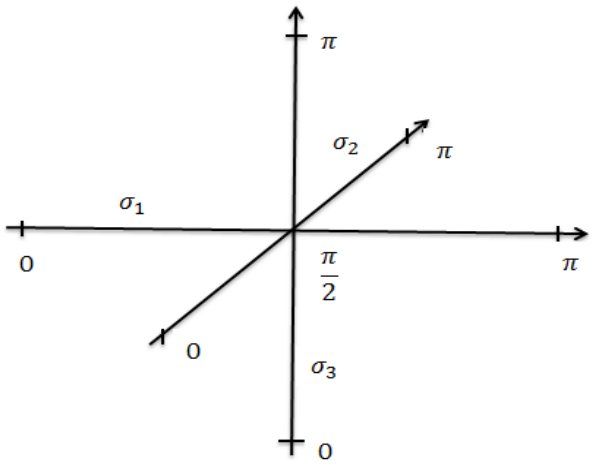


Рис. Трьохвимірна система струн.

Позначимо через $C^{\infty}(Y)$ множину функцій u: $Y \to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y гладких функцій, визначених на прямокутнику Q. Функцію u на такому трьохвимірному хресті будемо розглядати, як набір гладких звужень функції на кожну струну хреста, які позначені через $u_1(y_1)$, $u_2(y_2)$, $u_3(y_3)$, та параметризовані природним чином координатами y_1 із $[0,\pi]$, y_2 із $[0,\pi]$ та y_3 із $[0,\pi]$. [2]. Тоді можливо розв'язати спектральну задачу відносно таких функцій u_1, u_2, u_3 для наступної системи

$$\begin{aligned} -u_1'' + 2qu_1 \cos 2x &= \lambda u_1, \\ -u_2'' + 2qu_2 \cos 2x &= \lambda u_2, \\ -u_3'' + 2qu_3 \cos 2x &= \lambda u_3, \end{aligned} \quad (11)$$

з умовою зв'язку у вузлі

$$u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_3\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (12)$$

та балансу натягу у спільному вузлі

$$\begin{aligned} &u_1'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - u_1'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \\ &+u_2'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) + u_2'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \\ &+u_3'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) + u_3'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Будемо розглядати цю задачу за аналогією до двовимірного випадку. Розглянемо задачу (11)-(13) з крайовими умовами (9).

Теорема 3. Кожне власне значення задачі (11)-(13) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для *n=2k, k=1,2,… або* $\lambda = a_0$

Якщо $\lambda = b_n$ для деякого $b_n \in B$ та *n=2k, k=1,2,…*, тоді розв'язками задачі (11)-(13) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mse_n, u_2 = Kse_n \text{та } u_3 = Lse_n$$

Якщо $\lambda = a_n$, $a_n \in A$ та *n=2k, k=0,1,…*, тоді розв'язками задачі (11)-(13) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mce_n, u_2 = Mce_n, \text{ та } u_3 = Mce_n.$$

Тут M, K, L позначають довільні сталі.

Доведення. Загальний розв'язок системи (11) буде мати вигляд для непарних функцій:

$$u_1 = M_1 se_n,\ u_2 = M_2 se_n,\ u_3 = M_3 se_n,$$

де *n=2k, k=1,2,…*

Відповідно, для парних функцій:

$$u_1 = L_1 ce_n,\ u_2 = L_2 ce_n,\ u_3 = L_3 ce_n$$

де *n=2k, k=0,1,…*

З умови зв'язку (12) випливає, що:

$$M_1 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_2 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_3 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$L_1 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = L_2 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = L_3 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Оскільки $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому, $L_1 = L_2 = L_3$. Позначимо ці константи через M. Такі розв'язки формують одновимірний простір. Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, константи M_1, M_2, M_3 приймають довільні значення. Описані розв'язки формують тривимірний простір. Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

Розглянемо задачу (11)-(13) з крайовими умовами (10).

Теорема 4. Кожне власне значення задачі (11)-(13) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для *n=2k+1, k=0,1,…*

Якщо $\lambda = b_n$ для деякого $b_n \in B$ та *n=2k+1, k=0,1,…*, тоді розв'язками задачі (11)-(13) з умовами (10) будуть наступні функції $u_1 = Mse_n$, $u_2 = Mse_n$ та $u_3 = Mse_n$.

Якщо $\lambda = a_n$ для деякого $a_n \in A$ *n=2k+1, k=0,1,…*, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (10) будуть наступні функції

$$u_1 = Mce_n, u_2 = Kce_n \text{ та } u_3 = Lce_n.$$

Тут M, K ,L позначають довільні сталі.

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 1 отримаємо загальні розв'язки рівнянь (11) для непарних функцій

$$u_1 = K_1 ce_n, u_2 = K_2 ce_n, u_3 = K_3 ce_n,$$

відповідно, для парних функцій

$$u_1 = N_1 se_n, u_2 = N_2 se_n, u_3 = N_3 se_n,$$

де *n=2k+1, k=0,1,…*

То з умови зв'язку (12) випливає:

$$K_1 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = K_2 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = K_3 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$N_1 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = N_2 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = N_3 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Через те, що $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, константи K_1, K_2, K_3 набувають довільних значень. З цього випливає, що розв'язки формують трьохвимірний простір. Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому $N_1 = N_2 = N_3$. Позначимо ці константи через M. Знайдені розв'язки формують одновимірний простір.

Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. Krylova A.S. Homogenization of spectral problem on small-periodic networks/ A.S. Krylova, G.V. Sandrakov // Jornal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2012. - № 3(109). 336-356 p.
2. Pokornyi Yu. V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., Differential Equations on Geometric Graphs. – Moscow: Fizmatlit, 2005. – 272p. (in Russian).
3. Zaytsev V. F., Handbook of Ordinary Differential Equations. – Moscow: Fizmatlit, 2001. – 576 p. (in Russian).
4. Yanke E., Emde F., Lesch F., Special functions: formulas, charts, tables – Moscow:Nauka, 1964.– 344 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 29.01.13

УДК 519.68

Терещенко В.М.[1], д.ф.-м.н., доц.

Оптимальний алгоритм локалізації точки для тривимірного простору

Робота присвячена дослідженню задачі локалізації точки у R^3. Запропонований алгоритм розв'язання задачі базується на модифікованому методі смуг і дозволяє виділити грані що локалізують задану точку за час O(logN) з використанням $O(N^3)$ пам'яті.

Ключові слова: локалізація точки, запитна точка, 3-вимірний простір, смуга, дерево, структура даних.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: vtereshch@gmail.com

V.N. Tereshchenko[1] , Dr. Sci.(Phis.-Math.), As. Prof.

The point-location problem for three-dimensional space

The paper is devoted research the point-location problem in Euclidean 3-dimensional space. We propose an algorithm for solving the problem, which is based on a modified slab method and allows to find facets that localize the point in O (logN) time using O (N^3) memory.

Key Words: point-location, 3-dimensional space, query point, a 3-dimensional space, slab, tree, data structures.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: vtereshch@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Постановка проблеми. Проблема локалізації точки є однією з основних тем обчислювальної геометрії. Локалізація точки застосовується в сферах, які пов'язані з обробкою геометричних даних, для розрахунку фізичних процесів: механіка, термодинаміка тощо. Швидка локалізація точки може пришвидшити роботу існуючих алгоритмів зменшивши кількість даних та об'єктів які беруть участь у обрахунках. Це можливо завдяки відсіканню тих об'єктів які знаходяться за межами області інтересів. Також локалізація точки може використовуватись у картографічних алгоритмах. Багатовимірна локалізація точки може використовуватись у алгоритмах штучного інтелекту.

Основне питання для комп'ютерних додатків, які використовують геометричні структури (наприклад, для комп'ютерної графіки, географічні інформаційні системи, робототехніка, і бази даних) звучить так: "Де я?". Враховуючи безліч незалежних геометричних об'єктів, ставиться питання знайти об'єкт, що містить точки запиту. Проблеми локалізації розрізняються по розмірності і типу об'єкта, чи є набір початкових даних статичний або динамічний. Рішення розрізняються по часу попередньої обробки, об'єму пам'яті, і часу виконання запиту [3].

Аналіз останніх досліджень. На сьогоднішній день існує багато алгоритмів розв'язання задачі локалізації в просторі з розмірністю менше 3 [2]. Одним із найбільш відомим є "метод деталізації тріангуляції" Кіркпатріка [6]. Ця задача може вважатися повністю розв'язаною, але задача для $d > 2$ викликає багато питань і не існує єдиного відомого чіткого алгоритму розв'язання [7]. Для простору розмірності 2 ефективними є наступні алгоритми: метод ланцюгів [2], метод смуг [2], *persistent search trees* [4]. В таблиці 1 подано основні результати розв'язання задачі локалізації точки на сьогодні.

D.P. Dobkin та R.J. Lipton [1] розв'язують проблему локалізації точки в багатовимірному просторі шляхом рекурсивного проектування d вимірної задачі на d-2 або d-1 вимірну. Час пошуку $O(d\log N)$, а пам'ять $O(N^{2d})$.

© В.М. Терещенко 2013

Таблиця 1

Основні результати задачі локалізації точки

Назва методу	Розмірність простору	Запит	Перед-обробка	Пам'ять
Метод ланцюгів	2	$O(log^2 N)$	$O(N \log N)$	$O(N)$
Метод смуг	2	O(logN)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
persistent search trees [4]	2	$O(\log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
D.P. Dobkin та R.J. Lipton [1]	d	O(d logN)		$O(N^{2\wedge d})$

Новизна та ідея. Запропонована реконструкція методу смуг для тривимірного простору, яка дозволяє одержати $O(\log N)$ час пошуку та $O(N^3)$ пам'яті, що покращує існуючий результат [1].

2 Постановка задачі та метод розв'язання

Постановка задачі. *Задано розбиття геометричного простору N вершинним прямолінійним графом на області, а точка запиту K. Необхідно локалізувати точку на заданому розбитті.*

В даному випадку простором є тривимірний евклідовий простір, в якому задано N точок і множина граней $O(N)$, що побудовані на цих точках. Необхідно для заданої точки знайти грані що її обмежують.

Розглянемо наступну схему побудови алгоритму локалізації точки для масових запитів:

1. *Попередня обробка даних.* Для попередньої обробки важливо побудувати такі структури даних, що дозволять значно скоротити час запиту на локалізацію точки. Будь-яка обробка даних, що виконуються щоразу під час запиту і конкретно не залежать від неї мають бути винесені в передобробку.
2. *Структура даних.* Необхідно побудувати такі структури даних, в яких будуть зберігатися результати попередньої обробки. Враховуючи те що метою є логарифмічний час пошуку, нам необхідно намагатися будувати деревовидні структури. Також при цьому необхідно звертати увагу на об'єм пам'яті що використовується.
3. *Пошук.* Основним критерієм є час пошуку – локалізації точки. Тобто необхідний алгоритм який використовуючи результат попередньої обробки за мінімальний час знаходить усі грані що локалізують точку.

2.1 Алгоритм попередньої обробки

Основна ідея алгоритму полягає в тому щоб розбити весь простір на обмежені підпростори в яких є структурована інформація про грані графа.

1. На першому кроці розбиваємо простір на підпростори паралельними площинами (рис.1).

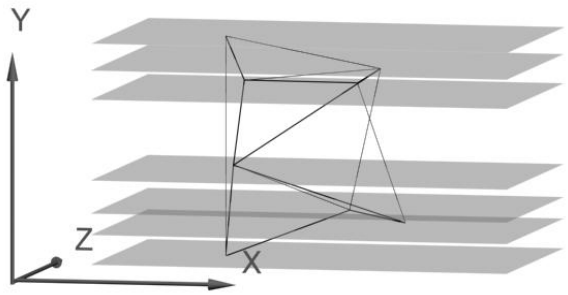


Рис1. Площини, що розрізають граф на шари.

Таким чином ми маємо підрозбиття на N-1 шарів. Впорядкувавши вершини розбиття, ми можемо знайти шар який містить запитну точку за час $O(\log N)$.

2. На другому кроці розбиваємо площини на смуги і визначаємо грані що їх перетинають. В результаті перетину граней одержимо області, які нагадують призми (рис.2).

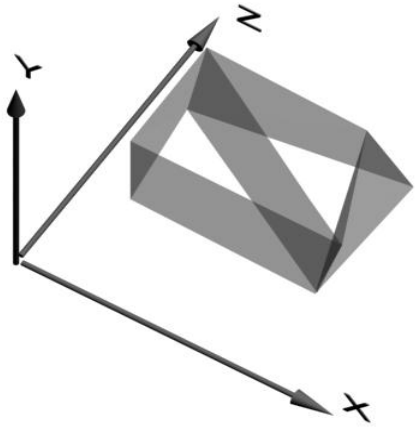


Рис.2. Вигляд одного з шарів.

Таким чином можна провести площини паралельні кожній з осей і через кожну точку розбиття (див. рис. 3).

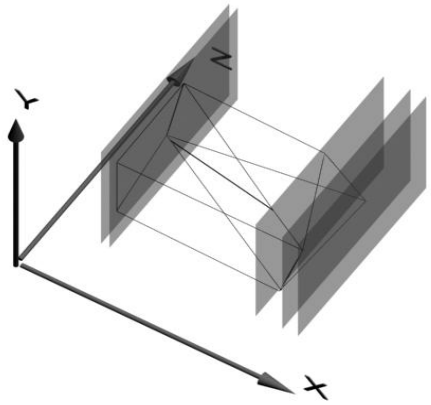


Рис.3 Побудова стержнів для шару

В результаті ми розіб'ємо шари на стержні (див рис. 4). Впорядкувавши стержні можемо знайти стержень, який містить запитну точку.

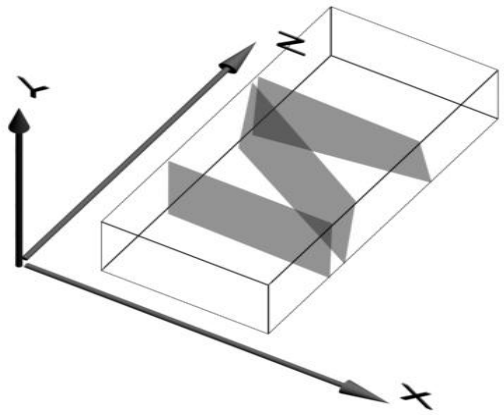


Рис.4. Остаточне розбиття кожного шару стержнями.

3. На третьому кроці будуємо дерево граней в кожній смузі. Нижче приведений детальний алгоритм.

Алгоритм:

1. Сортуємо усі задані точки простору по *y* координаті. І через кожну точку простору будуємо площину паралельну OXZ. Будуємо дерево площин.
2. Шукаємо перетин побудованих в п.2 площин з усіма гранями, які її перетинають. В перетині буде або точка або пряма. Нехай пряма на площині задається двома точками.
3. В кожній побудованій площині сортуємо точки по *z* координаті і через кожну точку на ній проводимо лінії паралельні осі OX. Отримуємо смуги. Будуємо дерево смуг для кожної площини.
4. В кожній смузі визначаємо ребра які її перетинають. Для кожного ребра відома початкова грань до якої воно належить. Сортуємо ці грані по *x* координаті середньої точки *O* і будуємо дерево граней. Крок перетину площин очевидний.

2.2 Структура даних

Данні про точки і грані зберігаються у двох двозв'язних списках. Всі інші надбудови є вказівниками на елементи цього списку. Дерево зберігається як впорядкований масив. Кожна площина містить смуги, що також зберігаються у вигляді бінарного дерева, а для кожної смуги є бінарне дерево граней. Тобто три вкладених бінарних дерева. Дерево площин впорядковане за зростанням координати *y*, дерево смуг впорядковане за координатою *z*, а дерево граней за *x* координатою середньої точки грані.

2.3 Алгоритм пошуку

Оскільки в результаті передобробки ми одержали структуру даних, яка складається з трьох дерев, то алгоритм пошуку не викликає труднощів.

Алгоритм:

1. Дана точка *K*(x,y,z). По дереву площин шукаємо дві площини що

обмежують дану точку по *y* координаті. Нехай ці площини *S*1, *S*2.

2. За допомогою дерева смуг шукаємо в площині *S*1 смугу *P* в яку проектується точка *K* по координаті *z*.

3. За допомогою дерева граней в смузі *P* шукаємо грані що обмежують задану точку. Отримаємо множину граней *bound*(*S*1).

4. Кроки 2 і 3 повторюються для площини *S*2. Отримуємо множину граней *bound*(*S*2).

5. Результатом буде множина *bound* = *bound*(*S*1) ∩ *bound*(*S*2).

3 Обґрунтування складності

Теорема 1. Задачу локалізації точки у тривимірному прямолінійному графі можна розв'язати за час $O(\log N)$ з використанням попередньої обробки $O(N^3 \log N)$.

Доведення. Для локалізації точки за зазначеним вище алгоритмом необхідно послідовно зробити пошуки в п'ятьох бінарних деревах. Перевірка вузла дерева O(1). Час пошуку в дереві $O(\log N)$, якщо дерев 5 то $O(5\log N)$. Тобто час пошуку дійсно $O(\log N)$. Час попередньої обробки $O(N^3 \log N)$ ґрунтується на алгоритмі попередньої обробки. Так як для даного алгоритму треба зберігати 3 вкладені дерева то пам'ять яка використовується $O(N^3)$.

4 Практична частина

Для реалізації алгоритму розроблена програма мові C# для WPF (Windows Presentation Foundation). WPF – графічний фреймворк для рендерінгу користувацьких інтерфейсів під Windows. Користувачу програми надано можливість задавати довільно точку, під час виконання програми, а також редагувати вхідний файл з трьохвимірним графом. На рис. 5. Подано один із прикладів реалізації алгоритму.

4. Висновки

У роботі запропоновано новий підхід і алгоритм до вирішення задачі локалізації точки в тривимірному просторі, обгрунтована складність і описані структури даних, що використовувалися для вирішення даної задачі.

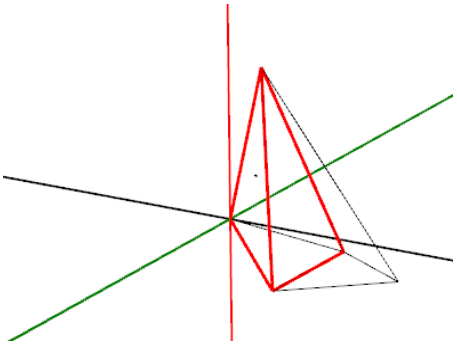


Рис.5. Приклад реалізації.

Описаний алгоритм є модифікацією методу смуг для двовимірного випадку. Досягнуто оптимальний час пошуку $O(\log N)$ з використанням $O(N^3)$ пам'яті.

Список використаних джерел

1. Tereshchenko, Vasyl' M.; Kas'yanov, Andrij A. On an approach to the solution of a local search problem // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Ky¨ıv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka 2006, No. 3, 265-269.
2. D.P. Dobkin and R.J. Lipton. Multidimensional searching problems. *SIAM J. Comput.*, 5:181–186, 1976.
3. *Шеймос М., Препарата Ф.* Вычислительная геометрия: Введение. Пер. с англ. – М: Мир, 1989. – 478 с.
4. Handbook of discrete and computational geometry / edited by Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke. ISBN 1-58488-301-4
5. N. Sarnak and R.E. Tarjan. Planar point location using persistent search trees. *Commun. ACM*, 29:669–679, 1986.
6. K. Mulmuley and S. Sen. Dynamic point location in arrangements ofh yperplanes. In p*roc. 7th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 132–141, 1991.
7. Kirkpatrik D.G. Optimal search in planar subdivisions // SIAM J. Comput. Б 12(1), 1983, pp. 28-35.
8. http://en.wikipedia.org/wiki/Point_location

Надійшла до редакції 28.12.12

УДК 519.21

Хімка У.Т.[1], аспірант,
Чабанюк Я.М[2], д.ф.-м.н., проф.,
Семенюк С.А.[2], к.ф.-м.н.

Флуктуації процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації

У даній роботі досліджено флуктуації процедур стохастичної оптимізації з імпульсним та дифузійним збуренням. Встановлено слабку збіжність двокомпонентного процесу, складеного нормованим імпульсним збуренням та флуктуацією процедури стохастичної оптимізації. Побудовано генератори граничних процесів.

Ключові слова: флуктуації процедури стохастичної оптимізації, марковський процес, імпульсне збурення, дифузійне збурення

[1] Національний університет "Львівська політехніка", 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail: ulyana.himka@gmail.com,
[2] Національний університет "Львівська політехніка", 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail:yaroslav_chab@yahoo.com.,

U.T.Khimka[1], postgraduate student,
Ya.M.Chabanyuk[2], Ph.D.
S.A.Semenyuk[2], Ph.D.

Fluctuations of Stochastic Optimization Procedure in Diffusion Approximation Scheme

This paper investigates the fluctuations of stochastic optimization procedures with a pulse and diffusion perturbation. Established weak convergence of the two-component process, the composite normalized pulse perturbation and fluctuation stochastic optimization procedures. Powered Generators boundary processes.

Key Words: fluctuation of stochastic optimization procedure, Markov process, impulse perturbation, diffusion perturbation.

[1] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: ulyana.himka@gmail.com,

[2] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В. В.

Вступ

Однією з проблем системного аналізу складних систем за умов невизначеності, що описується марковським процесом, є встановлення збіжності флуктуації процедур стохастичної оптимізації (ПСО) до дифузійного процесу в випадку безпосереднього впливу функції регресії від марковських переключень.

Численні приклади застосування таких процедур та їх модифікацій в теорії керування, теорії передачі повідомлень, при розв'язку непараметричних задач математичної статистики, зокрема при встановленні найкращих значень параметрів асимптотично нормального розподілу процедури стохастичної оптимізації, визначають важливість встановлення нових узагальнень та властивостей ПСО.

1. Постановка задачі

Різницева процедура стохастичної оптимізації в ергодичному марковському середовищі з імпульсним збуренням задається еволюційним рівнянням:

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)[\nabla_{b(t)} C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t)], \quad (1)$$

де $a(t) = \frac{a}{t}$, $a > 0$,

© У.Т. Хімка, Я.М.Чабанюк,С.А.,Семенюк, 2013

$$\nabla_{b(t)}C(u,x)=\frac{1}{2b(t)}[C(u+b(t),x)-C(u+b(t),x)],$$

$C(u,\cdot)\in C^3(R))$.

Марковський процес $x(t),t\ge 0$ в стандартному фазовому просторі $(X,\boldsymbol{X})$ задається генератором [1]:

$$\mathbf{Q}\varphi(x)=q(x)\int_X P(x,dy)\big[\varphi(y)-\varphi(x)\big],\quad \varphi\in (X),$$

де (X) - банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум - нормою $\|\varphi\|=\max_{x\in X}|\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x,B),x\in X,B\in\boldsymbol{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n=x(\tau_n)$, $n\ge 0$ із стаціонарним розподілом $\rho(B),B\in\boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B),B\in\boldsymbol{X}$ марковського процесу $x(t),t\ge 0$ визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx),\ q=\int_X\pi(dx)q(x).$$

Потенціальний оператор R_0 генератора $\mathbf{Q}$ визначається співвідношенням:

$R_0=\Pi-(\Pi+\mathbf{Q})^{-1}$, де $\Pi\varphi(x)=\int_X\pi(dy)\varphi(y)$ - проектор на підпростір $N_Q=\{\varphi:\mathbf{Q}\varphi=0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^\varepsilon(t),t\ge 0$ задається співвідношеннями:

$$\eta^\varepsilon(t)=\int_0^t\eta^\varepsilon(ds;x(s/\varepsilon^2));\qquad (2)$$

де сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t\ge 0$, $x\in X$ задається генераторам:

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon_w(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-2}\int_R[\varphi(w+\varepsilon v)-\varphi(w)]\Gamma(dv;x),$$

$x\in X$.

Нехай виконуються умови балансу

$$\Pi\mathbf{\Gamma}_1(x)=\int_X\pi(dx)b_1(x)=0,b_1(x)=\int_R v\Gamma(dv,x),\qquad (3)$$

$$\Pi C'(0,x)=\int\pi(dx)C'(0,x)=0,\qquad (4)$$

Нормоване імпульсне збурення задається співвідношенням:

$$\mu^\varepsilon(t)=a\int_{t_0}^t\eta^\varepsilon(ds;x(s/\varepsilon^2))/s^{\frac12};$$

Розглянемо флуктуацію ПСО (1) у вигляді

$$\nu^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}t^{\frac12}[u^\varepsilon(t)-\varepsilon\mu^\varepsilon(t)]\qquad (5)$$

2. Теорема про збіжність флуктуацій ПСО з імпульсним збуренням

Теорема 1 . *При виконанні умов балансу (3) та (4), а також умови збіжності ПСО (1) має місце слабка збіжність*

$$(\nu^\varepsilon(t),\mu^\varepsilon(t))\to(\zeta(t),\sigma(t)W(t)),t>0,\varepsilon\to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0<t_0<t<T$.

Граничний процес $(\zeta(t),\sigma(t)W(t))$ *задається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(v,w)=\left[v(ac_2+\frac12 t^{-\frac12})+act^{\frac12}w\right]\varphi'_v(v,w)+$$

$$+\frac{a}{2}B(t)\varphi''_w(v,w),$$

де

$$c_2=\int_X\Pi(dx)C''(0,x),$$

$$B(t)=B_1(t)+B_2(t)+B_3(t),$$

$$B_1(t)=\int_X\pi(dx)b_2(x)+2at^{-\frac12}\int_X\pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x);$$

$$b_2(x)=\int_R v^2\Gamma(dv,x);$$

$$B_2(t)=2a[\int_X\pi(dx)b_1(x)R_0C'(0,x)+$$

$$+\int_X\pi(dx)C'(0,x)R_0b_1(x)];$$

$$B_3(t)=2at^{\frac12}\int_X\pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x).$$

Лема 1. *Генератор* $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w)$ *допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w)+\varepsilon\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w),$$

де

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w);$$

$$\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w),$$

а залишковий член такий, що $\| \varepsilon\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) \| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. За означенням генератора маємо

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w+\varepsilon v) - \varphi(w)]\Gamma(dv, x)$$

Використаємо розклад в ряд Тейлора функції φ та отримаємо

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w) + \varepsilon v\varphi'(w) +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^2\varphi''(w) + \varepsilon\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) - \varphi(w)]\Gamma(dv, x)$$

$$= \varepsilon^{-2}\int_R (\varepsilon v\varphi'(w)\Gamma(dv, x) + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\int_R \varepsilon^2 v^2\varphi''(w)\Gamma(dv, x) +$$

$$+ \varepsilon\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1}b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w) + \varepsilon\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \varepsilon\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w).$$

Лема 2. *Нормована флуктуація (5) задовольняє диференціальному рівнянню*

$$dv^\varepsilon(t) = C_t^{\nabla,\varepsilon}(v^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon)dt, \qquad (6)$$

де

$$C_t^{\nabla,\varepsilon}(v, x) = \varepsilon^{-1}a\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x) + \frac{1}{2}vt^{-1},$$

а $z = t^{-\frac{1}{2}}v + w; v = v^\varepsilon(t), w = \mu^\varepsilon(t)$.

Доведення. З диференціювання (5) та використання (1) отримуємо (6).

Зауважимо, що рівняння (6) породжує напівгрупу операторів $\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = \varphi(v_x^\varepsilon(t+s))$, $v_x^\varepsilon(s) = v$, з генератором

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = C^{\nabla,\varepsilon}(v, x)\varphi'(v). \qquad (7)$$

Лема 3. *Генератор (7) має асимптотичне представлення на тест-функціях*

$$\varphi(v) \in C^2(R), C_t(u,\cdot) \in C^3(R)$$

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}aC'(0, x)\varphi'(v) +$$

$$+ ((avt^{-\frac{1}{2}} + aw)C''(0, x) +$$

$$+ \frac{1}{2}t^{-1}v)\varphi'(v) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi'(v), \qquad (8)$$

де $\theta^\varepsilon(x)\varphi'(v)$ *рівномірно обмежена по* x *та по* v *функція.*

Доведення. Для генератора (7) маємо перетворення:

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}a\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)\varphi'(v) + \frac{1}{2}vt^{-1}\varphi'(v) =$$

$$= \varepsilon^{-1}a\left[C'(0, x) + \varepsilon zC''(0, x) + O(\varepsilon^3)\right]\varphi'(v) +$$

$$+ \frac{1}{2}vt^{-1}\varphi'(v)$$

Таким чином, звівши доданки по степенях ε, одержимо (8).

Лема 4. *Генератор трьохкомпонентного марковського процесу*

$$v^\varepsilon(t) = v_t, \mu^\varepsilon(t) = w_t, x(t/\varepsilon^2) = x_t^\varepsilon, t \ge 0 \qquad (9)$$

має аналітичний вигляд

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v, w, x) = [\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x) + \mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)]\varphi(v, w, x),$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання:

$$E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), \mu^\varepsilon(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^2)) -$$

$$- \varphi(v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)) \,|\, v^\varepsilon(t) = v, \mu^\varepsilon(t) =$$

$$= w, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)] =$$

$$= E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] +$$

$$+ E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)].$$

Згідно означення генератора марковського процесу (9) та останнього представлення, одержуємо

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v, w, x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), \mu^\varepsilon(t+ \qquad (7)$$

$$+ \Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^2)) -$$

$$- v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)) \,|\, v^\varepsilon(t) = v, \mu^\varepsilon(t) =$$

$$= w, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] +$$

$$+ \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)]$$

Перша границя визначає генератор (8) еволюції v, а друга границя дає генератор двокомпонентного марковського процесу

$$\mu^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2), t \geq 0.$$

Оскільки має місце представлення:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)],$$

то враховуючи

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x_{t+\Delta})] =$$

$$= at^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(\mathbf{x})\varphi(v, w, x),$$

та

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)] =$$

$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi(v, w, x),$$

отримаємо

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(v, w, x) = \left[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x) + \mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\right]\varphi(v, w, x)$$

Лема 5. *Генератор* $\mathbf{L}^{\varepsilon}$ *допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(v, w, x) = (\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}(at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}_1(x) + a\mathbf{C}_1(x)) +$$

$$+ at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}_2(x) + (at^{-\frac{1}{2}}(v + t^{\frac{1}{2}}w)\mathbf{C}_2(x) + \frac{1}{2}t^{-1}vD(x)) +$$

$$+ \theta_L^{\varepsilon}(x))\varphi(v, w, x), \qquad (10)$$

де

$$\mathbf{C}_1(x)\varphi(v, w, x) = C'(0, x)\varphi'_v(v, w, x);$$

$$\mathbf{C}_2(x)\varphi(v, w, x) = C''(0, x)\varphi'_v(v, w, x);$$

$$\mathbf{D}\varphi(v, w, x) = \varphi'_v(v, w, x);$$

а залишковий член такий, що $\| \theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(v, w, x) \| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Доведення випливає з представлення генераторів $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$ та $\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)$.

Для генератора (10) розглянемо зрізаний оператор:

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(x) + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2(x), \qquad (11)$$

де

$$\mathbf{Q}_1(x) = \mathbf{\Gamma}_1(x) + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x),$$

$$\mathbf{Q}_2(x) = \mathbf{\Gamma}_2(x) + (v + t^{-\frac{1}{2}}w)\mathbf{C}_2(x) + \frac{1}{2at^{\frac{1}{2}}}v\mathbf{D}.$$

Лема 6. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (11) на тест-функціях*

$$\varphi^{\varepsilon}(v, w, x) = \varphi(v, w) + \varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\varphi_1(v, w, x) +$$

$$+ \varepsilon^2 t^{-\frac{1}{2}}\varphi_2(v, w, x)$$

в умовах теореми реалізується співвідношенням

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v, w, x) = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi(v, w) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(v, w),$$

де залишковий член $\theta^{\varepsilon}(x)$ *рівномірно обмежений по* x, *а граничний оператор* $\mathbf{L}$ *визначається співвідношенням:*

$$\mathbf{L}\Pi = a\Pi\mathbf{Q}_2(x)\Pi + a^2t^{-\frac{1}{2}}\Pi\mathbf{Q}_1(x)R_0\mathbf{Q}_1(x)\Pi.$$

Доведення. Розглянемо вигляд генератора $\mathbf{L}^{\varepsilon}$ на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(v, w, x)$, а саме

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-1}t^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{Q}\varphi_1 + a\mathbf{Q}_1(x)\varphi] +$$

$$+ at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2(x)\varphi + at^{-1}\mathbf{Q}_1(x)\varphi_1 + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\varphi_2 + \varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi.$$

Оскільки φ не залежить від x, то

$$\mathbf{Q}\varphi = 0, \Leftrightarrow \varphi \in N_Q.$$

Умови балансу (3) та (4) визначають розв'язність рівняння:

$$\mathbf{Q}\varphi_1 + a\mathbf{Q}_1(x)\varphi = 0.$$

Отже,

$$\varphi_1 = aR_0\mathbf{Q}_1(x)\varphi. \qquad (12)$$

Таким чином, враховуючи (12), отримуємо представлення:

$$t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\varphi_2 + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}(x)\varphi = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi,$$

де

$$\mathbf{L}(x)\varphi = a\mathbf{Q}_2(x)\varphi + a^2t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(x)R_0\mathbf{Q}_1\varphi.$$

Для φ_2 маємо представлення

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0[\mathbf{L}(x) - \mathbf{L}]\varphi. \qquad (13)$$

Через те, що

$$\Theta^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(v,w,x) = at^{-1}\mathbf{Q}_1\varphi_2(v,w,x) +$$
$$+ at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2\varphi_1(v,w,x) + at^{-1}\mathbf{Q}_2\varphi_2(v,w,x)$$

та враховуючи (12) і (13), а також гладкість функції $\varphi(v,w)$, отримуємо твердження леми про залишковий член.

Завершення доведення теореми.

Обчислимо граничний оператор $\mathbf{L}$, враховуючи (12) та (13) та дію операторів $\mathbf{Q}_1(x)$ та $\mathbf{Q}_2(x)$.

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = a\Pi\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(v,w) + a(v +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}w)\Pi\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w) +$$
$$+ \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}v\mathbf{D}\varphi(v,w) + a^2t^{-\frac{1}{2}}\Pi[\mathbf{\Gamma}_1(x) +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x)]R_0[\mathbf{\Gamma}_1(x) + t^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x)]\varphi(v,w) =$$

$$= a\int_X \pi(dx)b_2(x)\varphi''_w(v,w) + a(v +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}w)\int_X \pi(dx)C''(0,x)\varphi'_v(v,w) +$$
$$+ \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}v\varphi'_v(v,w) +$$
$$+ a^2t^{-\frac{1}{2}}(\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x)\varphi''_w(v,w) +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0C'(0,x)\varphi''_{vw}(v,w) +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0b_1(x)\varphi''_{vw}(v,w) +$$
$$+ t^1\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x)\varphi''_v(v,w)).$$

Отже,

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}) + act^{\frac{1}{2}}w\right]\varphi'_v(v,w) +$$
$$+ \frac{a}{2}B(t)\varphi''_w(v,w),$$

де

$$B(t)\varphi''(v,w) = B_1(t)\varphi''_w(v,w) + B_2(t)\varphi''_w(v,w) +$$
$$+ B_3(t)\varphi''_w(v,w),$$
$$B_1(t) = 2\int_X \pi(dx)b_2(x) + 2at^{-\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x);$$
$$B_2(t) = 2a[\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0C'(0,x) +$$
$$+ \int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0b_1(x)];$$
$$B_3(t) = 2at^{\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x).$$

Завершення доведення теореми проводиться за допомогою Модельної граничної теореми Королюка [2].

3. Флуктуації ПСО з дифузійним збуренням

Розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації [3]:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))dt, \qquad (14)$$

з функцією регресії

$$C^\varepsilon(u,x) = \nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2)) + \varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2)),$$

$u \in R, x \in X$.

Усереднена система

$$\frac{du}{dt} = C'(u), C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x).$$

Умови балансу

$$\int_X \pi(dx)C_0(u,x) = 0, \int_X \pi(dx)C'(0,x) = 0. \qquad (15)$$

Позначимо через $C_0^0(x) = C_0(0,x)$, тоді дифузійне збурення [4] в точці екструмуму набуде вигляду:

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}a\int_{t_0}^{t} C_0(0, x(t/\varepsilon^2))/s^{\frac{1}{2}}ds = \varepsilon^{-1}a\int_{t_0}^{t} C_0^0(x(t/\varepsilon^2))/s^{\frac{1}{2}}ds.$$

Розглянемо флуктуації ПСО (14) в наступному нормуванні

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}t^{\frac{1}{2}}\left[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)\right].$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови балансу (15), а також умови збіжності ПСО (14). Також нехай функції* $C_0'(u,x)$ *і* $C_0''(u,x)$ *рівномірно обмежені по* x

$$\sup_{x\in X} \| C_0'(u,x) \| \le C_1 < +\infty;$$

$$\sup_{x\in X} \| C_0''(u,x) \| \le C_2 < +\infty.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$(v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t)) \to (\zeta(t), W_\sigma(t)), t > 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний процес $(\zeta(t), W_\sigma(t))$ *задається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}) + ac_2 t^{-\frac{1}{2}} w \right]\varphi_v'(v,w) +$$

$$+ \frac{at^{-\frac{1}{2}}}{2} B\varphi_w''(v,w),$$

де

$$c_2 = \int_X \pi(dx) C''(0,x);$$

$$B = 2\int_X \pi(dx) C_0(0,x) R_0 C_0(0,x).$$

Доведення теореми проводиться за схемою доведення попередньої теореми з використанням наступних ключових тверджень.

Лема 7. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon$ *допускає асимптотичне представлення на тест-функціях* $\varphi(v) \in C^4(R)$

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \left[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}^0(x) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{-1}a\mathbf{C}(x) + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_t^1(x) + \theta_L^\varepsilon(x) \right]\varphi(v,w,x),$$

де

$$\mathbf{C}^0(x)\varphi(v,w,x) = C_0^0(x)\varphi_w'(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(v,w,x) = \left[C(0,x) + zC_0'(0,x)\right]\varphi_v'(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}_t^1(x)\varphi(v,w,x) = (t^{\frac{1}{2}}z\left[C'(0,x) + zC_0''(0,x)/2\right] +$$

$$+ \frac{v}{2a}t^{\frac{1}{2}})\varphi_v'(v,w,x), \quad z = t^{-\frac{1}{2}}v + w,$$

а залишковий член такий, що

$\| \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x) \| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Лема 8. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора в умовах теореми реалізується співвідношенням*

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,w,x) = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi(v,w) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(v,w),$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon(x)$ *рівномірно обмежений по* x. *Граничний генератор визначається співвідношенням:*

$$\mathbf{L}\Pi = a\Pi\mathbf{C}_t^1(x)\Pi + a^2 t^{-\frac{1}{2}}\Pi \; {}^0(x)R_0 \; {}^0(x)\Pi.$$

Висновки

Флуктуації ПСО з імпульсним збуренням при наявності точки рівноваги на зростаючих інтервалах часу описуються стохастичним диференціальним рівнянням, дифузійна складова якого формується як з першого та другого моментів імпульсного процесу, так і з швидкості зміни функції регресії в точці рівноваги.

Література

1. Korolyuk V. S., Korolyuk V .V. Stochastic Models of Systems. - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. - 185p.

2. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space, - World Scientific Publishing, 2005. - 330P.

3. Chabanyuk Ya. M. Continuous stochastic approximation procedure with singular perturbations in balance conditions. //Cibernetic and system analisys.- 2006. - №3. - p. 133-139.

4. Semenyuk S. A. Fluctuations of stochastic approximation procedure with diffusion perturbations. / Semenyuk S. A., Chabanyuk Ya. M. // Cibernetic and system analisys. - 2008.- no.5. - p.104-109.

Надійшла до редколегії 28.01.2013

РАДІОФІЗИКА

УДК 537.52:533.9.082.5:537.872

Веклич А.М., к.ф.-м.н., доц.,
Борецький В.Ф., к.ф.-м.н.,асист.,
Лебідь А.В., аспірант,
Бондаренко Я.В., студ.,
Фесенко С.О., аспірант

Дослідження плазми електродугового розряду між композитними Cu–C електродами. Частина I: Визначення температури

Дана робота присвячена дослідженню плазми електродугового розряду в повітрі між композитними Cu–C електродами. Методом оптичної емісійної спектроскопії отримано радіальний розподіл температури плазми дугового розряду силою струму 3.5 А у припущенні локальної термодинамічної рівноваги.

Ключові слова: плазма електродугового розряду, композитні Cu–C електроди, радіальний розподіл температури, енергія іонізації.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: puluu@yandex.ru

Veklich A.N., Ph. D., Associate Professor,
Boretskij V.F. , Ph.D., Assistant Professor,
Lebid A.V., post grad. stud.,
Bondarenko Ya.V., stud.,
Fesenko S.O., post grad. stud.

Investigation of electric arc plasma between composite Cu–C electrodes. Part I: Temperature measurement

Present paper deals with investigations of electric arc discharge plasma in air between Cu–C composite electrodes. The radial profiles of temperature in discharge column at arc current 3.5 A were obtained by optical emission spectroscopy in the assumption of local thermodynamic equilibrium.

Key Words: plasma of electric arc discharge, composite Cu–C electrodes, radial profiles of temperature, ionization energy.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: puluu@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Інтерес до досліджень плазми дугового розряду між плавкими електродами визначається широким колом застосувань такого розряду в сучасних технологіях (зварювання, плазмотронне розпорошення та нанесення матеріалів, тощо). Крім того, окремою задачею для розробників новітніх матеріалів з наперед визначеними властивостями є оптимізація компонентного складу електродів комутуючих пристроїв електротехнічної галузі та енергетики. Саме через цю обставину нагальною є необхідність дослідити взаємозв'язок параметрів самої плазми і складу електродів та їх електроерозійних властивостей. На залізниці для живлення електропотягів використовують мідний провід та ковзаючий контакт. У такій системі для суттєвого підвищення рентабельності цього виду транспорту важливо збільшити ресурс (термін придатності) як мідного проводу, так і, власне, контакту [6]. Однією з основних причин пошкодження контактної пари є ерозія, зумовлена дією електричної дуги, яка періодично виникає між контактами.

Як альтернативні матеріали для контактної пари рухомого складу (електропотягів, зокрема) залізничного транспорту пропонується використати композити на основі вуглецю з домішками міді [1]. Склад цих композитів визначається, як правило експериментальним шляхом на основі емпіричного досвіду. Властивості власне багатокомпонентної плазми, яка виникає між контактним провідником і пантографом, та взаємозв'язок її параметрів зі станом поверхні контактів, а, отже, і їх ерозійних властивостей, ще недостатньо вивчені. Тому виконання комплексу спектроскопічних досліджень плазми дугового розряду між такими електродами є актуальною задачею.

Отже, метою даної роботи є визначення просторового розподілу температури плазми електродугового розряду у повітрі між композитними Cu–C електродами, яка імітує

© А.М. Веклич, В.Ф. Борецький, А.В. Лебідь, Я.В. Бондаренко, С.О. Фесенко, 2013

роботу реальної контактної пари електрорухомого транспорту.

Методика вимірювань та результати

Схема експериментальної установки зображена на рис.1 [2]. Електродуговий розряд ініціювався між торцевими поверхнями неохолоджуваних вертикально розташованих електродів циліндричної форми діаметром 6 мм. Міжелектродна відстань – 8 мм. Для дослідження плазми методами оптичної емісійної спектроскопії був використаний спектрограф з горизонтальним розташуванням вхідної щілини.

Центральний переріз міжелектродного проміжку електричної дуги фокусувався за допомогою конденсора на вхідну щілину спектрографа з дифракційною граткою 600 шт/мм. Спектр випромінювання дугового розряду реєструється ПЗЗ–камерою Nikon D3100. Такий спосіб організації оптичної схеми забезпечує як спектральну, так і просторову роздільну здатність.

В експериментальних дослідженнях використовувались композитні Cu-C електроди [3], вміст міді в яких складав 20%. Струм дуги становив 3,5 А.

На рис. 2 зображений спектр випромінювання плазми електродугового розряду між плавкими композитними Cu–C електродами (інтенсивність випромінювання проінтегрована вздовж осьового променя у середньому перерізі міжелектродного проміжку). Для вимірювання довжин хвиль у даному спектрі використовували спеціально розроблений [2] програмний інтерфейс (рис. 3). З отриманого спектру для подальшої діагностики плазми було обрано спектральні лінії атома міді: 510,5; 515,3; 521,8; 570,0 та 578,2 нм [7]. Спостережувані інтенсивності кожної з них в різних просторових точках вздовж радіуса дуги визначали шляхом інтегрування в межах контуру лінії. Значення локальних інтенсивностей отримані із спостережуваних за допомогою перетворення Абеля [4].

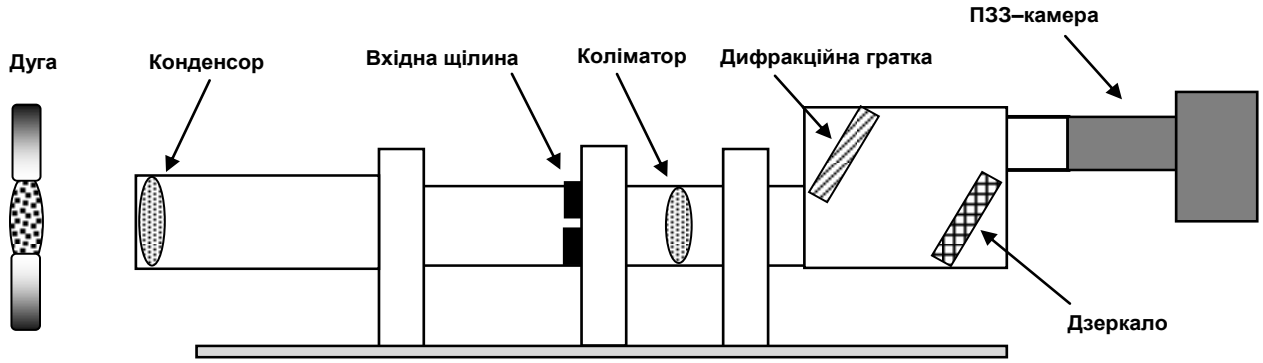


Рис.1 Схема експериментальної установки для дослідження плазми електродугового розряду

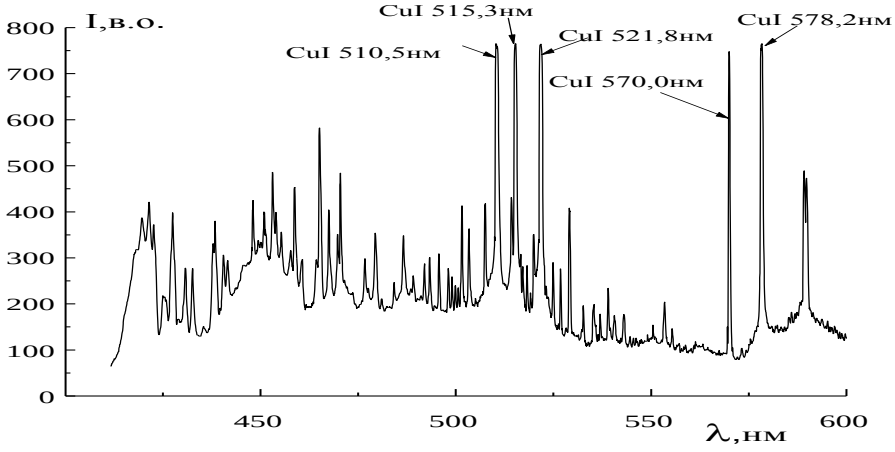


Рис.2 Спектр випромінювання плазми між композитними Cu-C електродами

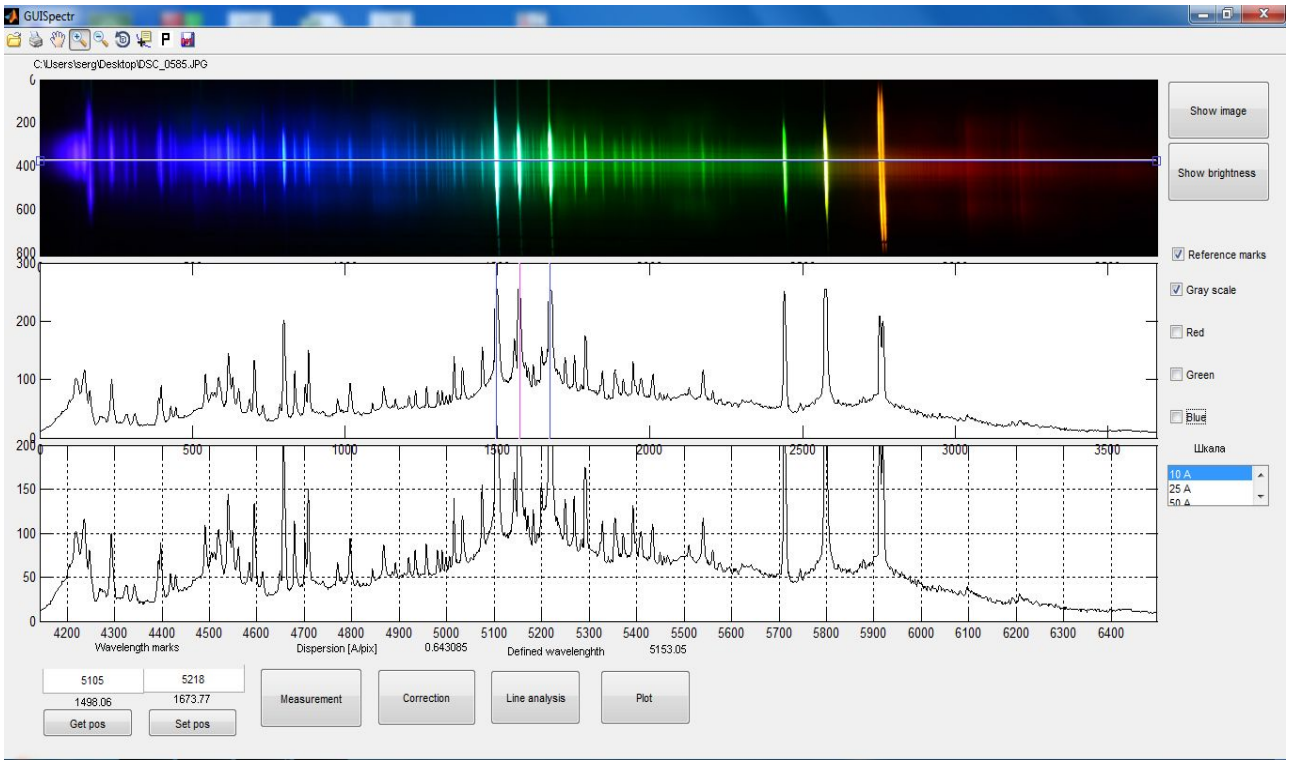


Рис.3 Програмний інтерфейс для розшифрування спектру

Для отримання температури в різних просторових точках вздовж радіусу каналу дуги будували діаграми Больцмана. При побудові враховували спектральну чутливість установки з використанням еталонного джерела випромінювання. При визначенні температури використовували спектроскопічні константи з роботи [7].

Радіальний розподіл температури плазми електродугового розряду між Cu–C електродами показано на рис. 4. На цьому ж рисунку для порівняння наведено розподіл температури плазми у дузі між мідними електродами з роботи [5] у такому ж режимі роботи розряду. Як випливає з цього рисунку радіальні профілі температури в межах похибки узгоджуються між собою.

Таким чином, на основі порівняння температур, опосередковано, можна зробити висновки щодо електроерозійних властивостей запропонованих композитних матеріалів.

Проте, оцінка ерозії електродного матеріалу потребує більш широкого комплексу як спектроскопічних, так і металографічних досліджень (як, наприклад [8,9,10]).

Крім того, для об’єктивної оцінки ерозійних властивостей досліджуваних електродів є доцільним додатково в оптичній емісійній спектроскопії застосувати спектральні лінії карбону та прямі методики визначення концентрації парів компонентів електродного матеріалу у розрядному проміжку.

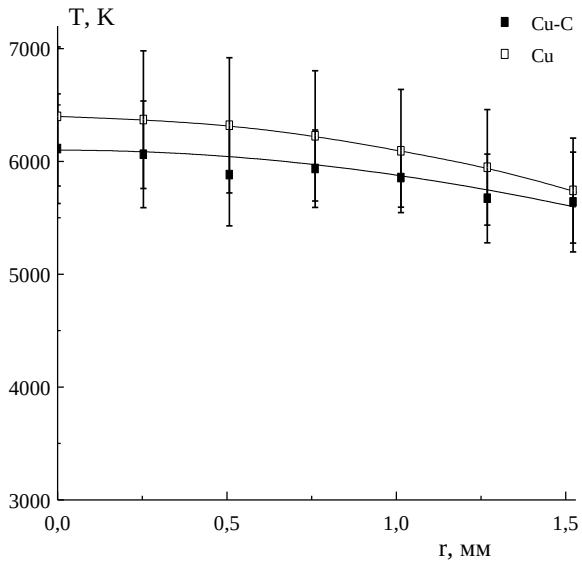


Рис.4 Радіальний розподіл температури плазми між композитними Cu-C та мідними [5] електродами

Обговорення результатів

Як було сказано вище, з аналізу рис.2 випливає, що температури плазми розряду між мідними та композитними Cu–C електродами

майже однакові. Це досить цікавий результат, якщо врахувати, що масова частка міді в композитних електродах складає лише 20%. Даний експериментальний факт можна пояснити тим, що енергії іонізації значно відрізняються: для міді – 7,72 еВ, а для вуглецю – 11,25 еВ. Таким чином, попри технологічні переваги та значний вміст вуглецю у складі композитних електродів, параметри плазми (температура), все ж таки, визначаються мідною компонентою.

Висновки

Методами оптичної емісійної спектроскопії плазми, у припущенні локальної термодинамічної рівноваги, досліджено вплив мідної компоненти у композитних Cu-C електродах на параметри електродугової плазми.

Аналіз поведінки радіальних профілів температури плазми між композитними Cu-C та мідними електродами показує, що мідь, незважаючи на її порівняно незначний вміст у складі електродів, є основним елементом, який впливає на параметри плазми.

Список використаних джерел

1. *Berent V.Ya*. Improvement of performance of current collectors on the carbon base / V.Ya. Berent, S.A. Gnezdilov // Friction and lubrication of machinery. – 2009. – **2.** – P. 18–23 (in Russian).

2. *Veklich A.* Technique of electric arc discharge plasma diagnostic: peculiarities of registration and treatment of spectra / A. Veklich, A. Lebid // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. – Series: Radiophysics & Electronics. – 2012. – **18.** – P.6 – 9.

3. *Berent V.Ya*. Enhancement of current collectors on the carbon base of electric trains / V.Ya. Berent, S.A. Gnezdilov // Friction and lubrication of machinery. – 2008. – **8.** – P. 9–15 (in Russian).

4. *Bockasten K*. Transformation of Observed Radiances into Radial Distribution of the Emission of a Plasma / K. Bockasten // Journal of the optical society of America. – 1961. – **51**. – No 9. − P. 943-947.

5. *Boretskij V.* Non-equilibrium plasma properties of electric arc discharge in air between copper electrodes / V. Boretskij, A. Veklich, Y. Cressault, A. Gleizes, Ph. Teulet // Problems of Atomic Science and Technology. – Series: Plasma Physics. – 2012. – **18**. – No 6. – P. 181-183.

6. *Miedzinski B.* Dynamics of sliding contacts in mine slow-speed railway transportation / B. Miedzinski, W. Dzierzanowski, J. Wandzio, N. Grechanyuk, V.N. Shoffa // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 63-69.

7. *Babich I.L.* Spectroscopy of electric arc plasma between composite electrodes Ag–CuO / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, A.I. Ivanisik, R.V. Semenyshyn, L.O. Kryachko, M.Ye. Golovkova // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2010. – P. 82-115 (in Ukrainian).

8. *Minakova R.V.* Secondary structure of working layer of composite materials and their functional properties / R.V. Minakova, Ye.V. Chomehko, G.Ye. Kopulova, M.Ye. Golovkova, A.N. Veklich, P.V. Soroka // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 38-47 (in Russian).

9. *Babich I.L.* Spectroscopy of electric arc plasma between composite electrodes Ag – SnO_2 – ZnO / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, L.O. Kryachko, A.V. Lebid, R.V. Semenyshyn // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 81-90 (in Ukrainian).

10. *Babich I.L.* Investigations of plasma of electric arc discharge between composite electrodes on cooper base / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, M.I. Grechanuk, A.V. Lebid, R.V. Minakova, P.V. Soroka // Electrical contacts and electrodes. – Kyiv: "Frantsevich Institute for Problems of Materials Science". – 2012. – P. 91-100 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 18.02.13

УДК 537.52:533.9.08

Веклич А.М., к.ф.-м.н., доц.,
Лебідь А.В., аспірант,
Тменова Т.А., студ.
Борецький В.Ф., к.ф.-м.н., асист.

Спектроскопічні дослідження плазми електродугового розряду з домішками міді та молібдену

В даній роботі досліджувались параметри плазми електродугового розряду між композитними Cu-Mo електродами в потоці аргону. Для розрахунку складу плазми у припущенні локальної термодинамічної рівноваги використано радіальні профілі температури та електронної концентрації отримані методами оптичної емісійної спектроскопії. Додатково розглянуто можливість використання спектральних ліній атома молібдену для діагностики плазми дугового розряду. В результаті обрано низку спектральних ліній MoI та рекомендовано значення сил осцилятора для цих ліній.

Ключові слова: плазма електродугового розряду, композитні Cu-Mo електроди, склад плазми, спектроскопічні константи, сила осцилятора.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Радіофізичний факультет, вул. Володимирська 64, Київ, Україна,
e-mail: van@univ.kiev.ua

Veklich A.N., Ph. D., Associate Professor,
Lebid A.V., post grad. stud.,
Tmenova T.A., stud.,
Boretskij V.F., Ph.D., Assistant Professor.

Spectroscopic investigations of electric arc plasma with additions of copper and molybdenum

This paper deals with investigations of plasma parameters of electric arc discharge between Cu-Mo composite electrodes in argon flow. The radial profiles of plasma temperature and electron density, obtained by optical emission spectroscopy, were used in calculation of plasma composition in assumption of local thermodynamic equilibrium. Additionally analysis of molybdenum atomic spectral lines for purposes of arc discharge plasma diagnostics was carried out. In result of selection several MoI spectral lines and their oscillator strength are recommended.

Key words: plasma of electric arc discharge, composite Cu-Mo electrodes, plasma composition, spectroscopic data, oscillator strength.

Taras Shevchenko Kiev National University, Radio Physics Faculty, 64, Volodymyrs`ka str., Kyiv, Ukraine, e-mail: van@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Композитні матеріали на основі міді з додаванням тугоплавкого металу, зокрема молібдену, мають високу електроерозійну стійкість [1]. Такі матеріали використовуються для контактів комутуючої апаратури [1,2] та як ковзні контакти електротранспорту копалень [3]. Електричні розряди, що виникають під час експлуатації таких контактів взаємодіють із електродним матеріалом, який в результаті ерозії потрапляє в розрядний проміжок, що, в свою чергу, впливає на фізичні властивості плазми розряду. Таким чином, дослідження плазми електродугового розряду між мідь-молібденовими композитними електродами може бути корисним з точки зору оптимізації подібних контактних матеріалів.

На жаль, авторам не відомі роботи, окрім [4,5], в яких би досліджувався зв'язок параметрів плазми електричної дуги із складом електродів. Тому метою даної роботи є визначення параметрів плазми електродугового розряду між композитними Cu-Mo електродами та дослідження їх електроерозійних властивостей.

Крім того, оскільки така плазма містить домішки молібдену, то додатково доцільно провести селекцію спектральних ліній MoI та їх спектроскопічних констант.

Експеримент

Дуга запалювалася між неохолоджуваними композитними Cu-Mo електродами в потоці аргону 6,33 л/хв. Сила струму становила 3,5 або

© А.М. Веклич, А.В. Лебідь, Т.А. Тменова, В.Ф. Борецький, 2013

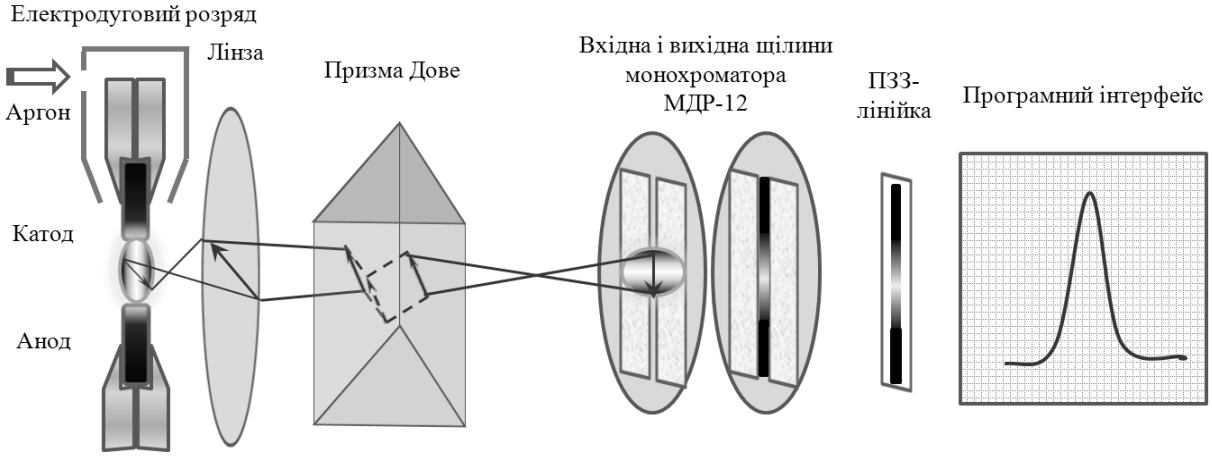


Рис.1 Реєстрація просторових розподілів інтенсивності випромінювання

30 А; в останньому випадку для запобігання каплеутворення електродного матеріалу використовували імпульсний режим: імпульс струму 30 А накладався на "черговий" розряд слабкого (3,5 А) струму. Тривалість імпульсу становила 30 мс. Міжелектродний проміжок складав 8 мм.

Використовували композитні Cu-Mo електроди, виготовлені за технологією електронно-променевого випаровування з наступною конденсацією у вакуумі [1]. Як показали дослідження [4], вміст молібдену змінюється від шару до шару і може складати від 1% до 20%, при середньому значенні 12%. На відміну від робіт [4,5], у даній серії експериментів дуга горіла перпендикулярно до шарів матеріалу електрода.

Через просторову та часову нестабільність розряду використовували метод однократної томографічної реєстрації випромінювання спектральних ліній. Швидкісне сканування просторових розподілів інтенсивності випромінювання забезпечувала ПЗЗ-лінійка Sony ILX526A (B/W) з 3000 пікселів. Разом із монохроматором МДР-12 в якості спектрального приладу (рис. 1) вона дозволяла реєструвати радіальні розподіли випромінювання у середньому перерізі каналу нестаціонарної дуги. Для керування процесом збору та обробки експериментальних даних використовували спеціально розроблений програмний інтерфейс [6].

Визначення просторового (радіального) розподілу випромінювання базується на припущенні осьової симетрії плазмового джерела, що дає можливість перерахувати спостережувані інтенсивності випромінювання у локальні [7].

Через часову та просторову нестабільність електричної дуги, реєстрували до 100 радіальних розподілів і виконували статистичну обробку експериментальних результатів.

Для реєстрації контурів спектральних ліній використовували установку, оптична схема якої детально описана в роботі [8]. Селекцію випромінювання плазми за певними кутами забезпечує інтерферометр Фабрі-Перо у режимі еталона, схрещений з приладом попередньої

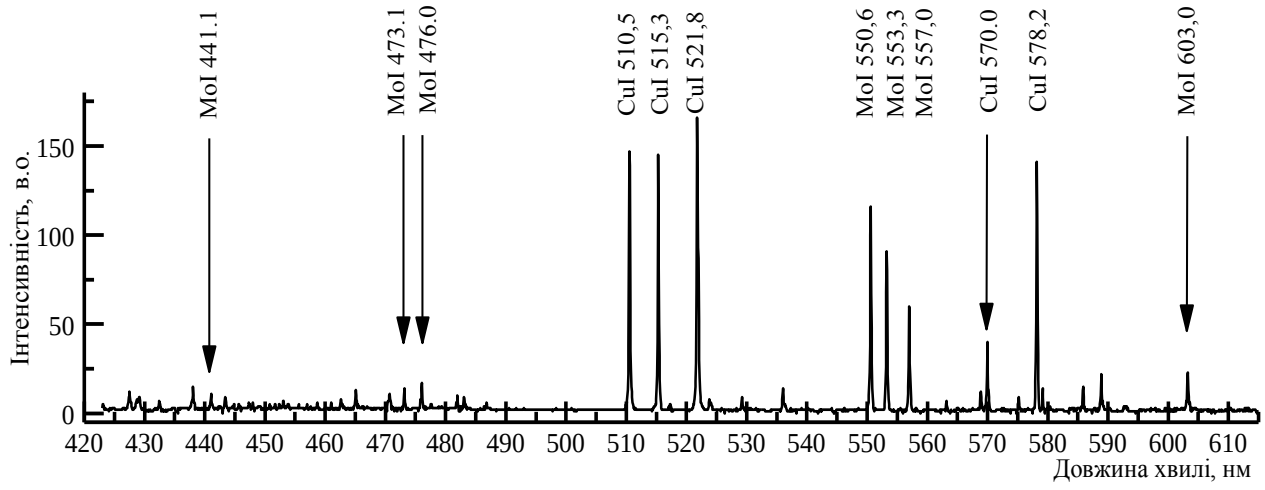


Рис.2 Спектр плазми електричної дуги між Cu-Mo електродами

монохроматизації. Таким чином, вимірюючи ширину певного інтерференційного максимуму, можна визначити ширину спектральної лінії у відповідній просторовій точці плазмового об'єкту.

Радіальний розподіл електронної концентрації визначено з півширини спектральної лінії CuI 515,3 нм за умови, що ефект Доплера незначно впливає на розширення досліджуваної лінії у порівнянні з квадратичним ефектом Штарка.

Реєстрацію та розшифрування спектру плазми електричної дуги виконано за допомогою дифракційного спектрометра з використанням програмного інтерфейсу [9].

Селекція спектральних ліній CuI та MoI

Спектроскопія багатокомпонентної плазми з домішками металів потребує ретельного визначення спектральних ліній, які придатні для діагностики. Селекція спектральних ліній атома міді та їх спектроскопічних констант виконана у роботі [10]. Таким чином, залучено CuI лінії: 510,5; 515,3; 521,8; 570,0; 578,2; 793,3 та 809,3 нм. У випадку композитного матеріалу мідь – молібден дослідження контурів спектральних ліній показали що, лінії CuI 427,5 та 465,1 нм перекриваються з лініями молібдену MoI 427,6 та 465,2 нм [11]. Саме тому, дані лінії міді вилучено з подальшого розгляду.

На основі аналізу спектра плазми (рис. 2) для діагностики обрано наступні лінії атома молібдену: 441,1; 473,1; 476,0; 550,6; 553,3; 557,0 і 603,0 нм. Дані лінії добре ізольовані в спектрі і достатньо інтенсивні для реєстрації.

Спектроскопічні константи для ліній атома молібдену наведені у джерелах [12-16], але ці дані суттєво відрізняються між собою. Як інструмент для вибору прийнятних спектроскопічних констант використано метод діаграм Больцмана.

Нахил лінії на діаграмі Больцмана відповідає температурі заселення енергетичних рівнів атомів у плазмі. У випадку, коли багатокомпонентна плазма перебуває у стані локальної термодинамічної рівноваги, ці нахили мають бути однакові для кожної з компонент плазми. Таким чином обрано значення сил осциляторів (дивись Табл. 1) з джерел [12-16], що забезпечують найкращий збіг нахилів прямих на діаграмі Больцмана. На рис. 3 а,б суцільні лінії проведено через точки, що відповідають спектральним лініям міді, а пунктирні лінії – через точки, які відповідають спектральним лініям атомів молібдену.

Таблиця1

Рекомендовані спектральні лінії MoI, енергії збудження та відповідні добутки сил осциляторів на статистичні ваги

Довжина хвилі, нм	E_{Up}, eB	$g_i f_{ij}$	Посилання
441,17	4,89	1,512	[12]
473,14	5,24	1,551	[15]
476,02	5,25	2,031	[15]
550,65	3,59	1,149	[13]
553,3	3,58	0,854	[13]
557,04	3,56	0,460	[13]
603,0	3,59	0,359	[16]

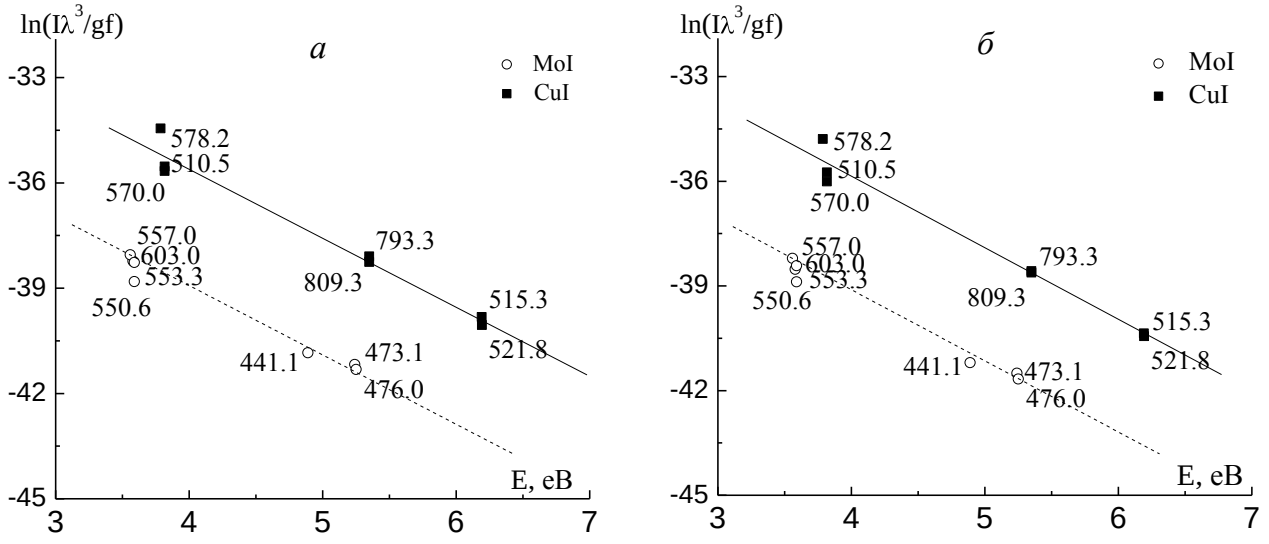


Рис.3 Діаграми Больцмана для радіусів r=0 мм (а) та r=1.2 мм (б) при силі струму 3,5 А

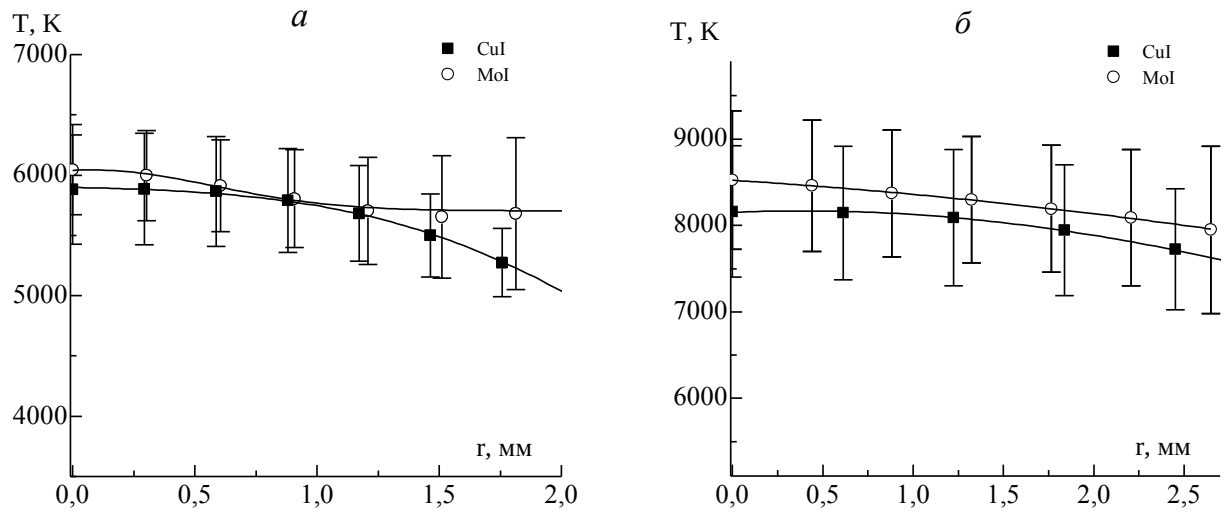


Рис.4 Радіальні розподіли температури плазми електродугового розряду між Cu-Mo електродами при силі струму 3,5 А

Рекомендовані лінії та спектроскопічні константи в аналогічний спосіб перевірені для випадку електричної дуги при силі струму 30 А.

Радіальні профілі температури плазми, визначені за спектральними лініями атомів міді та молібдену, показано на рис. 4 а,б.

Розрахунок складу плазми

Наявний інтерферометр Фабрі-Перо (у режимі еталона) не дозволяє виконати вимірювання контурів ліній співвимірних із інструментальним контуром установки при силі струму 3,5 А. Тому, для визначення електронної концентрації пропонується скористатися алгоритмом [10], який спирається на раніше отримані параметри дугової плазми: а саме радіальні розподіли температури для 3,5 та 30 А, розподіл електронної концентрації для 30 А, та відношення інтенсивностей CuI та MoI ліній.

Якщо плазма перебуває у стані локальної термодинамічної рівноваги, її можна описати системою рівнянь, яка, в першу чергу, залежить від сорту частинок, що знаходяться в об'ємі плазми. У плазмі електродугового розряду між композитними Cu-Mo електродами в потоці аргону беруться до уваги атоми та іони аргону. Крім того, внаслідок термічної дії розряду на електроди в плазмі будуть присутні атоми та іони міді і молібдену. Для такого випадку система рівнянь буде мати наступний вигляд:

три рівняння Саха для атомів аргону, міді та молібдену:

$$S_i(T, N_e) = \frac{N_e N_{i+}}{N_i}, \quad (1)$$

рівняння електронейтральності:

$$N_e = \Sigma N_{i^+}, \quad (2)$$

рівняння ідеального газу:

$$\frac{p}{kT} = 2N_e + \Sigma N_i \quad (3)$$

та співвідношення між концентраціями атомів міді та молібдену:

$$\frac{N_{Cu}}{N_{Mo}} = \frac{I_{Cu} \cdot \Sigma_{Cu} \cdot \lambda_{Cu}^2 \cdot (gf)_{Mo} \cdot e^{\frac{E_{Cu}}{kT}}}{I_{Mo} \cdot \Sigma_{Mo} \cdot \lambda_{Mo}^2 \cdot (gf)_{Cu} \cdot e^{\frac{E_{Mo}}{kT}}}, \quad (4)$$

де i - Ar, Cu, Mo, N_i та N_{i+} – концентрації відповідних атомів та іонів.

Таким чином, радіальні профілі складу плазми розраховано шляхом розв'язання системи рівнянь з використанням розподілів температури та електронної концентрації в якості вхідних параметрів.

Обговорення результатів

Розраховані радіальні профілі складу плазми при струмах 3,5 та 30 А показано на рис. 5 а,б.

В обох випадках плазма головним чином складається з атомів аргону.

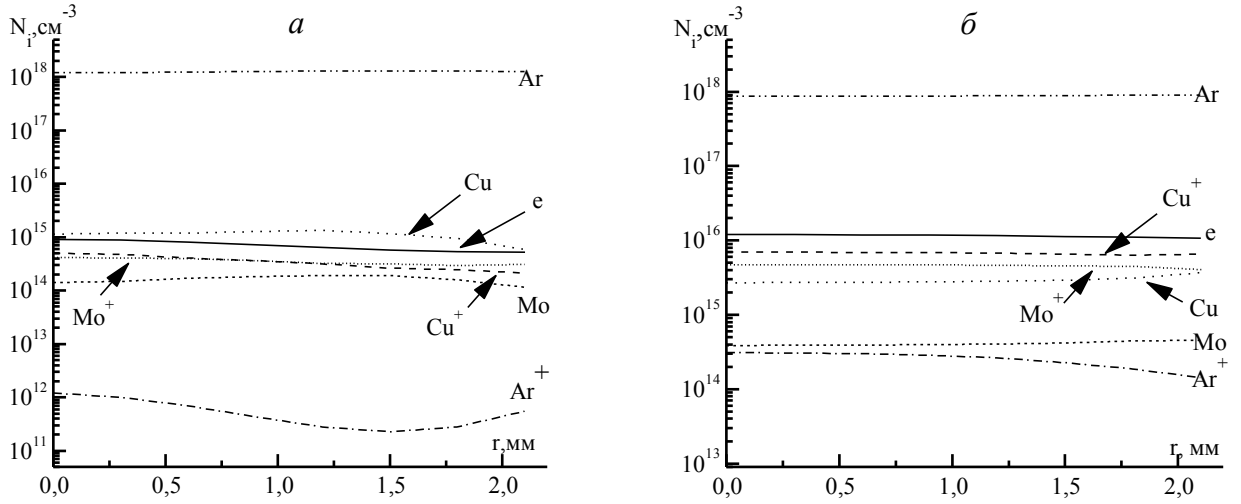


Рис.5 Радіальні розподіли концентрацій складових плазми електродугового розряду між Cu-Mo електродами при силі струму 3,5 (а) та 30 А(б)

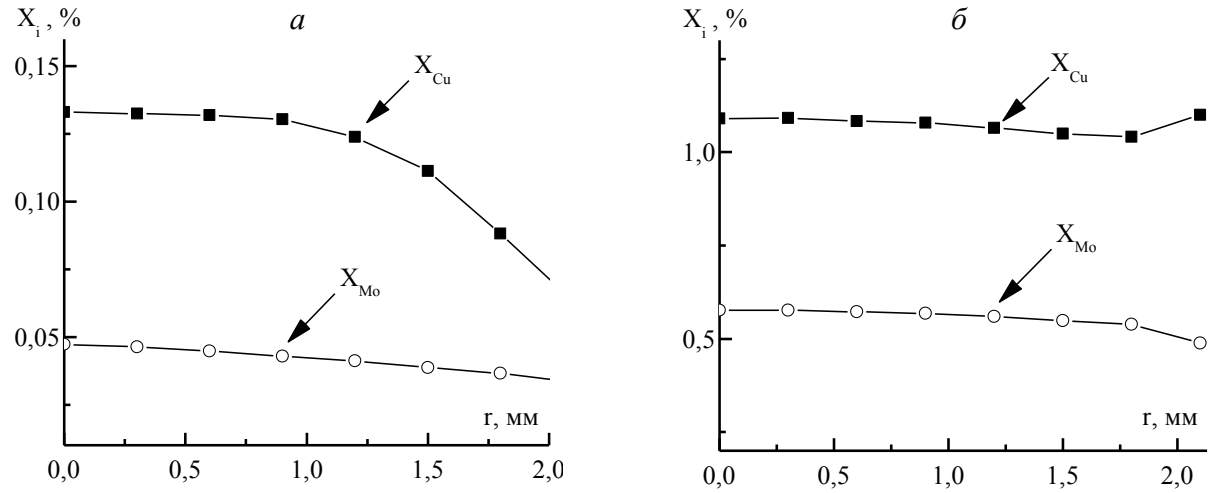


Рис.6 Радіальні розподіли вмісту міді та молібдену в плазмі електродугового розряду між Cu-Mo електродами при силі струму 3,5 (а) та 30 А(б)

Для аналізу поведінки металевої домішки в плазмі доцільно побудувати радіальні розподіли вмісту міді:

$$X_{Cu} = \left(\frac{N_{Cu} + N_{Cu^+}}{\sum N_i} \right) \cdot 100\%,$$

та молібдену

$$X_{Mo} = \left(\frac{N_{Mo} + N_{Mo^+}}{\sum N_i} \right) \cdot 100\%,$$

де $\sum N_i$ - сума концентрацій всіх компонентів плазми за винятком електронів. Вміст металів у плазмі зростає на порядок при збільшенні струму до 30 А (рис. 6).

Вміст молібдену в плазмі приблизно вдвічі менший за вміст міді для струмів 3,5 та 30 А. Але, внесок іонізації молібдену у провідність плазмового каналу порівняний із внеском міді. Дана ситуація пояснюється нижчою у порівнянні з міддю енергією іонізації молібдену.

У той же час іонізація аргону не відіграє помітної ролі.

Висновки

Методами оптичної емісійної спектроскопії плазми у припущенні локальної термодинамічної рівноваги досліджено фізичні властивості плазми електродугового розряду між композитними Cu-Mo електродами у потоці аргону при силі струму 3.5 та 30 А.

З аналізу радіальних розподілів складу плазми випливає, що іонізація молібдену, попри

нижчий його вміст, вносить значний внесок у провідність розрядного каналу.

Рекомендовано спектральні лінії атома молібдену та їх спектроскопічні константи, які придатні для діагностики плазми електродугового розряду.

Список використаних джерел

1. *Grechanyuk N.I.* Vapor-phase condensate in the system of Cu-W (Mo, Cr). Structure and properties. / N.I. Grechanyuk, R.V.Minakova, E.V. Homenko // Electron microscopy and material strength. – 2009. - №16. - P. 16-31 (in Russian).
2. *Minakova R.V.* The development tendencies of manufacturing technologies of composite materials and their contacts / R.V.Minakova, A.P. Kresanova, M.M. Churakov, E.V. Homenko // Electrical contacts and electrodes. – 1998. – P. 5-19 (in Russian).
3. *Miedzinski B.* Dynamics of sliding contacts in mine slow-speed railway transportation / B Miedzinski, W. Dzierzanowski, J. Wandzio, N. Grechanyuk, V.N. Shoffa // Electrical contacts and electrodes. – 2012. - P. 63-69.
4. *Babich I.L.* Erosion of composite electrodes on copper base under the electric arc discharge action / I.L .Babich, A.N. Veklich, V.F. Boretskij et al. // Electrical contacts and electrodes. - 2008. - P. 14-21. (in Russian).
5. *Babich I.L.* Plasma of electric arc discharge between Cu-Mo electrodes / I.L. Babich, A.N. Veklich, R.V.Minakova // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Radio Physics & Electronics. - 2007. - №10. - P. 9-12.
6. *Veklich A.N.* Technique of spectroscopic diagnostic of electric arc plasma / A.N. Veklich, V.Ye. Osidach // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Radiophysics & Electronics. 2003. – №5. – P. 12-14 (in Ukrainian).
7. *Bockasten K.* Transformation of observed radiances into radial distribution of the emission of a plasma / K. Bockasten // Journ. of Opt. Soc. of Am. – 1961. – Vol. 51, № 9 – P. 943-947.
8. *Veklich A.* The determination of electron density in electric arc discharge plasma / A.N. Veklich, V.Ye. Osidach // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. 2004. - №2. - P. 428-435 (in Ukrainian).
9. *Veklich A.* Technique of electric arc discharge plasma diagnostic: peculiarities of registration and treatment of spectra / Veklich A., Lebid A. // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Radio Physics & Electronics. - 2012. - №18. - P. 6-9.
10. *Babich I.L.* Spectroscopy of electric arc plasma between composite electrodes Ag-CuO / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, et al. // Electrical contacts and electrodes. - 2010. - P. 82-115. (in Ukrainian).
11. *Babich I.L.* Dynamics of sliding contacts in mine slow-speed railway transportation / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich, N.I. Grechanyuk, A.V. Lebid, R.V. Minakova, P.V. Soroka // Electrical contacts and electrodes. – 2012. - P. 91-100.
12. *Palmeri P.* Fine structure and transition probabilities in neutral molybdenum / P. Palmeri, J.F. Wyart // Physica Scripta. – 1998. – Vol.58. – P. 445-456.
13. *Whaling W.* Comprehensive transition probabilities in Mo I / W. Whaling, J.W. Brault // Physica Scripta. – 1988. – Vol.38. – P. 707-718.
14. *Schnehage S.E.* Oscillator strengths of neutral and singly ionized molybdenum / S.E. Schnehage, K. Danzmann, R. Kunnemeyer, M. Kock // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. – 1983. – Vol.29. – P. 507-516.
15. *Whaling W.* Lifetimes, branching ratios, and transition probabilities in molybdenum I / W. Whaling, P. Chevako, J.E. Lawler // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. – 1986. – Vol.36. – P. 491-496.
16. *Whaling W.* Lifetimes, branching ratios, and transition probabilities in Mo I / W. Whaling, P. Hannaford, R.M. Lowe, E. Biemont, N. Grevesse // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. – 1984. – Vol.32. – P. 69-80.

Надійшла до редколегії 18.02.13

УДК 532.72+537.221:621.383

O. M. Ivaniuta, Ph.D.

Photoelectroactive modifying fullerenes.

Modifying fullerenes combined with high conducting polymers may contribute to the development of improved electronic and optoelectronic devices. This article view work on highly functional and processable polyaniline fullerenes composite materials. It demonstrates the close relation between functionality and processing behaviour and describes fullerenes-polymer interaction.

Key Words: fullerenes, organic photovoltaic, solar cell, polyaniline, phthalocyanine.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: iva@univ.kiev.au.

Іванюта О.М., к.ф.-м.н.

Фотоелектроактивація модифікованих фуллеренів.

Модифіковані фулерени в поєднанні з провідними полімерами можуть сприяти розробці більш досконалих електронних та оптоелектронних пристроїв. Ця робота оглядає функціоналізацію та трансформацію поліанілін – фулерен композитних матеріалів. Це свідчить про тісний зв'язок між функціональністю, процесом обробки та описує фулерен-полімерну взаємодію.

Ключові слова: фуллерен, органічний фотоелемент, сонячна батарея, поліанілін, фталоціанін.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: iva@univ.kiev.au.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Light can be considered an energy source which is capable of remotely switching functionality compound, effecting structural and chemical transformations of molecules. Today, two classes of materials are of paramount interest in the field of research into the optoelectronic applications of organic electronics: electroactive polymers and carbon materials. Energy management, storage and redistribution are important considerations in natural and modificial molecular architectures and light harvesting elements which can be controlled with high precision. Reversible energy transfer processes are being harnessed in this regard with to incorporation in modifying fullerenes. Photochemical changes are equally being used to modulate different properties such as host-guest interactions or electronic properties [1, 2, 5].

Electroactive polymers it polymers that possess the electrical, electronic, magnetic and optical properties of a metal and the mechanical properties of a conventional polymer. In the doped state, the backbone conducting polymer consists of a truly conjugated and delocalized *p*-electron system that provides semiconducting, conducting and other electroactive properties. Doping may be carried out chemically or electrochemically and always involves doping counter ions which stabilize the doped state. Their properties are intrinsic to “doped” forms of polymers [1, 3, 9].

The non-redox doping process in polyaniline, using photonics acids modifying fullerenes non be polymerized. During this doping process the number of electrons associated with the polymer backbone does not change. However, the energy levels are rearranged and a stable 2-D polychanges radical cation is produced, leading the polymer into a highly conducting regime. The highly conducting form of polyaniline, which corresponds to a oxidante, can be reversibly dedoped into its non-conducting base form. Moreover, the whole process is accompanied by very beautiful and reversible changes. Some other typical intrinsically conducting polymers are polypyrrole, terthiophene and poly-3,4 ethylenedioxythiophene is illustrated in Figure 1.

The key to further progress lies in improving

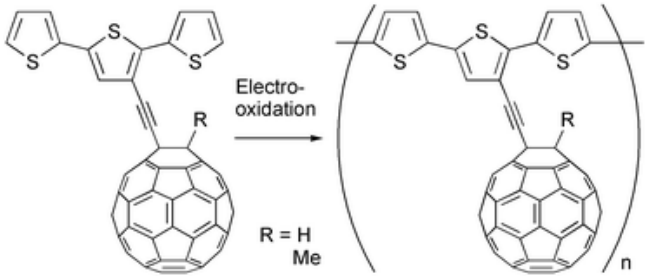


Fig. 1. Synthesis systems fullerene – terthiophene dyads for to create electroactive polymer films. Electropolymerization modifying fullerenes with metallized oxidate by radicals. [1].

© О.М. Іванюта, 2013

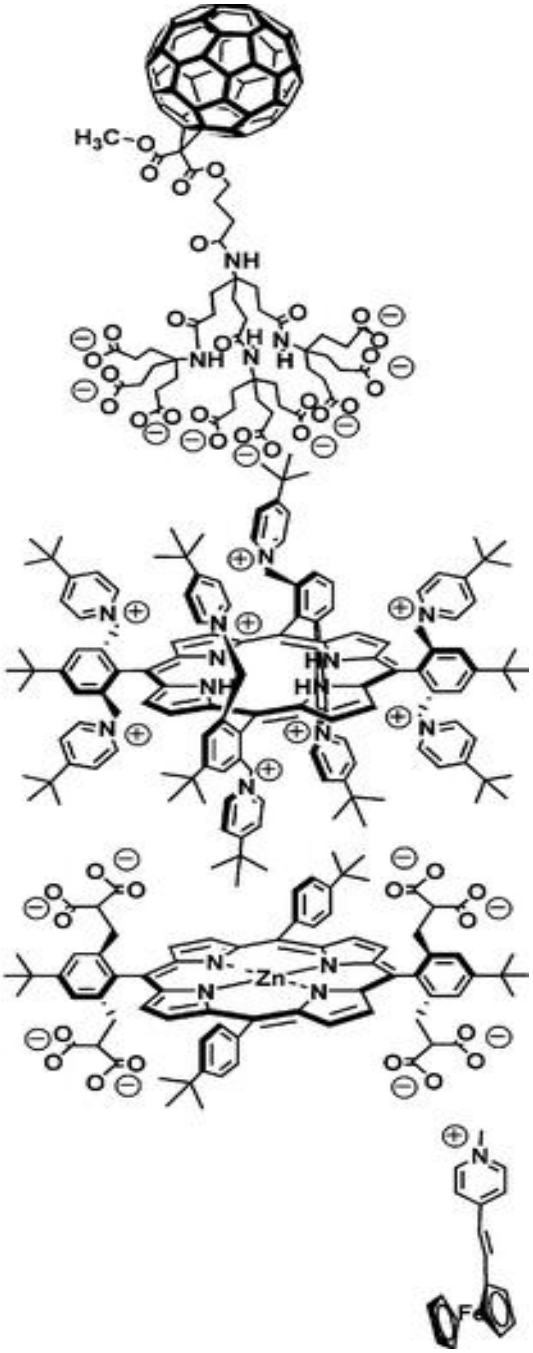


Fig. 2. Photoelectrochemical cell incorporating electrostatically interacting fullerenes, porphyrins and ferrocenes for solar cell that give rise to energy and redox gradients. [1, 7].

charge carrier mobility and processing. Systems fullerenes - porphyrins can be successfully used as integrative components in multifunctional hybrid cells that reveal considerable promise for applications as photochemical energy conversion systems is illustrated in Figure 2. Modifying fullerenes can be also considered natural partners for intrinsically conducting polymers. Their dimensions and electronic structure combine well with the chain structure and the delocalized electron system of these electroactive polymers. Their mutual interactions may lead to highly favourable synergetic effects between both constituents, which might contribute to further improvements in organic electronic devices.

With these considerations in mind novel composite materials, based on modifying fullerenes and electroactive polymers been researched. I focused on two key issues: enhanced functionality and the processing properties of the obtained materials. These issues are directly linked to favourable interactions between the modifying fullerenes and the polymer chains. Thus, they are also closely related to the synthesis approach and self-assembling processes. I will outline this approach in the following description of our research on polyaniline - modifying fullerenes composites [4].

Directly after synthesis, I took a *UV-Vis* spectrum of fullerenes and modifying fullerenes solutions (Figure 3). The maximum at 330 nm corresponded to the p-p* transition centred on the benzenoid unit of fullerenes. The maximum at 475 nm corresponded to the quinoid exciton band. However, it was striking that the modifying fullerenes solution showed a new and very strong band with its maximum at 323 nm. This band was related to the *p-p** transition centred on the quinoid unit. It would seem that the presence of fullerenes led to the enhanced response of the related rings. The rest of the features were identical to pure fullerenes. This led to view that this is a two-phase system: free fullerenes, and a new phase of fullerenes whose conformation is more size, a fact that is related to the presence of fullerenes [4, 8].

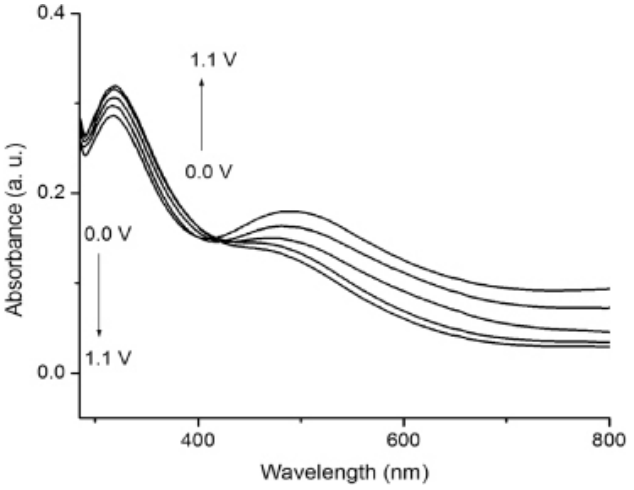


Fig. 3. *UV-Vis* absorption spectra in polyaniline - C_{60} after electrolysis. Modifying fullerenes (curves from top to bottom) after processes electrolysis performed: under inert atmosphere, air, gel, aqueous solution, salt solution for the range 280÷800 nm [2].

As a next step, I tested the functionality of the material. First, performed temperature - dependent conductivity measurements on the bulk powder materials. The room temperature value for fullerenes fell below the experimental limit (below 10^{-10} S/cm). Therefore, no temperature dependence could be measured (Figure 4, 5). However, with about 0,1 S/cm, the room temperature conductivity for the modifying fullerenes powder drastically increased by at least nine orders of magnitude compared to fullerenes. Its temperature dependence resembled that of the fullerenes, indicating that conduction occurred through a percolated three-dimensional network of fullerenes. However, the room temperature value of the modifying fullerenes composite did not reach the value of a fullerenes network, which is expected to be one or two orders higher in magnitude. This indicates the existence of additional tunnelling barriers between the fullerenes, formed by the coating around the fullerenes. As a further indication of functionality, i observed the enhanced thermal stability of the composite, which decomposes in air at temperatures 120 ºC higher. Secondly, i investigated the photophysical properties of the composite and measured its photoluminescent behavior (λ_{exc} = 330 nm) [4, 6] (shows, Figure 3). Shows that's a broad emission maximum modifying fullerenes at about 410 nm caused by reduced benzenoid/amine groups.

Self-assembled monolayers of fullerene-porphyrin systems, is the most frequently and systematically studied approach for the construction of nanostructured photoelectrodes. In particular, covalently linked dyad and triad conjugates involving porphyrins and fullerenes with a thiol functionality have been self assembled onto gold electrodes for photocurrent measurements is

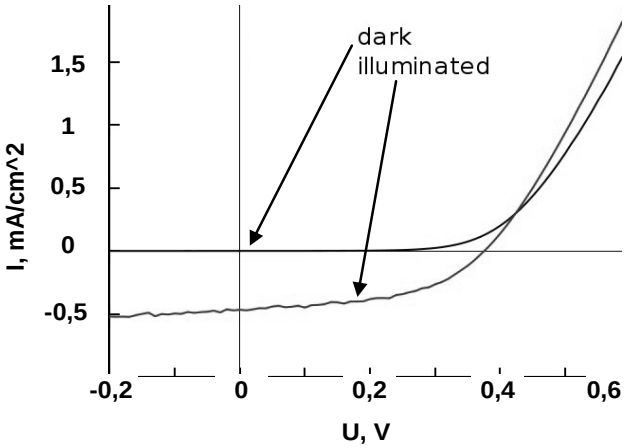


Fig. 4. *I-V* characteristics of inverted polyaniline - C_{60} bulk-heterojunction solar cells with and without light modification.

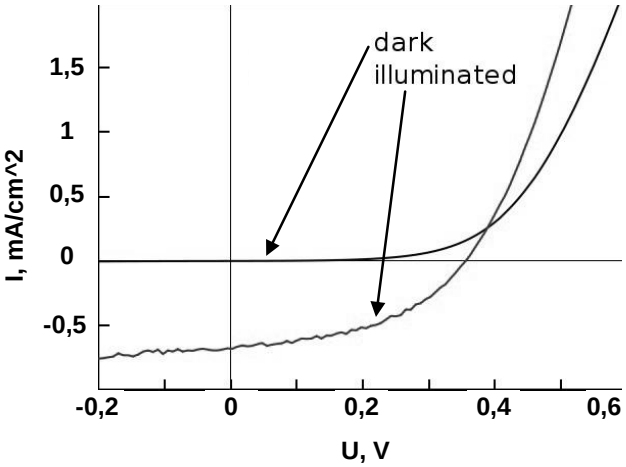


Fig. 5. *I-V* characteristics of inverted phthalocyanine - C_{60} bulk-heterojunction solar cells with and without light modification.

illustrated in Figure 6. Cathodic photocurrents were observed upon irradiation of the modified gold electrodes. However, strong excited state quenching of the porphyrin by the gold surface is the limiting factor that prevents attaining higher charge separation quantum yields.

This is usually suppressed drastically when modifying fullerenes is transformed by chemical doping into a highly conducting state. However, modifying fullerenes also luminesced and essentially maintained the features of modifying fullerenes. Here, the reduction of the long-wave emission band was in agreement with a more planar conformation

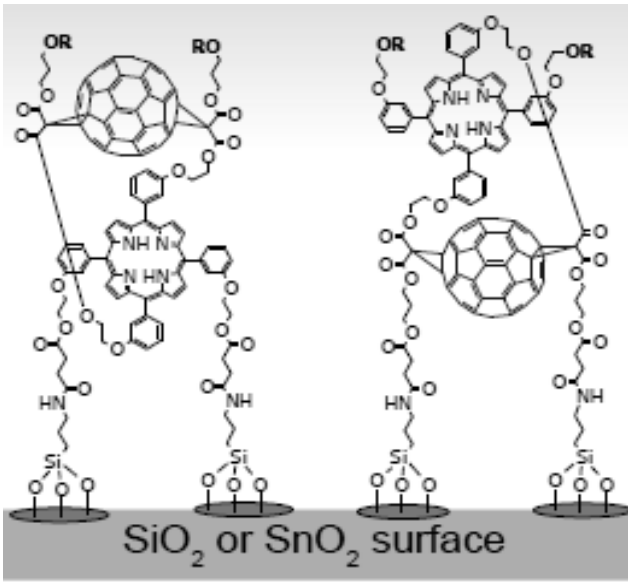


Fig. 6. Molecular layer can be assembled on surface of metal or semiconductor electrode by covalent linking the molecules to the surface. Methoxysilane groups can be used for selfassembling on SiO_2 surface [1].

of modifying fullerenes. It is highly remarkable that the presence of 50 % of fullerenes in the modifying fullerenes composite, which make it highly conductive, did not result in a quenching of luminescence.

Studied the optical activity properties modifying fullerenes solutions. It is well known that the addition of acids transforms fullerenes into the corresponding emeraldine salt, whose backbone then adopts a modifying structure which is responsible for its optical activity. Therefore, the starting point was the stable, modifying fullerenes solution. To this solution, I added the modifyical-camphorsulfonic acid. In contrast to the addition of *HCl*, which results in precipitation of the fullerenes, the addition of camphorsulfonic acid resulted in a stable, solution of the corresponding emeraldine salt modifying fullerenes. Figure 6a shows the *UV-Vis* spectrum of the resulting modifying fullerenes composite and that of emeraldine salt for comparison. The three characteristic bands at 345, 415, and 810 nm are associated with *p-p**, polaron-p* and p-polaron band transitions of emeraldine salt. The broad *p*-polaron band at 810 nm is typical of an arrangement of polymer chains in the "compact coil" form [5, 7]. Modifying fullerenes essentially showed the same features, as well as a dominant band at 295 nm. As in the case of modifying fullerenes, this band corresponded to the *p-p** transition centred on the Quindío unit and was related to the coating of modifiable onto fullerenes.

Furthermore, both solutions had become optically active (shows, Figure 5). These observations are consistent with the polymer adopting a "*compact coil*" conformation. The circular dichromatic spectrum for modifying fullerenes showed that the polymerization of aniline in the presence of fullerenes and doping did not inhibit the polymer's ability to become optically active. The effects of introducing optical properties into modifying fullerenes composites and its technological implications are being investigated.

Soluble modifying fullerenes composite has enhanced conductivity and improved thermal stability. It is also luminescent, optically active and can be processed from solutions into films, coatings and fibres. Depending on the synthesis conditions, the bithiazole based polymers exhibited optical band gaps ranging from 2,62 eV to 1,77 eV and the copolymers displayed multichromism within a wide span of the visible spectrum. The copolymers revealed short switching times and useful optical contrast of 0,6 S and 54 %, respectively. These devices exhibited low switching voltages and switching times with reasonable stability under atmospheric conditions. I believe that these findings provide the basis for novel smart organic materials of great use in smart optoelectronic applications and devices.

References

1. From Synthesis to Optoelectronic Properties / *Guldi D.M., Martín N.* Eds, Kluwer Acad Publishers, Dordrecht, The Netherlands - 2002.- 784 p.
2. Fullerenes: From Synthesis to Optoelectronic Properties / *Guldi D.M., Martin N.,* Developments in Fullerene Science, V. 4, - 2003.- 447 p.
3. *Scharff P., Tsamis C., Ivanyuta O., ad. all,* DNA, DNA/metal nanoparticles, DNA/nanocarbon and macrocyclic metal complex/fullerene molecular building blocks for nanosystems: electronics and sensing //In Book Frontiers of multifunctional integrated nanosystems, Eds: E. Buzaneva and P. Scharff, NATO Science Series II, Mathematics, Physics and Chemistry – NAII, V. 152, Kluwer Akademic Publishers, Dordrecht, - 2004.- P. 251-276
4. *Goh C., Scully S.R., McGehee M.D.,* Effects of molecular interface modification in hybrid organic-inorganic photovoltaic cells. // J. Appl. Phys.- 2007.- **101**.- P. 114503–114514.
5. *Hau S.K., Yip H.L., Zou, J. ad. all.,* Indium tin oxide-free semi-transparent inverted polymer solar cells using conducting polymer as both bottom and top electrodes // *Org. Electron.*- 2009.- **10**.- P. 1401–1407.
6. *Kim Y., Choulis S.A., Nelson J. ad. all.,* Device annealing effect in organic solar cells with blends of regioregular poly(3-hexylthiophene) and soluble fullerene // Appl. Phys. Lett.- 2005.- **86**.- P. 063502–063504.
7. *Kim J.Y., Kim S.H., Lee H.H. ad. all.,* New architecture for high-efficiency polymer photovoltaic cells using solution-based titanium oxide as an optical spacer // Adv. Mater.- 2006.- **18**.- P. 572–576.
8. *Mihailetchi V.D., Blom P.W., Rispens M.T. ad. all.,* Cathode dependence of the open-circuit voltage of polymer:fullerene bulk heterojunction solar cells // J. Appl. Phys.- 2003.- **94**.- P. 6849-6854.
9. *Mahendran R., Il-Kwon Oh.,* Fullerenol-Based Electroactive Artificial Muscles Utilizing Biocompatible Polyetherimide. // *ACS Nano*.- 2011. –**5(**3) - P. 2248-2256.

Надійшла до редколегії 27.11.12

УДК 537.52:533.9.082.5:537.872: 621.317

[1]Лопатько К.Г., к.т.н., доц.,
[1]Афтанділянц Є.Г., д.т.н., проф.,
[2]Веклич А.М., к.ф.-м.н., доц.,
[2]Борецький В.Ф., к.ф.-м.н., асист.,
[2]Сірик О.О., студ.

Синтез металевих наночастинок в плазмі електричного розряду у воді

Дана робота присвячена дослідженню процесу генерації металевих наночастинок під впливом плазми електроіскрового розряду у воді. Діагностика такої плазми виконувалась методом оптичної емісійної спектроскопії. Температуру заселення в плазмі визначали за допомогою діаграм Больцмана. Детально розглядається механізм руйнування поверхні металевих гранул. Обговорюються ймовірні канали релаксації енергії електроіскрового розряду у воді між металевими гранулами.

Ключові слова: плазма, підводний електричний розряд, наночастинки металів.

[1]Національний Університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони 15, Київ, Україна
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Радіофізичний факультет, вул. Володимирська 64, Київ, Україна

[1]Lopatko K.G., Ph. D., Associate Professor,
[1]Aftandilyants Y.G., Dr., Professor,
[2]Veklich A.N., Ph. D., Associate Professor,
[2]Boretskij V.F., Ph.D., Assistant Professor,
[2]Siryk O.O., stud.

Metal nanoparticle synthesis in plasma of electric discharge in water

The method of metal nanoparticles generation by plasma of electric spark discharge in water is discussed. Optical emission spectroscopy was used for diagnostics of such plasma. Boltzmann plot technique was used to obtain excitation temperature in plasma. The mechanism of thermal destruction of metal particles surface is considered. The probable channels of energy relaxation in the electric spark discharge in water between metal granules were discussed.

Key words: plasma, underwater electric discharge, metal nanoparticles

[1]National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, 15, Heroyiv Oborony st., Kyiv, Ukraine
[2]Taras Shevchenko Kiev National University, Radio Physics Faculty, 64, Volodymyrs`ka str., Kyiv, Ukraine

[*]E-mail: van@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Електроіскрові явища та технологічні процеси, в яких вони використовуються, є предметом детальних досліджень. Електроіскрові технології отримання нанорозмірних порошків металів і сплавів на сьогоднішній день є одними з найефективніших та можуть задовольняти вимогам широкого кола фундаментальних та прикладних задач [3]. Такі системи часто використовують у процесах коагуляційного очищення води і досліджуються з метою отримання біофункціональних матеріалів [4]. Зважаючи на те, що основні властивості наноматеріалів формуються на стадії їх утворення, питання біологічної ефективності тісно пов'язані з кінетикою процесів, які відбуваються в реакційній зоні. Існують передумови отримання матеріалів із різко нерівноважною структурою, а значить із підвищеним рівнем вільної енергії та, як наслідок, підвищеною здатністю взаємодії з оточуючим середовищем.

Метою даної роботи є дослідження процесу генерації наночастинок, особливостей ерозії металевих гранул та аналіз каналів дисипації енергії електроіскрового розряду у воді і фізичних процесів, що його супроводжують. Дослідження такого характеру перебувають на початковому етапі і є логічним розвитком робіт [3, 4, 8].

Експеримент

Тиристорний генератор потужністю 2 кВт, яка акумулюється робочим конденсатором, використовували для формування розрядних імпульсів у реакційній камері із струмопровідним шаром металевих гранул, занурених у воду (рис. 1).

Спектроскопічні дослідження

Для оцінки енерговнеску в зону мікророзряду виконували спектроскопічні дослідження температури плазми в цій області. Однією із переваг оптичної емісійної спектроскопії, як методу діагностики плазми, є безконтактний

© К.Г. Лопатько, Є.Г. Афтанділянц, А.М. Веклич, В.Ф. Борецький, О.О. Сірик, 2013

характер вимірювання параметрів джерела випромінювання, таких як: температура, електронна концентрація, концентрація важких компонент плазми тощо. Зокрема, для визначення температури в діагностиці плазми широко застосовується метод діаграм Больцмана. У випадку реалізації в плазмі локальної термодинамічної рівноваги цей метод дозволяє визначити температуру заселення електронних рівнів в атомах. Саме для такої рівноважної системи, концентрація атомів N_i, в яких електрон перебуває на зовнішньому *i*-му рівні, відповідно до розподілу Больцмана, становить:

$$N_i = N_a \frac{g_i}{U(T)} \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \qquad (1)$$

де N_a – загальна концентрація атомів в певній просторовій точці вимірювання, $U(T) = \sum_i g_i \exp\left(-E_i \diagup kT\right)$ – статистична сума атома, E_i – енергія збудження *i*-го рівня.

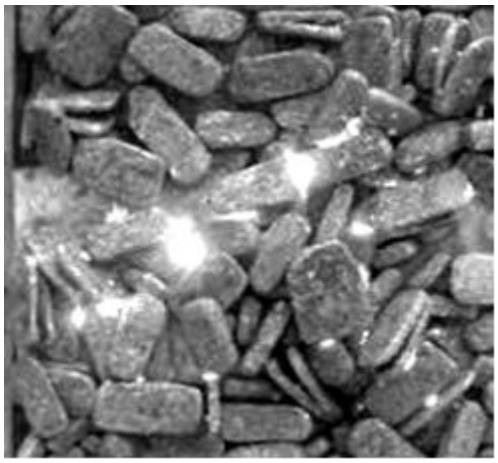


Рис. 1. Утворення локальних іскрових розрядів між гранулами

Для діагностики електроіскрових розрядів між гранулами використовували метод діаграм Больцмана, який базується на вимірюванні лінійчатих спектрів випромінювання. Відомо, що інтенсивність випромінювання атомів при переході електрона з верхнього енергетичного рівня i на нижній рівень j визначається як:

$$I_{ij} = \frac{1}{4\pi} N_i A_{ij} h\nu, \qquad (2)$$

де N_i – заселеність верхнього рівня, A_{ij} – ймовірність спонтанного переходу, h – стала Планка, ν – частота випромінювання.

Співвідношення (1) з урахуванням (2), можна записати у вигляді:

$$I_{ij} = \frac{1}{4\pi} g_i A_{ij} h\nu_{ij} \frac{N_a}{U(T)} \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \qquad (3)$$

У свою чергу, співвідношення (3) можна записати у такий формі:

$$\ln\left(\frac{I_{ij}}{g_i A_{ij} h\nu_{ij}}\right) = \ln\left(\frac{1}{4\pi}\frac{N_a}{U(T)}\right) - \frac{E_i}{kT}. \qquad (4)$$

Таким чином, логарифм інтенсивності випромінювання для спектральних ліній з різними значеннями E_i, дозволяє побудувати діаграму Больцмана, в якій набір експериментальних точок утворює нахил, тангенс кута якого відповідає температурі T.

Отже, для визначення температури заселення атомів (тобто концентрації атомів на *i*-му енергетичному рівні) в розрядній плазмі методом діаграм Больцмана необхідно виконати вимірювання інтенсивності спектральних ліній в широкому спектральному діапазоні. Реєстрацію інтенсивності ліній, що випромінюються окремим елементом, виконували з урахуванням специфіки організації підводного розряду, а саме: його імпульсного характеру та короткої тривалості, реалізації одночасної множини точкових мікророзрядів у просторі.

Дослідження спектрів випромінювання електроіскрової плазми, що горить між металевими гранулами, зануреними в рідину, виконували за допомогою оптичної схеми, зображеної на рис. 2. Випромінювання плазми з розрядної камери 1 фокусувалося за допомогою лінзи 2 на вхідну щілину дифракційного спектрометра 3. Реєстрацію спектрів випромінювання на виході спектрометра здійснювали за допомогою ПЗЗ камери 4 із 2000x3008 пікселів, розмір кожного з яких складає 8x8 мкм^2. Подальший аналіз та обробку отриманих спектрів здійснювали за допомогою спеціально розробленого графічного інтерфейсу [5].

Використана експериментальна установка дозволяє реєструвати випромінювання у видимому діапазоні від 450 до 700 нм одночасно, з достатньою для використання методу діаграм Больцмана спектральною роздільною здатністю. Приклад реєстрації спектру випромінювання розрядної плазми між мідними гранулами показано на рис. 3 [8].

У процесі виконання вимірювань за допомогою даної установки враховували неоднорідність її спектральної чутливості. Шляхом додаткового залучення світлофільтрів розширили відносно невеликий динамічний діапазон вимірюваних інтенсивностей.

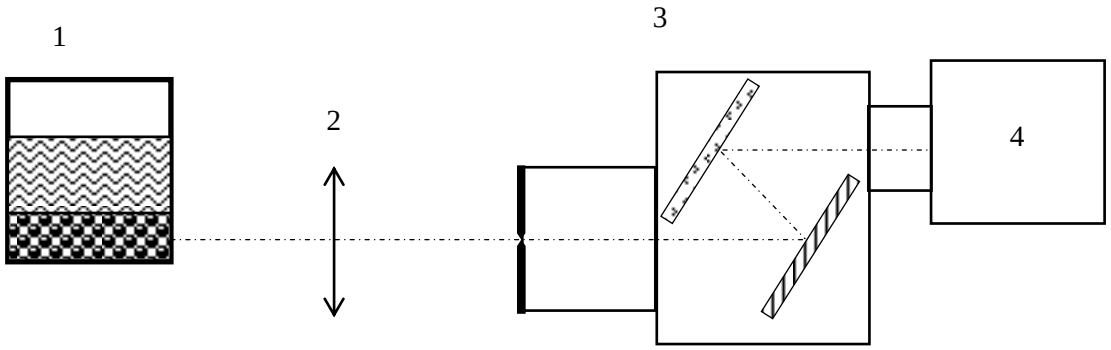


Рис. 2. Оптична схема установки.

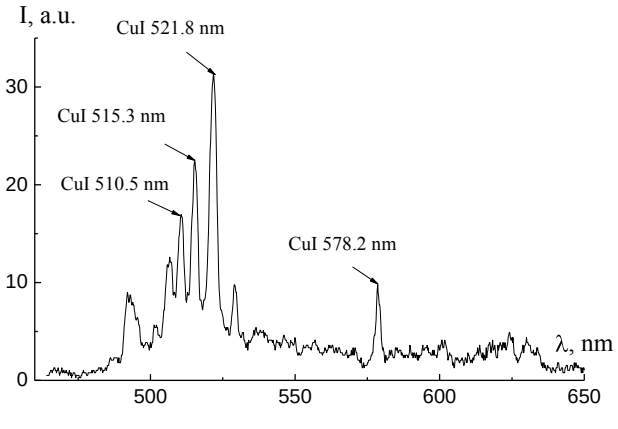


Рис. 3. Спектр випромінювання електро-іскрової плазми між мідними гранулами у воді.

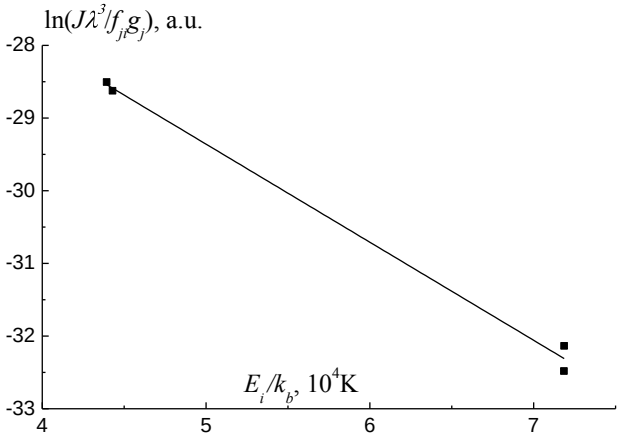


Рис. 4. Діаграма Больцмана для електро-іскрової плазми між мідними гранулами у воді.

Описану вище методику використовували для діагностики електроіскрової плазми між гранулами різних металів у воді. Зокрема, досліджували температуру заселення в плазмі електроіскрового розряду між мідними гранулами з використанням, відповідно, спектральних ліній атома міді. Спектроскопічні константи для цих ліній використані з роботи [6]. На рис. 4 показано приклад діаграми Больцмана, яку побудовано з урахуванням спектральної чутливості установки, на основі спектру випромінювання плазми, показаному на рис. 3.

Відповідно до методики визначення температури, нахил на наведеній діаграмі відповідає температурі заселення електронних рівнів в атомі. Припускали, що коефіцієнт пропускання колоїдного розчина та стінок розрядної камери не залежить від довжини хвилі в досліджуваному оптичному діапазоні. Оскільки у процесі реєстрації на вхідній щілині спектрометра може одночасно фокусуватись кілька просторово рознесених мікророзрядів, залучена методика дозволяє визначати температуру в кожному з них окремо. За час експозиції спектру за допомогою ПЗЗ-камери може реєструватися випромінювання кількох імпульсів у кожному мікророзряді, які перебувають в різних фазах свого розвитку. Отже, в просторових межах кожного із мікророзрядів може спостерігатись різна температура, яка в умовах проведеного експерименту становить 7500-8500 К.

Аналогічно виконували спектроскопічні дослідження плазми електричного розряду у воді між гранулами цинку, срібла, молібдену, заліза та марганцю.

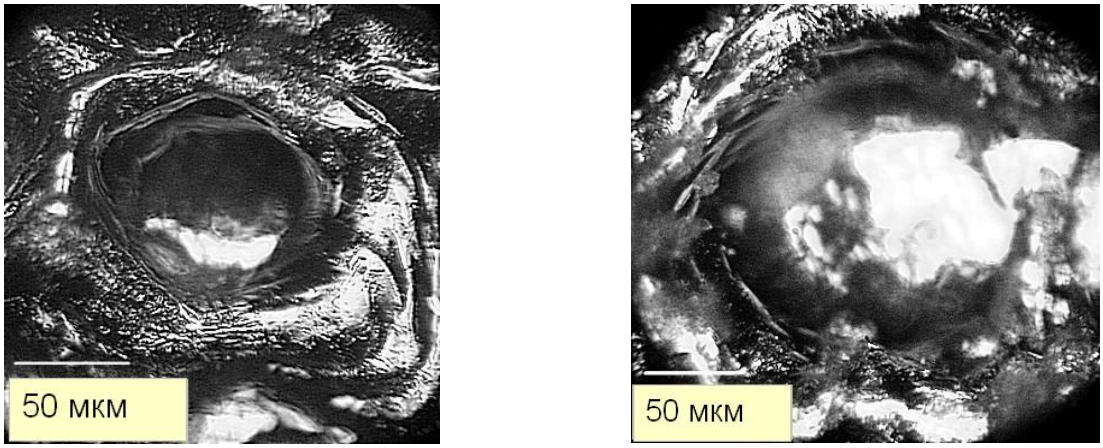
Спектроскопія плазмового каналу дозволила встановити, що процес електричної ерозії поверхонь металевих гранул супроводжується достатньо високими температурами, які для усіх досліджуваних металів, перевищують як температуру плавлення, так і температуру випаровування.

Металографічні дослідження

В залежності від параметрів розрядного контуру для усіх металів спостерігається утворення певної кількості мікрофракції, яка є результатом плавлення металу з наступної кристалізацією, про що свідчить характерна форма таких частинок. Це дає підстави зробити висновок, що однією із складових процесу

руйнування поверхні (її електрична ерозія) є оплавлення локальних ділянок контактуючих гранул (рис. 5). Але, в результаті іскроерозійного процесу відбувається утворення ще однієї фракції, морфологія якої помітно відрізняється і є характерною при формуванні твердої фази в результаті випаровування із наступною конденсацією. Подібні перетворення мають місце при високотемпературній обробці речовин, у тому числі в металургійних процесах з низьким тиском, коли створюються для цього відповідні умови у процесі охолодження [1].

Під впливом теплової енергії утвореного плазмового каналу відбувається локальний розігрів та плавлення частини металу. Із збільшенням енергії, що вводиться у канал, відповідно збільшується і частина розплавленого металу (рис. 5, б), про що свідчить підвищення кількості мікрофракції, з якої вона складається. При достатній тепловій потужності джерела нагріву починається випаровування розплавленої частини. Але, при незмінному тиску і температурі, цей процес переходить у стадію, коли досить швидко настає термодинамічна рівновага між рідкою і паровою фазами та відбувається конденсація насиченого пару, тобто має місце зворотній процес. Такий механізм відбувається в стаціонарних дугових розрядах, коли масова частка випаровуваної речовини вкрай мала і не перевищує 5 – 10 % [2].



а б

Рис. 5. Закристалізована частина розплавленого металу (мідь) у кратері

Металографічний аналіз гранул після іскроерозійної обробки показує, що частина металу, яка може бути переведена у рідкий стан, не завжди покидає поверхню. Причому, із збільшенням накопиченої енергії на конденсаторі, ця закономірність стає більш очевидною (рис. 5, а, б). Тобто, для евакуації розплавленої частини металу повинні виконуватись додаткові вимоги.

Експериментально встановлено, що між значеннями параметрів розрядного контуру, для отримання максимальної кількості ультрадисперсної фракції, існує взаємоузгоджений зв'язок. Тим не менш, адекватної математичної моделі, яка б пов'язувала усі наявні чинники даного складного фізичного явища, та забезпечувала надійний кількісний аналіз процесу, на сьогоднішній день не існує. Але фізичне моделювання самого явища із змінними умовами процесу та оцінка його якісних показників дозволяє зробити певні припущення. Так, для випаровування металу необхідно падіння тиску в каналі розряду, яке відбувається на стадії його розширення. За даними роботи [7], падіння тиску в каналі, що розширюється, може бути нижче атмосферного, що буде спричиняти об'ємне закипання розплавленої частини металу та випаровування в утворений канал. Іскроерозійний кратер при цьому, практично повністю звільняється від перегрітого металу (рис. 6).

Особливістю даного процесу є те, що закон розширення каналу визначається не початковими умовами (передпробивна стадія розряду), а режимом виділення енергії в каналі. Незважаючи на те, що існування плазмового каналу (канальної стадії розряду), як і в цілому розрядного імпульсу (50 – 100 мкс), досить короткочасне, відбувається зміна геометрії розрядного каналу в процесі його еволюції, яка супроводжується нелінійною зміною тиску, експериментальне визначення якого, на жаль, не є можливим.

Для оцінки радіусу каналу використовується методика, коли між електродами встановлюється металева фольга різної товщини [9]. І хоча отримані результати не завжди мають однозначне трактування, тим не менш, це єдиний метод візуалізації характерного розміру каналу. З фотографічних знімків видно (рис. 7), що канал пропалює отвори практично правильної форми та утворює характерні напливи вздовж оплавленого краю. Збільшення енергії, накопиченої на конденсаторі, призводить до помітного розширення каналу (рис. 7, б), що певною мірою характеризує розподіл введеної у канал енергії у конкретних умовах іскрового навантаження. Існує закономірність утворення та розвитку іскрових розрядів. Незважаючи на потенційно значну кількість місць виникнення розрядів (при об'ємному шарі струмопровідних гранул, теоретично, на кожній контактній парі може утворюватись розряд), реальна їх кількість визначається іншими умовами і, у першу чергу, параметрами навантаження. Ця закономірність прослідковується практично для усіх металів. Крім того, поступове підвищення ємності конденсатору і напруги його зарядки, не тільки не призводить до збільшення кількість розрядів, а навпаки, їх кількість помітно зменшується. В результаті чого, уся накопичена енергія виділяється на обмеженій кількості розрядних каналів, що значно збільшує зону термічного впливу та, фактично, змінює феноменологію процесу.

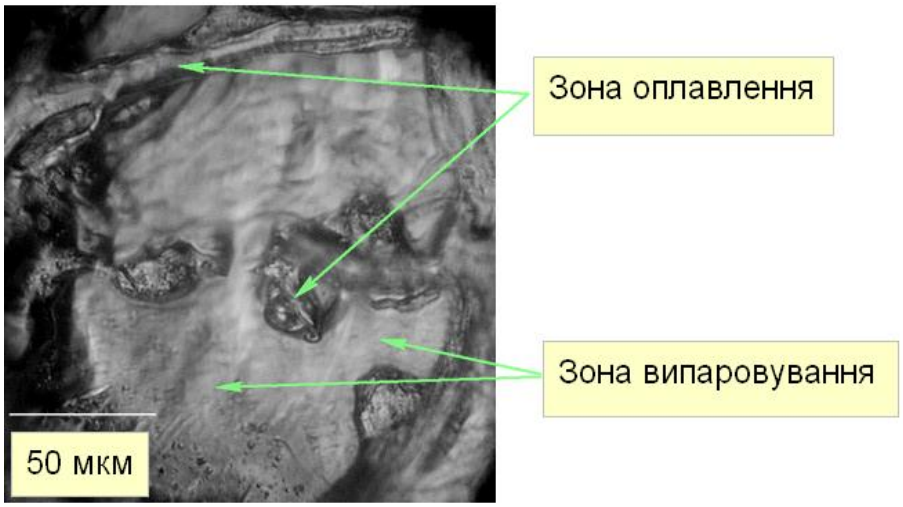
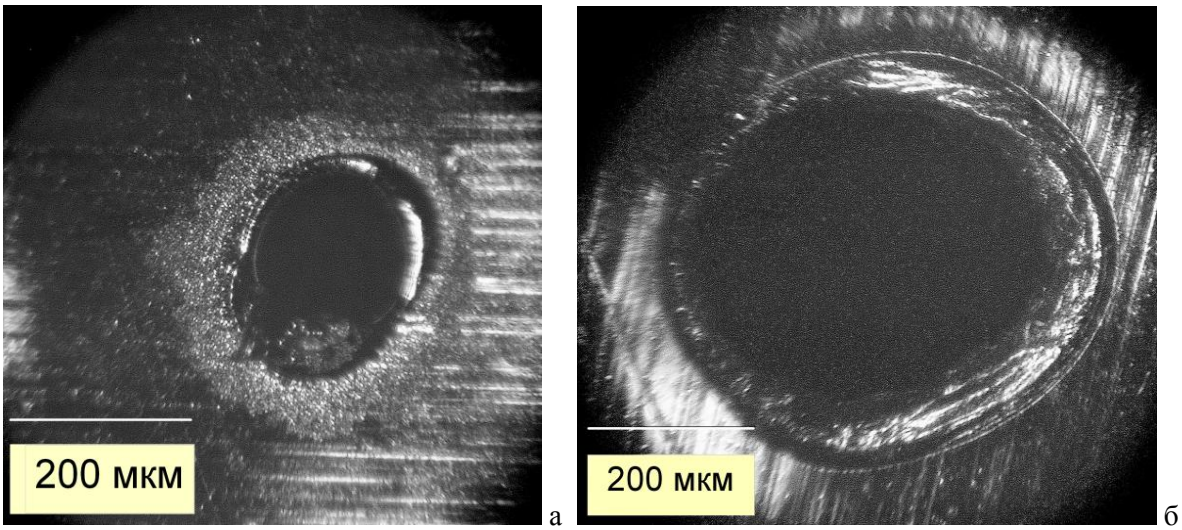


Рис. 6. Вигляд «очищеного» іскроерозійного кратеру



а б

Рис. 7. Слід каналу на мідній фользі, утворений розрядом між мідними гранулами у воді

Фізична модель

Одержаний експериментальний матеріал дозволяє побудувати феноменологічну модель імпульсного підводного електричного розряду, яка включає кілька стадій: ініціювання розряду, утворення плазмового каналу, введення енергії в плазмовий канал розряду та його розширення, генерація гідродинамічних процесів (ударних хвиль) стінкою каналу, що розширюється. Розгалужена та узгоджена послідовність перетворення енергії ємнісного накопичувача у теплову енергію, енергію випромінювання та механічну енергію розширення плазмового каналу може бути проілюстрована наступною схемою (рис. 8):

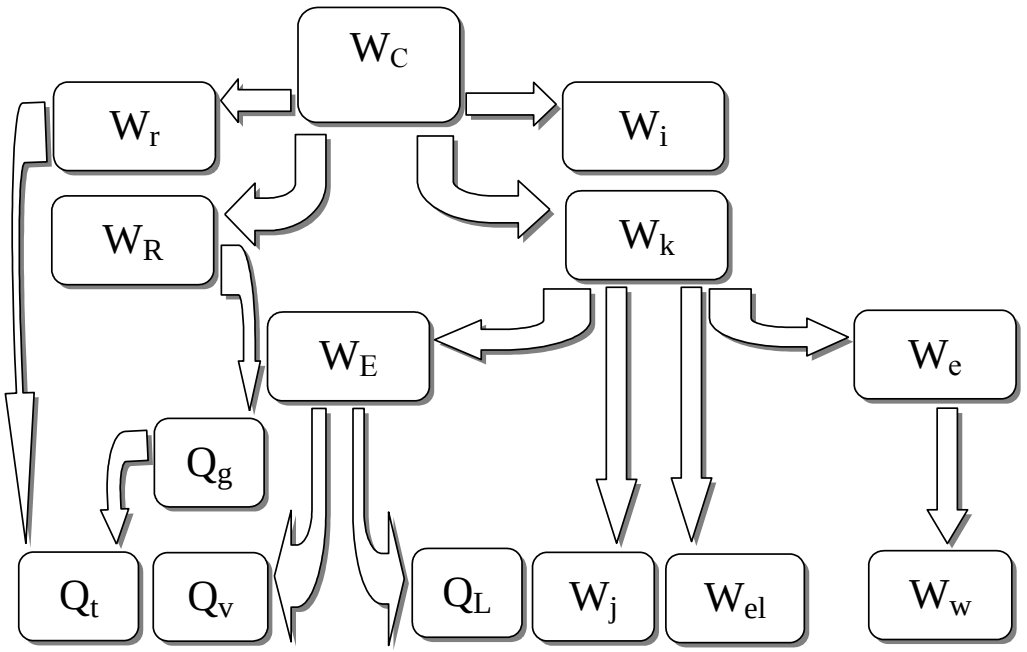


Рис. 8. Схема перетворення енергії електричного розряду та фізичні процеси, що його супроводжують

де: W_C – енергія, що накопичена ємнісним елементом;
W_i – енергія іонізації міжелектродного проміжку (передпробивна стадія);
W_r – омічні втрати розрядного контуру;
W_R – омічне нагрівання контактів;
Q_g – теплота об'ємного нагрівання контактів;
Q_t – теплота нагрівання робочого середовища;
W_k – енергія, що введена у плазмовий канал розряду;
W_{el} – енергія, що витрачається на електроліз;
W_j – енергія, що витрачається на випромінювання каналу;
W_E – енергія, що витрачається на ерозію електродів;
Q_L, – теплота плавлення поверхні гранул;
Q_v – теплота випаровування рідкого металу гранул;
W_e – енергія, що витрачається на розширення каналу;
W_w – енергія, що витрачається на генерацію ударної хвилі.

Наведена схема дає узагальнений характер фізичних процесів, що відбуваються або можуть відбуватися в реакційній камері внаслідок підведення енергії від генератора розрядних імпульсів.

Проведені дослідження впливу електрофізичних параметрів на кінетику утворення дисперсних і ультра дисперсних фракцій металу показують, що, крім основних параметрів розрядного кола, на ймовірний маршрут перерозподілу енергії безпосередньо впливають саме параметри струмопровідного шару – геометрія і стан поверхні, метал гранул (теплофізичні характеристики) та опір шару гранул.

Небажаним режимом є випадок, коли на всій ділянці проходження струму виникає активний опір і, як наслідок, енергія конденсатора (W_C) в результаті Джоуль-Ленцьова нагрівання трансформується у теплоту нагрівання робочого середовища (Q_t). Регулярними складовими процесу, але не визначальними у загальному тепловому балансі, є омічні втрати контуру (W_r)

та енергія іонізації міжелектродного проміжку (W_i). Безпосередній внесок в утворення дисперсної фази дає теплова енергія каналу (W_E), яка витрачається на плавлення металу локальних ділянок поверхні гранул та його випаровування. У той же час, частина введеної в канал енергії йде на його розширення (W_e), випромінювання (W_j) і генерацію ударної хвилі (W_w).

Якщо знехтувати омічними втратами розрядного контуру (W_r), омічним нагріванням контактів (W_R) і вважати, що енергія іонізації міжелектродного проміжку W_i (передпробивна стадія) не є визначальною у енергетичному балансі процесу, із збільшенням напруги на конденсаторі збільшуються частка енергії, що вводиться у розрядний канал (W_k).

Встановлені закономірності електро-іскрового процесу дають підстави розглядати уточнену фізичну модель синтезу частинок дисперсної фази, яка найбільш повно відображає механізм утворення дисперсного стану речовини під дією високих температур впродовж коротких проміжків часу, а саме:

- у момент утворення наскрізного каналу провідності енергія, що накопичена у конденсаторі (не враховуючи попередню іонізацію міжелектродного проміжку, розігрівання аноду і частково омічні втрати), вводиться у плазмовий канал. Лавиноподібне підвищення струму до максимального значення I_{max}, досягається при мінімальному значенні опору плазмового каналу r_{min}. Температура газу в каналі підвищується до T = $7 \cdot 10^3$ – $8 \cdot 10^3$ K, викликаючи інтенсивне локальне розігрівання і плавлення поверхонь гранул з утворенням рідкої ванни (рис. 5, рис. 9);

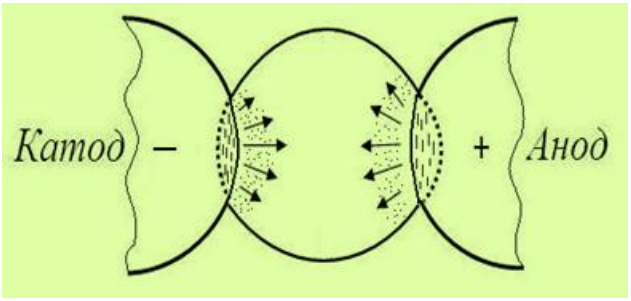


Рис. 9. Фаза плавлення поверхні електродів

- інтенсивне розширення каналу призводить до падіння в ньому тиску до значень, менших за атмосферне. У цей момент частина розплавленого металу у вигляді дрібних крапель евакуюється з лунки, а частина його – переходить у пароподібний стан, заповнюючи утворений об’єм каналу з подальшою частковою іонізацією (рис. 10). Подальше падіння напруги викликає припинення розряду, термалізацію плазми і поступове охолодження всього реакційного об'єму;

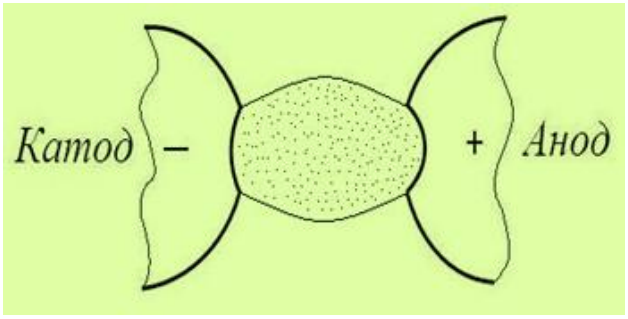


Рис. 10. Фаза випаровування рідкої ванни

- створюються умови для гетерогенної конденсації парів металу на внутрішній поверхні стінки каналу, де найбільш вірогідні процеси кристалізації твердої фази (рис. 11) за рахунок активного тепловідведення, з утворенням зародків відповідної форми і розмірів. Закінчується процес руйнуванням газового проміжку і миттєвим заповненням його водою, що призводить до швидкого охолодження утворених наночастинок металу.

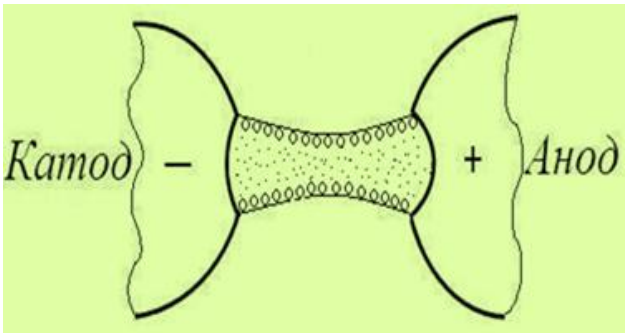


Рис.11. Фаза конденсації парів металу

Наслідками електричної ерозії гранул є утворення крапельної мікрофракції металу D = 1 – 100 мкм (рис. 12, а), яка була сформована в результаті плавлення обмеженої зони поверхні, і нанорозмірної фракції D = 10 – 100 нм (рис. 12, б), яка є результатом перетворення рідини в пару з подальшою конденсацією.

Статистичний аналіз гранулометричного складу та морфологічних характеристик отриманих частинок показує, що кожен метал має специфічні особливості утворення дисперсної фази, з урахуванням теплофізичних властивостей, і в першу чергу, температури і теплоти агрегатних перетворень.

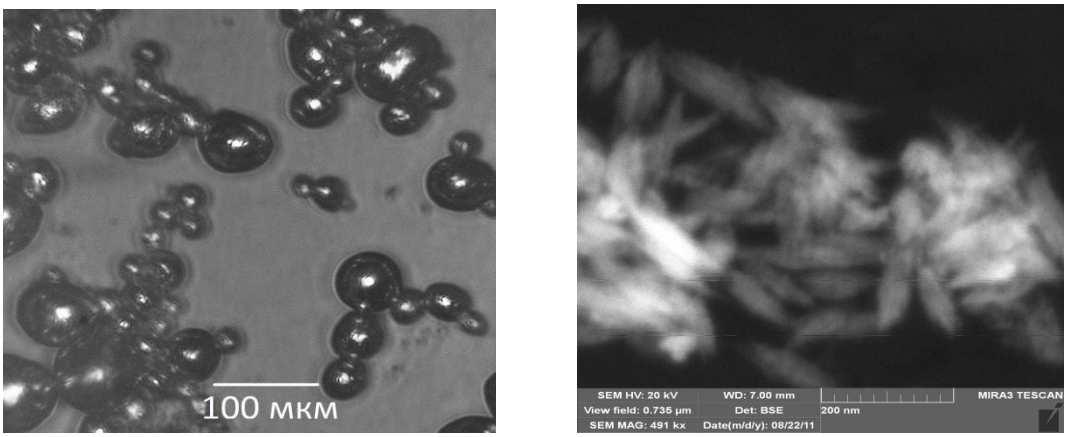


Рис. 12. Мікро- (а) та наночастинки (б) міді

Висновки

Методами оптичної емісійної спектроскопії, електронної та оптичної мікроскопії досліджено механізм утворення дисперсної фази металів у процесі підводного електричного розряду. Проаналізовано ймовірні канали дисипації енергії, введеної в розрядний контур. Показано, що оптимальним напрямком дисипації енергії для утворення нанорозмірної фракції є трансформація переважної частини енергії розрядного каналу у теплову з подальшими послідовними агрегатними перетвореннями: тверда-рідка-парова-тверда фази.

Запропоновано фізичну модель утворення дисперсної фази у підводному розряді.

Список використаних джерел

1. *Namitokov K.K.* Mathematical modelling of processes in the gas discharge plasma / Namitokov K.K., Pahomov P.L., Harin S.N. Alma Alma-Ata.: Nauka, 1988. - 208 pp. (in Russian).
2. *Naugolnyh K.A*. Electrical discharges in water / K.A. Naugolnyh, N.A. Roj – Moskow: Nauka, 1971, – 154 pp. (in Russian).
3. *Scherba A.A.* Application of electric-volume dispersion for sedimentary stabile biologically active metal hydrosols / Scherba A.A., Zaharchenko S.N., Lopatko K.G. et al. // Proc. of Inst. of Electrodyn., National NASU. – Kyiv: IED NASU. – 2009. – **22**. – P. 74-79. (in Russian).
4. *Scherba A.A.* The analysis of efficiency increasing methods of electrical discharge in the coagulation treatment of aqueous media / Scherba A.A., Zaharchenko S.N., et al. // Tehnichna elektrodinamika. Thematic Issue: Power electronics and energy efficiency. – 2008.– **2**.– P. 120-125. (in Russian).
5. *Veklich A.* Technique of electric arc discharge plasma diagnostic: peculiarities of registration and treatment of spectra / Veklich A., Lebid A. // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Radio Physics & Electronics. - 2012. - **18**. - P. 6-9.
6. *Babich I.L.* Spectroscopy of electric arc plasma between composite electrodes Ag-CuO // I.L. Babich, V. F. Boretskij, A. N. Veklich, et al. / Electrical contacts and electrodes. 2010. P. 82-115. (in Ukrainian).
7. *Zolotuh B.N.* On the mechanism of electric erosion of metals in liquid dielectric medium. ZhTF. – 1959. - **29**. - №12. - P. 1481 -1486. (in Russian).
8. *Veklich A.N.* Nanoparticle generation by plasma-erosion discharge in liquid environment / Veklich A.N., Lopatko K.G., Aftandilyants Y.G., Zakharchenko S.N., Boretskij V.F. // VII International Conference Plasma Physics and Plasma Technology, Minsk, Belarus, September 17 – 21, 2012, Contributed papers, V.II. – P. 495-498.
9. *Petrichenko S. V.* Regulation of the dynamic parameters of electrical discharges in electric spark processing of heterogeneous systems conducting media / S.V. Petrichenko. NASU: Inst. pulse proc. and tech. PHD Theses. Nikolajev, 2008. 172 pp. (in Russian).

Надійшла до редколегії 17.02.13

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 669.019

Авраменко Т.Г., аспірант
Рево[1] С.Л., д.ф.-м.н., проф.
Михалюк О.В., к.ф.-м.н.
Іваненко К.О., к.ф.-м.н.

Структура, триботехнічні та кінетичні характеристики нанокомпозиції фторопласт-вуглець

У статті представлені результати досліджень мікроструктури, перколяційних, триботехнічних та калориметричних характеристик нанокомпозицій на основі фторопластової матриці і наповнювача з багатостінних вуглецевих нанотрубок. Проаналізовано вплив способів їх виготовлення на структуру та практично важливі характеристики. Показано, що в порівнянні з аналогами (зразками з фторопласту) зносостійкість зразків з розробленого матеріалу в 100 разів вища.

Ключові слова: нанокомпозиційні матеріали, фторопласт, вуглецеві нанотрубки, триботехнічні характеристики.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет, 03680, м. Київ, пр-т Академіка Глушкова, 4а, e-mail: revo@univ.kiev.ua

A. T. Avramenko, PhD stud.,
S. L. Revo[1], Dr. Sci., Prof.,
O. V. Mykhalyuk, PhD,
K. O. Ivanenko, PhD

Structure, tribotechnical and kinetic properties of the fluoroplastic-carbon nanocomposite

The investigation of the percolation, tribological, calorimetric properties and microstructure of the nanocomposite materials on the base of fluoroplastic matrix with multiwall carbon nanotubes filler have been performed. The effect of manufacturing technique on the structure and significant characteristics has been analysed. It was shown, that wear resistance of the developed material is 100 times as higher as for fluoroplastic specimens.

Key Words: nanocomposite material, fluoroplastic, carbon nanotubes, tribotechnical characteristics.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physics Faculty, 03680, Kyiv, Akademik Glushkov prosp., 4a,
e-mail: revo@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Інтенсифікація виробничих процесів сьогодні багато в чому визначається стійкістю вузлів машин і устаткування, що працюють у вузлах тертя. Особливе значення ця стійкість має для вузлів тертя, що працюють в екстремальних умовах, зокрема, в агресивних середовищах, при підвищених температурах і т.д. Тому на сьогодні є актуальною розробка нових зносостійких матеріалів з низьким коефіцієнтом тертя ($k_{тр}$), високими значеннями зносостійкості та теплопровідності, стійких в агресивних середовищах. Важливим є й одержання матеріалів з оптимальними електротехнічними характеристиками, що, в свою чергу, визначається перколяційними характеристиками нанокомпозиційних матеріалів (НКМ). Оптимізація практично важливих характеристик таких матеріалів дозволить їм зайняти одне з провідних місць серед матеріалів функціонального призначення. Переваги зазначених виробів порівняно з виробами, виготовленими з металів або кераміки, полягають у тому, що полімерні нанокомпозиції крім високої корозійної стійкості та низької питомої ваги легко обробляються, вони еластичні і стійкі до втоми. Собівартість полімерних нанокомпозиційних матеріалів також не висока. Як електропровідний наповнювач в них використовують порошки металів, природний графіт, сажу та інші компоненти. В залежності від дисперсності та морфології частинок наповнювача поріг перколяції (C_C) (де C_C – концентрація наповнювача, при якій у полімерній матриці утворюється з його частинок, так званий неперервний кластер, і композиційний матеріал стає електропровідним) може суттєво змінюватися. Зокрема, для електропровідних наповнювачів композицій із рівновісних частинок мікронних розмірів $C_C \approx 34$ об.% [1].

Введення зазначених наповнювачів у великих концентраціях погіршує, як правило, фізико-механічні характеристики полімерних

© Т.Г. Авраменко, С.Л. Рево, О.В. Михалюк, К.О. Іваненко, 2013

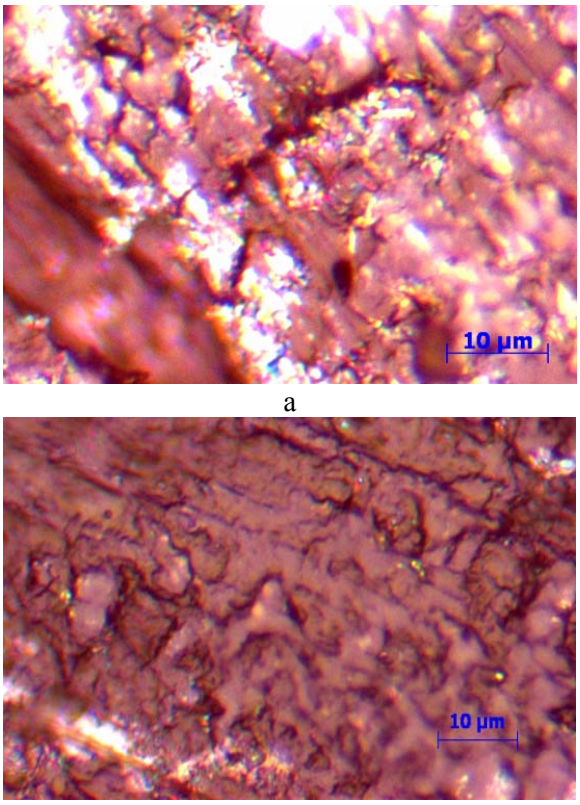
композицій. Для розглянутих НКМ величина C_C не перевищує 6 об.% [2]. Така концентрація і нанорозмірність електропровідного компоненту менше впливають на зміну механічних характеристик матеріалу і можуть, зокрема, їх підвищувати [3].

У разі виготовлення композицій із суміші порошків відповідних компонент, крім дисперсності і морфології частинок, важливим є рівномірність їх розподілу в суміші, міцність адґезійних зв'язків, умови компактування та їх вплив на структурні зміни в матриці композиції. Універсальних шляхів розв'язання зазначених проблем, немає, але розширення можливостей існуючих матеріалів для використання в указаних умовах можливе.

В статті розглянуто можливість створення нового, стійкого в агресивних середовищах, НКМ на основі фторопластової (ФП) матриці (використовували фторопласт, марки Ф4) та багатостінних вуглецевих нанотрубок (БВНТ). Нанотрубки одержували CVD-методом в обертовому реакторі [4]. Як каталізатор використовували оксиди типу Al_2O_3-MoO_3-Fe_2O_3. Джерелом вуглецю був пропілен. Водяну суспензію ФП ретельно змішували з деагломерованими і просушеними БВНТ. Суміш пресували при температурі $T = (350 \pm 0{,}5)$ °С і тиску $P = 500$ МПа. Структуру зразків вивчали на оптичному (типу «Neofot») та растровому електронному мікроскопах, триботехнічні характеристики – на лабораторному приладі типу УМТ-1, теплофізичні – на приладі SETARAM DSC 92 і DIL 402C NETZSCH. Відносна похибка при визначенні $k_{тр}$ не перевищувала 4%, а при визначенні ступеня зношування за втратою маси за рахунок тертя без мастила по контртілу (сталь ХВГ) – 7%. Швидкість тертя ковзання вибирали в межах від 1,25 до 10 м/с при навантаженнях на зразки від 0,4 до 1,1 МПа. Рівень зношуваності визначали на шляху тертя 1000 м.

Рівень триботехнічних та теплофізичних характеристик НКМ залежить від багатьох факторів. При цьому, теплопровідність матеріалу і, відповідно, швидкість відводу тепла від зони тертя багато в чому визначають його зносостійкість в парі тертя. Особливо це актуально для полімерних композицій. Важливим у цьому випадку є рівномірність розподілу наповнювача в матриці НКМ.

Як видно з представленої на рис.1 структури НКМ, застосований спосіб виготовлення зразків забезпечує більш-менш рівномірний розподіл БВНТ у фторопластовій матриці. У свою чергу, це забезпечує і низький поріг перколяції для композиції: згідно даних про концентраційну залежність електроопору він складає близько $C_C = (4{,}1 \pm 0{,}1)$ об.% БВНТ.



а

б

Рис. 1. Мікроструктура НКМ ФП-неагломеровані БВНТ (а) та НКМ ФП-деагломеровані БВНТ (б).

Густина одержаних зразків НКМ практично не відрізняється від густини Ф4 і складає при кімнатній температурі (2,1…2,2) г/см^3. В цілому, густина фторопластової матриці і НКМ з БВНТ залежить від ступеню її кристалізації, яка в свою чергу визначається умовами виготовлення зразків. Слід зауважити, що різні вуглецеві наповнювачі по різному впливають на ступінь кристалічності матриці з полімеру. Це можна побачити на рис.2, з якого видно, що вид вуглецевого наповнювача (термічно розширений графіт (ТРГ), БВНТ) та вид полімеру – поліетилен (ПЕ), фторопласт – по різному впливають на ступінь кристалічності зразків. Різниця у способі виготовлення зразків також може впливати на ступінь кристалічності, густину та практично важливі характеристики зразків.

Ступінь кристалічності зразків НКМ ПЕ-БВНТ, виготовлених методом гарячої екструзії, при збільшенні вмісту БВНТ зростає (кр.5 рис.2). Оскільки швидкість охолодження зразків при

екструдуванні вища за швидкість при гарячому пресуванні, то абсолютна величина ступеню кристалічності при гарячому пресуванні є нижчою.

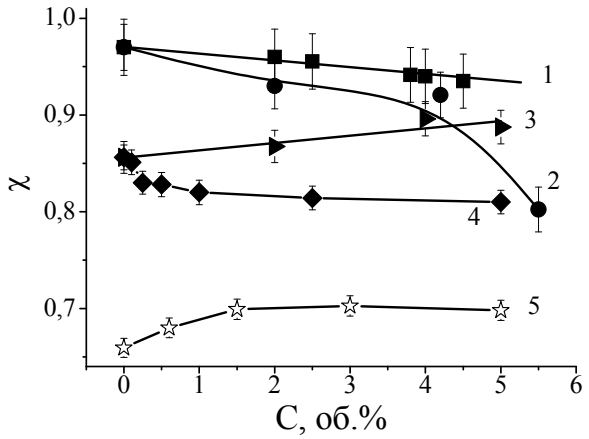


Рис. 2. Залежності ступеню кристалічності матриці НКМ ФП-ТРГ (1), НКМ ФП-ТРГ+БВНТ (2), НКМ ПЕ-ТРГ (3), НКМ ПЕ-БВНТ (4), НКМ ПЕ-БВНТ виготовленого екструдуванням (5) від концентрації вуглецевого компонента. Зразки виготовлені під тиском $P_{виг}$ =30 МПа

Відмінними у методах екструдування та спікання є не тільки швидкості охолодження, а й відсутність у методі екструдування тиску при охолодженні зразків на повітрі. Очевидно, що саме ці відмінності призводять до зростання ступеню кристалічності. На кристалічність фторопластової матриці зазначені особливості впливають меншою мірою, так як її кристалічність у вихідному стані достатньо висока і завдання полягає в тому, щоб у процесі обробок НКМ її не на багато зменшити.

Для НКМ ФП-БВНТ максимальна межа міцності при стисненні була одержана для зразків із концентрацією БВНТ порядку 20 мас.% і складає $\sigma_{сж} = 55 \pm 3$ МПа, що на 20% вище, ніж для Ф4. Модуль пружності і, що особливо важливо, межа текучості для зразків НКМ також вище відповідних величин для матриці, виготовленої аналогічним способом. Коефіцієнт тертя при швидкості 5 м/с, який для промислового фторопласту із збільшенням навантаження на зразки з 1 до 20 кг/см^2 зменшується з 0,14 до 0,05, для зразків із розробленого на основі фторопласту НКМ зменшується для аналогічного випадку на (25…30)%. При використанні мастила $k_{тр}$ зменшується вдвічі. Суттєвою перевагою розробленого матеріалу є те, що у порівнянні з аналогами, зокрема, Ф4 його зносостійкість в 100 разів вища.

Зазначимо, що згідно результатів дослідження теплопровідності та визначення коефіцієнта термічного розширення (DSC) можна констатувати, що до температури $T = 340$ °C (рис. 3) не спостерігали деструкцію матриці НКМ при нагріванні, а при цій температурі був виявлений пік виділення тепла зразками композиції.

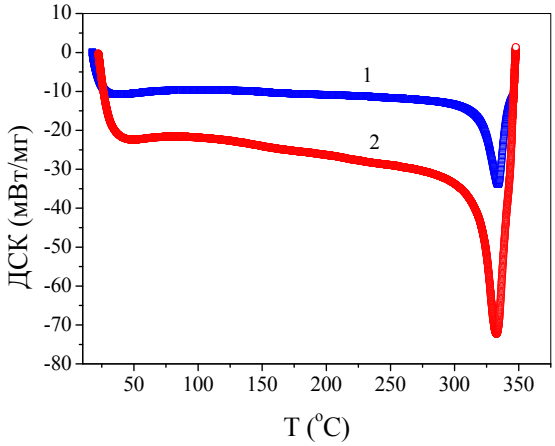


Рис. 3. Залежності диференційної скануючої калориметрії центральної (1) та периферійної (2) областей зразків НКМ ФП-БВНТ від температури нагрівання

Дослідження температурних залежностей коефіцієнта лінійного розширення α та відносної деформації зразків $\Delta L/L$ на приладі NETZSH DIL 402C дозволили виявити особливості на залежностях $\alpha(T)$ та $\Delta L/L$ від температури (рис. 4 та 5, відповідно).

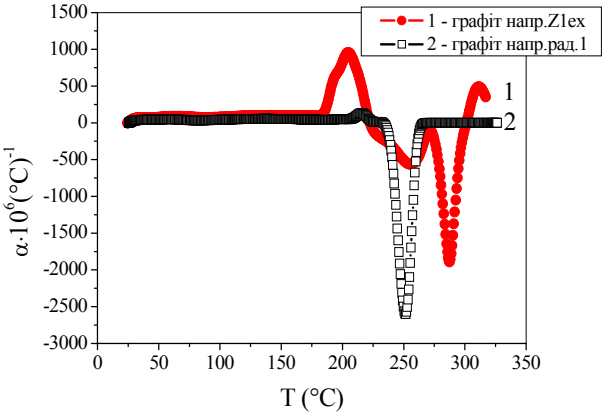


Рис. 4. Залежності лінійного розширення зразків НКМ ФП-БВНТ від температури випробувань

Представлені тут дані свідчать про розсклування (devitrification) аморфних областей полімерної матриці, що супроводжується збільшенням деформованості композиту та коефіцієнту його термічного розширення. Встановлений ефект необхідно враховувати при виборі робочого інтервалу температур вузлів тертя на основі розробленого матеріалу.

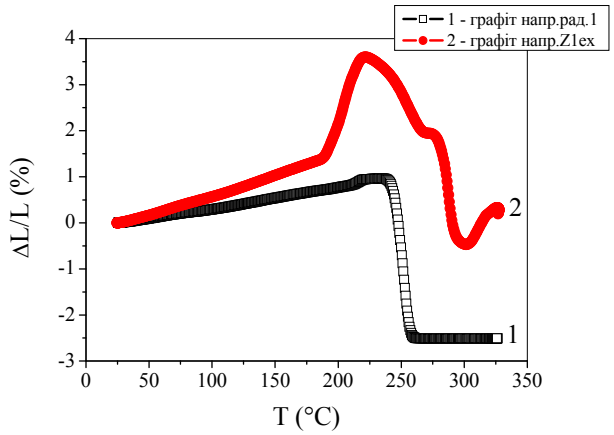


Рис. 5. Залежності лінійного подовження зразків НКМ ФП-БВНТ від температури випробувань

З вище викладеного можна зробити наступні висновки:

- використання розглянутих в статті методів виготовлення БВНТ та НКМ, до якого вони входять у якості наповнювача фторопластової матриці, дозволяє створити композицію, зносостійкість якої перевищує зносостійкість фторопласту не менше, ніж в 100 разів;

- поріг перколяції для нанокомпозиційного матеріалу, компонентами якого є БВНТ та фторопласт 4 складає $C_C = (4{,}1 \pm 0{,}1)$ об. %. Завдяки структуруванню фторопластової матриці НКМ багатостінними вуглецевими нанотрубками з'являється можливість збільшення ступеню її кристалічності і збільшення з 2,1 до 2,25 г/см^3 її густини, що багато в чому забезпечує підвищення зносостійкості розглянутого НКМ.

Список використаних джерел

1. *Revo S.L. Karaman D.Yu., Shevchenko I. P.* Electrical resistivity and thermopower of PTFE- thermo exfoliated graphite composite material // Naukovi zapysky NPU im.M.P. Dragomanova. Ser. Fiz.-Mat. Nayky. – 2002. - № 3. – P. 169-174. (in Ukrainian).
2. *Revo S. L., Ivanenko K. O., Dashevsky M. M., Shevchenko I. P.* Percolation phenomena in composite material PTFE-graphite // Visn. , Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka., Ser. Fiz.-Mat. Nauky. – 2002. - № 3. – P.427-429. (in Ukrainian).
3. *Pomogajlo A. D., Rozenberg A. S., Uflyand I. E.* Metal nanoparticles in polymers: Monograph – Moscow: Himiya, 2000. – 672 p. (in Russian).
4. *Revo S.L., Sementsov Yu I., Lozovii F.V., Ivanenko E.A., Druga L.* Structure and resistance of the Al-C nano-composite material // Heat treatment and surface engineering. - 2008. - **VIII**, № 2. - P. 3-17.

Надійшла до редколегії 29.01.13

УДК 532.536

Альохін О.Д.[1], д.ф.-м. н., проф.
Білоус О.І.[2], к.ф.-м. н., доц.

Аналіз величин критичних показників визначених різними теоретичними та емпіричними методами

В роботі проведено порівняльний аналіз величин критичних показників ФТФП визначених на основі різних методів: ε-розкладів, малого параметру, емпіричного π-методу, та порівняння їх величин з існуючими експериментальними даними.

Показано, що величини малих критичних показників, $\alpha_t > \eta > \alpha_\mu << \beta$, *одержаних методом ε-розкладів, не задовольняють відомим співвідношенням ФТФП. В той же час величини цих критичних показників, одержані феноменологічними методами, повністю узгоджуються з фундаментальними співвідношеннями ФТФП та існуючими експериментальними даними.*

Ключові слова: флуктуаційна теорія, критичні показники, метод ε-розкладів, метод малого параметру, π-метод

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, веб сайт: http://criticalfluid.com.ua/
e-mail: alekhin@univ.kiev.ua,
[2] Національний авіаційний університет, 02058, м.Київ, пр-т Комарова, 1,
e-mail: [2] o_bilous@ua.fm

Alekhin A.D.[1], Sci.Dr., Prof.
Bilous O.I.[2], Ph.D.

Analysis of sizes of critical indexes of certain by different theoretical and empiric methods

In this paper, a comparative analysis of the critical parameters FTFP defined on the basis of different methods: ε-scheduling, phenomenological method of small parameter π-empirical method, and compare their values with existing experimental data.

It is shown that small quantities of critical parameters $\alpha_t > \eta > \alpha_\mu << \beta$, *obtained by ε-scheduling, do not satisfy the well-known relation FTFP. At the same time the value of the critical exponents obtained by phenomenological methods are fully consistent with all known correlations FTFP and existing experimental data.*

Key Words: fluctuation theory, critical parameters, the method ε-scheduling, the method of small parameter, π-method

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
веб сайт: http://criticalfluid.com.ua/
e-mail: alekhin@univ.kiev.ua,
[2] National Aviation University, 1 Kosmonavta Komarova Avenue, k.1, Kyiv, 02058 Ukraine
e-mail: [2] o_bilous@ua.fm

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

На даний час у зв'язку з широким застосуванням унікальних властивостей критичного флюїду (КФ) в новітніх технологіях [1-3] значно зріс інтерес до розробки рівняння стану речовини в критичному стані. Це зумовило потребу в більш точному визначенні величин критичних показників (КП) флуктуаційної теорії фазових переходів (ФТФП) [4-6], які є одними з основних параметрів даного рівняння стану.

Слід відмітити, що розрахунки величин критичних показників, які проводяться різноманітними теоретичними методами: методами ε-розкладів (ε=4-d), розв'язку рівнянь ренормалізаційної групи та інших [4-6], приводять до результатів, які дещо відрізняються між собою (d-розмірність простору). На жаль, в цих розрахунках не визначені конкретні об'єктивні похибки величин цих критичних показників. Тому не можна віддати перевагу тому чи іншому теоретичному результату. Величини КП, отримані методом ε-розкладів, при

© О.Д.Альохін, О.І. Білоус, 2013

різних ступенях розкладу по ε^n, представлені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Величини критичних показників одержані методом ε-розкладів, малого параметру та π-методу

Китичні показники ФТФП	Метод ε-розкладу			Метод МП	π-метод	Эксперим. дані
	ε^1	ε^2	ε^3			
ν	0,583	0,626	0,61	0,636	0,637	0,60-0,63
ξ	0,417	0,402	0,405	0,405	0,405	0,40-0,41
δ	4	4,463	4,648	4,640	4,630	4,2-4,8
γ	1,167	1,244	1,195	1,233	1,232	1,2-1,3
β	0,33	0,336	0,301	0,338	0,339	0,32-0,35
α_t	0,167	0,077	0,121	0,091	0,090	0,09-0,11
η	0	0,019	0,036	0,063	0,065	0,03-0,06
$\alpha_\mu=2\xi/\nu-3\xi$	0,180	0,078	0,113	0,058	0,057	–

Критичні показники, визначені експериментально різними дослідниками також дещо відрізняються між собою [7-10] і від розрахунків теорії [4-6].

Згідно ФТФП [4-6] для тривимірних (d=3) систем величини восьми критичних показників пов'язані між собою за допомогою шести рівнянь

$$\delta=1/(3\xi-1),\ \gamma=2\nu/\xi-3\nu,\ \beta=3\nu-\nu/\xi,$$
$$\alpha_t=2-3\nu,\ \alpha_\mu=2\xi/\nu-3\xi,\ \eta=5-2/\xi \quad (1)$$

Виходячи з (1) величини критичних показників ФТФП [4-6]: δ, γ, β, α_t, α_μ, η визначаються лише двома критичними показниками температурної та польової залежності радіуса кореляції: ν та ξ ($R_c\sim t^{-\nu}$, $R_c\sim\Delta\mu^{-\xi}$).

З (1) слідує, що величини всіх восьми критичних показників можуть бути визначені, якщо до представлених 6 рівнянь (1) знайти ще два нових рівняння, які пов'язують між собою критичні показники радіуса кореляції ν та ξ. В рамках цього напрямку досліджень в роботах [11, 12] запропоновано новий підхід визначення величин критичних показників. Даний метод полягає в введенні у відомі співвідношення ФТФП (1) малих параметрів (МП), які можуть бути представлені у вигляді:

$$\delta_0 = 5-\delta<<\delta,\ \gamma_0=4/3-\gamma<<\gamma,\ \nu_0=2/3-\nu<<\nu$$
$$|\beta_0| = |\beta-1/3|<<\beta,\ \xi_0=\xi-2/5<<\xi \quad (2)$$

Після підстановки МП (2) в (1) були одержані два нових співвідношення між критичними показниками радіуса кореляції ν та ξ [11, 12].

$$\xi-\beta=\xi-3\nu+\nu/\xi=1/15\pm10^{-3} \quad (3)$$

$$\xi=\nu^2(1\pm10^{-3}) \quad (4)$$

Спільне рішення рівнянь (3) та (4) дозволяє знайти величини критичних показників радіуса кореляції: ν=0,636, ξ=0,405 і відповідно малих параметрів (2) ν_0=0,03, ξ_0=0,005 Тоді, використовуючи систему рівнянь між критичними показниками (1), було знайдено величини всіх восьми критичних показників ФТФП. Їх значення представлені в таблиці 1.

Надалі, в даній роботі, було проведено порівняння величин відносно малих КП $\alpha_t>\eta>\alpha_\mu<<\beta$, одержаних методами ε-розкладів [4-6], та МП [11, 12] і проведено їх аналіз. Необхідно відмітити, що в науковій літературі [4-6] відсутня інформація про величину критичного показника польової залежності теплоємності α_μ ($C_v\sim\Delta\mu^{-\alpha_\mu}$). Тому в табл. 1 представлено його значення розраховане за співвідношенням ФТФП (1) $\alpha_\mu=2\xi/\nu-3\xi$. Як видно з табл.1 одержане значення α_μ близьке за величиною до критичного показника теплоємності α_t ($C_v\sim t^{-\alpha_t}$), одержаного методом ε-розкладів $\left(\alpha_\mu\approx\alpha_t\right)$. Цей результат , з нашої точки зору, є сумнівним тому, що він суперечить фундаментальному співвідношенню ФТФП [4-6] $\alpha_t/\alpha_\mu=\nu/\xi$. Проведені нами розрахунки показують, що $\nu/\xi=1{,}56\neq\alpha_t/\alpha_\mu\approx1$. Цей результат свідчить про великі похибки їх розрахунків.

Перейдемо тепер до аналізу відомих фундаментальних співвідношень ФТФП [4-6]:

$$2\beta+\gamma+\alpha_t=\beta+\beta\delta+\alpha_t=\beta+\frac{\nu}{\xi}+\alpha_t=2 \quad (5)$$

$$\beta(\delta-1)/\gamma = 1 \quad (6)$$

$$\left(\alpha_t/\alpha_\mu = \nu/\xi = \beta\delta\right) \quad (7)$$

Результати проведених розрахунків показані в табл.2

З табл. 2 випливає, що результати розрахунків за співвідношеннями (5), (6) одержані при різних наближеннях ε-розкладів по параметрам $\varepsilon^n=(4-d)^n$ (n=1, 2, 3), відрізняються між собою, а рівність (7) зовсім не виконується. Тобто значення критичних показників, одержаних методом ε-розкладу, не узгоджуються з співвідношенням (7).

Таблиця 2.

Перевірка рівнянь ФТФП за даними величин критичних показників, одержаних різними методами

Рівняння ФТФП	Метод ε-розкладу			Метод МП	π-метод
	ε^1	ε^2	ε^3		
$2\beta+\gamma+\alpha_t=2$	1,994	1,993	1,918	2,000	2,000
$\beta+\beta\delta+\alpha_t=2$	1,817	1,913	1,821	1,997	1,999
$\beta+\frac{\nu}{\xi}+\alpha_t=2$	1,895	1,970	1,928	1,999	2,002
$\beta(\delta-1)/\gamma=1$	0,848	0,935	0,919	0,999	0,999
α_t/α_μ	0,926	0,987	1,071	1,569	1,579
ν/ξ	1,398	1,557	1,506	1,570	1,573
$\beta\delta$	1,32	1,450	1,399	1,568	1,570

Перейдемо тепер до аналізу величин критичних показників розрахованих методом введення малих параметрів [11, 12] в співвідношення ФТФП (1). Одержані результати також представлені в табл.1, 2. Порівняння їх значень (табл.1) з розрахунками за формулами (1), (3), (4) показує їх повну тотожність. Це підтверджують також результати розрахунків відомих фундаментальних співвідношень ФТФП (5)-(7), представлені в таблиці 2. Виходячи з цього можна стверджувати, що всі критичні показники, одержані методом малих параметрів [11, 12] повністю задовольняють рівняння (1), (3)-(7), а їх величини близькі до істинних значень критичних показників ФТФП [4-6].

Розглянемо тепер ще один метод визначення величин критичних показників. Виходячи з точки зору засновників ФТФП [4-6], величини критичних показників повинні бути пов'язані з фундаментальними константами. Спробуємо проаналізувати цю точку зору.

Згідно рівнянь ФТФП (1) для систем класу універсальності 3-вимірної моделі Ізінга [4-6] величина критичного показника радіусу кореляції ν ($R_c \sim t^{-\nu}$) повинна задовольняти нерівності ν<2/3. Тобто, цей показник дорівнює відношенню ν=2/x, де величина x>3. Використовуючи значення критичного показника ν, одержаного методом введення малого параметру ν_0, [11-12], маємо, що $\nu=2/3-\nu_0=0{,}63666=2/x$, ($\nu_0=0{,}03$). Звідки знаходимо величину невідомого параметра x=3,1415. Як бачимо цей невідомий параметр x за своєю величиною виявляється дуже близьким до величини фундаментальної константи π=3,14159.

Використовуючи тепер зв'язок показників ν та ξ (4) $\xi=\nu^2$ виразимо їх через число π:

$$\nu = 2/\pi, \quad \xi = \nu^2 = 4/\pi^2 \quad (8)$$

Після цього на основі співвідношень ФТФП (1) знайдемо зв'язок всіх інших показників ФТФП з числом π:

$$\delta = \pi^2/(12-\pi^2),\ \gamma = \pi - 6/\pi,\ \beta = 6/\pi - \pi/2,$$
$$\alpha_t = 2 - 6/\pi,\ \alpha_\mu = 4/\pi\left(1-3/\pi\right)\ \eta = 5 - \pi^2/2 \quad (9)$$

Одержані за допомогою числа π значення всіх критичних показників (8), (9) представлені в табл. 1, 2. Як видно величини цих критичних показників майже збігаються з їх значеннями одержаними методом малого параметру [11, 12] і

підтверджується за своєю величиною з більшістю існуючих експериментальних даних [7-10].

На основі проведених досліджень зроблено ряд висновків:

1. Співставлення величин критичних показників, одержаних методом ε-розкладу [4-6] з розрахунками на основі рівнянь ФТФП (1) свідчить про значну розбіжність в їх величинах. Для відносно великих критичних показників $\delta>>\gamma>>\nu>\xi>\beta$ ця розбіжність становить величину (5-10) %; для відносно малих $\alpha_t > \eta > \alpha_\mu << \beta$ розбіжність досягає величин (50-100) %.

2. Проведений аналіз показує, що величини малих критичних показників, $\alpha_t > \eta > \alpha_\mu << \beta$, одержані методом ε-розкладів, внаслідок великих похибок їх розрахунків приводить до того, що фундаментальні рівності (7) ФТФП не виконуються (табл.2).

3. Застосування метода малого параметра [11, 12] приводить до більш точного визначення величин критичних показників. Це підтверджується точністю виконання фундаментальних рівнянь (1), (5)-(7) (табл.2). Тобто такі значення критичних показників є найбільш наближеними до істинних значень критичних показників ФТФП [4-6]. Одержані значення критичних показників підтверджуються більшою частиною експериментальних даних [7-10].

4. В роботі проаналізована точка зору засновників ФТФП [4-6], про зв'язок величин критичних показників із фундаментальними константами. Для цього використана відома нерівність ФТФП $\nu < 2/3$ (2), яка слідує з рівнянь (1). Далі, на основі одержаного в роботі значення критичного показника $\nu = 0,6366 = 2/x < 2/3$ знайдено величину невідомого параметра x=3,1415. Величина цього параметра виявилась дуже близькою до величини фундаментальної константи π=3,14159. Це дозволяє відобразити основні критичні показники ФТФП ν і ξ [4-6] через число π: $\nu = 2/\pi$, $\xi = \nu^2 = 4/\pi^2$. Звідси, на основі рівнянь ФТФП (1), можна виразити через фундаментальну константу π всі інші критичні показники ФТФП (9).

Таким чином, одержані емпіричним π-методом величини критичних показників ФТФП [4-6] майже збігаються з результатами їх розрахунків феноменологічним методом малого параметра [11, 12] і підтверджуються даними більшості експериментальних досліджень [7-10[.

Список використаних джерел

1. Supercritical fluids: Theory and practice. – Moscow, 2008, V.3, № 2. P.1 -101. (in Russian).
2. *Vostrikov A.A., Fadeeva O.N., Fadeeva И.И., Socol M.Ya.* Formation of nanoparticles Al_2O_3 at aluminum oxidation by water at sub- and supercritical parameters// Supercritical fluids: Theory and practice. – 2010, V.5, № 1. P. 12-25. (in Russian).
3. *Alekhin A.D.* Supercritical fluid in the field of gravitation of Earth // Monitoring. Science and technologies. – 2011. – 1(6). – P. 69-78. (in Russian).
4. *Patashinskiy A.Z., Pokrovskiy V.A.* Fluctuation theory of phase transitions. – Moscow, Science. – 1982. (in Russian).
5. *Stenli G.* Phase transitions and critical phenomena. M. – 1973. – 419 p. (in Russian).
6. *Ma Sh.* Modern theory of the critical phenomena. – M., 1980. – 298 p. (in Russian).
7. *Anisimov M.A.* The critical phenomena in liquids and liquid crystals. – M. – 1987 – 280 p. (in Russian).
8. *Anisimov M.A., Rabinovich V.A., Сычев B.B.* Thermodynamics of critical condition of individual substances . – M. – 1990 .– 190 p. (in Russian).
9. *Ivanov D.Ya.* Critical behavior of the unidealized systems. M. – 2003. – 248 p. (in Russian).
10. *Alekhin A.D. Dorosh A.K., Rydnikov E.G.* Critical condition of substance in the field of gravitation of Earth. Kyiv. – 2008. – 404 p. (in Ukrainian).
11. *Alekhin A.D.* Calculations of critical indexes of the three-dimensional systems by the method of small parameter// YFJ – 2006. – V. 51, № 9. – P. 869-871. (in Ukrainian).
12. *Alekhin A.D.* Critical indices for systems of different space dimensionality // Journal of Molecular Liquids – 2005. – 120/1-3 – P. 43-45.

Надійшла до редколегії 16.01.13

УДК 535.37

Барабаш О.В.[1], к.ф.-м.н., асистент.

Спектр електрона у графеновій стрічці з урахуванням взаємодії Рашби

Отримано хвильову функцію та дисперсійне рівняння електрона в графеновій стрічці зі спін-орбітальною взаємодією Рашби та з граничними умовами типу zigzag. Показано, що врахування спін-орбітальної взаємодії призводить до двократного розщеплення спектральних ліній (знімається виродження по спіну) та зникненню лінійної залежності енергії від імпульсу поблизу рівня Фермі.

Ключові слова: графенова стрічка, спін-орбітальна взаємодія Рашби, дисперсійне рівняння.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: obar@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

O. V. Barabash[1], PhD

Electron's spectrum in graphene ribbon with Rashba spin-orbit interaction.

We have calculated wave function and electron's dispersion relation in graphene ribbon with regard to Rashba spin-orbit interaction and zigzag boundary conditions on the edges. It was shown that spin-orbit interaction leads to a double splitting of the spectrum lines (spin splitting) and vanishing linear dependence of the energy from the momentum near Fermi level.

Key Words: graphene ribbon, spin-orbit Rashba interaction, dispersion relation.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: obar@univ.kiev.ua

Вступ

Розглянемо шар графену у вигляді нескінченної в *x*-напрямку стрічки, яка має скінченну ширину *L* в *y*-напрямку. Графенова стрічка може мати два типи крайових конфігурацій: zigzag edge та armchair edge (рис. 1).

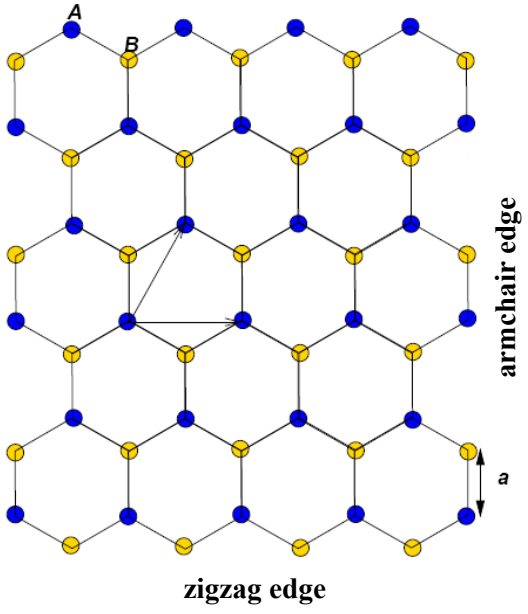


Рис. 1 Крайові конфігурації zigzag та armchair

Для нескінченної в *x*-напрямку стрічки огинаюча функція $\psi(x,y)$ має вигляд

$$\psi(x,y) = e^{ikx}\begin{pmatrix}\varphi_A(y)\\ \varphi_B(y)\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де

$$\varphi_i(y) = \begin{pmatrix}\chi_1^i\\ \chi_2^i\end{pmatrix}, \quad i = A,B$$

двокомпонентні функції підграток *A* та *B*.

Енергетичний спектр електрону в графеновій стрічці для двох типів крайових станів був обрахований в роботі [2]. Було знайдено, що у випадку крайового стану типу zigzag дисперсійне рівняння має вигляд

$$\varepsilon^2 = k_x^2 - z^2, \qquad (2)$$

де

$$e^{-2zL} = \frac{k_x - z}{k_x + z},$$

$\varepsilon = E / v_F$, E – енергія електрону. Якщо ж графен має краї типу armchair, то спектр має інший вигляд

© О.В. Барабаш, 2013

$$\varepsilon^2 = k_n^2 + k_y^2, \quad k_n = \frac{\pi n}{L} - \frac{4\pi}{3a_0},\ n \in \mathrm{Z}.$$

Тут a_0 – період гратки Браве.

Проте, як було зазначено в роботі [3], на електронні властивості графену суттєво впливає спін-орбітальна взаємодія, яка не була врахована авторами [2]. В роботі [3] був знайдений енергетичний спектр графену зі спін-орбітальною взаємодією, але *без врахування крайових умов*:

$$E(E\pm\lambda)=\gamma^2k^2. \qquad (3)$$

В огляді [1] досліджувалися крайові стани у графеновій стрічці при наявності щілини та магнітного поля.

В даній роботі ставиться задача знаходження енергетичного спектру графенової стрічки зі спін-орбітальною взаємодією Рашби та з краями типу zigzag.

Ефективний гамільтоніан при наявності спін-орбітальної взаємодії

З врахуванням спіну кількість станів електрону подвоюється і замість двохкомпонентної функції $\psi = (\varphi_A, \varphi_B)^T$ будемо мати чотирьох компонентну функцію аналогічного вигляду, де тепер φ_A та φ_B – двохкомпонентні спінори. Відповідно цьому, з врахуванням спін-орбітальної взаємодії ефективний гамільтоніан 2×2 переходить в оператор 4×4.

Ефективний 4×4 гамільтоніан графену із зовнішнім спін-орбітальним зв'язком в околі **K**-точки може бути представлений у вигляді кронекерівського добутку 2×2 матриць σ та **s** [3]:

$$H_K=\gamma(\sigma\cdot\hat{\mathbf{p}})+\frac{\lambda}{2}(\sigma\times\mathbf{s}),$$

де $\gamma=\hbar v$, $v\simeq10^8$см/с – швидкість Фермі, $\lambda\simeq13$meV – константа спін-орбітального зв'язку, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ – матриці Паулі, $\mathbf{s}=(s_x,s_y)$ – спінові матриці. Індекс K в H_K вказує на те, що гамільтоніан діє в околі **K**-точки зони Бріллюена. В околі **K'**-точки ефективний гамільтоніан має вигляд

$$H_{K'} = \sigma_1 H_K \sigma_1 = (H_K)^*.$$

В явному вигляді гамільтоніан H_K записується

$$H_K = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\hat{p}_- + i\lambda s_-/2 \\ \gamma\hat{p}_+ - i\lambda s_+/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

де $\hat{p}_\pm = p_x \pm ip_y$, $s_\pm = s_x \pm is_y$.

Розрахунок енергетичного спектру

Огинаюча функція ψ задовольняє рівнянню Шредінгера

$$H_K\psi = E\psi \qquad (5)$$

з гамільтоніаном H_K з (4) та наступним крайовим умовам:

$$\psi_A(y=L)=0, \quad \psi_B(y=0)=0.$$

Підставляючи анзац (1) в (5), отримуємо наступні рівняння на функції φ_i:

$$\begin{cases} \gamma(k_x - \partial_y)\varphi_B + \dfrac{i\lambda}{2}s_-\varphi_B = E\varphi_A \\ \gamma(k_x + \partial_y)\varphi_A - \dfrac{i\lambda}{2}s_+\varphi_A = E\varphi_B \end{cases} \qquad (6)$$

Щоб виключити з цієї системи спінор φ_A подіємо на перше рівняння оператором $(k_x+\partial_y)$, після чого виразимо функцію $(k_x+\partial_y)\varphi_A$ з другого рівняння системи (6). В результаті отримаємо

$$\gamma^2(k_x^2-\partial_y^2)\varphi_B + i\lambda\gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(k_x+\partial_y)\varphi_B =$$

$$= iE\lambda\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\varphi_A + E^2\varphi_B.$$

Підставляючи сюди спінор φ_A з першого рівняння (6) знаходимо шукане рівняння на спінор φ_B.

$$\gamma^2(k_x^2-\partial_y^2)\varphi_B + i\lambda\gamma\begin{pmatrix}0&\partial_y-k_x\\\partial_y+k_x&0\end{pmatrix}\varphi_B =$$

$$= \begin{pmatrix}E^2-\lambda^2&0\\0&E^2\end{pmatrix}\varphi_B.$$

В розгорнутому вигляді це рівняння на функції χ_1 та χ_2 має вигляд:

$$\begin{cases} \gamma^2(k_x^2\chi_1-\chi''_1)+i\lambda\gamma(\chi'_2-k_x\chi_2)=(E^2-\lambda^2)\chi_1 \\ \gamma^2(k_x^2\chi_2-\chi''_2)+i\lambda\gamma(\chi'_1+k_x\chi_1)=E^2\chi_2 \end{cases} \quad (7)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\chi_1(y)=ae^{\alpha y}, \quad \chi_2(y)=be^{\alpha y}.$$

Підстановка цих функцій в попередні рівняння системи (7) дає

$$\begin{cases} a\gamma^2(k_x^2-\alpha^2)+i\gamma b(\alpha-k_x)=(E^2-\lambda^2)a \\ b\gamma^2(k_x^2-\alpha^2)+i\gamma a(\alpha+k_x)=E^2 b \end{cases}. \quad (8)$$

Це система однорідних лінійних рівнянь на a та b. Вона має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю.

$$det\begin{vmatrix} \gamma^2(k_x^2-\alpha^2)-E^2+\lambda^2 & i\gamma(\alpha-k_x) \\ i\gamma(\alpha+k_x) & \gamma^2(k_x^2-\alpha^2)-E^2 \end{vmatrix}=0.$$

Розкриваючи цей визначник, отримуємо рівняння на α:

$$\alpha_{1,2}^2=k_x^2-\frac{E(E\pm\lambda)}{\gamma^2}.$$

Всього маємо чотири різних значення α та, відповідно, чотири незалежних розв'язки системи (7). Зв'язок між коефіцієнтами a та b знайдемо, підставляючи вираз для α в систему рівнянь (8).

$$b=\mp\frac{i\gamma}{E}(k_x+\alpha)a.$$

Для зручності перепозначимо $a=\pm iN$. Тоді для функцій φ_i маємо наступний загальний розв'язок:

$$\varphi_A = N_1\begin{pmatrix}\frac{i\gamma}{E}(k_x-\alpha_1)\\1\end{pmatrix}e^{\alpha_1 y}+N_2\begin{pmatrix}\frac{i\gamma}{E}(k_x+\alpha_1)\\1\end{pmatrix}e^{-\alpha_1 y}+N_3\begin{pmatrix}\frac{-i\gamma}{E}(k_x-\alpha_1)\\1\end{pmatrix}e^{\alpha_2 y}+N_4\begin{pmatrix}\frac{-i\gamma}{E}(k_x-\alpha_1)\\1\end{pmatrix}e^{-\alpha_2 y}$$

$$\varphi_B = N_1\begin{pmatrix}i\\\frac{\gamma}{E}(k_x+\alpha_1)\end{pmatrix}e^{\alpha_1 y}+N_2\begin{pmatrix}i\\\frac{\gamma}{E}(k_x-\alpha_1)\end{pmatrix}e^{-\alpha_1 y}+N_3\begin{pmatrix}-i\\\frac{\gamma}{E}(k_x+\alpha_1)\end{pmatrix}e^{\alpha_2 y}+N_4\begin{pmatrix}-i\\\frac{\gamma}{E}(k_x-\alpha_1)\end{pmatrix}e^{-\alpha_2 y}$$

Константи N_i визначаються з граничних умов: $\varphi_B(0)=0$, $\varphi_A(L)=0$. Знову маємо чотири лінійних однорідних рівнянь на N_i. Прирівнюючи визначник цієї системи до нуля, отримуємо неявне рівняння на енергетичний спектр електрона в графені.

$$e^{(\alpha_1-\alpha_2)L}(2k_x+\alpha_2-\alpha_1)^2+e^{(\alpha_1-\alpha_2)L}(2k_x+\alpha_1-\alpha_2)^2-$$
$$e^{(\alpha_1+\alpha_2)L}(2k_x-\alpha_2-\alpha_1)^2+e^{-(\alpha_1+\alpha_2)L}(2k_x+\alpha_1+\alpha_2)^2=$$
$$=8\alpha_1\alpha_2 \quad (9)$$

В граничному випадку λ=0 це рівняння зводиться до вигляду (2).

Аналіз отриманих результатів

Частинний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$E(E\pm\lambda)=\gamma^2k^2 \quad (10)$$

і в точності співпадає зі спектром (3), що був знайдений в роботі [3] для нескінченного графенового шару (з врахуванням спін-орбітальної взаємодії). При λ=0 цей розв'язок описує безмасову моду $E^2=\gamma^2k^2$. При λ≠0 відбувається розщеплення безмасової гілки на дві компоненти. Величина розщеплення дорівнює

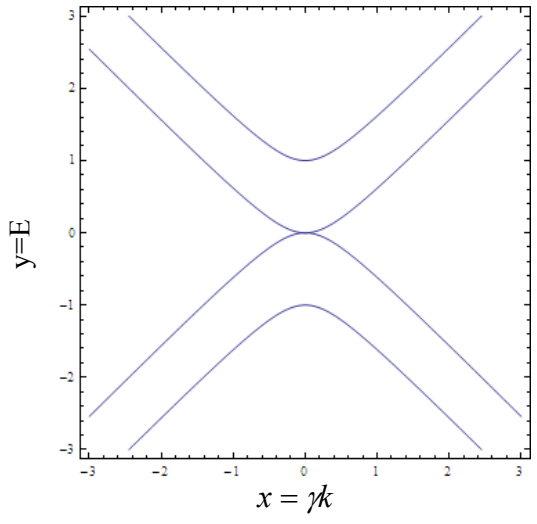


Рис. 2 Дисперсійне рівняння (12)

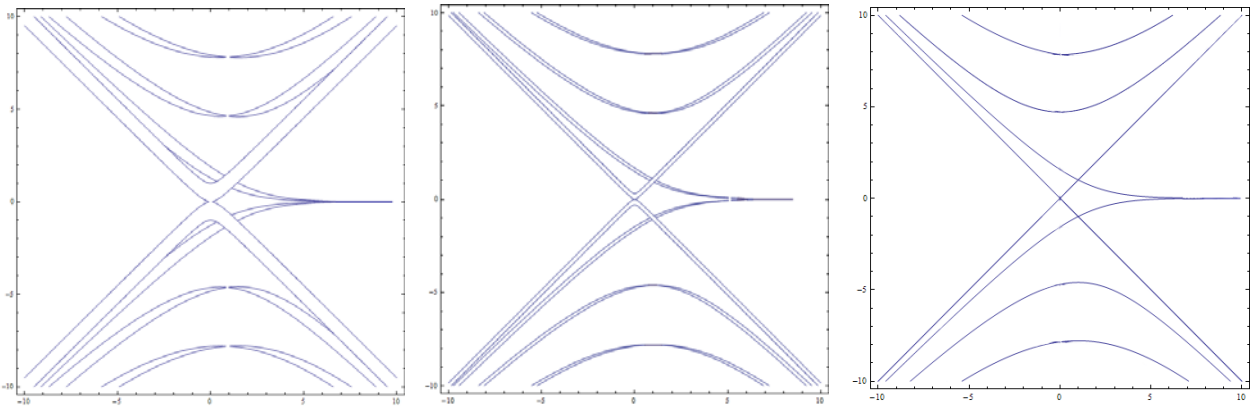


Рис. 3. Дисперсійне рівняння (11) для різних значень параметру спін-орбітальної взаємодії $\delta = 1$, $\delta = 0.3$ та $\delta = 0$. По осях координат відкладені безрозмірні змінні $x = k_x L$, $y = EL/\gamma$.

$$\Delta E = \lambda.$$

Інший ефект, до якого призводить врахування спін-орбітальної взаємодії – спотворення спектру в околі діраківських точок. На Рис. 2 показано графік залежності E від k_x, що відповідає рівнянню (10). Як видно з цього графіку, ми вже не маємо лінійної залежності енергії від імпульсу поблизу нуля. Похідна $(dE/dk)_{k=0}=0$ як для нерелятивістських частинок.

Аналіз рівняння (9) проводився графічно за допомогою програми Mathematika.

Щоб з'ясувати, як впливає спін-орбітальна взаємодія Рашби на спектр, порівняємо цей графік з графіками залежності $E=E(k_x)$ при трьох значеннях параметру масштабу спін-орбітальної взаємодії δ=1, δ=0.3 та δ=0 (зменшення параметру δ відповідає зменшенню спін-орбітальної взаємодії, значення δ=0 – відсутність взаємодії Рашби).

Як видно з графіків (Рис. 3), врахування спін-орбітальної взаємодії призводить до двократного розщеплення спектральних ліній (знімається виродження по спіну). Цей ефект може бути спостережений на експерименті.

Висновки

1. У роботі досліджено енергетичний спектр електрону в графеновій стрічці зі спін-орбітальною взаємодією Рашби та з граничними умовами типу zigzag.
2. Отримано хвильову функцію та дисперсійне рівняння електрона в графеновій стрічці. Знайдено частинний розв'язок дисперсійного рівняння, який у випадку відсутності спін-орбітальної взаємодії переходить в безмасову моду.
3. Показано, що врахування спін-орбітальної взаємодії призводить до двократного розщеплення спектральних ліній (знімається виродження по спіну) та зникненню лінійної залежності енергії від імпульсу поблизу рівня Фермі.

Список використаних джерел

1. *Gusynin V.P., Miransky V.A., Sharapov S.G., and Shovkovy I.A.,* Fizika Nizkikh Temperatur, **34**, No. 10, (2008).
2. *Castro A. H., Guienea F., Peres N., Novoselov K. S., Geim A. K.* The electronic properties of graphene, *Review of Modern Physics*, **81**, 109 (2009).
3. *Rashba E.I.* Graphene with structure-induced spin orbit coupling: spin-polarized states, spin zero modes, and quantum Hall effect, *Phys. Rev. B*, **79**, 161409(R), (2009).

Надійшла до редколегії 05.02.13

УДК 530.145

Барабаш О.В. [1], к.ф.-м.н., асистент.

Динаміка народження частинок з вакууму в однорідних нестаціонарних просторах

Запропоновано альтернативний підхід отримання виразу для числа частинок квантованого поля, що народжуються з вакууму на момент часу τ при нестаціонарному розширенні всесвіту, який ґрунтується на узгодженості отриманих результатів з перенормованими компонентами тензора енергії-імпульсу.

Ключові слова: вакуум, тензор енергії імпульсу, метод діагоналізації.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: obar@univ.kiev.ua

O. V. Barabash[1], PhD

Dynamics of creation of particles from the vacuum in homogeneous nonstationary spaces.

We propose an alternative approach for deriving an expression for the number of particles of quantized fields created from the vacuum at time τ with unsteady expansion of the Universe. The method is based on the consistency of the results obtained from the renormalized components of the energy-momentum tensor.

Key Words: vacuum, energy-momentum tensor, diagonalization method.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: obar@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ

У квантовій теорії поля вакуум визначається як стан, для якого

$$\hat{a}_k|0\rangle=0, \quad \forall k, \tag{1}$$

де $\hat{a}_k$ – оператори знищення квантів поля φ. В свою чергу, оператори $\hat{a}_k$ та $\hat{a}_k^\dagger$ визначаються з розкладу польового оператора $\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi} = \sum (u_k \hat{a}_k + u_k^* \hat{a}_k^+) \tag{2}$$

де $u_k(x)$ – додаточастотні розв'язки класичних рівнянь. У викривленому просторі-часі процедура квантування формально залишається без зміни, доповнюючись лише коваріантним узагальненням рівнянь. Проте, тепер з'являються складності принципового характеру. Як видно з (2) визначення операторів народження та знищення залежить від вибору розв'язків u_k: різний набір мод приводить, взагалі кажучи, до різного означення вакууму поля φ [1]. В просторі Мінковського існують привілейовані системи відліку (інерційні), в яких простір-час має повну групу симетрії Пуанкаре. По відношенню до цих систем і проводиться розділення мод на додатно- та від'ємно-частотні складові. В загальному ж випадку довільного простору-часу не існує інваріантного способу розділення мод. Поняття вакууму (і відповідно частинок поля) стає невизначеним. Така ситуація певної міри зберігається і у випадку просторів з високою симетрією, таких як однорідний та ізотропний простір Фрідмана. Незважаючи на існування виділеної (супутньої) системи відліку, не вдається однозначно ввести поняття додатночастотної моди. Існують різні підходи до цієї проблеми. Відповідно, в літературі можна зустріти поняття адіабатичного вакууму, конформного вакууму та ін. Як правило, ці вакууми не узгоджуються між собою. Більш того, "вакуумний" стан зовсім не обов'язково виявляється позбавленим частинок: супутній детектор може реєструвати кванти поля [1].

Ситуація змінюється, якщо існують асимптотично стаціонарні області, в яких простір наближається до простору Мінковського. Відповідно, якщо існують асимптотичні in- (при $t\to-\infty$) або out- (при $t\to+\infty$) області, то можна ввести відповідні вакууми $|0_{in}\rangle$ та $|0_{out}\rangle$, які визначаються згідно (1) та (2) на модах, що задовольняють асимптотичним умовам

© О.В. Барабаш, 2013

$$u_k(x) \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{in}}} e^{i(kx-\omega_{in}t)}, \quad t \to -\infty \qquad (3)$$

$$\widetilde{u}_k(x) \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{out}}} e^{i(kx-\omega_{out}t)}, \quad t \to +\infty \qquad (4)$$

Якщо поле φ спочатку знаходилось у вакуумному стані $|0_{in}\rangle$, то при розширенні всесвіту відбувається народження частинок, і при $t \to +\infty$ стан $|0_{in}\rangle$ не буде співпадати з $|0_{out}\rangle$. Кількість народжених частинок N_k моди k визначається коефіцієнтами Боголюбова $\beta_{kk'}$ розкладу in-мод по out-модам

$$u_k = \sum_{k'} (\alpha_{kk'} u_{k'} + \beta_{kk'} u^*_{k'}) \qquad (5)$$

$$N_k = \sum_{k'} |\beta_{kk'}|^2 \ . \qquad (6)$$

Вираз (6) визначає спектр народжених частинок за *весь* час розширення і не дає відповіді на питання, як саме відбувається народження частинок в часі. Поширений метод дослідження динаміки народження квантів поля є метод діагоналізації гамільтоніану [2].

Метод діагоналізації гамільтоніану

Метод діагоналізації полягає у введені вакуумного стану $|0_\tau\rangle$ в момент часу τ. Як добре відомо, вакуум є суттєво нелокальною конструкцією як в просторі, так і в часі. Не існує поняття вакууму в даній точці простору. Зокрема, така нелокальність проявляється, наприклад, в залежності вакууму від глобальних властивостей простору, таких як його топологія, наявність границь і т.п. Нелокальність у часі означає, що властивості квантованого поля в даний момент залежать від усієї його попередньої еволюції. В зв'язку з цим термін "вакуум у момент τ" викликає відчуття недовіри. Як відмічають автори [3] в ситуації, далекій від адіабатичної, інтерпретація стану $|0_\tau\rangle$ як вакуумного "є дуже умовною, і застосовувати цей метод треба з великою обережністю".

За означенням, стан $|0_\tau\rangle$ мінімізує повну енергію, яка складається з трьох складових: казимірівська енергія (доданок, що пов'язаний топологією простору і не зникає в граничному випадку $a(\tau) \to const$), поляризаційна енергія (яка залежить лише від миттєвого значення $a(\tau)$ і зникає у випадку $a(\tau)=const$) та частина, що безпосередньо пов'язана з частинками (квантами поля) і визначається усією попередньою еволюцією $a(\tau)$. Крім останньої частини, дві перші складові енергії можуть бути будь-якого знаку. Мінімізація повної енергії не гарантує відсутності частинок.

В той же час тензор енергії-імпульсу (TEI) квантованого поля є величиною локальною і добре означеною для як завгодно нерегулярної динаміки $a(\tau)$. Опис стану квантованого поля через його значення TEI $\langle 0_{in} | T_0^0 | 0_{in} \rangle$ представляється більш об'єктивним і координатно незалежним. На використані TEI для дослідження динаміки народження частинок заснований метод, який ми назвали методом зшивки.

Метод зшивки

Проілюструємо метод на прикладі скалярного поля в 1+1 просторі-часі з інтервалом $ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - d\varphi^2)$. Нехай залежність $a(\tau)$ така, що існує in-область, але відсутня out. Стаціонарна out-область необхідна для правильної трактовки частинок (і вакууму) квантованого поля. Тому введемо цю область "руками". Припустимо, що розширення у момент часу $\tau = \tau_0$ припиняється, тобто розглянемо

$$\tilde{a}(\tau) = \begin{cases} a(\tau) & ,\tau < \tau_0 \\ a_0 = a(\tau_0), & \tau \geq \tau_0 \end{cases} .$$

Після моменту τ_0 маємо простір Мінковського зі стандартним набором лінійно незалежних розв'язків польових рівнянь у вигляді плоских хвиль з частотою $\omega_0 = \sqrt{k^2 + m^2 a_0^2}$:

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{4\pi\omega_0}}, \quad \tau > \tau_0$$

Повний розв'язок $u_k(\tau, \varphi) = u_k(\tau) e^{ik\varphi}$ отримується зшивкою $u_k(\tau)$ і $\dot{u}_k(\tau)$ до та після моменту τ_0:

$$u_k(\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_0}}(\alpha_k e^{-i\omega_0 t}+\beta_k e^{i\omega_0 t}),$$
$$\dot{u}_k(\tau)=\frac{-i\omega_0}{\sqrt{4\pi\omega_0}}(\alpha_k e^{-i\omega_0 t}-\beta_k e^{i\omega_0 t}), \quad (7)$$

де α_k та β_k – комплексні коефіцієнти, а $u_k(\tau)$ – розв'язок польового рівняння

$$\ddot{u}_k(\tau)+(k^2+m^2a_0^2(\tau))u_k(\tau)=0, \quad \tau>\tau_0 \quad (8)$$

що має асимптотику

$$u_k(\tau)\to\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{in}}}e^{-i\omega_{in}\tau}, \quad \tau\to-\infty.$$

З (7) знаходимо

$$|\alpha_k|^2=\frac{\pi}{\omega_0}(\omega_0^2|u_k|^2+|\dot{u}_k|^2-i\omega_0(u_k\dot{u}_k^*-\dot{u}_k u_k^*))$$
$$|\beta_k|^2=\frac{\pi}{\omega_0}(\omega_0^2|u_k|^2+|\dot{u}_k|^2+i\omega_0(u_k\dot{u}_k^*-\dot{u}_k u_k^*))$$

Функції u_k та u_k^* є лінійно незалежними розв'язками (8), вронскіан яких є величиною сталою:

$$W=u_k\dot{u}_k^*-\dot{u}_k u_k^*=\frac{i}{2\pi}.$$

В результаті, попередні вирази приймають вигляд

$$|\beta_k|^2=\frac{\pi}{\omega_0}(\omega_0^2|u_k|^2+|\dot{u}_k|^2)-\frac{1}{2},$$
$$|\alpha_k|^2-|\beta_k|^2=1.$$

Обрахуємо тепер значення компонент TEI на in-модах в момент $\tau>\tau_0$.

$$\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\rangle=\frac{1}{2a_0^2}\sum_k(|\dot{u}_k|^2+\omega_0|u_k|^2)=$$
$$=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum_k|\beta_k|^2\,\omega_0+\frac{1}{4\pi a_0^2}\sum_k\omega_0.$$

Величина

$$\langle T_0^0\rangle_{част}=\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\rangle-\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\rangle$$

має смисл густини енергії народжених частинок. Віднімаючи $\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\rangle$ від $\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\rangle$ ми усуваємо з розгляду казимірівську частину TEI (що не пов'язана з частинками), яка одночасно присутня як в $\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\rangle$, так і в $\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\rangle$. При цьому також віднімається і розбіжна частина TEI. Оскільки

$$\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\rangle=\frac{1}{4\pi a_0^2}\sum_k\omega_0,$$

то

$$\langle T_0^0\rangle_{част}=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum_k|\beta_k|^2\,\omega_0(k). \quad (9)$$

Аналогічно для тиску ($P=-T_1^1$) отримуємо

$$\langle 0_{in}|P|0_{in}\rangle=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum(|\beta_k|^2-\frac{1}{2})\omega_0-m^2\sum|u_k|^2,$$
$$\langle 0_{out}|P|0_{out}\rangle=\frac{1}{4\pi a_0^2}\sum_k\frac{k^2}{\omega_0(k)}.$$

Виражаючи $|u_k|^2$ через α_k і β_k за допомогою 1-го рівняння (7)

$$|u_k|^2=\frac{1}{4\pi\omega_0}(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2+2\Re e(\alpha_k\beta_k^* e^{2i(k\varphi-\omega_0\tau)}))$$

та усереднюючи, отримуємо

$$|u_k|^2=\frac{1}{4\pi\omega_0}(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2)=\frac{1}{4\pi\omega_0}(1+2|\beta_k|^2).$$

В результаті

$$\langle P\rangle_{част}=\langle 0_{out}|P|0_{out}\rangle-\langle 0_{in}|P|0_{in}\rangle=$$
$$=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum_k|\beta_k|^2\,\frac{k^2}{\omega_0(k)}. \quad (10)$$

Знайдені вирази (9) та (10) мають стандартний вигляд TEI газу невзаємодіючих частинок, де $|\beta_k|^2$ – число частинок моди *k*. Дійсно, для повної енергії поля маємо:

$$H=\int\langle T_0^0\rangle_{част}(ad\varphi)=\sum_k|\beta_k|^2\,\tilde{\omega}_0(k),$$

де $\tilde{\omega}_0(k)=\omega_0(k)/a_0$ – частота (енергія) по відношенню до власного часу. Видно, що величини $|\beta_k|^2$ можна трактувати як число частинок моди *k*. Теж саме стосується і тиску. В

одновимірному випадку величина сили, яка діє на "стінку" при пружному відбиванні частинок з імпульсом p, дорівнює

$$F_p = \frac{1}{2}(vdtn_p)\cdot 2p/d\tau,$$

де $\frac{1}{2}(vdtn_p)$ – число частинок, які рухаються в напрямку "стінки" і стикаються з нею за час dt, $2p$ – переданий імпульс, n_p – густина частинок з імпульсом p і енергією E_p. В результаті для тиску отримуємо

$$P = \sum_p n_p vp = \sum_p n_p \frac{p^2}{E_p}. \qquad (11)$$

Вираз (11) співпадає з (10) якщо в ньому покласти

$$n_p = \frac{|\beta_k|^2}{2\pi a_0}, \qquad p = \frac{k}{a_0},$$

$$E = \tilde{\omega}_0(k) = \frac{\omega_0(k)}{a_0}.$$

Щоб пов'язати величину $|\beta_k|^2$ з числом народжених частинок безпосередньо до моменту зшивки необхідно з'ясувати, чи не відбувається народження частинок в сам момент зшивки τ_0 (в цей момент $\dot{a}(\tau)$ має розрив, а $\ddot{a}(\tau)$ нескінченно велике). Якщо б таке народження частинок мале місце, то компоненти ТЕІ зазнавали б стрибок при $\tau = \tau_0$ (вклад від народжених частинок). Проте, оскільки компоненти ТЕІ є функціями від u_k та їх перших похідних і не залежать від вищих похідних, то в силу умов зшивки (7) усі компоненти ТЕІ залишаються неперервними. Те ж саме стосується залежності ТЕІ від метрики: компоненти ТЕІ залежать від метрики, але не від її похідних. Таким чином, точка зшивки не вносить вклад в народження частинок.

Процедура "обрізання" розширення була суто уявною, необхідною лише для коректного визначення поняття частинки в нестаціонарному просторі-часі. В результаті, для довільного закону розширення число народжених частинок моди k на момент τ дається коефіцієнтами $|\beta_k|^2$ і має вигляд:

$$N_k(\tau) = \frac{\pi}{\omega_k(\tau)}(\omega_k^2(\tau)|u_k|^2 + |\dot{u}_k|^2) - \frac{1}{2}. \qquad (12)$$

Значення $|\beta_k|^2$ з (12) співпадає з аналогічним виразом, отриманим методом діагоналізації гамільтоніану.

Висновки

Метод діагоналізації гамільтоніану має добре відомі складності з фізичним обґрунтуванням тих методів і понять, за допомогою яких отримується вираз для числа частинок, народжених на момент τ. В той же час, метод зшивки, який базується на використанні ТЕІ квантованого поля, є фізично прозорим і координатно незалежним. Отриманий за допомогою цього методу спектр $N_k(\tau)$ співпадає з тим, що дається методом діагоналізації. Таким чином, метод зшивки не має нових наслідків, але, як на нашу думку, дає суттєву перевагу в фізичному обґрунтуванні результату.

Список використаних джерел

1. *Birrel N.D., Davies P.C.* Quantum field in curved spsce. – Cambridge university press, 1982. – 356 p.
2. *Grib A.A., Mamaev S.G., Mostepanenko V.M.* Quantum effects in strong external fields. – Moscow: Mir, 1980. – 296 p. (in Russian).
3. *Gorbunov D.S., Rubakov V.A.* Interaction to theory of early universe. – Moscow: URSS, 2008. – 543 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 05.02.13

УДК 536

Гаврюшенко Д.А., д. ф.-м.н., проф.

Розподіл концентрації в ідеальній циліндричній порожнині поблизу критичної точки розшарування

Проведено теоретичне дослідження впливу кореляційних ефектів на просторовий розподіл концентрації бінарного розчину в околі критичної точки розшарування. Показано, що при наближенні до границі стійкості системи суттєве відхилення концентрації має місце у всьому об'ємі системи.

Ключові слова: бінарний розчин, критична точка розшарування, локальні ефекти.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: dg@univ.kiev.ua

D.A. Gavryushenko, Dr. Sci., Prof.

Concentration distribution within ideal cylindrical pore in the vicinity of critical point

The theoretical investigation of correlation effects on a spatial distribution of a binary solution concentration in the vicinity of a critical point has been carried out. It was shown that essential deviation of the concentration within hole volume of the pore exists it the vicinity of a border of a system stability.

Key Words: binary solution, critical point, local effects.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: dg@univ.kiev.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Кількісний опис бінарного розчину однорідної рідини в широкому інтервалі зміни термодинамічних параметрів, включаючи окіл можливих критичних точок, можна провести як методами статистичної фізики, так і термодинаміки. Стан такої системи можна повністю задати набором інтенсивних параметрів, жоден з яких не описує розмірів системи або форми поверхні, що її обмежує, та загальним числом частинок $N = N_A + N_B$, де N_A та N_B – кількість частинок сорту "A" та "B" відповідно. Але очевидно, що будь-яка реальна система завжди є неоднорідною. Можна виділити дві основних причини появи цієї неоднорідності: перша пов'язана з дією зовнішніх полів з потенціалом $u(\vec{r})$ (гравітаційних, електричних тощо), а друга – з наявністю стінок, що обмежують систему [1].

Традиційні методи опису властивостей неоднорідної системи полягають в розбитті її на достатньо тонкі шари між двома еквіпотенційними поверхнями і представленні відповідних термодинамічних потенціалів (зокрема, внутрішньої енергії U) такої системи як суми термодинамічних потенціалів цих шарів [2]. Товщини шарів при цьому розглядають як фізично нескінчено малі, тобто вони є достатньо малими для того, щоб речовину в межах шарів можна вважати однорідною, але, з іншого боку, вони є достатньо великими для того, щоб властивості цих шарів можна було розглядати в межах термодинаміки та статистичної фізики. Базуючись на цьому підході, для хімічного потенціалу однокомпонентної системи $\mu(\vec{r})$ у зовнішньому полі можна отримати відому класичну формулу:

$$u(\vec{r}) = \mu_0 - \mu(\vec{r}), \qquad (1)$$

де μ_0 – хімічний потенціал системи за відсутності зовнішнього поля. Г. Йосом було встановлено область застосування виразу (1).

Зрозуміло, що даний підхід є локальним у тому розумінні, що він передбачає розгляд термодинамічних потенціалів системи як функцій чисельної густини замість того, щоб розглядати їх як відповідні функціонали. Це призводить до втрачати інформації про «колективну» поведінку системи, яка є надзвичайно важливою при описі властивостей системи в околі точок фазових перетворень другого роду [3].

Дж. Лебовицем та Дж. Перкусом з врахуванням нелокальних («колективних») властивостей однокомпонентної системи було отримано вираз, аналогічний (1):

© Д.А. Гаврюшенко, 2013

$$u\left(\vec{r}\right) = \mu_0 - \mu\left(\vec{r}\right) + a\nabla^2 n\left(\vec{r}\right) \qquad (2)$$

де стала a визначається через другий просторовий момент так званої прямої кореляційної функції другого порядку. Вираз (2) дозволяє в певному наближенні проводити обчислення просторового розподілу густини рідини в широкому інтервалі зміни термодинамічних параметрів, включаючи критичну точку [4].

Для побудови послідовної термодинамічної теорії, яка описувала поведінку однокомпонентної неоднорідної системи, раніше було запропоновано фундаментальний підхід, що базується на обчисленні внеску від кожного шару між еквіпотенційними поверхнями не у відповідні термодинамічні потенціали, а в гамільтоніан системи. В цьому випадку замість виразів (1) та (2) можна записати

$$u\left(\vec{r}\right) = \mu_0 - \mu\left(\vec{r}\right) + \Delta\mu_{cor}\left(\vec{r}\right), \qquad (3)$$

де $\Delta\mu_{cor}$ – внесок від кореляційних ефектів, для якого було отримано вираз у вигляді нескінченого ряду:

$$\begin{aligned}\beta\Delta\mu_{cor}\left(\vec{r}\right) &= \int_V d\vec{r}_1 C_2\left[\Delta x\left(\vec{r}_1\right) - \Delta x\left(\vec{r}\right)\right] + \\ &+\Delta x\left(\vec{r}\right)\int_V d\vec{r}_1 \int_V d\vec{r}_2 C_3\left[\Delta x\left(\vec{r}_1\right) - \Delta x\left(\vec{r}\right)\right] + \\ &+\frac{1}{2!}\int_V d\vec{r}_1 \int_V d\vec{r}_2 C_3\left[\Delta x\left(\vec{r}_1\right) - \Delta x\left(\vec{r}\right)\right]\times \\ &\times\left[\Delta x\left(\vec{r}_2\right) - \Delta x\left(\vec{r}\right)\right] + \ldots.\end{aligned} \qquad (4)$$

Для випадку достатньо плавної просторової зміни концентрації $\Delta x\left(\vec{r}\right)$, різницю $\Delta x\left(\vec{r}_i\right) - \Delta x\left(\vec{r}\right)$ можна розкласти в ряд Тейлора за ступенями $\left(\vec{r}_i - \vec{r}\right)$. Тоді вираз (4) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\beta\Delta\mu_{cor}\left(\vec{r}\right) &= \frac{1}{2}\vec{\nabla}^2\Delta x\left(\vec{r}\right)\int_V d\vec{r}_1 C_2\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right)^2 + \\ &+\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\Delta x\left(\vec{r}\right)\right)^2 \int_V d\vec{r}_1 \int_V d\vec{r}_2 C_3\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right)\left(\vec{r}_2 - \vec{r}\right) + \\ &+\vec{\nabla}\Delta x\left(\vec{r}\right)\left\{\int_V d\vec{r}_1\, C_2\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right) + \right. \\ &\left.+\Delta x\left(\vec{r}\right)\int_V d\vec{r}_1 \int_V d\vec{r}_2 C_3\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right)\right\} + \ldots.\end{aligned} \qquad (5)$$

В цьому випадку формулу (3) можна записати у вигляді, аналогічному формулі для густини рідини (2):

$$\begin{aligned}\beta u_{BA}\left(\vec{r}\right) &= \beta\left(\mu_0 - \mu\left(\vec{r}\right)\right) + a\vec{\nabla}^2\Delta x\left(\vec{r}\right) + \\ &+b\left(\vec{\nabla}\Delta x\left(\vec{r}\right)\right)^2 + \vec{c}\vec{\nabla}\Delta x\left(\vec{r}\right)\ldots\end{aligned}, \qquad (6)$$

де позначено

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}\int_V d\vec{r}_1 C_2\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right)^2, \\ b &= \frac{1}{6}\int_V d\vec{r}_1 \int_V d\vec{r}_2 C_3\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right)\left(\vec{r}_2 - \vec{r}\right), \\ \vec{c} &= \int_V d\vec{r}_1 C_2\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right) + \\ &+\Delta x\left(\vec{r}\right)\int_V d\vec{r}_1 \int_V d\vec{r}_2 C_3\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right).\end{aligned} \qquad (7)$$

Якщо в цьому виразі обмежитись доданком, пов'язаним з $\vec{\nabla}^2\Delta x\left(\vec{r}\right)$ (тобто наближенням, аналогічним до наближення Лебовиця-Перкуса), отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно $\Delta x\left(\vec{r}\right)$, побудова розв'язку якого для обмежених систем, має певні особливості. Зокрема, на розв'язок цього рівняння необхідно накладати умови трансверсальності, які в даному випадку мають наступний очевидний вигляд:

$$\vec{n}_S \cdot \vec{\nabla}\Delta x\left(\vec{r}\right)\Big|_S = 0\,, \qquad (8)$$

де S – поверхня, що обмежує систему, $\vec{n}_S$ – нормаль до поверхні S в деякій її точці, та ізоперіметризму (в даному випадку – постійності кількості частинок в системі):

$$\int_V d\vec{r}_1 \Delta x\left(\vec{r}_1\right) = 0\,. \qquad (9)$$

Зауважимо, що накладання на розв'язок рівняння (6) додаткової умови (9) пов'язано з необхідністю завдання хімічного потенціалу однорідної системи.

Важливим частинним випадком неоднорідної бінарної системи є система з кубічною решіткою, в якій вздовж вісі $0z$ діє зовнішнє поле $u\left(z\right)$, крім того, система в цьому напрямку обмежена, тому z може змінюватись в

межах $\left[-L,L\right]$. Така ситуація реалізується, наприклад, в однорідному гравітаційному полі або в системі з плоскопаралельними стінками, біля яких діє пристінковий потенціал, за відсутності гравітаційного поля. В цьому випадку $u^i_{BA}=\left(u^i_B-u^i_A\right)N_l$, $N_l=N\dfrac{l}{2L}-\text{const}$ – кількість частинок (вузлів) у шарі товщиною l. В цьому випадку, очевидно, рівняння (6) можна подати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}&\beta u_{BA}\left(z\right)=\beta\left(\mu_0-\mu\left(z\right)\right)+\\&+a\frac{d^2}{dz^2}\Delta x\left(z\right)+b\left(\frac{d}{dz}\Delta x\left(z\right)\right)^2+\ldots\end{aligned},\quad(10)$$

де

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{2}\int\limits_{-L}^{L}dz_1C_2\left(z_1-z\right)^2,\\b&=\frac{1}{2}\int\limits_{-L}^{L}dz_1\int\limits_{-L}^{L}dz_2C_3\left(z_1-z\right)\left(z_2-z\right).\end{aligned}\quad(11)$$

Очевидно, що в цьому випадку умови трансверсальності (8) та ізопериметризму (9) набувають наступного вигляду:

$$\left.\frac{d}{dz}\Delta x\left(z\right)\right|_{\pm L}=0,\quad(12)$$

$$\int\limits_{-L}^{L}dz\Delta x\left(z\right)=0.\quad(13)$$

Для густини розчину в цьому випадку можна записати вираз:

$$\begin{aligned}&\rho\left(z\right)=\frac{N}{2LS}\left(m_{B0}-m_{A0}\right)x_0+\\&+\frac{N}{2LS}\left\{m_{A0}+\left(m_{B0}-m_{A0}\right)\Delta x\left(z\right)\right\}\end{aligned}.\quad(14)$$

де S – площа поверхні в напрямку, перпендикулярному $0z$, m_{0A} та m_{0B} – маси молекул сорту "A" та "B" відповідно, а для відхилення густини від його значення у відсутності зовнішнього поля.

Отримані результати свідчать про те, що класичну формулу (1) можна застосовувати виключно для опису розподілу концентрації неоднорідних бінарних систем лише у випадку наявності зовнішніх полів з малими просторовими градієнтами далеко від критичної точки. Але при наближенні до критичної точки роль кореляційних доданків зростає, і тому необхідно користуватись виразом (5), враховуючи все більше поправочних доданків. Аналогічна ситуація має місце і далеко від критичної точки при наявності великих відхилень концентрації $\Delta x\left(z\right)$.

Ситуація в самій критичній точці за наявності зовнішнього поля (навіть достатньо гладкого), потребує особливого підходу. Так як в критичній точці похідні $\vec{\nabla}\Delta x\left(\vec{r}\right)$ стають сингулярними, у виразі (6) відповідні доданки починають відігравати превалюючу роль. Але оскільки в околі точки розшарування на критичній ізотермі, згідно з теорією масштабних перетворень [5], $\left(\mu-\mu_c\right)\sim\left|x-x_c\right|^{\delta}$, де δ – критичний індекс ($\delta\approx4.6$ у тривимірній системі), то зрозуміло, що прямі кореляційні функції порядку шість і більше стають далекодіючими, і нульові моменти прямих кореляційних функцій відповідних порядків розбігаються в самій критичній точці. Очевидно, що розбігаються і моменти більш високих порядків від цих далекодіючих прямих кореляційних функцій.

Розглянемо випадок, коли бінарний розчин знаходиться в порожнині, обмеженій коаксіальними циліндрами з радіусами R_1 та R_2 ($R_1<R_2$). Введемо циліндричну систему координат таким чином, щоб вісь $0z$ співпадала з віссю циліндрів. В цьому напрямку систему будемо вважати необмеженою. Умови трансверсальності та ізопериметризму в даному випадку будуть мати вигляд

$$\left.\frac{d\Delta x\left(r\right)}{dr}\right|_{r=R_1}=0,\ \left.\frac{d\Delta x\left(r\right)}{dr}\right|_{r=R_2}=0,\quad(15)$$

$$\int\limits_{R_1}^{R_2}dr\Delta x(r)r=0.\quad(16)$$

Система обертається навколо вісі oz с постійною кутовою швидкістю ω. Тоді можна вважати, що на кожну з компонентів діє відповідне «гравітаційне» поле, потенціал якого можна задати у вигляді:

$$u_i\left(r\right)=-\frac{m_{0i}\omega^2r^2}{2}.\quad(17)$$

Тоді в наближенні плавної неоднорідності отримаємо диференціальне рівняння відносно $\Delta x\left(r\right)$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Delta x\left(r\right)}{dr}\right)-k^2\Delta x\left(r\right)= \\ =A\kappa^2\left(-\frac{m_{BA}\omega^2r^2}{2}+\lambda\right) \quad . \qquad (18)$$

Розв'язок рівняння (18) за умов трансверсальності та ізоперіметризму можна записати у вигляді:

$$\Delta x\left(r\right)=C_1\,\mathrm{I}_0(\kappa r)+C_2\,\mathrm{K}_0(\kappa r)- \\ -\frac{1}{2\kappa}Am_{0BA}\omega^2\,\mathrm{I}_0(\kappa r)\times \\ \times\left[-2\kappa r^2\,\mathrm{K}_2\left(\kappa r\right)+2\kappa R_1^2\,\mathrm{K}_0(\kappa R_1)-\kappa^2r^3\,\mathrm{K}_1\left(\kappa r\right)\right] \\ -\frac{1}{2\kappa}Am_{0BA}\omega^2\,\mathrm{I}_0(\kappa r)R_1\,\mathrm{K}_1\left(\kappa R_1\right)\left(\kappa^2R_1^2+4\right) \\ +\frac{1}{2}Am_{0BA}\omega^2\,\mathrm{K}_0\left(\kappa r\right)r^2\left(2\,\mathrm{I}_2(\kappa r)+\kappa r\,\mathrm{I}_3(\kappa r)\right)- \\ -\frac{1}{2}Am_{0BA}\omega^2\,\mathrm{K}_0\left(\kappa r\right)R_1^2\left(2\,\mathrm{I}_2(\kappa R_1)+\kappa R_1\,\mathrm{I}_3(\kappa R_1)\right) \\ -A\lambda, \qquad (19)$$

де:

$$C_1=\frac{b\left(\kappa R_2\right)\mathrm{K}_1\left(\kappa R_1\right)-b\left(\kappa R_1\right)\mathrm{K}_1\left(\kappa R_2\right)}{\mathrm{I}_1\left(\kappa R_1\right)\mathrm{K}_1\left(\kappa R_2\right)-\mathrm{K}_1\left(\kappa R_1\right)\mathrm{I}_1\left(\kappa R_2\right)},$$

$$C_2=\frac{b\left(\kappa R_2\right)\mathrm{I}_1\left(\kappa R_1\right)-b\left(\kappa R_1\right)\mathrm{I}_1\left(\kappa R_2\right)}{\mathrm{I}_1\left(\kappa R_1\right)\mathrm{K}_1\left(\kappa R_2\right)-\mathrm{K}_1\left(\kappa R_1\right)\mathrm{I}_1\left(\kappa R_2\right)},$$

$$b\left(\kappa r\right)=-\frac{1}{2\kappa^2}Am_{0BA}\omega^2\,\mathrm{I}_1(\kappa r)\times \\ \times\left\{\kappa r^2\left[2\,\mathrm{I}_2\left(\kappa r\right)+\kappa r\,\mathrm{I}_3\left(\kappa r\right)\right]- \right. \\ -\kappa R_1^2\left[2\,\mathrm{I}_2\left(\kappa R_1\right)+\kappa R_1\,\mathrm{I}_3\left(\kappa R_1\right)\right]- \\ -2K_2\left(\kappa r\right)\kappa r^2+2K_0\left(\kappa R_1\right)\kappa R_1^2-\kappa r^3K_1\left(\kappa r\right)+ \\ \left.+K_1\left(\kappa R_1\right)\kappa R_1\left(\kappa R_1^2+4\right)\right\}.$$

I_0, K_0, I_1 та K_1 – модифіковані функції Бесселя і Ганкеля.

Аналіз отриманого виразу (19) вказує на суттєве відхилення залежності концентрації розчину від локального наближення.

Таким чином, отримані результати вказують на те, що в околі критичної точки розшарування наявність неідеальних стінок призводить до зміни профілю концентрації суміші в об'ємі, який визначається радіусом кореляції відповідної однорідної системи, а не радіусом дії сил приповерхневого поля стінки, яка обмежує систему.

Крім того, встановлено, що наявність стінок різної природи викликає суттєві відхилення концентрації від знайденого в локальному наближенні, що впливає на значення критичних амплітуд, розрахованих за результатами експериментальних досліджень.

Список використаних джерел

1. *Bulavin L.A., Gavryushenko D.A., Sysoev V.M.* Spatial distribution of components of a binary mixture in a bounded System // Ukr. Journ. of Phys. – 2007. – Vol. 52, No 10. – P. 934-938.
2. *Munster A.* Chemische thermodynamik. – Berlin: Akademie, 1969, – 296 p.
3. *Bulavin L.A., Gavryushenko D.A., Sysoev V.M.* Calculation of spatial distribution of binary solution concentration under external field // Dopovidi nazionalnoyi academii nauk Ukrayiny. – 2008. – N 1. – P. 68-71 (in Ukraine).
4. *Bulavin L.A., Gavryushenko D.A., Sysoev V.M.* Non-uniform liquid in external field // Fizika. – 1998. – A6. – P. 89-95.
5. *Pokrovski A.Z., Patashinski V.L.* Fluctuation theory of phase transitions. – Moscow: Nauka, 1982. – 382 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 7.02.2013

УДК 535.37; 535.016; 538.9

Єщенко О.А.[1], д.ф.-м.н., доц.

Фотолюмінесценція наночастинок Cu: ефект гігантського підсилення поверхневими плазмонами

Досліджено спектри фотолюмінесценції (ФЛ) сферичних наночастинок Cu, зумовленої міжзонними випромінювальними переходами. Отримано, що інтенсивність ФЛ наночастинок міді різко зростає при зменшенні їх розмірів, досягаючи максимуму при $d \approx 10$ нм. Виявлено гігантське підсилення квантового виходу ФЛ наночастинок Cu порівняно з об'ємною міддю: $3{,}3 \cdot 10^5$ рази для наночастинок Cu розміром 5 нм. На базі теорії Бойда плазмонного підсилення локального поля показано, що гігантське підсилення ФЛ наночастинок Cu є результатом гігантського підсилення полів збуджуючих та випромінюваних фотонів сильним локальним полем поверхневих плазмонів, що збуджуються в наночастинках.

Ключові слова: наночастинки металу, поверхневі плазмони, фотолюмінесценція, підсилення локального поля.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет, 03680, м. Київ, пр-т Академіка Глушкова, 4а,
e-mail: yes@univ.kiev.ua

O. A. Yeshchenko*, Dr. Sci., Assoc. Prof.

Photoluminescence of Cu nanoparticles: effect of giant enhancement by surface plasmons

There were studied photoluminescence (PL) spectra of the spherical Cu nanoparticles caused by the interband radiative transitions. It was obtained that the copper nanoparticles PL intensity increases hugely with decrease of the particle size reaching maximum at $d \approx 10$ nm. The giant enhancement of PL quantum yield of the Cu nanoparticles was revealed comparing to one in the bulk copper: $3{,}3 \times 10^5$ times for Cu nanoparticles with 5 nm size. Basing on Boyd's theory of the plasmon enhancement of local field it was shown that the giant enhancement of Cu nanoparticles PL is caused by giant enhancement of the fields of exciting and emitted photons by the strong local field of surface plasmons excited in the nanoparticles.

Key words: metal nanoparticles, surface plasmons, photoluminescence, local field enhancement.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physics Faculty, 03680, Kyiv, Akademik Glushkov prosp., 4a,
e-mail: yes@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ. Особливості люмінесценції об'ємних та нанорозмірних металів

Як відомо, збудження поверхневих плазмонів (ПП) у наночастинках металів приводить до підсилення локального електричного поля поблизу поверхні цих наночастинок [1]. Існування поблизу наночастинки металу області з сильним локальним електричним полем використовується в спектроскопії поверхневого підсилення, а саме в таких її методах як поверхнево підсилене комбінаційне розсіяння світла (SERS), поверхнево підсилене інфрачервоне поглинання (SEIRA), поверхнево підсилена фотолюмінесценція (SEPL) [2] та ін. Ці методи базуються на ефекті суттєвого підсилення вимушених оптичних процесів в молекулах та кластерах, що знаходяться поблизу наночастинки металу. У той час як зазначені методи, якими досліджуються відмінні від самої наночастинки об'єкти, є добре розробленими як експериментально так і теоретично, явище люмінесценції наночастинок металів (зокрема благородних) досліджено надзвичайно слабо внаслідок дуже малої імовірності відповідних випромінювальних переходів у металах. Смуги ФЛ об'ємного срібла [3], золота та міді [4] експериментально спостерігалися поблизу краю міжзонного поглинання в цих металах та були інтерпретовані як результат прямої міжзонної випромінювальної рекомбінації електронів *sp*-зони провідності з дірками у валентній *d*-зоні в станах з квазіімпульсом, меншим ніж імпульс Фермі. Експерименти з визначення квантового виходу ФЛ об'ємних благородних металів дають

© О.А. Єщенко, 2013

дуже малі величини порядку 10^{-10}. Спостереження ФЛ наночастинок міді доповідалося, наприклад, у роботі [5]. При цьому максимум смуги ФЛ спостерігався поблизу краю міжзонного поглинання, а тому ФЛ, що спостерігалася, була інтерпретована як результат міжзонних випромінювальних переходів. Спостереження ФЛ нанорозмірних металів доповідалося тільки для сферичних наночастинок менших ніж 20 нм діаметром та від наноциліндрів з великим відношенням довжини до діаметру, що вказує на сильну залежність ефективності ФЛ від розміру та форми наночастинок.

Сильне електричне поле біля поверхні наночастинки металу, зумовлене збудженням у ній ПП, підсилює КРС та люмінесценцію молекул або кластерів, що знаходяться біля металевої наночастинки або шорсткої металевої поверхні з нанорозмірним рельєфом. Це означає, що сильне локальне поле має також підсилювати (збільшувати квантовий вихід) ФЛ самої металевої наночастинки. Теорія локального підсиленого електричного поля була створена Бойдом та ін. в [6] та Кособукіним в [7] для опису генерації 2-ї гармоніки шорсткою металевою поверхнею та КРС молекулами поблизу цієї поверхні. Пізніше Бойдом та ін. [8] було створено теорію підсилення власної ФЛ металевих наночастинок локальним полем поверхневих плазмонів в цих наночастинках.

У даній роботі представлено результати експериментальних досліджень спектрів ФЛ наночастинок міді в кварцевій матриці, підсиленої локальним полем ПП в цих наночастинках. На базі теорії локального підсиленого поля [8] було виконано також теоретичні розрахунки спектрів ФЛ наночастинок *Cu*, які добре узгоджуються з експериментальними даними.

Фотолюмінесценція наночастинок *Cu*: експериментальні результати

Нами було досліджено спектри фотолюмінесценції нанокомпозитних стекол Cu/SiO_2, які, містять сферичні наночастинки міді з середніми розмірами в діапазоні 5 – 65 нм в залежності від зразка. Деякі з отриманих спектрів подано на рис. 1(б). Крім спектрів зразків Cu/SiO_2 нами були також досліджені спектри ФЛ невідпаленого (нелеговані ксерогелі) та відпаленого SiO_2. Відповідні спектри подано на рис. 1(а). З рис. 1(а) видно що ФЛ невідпаленого SiO_2 знаходиться у спектральному діапазоні 380 – 480 нм з максимумом на 430 нм.

Відповідна смуга позначена як М (М – матриця). Після відпалювання у спектрі ФЛ кварцевої матриці з'являються додаткові низькоенергетичні смуги, позначені як MA_1 та MA_2. Їх максимуми знаходяться на 600 і 670 нм. При зниженні температури з 293 до 77 К інтенсивності смуг MA_1 та MA_2 у спектрі відпаленого кварцу суттєво зменшуються, при цьому М-смуга стає домінуючою у спектрі. Така температурна поведінка свідчить про те, що смуги MA_1 і MA_2 зумовлені деякими центрами у кварцевій матриці, на яких можуть локалізуватися електронні збудження. Оскільки інтенсивність цих смуг суттєво зменшується при зниженні температури, можна зробити висновок, що свічення цих центрів відбувається внаслідок термічної активації електронних збуджень, локалізованих на цих центрах.

З рис. 1(б) видно, що у спектрах ФЛ композитних стекол Cu/SiO_2 крім смуг ФЛ матриці (М, MA_1 та MA_2) також присутня додаткова смуга, позначена як Cu. Як буде показано нижче, ця смуга є смугою випромінювання наночастинок міді. Максимум Cu-смуги знаходиться на 560,1 нм (2,213 еВ). Cu-смуга відчутно перекривається з MA_1-смугою випромінювання SiO_2-матриці. При зниженні температури до 77 К інтенсивності смуг ФЛ матриці MA_1 і MA_2 різко зменшуються, внаслідок чого Cu-смуга може бути надійно виділена з загального спектру ФЛ композиту. Це найкраще видно для спектрів зразків, що містять малі наночастинки *Cu*, наприклад для зразка А2, що містить наночастинки міді з середнім розміром 5 нм (див. рис. 1(б)). Cu-смуга не може бути пов'язана з випромінюванням наночастинок Cu_2O, які мають утворюватися в зразках при їх відпалюванні на повітрі, оскільки максимуми смуг ФЛ наночастинок Cu_2O знаходяться на 450 та 475 нм, що суттєво вище за енергією, ніж положення Cu-смуги (560,1 нм).

Як було сказано у вступі, вперше експериментально ФЛ об'ємних міді та золота спостерігалася Мурадіаном [4]. Було показано, що максимум смуги ФЛ цих металів знаходиться поблизу краю їхнього міжзонного поглинання. Апель та ін. [9] показали, що смуги ФЛ, що спостерігалися Мурадіаном, є результатом прямої міжзонної випромінювальної рекомбінації електронів *sp*-зони провідності з дірками валентної *d*-зони в станах з квазіімпульсом, меншим ніж імпульс Фермі. Максимум смуги ФЛ

об'ємної міді [4] знаходиться на 2,11 еВ, що близько до положення максимуму Cu-смуги (560 нм: 2,21 еВ), що спостерігається у спектрах ФЛ

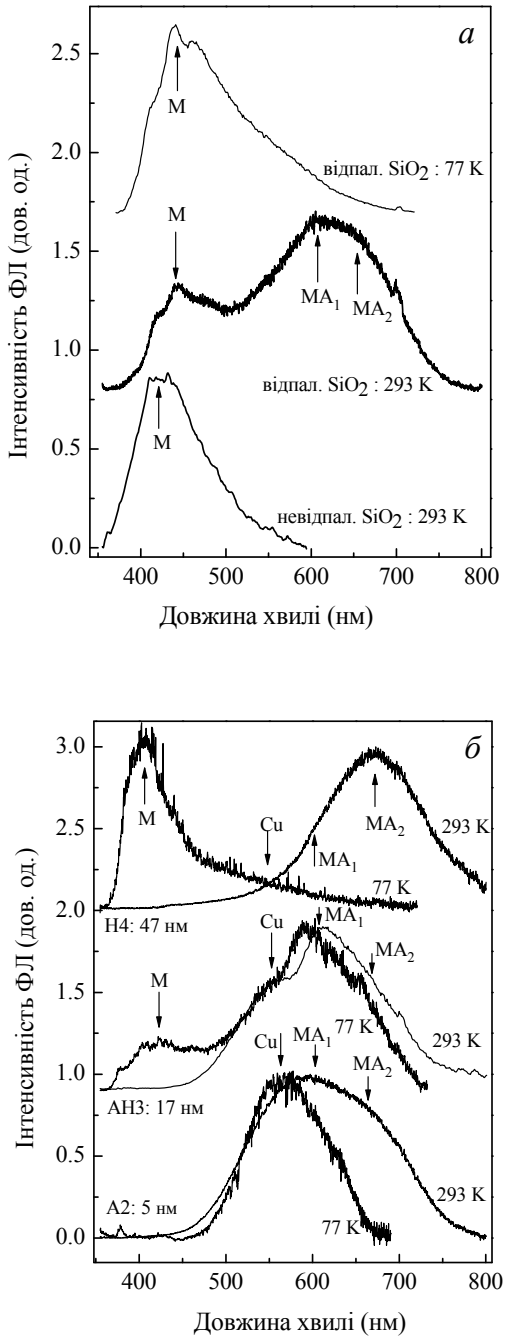


Рис. 1. Спектри ФЛ невідпаленого та відпаленого нелегованого SiO_2 (а) та стекол Cu/SiO_2, що містять наночастинки *Cu* різних середніх розмірів (б), записані при температурах 293 та 77 K. Cu – смуга ФЛ наночастинок *Cu*, M – смуга ФЛ невідпаленого SiO_2, $MA_{1,2}$ – додаткові смуги ФЛ, що з'являються при відпалюванні SiO_2.

досліджуваних зразків Cu/SiO_2 (див. рис. 1(б)). Близькість спектральних положень Cu-смуги та смуги ФЛ об'ємної міді, а також сильна розмірна залежність інтенсивності Cu-смуги (при зменшенні розміру наночастинок *Cu* її інтенсивність різко зростає), дозволяє інтерпретувати Cu-смугу як результат фотолюмінесценції наночастинок міді. Блакитний зсув на 0,1 еВ Cu-смуги відносно положення смуги ФЛ об'ємної міді буде обговорено нижче. Близькість максимуму Cu-смуги до краю міжзонного поглинання в міді дозволяє пов'язати її з міжзонними випромінювальними переходами з *sp*-станів зони провідності у *d*-стани валентної зони міді.

Як видно з рис. 1(б) при зменшенні розміру наночастинок міді спостерігається суттєве збільшення інтенсивності Cu-смуги, що відображає збільшення квантового виходу ФЛ наночастинок *Cu* при зменшенні розміру. Шляхом порівняння інтегральної інтенсивності Cu-смуги з інтенсивністю ФЛ кварцевої матриці, для якої квантовий вихід ФЛ є відомим ($2{,}4\cdot10^{-5}$), було визначено квантовий вихід ФЛ наночастинок *Cu* різних розмірів. Було отримано наступні значення квантового виходу: $3{,}3\cdot10^{-5}$ для наночастинок з середнім розміром 5 нм, $1{,}3\cdot10^{-5}$ – для 17 нм та $1{,}5\cdot10^{-6}$ – для 47 нм. Як було зауважено вище, збільшення ефективності ФЛ наночастинок металів при зменшенні розміру наночастинок є результатом підсилення полів збуджуючого та люмінесцентного фотонів локальним полем ПП. Для пояснення спостережуваного розмірно-залежного підсилення ФЛ наночастинок *Cu* нами було використано теорію Бойда, проаналізовану у наступному розділі.

Теорія впливу плазмонного підсилення локального поля на фотолюмінесценцію наночастинок металів

Теорія локального підсиленого поверхневими плазмонами електричного поля поблизу шорстких металевих поверхонь, розроблена Бойдом та ін. [6], дозволяє успішно описати їх лінійні та нелінійні оптичні властивості. Бойдом та ін. була також створена теорія плазмонного підсилення локального поля системою невзаємодіючих металевих напівеліпсоїдів, в якій було показано, що інтенсивність ФЛ має залежати від відношення півосей цих еліпсоїдів [8]. У відомій теорії локального підсиленого плазмонами поля, запропонованій Кособукіним [7], розмірна залежність фактора підсилення поля отримується

шляхом врахування ефектів радіаційного загасання (для великих частинок) та загасання Ландау (для малих). Зауважимо, що ефект загасання Ландау є суттєвим для наночастинок, менших ніж приблизно 1–3 нм, що неактуально для досліджених нами наночастинок, розміри яких є більшими ніж 5 нм. Крім того, що більш важливо, теорія Кособукіна не враховує ефекту поверхневого загасання плазмонів, який суттєво впливає на частоту та сталу загасання ПП-резонансу в наночастинках міді в досліджуваному діапазоні розмірів. У той же час, теорія Бойда та ін. [6,8] враховує як радіаційне, так і поверхневе загасання поверхневих плазмонів, тобто ефекти, які є визначальними для розмірних залежностей частоти та сталої загасання ПП-резонансу в наночастинках *Cu* досліджених розмірів. Виходячи з цих міркувань, далі ми використовуємо теорію Бойда та ін. для кількісного та якісного обгрунтування припущення про плазмонну природу ефекту гігантського підсилення ФЛ наночастинок *Cu*, що спостерігається в наших експериментах. Авторами [6,8] було показано, що підсилення ФЛ металевих наночастинок має місце внаслідок підсилення полів збуджуючого (лазерного) та випроміненого (люмінесцентного) фотонів полем ПП, що відбувається внаслідок взаємодії фотонів з ПП-резонансом.

Відповідно до цієї теорії локальне електричне поле всередині наночастинки є підсиленим по відношенню до поля далеко від частинки на множник, що називається поправочним фактором локального поля

$$L_{in}(\omega)=\frac{D^{-1}}{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_m}-1+D^{-1}\left[1+i\frac{4\pi^2V\left(1-\varepsilon(\omega)\right)\varepsilon_m^{1/2}}{3\lambda^3}\right]}, \quad (1)$$

де D – фактор форми або геометричний фактор ($D=1/3$ для сферичної частинки), $\varepsilon(\omega)$ – частотно залежна комплексна діелектрична проникність металевої наночастинки, λ – довжина хвилі світла.

Інтенсивність $P(\omega_l)$ однофотонної фотолюмінесценції металевої наночастинки на частоті ω_l, що збуджується фотоном з частотою ω_{exc} визначається [8] як

$$P(\omega_l)=2^4\beta(\omega_l)\left|E_0\right|^2V\left|L_{in}^2(\omega_{exc})L_{in}^2(\omega_l)\right|, \quad (2)$$

де E_0 – напруженість електричного поля збуджуючого світла, $\beta(\omega_l)$ – спектр ФЛ об'ємного металу, V – об'єм наночастинки. Таким чином, спектр ФЛ наночастинок металу визначатиметься з одного боку спектром об'ємного металу, а з іншого боку – спектральними залежностями факторів підсилення локального поля збуджуючого $L_{in}(\omega_{exc})$ та випроміненого $L_{in}(\omega_l)$ фотонів.

Діелектрична проникність наночастинок металу розраховується за формулою

$$\varepsilon(\omega,r)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)\left[1+A\frac{l_\infty}{r}\right], \quad (3)$$

в якій дійсна частина є розмірно-незалежною (бралася рівною відповідній величині для об'ємної міді), а уявна частина є розмірно-залежною з урахуванням ефекту збільшення сталої загасання ПП внаслідок розсіяння електронів на поверхні наночастинки. Тут r – радіус наночастинки; A – константа, що визначається особливостями поверхневого розсіяння електронів; $l_\infty=\mathrm{v}_F\tau_\infty$ – довжина вільного пробігу електронів, v_F – швидкість Фермі та τ_∞ – час релаксації плазмових коливань в об'ємному металі при $T=293$ K.

Теорія підсилення ФЛ локальним полем ПП [8] дозволяє розрахувати коефіцієнт підсилення інтенсивності ФЛ від наночастинки металу порівняно з інтенсивністю ФЛ від гладкої плоскої поверхні об'ємного металу. Відповідно до цієї теорії спектральна залежність інтенсивності однофотонної ФЛ об'ємного металу визначається виразом

$$P_b(\omega_l)=\beta(\omega_l)\left|E_0\right|^2Sz_0(\omega_{exc},\omega_l)\left|L_b^2(\omega_{exc})L_b^2(\omega_l)\right|, \quad (4)$$

де $z_0(\omega_{exc},\omega_l)=\left[\alpha(\omega_{exc})+\alpha(\omega_l)\right]^{-1}$ – ефективна глибина поглинання, $\alpha(\omega)$ – коефіцієнт поглинання фотона з частотою ω, S – площа плями збудження на поверхні металу, $L_b(\omega_{exc})$ і $L_b(\omega_l)$ – коефіцієнти Френеля для плоскої поверхні об'ємного металу для збуджуючого та випроміненого фотонів відповідно. Для кількісного порівняння квантового виходу ФЛ наночастинки та об'ємного металу як S ми взяли площу поперечного перерізу наночастинки ($S=\pi d^2/4$). Отже, виходячи зі співвідношень (2) і (4) вираз для коефіцієнту підсилення η є наступним:

$$\eta=\frac{P}{P_b}=2^4\frac{2d}{3z_0}\frac{\left|L_{in}^2(\omega_{exc})L_{in}^2(\omega_l)\right|}{\left|L_b^2(\omega_{exc})L_b^2(\omega_l)\right|}. \quad (5)$$

Розрахунки впливу плазмонного підсилення локального поля на фотолюмінесценцію наночастинок *Cu*

Спектри ФЛ наночастинок міді різних розмірів було розраховано за формулами (1), (2) та (3), де спектральну залежність $\varepsilon(\omega)$ об'ємної міді було взято з роботи [10]. Середня довжина вільного пробігу вільних електронів в міді $l_\infty = 11$ нм. Значення параметру A зі співвідношення (3) було взято рівним 0,107 з результатів апроксимації експериментальної залежності півширини смуги ПП в наночастинках міді функцією $\gamma(r) = \gamma_\infty + A\,\mathrm{v}_F/r$. Спектри було розраховано для довжини хвилі збудження λ = 351,1 нм. Рис. 2 демонструє теоретично розраховані спектри ФЛ наночастинок міді різних розмірів. Видно, що аналогічно експериментальному спектру ФЛ наночастинок міді теоретично розрахований спектр являє собою одну асиметричну смугу. Ця асиметрія є результатом неспівпадіння частоти ПП-резонансу та спектрального положення максимуму смуги міжзонної ФЛ наночастинок міді. Оскільки коефіцієнт підсилення ФЛ сильно залежить від частоти, маючи максимум на резонансній частоті ПП, різні спектральні ділянки смуги міжзонної ФЛ будуть підсилюватися по різному, що, очевидно, має приводити до її асиметрії.

Розрахунки свідчать, що максимальна інтенсивність ФЛ має спостерігатися для наночастинок *Cu* розміром 15 нм. При збільшенні розміру інтенсивність ФЛ зменшується, що відображає збільшення сталої загасання ПП внаслідок збільшення їх радіаційного загасання. У свою чергу зменшення розміру також приводить до зменшення інтенсивності ФЛ внаслідок зростання сталої загасання внаслідок посилення поверхневого розсіяння вільних електронів. З рис. 2 видно, що положення максимуму смуги ФЛ наночастинок міді характеризується немонотонною розмірною залежністю, а саме – при збільшенні розміру від 3 до 90 нм максимум смуги спочатку зміщується в блакитний бік, досягає найбільш високочастотного положення при $d = 15$ нм, а далі зміщується в червоний бік, повертаючись при $d = 90$ нм до свого початкового положення при $d = 3$ нм. ПП-резонанс в наночастинках міді в SiO_2-матриці та максимум смуги ФЛ об'ємної міді дуже слабко спектрально рознесені: ПП-резонанс зміщений на $\approx$ 10 нм в блакитний бік. Тому немонотонний зсув смуги ФЛ наночастинок міді є результатом немонотонної розмірної залежності коефіцієнта підсилення локального електричного поля поверхневими плазмонами. При збільшенні коефіцієнта підсилення більше підсилюється поле фотонів ФЛ з частотами, ближчими до частоти ПП-резонансу, що приводить до зміщення максимуму смуги ФЛ в бік ПП-резонансу, тобто до блакитного зсуву. При зменшенні підсилення максимум смуги повертається до свого „об'ємного" значення. Таким чином, можна зробити висновок, що зміщення смуги ФЛ наночастинок міді в бік ПП-резонансу має місце внаслідок відмінності величини підсилення для різних ділянок смуги ФЛ, що знаходяться на різній спектральній відстані від ПП-резонансу. Саме таке зміщення смуги ФЛ наночастинок *Cu* на 0,1 еВ в бік вищих енергій (в бік ПП-резонансу) відносно смуги ФЛ об'ємної міді і спостерігається в наших експериментах.

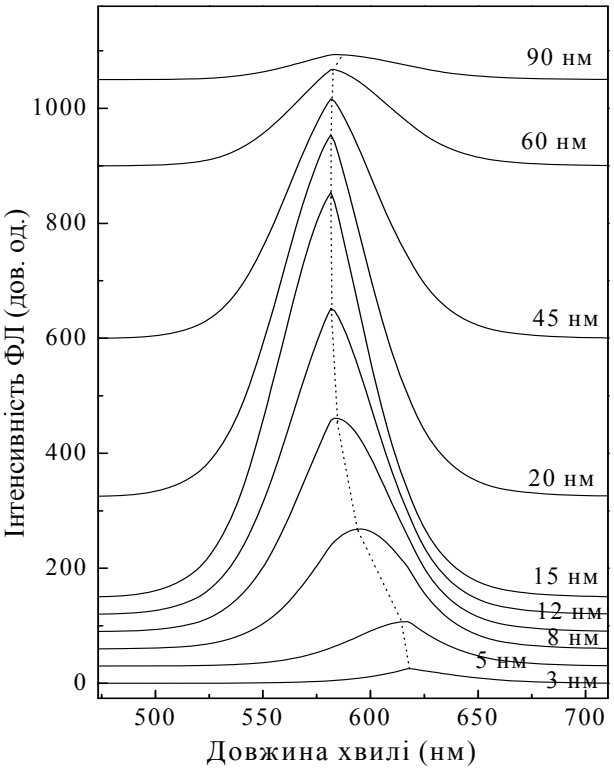


Рис. 2. Розраховані спектри ФЛ наночастинок міді різних розмірів.

За виразом (5) нами було розраховано розмірну залежність коефіцієнта підсилення ФЛ для наночастинок міді відносно об'ємної міді (рис. 3). Розрахунки було виконано для довжини хвилі збудження λ_{exc} = 351,1 нм та випадку нормального падіння збуджуючого світлового

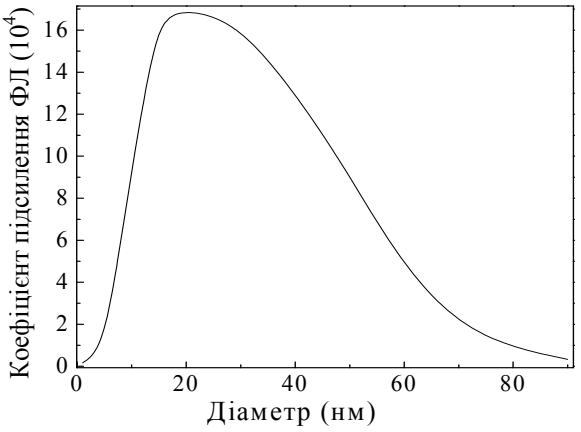


Рис. 3. Розрахована розмірна залежність коефіцієнта підсилення ФЛ наночастинок *Cu*.

пучка на поверхню об'ємного металу ($\theta_0 = 0^0$), спектральну залежність $\varepsilon(\omega)$ для об'ємної міді було взято з роботи [10]. Значення параметру A було взято рівним 0,107 з результатів апроксимації експериментальної залежності півширини смуги ПП функцією $\gamma(r) = \gamma_\infty + A\,\mathrm{v}_F / r$. Звертає на себе увагу, що експеримент дає максимум підсилення ФЛ для розмірів (≤ 10 нм) наночастинок міді менших, ніж теорія (20 нм): див. рис. 3. Таке неспівпадіння розміру максимального підсилення є, імовірно, результатом не зовсім правильного вибору при розрахунках значення параметру *A*, що визначається особливостями розсіяння вільних електронів на границі розділу частинка-матриця.

З рис. 3 видно, що максимальний коефіцієнт підсилення ФЛ ($1{,}7 \cdot 10^5$) має спостерігатися для наночастинок *Cu* розміром близько 20 нм. Теоретично розраховане значення коефіцієнта підсилення добре узгоджується з експериментальними значеннями: $3{,}3 \cdot 10^{-5}$ / 10^{-10} = $3{,}3 \cdot 10^5$ – для наночастинок розміром 5 нм, $1{,}3 \cdot 10^{-5}$ / 10^{-10} = $1{,}3 \cdot 10^5$ – для 17 нм та $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ / 10^{-10} = $1{,}5 \cdot 10^4$ – для 47 нм. Таке хороше узгодження підтверджує висновок про те, що підсилення ФЛ є результатом підсилення полів збуджуючих та випромінених фотонів локальним полем ПП.

Автор висловлює подяку к.т.н Алексеєнку О.А. за надані зразки нанокомпозитів Cu/SiO_2, к.ф.м.н. Дмитруку А.М. за виконану ним електронну мікроскопію досліджуваних зразків та д.ф.м.н. Дмитруку І.М. за цікаві та плідні обговорення результатів досліджень, що лягли в основу цієї роботи.

Список використаних джерел

1. *Venger Ye. F.* Optics of small particles and dispersive media / Ye. F. Venger, A. V. Goncharenko, M. L. Dmitruk // Kyiv. – Naukova dumka. – 1999. – 347 p. (in Ukrainian).
2. *Schatz G.* Electromagnetic mechanism of SERS / G. Schatz, M. Young, R. Van Duyne // Topics in applied physics. – 2006. – Vol. 103. – P. 19–46.
3. *Knoll W.* Emission of light from Ag metal gratings coated with dye monolayer assemblies / W. Knoll, M. R. Philpott, J. D. Swalen [et al.] // Journal of Chemical Physics. – 1981. – Vol. 75. – P. 4795–4799.
4. *Mooradian A.* Photoluminescence of metals / A. Mooradian // Physical Review Letters. – 1969. – Vol. 22. – P. 185–187.
5. *Darugar Q.* Size-dependent ultrafast electronic energy relaxation and enhanced fluorescence of copper nanoparticles / Q. Darugar, W. Qian, M. A. El–Sayed [et al.] // Journal of Physical Chemistry B. – 2006. – Vol. 110. – P. 143–149.
6. *Boyd G. T.* Local–field enhancement on rough surfaces of metals, semimetals, and semiconductors with the use of optical second–harmonic generation / G. T. Boyd, T. Rasing, J. R. R. Leite [et al.] // Physical Review B. – 1984. – Vol. 30. – P. 519–526.
7. *Kosobukin V. A.* Size dependence of light–field enhancement caused by surface plasmon excitation / V. A. Kosobukin // Physics Letters A. – 1991. – Vol. 160. – P. 584–588.
8. *Boyd G. T.* Photoinduced luminescence from the noble metals and its enhancement on roughened surfaces / G. T. Boyd, Z. H. Yu, Y. R. Shen // Physical Review B. – 1986. – Vol. 33. – P. 7923–7936.
9. *Apell P.* Photoluminescence of noble metals / P. Apell, R. Monreal, S. Lundqvist // Physica Scripta. – 1988. – Vol. 38. – P. 174–179.
10. *Johnson P. B.* Optical constants of the noble metals / P. B. Johnson, R. W. Christy // Physical Review B. – 1972. – Vol. 6. – P. 4370–4379.

Надійшла до редколегії 25.01.2013

УДК: 538.9

Коробко[1] О.В., аспірант.

Вплив молекулярної будови спиртів на швидкість випаровування під дією опромінення

Проведено дослідження з випаровування крапель спиртів різної молекулярної будови для тиску 100 мм рт. ст. при опроміненні крапель спиртів ультрафіолетовим випромінюванням довжиною хвилі 390 нм. На основі отриманих експериментальних результатів розраховані значення швидкості випаровування та температури краплин для заданих умов експерименту. Одержані експериментальні дані проаналізовані за допомогою формули Максвела з поправками, що дозволило розрахувати коефіцієнти конденсації.

Ключові слова: випаровування, опромінення, спирти.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: oksana2208@i.ua

Korobko[1] O.V., PhD student.

Effect of molecular structure into the rate of alcohols' evaporation under the influence of irradiation

The experimental data according liquid alcohols' droplets evaporation of different molecular structure were considered for the pressure value of 100 mm Hg and under the influence of ultraviolet irradiation (λ=390 nm). Based on the experimental results evaporation speed's and temperature's values were calculated. The experimental results were analyzed using Maxwell's formula, with corresponding corrections, which allowed to calculate the condensation coefficients.

Key Words: evaporation, irradiation, alcohols

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: oksana2208@i.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Однією з актуальних задач сьогодення є вивчення впливу опромінення на поведінку конденсованих середовищ, зокрема, дослідження зміни параметрів процесів випаровування під дією опромінення, оскільки, процес випаровування з розчину є основою виготовлення медичних препаратів, ліків та сухих продуктів харчування.

Даній проблемі присвячено велику кількість як теоретичних, так і експериментальних робіт, зокрема, виявлено зміни характеристик деяких органічних речовин бензольного ряду під час випаровування при опроміненні [1]. Але механізм впливу опромінення на процеси, що відбуваються в рідинах та рідинних системах, не є до кінця з'ясованим. Важливим напрямком тут є дослідження процесів випаровування інших речовин за різних термодинамічних умов.

В роботі вивчається поведінка спиртів, котрі утворюють гомологічний ряд, відрізняючись на деяку постійну величину, а саме, групу CH_2. Так як із-за подібності структури вплив опромінення може носити однаковий характер, а відмінності в поведінці можуть бути інтерпретованими додаванням CH_2 групи, спирти були вибрані об'єктом запропонованих досліджень. Крім того, варто відмітити, що області використання спиртів численні й різноманітні. Найбільш перспективними напрямками використання спиртів є: застосування в якості палива, виробництво розчинників, виробництво синтетичних миючих засобів, парфумерії та косметики, використання в харчовій і фармацевтичній промисловості, спирти виступають проміжними продуктами для основного органічного синтезу тощо[2].

Метою даної роботи є дослідження впливу ультрафіолетового опромінення на швидкість випаровування крапель спиртів бутанолу, пентанолу та нонанолу за тискову 100 мм рт. ст. в атмосфері азоту.

Дані дослідження проводяться за допомогою експериментальної установки, схему якої та методику виконання експерименту детально наведено в роботі [3].

© О.В.Коробко, 2013

Теоретичний опис процесу випаровування краплі. Поправки до формули Максвела

Перша модель для опису випаровування краплин рідинних систем була запропонована Максвелом [4]. Ним було отримано вираз:

$$I_0 = -\frac{dm}{dt} = 4\pi r D(C_0 - C_\infty), \qquad (1)$$

де r – радіус краплі. Тут швидкість випаровування визначається швидкістю дифузії пари в оточуючому середовищі. Залежність (1) може бути предаставлена в іншому вигляді:

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{8\pi D\ C_0 - C_\infty}{\rho} \qquad (2)$$

де D – коефіцієнт дифузії пари в газовому середовищі для заданих значень температури і тиску, C_0 – концентрація насиченої пари, що відповідає температурі поверхні краплі T_0, C_∞ – концентрація пари на нескінченній відстані від краплі, ρ – густина рідини, $\frac{dS}{dt}$ – зміна площі краплі з часом.

Однак вирази (1-2) застосовні лише для тисків близьких до атмосферного, крім того, варто зазначити, що наведені формули не можуть в повній мірі описати процеси випаровування в реальних умовах, оскільки при отриманні вищезгаданих виразів було зроблено ряд спрощень (відсутність конвекції, сферичність поля концентрації тощо). Тому Фуксом булла запропонована модель випаровування, котра враховує поправки формули Максвела [4]

Використання теорії випаровування Фукса дає змогу ефективно описати випаровування за тиску значно меншого за атмосферний:

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{8\pi D\ C_0 - C_\infty}{\rho\left(1 + \frac{D}{ru\alpha}\right)} \qquad (3)$$

де $u = v/4$ – четверта частина середньої теплової швидкості молекул пари $v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

Зокрема, використання виразу (3), отриманого Фуксом, при аналізі експериментальних даних дає можливість розрахунку коефіцієнта конденсації рідини, що випаровується. Варто зазначити також необхідність використання при аналізі експериментальних результатів поправки на стефановський потік St [4]:

$$\mathrm{St} = \left(1 + \frac{p_0 + p_\infty}{2p}\right). \qquad (4)$$

де P – повний тиск середовища, P_0 – тиск на поверхні краплі,що випаровується, P_∞ – тиск за умови r ® Г (рис.1).

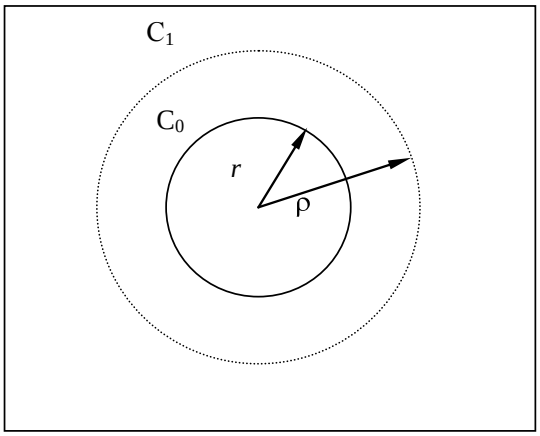


Рис. 1. Схематичне зображення краплі. r- радіус краплі рідини; C_0 – концентрація насиченої пари, що відповідає температурі поверхні краплі T_0; C_1 – концентрація пари на відстані Δ від поверхні краплі.

Зокрема, Стефаном було вказано на існування гідродинамічного потоку фонового газу поблизу поверхні краплі, що випаровується. Вказаний потік направлений від поверхні краплі, та компенсує дифузію газу. Варто відмітити, що поправка на стефанівський потік стає суттєвою лише за низьких тисків (при p=750 мм рт. ст *St* = 1,009; при p=65 мм рт. ст. *St*=1,108; при p=10 мм рт. ст. *St* = 1,704) [4-5].

Крім того, важливим фактором при обробці отриманих експериментальних данних є врахування поправки на вільну конвекцію – випадок, коли з'являються додаткові потоки теплоти або речовини

Вплив вільної конвекції, викликаної охолодженням крапель під час їх випаровування, визначається числом Шервуда Sh [4]:

$$\mathrm{Sh} = 2 + 0.6\mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}}\mathrm{Gr}^{\frac{1}{4}} \qquad (5)$$

де, $\mathrm{Sc} = \frac{v}{D}$ – критерій Шмідта для дифузійного процесу, який визначається відношенням кінематичної в'язкості v до коефіцієнту дифузії D, $\mathrm{Gr} = \frac{8gr^3}{v^2}\frac{\Delta T}{T}$ – критерій Грасгофа, в формулі якого g - прискорення вільного падіння, та ΔT –

різниця температур, що викликає процес конвекції

Експериментальна частина

Виміри проводились в герметичній камері з термостатом, всередині якої на підвіс підвішувалась крапля одного з досліджуваних спиртів, при заданих значеннях тиску, температури оточуючого газу (азоту) в камері та опромінення (рис.2). Крапля в процесі випаровування фотографувалась за допомогою установленої web-камери через рівні проміжки часу разом з масштабною лінійкою. Знімки автоматично реєструються на комп'ютері. За фотографіями методом графічного інтегрування визначалась площа поверхні краплі в кожний момент часу, а далі і швидкість зміни поверхні краплі dS/dt [5].

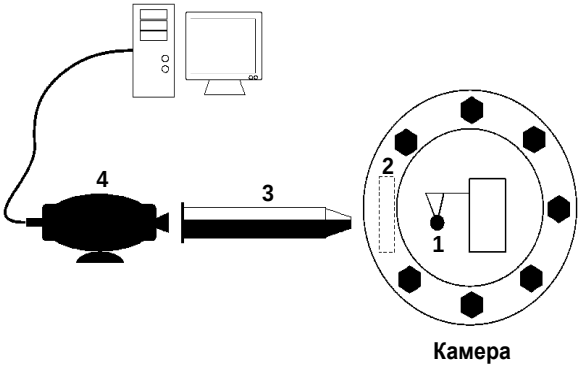


Рис. 2. Схема експериментальної установки для вимірювання швидкості випаровування крапель рідин.

1-краплина досліджуваної рідини
2-герметичан камера
3-оптична система
4-web-камера

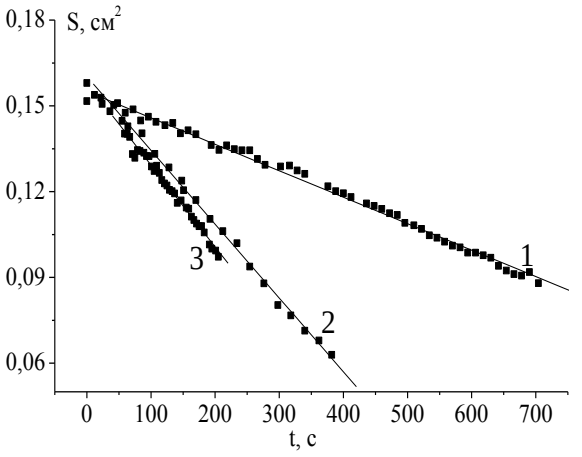


Рис. 3. Залежність зміни площі краплі досліджуваних спиртів від часу під дією опромінення при тискові 100 мм.рт.ст. Крива 1 – пентаном, 2 – бутанол, 3 – нонанол

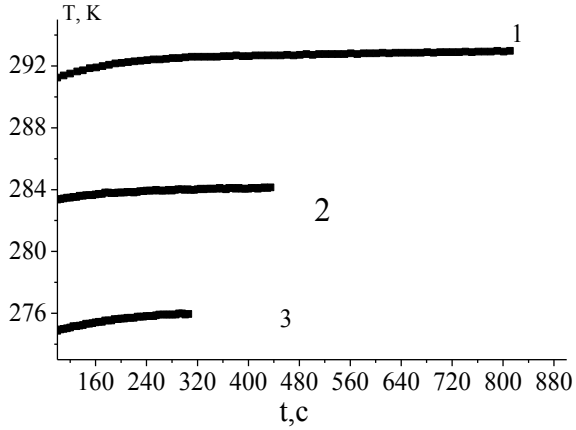


Рис. 4. Залежність температури краплі спиртів під час впаровування при заданій температурі фонового газу 293К (1 – пентанол, 2 – бутанол, 3 – нонанол)

На основі досліджень, представлених в роботі [1], для вивчення впливу опромінення на процес випаровування спиртів було обрано значення тиску 100 мм.рт.ст. та проведено дослідження саме при опроміненні ультрафіолетовим випромінюванням довжиною хвилі 390 нм.

Аналіз отриманих результатів.

На рис.3–4 представлені відповідно залежності зміні площі крапель та їх температури для наступних спиртів: бутанолу, пентанову та нонанолу, під дією опромінення довжиною хвилі 390 нм. Аналіз наведених графіків вказує на суттєву відмінність швидкості випаровування досліджуваних спиртів.

З представлених рисунків очевидно, що при заданому тискові 100 мм.рт.ст., заданій температурі оточуючого середовища 293 К та під дією опромінення довжиною хвилі 390 нм, найбільшу швидкість випаровування краплини має нонанол, а найменшу – пентанол. Значення швидкостей випаровування досліджуваних спиртів наведено в таблиці 1.

Таблиця1

Швидкість випаровування досліджуваних спиртів.

Спирт	Бутанол	Пентанол	Нонанол
$dS / dt * 10^5$, $см^2/с$	22,6	7,62	29

Також були розраховані значення коефіцієнтів конденсації в режимі без за

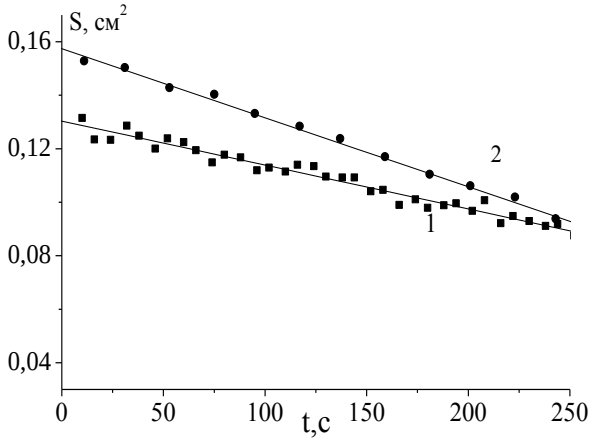


Рис. 5. Залежність зміни площі краплі бутанолу від часу при тискові 100 мм.рт.ст.. під дією опромінення та без нього. Крива 1 – випаровування в темновому режимі, 2 – випаровування з опроміненням.

наявності ультрафіолетового опромінення для бутанолу та пентанову й складають, відповідно: α= 0,0017 та α= 0,002.

Крім того, для бутанолу були проведені експериментальні дослідження з випаровування під дією опромінення з вказаною довжиною хвилі та в темновому режимі, тобто за відсутності опромінення. Отримані залежності представлені на рис.5. Аналіз останніх вказує на підвищення швидкості випаровування краплин бутанолу під дією опромінення в порівнянні зі швидкістю випаровування без нього. Зміна швидкості випаровування в зазначеному досліді складає 22%.

Висновки та результати

На основі отриманих експериментальних данних порівняно швидкості випаровування підвішених крапель досліджуваних спиртів бутанолу, пентанову та нонанолу під впливом малопотужного (0,1 Вт) ультрафіолетового опромінення в атмосфері сухого азоту при тискові 100 мм рт. ст. За заданих значеннях тиску, температури та опромінення найбільшу швидкість випаровування краплини має нонанол, а найменшу – пентанол.

Важливо відзначити,що для бутанолу спостерігається підвищення швидкості випаровування (22%) під дією опромінення довжиною хвилі 390 нм в порівнянні з випаровуванням без опромінення.

Список використаних джерел

1. The liquid droplets evaporation for low pressure's values under low-power irradiation with different frequenciesat the optical range / *A.V. Brytan, G.M.Verbinska, V.M. Sysoev* [et al] // Ukrainian Journal of Physics. – 2011. – **V**. 56, N 4. – P.456-461.
2. Alcohols: Advances in Research and Application [online resource] : Edition Q. Ashton Acton PhD General Editor: A ScholarlyEditions™ eBook 2011 access mode: google.com.ua/books?id=Qc4kEEEqkJ8C&printsec=frontcover&hl=uk&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f, 7.02.2013
3. Water and nitrobenzene droplets evaporation under ultraviolet irradiation / G.M.Verbinska, A.V. Brytan, V.L. Karbovskiy, T.V. Cleshchonok // Physics of aerodisperse systems. – 2010. – N 47.– P.49-58. (in Ukrainian)
4. *N.A. Fuks*, Evaporation and Growth of Droplets in a Gaseous Medium/ Fuks N.A. – M.:USSR Acad.Sci.Publ. House, Moscow, 1954. (in Russian)
5. *Bulavin L.A.* Kinetics of Liquid Droplet Evaporation in a Vapor-Gas Medium / L.A. Bulavin, G.M. Verbinska , V.M. Nuzhnyi. – Kyiv: Univ., Kyiv, 2003. (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 12.02.2013

УДК 538.95

Курилюк В.В.[1], к.ф.-м.н.

Вплив ступеня неоднорідності на пружно-напружений стан самоорганізованих SiGe квантових точок

Методом скінченних елементів проведено розрахунки пружних полів в неоднорідних SiGe самоорганізованих квантових точках. Виявлено відмінності цих полів у порівнянні з нанооствівцями постійного складу. Результати розрахунків засвідчують, що величина деформацій в квантових точках зменшується із ростом ступеня їх неоднорідності.

Ключові слова: гетероструктура, квантова точка, пружна деформація, неоднорідність.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: kuryluk@univ.kiev.ua

V.V. Kuryliuk[1], Ph.D.

Influence of the degree of inhomogeneity on the elastic-stress state of the self-assembled SiGe quantum dots

Finite - element calculations are used to study strain fields in inhomogeneous SiGe self - assembled quantum dots. Such strain fields are found to be quite different from those of homogeneous nanoislands. Numerical results show that the elastic strain in quantum dots decreases with increasing of the degree of inhomogeneity.

Key words: heterostructure, quantum dot, elastic strain, inhomogeneity.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: kuryluk@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Вступ

В даний час гетероструктури Si/SiGe з самоорганізованими квантовими точками (нанооствівцями) розглядаються як перспективні матеріали для створення високоефективних фотоелектричних перетворювачів [1]. Зацікавленість в зазначених структурах підсилюється також можливістю суміщення процесу їх вирощування з уже існуючою кремнієвою технологією виготовлення приладів та схем.

Рушійною силою процесу самоорганізації нанооствівців SiGe на кремнієвих підкладках та основним фактором, що визначає морфологію і фізичні властивості Si/SiGe гетероструктур з квантовими точками є пружні деформації та супутні поля механічних напружень [2]. Виникнення пружних деформацій в гетероструктурах з самоорганізованими квантовими точками пов'язане з невідповідністю сталих кристалічної решітки матеріалів підкладки та острівців.

Оскільки величина і знак пружних полів всередині гетероструктур можуть змінюватись на відстанях декілька нанометрів [3], то їх експериментальні дослідження спряжені з певними труднощами і дозволяють оцінити лише усереднені значення деформацій в нанооствівцях та їх околі [4]. Враховуючи вищезазначене, велика увага в сучасній літературі приділяється теоретичним дослідженням напружених гетероструктур з самоорганізованими квантовими точками за допомогою сучасних методів комп'ютерного моделювання. Серед найпоширеніших - методи функцій Гріна [5], молекулярної динаміки [6] та скінченних елементів [7].

Моделювання напружених гетероструктур з квантовими точками зазвичай виконується в припущенні про їх однорідний компонентний склад. Проте, численні експериментальні дані вказують на те, що в процесі епітаксії відбувається перемішування матеріалів підкладки та нанооствівців [8], в результаті чого в них спостерігаються неоднорідності. Ступінь неоднорідності квантових точок визначається в основному умовами епітаксії, зокрема, температурою.

В даній роботі в рамках моделі пружного континууму проведено розрахунки полів пружних деформацій для Si/SiGe гетероструктур з квантовими точками різного ступеня неоднорідності. Чисельні розрахунки виконано з використанням методу скінченних елементів. Проведено порівняння отриманих даних з результатами для острівців постійного компонентного складу.

© В.В. Курилюк, 2013

Методика розрахунку

Для моделювання впливу неоднорідності на пружно-напружений стан нанооствівців SiGe в роботі розглядалась одинична комірка (рис. 1), що містила кремнієву підкладку з поперечними розмірами $L_x \times L_x$ і товщиною L_z, на якій розміщена квантова точка $Si_{1-x}Ge_x$ (x – масова частка Ge в сполуці) в формі правильної піраміди. Довжина основи і висота піраміди відповідно дорівнюють a та h. Осі Ox, Oy, Oz співпадають з кристалографічними напрямками

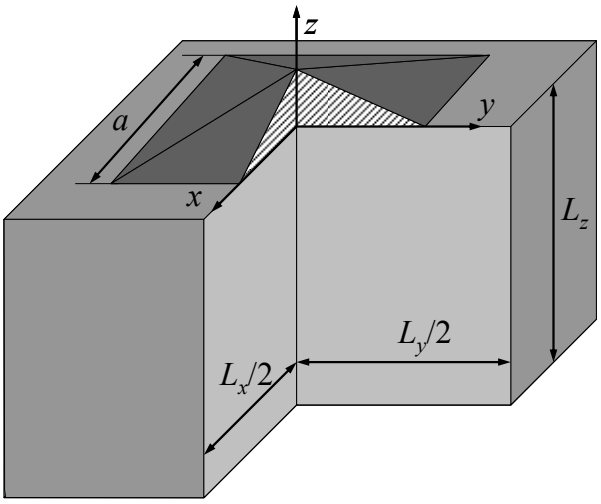


Рис. 1. Геометрія досліджуваної гетероструктури.

[100], [010] та [001], відповідно.

За допомогою методу скінченних елементів для досліджуваної структури розв'язувалась система рівнянь теорії пружності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0, \\ T_{ij} = C_{ijkl}\left[S_{kl} - S_{0kl}\right], \\ S_{kl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \end{cases} \qquad (1)$$

де T_{ij}, S_{kl}, C_{ijkl} – тензори механічних напружень, деформацій та пружних сталих, u_i – вектор пружних зміщень, а S_{0kl} – початкові деформації, зумовлені невідповідністю решіток. Для гетеропари Si / $Si_{1-x}Ge_x$ $S_{0kl} = -0.04 \cdot x \cdot \delta_{kl}$.

Реальні гетероструктури містять великі масиви нанооствівців, що характеризуються певною впорядкованістю і періодичністю. Для врахування періодичності в даній роботі використовувались відповідні граничні умови для одиничної комірки: на її протилежних x- та y-гранях фіксувались нормальні складові вектора пружних зміщень. Нижня грань підкладки вважалась «затиснутою», а на всіх вільних поверхнях підкладки і квантової точки припускалась відсутність механічних напружень.

Неоднорідність складу нанооствівців в роботі задавалась шляхом варіації вмісту германію x всередині них. Використовувався розподіл x, аналогічний до того, що був отриманий раніше в роботі [9]. Максимальне значення $x_{\max}$ поблизу вершини квантової точки вибиралось фіксованим $x_{\max}=1$, а мінімальне $x_{\min}$ поблизу вершин при основі острівців варіювалось в межах $0 < x_{\min} < 1$. Для характеристики неоднорідності нанооствівців в роботі введено ступінь неоднорідності Δx, що визначається наступним співвідношенням:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max}}. \qquad (2)$$

Результати та їх обговорення

На рис. 2 представлено розраховані залежності компоненти S_{xx} (S_{yy}) (деформації в площині гетеропереходу) від координати z, що співпадає з напрямком росту гетероструктури, при різних значеннях ступеня неоднорідності Δx. На цьому і подальших рисунках від'ємні значення z відповідають області кремнієвої підкладки, а додатні - $Si_{1-x}Ge_x$ квантової точки.

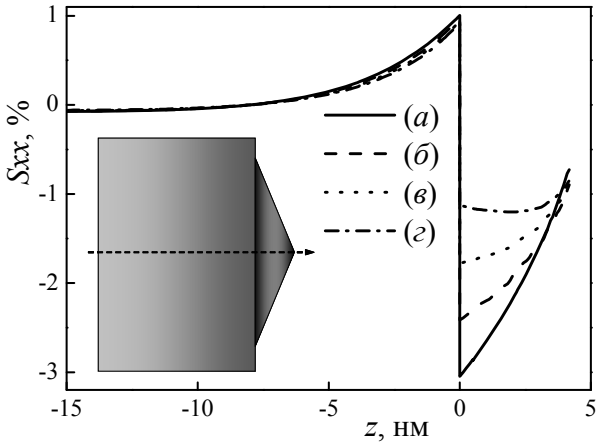


Рис. 2. Розподіли деформацій S_{xx} вздовж осі z (пунктирна лінія на вставці) при різних значеннях ступеня неоднорідності Δx квантових точок: (*а*) – 0; (*б*) – 0.3; (*в*) – 0.6; (*г*) – 0.9.

Видно, що нанооствівці зазнають деформації стиснення вздовж гетерограниці Si/ $Si_{1-x}Ge_x$, тоді як кремнієва підкладка виявляється розтягнутою в площині гетеропереходу. Максимальні деформації розтягу в підкладці не перевищують 1% і швидко загасають вглибину на відстанях порядку висоти нанооствівців.

Максимальні стискуючі деформації S_{xx} в квантових точках локалізовані поблизу їх основи і поступово зменшуються при переході до вершини. В однорідних нанооствівцях (Δx=0, лінія (*а*) на рис. 2) максимальні деформації стиснення дорівнюють $S_{xx(\max)} \approx 3\%$. Зростання ступеня неоднорідності зумовлює зменшення величини $S_{xx(\max)}$: для квантових точок з Δx=0.9 відповідні деформації зменшуються втричі і складають приблизно 1% (лінія (*г*) на рис. 2). Іншим проявом неоднорідностей компонентного складу нанооствівців є зменшення градієнту деформацій всередині квантової точки без суттєвих їх змін в кремнієвій підкладці. Крім того, характерною особливістю неоднорідних

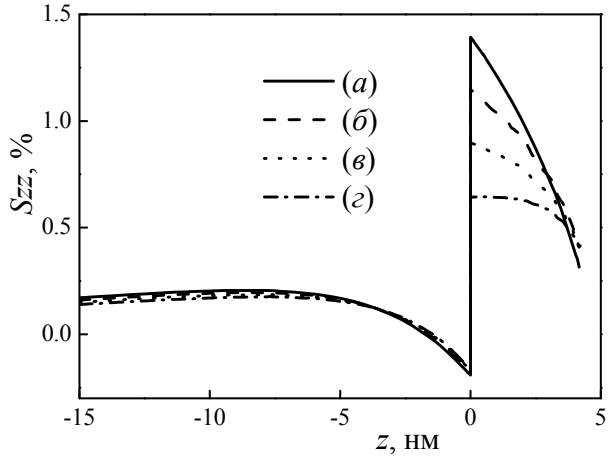


Рис. 3 Розподіли деформацій S_{zz} вздовж осі z при різних значеннях ступеня неоднорідності Δx квантових точок: (*а*) – 0; (*б*) – 0.3; (*в*) – 0.6; (*г*) – 0.9.

квантових точок є те, що при $z \geq h/3$ вони виявляються більш деформованими у порівнянні з однорідними нанооствівцями.

Внаслідок ефекту Пуассона деформації S_{zz} в напрямку росту гетероструктури мають протилежний знак: кремнієва підкладка виявляється стисненою вздовж осі Oz, а $Si_{1-x}Ge_x$ квантові точки характеризуються деформаціями розтягу (рис. 3). Максимум S_{zz} для однорідних острівців (лінія (*а*) на рис. 3) виявляється поблизу гетеропереходу (≈ 1.4%) з поступовим зменшенням при наближенні до вершини піраміди (≈ 0.3%).

Як і для компоненти S_{xx}, деформації S_{zz} всередині нанооствівців зменшуються при збільшенні ступеня їх неоднорідності. Для

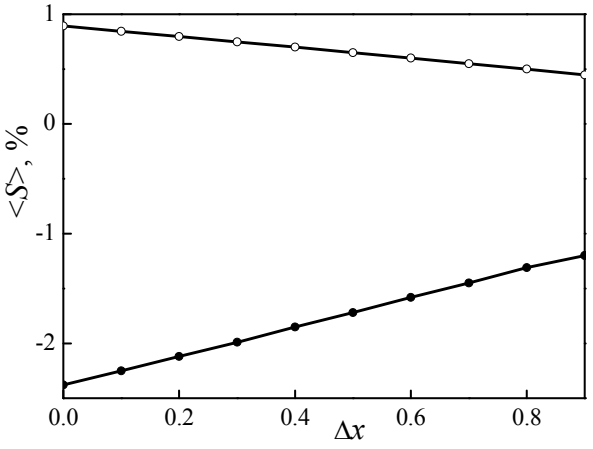


Рис. 4 Залежність усереднених по об'єму квантових точок деформацій $\langle S_{xx}\rangle$ ($\langle S_{yy}\rangle$) (темні точки) та $\langle S_{zz}\rangle$ (світлі точки) від ступеня неоднорідності Δx.

суттєво неоднорідних квантових точок (Δx=0.9) максимальні деформації розтягу в острівцях не перевищують 0.6% (лінія (*г*) на рис. 3) Верхня третина неоднорідної квантової точки характеризується незначним перевищенням деформацій у порівнянні з однорідними острівцями.

Оскільки в експериментах зазвичай реєструються усереднені деформації в гетероструктурах, то в даній роботі проводились також розрахунки середніх деформацій $\langle S_{xx}\rangle$ та $\langle S_{zz}\rangle$ по об'єму V_{QD} квантових точок:

$$\left\langle S_{ii} \right\rangle = \frac{1}{V_{QD}} \int_{V_{QD}} S_{ii}(x,y,z)dV \,. \qquad (3)$$

Результати розрахунків представлено на рис. 4. Видно, що зростання неоднорідності нанооствівців спричинює зменшення механічних напружень в них за лінійним законом. При цьому більш чутливими до неоднорідностей виявляються складові $\langle S_{xx}\rangle$ ($\langle S_{yy}\rangle$): кутовий коефіцієнт залежності $\langle S\rangle(\Delta x)$ для них складає 1.32, тоді як для компоненти $\langle S_{zz}\rangle$ - лише 0.49.

Подібна поведінка пояснюється тим, що в структурах з непокритими квантовими точками джерелом механічних напружень є саме

деформації невідповідності в площині гетеропереходу, тоді як деформації в напрямку росту гетероструктури є одним з каналів релаксації вказаних напружень. Отже, у відповідності зі співвідношенням Пуассона величина деформацій $<S_{zz}>$ буде меншою.

Таким чином, в даній роботі проведено розрахунки полів пружних деформацій в гетероструктурах з $Si_{1-x}Ge_x$ квантовими точками неоднорідного компонентного складу. Показано, що перемішування Si та Ge зумовлює зниження пружних напружень в нанооствівцях, причому максимально чутливими до змін компонентного складу острівців є деформації в площині гетеропереходу підкладка - квантова точка. Можна очікувати, що виявлені особливості в напружених неоднорідних квантових точках позначатимуться і на електронних властивостях гетероструктур.

Список використаних джерел

1. *Lin C.-H.* Broadband SiGe/Si quantum dot infrared photodetectors / *C.-H. Lin, C.-Y. Yu, C.-Y. Peng, W. S. Ho, and C. W. Liu*. // Journal of Applied Physics. – 2007. – V.101, №3. – P.033117(4 pages).
2. *Brunner K.* Si/Ge nanostructures / *K. Brunner* // Reports on Progress in Physics. – 2002. – V.65, №1. – P.27-72.
3. *Goldshtein R.V.* On modeling the mechanical behavior of heterostructures with quantum dots / *R. V. Goldshtein, V. A. Gorodtsov, and P. S. Shushpannikov*// Russian Physics Journal. – 2009. – V.52, №11. – P.1177-1185.
4. *Alonso M.I.* Strain and composition profiles of self-assembled Ge/Si(001) islands / M.I. Alonso, M. de la Calle, J.O. Osso, M. Garriga, and A. R. Goni // Journal of Applied Physics. – 2005. – Vol. 98, № 3. – P. 033530 (6 pages).
5. *Melezhik E.* Elastic fields of quantum dots in semi-infinite matrices: Green's function analytical analysis / E. Melezhik, and O. Korotchenkov Journal of Applied Physics. – 2009. – Vol. 105, № 2. – P. 023525 (5 pages).
6. *Kikuchi Y.* Strain profiles in pyramidal quantum dots by means of atomistic simulation / Y. Kikuchi, H. Sugii, and K. Shintani // Journal of Applied Physics. – 2001. – Vol. 89, № 2. – P. 1191 (6 pages).
7. *Liu G.R.* A finite element study of the stress and strain fields of InAs quantum dots embedded in GaAs / G.R. Liu, and S.S. Quek Jerry // Semiconductor Science and Technology. – 2002. – Vol. 17, № 2. – P. 630-643.
8. *Valakh M. Ya.* Gigantic uphill diffusion during self-assembled growth of Ge quantum dots on strained SiGe sublayers / M. Ya. Valakh, P. M. Lytvyn, A. S. Nikolenko, V. V. Strelchuk, Z. F. Krasilnik, D. N. Lobanov, and A. V. Novikov // Applied Physics Letters. – 2010. – V.96, №14. – P. 141909 (3 pages).
9. *Medhekar N.V.* Composition Maps in Self-Assembled Alloy Quantum Dots / N.V. Medhekar, V. Hegadekatte, and V. B. Shenoy // Physical Review Letters. – 2008. – Vol. 100, № 10. – P. 106104 (4 pages).

Надійшла до редколегії 05.02.13

УДК 539

Овсієнко І. В.[1], к.ф.м.н.
Лазаренко О.А.[1], к.ф.м.н.
Мацуй Л. Ю.[1], д.ф.м.н.
Прокопов О.І.[1], студент

Особливості електроопору інтеркальованих сполук графіту з бромом та хлоридом йоду в області структурних фазових перетворень в шарі інтеркалянту

В роботі досліджено аномальні зміни електроопору для інтеркальованих сполук графіту з хлоридом йоду та бромом в температурній області фазових переходів в шарі інтеркалянту. Показано, що дані аномалії пов'язані як зі зміною рухливості носіїв заряду в області фазових переходів, так і з виникненням "рідини мобільних іонів".

Ключові слова: інтеркальовані сполуки графіту, електроопір, фазові перетворення

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д,
e-mail: *ovsienko@univ.kiev.ua*

I. V. Ovsiienko[1], Ph D
O.A. Lazarenko[1], Ph D
L. Y. Matzui[1], Dr. Sci.
O.I. Prokopov[1], stud.

Resistivity features in intercalated graphite compounds with bromine and iodine chloride in the region of structural phase transitions in the layer of intercalant

In the paper anomalous changes of resistivity in graphite intercalated compounds with iodine chloride and bromine are investigated in the phase transition temperature interval. It is shown that these anomalies are caused by the change of carriers mobility in the phase transitional interval as well as by the origin of "mobile ions liquids"

Key Words: intercalated graphite compounds, electrical resistance, phase transition

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: *ovsienko@univ.kiev.ua*

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

1. Вступ

Інтеркальовані сполуки графіту (ІСГ) є природними двовимірними електронними системами, в яких носії струму переміщуються переважно у напрямку, паралельному площинам графіту. При температурі синтезу ІСГ введена речовина (інтеркалянт), зазвичай, являє собою двовимірну рідину або газ. Цілком очевидно, що зміна термодинамічних умов — температури, тиску — повинні призводити до зміни характеру впорядкування молекул інтеркалянту в шарі.

Дослідження впливу змінних температурних полів на динаміку структурно-фазових перетворень широко вивчалися на прикладі ІСГ з хлоридом сурми [1]. Так в області температур фазових перетворень спостерігається аномальна зміна електроопору як паралельно, так і перпендикулярно графітовим площинам [2]. Аномалії в температурних залежностях електроопору спостерігаються не лише для ІСГ на основі впорядкованого та дрібнокристалічного графітів з $SbCl_5$, але й для ІСГ на основі цих графітів з іншими хлоридами та галогенами, зокрема, хлоридами йоду і алюмінію та бромом [3].

Проте, не зважаючи на окремі данні по дослідженню електроопору в ІСГ з хлоридами йоду та бромом на основі впорядкованих графітів, в літературі відсутні дані про систематичні дослідження динаміки фазових перетворень в ІСГ на основі дрібнокристалічних графітів під дією змінних температурних полів, а також вплив фазових переходів на електричні властивості даних ІСГ.

Метою даної роботи було дослідження температурної залежності електроопору інтеркальованих сполук на основі дрібнокристалічного графіту з хлоридом йоду та брому в області температур T=77-293K та дослідження аномальної провідності шару внаслідок зміни фазового стану зразка.

2. Методика проведення експерименту та характеристика зразків

Для дослідження кінетичних властивостей ІСГ в області фазових переходів були отримані

© І.В. Овсієнко, О.А. Лазаренко, Л.Ю.Мацуй, О.І.Прокопов, 2013

зразки ІСГ акцепторного типу на основі дрібнокристалічного анізотропного графіту (відстань між сусідніми шарами графіту d_{002} = 0.340нм, розмір кристаліту вздовж графітових площин L_a=30 нм, параметр переважної орієнтації кристалітів p =10^3) з хлоридом йоду (Гр-ICl) та бромом (Гр-Br_2). Стадія S отриманих сполук була визначена за експериментальними даними по зміні маси в результаті інтеркалювання та за даними рентгенівської дифракції.

Параметри процесу інтеркаляції та стадія отриманих сполук наведені в таблиці 1.

Як видно з таблиці, при вказаних параметрах процесу інтеркаляції були отримані інтеркальовані сполуки другої стадії.

Таблиця 1

Умови, час синтезу та стадія S отриманих зразків ІСГ

N	Інтерк.	$T_{гр}$, К	$T_{інтер}$, К	Час інтер. t, год.	S, з даних по зміні маси	S, з даних по рент. дифр.
1.	ICl	297	297	48	1.26	2
2.	Br_2	318	318	48	1.32	2

Вимірювання електричного опору зразків ІСГ проводилося стандартним чотирьохзондовим методом на постійному струмі. Для вимірювання електроопору використовувалася спеціальна автоматизована установка. Установка складається з штоку із закріпленим в спеціальному пристрої зразком, аналогово-цифрового перетворювача (АЦП), персонального комп'ютера, з'єднувальних кабелів, блоку перемикання напрямку струму з стабілізуючим джерелом напруги. Зміна температури зразка забезпечується шляхом занурення штоку зі зразком в сосуд Д'юара з рідким азотом. У блоці перемикання розміщене стабілізуюче джерело постійної напруги +5В і резистори: баластний резистор R номіналом 1 кОм, який обмежує струм у колі, та еталонний резистор R_e опором 1 Ом. В АЦП надходить напруга від зразка U_{Rx} та термопари U_T, які знаходяться в штоці, та від еталонного опору U_{Re}, який розміщено в блоці перемикання. Для уникнення впливу паразитних ЕРС вимірювання опору зразка виконується при проходженні струму у двох напрямах – прямому (+) і зворотньому (-). Для зміни напряму струму у колі в блоці перемикання встановлено реле типу РЕС47 зі схемою управління, що перемикає реле по сигналу, який надходить з АЦП. Використання автоматизованої установки для вимірювання електроопору дозволило знизити похибку вимірювання електроопору до 0.05%.

Експериментальні результати

За методикою, наведеною вище, були проведені дослідження температурних залежностей електроопору паралельно графітовим площинам в інтервалі температур 77-300 К для зразків Гр- ICl та Гр-Br_2.

Вимірювання температурних залежностей електроопору проводили в двох режимах: нагрівання від 77К до кімнатної температури та охолодження від 290К до 77К.

На рисунках 1 та 2 наведено температурні залежності питомого електроопору ρ(T) для обох зразків ІСГ в режимах нагрівання та охолодження.

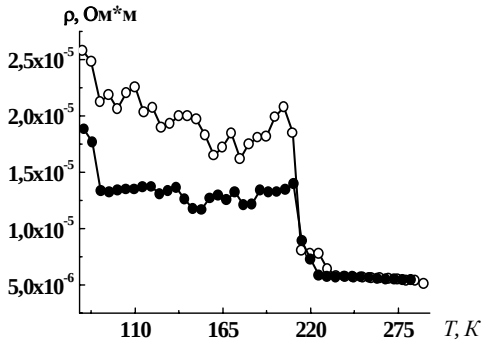


Рис. 1. Залежність ρ(T) для зразка Гр-ICl при охолодженні (о) та нагріванні (•).

Як видно з рисунків, для зразка Гр-Br_2 в області температур, що досліджувалися, спостерігається, в цілому, зростання

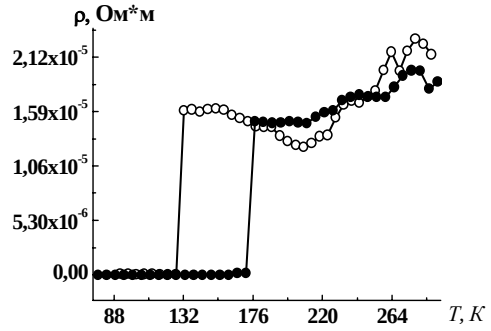


Рис. 2. Залежність ρ(*T*) для зразка Гр- Br_2 при охолодженні (•) та нагріванні (о).

питомого опору при збільшенні температури.

Такий хід температурної залежності питомого електроопору є типовим для ІСГ акцепторного типу низьких стадій. Як відомо, ІСГ низьких стадій являють собою вироджені провідники з одним типом носіїв заряду і металічним характером провідності. Для ІСГ другої стадії з хлоридом йоду спостерігається незначне зменшення питомого електроопору при зростанні температури. Такий характер температурної залежності питомого електроопору спостерігається для ІСГ низьких стадій в тому випадку, коли в якості вихідного для інтеркалювання використовувався графіт з низьким ступенем структурної досконалості або коли термодинамічні умови процесу інтекаляції були такими, що спричинили дуже інтенсивний процес інтеркалювання. Це приводить до утворення значної кількості дефектів в ІСГ в процесі інтеркаляції.

Як видно з рисунків, для обох зразків спостерігався аномальний хід температурної залежності ρ(*T*) в області температур 125-230К, який виражався в різкій зміні величини питомого опору. Так для зразка Гр- ICl при охолодженні питомий опір зріс в 2.3 рази, а при нагріванні величина питомого опору зменшилась в 1.5 рази, причому, стрибок опору як при охолодженні, так і при нагрівання спостерігався при одній і тій же температурі ~ 213К.

Для зразка Гр-Br_2 різкий стрибок величини питомого опору є ще більшим: для режиму охолодження питомий опір зменшується в 80 разів, а при нагріванні зростає в 50 разів. Причому, на відміну від зразка ІСГ з хлоридом йоду, в зразку з бромом стрибок питомого опору при різних режимах спостерігається при різних температурах: при охолодженні – при температурі 171К, при нагріванні - при температурі 126 К.

Для виявлення закономірностей зміни електроопору в області температур фазового переходу були проведені дослідження температурних залежностей електроопору при одному напрямку струму: прямому - $R^+ = U_x^+ / U_e^+ R_e$ та зворотньому - $R^- = U_x^- / U_e^- R_e$.

Результати досліджень залежностей електроопору при двох протилежних напрямках струму для зразка Гр-ICl наведено на рисунках 3-6.

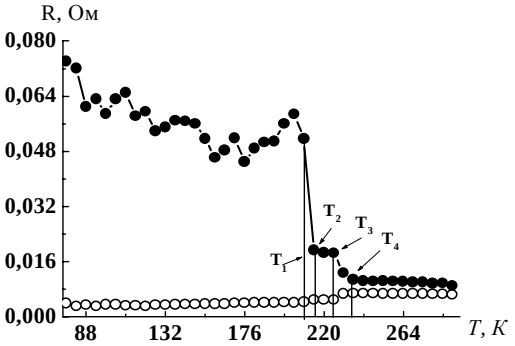


Рис. 3. Залежності $R^+(T)$(о) та $R^-(T)$(•) для зразка Гр– ICl при охолодженні, T_i – температури фазових перетворень.

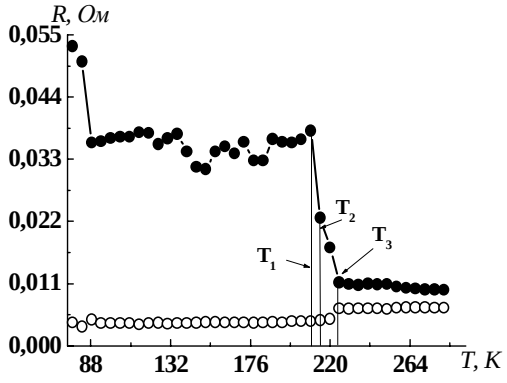


Рис. 4. Залежності $R^+(T)$(о) та $R^-(T)$(•) для зразка Гр-ICl при нагріванні, T_i – температури фазових перетворень.

Як випливає з рисунків, в температурних залежностях електроопору спостерігається ряд закономірностей. Залежності електроопорів $R^+(T)$ та $R^-(T)$ від температури як при охолодженні, так і при нагріванні, мають подібний характер. При температурі вище 236К опір слабо залежить від температури, відношення R^-/R^+ є сталим і складає приблизно 1.6. При температурі T_4 = 236 К

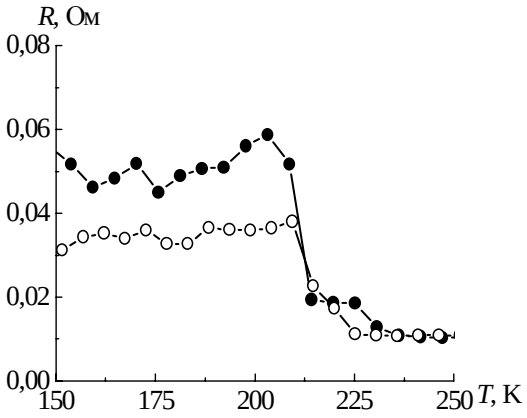


Рис. 5. Залежність $R^-(T)$ для зразка Гр - ICl при охолодженні (•) та нагріванні (о).

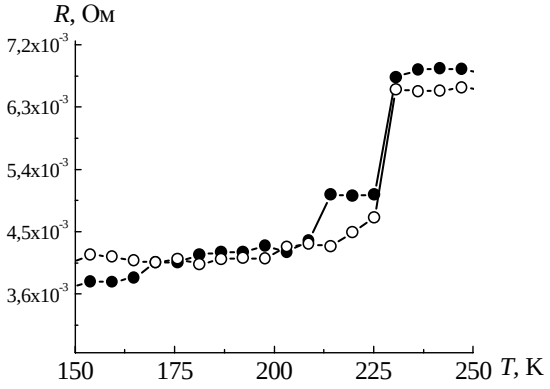


Рис. 6. Залежність $R^+(T)$ для зразка Гр - ICl при охолодженні (•) та нагріванні (о).

спостерігається перший стрибок опору, причому, R^- зростає стрибком, а R^+ незначно зменшується. Така зміна опору спостерігається до температури T_3= 223 К. В інтервалі від T_2 = 213 К до T_3 = 223 К опір знову не залежить від температури, а при зменшенні температури від T_2 = 213К до T_1=210К опір знову стрибком змінюється. R^- зростає таким чином, що загальне відношення опору R^- при температурах кінця і початку фазового перетворення складає $R^-_{210}/R^-_{236} = 4.70$. Опір R^+ зменшується незначно: відношення $R^+_{210}/R^+_{236} = 0.63$. При подальшому зменшенні Така зміна опору спостерігається до температури T_3= 223 К. В інтервалі від T_2 = 213 К до T_3 = 223 К опір знову не залежить від температури, а при зменшенні температури від T_2 = 213К до T_1=210К температури R^- продовжує зростати так, що відношення R^-_{77}/R^-_{210} складає 1.45, а R^+ дуже слабо зменшується, $R^+_{77}/R^+_{210} = 0.71$. Відношення R^- до R^+ при T=77К складає 18.04.

Аналогічні закономірності спостерігаються в температурних залежностях $R^-(T)$ та $R^+(T)$ в режимі нагрівання. Суттєвою відмінністю є те, що в режимі нагрівання двостадійність фазового переходу не є яскраво вираженою: в інтервалі температур від 210 К до 225 К, в якому відбувається фазове перетворення, відсутня ділянка, на якій опір є незалежним від температури, що спостерігається в залежностях $R^-(T)$ та $R^+(T)$ в режимі охолодження. Це яскраво видно на рис. 5 та рис. 6, на яких наведені зміни $R^-(T)$ та $R^+(T)$ в режимах охолодження та нагрівання. Як випливає з цих рисунків, в області фазового переходу в інтервалі температур від 210К до 236К спостерігається гістерезис в залежностях $R^-(T)$ та $R^+(T)$. Основні параметри залежностей $R^-(T)$ та $R^+(T)$ при двох режимах вимірювання для зразка Гр-ICl наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Основні параметри залежностей $R^-(T)$ та $R^+(T)$ при двох режимах вимірювання для зразка Гр-ICl

Режим вимір.	T початку ф.п., К	T кінця ф.п., К	R^-_{77}/R^+_{77}	R^-_{293}/R^+_{293}
$R^-\downarrow$	210	236	18.04	1.6
$R^-\uparrow$	210	225	12.93	1.5
$R^+\downarrow$	210	236	-	-
$R^+\uparrow$	210	225	-	-

На рисунках 7 – 10 наведено залежності $R^-(T)$ та $R^+(T)$, отримані при охолодженні та нагріванні для зразка Гр-Br_2.

Для зразка Гр-Br_2 при кімнатній температурі значення $R^-(T)$ та $R^+(T)$ є різними, причому для R^- спостерігається

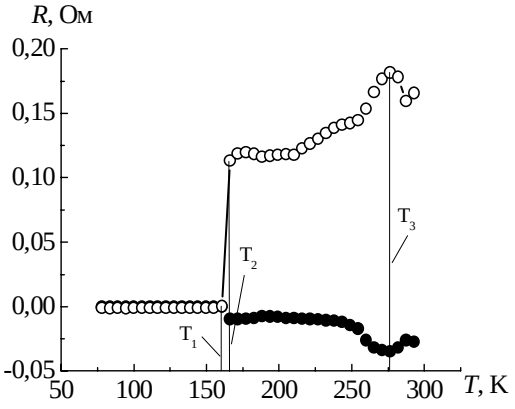


Рис. 7. Залежності R^+(T)(o) та R^-(T)(•) для зразка Гр–Br_2 при охолодженні, T_i - температури фазових переходів.

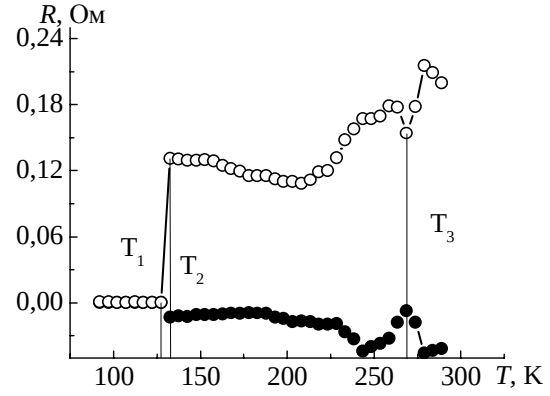


Рис. 8. Залежності $R^+(T)$(o) та $R^-(T)$(•) для зразка Гр–Br_2 при нагріванні, T_i - температури фазових переходів.

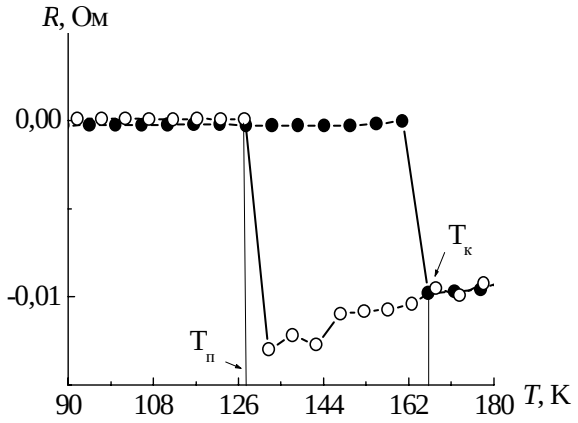


Рис. 9. Залежність $R^-(T)$ для зразка Гр – Br_2 при охолодженні (•) та нагріванні (o).

від'ємне значення, що вказує на виникнення в зразку при даному напрямку струму зустрічної ерс, яка перевищує за абсолютним значенням падіння напруги на зразку. При зниженні температури величина R^+ зменшується, а R^- зростає. При цьому в області температур T = 276.5 К на залежностях як $R^-(T)$ так і $R^+(T)$ спостерігаються локальний мінімум (максимум), які пов'язані, вочевидь, з структурними перебудовами в шарі інтеркалянту.

В інтервалі температур від 160 К до 166 К при охолодженні і від 127 К до 131 К при нагріванні спостерігається стрибок величин R^- і R^+, так що відношення величин опорів при температурах початку та кінця стрибка при охолодженні складає $R_n^+ / R_к^+ \downarrow = 540$ та $R_n^- / R_к^- \downarrow = 35.44$, при нагріванні $R_n^+ / R_к^+ \uparrow = 1308$, а R^- взагалі змінює знак, що вказує на зникнення після стрибка зустрічної ерс. При подальшому зниженні температури величини $R^-(T)$ та $R^+(T)$ практично співпадають і дуже незначно зменшуються.

З рис. 9 та 10 випливає, що для $R^-(T)$ та $R^+(T)$ в циклі охолодження - нагрівання спостерігається гістерезис в інтервалі температур (127-166) К.

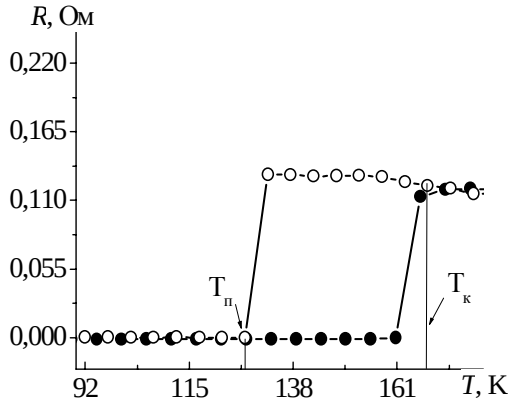


Рис. 10. Залежність $R^+(T)$ для зразка Гр – Br_2 при охолодженні (•) та нагріванні (o).

Основні параметри залежностей $R^-(T)$ та $R^+(T)$ при двох режимах вимірювання для зразка Гр-Br_2 наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Основні параметри залежностей $R^-(T)$ та $R^+(T)$ при двох режимах вимірювання для зразка Гр-Br_2

Режим вимір.	Т початку ф.п., К	Т кінця ф.п., К	$\left\|R_{77}^{+}-R_{77}^{-}\right\|$	$\left\|R_{293}^{+}-R_{293}^{-}\right\|$
$R^-\downarrow$	160	166	1.47	193
$R^-\uparrow$	127	131	0.57	241.3
$R^+\downarrow$	160	166	-	-
$R^+\uparrow$	127	131	-	-

3. Аналіз експериментальних результатів

Як було сказано вище, фазові перетворення в шарах інтеркалянту приводять до появи аномальних температурних залежностей кінетичних властивостей ІСГ. Зокрема, в температурній залежності електроопору при температурі, при якій відбуваються фазові перетворення в шарі інтеркалянту, спостерігаються локальні екстремуми, зміни нахилу залежностей, різки стрибки величини електроопору.

Розглянемо чинники, які можуть зумовити зміну електроопору зразка ІСГ при фазових перетвореннях в шарі інтеркалянту.

Згідно з двовимірною моделлю електронної структури акцепторних ІСГ Бліновського [4] весь додатковий заряд, який передається від інтеркалянту до шарів графіту, в основному, концентрується на сусідніх з шарами інтеркалянту шарах графіту. Об'ємна концентрація носіїв струму $n_{ін}$ в "металевому сандвічу", який утворюється шаром інтеркалянту та сусідніми з ним шарами графіту, визначається, переважно, часткою заряду *f*, яка передається шарами графіту від однієї молекули інтеркалянту [5]:

$$n_{in} = f(N_c / Sp)(d_{002} / d_S) \qquad (1)$$

де N_c - концентрація атомів вуглецю, яка є значно більшою, ніж власна концентрація електронів та дірок у чистому графіті, p – стехіометричний індекс у формулі ІСГ C_pA, d_s- відстань між шарами графіту, між якими присутній шар інтеркалянту.

Положення рівня Фермі для сполук низьких стадій є прямо пов'язаним з концентрацією дірок, а отже з коефіцієнтом передачі заряду *f* [4]:

$$E_F = \gamma_0 \left(\sqrt{3}\pi f \,/\, pS\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

Електроопір ІСГ другої стадії в рамках двовимірної моделі електронної структури можна записати у вигляді:

$$\rho = \frac{\pi\hbar \cdot I_s}{e^2 k_F} \cdot \left(\frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_{ph(T)}}\right) \qquad (3)$$

де I_s - період ідентичності, тобто, відстань між двома найближчими шарами інтеркалянту в напрямку вісі С, L_b – довжина вільного пробігу носіїв заряду при розсіюванні на межах кристалітів, де L_T – довжина вільного пробігу при температурно-залежних механізмах розсіювання носіїв заряду, якими є розсіювання на фононах графіту та інтеркалянту, γ_0- резонансний інтеграл для сусідніх атомів вуглецю, k_F - фермівський хвильовий вектор.

Таким чином, згідно з (2) та (3), при фазових перетвореннях електроопір може змінитися за рахунок таких процесів:

1) зміна концентрації носіїв заряду, яка безпосередньо пов'язана з часткою заряду *f*, який передає одна молекула інтеркалянту графітовим шарам;

2) зміна характеру розсіювання носіїв заряду, тобто зміна довжини вільного пробігу носіїв заряду, викликана зміною фононного спектру інтеркалянту внаслідок структурної перебудови шару інтеркалянту. При структурній

перебудові може змінюватись характер впорядкування інтеркалянту в шарі, тобто, відбуватися перехід від одного типу "квазікристалічної структури" до іншої, наприклад, перехід від неспіврозмірної до співрозмірної решітки, або перехід інтеркалянту із «квазікристалічного» в «квазірідкий» стан;

3) зміна електроопору шару інтеркалянту.

Температурна залежність електроопору ІСГ низьких стадій зумовлена температурною залежністю механізмів розсіювання носіїв заряду, оскільки концентрація носіїв заряду в ІСГ низьких стадій не залежить від температури. Провідність ІСГ визначається, в основному, провідністю збагачених додатковим зарядом сусідніх з шарами інтеркалянту шарів графіту Електропровідність шару інтеркалянту на декілька порядків менша, ніж електропровідність шарів графіту.

Будь-яке структурне перетворення в шарі інтеркалянту, при якому відбувається перехід від однієї "квазікристалічної" структури до іншої, не може приводити до зміни частки переданого заряду від молекул інтеркалянту до графітових шарів, тобто не змінює величини коефіцієнту акомодації *f*, а тільки змінює величину рухливості носіїв заряду за рахунок зміни ефективного часу релаксації носіїв заряду при розсіюванні на фононах графіту та інтеркалянту. Якщо в шарі інтеркалянту відбувається перехід з "квазікристалічного" до "квазірідкого" стану, то в цьому випадку інтеркалянт являє собою "рідину мобільних іонів", що заповнює простір між двома шарами графіту. При накладанні постійного електричного поля або при виникненні градієнта температур в ІСГ може спостерігатися перенос іонів, який викликає їх нерівномірний розподіл. Об'ємний заряд, що накопичується в області контакту, приводить до зміни ефективної провідності шару, тобто виникає іонно-релаксаційна міграційна поляризація.

Одним з проявів фазових перетворень в температурній залежності електроопору є поява в околі температури фазових перетворень гістерезису між циклами нагрівання та охолодження. Існування гістерезису вказує на те, що важливим є питання швидкості проведення циклів охолодження та нагрівання зразків. Детальні рентгеноструктурні дослідження показали, що утворення "квазікристалічної" структури шару інтеркалянту можливе лише при повільному охолодженні зразка ІСГ. При "швидкому" охолодженні (більше 2К/хв) не відбувається формування "квазікристалічної" структури, а інтеркалянт переходить із "квазірідкого" в "квазіаморфний" стан. Особливістю "плавлення" підрешітки інтеркалянту є відносно мала швидкість цього процесу. При охолодженні зразка зі швидкістю більше 0.3 К/хв молекули інтеркалянту не встигають утворити "квазікристалічну" решітку, а утворюють дрібнодисперсну структуру. Витримування зразка при температурі, нижчій ніж температура плавлення інтеркалянту, приводить до рекристалізації в шарі інтеркалянту, що в свою чергу зумовлює зменшення електроопору.

Проаналізуємо в рамках приведеної моделі зміни характеру температурної залежності електроопору в області фазових перетворень отримані експериментальні результати. Як відомо, в ІСГ на основі високоорієнтованого піролітичного графіту (ВОПГ, d_{002} = 0.335 нм, площин L_a = 300нм, параметр переважної орієнтації кристалітів p =10^4) з хлоридом сурми спостерігається фазовий перехід, пов'язаний з плавлення в шарі інтеркалянту при температурі 314К. Цей перехід був зафіксований по різкому зростанню електроопору та термо-ерс в напрямку перпендикулярно графітовим площинам в [3]. Таким чином, можна стверджувати, що різка зміна величини електроопору для зразка Гр-ICl в інтервалі температур 210 – 236К пов'язана саме з "плавленням" в шарі інтеркалянту, тобто, з переходом від "квазікристалічного " до "квазірідкого" стану.

Більш складна ситуація спостерігається для зразка Гр–Br_2. Як було показано в [6], в ІСГ з бромом на основі ВОПГ в залежності від методу отримання, в області температур (240-332)К може спостерігатися цілий ряд фазових перетворень, пов'язаних з переходом в шарі інтеркалянту від неспіврозмірних до

співрозмірних “квазікристалічних” фаз. Такі фазові перетворення відбуваються в сполуці, що досліджується, в інтервалі температур від 293 К до 266К. Про це свідчить наявність в температурній залежності електроопору локальних мінімумів та максимумів. При температурі 166 К спостерігається гігантський стрибок електроопору, величина електроопору зменшується в ~ 1300 разів. Така зміна величини електроопору не може бути пов’язаною із структурними перетвореннями в шарі інтеркалянту, якщо тільки ці перетворення не зумовлені плавленням підрешітки інтеркалянту. Інша причина, яка може приводити до такої значної зміни електроопору, це міжстадійні переходи в ІСГ, тобто, зміна кількості шарів графіту між найближчими шарами інтеркалянту. Такі переходи зумовлюють зміну величини коефіцієнта акомодації *f*, тобто змінюють концентрацію носіїв заряду на рівні Фермі, що приводить до суттєвої зміни величини електроопору.

Висновки

В результаті проведених експериментальних досліджень температурних залежностей електроопору інтеркальованих сполук на основі дрібнокристалічного графіту з хлоридом йоду та бромом виявлені аномальні зміни електроопору для сполуки Гр-ICl при температурі 210-236К та для сполуки Гр-Br2 при температурі 127-166К, пов’язані з фазовими перетвореннями в шарі інтеркалянту.

Показано, що фазові переходи в шарі інтеркалянту від неспіврозмірної до співрозмірної “квазікристалічної” решітки приводять до зміни величини рухливості носіїв заряду за рахунок зміни їх ефективного часу релаксації в температуро-залежних механізмах розсіювання. Фазові переходи в шарі інтеркалянту від “квазікристалічного” до “квазірідкого” стану приводять до зміни ефективної провідності шару за рахунок виникнення “рідини мобільних іонів”

Список використаних джерел

1. *Ovsienko I.V., Vovchenko L.L., Matzui L.Yu.* Carbon materials and intercalated compounds based on it. – Kyiv: Naukova dumka, 2009. – P. 129. (in Ukrainian).
2. *Kobayashi K., Sugihara K., Oshima H., Tsuzuku T.* C-Axis Thermoelectric Power of Graphite Intercalation Compounds with Iodine Monochrolide // J. Phys. Soc. Jpn. –1994. - 63. - P. 4451-4455*G*.
3. *Ovsienko I.V., Matzui L.Yu., Vovchenko L.L., Len’ T.A., Shcherban’ N.M.* The influence of phase transition on thermo electromotive force of graphite intercalated compounds // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka.–2003. -№ 3.- P.345-351. (in Ukrainian).
4. *Blinowski J., Rigaux C.* Electronic properties of graphite intercalation compounds. // J. Physique. - V41. - 1980. - N7. - P. 667-674.
5. *Batallan F., Bok J.* The electronic structure of the graphite intercalation compounds. // Phys. Rev. Lett.-V-41.-1978.-P.330-336.
6. *Ghosh D., Chung D.D.L.* Two-Dimensional Structure of Bromine Intercalated Graphite // Mater. Res. Bull. -1983. – V18, N10. – P. 1179-1189.

Надійшла до редколегії 08.01.13

УДК 548:539.32, 534.222.2

Онанко[1] А.П., к. ф.-м. н., с.н.с.

Зміна дефектної наноструктури та релаксаційні процеси в SiO_2 + Si, GeSi

Вимірювались щільність дислокацій і глибина зруйнованого шару для SiO_2 + Si, Si підкладок. Розглядається кристал GeSi з орієнтацією [111], до якого діє періодична механічна напруга, і який підпадає під комбінований вплив зовнішнього електричного поля і магнітного поля.

Ключові слова: механічна деформація, пружні коливання, внутрішнє тертя, модуль пружності.

[1]e-mail: onanko@univ.kiev.ua

A. P. Onanko[1], PhD, Sen. Sci. Res.

Defect nanostructure changing and relaxation processes in SiO_2 + Si, GeSi

The dislocation density and the depth of broken layer are measured for SiO_2 + Si, Si wafer-plates. GeSi crystal with orientation [111], which periodic mechanical tension is added to, and which is under the combined influence of external electric field and magnetic field is considered.

Key words: mechanical deformation, elastic vibrations, internal friction, elastic module.

[1]e-mail: onanko@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

При механічному напруженні сумарна деформація складається з пружної та непружної компонент $\varepsilon_\Sigma = \varepsilon_E + \varepsilon_{IE}$. Пружна деформація ε_E відбувається "миттєво". Непружна деформація ε_{IE} зумовлена рухом дислокацій. Ультразвукова (УЗ) деформація $\varepsilon_{УЗ}$ впливає на пружні та непружні характеристики SiO_2 + Si, Si. Навіть малі напруження змінюють непружні та пружні характеристики кристалів [1-8]. В межах струнного дислокаційного механізму пружних коливань вплив зовнішніх полів (електричного та магнітного) на внутрішнє тертя (ВТ) в GeSi можна пояснити, моделюючи рух заряджених дислокацій у цих полях.

Експеримент

Для вимірювання модуля пружності E та ВТ використовувалися імпульсний метод на частоті f ≈ 1.67; 5 МГц та методика чотирьохскладового п'єзоелектричного вібратора на частоті f ≈ 118 кГц при знакозмінній механічній деформації $\varepsilon \approx 10^{-6}$ у вакуумі P ≈ 10^{-3} Па. Похибка вимірювань модуля пружності $\frac{\Delta E}{E_0} \approx 0{,}5\%$ [9-14].

Відпал структурних дефектів змінює форму температурного спектра ВТ внаслідок руху домішок, вакансій V.

Результати

Глибина порушеного шару h = 1000÷3000 нм представлена на рис. 1.

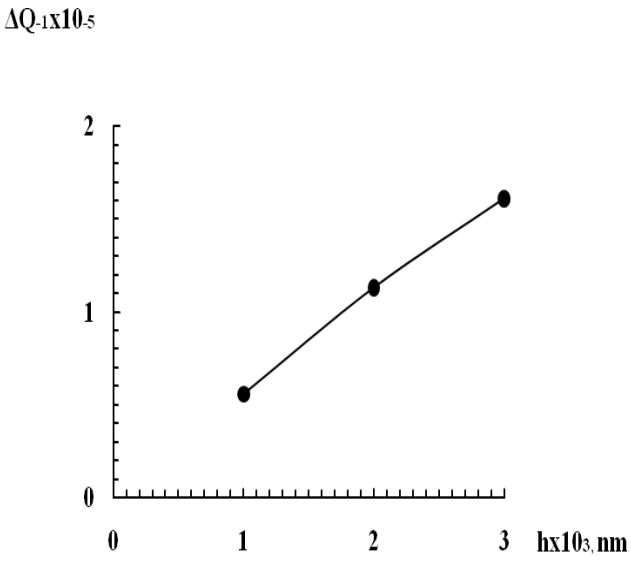


Рис. 1. Залежність різниці внутрішнього тертя ΔQ^{-1} підкладки SiO_2+Si від глибини порушеного шару h.

Зменшення величини ВТ в SiO_2+Si, яке спостерігалось після тривалої УЗ деформації $\varepsilon_{УЗ}$ протягом $t \approx 4 \cdot 10^3$ с може бути також пов'язано з активацією домішок, котрі дифундують до дислокаційних сегментів, осаджуються і закріплюють їх, в результаті чого густина активних дислокаційних петель L_C зменшується, що викликає зменшення величини ВТ [4,5]. Осцилограма імпульсів поперечної поляризації в підкладці SiO_2+Si наведена на рис. 2.

© Онанко А.П., 2013

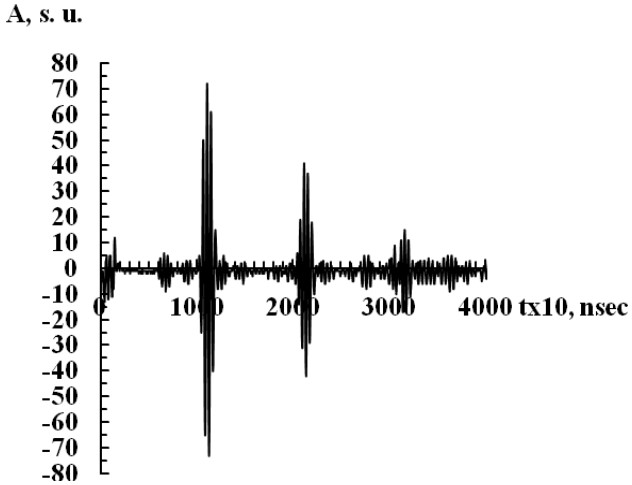


Рис. 2. Осцилограма імпульсів поперечної поляризації в підкладці SiO_2+Si.

Обговорення

Після опромінення виявлено зменшення величини швидкості УЗ повздовжніх пружних хвиль $V_{\parallel}$, величини швидкості УЗ поперечних пружних хвиль $V_{\perp}$, пружного модуля E та модуля зсуву G. Спостерігалась мала величина фону ВТ в SiO_2 $Q^{-1}{}_0 \approx 2\cdot10^{-6}$ до T ≈ 385 K.

Урахування розсіяння енергії пружних механічних коливань підкладки Si+SiO_2 на дефектах структури призводить до виразу для частоти вільних коливань диску [1]:

$$\omega = \sqrt{\frac{D\beta^2}{\rho h R^4} - 2\pi^2\left(\frac{Q^{-1}}{T}\right)^2}, \qquad (1)$$

де Q^{-1} - ВТ, T – період коливань диску, циліндрична жорсткість диску підкладці D, яка зумовлена модулем пружності E, товщиною диска h і коефіцієнтом Пуассону μ [2,3]:

$$\mu = \frac{(\frac{1}{2}V_{\updownarrow}{}^2 - V_{\leftrightarrow}{}^2)}{(V_{\updownarrow}{}^2 - V_{\leftrightarrow}{}^2)}, \qquad (2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu)^2}, \qquad (3)$$

де $V_{\updownarrow}$ - повздовжня швидкість пружної хвилі УЗ, $V_{\leftrightarrow}$ - швидка поперечна швидкість УЗ, β – безрозмірний коефіцієнт, величина якого залежить від кількості вузлових кіл, ρ – питома густина підкладці, R – радіус диску Si + SiO_2 підкладці, Q^{-1} – ВТ, T – період коливань диску. Ріст висот максимумів ВТ $Q^{-1}{}_M$ відображає зростання концентрації структурних дефектів в підкладці Si + SiO_2.

Якщо дислокаційний сегмент ξ(x,y), що коливається під дією напруги τ, є зарядженим, то на нього діятимуть додаткові сили $\vec{F}_E = e\rho(\xi)\vec{E}$ та $\vec{F}_M = e\rho(\xi)[\frac{\partial\xi}{\partial t}, \vec{B}]$, де ρ(ξ) – це функція розподілу густини електричного заряду на дислокаційному сегменті. В рамках струнної моделі дислокації система рівнянь, що описує рух зарядженої дислокації під впливом механічного, електричного ***E*** та магнітного полів ***B***, набуває наступного вигляду:

$$M\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = V_d\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - Q\frac{\partial\xi}{\partial t} + b\tau - b\tau_a - N_j\frac{\partial U}{\partial\xi} + e\rho(\xi)E + e\rho(\xi)[\frac{\partial\xi}{\partial t}, B], \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} = \rho b\frac{\partial^2}{\partial t^2} < \int_0^{\infty} [\int \xi(x)dx]N(l)dl >, \quad (5)$$

де $\left(M\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)$ - інерційна сила, $M \approx \rho b^2$ – ефективна маса одиниці довжини дислокації, ρ – густина кристалу, b – вектор Бюргерса, *t* – час, $\left(V_d\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)$ - сила, яка обумовлена ефективним натягом зогнутої дислокаційної лінії, $V_d \approx G\,b^2$ для гвинтових дислокацій, $V_d \approx \frac{Gb^2}{(1-\mu)}$ для крайових, G – модуль зсуву, $\left(Q\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$ - сила в'язкого гальмування, Q – постійна демпфування, тобто коефіцієнт в'язкого гальмування, $b\tau$ – зовнішня сила, яка діє на одиницю довжини дислокації, $b\tau_a$ – сила, яка діє на одиницю довжини дислокації і обумовлена напругами σ, які виникають внаслідок потенційного рельєфу кристалічної гратки, $\left(N_j\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)$ - сила, яка діє на одиницю довжини дислокації з боку точкових дефектів, які взаємодіють з дислокацією і розташовані на дислокаційної лінії з густиною $N_j(x)$, $U(\xi)$ –

потенційна енергія взаємодії, l - довжина дислокаційного сегменту, $N(l)$ - функція розподілу дислокаційних сегментів по довжинам, яка обумовлена $N_j(x)$.

Показано, що непружні Q^{-1} та пружні E характеристики суттєво залежать від морфології приповерхневого шару. За допомогою 3D атомно-силової мікроскопії (АСМ) отримано зображення мікроструктури SiO_2 + Si орієнтації (100), що показано на рис. 3 та рис. 4.

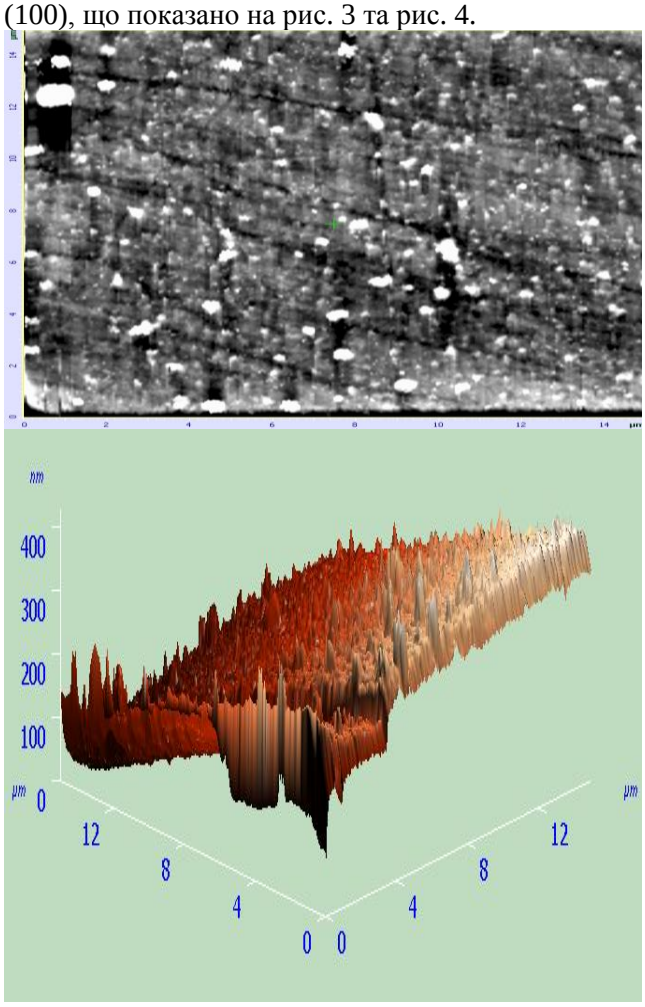


Рис.3. 3D атомно-силова мікроскопія зображення мікроструктури Si + SiO_2 марки КДБ-6,0 орієнтації (100) (15x15 мкм).

АСМ засвідчує присутність рельєфу підкладці. Окрім структурних дефектів, обумовлених впливом підкладки, є велика кількість дефектів, які утворюються при зростанні островків. При малої товщині плівки h ≤ 1000 нм, структурні дефекти, які виникають на перших стадіях росту, не встигають заліковуватися.

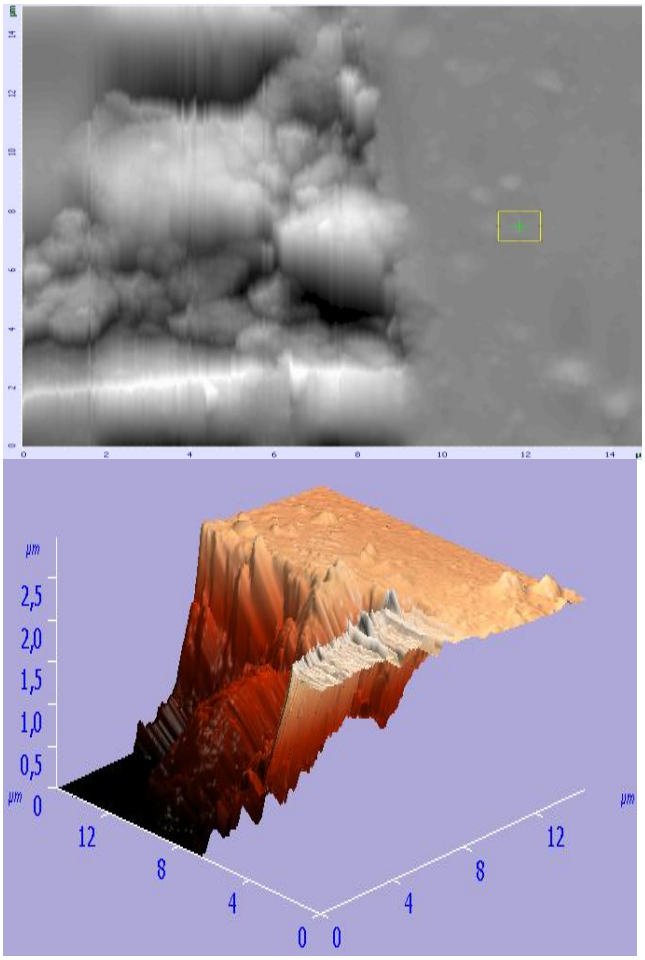


Рис. 4. 3D АСМ зображення мікроструктури Si марки КЕФ-7,5 орієнтації (100) після опроміненяя іонами $^{11}B_5^+$ дозою D ≈ $1 \cdot 10^{15}$ іон/см^2 з енергією W ≈ 130 КеВ при T = 293 К (15x15 мкм).

Методом АСМ виявлено збільшення шорсткості поверхні Si внаслідок його опромінення іонами $^{11}B_5^+$. Показано, що після опромінення електронами e^- спостерігається деструкція приповерхневого шару Si, зумовленого скупченням вакансійних комплексів V-V-V. Опромінення ж поверхні Si іонами $^{11}B_5^+$ дозою D ≈ $1 \cdot 10^{15}$ іон/см^2 з енергією W ≈ 130 КеВ, коли енерговиділення в одиниці об'єму значно більше при такій самій довжині пробігу частинок даних енергій в Si L_{11B5+} □ 360 000 нм, призводить до утворення високої концентрації дефектів у приповерхневому шарі Si, ймовірно, між вузлового типу Si_i. 3D АСМ зображення мікроструктури GeSi орієнтації (111) показано на рис. 5.

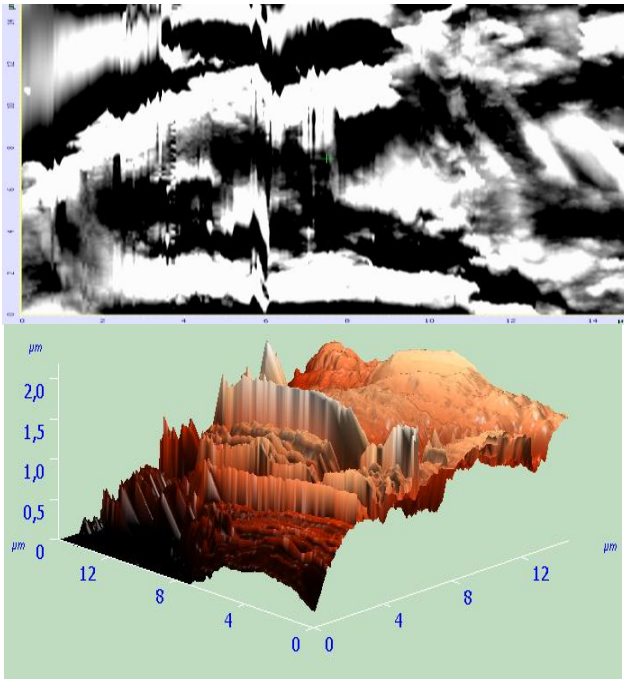


Рис. 5. 3D АСМ зображення мікроструктури GeSi орієнтації (111) (15x15 мкм).

Спостерігається мілко дисперсна гладка поверхня, зрощення малих островків, їх форма стає круглястою. Монокристалічні ділянки мають сильно фрагментарну структуру, яка складається з слабо розорієнтованих один відносно іншого островків.

Висновки

Таким чином, наведені результати вивчення впливу структурних дефектів на поглинання пружних звукових хвиль в Si + SiO_2 підкладках, які дозволяють оцінювати характер наноструктури. Результати оцінки динамічних характеристик міжвузельних атомів Si_j, вакансій них V-V і O-V комплексів можуть бути застосовані з метою отримання оптимального технологічного відпалу для структурних дефектів в Si + SiO_2.

Список використаних джерел

1. *Novik A., Berri B.* Relaxation phenomenon in crystals. – Moscow : Atomizdat, 1975. – 472 p. (in Russian).
2. *Aleksandrov L.N., Zotov M.I.* Internal friction and defects in semiconductors. – Novosibirsk : Nauka, 1979. – 158 p. (in Russian).
3. *Nikanorov S.P., Kardashev B.K.* Elasticity and dislocation inelasticity of crystals. – Moscow : Nauka, 1985. - 253 p. (in Russian).
4. *Shpak A.P., Kunickiy Y.A., Karbovskiy V.L.* Clusters and nanostructure materials. – Kyiv : Academy periodic, 2001. - 588 p. (in Russian).
5. *Molodkin V.B., Nizkova A.I., Shpak A.P. et al.* Difractometria nanosize defects and geterolayers in crystals. – Kyiv : Academy periodic, 2005. - 364 p. (in Russian).
6. *Selyshchev P.A.* Self-organization in radiation physics. - Moscow : SIC Institute computer research, 2008. - 208 p. (in Russian).
7. *Selyshchev P.A., Sugakov V.I.* About creeping temperature dependence of irradiated materials // Metalphysics and new technology. – 2000. – **22**, № 5. - P. 46-48.
8. *Selyshchev P.A., Moskalenko V.V.* Feature of non-stationary creeping of irradiated metals with impurity // VANT Ser.: PRD and RM. – 2005. – № 3(86). - P. 64-67.
9. *Onanko A.P., Lyashenko O.V., Lyashenko I.O. et al.* Acoustic attenuation in silicon and silicon oxide // J. Acoust. Soc. Am. – 2008. - **123**, № 5, Pt. 2. - P. 3701.
10. *Onanko A.P.* Influence of hydrogen on directional surface of inelastic-elastic body $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ alloy // Metalphysics and new technology. – 2011. – **33**, № 2. - P. 253-261.
11. *Lyashenko O.V., Onanko A.P., Veleschuk V.P. et al.* Structural defects relaxation during complex thermal and dynamical mechanic processing of CdTe // Photoelectronics. – 2008. – № 17. - P. 10-13.
12. *Lyashenko O.V., Veleschuk V.P., Onanko A.P. et al.* Acoustic emission at inhomogeneous thermal impulse influence with liquid phase formation // Sensor electronics and microsystem technologies. – 2009. – № 1. - P. 36-41.
13. *Onanko A.P., Lyashenko O.V.* Static elastic characteristics of carbon nanotubes // ECS Transactions. – 2010. – **25**, № 21. - P. 7-10.
14. *Onanko A.P., Lyashenko O.V., Vyzhva S.A. et al.* Influence of temperature, ultrasound, electrical current on inelastic-elastic characteristics, relaxation processes in Ge-Si and SiO_2 // Sensor electronics and microsystem technologies. – 2011. – **2(8)**, № 3. - P. 14-21.

Надійшла до редколегії 17.01.2013

УДК 539

Перец Ю. С. [1], аспірант
Вовченко Л. Л. [1], к.ф.м.н., с. н. с.
Мацуй Л. Ю. [1], д.ф.м.н., с. н. с.
Сердюк В. С. [1], студент

Отримання графітових нанопластинок методом ультразвукового диспергування

У статті розглядається характер грануметричного складу графітових нанопласти (ГНП), які утворюються в наслідок ультразвукового диспергування термо-розширенного графіту (ТРГ) в різних рідинних середовищах (спирті, ацетоні, воді). Метою даної роботи було визначити найбільш оптимальне рідинне середовище для ультразвукового диспергування терморозширеного графіту з метою отримання графітових нанопластинок (ГНП) з високим аспектним співвідношенням, що є важливим для створення полімерних композитних матеріалів з низьким порогом перколяції. Для визначення зміни форми, розмірів та морфології поверхні частинок ТРГ після ультразвукового диспергування (УЗД) були проведенні дослідження зразків методом оптичної мікроскопії, а для визначення товщини ГНП використовувався метод атомно-силової мікроскопії.

Ключові слова: терморозширений графіт, метод оптичної мікроскопії, ультразвукове диспергування.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ,
пр-т. Глушкова 4д, e-mail: peres2007@yandex.ru

Yu. S. Perets[1], PhD stud.
L. L. Vovchenko[1], PhD, Sen. Sci. Res.
L. Yu. Matzui[1], Dr. Sci., Sen. Sci. Res.
V. S. Serdyuk[1], stud.

Receiving graphite nanoplatelets the method of ultrasonic dispersion

In the article investigation of size distribution of graphite nanoplatelets (GNP), which are formed as a result of ultrasonic dispersing ultrasonic dispersing thermoexfolited graphite (TEG) in various liquid media (alcohol, acetone, water). The aim of this work was to determine the most optimal liquid medium for ultrasonic dispersion thermoexfolited graphite to obtain graphite nanoplatelets (GNP) with a high aspect ratio, which is important for creating polymer composites with low percolation threshold. To determine the changes in shape, size and morphology of the particles TEG after ultrasonic dispersing have conducted research samples by method optical microscopy, and to determine the thickness of the GNP used by method atomic force microscopy.

Key Words: thermoexfolited graphite, the method of optical microscopy, ultrasonic dispersion.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: peres2007@yandex.r

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

В полімерних композитах (КМ) електропровідність визначається типом електро-провідного наповнювача, його концентрацією і здатністю до утворення неперервних електропровідних ланцюжків [1]. Поріг перколяції в КМ суттєво залежить від структурно-морфологічних особливостей електропровідного наповнювача, таких як дисперсність, форма частинок наповнювача, співвідношення геометричних розмірів (aspect ratio), і характеру його просторового розподілу в полімерній матриці [2-3]. Використання нанорозмірних електропровідних наповнювачів дає можливість значно понизити поріг

© Ю. С. Перец, Л. Л. Вовченко, Л.Ю. Мацуй, В. С. Сердюк. 2013

перколяції, тобто при досить низьких концентраціях нанонаповнювача (від 0.1 до 1 об%) полімерний композит вже є електропровідним матеріалом. Основною проблемою при створенні полімерних нанокомпозитів є забезпечення високого рівня диспергування нанонаповнювача в об'ємі полімерної матриці, без утворення агломератів із наночастинок наповнювача, які характеризуються досить високою здатністю до агломерування завдяки високій хімічній активності поверхневих атомів [4]. Наш підхід при вирішенні цієї проблеми полягає в тому, що по-перше необхідно отримати нанорозмірний наповнювач з максимально вузьким розподілом частинок за гранулометричним складом, а по-друге, забезпечити достатній рівень диспергування отриманих нанорозмірних частинок (деагломерація) з метою отримання КМ з однорідним розподілом цих наночастинок у всьому об'ємі полімерної матриці. Термохімічна обробка природного графіту (інтеркалювання і наступне терморозширенння – отримання терморозширеного графіту ТРГ), ультразвукове диспергування тероморозширенного графіту дає можливість отримувати цілий ряд вуглецевих наповнювачів різної дисперсності аж до отримання ГНП.

В якості вихідного матеріалу для отримання ГНП використовувався ТРГ, який був отриманний методом термо-хімічного диспергування. Вихідним матеріалом для отримання терморозширеного графіту є природній дисперсний графіт марки ГАК-2 Завальєвського родовища. Терморозширений графіт – вуглецевий матеріал, який був отриманий в результаті інтеркалювання природного дисперсного графіту H_2SO_4 та наступної термообробки в печі висхідного потоку за методикою, розробленою в [5].

Електронно-мікроскопічні дослідження показали, що частинки терморозширеного графіту мають червоподібну форму, досить великі, поруваті (поруватість може сягати 99%) і розмір пор складає 5-10 мкм, а товщина стінок пор дорівнює 40-100 нм. Параметр упаковки F частинок ТРГ досить низький, що повинно призводити до низьких порогів перколяції ϕ_c, оскільки $\phi_c \sim F$. Тому, використання цих частинок в якості наповнювача полімерних матриць дає можливість отримати електропровідні композити з низьким порогом перколяції і достатніми значеннями електропровідності при невеликому вмісті графітового компонента. Але, основним недоліком цих композитів є висока неоднорідність цих зразків (нерівномірний розподіл графітових частинок в полімерній матриці) обумовлена високою поруватістю частинок ТРГ і неможливість отримання тонких зразків із стабільними фізичними характеристиками [6-9] .

Одним з шляхів вирішення проблеми створення композитів нанокарбон-полімер з однорідним розподілом карбонової компоненти в полімерній матриці є використання нанодисперсних форм вуглецю, таких як нанопластинки графіту, вуглецеві наноторубки. Тому нами було запропоновано та розроблено метод диспергування частинок ТРГ в різних рідинних середовищах з метою одержання супердисперсних та нанорозмірних частинок графіту.

Метою даної роботи було визначити найбільш оптимальне рідинне середовище для ультразвукового диспергування терморозширеного графіту з метою отримання графітових нанопластинок (ГНП) з високим аспектним співвідношенням, що є важливим для створення полімерних композитних матеріалів з низьким порогом перколяції.

Для отримання графітових нанопластинок було проведене ультразвукове диспергування (УЗД) ТРГ в різних рідинних середовищах: спирті, ацетоні і воді.

Для механічного впливу використовувалася ультразвукова ванна ВК-9050 при частоті УЗ – 40 кГц і максимальною вихідною електричною потужністю 50 Вт.

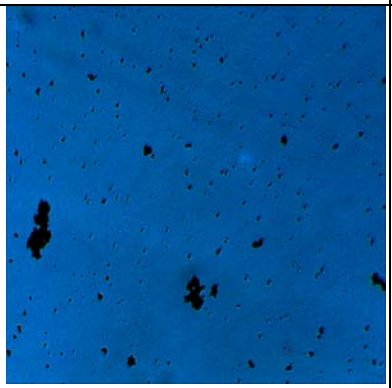
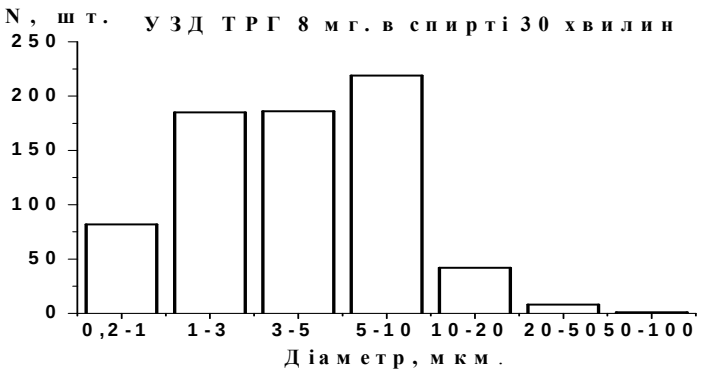
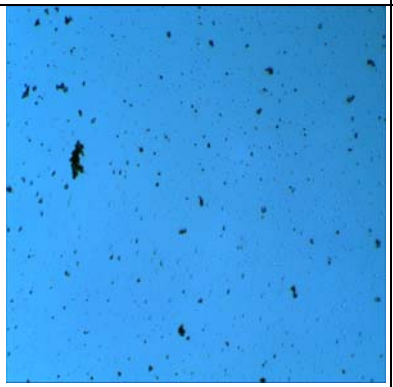
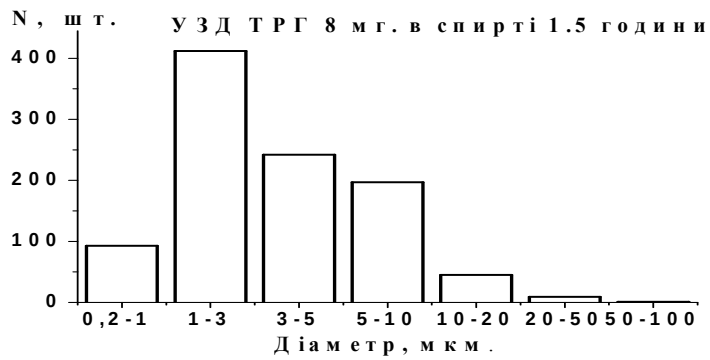
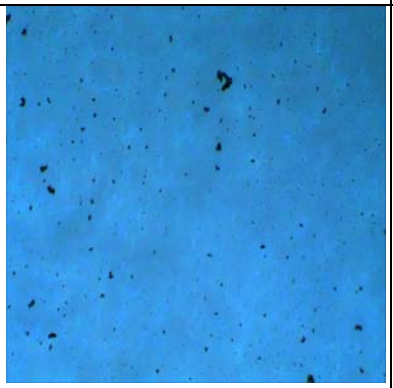
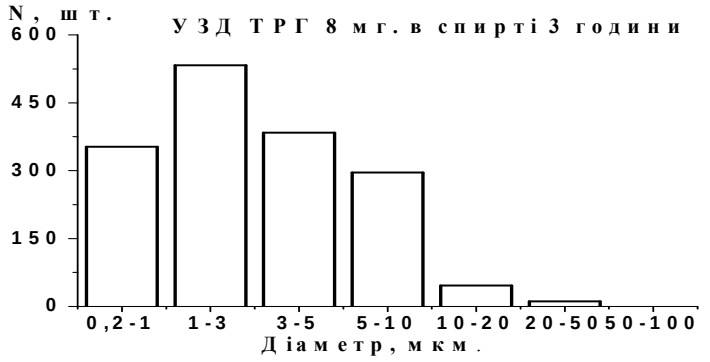
В результаті УЗД відбувалося руйнування та розшарування черв'якоподібної структури ТРГ і

утворення графітових частинок з різним аспектним співвідношенням в залежності від часу механічного впливу в різних середовищах.

Було наважено ТРГ по 8 мг. в 9 пробірок, додавалося в три пробірки однакова кількість спирту, потім в три пробірки ацетон і в останні три вода. Час диспергування варіювався від 30 хвилин до 20 годин. УЗД ТРГ в середовищах спирту і ацетону проводилося 30хв., 90хв., 180хв., а для води: 3 год., 6 год. і 20 год. Таким чином була отримана суспензія, яка після відстоювання 24 годин утворила дві фази – першу темнну (осад) і другу майже прозору (завись) для 30 хв. УЗД ТРГв спирті, для 30 хв., 90хв. Узд ТРГ в ацетоні, та 3 год., 6 год. для УЗД ТРГ в воді. Відрізнялися суспензії для 90 хв., 180

Таблиця 1

Оптичні зображення та діаграми розподілу частинок диспергованого ТРГ за розмірами (по діаметру) після УЗД ТРГ в спирті 30 хвилин, 1.5 години і 3 години.

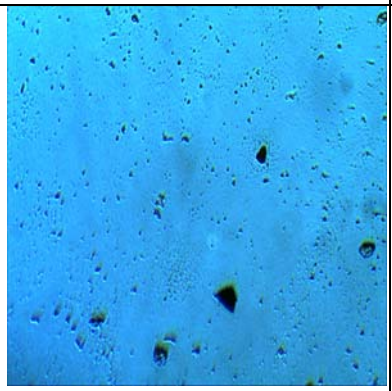
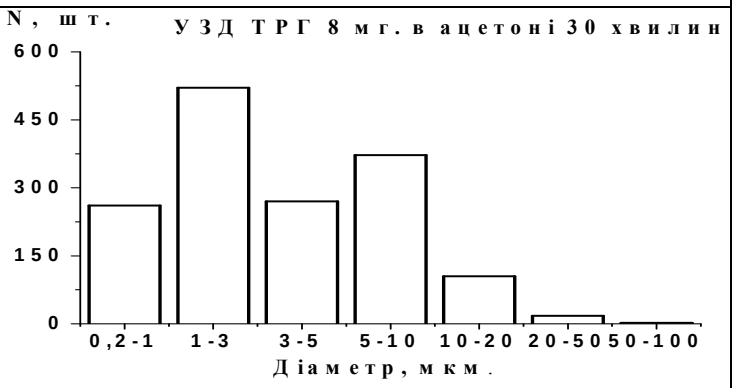
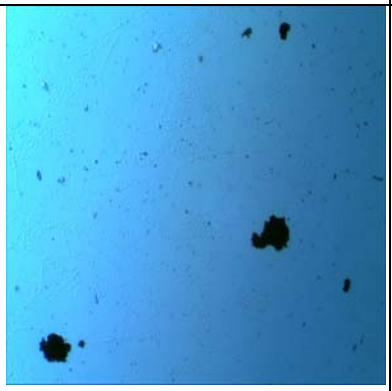
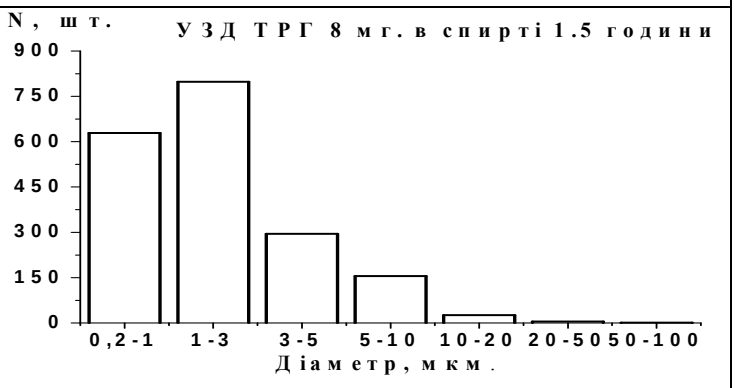
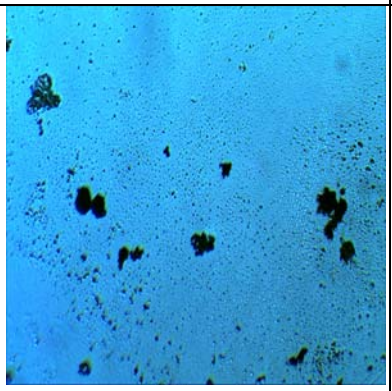
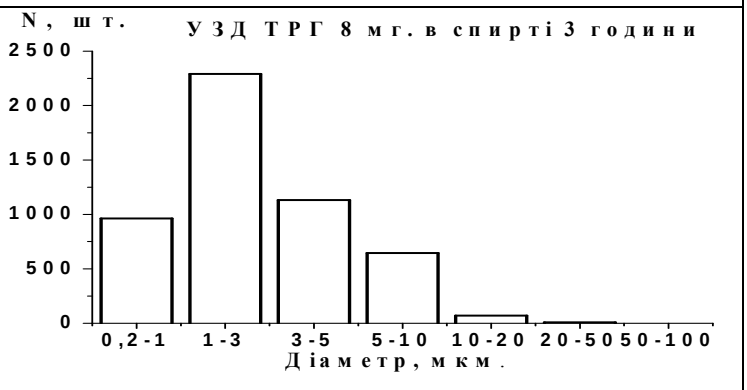
Час УЗД в спирті	Оптичне зображення (740·740 мкм^2)	Діаграми розподілу частинок диспергованого ТРГ за розмірами (по діаметру)
30 хвилин		
1.5 години		
3 години		

хв. (спирт), для 180 хв. (ацетон) і для 20 годин (вода), утворилася однорідна темна завись, яка не осіла за 24 години і не мала частин ТРГ, які б плавали на поверхні. Осіли великі і важкі пластинки графіту, які сформували темну фазу, прозору - зважені дрібні і легкі (або пористі (при малому часі УЗД) або тонкі в декілька шарів графіту ГНП (при великому часі УЗД)) частинки графіту, які візуально видно не були.

Для дослідження морфології та розподілу за розмірами частинок диспергованого ТРГ по краплі суспензії з середини темної і прозорої частини нанесено на скляні підкладки (9 штук по 3 для кожного середовища), на яких після випаровування спирту, ацетону та води залишилися тільки частинки графіту.

Таблиця 2

Оптичні зображення та діаграми розподілу частинок диспергованого ТРГ за розмірами (по діаметру) після УЗД ТРГ в ацетоні 30 хвилин, 1.5 години і 3 години.

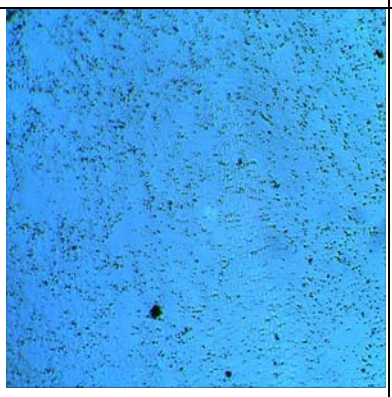
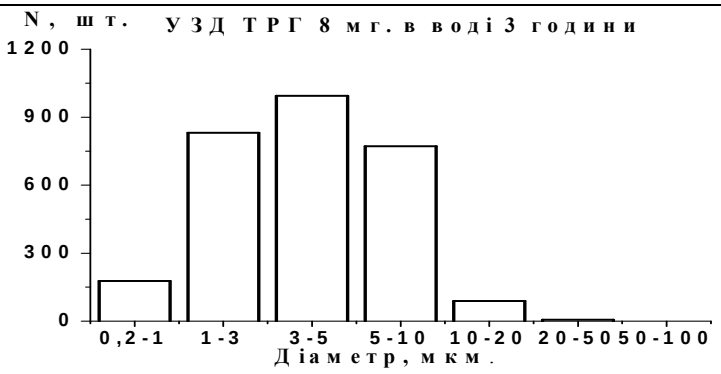
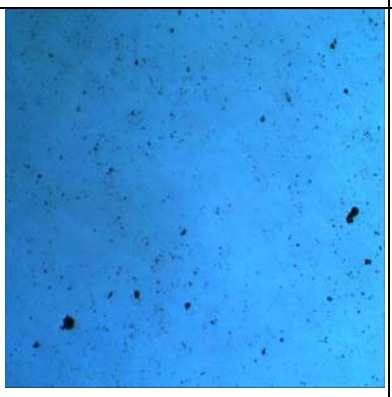
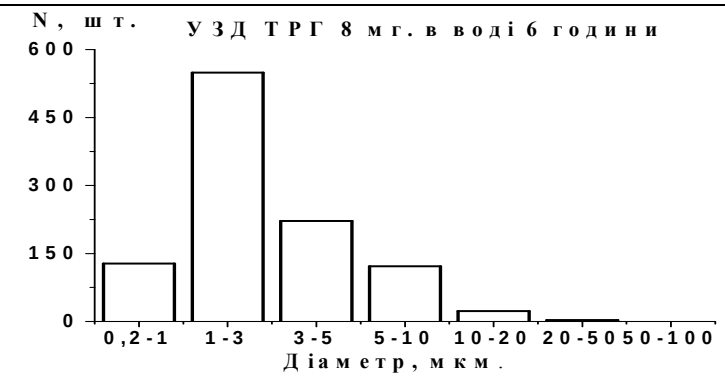
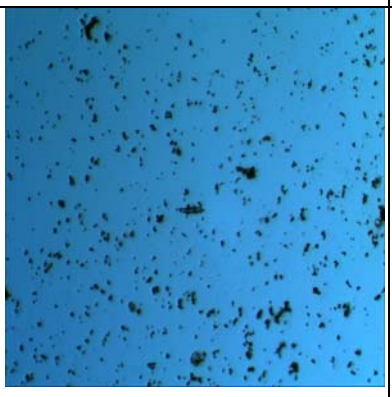
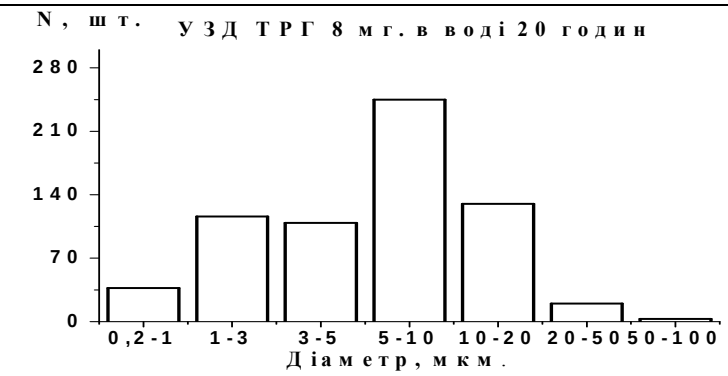
Час УЗД в ацетоні	Оптичне зображення (740·740 мкм^2)	Діаграми розподілу частинок диспергованого ТРГ за розмірами (по діаметру)
30 хвилин		
1.5 години		
3 години		

За допомогою оптичного мікроскопа МИКМЕД-1 з приставкою ETREK PCM-510 були отримані оптичні зображення, які перетворювалися за допомогою програми Nova в 3D-зображення та отримані гістограми щільності розподілу частинок диспергованого ТРГ. Морфологія найбільш дрібних частинок диспергованого ТРГ (суспензії), була досліджена при використанні зондової НаноЛабораторії ІНТЕГРА, зроблені СЕМ зображення розміром $1 \cdot 1$ мкм^2 .

Результати дослідження методом оптичної мікроскопії структурно-морфологічних особливостей диспергованого УЗ 8 мг ТРГ в ацетоні представлені в таблиці 1.

Таблиця 3

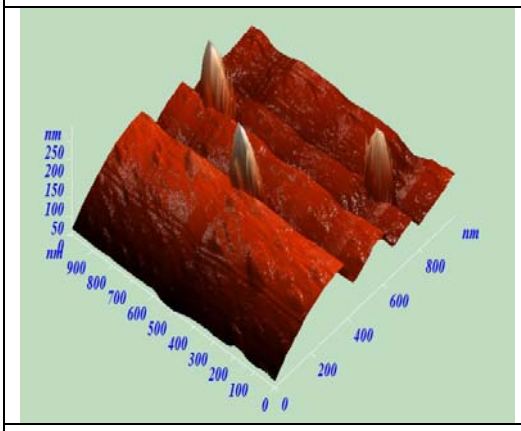
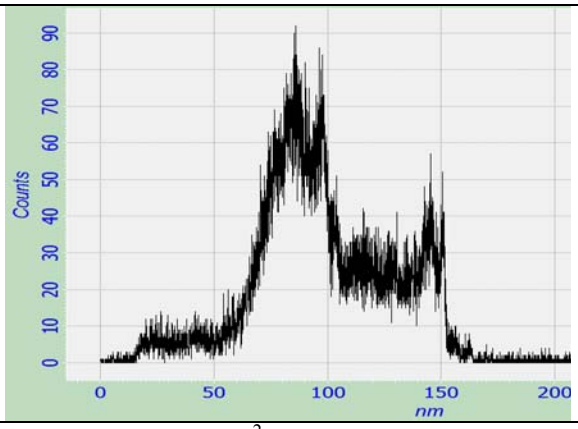
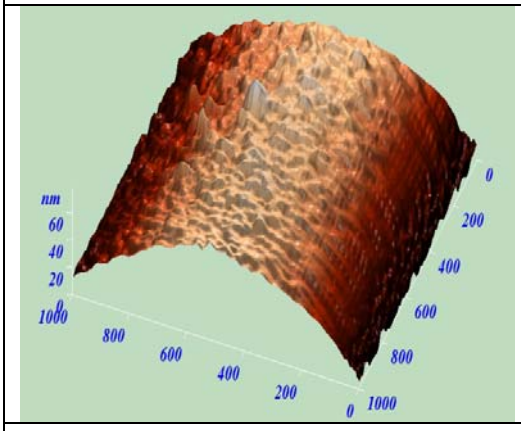
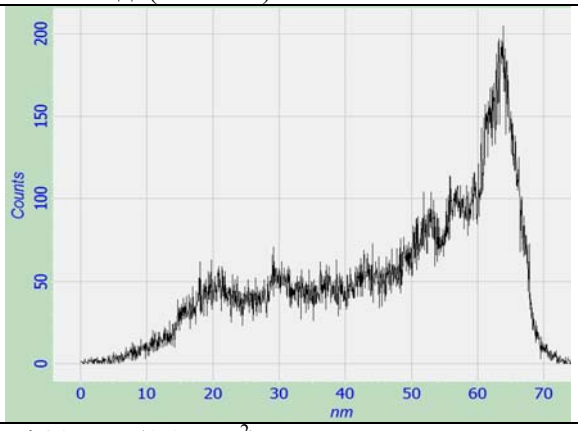
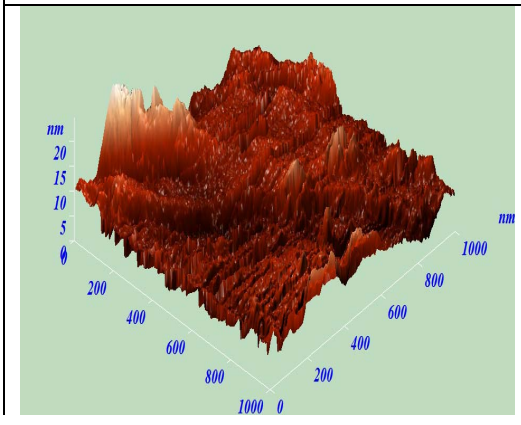
Оптичні зображення та діаграми розподілу частинок диспергованого ТРГ за розмірами (по діаметру) після УЗД ТРГ в воді 3 години, 6 годин і 20 години.

Час УЗД в воді	Оптичне зображення (740·740 мкм^2)	Діаграми розподілу частинок дисперго-ваного ТРГ за розмірами (по діаметру)
3 години		
6 годин		
20 годин		

Було виявлено, що при збільшенні часу УЗД в спирті зменшується число пористих частинок ТРГ, що плавають на поверхні і значно зростає кількість вже розбитих частинок графіту у

Таблиця 4

Порівняльний аналіз СЕМ зображень та гістограм густини розподілу диспергованих в різних середовищах частинок ТРГ по висоті (товщині), отриманих із результатів атомно-силової мікроскопії. Час диспергування відповідає завершенню процесу розбиття поруватих частинок ТРГ на окремі нанопластинки і переходу їх у зважений стан.

СЕМ зображення	Гістограми розподілу частинок графіту за товщиною	Розміри частинок ГНП
У спирті 3 год. (1·1 мкм^2)		
		Середня товщина ГНП – 55нм; ширина розподілу – (15-160)нм
В ацетоні 6 год. (1·1 мкм^2)		
		Середня товщина ГНП – 63нм; ширина розподілу – (5-70)нм
У воді 20 год. (1·1 мкм^2)		
		Середня товщина ГНП – 8нм; ширина розподілу – (1-17)нм

зваженому стані.

Як видно з табл. 1., для суспензії спостерігається зменшення розмірів фрагментів пористих частинок ТРГ і їх кількості, в той час як збільшується кількість дуже дрібних і легких частинок ГНП при збільшенні часу УЗД. Із збільшенням часу УЗД спостерігаємо збільшення загальної кількості зважених частинок графіту, а також зміну розмірів найбільшої кількості частинок графіту (максимум на діаграмах) від 5-10 мкм. Для 30 хв. УЗД до 1-3 мкм. для 180 хв. УЗД.

Такий перерозподіл зважених в спирті частинок графіту за розмірами (діаметр) при збільшенні часу УЗД свідчить про утворення легких частинок ГНП більшого діаметру (1-3 мкм.), але при цьому досить тонких (можливо навіть вони складаються з декількох шарів графіту). Оптимальний час утворення ГНП після диспергування ТРГ в спирті - 90 хвилин.

При УЗД частинок ТРГ в ацетоні були отримані аналогічні результати з оптичної мікроскопії. В таблиці 2 представлені результати дослідження структурно-морфологічних характеристик ТРГ, УЗ диспергованого в ацетоні.

Як видно з діаграм, середній діаметр диспергованих у ацетоні частинок графіту становить 1-3 мкм, зустрічаються також частинки діаметром від 5-10 мкм. для 30 хв. УЗД, і 0,2-1 мкм. для 90 і 180 хв. Оптимальний час утворення ГНП після диспергування ТРГ в ацетоні - 180 хвилин.

В таблиці 3 представлені результати дослідження структурно - морфологічних особливостей диспергування УЗ ТРГ у воді.

З діаграм видно, що при збільшенні часу диспергування ТРГ в воді збільшується кількість агломерованих графітових пластинок розміром від 5-10 мкм. Особливістю УЗД ТРГ в воді є те, що частинки не тонуть в воді, а плавають на поверхні води – це ускладнює їх руйнування і тому збільшує час для утворення ГНП до 20 годин. Після 3 годин УЗД ТРГ в воді незначна частина зруйнованих черв'яків ТРГ тоне так, як зменшується поруватість цих частин і їх середній діаметр варіюється від 1-10 мкм, 20 годин диспергування призводить до зменшення кількості частинок ГНП в суспензії. Диспергування у воді дає нам частинки ГНП більш легкі, менш пористі і збільшує їх діаметр в 2-3 рази при повному розбитті та утворенні темної завісі, також покращує їх аспектне співвідношення.

Для оцінки діаметра і товщини нанопластинок графіту, отриманих із ТРГ ультразвуковим диспергування, були проведені дослідження частинок графіту із суспензії диспергованої суміші з використанням атомно-силового мікроскопа. Проводився порівняльний аналіз розмірів частинок ТРГ, які були отримані при максимальній тривалості впливу УЗ в різних середовищах – 1.5 години УЗД ТРГ в спирті, 3 години УЗД ТРГ в ацетоні і 20 годин УЗД ТРГ у воді. Були отримані СЕМ зображення частинок, перетворені в 3D-картинки, сканування проводилось з ділянок 1х1 мкм^2, а також гістограми щільності розподілу диспергованих частинок ТРГ по висоті (товщині). В таблиці 4 представлені результати аналізу отриманих СЕМ зображень диспергованих в різних середовищах і протягом різного часу УЗД частинок ТРГ.

Як видно з табл. 4, при завершенні процесу розбиття пористих частинок ТРГ на окремі нанопластинки середня товщина дрібних частинок (діаметром до 1мкм) становить порядку 55-65 нм при розбитті в спирті і в ацетоні, а для ТРГ, розбитого у воді - середня товщина дрібних частинок графіту - 8 нм.

Встановлено, що за часовим показником найбільш ефективно проводити УЗД ТРГ в спирті, при якому кількість розбитого (диспергованого) на окремі графітові пластинки ТРГ по відношенню до загальної маси графіту при одній і тій же тривалості УЗД є максимальною в порівнянні із УЗД в інших середовищах. Найдовше процес УЗД ТРГ на окремі нанопластинки відбувається у водному середовищі, проте для останнього отримуємо ГНП з меншою товщиною і більшим діаметром, тобто з високим коефіцієнтом

форми, що є кращим для виготовлення полімерних композиційних матеріалів з низьким порогом перколяції в електропровідності.

Висновки

1. Проведено ультразвукове диспергування терморозширеного графіту в різних рідинних середовищах з метою отримання графітових нанопластинок.

2. При дослідженні характеру гранулометричного складу графітових нанопластинок, отриманих при ультразвуковому диспергуванні в різних середовищах, було встановлено, що найбільш ефективно відбувається диспергування ТРГ в спирті, в той час як диспергування у воді вимагає досить великих часів впливу УЗ для повного розбиття ТРГ на окремі графітові нанопластинки.

3. Дослідження методом атомно-силової мікроскопії показали, що товщина і діаметр отриманих графітових пластинок визначається розміром пор і товщиною стінок пор у вихідному терморозширеному графіті. Було встановлено, що в результаті тривалого УЗД ТРГ в різних середовищах утворюються графітові нанопластинки з середньою товщиною близько 55-65 нм і діаметром від 1 до 3 мкм .

Список використаних джерел

1. *Du J-H., Bai J., Cheng H-M.* The present status and key problems of carbon nanotube based polymer composites.- eXPRESS Polymer Letters.- 2007.- **Vol.1**.- № 5.- P. 253–273.

2. *Hernandez Y. R., Gryson A., Blighe F. M., Cadek M., Nicolosi V., Blau W. J., Gunkoc Yu. K., Colemana J. N.* Comparison of carbon nanotubes and nanodisks as percolative fillers in electrically conductive composites. Scripta Materialia.-2008.- **№ 58**. - P. 69–72.

3. *Cerzard A., Mcrae E., Mareche J. F., Furdin G., Duforts M., Deleuzes C.* Composite based on micron-sized exfoliated graphite particles: electrical conduction, critical exponents and anisotropy. J. Phys.Chem. S olids.-1996.-**Vol. 57.-№ 6-8**. – P.7 15-718.

2. *Yu A., Ramesh P., Itkis M. E., Bekyarova E., Haddon R. C.* Graphite nanoplatelet-epoxy composite thermal interface materials.-California: J. Phys. Chem. C, -2007. -**Vol. 111**, №. 21. - P. 7565-7569.

3. Пат. 40256А Україна, МПК6 С01В31/04. Пристрій для одержання терморозширеного графіту /*Харьков Є.І., Лисов В.І., Мацуй Л.Ю., Вовченко Л.Л., Цуруль М.Ф., Морозовська Н.О*; заявник і патентовласник КНУ ім. Т.Г. Шевченка. – №2000116217; заявл. 02.11.2000; опубл. 16.07.2001, Бюл.№6.

4. *Geng Y., Wang S. J., Kim J.-K.* Preparation of graphite nanoplatelets and graphene sheets. Journal of Colloid and Interface Science. – 2009.- **№ 336**.- P. 592–598.

5. *Weng W.-G., Chen G.-H., Wu D.-J. Lin Z.-Y., Yan W.-L.* Preparation and characterizations of nanoparticles from graphite via an electrochemically oxidizing method. Synthetic Metals. - 2003. - **№ 139**. - P. 221–225.

6. *Chattopadhyay J., Mukherjeea A., Chakrabortya S., Kangb J., Loosc P. J., Kellyb K. F., Schmidta H. K., Billupsa W.E.* Exfoliated soluble graphite. C A R B ON. – 2009.- **№ 4 7**.- P. 2 9 4 5 –2 9 4 9.

7. *Dideykin A. T., Sokolov V. V., Sakseev D. A., Baidakova M. V., Wool A. J.* Free graphene films of expanded graphite. Journal of Applied Physics.- 2010.-**V.80.- № 9**.-P. 146-149.

Надійшла до редколегії 09.01.2013

УДК 539.194

Розуван К.П.[1], інж.,
Розуван С.Г.[1], к.ф.-м.н, н.с.,
Шайкевич І.А.[1], д.ф.-м.н, проф..

Магнітні властивості тонких плівок молібдену.

Тонкі плівки молібдену на скляних підкладках вивчалися за допомогою скануючої тунельної мікроскопії та магнітної силової мікроскопії. Виміри показали, що приповерхневий шар молібденової плівки товщиною декілька міжатомних відстаней має слабо виражені магнітні властивості. Результати скануючої тунельної мікроскопії вказують на залежність магнітних властивостей молібдену від типу кристалічної структури. Причина малих значень магнітних констант у аморфного молібдену пояснена з точки зору квантовомеханічної теорії парамагнетизму.

Ключові слова: молібден, скануюча тунельна мікроскопія, парамагнетик, аморфний метал.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4, e-mail: sgr@univ.kiev.ua

K.P.Rozouvan[1], Eng,
S.G. Rozouvan[1], Ph.D., Sci. Res.
I.A. Shaykevich[1], Dr.Sc., Prof.

Magnetic properties of molybdenum thin films.

Thin molybdenum films on a glass substrate were studied by scanning tunneling microscopy and magnetic force microcopies. The measured data indicate film's surface layer with a thickness in a range of a few interatomic distances has weakly expressed magnetic properties. Scanning tunneling microscopy data point out crystallic molybdenum structure as the main cause of its magnetic properties. The origin of small magnetic constant in molybdenum glass is explained by quantum mechanical theory of paramagnetism.

Key Words: molybdenum, scanning tunneling microscopy, paramagnetic, metallic glass.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4, e-mail: sgr@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Молібден це метал який понад сто років використовується в індустрії- сталеливарній промисловості, нафтовій промисловості, тощо. Тому його базові фізичні властивості вивчалися багатьма науковими групами у різних напрямках на протязі десятиліть. Серед найбільш важливих робіт, присвячених дослідженню молібдену, слід відмітити роботу [1], в якій проводиться огляд та аналіз термодинамічних властивостей молібдену, роботу [2], в якій досліджувалась густина електронних станів, поверхня Фермі та оптична провідність металу. Оптичні властивості тонких плівок молібдену детально вивчались з використанням спектральної еліпсометрії [3]. Властивості масивного молібдену досліджувались за допомогою високороздільної спектроскопії в ультрафіолетовій області [4], а атомарного - в широкій спектральній області [5]. В останній роботі було прокласифіковано біля 8000 додаткових спектральних ліній з точки зору конфігурацій оболонок $4d^45s^2$, $4d^55s$ $4d^6$ в металі. В роботі [6] була вивчена спін-орбітальна взаємодія в молібдені. Кристалічна структура поверхні цього металу і оксидної плівки на ньому експериментально досліджувалась в останні роки з використанням скануючої тунельної мікроскопії [7]. Тонкі плівки аморфного молібдену з локально впорядкованим розташуванням атомів та інтерфейсні шари молібден-кремній вивчались в [8]. В роботі [9] було виявлено, що тип атомної структури молібдену в тонкій плівці цілком визначався товщиною плівки. Так для плівок з товщинами менше 2 нанометрів була характерна аморфна структура, а для більш товстих плівок-кристалічна структура металу. При цьому фазовий перехід аморфний-кристалічний стан відбувався зі значними змінами товщини плівки та її шорсткості.

В роботі [10] вивчалися еліпсометричні властивості трьох тонких плівок молібдену напилених на скляні підкладки магнетронним методом в атмосфері аргону з одночасним застосуванням атомно-силової мікроскопії АСМ і було показано, що всі плівки складаються з трьох шарів: верхнього шару, який являється окислом MoO_3, середнього шару, який відповідно був чистим металічним молібденом і, нарешті, тонкого шару між плівкою і скляною підкладкою,

© К.П. Розуван, С.Г.Розуван, І.А.Шайкевич, 2013

який відповідає за адгезію плівки і також є окислом MoO_3. Загальні товщини плівок складали 13нм, 14нм і 18нм відповідно, а товщини чистого металічного молібдену відповідно були 7нм, 6нм і 11нм. Найбільш окисленим виявився другий зразок із загальною товщиною 14нм. Товщина верхнього шару окислу для нього складала 7нм, тобто більше ніж товщина середнього шару металу.

Окремо слід виділити роботи в яких вивчались магнітні властивості молібдену. Наприклад, в [11] експериментально вивчались магнітні поля надпровідного молібдену при наднизьких температурах. Вплив магнітного поля на термоемісію з молібдену досліджувався в [12].

Задача даної роботи є вивчення зв'язку магнітних властивостей молібдену та його кристалічної будови.

Експериментально структура молібденових тонких плівок вивчалась за допомогою методик скануючої тунельної мікроскопії (СТМ) та магнітносилової мікроскопії (МСМ). Обидві методики реалізовувалися на атомно-силовому мікроскопі- зондовій нанолабораторії ІНТЕГРА виробництва NT-MDT. Вимірювання СТМ дозволяли аналізувати особливості кристалічної структури зразка аналогічно до вимірювань проведених в [13]. МСМ вимірювання поверхні молібденового зразка проводились наступним чином. При першому скануванні у напівконтактному режимі визначався профіль поверхні дзеркала. Голка кантілівера, який

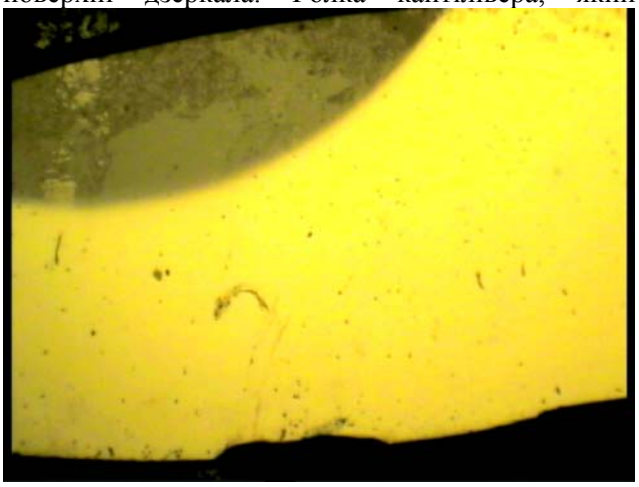


Рис. 1. Мікрофотографія поверхні молібденової плівки на склі. Розмір по вертикалі 3мм.

використовувався при вимірах була покрита тонким шаром феромагнетика (кобальт), який намагнічувався протягом однієї години перед вимірами. Друге сканування проводилось у пасивному режимі - на кантілівер не подавалась напруга, а реєструвалось тільки його відхилення, яке визначалось магнітною взаємодією голка-поверхня зразка. Для того щоб не допустити ван-дер-ваальсівської взаємодії між голкою та зразком, другий прохід проводився на фіксованій висоті над поверхнею - фактично голка рухалась по профілю поверхні, виміряному при першому проході, але на деякій постійній висоті над поверхнею, яка у нашому випадку становила 30 нм (потроєна величина максимальної нерівності поверхні молібденової плівки). Молібденова плівка отримувалась аналогічно [10]. Мікрофотографії поверхні зразка представлені на рис.1. Видно, що плівка дзеркально відбиває світло, тобто має високу якість гладкої поверхні. Виміри за допомогою скануючої тунельної мікроскопії (Рис.2) показали, що незважаючи на високу якість поверхні молібденове покриття має досить неоднорідну структуру. Так на рисунку видно утворення, які можуть бути інтерпретовані як монокристали молібдену на поверхні плівки. Утворення не схожі на профіль скляної підложки, яка має шорухуватість, оскільки мають ідеально прямі краї та нанометрову ширину. Наявність монокристалічних утворень свідчить про те, що внутрішня атомна будова плівки має принаймі ще одну фазу, наприклад, полікристалічну. На рис.3

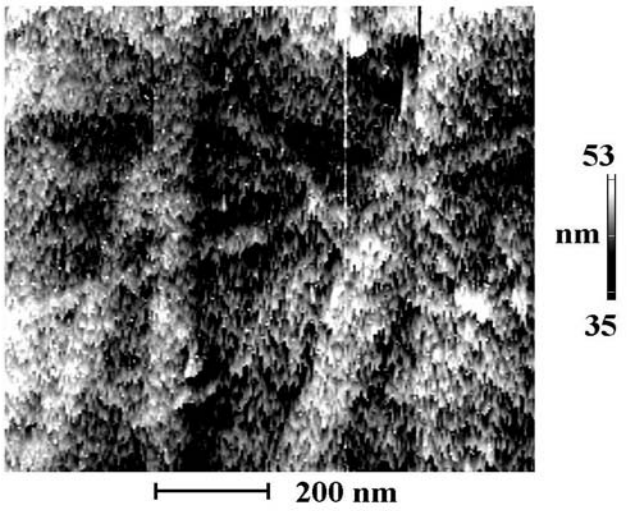


Рис. 2. Скануюча тунельна мікроскопія молібденової плівки на скляній підложці. Роздільна просторова здатність вимірів – 4нм.

представлені результати СТМ вимірів лінійної структури на поверхні молібденової плівки з кращою роздільною здатністю. Видно, що смуга має дуже чіткі прямі краї (темні вузькі полоси на їх краях) а також сторони у вигляді впорядкованих прямих кутів. Дані рис.3 є додатковим аргументом на користь того, що ми

спостерігаємо монокристали молібдену на поверхні молібденової плівки.

На рис. 4 приведені результати магнітосилових вимірів поверхні плівки. Верхнє зображення рисунка (фактично результати напівконтактної атомно-силової мікроскопії) добре узгоджується з вимірами рис.2, наприклад, по величинах нерівностей. Оскільки просторова

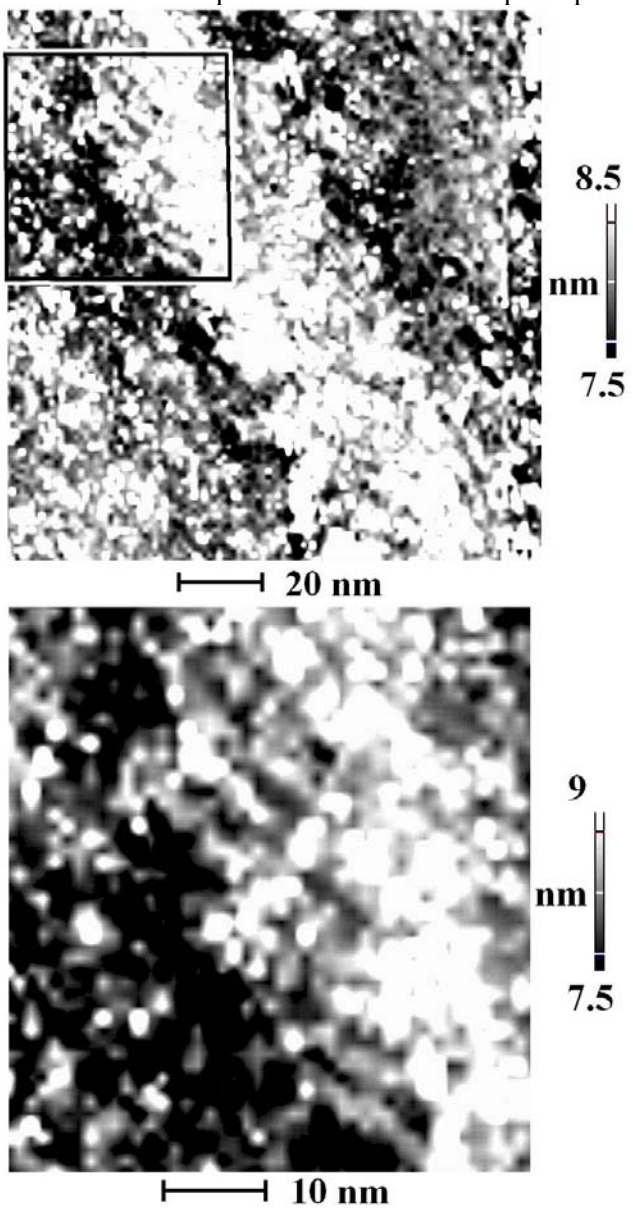


Рис. 3. Скануюча тунельна мікроскопія молібденової плівки на скляній підложці. Роздільна просторова здатність вимірів – 1нм.. Внизу збільшене зображення плівки в прямокутнтку верхньлго рисунку

роздільна здатність вимірів у цьому випадку визначалась кривизною вістря голки кантілівера і не перевищувала ≈ 40нм, профіль поверхні виглядає більш згладженим у порівнянні з СТМ результатами рис.2. Нижнє зображення, яке фактично є розподілом магнітних сил по поверхні зразка має дві чіткі особливості: 1.У лівій частині топологія зображення має подібну до верхнього зображення структуру (горизонтальні складки хоча й з удвічі меншим періодом). 2.У центральній часині характери профілів верхнього і нижнього зображень не співпадають. З точки зору методики МСМ, якщо величина магнітної взаємодії була б однаковою в кожній точці поверхні зразка, то нижнє зображення рис.4 представляло б собою однорідний фон. У нашому ж випадку приповерхневі шари молібденової плівки мають відмінні від внутрішньої частини

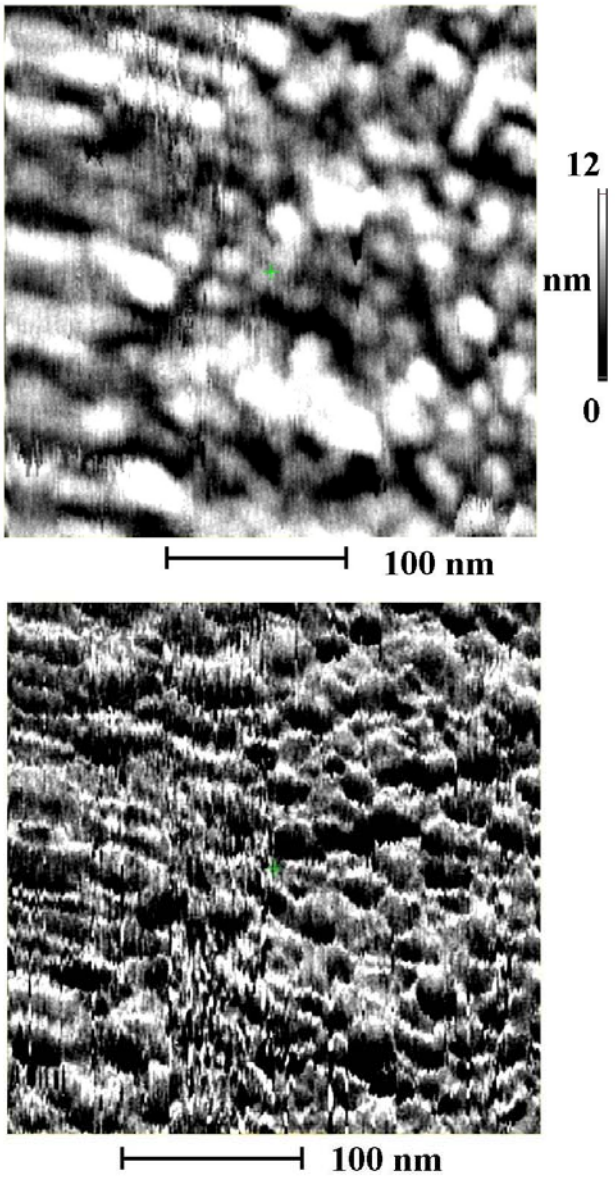


Рис. 4. Магнітно-силова мікроскопія молібденової плівки. Верхнє зображення-профіль поверхні зразка, нижнє– напівтонова карта просторового розподілу величини магнітної взаємодії голка-зразок.

плівки магнітні властивості. Для вивчення типу атомної впорядкованості плівки нами були проведені СТМ виміри поверхні плівки з високою просторовою роздільною здатністю. На рисунках 5,6 представлені результати СТМ вимірювань поверхні плівки з ясно видимою атомною структурою. З рис. 6 видно, що верхній шар плівки, який умовно являє собою складчасту структуру з нерівностями 2-3 нанометри, має аморфну структуру (рис.6, нижнє зображення). Отже верхній шар на границі окислу MoO_3 , вивчений в [10] має невпорядковану структуру. Це може означати наявність оксидованого молібдену на поверхні молібдену, наявність домішкових атомів (наприклад, кисню) або

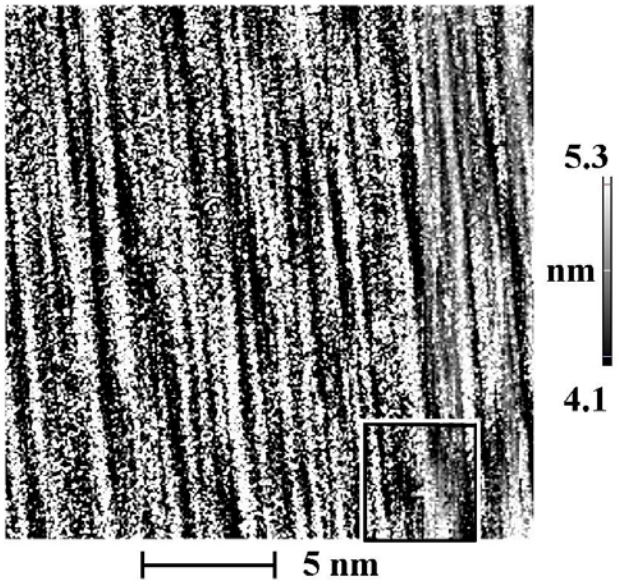


Рис. 5. Скануюча тунельна мікроскопія молібденової плівки на склі. Роздільна просторова здатність вимірів – 0.08нм.

аморфну структуру самого молібдену. На верхньому зображенні рис.6 видна кристалічна структура молібдену в проміжках між складками. Дані рисунків 5, 6 повністю корелюють з результатами досліджень [9]. З фізичної точки зору можлива аморфна структура верхньої границі молібденової плівки пояснюється дуже швидким охолодженням при напиленні внаслідок посиленої тепловіддачі з поверхні напиленої плівки. При цьому як уже було сказано утворюється плівка окислу на поверхні. Концентрація домішкових атомів теж слід вважати значною. Внутрішні шари плівки охолоджуються повільніше і в них формується полікристалічна структура або потенційно можуть утворюватись монокристали (рис. 2,3).

З точки зору класичної електродинаміки дані рис. 4 обумовлені взаємодією феромагнетика, яким покрите вістря кантілівера, з наведеними ним же магнітними диполями в парамагнітній плівці молібдена.

Парамагнетизм в металах може бути пояснений з використанням двох підходів- парамагнетизм типу Паулі.. Магнітна сприйнятливість делокалізованих електронів (парамагнетизм Паулі) в металі описується співвідношенням

$$\chi_n = (\mu_B)^2 n(E_F) \qquad (1)$$

де χ - парамагнітна сприйнятливість, μ_B - магнетон Бора, n -середнє число електронів в певному стані, а E_F енергія Фермі.

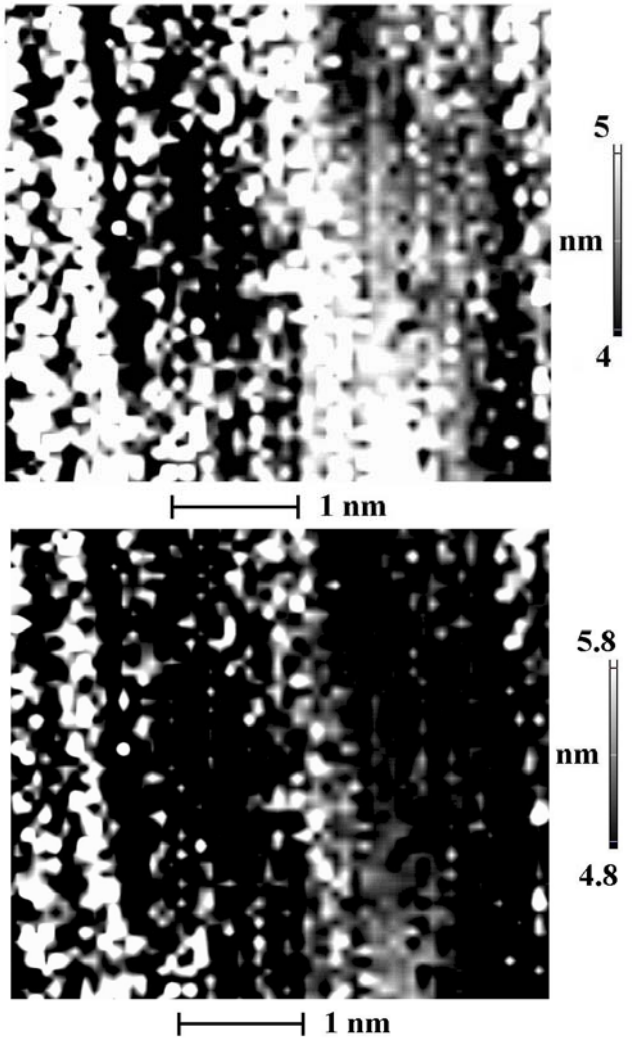


Рис. 6. Збільшене зображення прямокутника з рис. 5. Верхній рисунок- напівтоновий рельєф областей між складками, нижнє- вершин складок на поверхні молібденової плівки.

Зменшення магнітної сприйнятливості типу Паулі [14-16] може бути пояснена наступним чином. При зменшенні упорядкованості

кристалічної гратки, яке може бути пояснене декількома причинами- наявністю шарів аморфного металу чи окислу, або наявністю домішок, відбувається порушення трансляційної симетрії. При цьому вже не виконуються граничні умови Борна-Кармана для рівняння

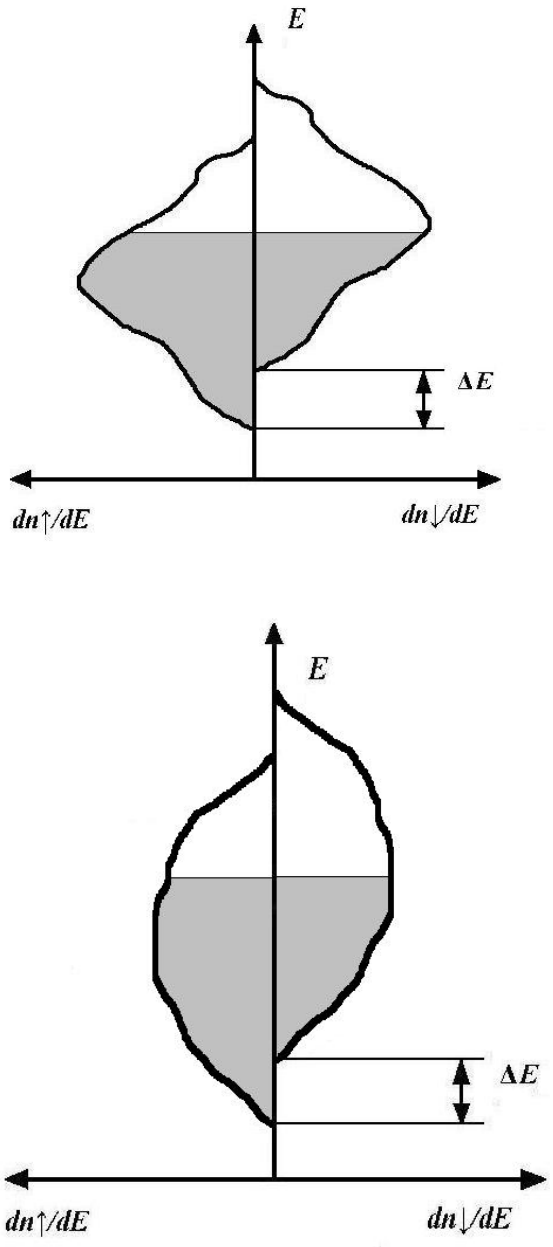


Рис. 7 Схематичне зображення густини електронних станів парамагнетика в магнітному полі. Верхня крива- ідеальний кристал, нижня- аморфний метал.

Шредінгера на яких базується теорема Блоха. Якщо для ідеального металічного кристалу та слабовпорядкованого металу нижні границі густин електронних станів для електронів зі співнапрямленими та протилежно напрямленими спінами. зміщені на одне й те ж значення $\Delta E = 2\mu_B B$ (Рис.7), то для верхнього краю заселених станів, що відповідає рівню Фермі, ми маємо іншу картину. Для структури з меншою величиною впорядкованості (Рис.7, нижній рисунок) крива густини електронних станів стає більш гладкою і пологою, що призводить до зміни значень густин електронних станів для електронів на рівні Фермі зі співнапрямленими і протилежно напрямленими магнітному полю спінами. Це і призводить до зміни магнітної сприйнятливості згідно співвідношення (1), оскільки в ньому змінюється величина n. При наших вимірюваннях це означає зменшення сили взаємодії між феромагнетиком (голкою кантілівера) та парамагнетиком.

Для детального квантовомеханічного розрахунку молібдену необхідно врахувати спектральні властивості молібдену в кристалічній гратці конкретної симетрії. Молібден має об'ємноцентровану кристалічну гратку та електронну конфігурацію характерну для перехідних металів - $5s^1 4d^5$. Основний енергетичний рівень для молібдену відповідає терму $^7S_3$, [17], що складається з 32 вироджених ліній- $J_i = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}; M_J \in [-J_i, J_i]$).Для кристалів з кубічною симетрією для випадку електронів з L=0, енергетичні рівні, під впливом внутрішньокристалічного поля формують одну енергетичну смугу [18, 19]. З чисто квантомеханічної точки зору [20], оператор потенціальної енергії, містить складову оператора внутрішньокристалічного поля V_{cryst} з кубічною симетрією, яле також впливає на виродження енергетичних рівнів. Врахування просторової симетрії дозволяє провести чисельні розрахунки густини електронних станів та електронної структури молібдену за допомогою доступних програмних пакетів з більшою ефектиністю. Так, наприклад, можна суттєво зменшити час машинних розрахунків або розраховувати надкомірку з більшою кількістю атомів.

Результати експериментів із застосуванням магнітно силової мікроскопії та скануючої тунельної мікроскопії показали, що приповерхневий шар молібденової плівки товщиною декілька міжатомних відстаней має слабше виражені магнітні властивості в порівнянні з полікристалом молібдену. Це може бути пояснено трьома причинами: наявністю на поверхні зразка тонкого шару аморфного молібдену чи MoO_3 або наявнітю в приповерхневих шарах різного роду атомарних

домішок. Результати скануючої тунельної мікроскопії та магнітно силової мікроскопії вказують на пряму залежність магнітних властивостей молібдену від того наскільки впорядкована його кристалічна структура. Отримані дані підтверджують існування аморфної плівки в приповерхневих шарах типу MoO_3 з окремими включеннями атомів Mo а також атомарними домішками на зразок кисню. З точки зору квантовомеханічної теорії парамагнетизму типу Паулі причина малих значень магнітних констант у молібдену з менш впорядкованою кристалічною граткою може бути пов'язана зі зміною густини електронних станів на рівні Фермі внаслідок зниження простової упорядкованості у розташуванні атомів.

Список використаних джерел

1. *Desai P.D* Thermodynamic properties of manganese and molybdenum //J. Phys.Chem.Ref. Data -1987. -v.16. -N1. -P.91-108.

2. *Jani A..R., Tripathi G.S., Brener N.E. and Callaway J.* Band structure and related properties of molybdenum // Physical Review B -1989. -v.40. – N3. -P.1593-1602.

3. *Walker J. D., Khatri H., Ranjan V., Jian Li, Collins R. W.* Electronic and structural properties of molybdenum thin films as determined by real-time spectroscopic ellipsometry// Appl. Phys. Lett. -2009. -94. -141908.

4. *Gunion R. F., Dixon-Warren St. J., Morse M. D., and Lineberger W. C.,* Ultraviolet photoelectron spectroscopy of molybdenum and molybdenum monoxide anions// J. Chem. Phys. -1996. -vol.104. -N 5. -P.1765-1773.

5. *Trees R.E. and Harvey M.M.* Low even configurations of the first spectrum of molybdenum (Mo I) // Journal of research of the National Bureau of Standards. -1952. -vol.49. -N6. P.397-408.

6. *Cleveland J. R. and Stanford J. L.* Evidence for large spin-orbit coupling in metalli molybdenum // Physical Review Letters // -1970. -v.24. -N26. -P.1482-1485.

7. *Radican K., Berdunov N., Manai G., and Shvets I. V.* Epitaxial molybdenum oxide grown on Mo(110): LEED, STM, and density functional theory calculations // Physical Review. -2007. -B75. -155434.

8. *Meyerheim H. L., Doebler U., Puschmann A. and Baberschke K.* Amorphous molybdenum silicide layers and Mo/Si(100) interface growth: Local structure and preparation dependence // Physical Review. -1990. -v.41. -N9. -P.5871-5880.

9. *Bajt S., Stearns D. G. and Kearney P. A.* Investigation of the amorphous-to-crystalline transition in MoÕSi multilayers //Journal of Applied Physics. -2001. -v.90. -N.2 -P.1017-1025.

10. *Lendel V.V., Lomakina O.V., Mel'nichenko L.Yu., Shaykevich I.A.* Spectroellipsometric investigations of thin films of molybdenium and transient layers on them // Metal Physics and Advanced Technologies. 2010, -v.32, -N8, P.1013 -1019.

11. *Hein R.A., Gibson J.W., Pablo M.R. and Blaugher R.D.* Critical Magnetic Fields of Superconducting Molybdenum // Physical Review. -1963. -v.129. -N1. -P.136-137.

12. *J. Greenburg* Effect of a Magnetic Field on Therinionic Emission from Molybdenum // Physical Review. -1958. -v.112. -N6. -P.1898-1900.

13. *Rozouvan K.P., Rozouvan S.G., Shaykevich I.A.* Scanning tunneling microscopy of dye thin films // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, -2012, -N1, P.359-364.

14. *J.M.D.Coey* Magnetism and magnetic materials Cambridge, University Press 2009 , 614pages

15. *Michael E. McHenry, Matthew A. Willard, David E.* Laughlin Amorphous and nanocrystalline materials for applications as soft magnets // Progress in Materials Science. -1999. -44. -P.291-433.

16. *D.A. Drabold* Topics in the theory of amorphous materials// Eur. Phys. J. B. -2009. -68. -P.1–21.

17. *Jack Sugar and Arlene Musgrove* Energy Levels of Molybdenum, Mo I through Mo XLII// J.Phys. Chem. Ref. Data. -1988. -vol.17. -No.1. -P.155-239.

18. Crystal field handbook. Edited by *D.J.Newman and Betty Ng*, -Cambridge: University Press. -2000. -290 p.

19. *J. H. Van Vleck* The theory of electric and magnetic susceptibilities. -Oxford: At The Clarendon Press, -1932. -384p.

20. *Norberto Majlis* The quantum theory of magnetism. -Singapore:World Scientific Publishing. -2007. -377 p.

Надійшла до редколегії 18.01.13

УДК 534.34

І.А. Шайкевич[1], д.ф.-м.н., проф.,
В.В. Лендел[1], провідний інженер,
О.В.Ломакіна, к.ф.-м.н.,
Л.Ю. Мельниченко[1], к.ф.-м.н., ст.н.с.

Спектроеліпсометричні властивості тонких плівок молібдену при збудженні поверхневих поляритонів із застосуванням тришарової моделі плівки

Методом Бітті виміряні спектроеліпсометричні параметри тонких плівок молібдену різної товщини, а саме tgΨ, (де Ψ-азимут відновленої лінійної поляризації відбитого світла) в ділянці довжин хвиль λ÷ 550 нм−1200 нм. В цьому ж спектральному діапазоні на основі тришарової моделі тонкої плівки за допомогою рекурентних формул Ейрі розраховані аналогічні параметри. Порівняння експериментальних і теоретичних кривих показує їх якісне узгодження. В той же час повне кількісне узгодження відсутнє. Останнє пояснюється тим, що в теоретичній моделі межі поділу між шарами ідеально плоскі, а в реальних плівках шорсткі і неоднорідні. Як на теоретичних, так і на експериментальних спектральних кривих існує максимум, який можна пояснити міжзонними переходами в районі Г і Н точок зони Бріллюена. Центральний шар у тришаровій моделі є металічним молібденом, а крайні шари окислами Мо.

Ключові слова: тонкі плівки, оксид молібдену, спектроеліпсометрія, поверхневі поляритони

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, E-mail:

I.A. Shaykevich[1], Dr. Sci., Prof.
V.V. Lendel[1], Chief Eng.
O.V. Lomakina, PhD,
L.Yu. Melnichenko[1], PhD, Sen. Sci. Res.

Spectroellipsometry properties of the thin molybdenum films with excitations of surface polaritons using three-layer model of the film

Spectroellipsometric parameters, namely tgΨ (where Ψ-an azimuth of restored linear polarization of the reflected light) of thin molybdenum films of various thickness are measured by the Beattie method in the range of the wave lengths λ ÷ 550 nm−1200 nm. In this spectral range on the base of three-layer model of thin film similar parameters were calculated by means of Ayri recurent formulas. The comparison of experimental and theoretical curves has shown their qualitative accordance. At the same time full quantitative coincidence is absent. The last can be explained,thet in theoretical model interfaces between layers are ideally flat, but in real films there rough and nonhomogeneous. Both theoretical and experimental spectral curves have the maximum, which can be explained by interband transitions in region of G and N point of the Brillyuene zone. The central layer in three-layer model consists of metallic molybdenum, extreme layers - oxide of Mo.

Key Words: thin films, molybdenum oxide, three-layer model, spectro ellipsometry, surface polaritons

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail lmeln@ukr.net

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Вступ

Формули Ейрі часто застосовуються при еліпсометричних і рефлектометричних вимірюваннях для тонких плівок [1]. В той же час формули Ейрі були виведені для експериментів без збудження поверхневих поляритонів, і в монографіях, присвячених поверхневим поляритонам [2,3], нічого не говориться про можливість їх застосування у цьому випадку. Вперше експериментальна перевірка можливості застосування формул Ейрі при збудженні поверхневих поляритонів була виконана для тонких плівок хрому і титану в [4]. Проведені досліди показали, що ці формули цілком можливо застосовувати і у випадку збудження поверхневих поляритонів. Але в [4] була використана загальноприйнята модель одношарової тонкої плівки, для якої оптичні сталі плівки значно відрізняються від оптичних сталих відповідного металу, і крім того оптичні сталі плівки залежать від її товщини. В [5] була запропонована тришарова модель тонких

© І.А. Шайкевич, В.В. Лендел, О.В.Ломакіна, Л.Ю. Мельниченко, 2013

напівпрозорих плівок Mo і перевірена при еліпсометричних дослідженнях без збудження поверхневих поляритонів при зміні кута падіння світла на зразок. Проведені досліди показали, що середній шар в такій моделі є металічним Mo, а верхній і нижній шари є окислами Mo. В роботах [6,7] були проведені теоретичні розрахунки за допомогою формул Ейрі з використанням одношарової моделі тонкої плівки і показано, що для високопровідних, а також перехідних металів на спектральних залежностях величини tgΨ, де Ψ-азимут відновленої лінійної поляризації, існують максимуми, які відповідають міжзонним переходам в цих металах .В даній роботі виконані експериментальні і теоретичні дослідження можливості застосування тришарової моделі для тонких плівок Mo при спектроеліпсометричних вимірюваннях із збудженням поверхневих поляритонів.

Методика експерименту.

Досліджувані плівки молібдену наносились на скляні підкладки з показником заломлення n=1.52 методом магнетронного напилення в атмосфері аргону при тиску $6.6\text{x}10^{-1}$Па. Попередньо напилювальна камера відкачувалась до тиску $1.33\text{x}10^{-3}$Па. Еліпсометричні вимірювання проводилися з використанням безкомпенсаторного метода Бітті. Поляризаційний гоніометр був з'єднаний із спектрометром, спектральний інтервал якого складав λ÷550нм − 1200нм. Геометрія експерименту (рис.1) відповідала збудженню поверхневих поляритонів за методом Кречмана.

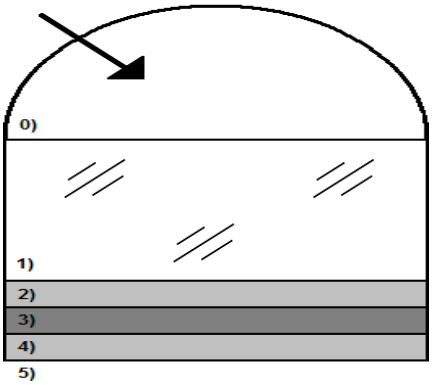


Рис.1.

Світло вводилося у скляну підкладку *1)* з боку, протилежного до нанесеної плівки Mo, за допомогою полімерного напівциліндра з показником заломлення n=1.59 *0)* (Вказано стрілкою). З протилежного боку досліджувана плівка межувала з повітрям *5)*. Скляна підкладка *1)* приклеювалась до напівциліндра за допомогою касторового масла з показником заломлення n=1.46. На межах поділу між шарами *1) – 2)*, *2) – 3)*, *3) – 4)*, *4) – 5)* тришарової моделі тонкої плівки Mo відбувалося відбивання та заломлення світла. У теоретичній моделі результуюча хвиля розраховувалася з використанням рекурентних формул Ейрі з урахуванням багаторазових відбивань від меж поділу з коефіцієнтами відбивання, що описувалися звичайними формулами Френеля для p- та s-компонент відбитого світла на кожній межі поділу. Як показали відповідні теоретичні розрахунки, шар касторового масла між напівциліндром і скляною підкладкою мало впливає на еліпсометричні параметри світла, що проходить крізь систему на рис.1. Тому при теоретичних розрахунках еліпсометричних параметрів шар касторового масла на рис.1 відсутній. Теоретичний розрахунок представляв собою розгляд оберненої задачі еліпсометрії. Для отримання амплітудного коефіцієнту відбивання для багатошарового покриття, яке показане на рис.1, було використано рекурентні співвідношення Ейрі (1):

$$R_{s,p_i} = \frac{r_{s,p_i} + R_{s,p_{i+1}} e^{2ig_i}}{1 + r_{s,p_i} R_{s,p_{i+1}} e^{2ig_i}} \qquad (1)$$

де індекси *i* відносяться до шарів системи (відбивання на границі поділу середовищ *i* та *i + 1*), n_i та f_i – відповідні комплексні показники заломлення та кути падіння на шари.

Кути падіння f_i , які одночасно були кутами заломлення на попередній межі поділу, розраховувалися за законом Снелліуса за відомим початковим кутом входження світла в напівциліндр f_0, який дорівнював куту падіння на скляну підкладку. Оскільки вирази для показників заломлення шарів *2)*, *3)* і *4)* є, взагалі кажучи, комплексними величинами (вигляду ñ = n + iк, де n – власне показник заломлення, к – показник поглинання), то і кути f_i також мали комплексний вигляд. $r_{s,pi}$ у формулі (1) − амплітудні коефіцієнти відбивання Френеля від межі поділу *i*-го та *(i+1)*-го шарів для відповідної компоненти світла, які мають вигляд:

$$r_{s_i} = \frac{n_i \cos(f_i) - n_{i+1} \cos(f_{i+1})}{n_i \cos(f_i) + n_{i+1} \cos(f_{i+1})}, \qquad r_{p_i} = \frac{n_{i+1} \cos(f_i) - n_i \cos(f_{i+1})}{n_{i+1} \cos(f_i) + n_i \cos(f_{i+1})} \qquad (2)$$

g_i – фазова товщина *i*-го шару у вигляді $g_i = \frac{2\pi}{\lambda} n_i d_i \cos(f_i)$, де n_i та d_i – відповідно показник заломлення (n_i у загальному випадку комплексний) та товщина *i*-го шару відповідно, λ– довжина світлової хвилі. $R_{s,pi+1}$ – амплітудний коефіцієнт відбивання від попереднього шару, розрахований за аналогічним співвідношенням, або рівний амплітудному коефіцієнту відбивання Френеля у випадку останньої межі поділу *4)- 5)*. Вищевказаний розрахунок проводився лише для відбитої хвилі, що вийшла з плівки у скляну пластинку. Обчислення результуючого амплітудного коефіцієнту відбивання проводилось з урахуванням інтерференції хвилі, що вийшла із скляної пластинки, відбившись від молібденової плівки, і хвилі безпосередньо відбитої на межі поділу полімерний напівциліндр−скляна пластинка 0)−1), за формулами (3):

$$R_{1p} = \left[\left(|r_{0p}|\right)^2 + \left(|R_p|\right)^2 + 2|r_{0p}||R_p| \cdot \cos\left(\arg\left(r_{0p}\right) - \arg\left(R_p\right)\right) \right]^{0.5}$$
$$R_{1s} = \left[\left(|r_{0s}|\right)^2 + \left(|R_s|\right)^2 + 2|r_{0s}||R_s| \cdot \cos\left(\arg\left(r_{0s}\right) - \arg\left(R_s\right)\right) \right]^{0.5} \quad (3)$$

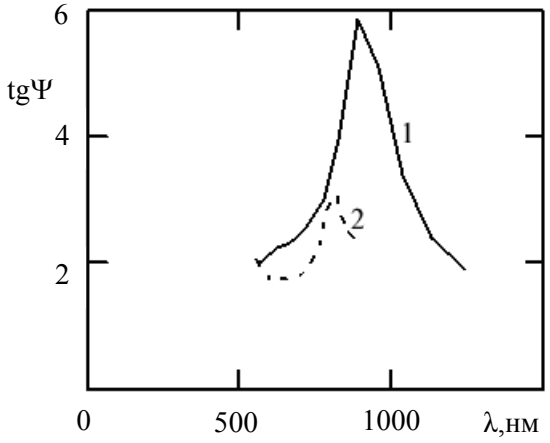
По формулам (4) визначалися відповідні еліпсометричні параметри, а саме тангенс азимута відновленої лінійної поляризації Ψ_1 і зсув фаз Δ_1.

$$\Delta_1 = \arg(r_{0p}) + \arg(R_p) - \arg(r_{0s}) - \arg(R_s)$$
$$tg\,\Psi_1 = \frac{|R_{1p}|}{|R_{1s}|} \quad (4)$$

Експериментальні результати та їх обговорення.

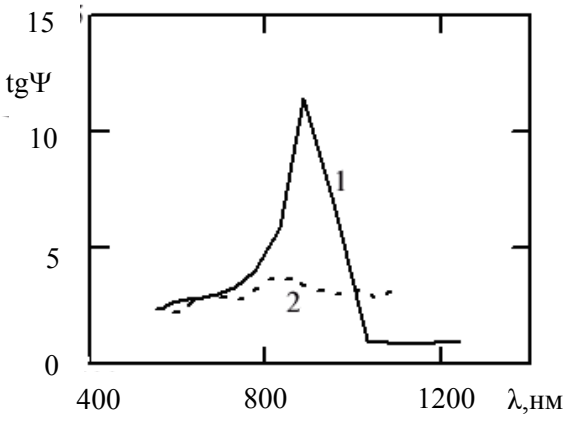
Експериментальні вимірювання і теоретичні розрахунки були виконані для трьох тонких напівпрозорих плівок Mo різної товщини, які далі позначаються як Mo1, Mo2 і Mo3. Оскільки в роботах [6,7] було показано, що для високопровідних, а також перехідних металів на спектральних залежностях величини tgΨ існують максимуми, які відповідають міжзонним переходам в цих металах, то були проведені порівняння експериментально виміряних спектральних залежностей величини tgΨ з теоретично розрахованими аналогічними залежностями на основі тришарової моделі тонкої плівки Mo.

На рис.2−4 суцільні криві одержані теоретичним розрахунком по тришаровій моделі, а пунктирні криві по експериментальним результатам. Довжина хвилі на рисунках λ приведена в нанометрах.



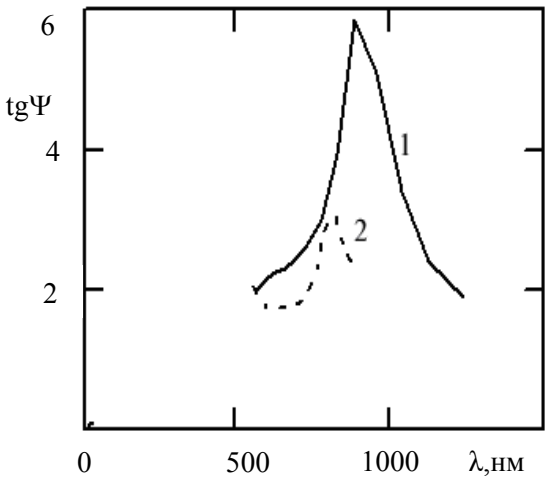
1 – теорія, 2 – експеримент

Рис. 2. Залежності tgΨ від довжини хвилі λ для плівки Mo1



1 – теорія, 2 – експеримент

Рис. 3. Залежності tgΨ від довжини хвилі λ для плівки Mo2



1 – теорія, 2 – експеримент

Рис. 4. Залежності tgΨ від довжини хвилі λ для плівки Mo3

Кут падіння був вибраний і в розрахунках і в експерименті 39^0, бо при цьому куті спостерігається максимум збудження поверхневих поляритонів. Оптичні сталі всіх трьох шарів для розрахунків були взяті з роботи [5]. Товщини шарів варіювалися з метою максимального співпадання теоретичних і експериментальних даних. Як випливає з рис.2−4 і на теоретичних і на експериментальних кривих в районі довжин світлової хвилі приблизно 800 нм існують максимуми, але на експериментальних кривих вони значно менші по величині і трохи зсунуті в бік менших довжин хвиль. Аналогічний максимум існує і на спектральній залежності оптичної провідності для молібдену [8].

В [8] відзначається, що шорсткість поверхні зразка приводить до зменшення величини максимумів поглинання, викликаних міжзонними переходами. Крім того максимуми при цьому уширюються. Саме це спостерігається на рис.2−4.

Експериментальні значення, зняті на реальних зразках з шорсткими неоднорідними поверхнями, значно менші по величині ніж розраховані теоретично для ідеально плоских поверхонь. Останнє особливо добре видно на рис.3 для зразка Mo2. Справа в тому, що проведені дослідження поверхні плівок на атомно-силовому мікроскопі показали, що зразок Mo2 має найгіршу поверхню. Саме тому розходження між теорією і експериментом найбільше для цього зразка. Згідно роботі [9], в якій приведено енергетичний спектр Mo, максимум на рис.2−4 можна інтерпретувати як перехід із зони $25'$ між симетричними точками Γ і H зони Бріллюена в Δ напрямі на рівень Фермі.

Висновки.

1. Проведені теоретичні і експериментальні дослідження показали, що експериментальні і теоретичні спектральні залежності еліпсометричного параметра tgΨ узгоджуються для плівок Mo лише якісно. Кількісне співпадання відсутнє. Останній факт можна пояснити тим, що в теоретичній тришаровій моделі плівки границі всіх шарів були ідеально плоскими, а в реальних плівках вони шорсткі і неоднорідні.

2. Розрахунки на основі тришарової моделі показують, що середній шар є металічним молібденом, а крайні шари окислами типу MoO_3.

3. Максимум на спектральних кривих залежності tgΨ(λ) може бути інтерпретовано, як перехід із 25’ між симетричними точками Γ і H зони Бріллюена в Δ напрямі на рівень Фермі.

Список використаних джерел

1. *Born M., Wolf E.W.* Principles of Optics, Pergamon Press, Oxford, 1991. − 950 p.
2. Surface polaritons (Ed. By *V.M.Agranovicha i D.L.Millsa*) Moscow:, Nauka. − 1985. − 525 p. (in Russian).
3. *Dmitruk N.L., Litovchenko V.G., Strishevsky V.L.*. Surface polaritons in semiconductors and dielectrics / Kyiv:, Naukova Dumka. − 1989. − 376 p. (in Russian).
4. *Melnichenko L.Yu., Shybiko Ya.A., Shaykevich I.A.* Angular dependences of ellipsometric parameters of thin Cr and Ti films under surface polariton excitation // Functional Materials. − 2006. − V.13, №1. − P.161-163.
5. *Lendel V.V., Lomakina O.V., Melnichenko L.Yu., Shaykevich I.A.* Spectroellipsometric research of thin molybdenum films and their transition overlayers // Metallofizika i noveishie tekhnologii. − 2010. − T.32, №8. − C.1013-1019. (in Ukrainian).
6. *Shybiko Ya.A., Melnichenko L.Yu, Prorok V.V., Shaykevich I.A.* Spectral dependencies of ellipsometric parameters of high conductive thin films with excitation of surface polaritons // Visn. Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. Ser. Fiz.-Mat. Nauky,. – 2007. – N 2. – P. 367-370. (in Ukrainian).
7. *Shaykevich I.A., Lomakina O.V., Melnichenko L.Yu., Shybiko Ya.A.* Spectral dependencies of ellipsometric parameters of transitional metals thin films with excitation of surface polaritons // Visn. Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. Ser. Fiz.-Mat. Nauky,– 2010. – N 2. – P. 307-312.. (in Ukrainian).
8. *Noskov M.M.* Optical and magnetooptical properties of metals / Sverdlovsk. − 1983. − 219 p. (in Russian).
9. *Iverson I.R.J., Hodges L.* Molybdenum: band structure, Fermi surface and spin-orbit interaction // Phys.Rev.B. − 1973. − **V**.8, №4. − P.1429-1432.

Надійшла до редколегії 07.02.13 р.

Підписано до друку . Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. №__. Друк. арк. ____. Тираж _____. Зам. ____.
Друкарня _____.