

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 4

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2012

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2012
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф.,
заступник головного редактора, відповідальний за видання;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Данилов Вадим Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.п.с.;
Левитський Сергій Михайлович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Махарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Маципура Володимир Тимофійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodriv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бондаренко Н.В. Характеристичні підалгебри алгебри Лі, асоційованої з силовою p -підгрупою симетричної групи	7
Гнатюк О. Індуковані комодулі над коалгеброю	13
Дзямко В.Й., Яневич Т.О. Збіжність за ймовірністю розкладів деяких випадкових процесів за поліномами Лежандра	17
Журавльов Д.В. Про нежорсткі сагайдаки	22
Журавльов В.М., Зеленський О.В., Дармосюк В.М. Одиничні сагайдаки матриць показників	27
Мишура Ю.С., Банна О.Л. Дробовий броунівський рух як границя марківських процесів	32
Сливка-Тилишак Г.І. Умови існування узагальненого розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими початковими умовами з простору Орліча	36

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Балога С.І., Король І.І. Періодичні розв'язки вироджених імпульсних систем	43
Івашенко Д.О., Яровой Л.К., Розумнюк В.І. Світловодний сенсор механічних коливань з підвищеною чутливістю в нанометровому діапазоні	47
Краснопольська Т.С., Приходько Д.Ф., Гуржій О.А. Динамічні характеристики консольного стрижня з малою жорсткістю на згин	52
Крєневич А.П. Асимптотична відповідність з ймовірністю і диференціальних рівнянь не розв'язаних відносно похідної зі збуренням типу білого шуму	56
Ловейкін Ю.В. Керування коливними процесами в одній двомасовій системі	60
Любима О.С. Прискорення ітерацій для автономної крайової задачі методом Ньютона-Канторовича	64
Сиротенко А.В. Обмежені та сумовні зі степенем p розв'язки різницевого рівняння з цілочисельним аргументом	68
Хотенко О.О. Аналіз впливу початкової амплітуди на затухання нелінійної пружної хвилі Релея	73
Яременко М.І. Властивості строго локальних генераторів напівгрупи нелінійних операторів тиску в просторах Лебега	77

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бармак О.В. Про один підхід до синтезу та розпізнавання жестової інформації на основі базисних елементів	83
Бойко Б.І. Каркасно-слотове програмування	87
Буй Д.Б., Компан С.В. Уточнення множинного успадкування у вигляді операції накладання	90
Галкін О.А. Автоматичне налаштування коефіцієнтів масштабування у проблемі вибору характеристик для ОВМ	93
Галкін О.В. Апроксимація рядів динаміки за допомогою нейронних мереж	99
Галкіна О.А. Міри ризику в проблемах оптимізації портфеля	103
Сфімов Г.М. Технологія для моделювання і розпізнавання емоцій на обличчі людини	107
Іванов С.В. Підхід до композиції абстрактних систем обробки сигналів	110
Катеринич Л.О. Деякі підходи до можливості застосування адаптивних алгоритмів у нейронних мережах	116
Кашпур О.Ф., Трубецькая О.Д. Розв'язання інтерполяційних задач типу Ерміта та Ерміта-Біркгофа в гільбертовому просторі	122
Кобзар А.Ю. Структура бази зображень для побудови панорамних знімків	128
Колянова Т.В. Математична модель природженого імунітету. Вплив запізнення на характер стійкості стаціонарних точок	132
Корлюк О.С. Гіперплощинний класифікатор повнотекстних документів	136
Котляров С.В. Аналіз використання гібридного алгоритму навчання штучної нейронної мережі для деяких задач класифікації	139
Лук'янова О.О. Про зв'язок мови CN-моделі з компонентами-переходам і мови детальної моделі	145
Петрі паралельної розподіленої системи	
Марченко О.О. Застосування методів невід'ємної факторизації тензорів для визначення стійких семантичних відношень при обробці великих текстових корпусів	151

Машенко С.О. Задача раціонального вибору альтернатив з нечіткою множиною чітких відношень переваги	157
Негадайлов П.А., Полоцький С.В. Про моменти нерегулярного мартингалу, пов'язаному з гіллястим випадковим блуканням	161
Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів: семантичні аспекти	165
Погорілий С.Д., Потєбня А.В. Розробка новітніх систем штучного інтелекту для розв'язання задач комівояжера	173
Поляков С.А., Сільвейструк Л.М., Шишацька О.В. Уніфікована модель даних на основі підходу «сутність-зв'язок»	185
Савкіна М.Ю. Коваріаційна матриця оцінки параметрів моделі сплайнової регресії з обмеженнями на параметри у вигляді рівностей	191
Семенов В.В. Три теореми про напівнеперервні зверху опуклі функціонали	195
Слабошпийський О.С. Оцінювання нестационарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок "тяжіння" для систем при неklasичних припущеннях	199
Терешенко В.М. Пошук найкоротшого шляху у простому багатокутнику з перешкодами	203
Терешенко В.М., Фісуненко А.Л. Особливості розв'язання задач регіонального пошуку для d-вимірному випадку	207
Халимон О.О. Нова економічна модифікація методу Корпелевич для монотонних задач про рівновагу	211
Швещ О.Ф. Про деякі задачі оптимізації областей практичної стійкості та їх використання	217
Шкільнюк Д.В. Система розпізнавання елементів дактильної мови	223
Шкільняк О.С. Секвенційні числення транзитивних композиційно-номінативних модальних логік	225
Шкільняк С.С. Секвенційні числення логік часткових та неоднозначних квазіарних предикатів	231
РАДІОФІЗИКА	
Бутарєв К.О., Коваль І.П., Лень Ю.А., Находкін М.Г. Вплив відпалу на формування та кінетику окислення границі розділу силіцид/Si(001)	239
Голобородько А.О. Вплив стану навколишнього середовища на якість передачі оптичних сигналів	243
Іванюта О. М. Особливості побудови біозв'язків SWCNT - ДНК для біосенсорів	245
Котов М.М., Поданчук Д.В. Вплив спекл-поля на відновлення оптичного хвильового фронту	249
Левитський С.М. Відбивання від іоносфери скісно падаючих ЛЧМ-радіоімпульсів	253
Находкін М.Г., Куліш М.П., Литвин П.М., Родіонова Т.В., Сутягіна А.С. Стихи границь зерен у нанокремнієвих плівках	257
Находкін М.Г., Федорченко М.І. Формування інтерфейсу Gd/Si(113)	261
СУЧАСНА ФІЗИКА	
Бардик В.Ю., Олійник А.В. Аномальна температурна залежність питомого об'єму води поблизу точки плавлення	267
Вовченко Л. Л., Лазаренко О.А., Мацуї Л. Ю., Журавков О. В. Перещ, Ю.С., Федорещ В.С. П'єзорезистивні властивості епоксидних композитів із графітовими нанопластинками та нітридом бору	273
Григор'єв А.М., Королович В.Ф., Кузовков Ю.Г., Марков І.В., Мороз К.О., Павленко Д.В. Пружні властивості молекулярних модельних флюїдів у наближенні жорстко зв'язаних твердих сфер	279
Єщенко О.А. Вплив анізотропії ефективної маси електронів і дірок на фазовий перехід газ – рідина в системі екситонних молекул у напівпровідникових кристалах	283
Махлайчук П.В., Мороз К.О. Нова конфігурація димеру води	289
Павленко О.Л. Розрахунки електронної та коливної структури молекулярного комплексу C_{60} -Sn	295

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.554.314

Н. В. Бондаренко¹, к.ф.-м.н.**Характеристичні підалгебри алгебри Лі,
асоційованої з силовською p -підгрупою
симетричної групи**

Доведено, що підалгебра алгебри Лі, асоційованої із силовською p -підгрупою симетричної групи степеня p^m , є характеристичною тоді і лише тоді, коли вона є паралелотопічним ідеалом.

Ключові слова: характеристична підалгебра, алгебра Лі, силовська p -підгрупа, симетрична група.

¹Київський національний університет будівництва і архітектури, 03680, Київ, Повітрофлотський проспект, 31, e-mail: natvbond@gmail.com.

Communicated by Prof. V. V. Kirichenko.

Introduction

M. Lazard in [4] associated a Lie ring to every nilpotent group as a direct sum of quotients of the terms of the lower central series. Under certain natural conditions (for instance, when the group is a p -group) one can define the multiplication of ring elements by elements of the field $\mathbb{F}_p$ and in this way get a Lie algebra. Since the structure of Lie algebras is richer than group structures, reformulation of group-theoretic problem in Lie terms makes the problem more amenable to investigation. Indeed, the study of Lie algebras associated with groups happens to be effective for the solution of different group-theoretical problems (see [5] and the references therein): in the study of group identities, growth of groups, the coclass theory for pro- p groups, the theory of fixed points of automorphisms etc.

Every finite p -group is a subgroup of the Sylow p -subgroup of the finite symmetric group. Therefore the study of these Sylow p -subgroups is an important step in understanding the structure of all finite p -groups. In [3] L. A. Kaloujnine constructed a special tableau representation of the Sylow p -subgroup P_m of the symmetric group of degree p^m and used this representation to study the structure of the group. In particular, he described all characteristic subgroups in terms of parallelotopic subgroups. In [6] simi-

N. V. Bondarenko¹, PhD**Characteristic subalgebras of Lie algebra
associated with the Sylow p -subgroup of
symmetric group**

We prove that a subalgebra of the Lie algebra associated with the Sylow p -subgroup of the symmetric group of degree p^m is characteristic if and only if it is a parallelotopic ideal.

Key Words: characteristic subalgebra, Lie algebra, Sylow p -subgroup, symmetric group.

¹Kyiv National University of Construction and Architecture, 03680, Kyiv, Povitroflotsky Avenue, 31, e-mail: natvbond@gmail.com.

lar tableau representation was constructed for the Lie algebra L_m associated to the group P_m and tableau technic was used to study the structure of L_m and its finitary analog in [7, 2, 1]. In the present paper we continue study the Lie algebra L_m and prove the analog of Kaloujnine's result: a subalgebra of L_m is characteristic if and only if it is a parallelotopic ideal.

1 Preliminaries

Let L be a Lie algebra over the field $\mathbb{F}_p$, where p is a prime number. The automorphism group of the Lie algebra L we denote by $\text{Aut}(L)$. A subalgebra A of the Lie algebra L is called *characteristic subalgebra* if it is invariant under the action of every automorphism of L , i.e., $\varphi(A) \subset A$ for all $\varphi \in \text{Aut}(L)$.

Let P_m be the Sylow p -subgroup of the symmetric group of degree p^m . According to [3] the group P_m is isomorphic to the group of tableaux of the form

$$u = [a_1, a_2(x_1), \dots, a_m(x_1, \dots, x_{m-1})], \quad (1)$$

where $a_1 \in \mathbb{F}_p$, $a_i(x_{i-1}) \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_{i-1}]$ for $i = 2, 3, \dots, m$ are reduced polynomials of degree $\leq p-1$ with respect to the ideal J_i generated by $x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \dots, x_{i-1}^p - x_{i-1}$.

The product of two tableaux u and v with coordinates $a_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ and

$b_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ respectively is the tableau w with coordinates

$$a_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) + b_i(x_1 + a_1, \dots, x_{i-1} + a_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-2}))$$

for $i = 1, 2, \dots, m$, where all the products are in the reduced form. The identity element is the tableau with zero coordinates, and the inverse to a tableau of the form (1) is the tableau with coordinates

$$-a_i(x_1 - a_1, x_2 - a_2(x_1 - a_1), \dots, x_{i-1} - a_{i-1}(x_1 - a_1, \dots))$$

for $i = 1, 2, \dots, m$.

Recall the general construction of a Lie ring associated with the lower central series of a group, known as the Lazard construction [4].

The lower central series of a group G is the descending series of subgroups

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \gamma_3(G) \supseteq \dots$$

such that $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_2(G) = [G, G]$, $\gamma_k(G) = [\gamma_{k-1}(G), G]$ for all $k \geq 2$. The quotients $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$, $n \geq 1$, are abelian groups.

The Lie ring associated with the lower central series $\{\gamma_n(G)\}_{n \geq 1}$ of a group G is the direct sum of its quotients

$$L(G) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$$

with the abelian groups $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ written additively. The Lie bracket is defined for homogeneous elements $\bar{u} = u \cdot \gamma_{m+1}(G) \in \gamma_m(G)/\gamma_{m+1}(G)$, $\bar{v} = v \cdot \gamma_n(G) \in \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ by the equality

$$\begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v}) &= (u \cdot \gamma_{m+1}(G), v \cdot \gamma_n(G)) = \\ &= [u, v] \cdot \gamma_{m+n+1}(G), \end{aligned}$$

and extends to all elements of $L(G)$ by linearity.

Let p be a prime number. If $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ is an elementary abelian p -group for all $n \geq 1$ then each of these quotients and thus the whole ring $L(G)$ can be considered as an additive group of a vector space over the field $\mathbb{F}_p$ of appropriate dimension. In this case it is possible to introduce the operation of multiplication of elements of $L(G)$ by elements of $\mathbb{F}_p$. This operation transforms the Lie ring $L(G)$ to the Lie algebra over the field $\mathbb{F}_p$.

In the paper [6] it was shown that the Lie algebra L_m associated with the lower central series of the group P_m has special tableau representation similar to the representation of P_m . The elements of the algebra L_m can be identified with the tableaux of the form

$$u = [c_1, c_2(x_1), \dots, c_m(x_1, \dots, x_{m-1})], \quad (2)$$

where $c_1 \in \mathbb{F}_p$, $c_i(x_{i-1}) \in \mathbb{F}_p^{(0)}[x_1, \dots, x_{i-1}]$ for $i = 2, 3, \dots, m$ are reduced polynomials of degree $\leq p-1$ with respect to the ideal I_i generated by polynomials $x_1^p, x_2^p, \dots, x_{i-1}^p$. The k -th coordinate of the tableau (2) will be denoted by $\{u\}_k$. The k -coordinate tableau is a tableau whose all coordinates are zeros except the k -th coordinate. The tableau $u \in L_m$ has depth r if the first r coordinates are equal to zero.

The structure of Lie algebra on the set L_m is defined as follows:

- (i) The sum of tableaux $u, v \in L_m$ is the tableau $u + v$ with coordinates $\{u + v\}_k = \{u\}_k + \{v\}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$).
- (ii) The product of a tableaux $u \in L_m$ and a scalar $a \in \mathbb{F}_p$ is the tableau au with coordinates $\{au\}_k = a\{u\}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$).
- (iii) The Lie bracket of tableaux $u, v \in L_m$ is the tableau $\{u, v\}$ with coordinates

$$\{\{u, v\}\}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \{v\}_i}{\partial x_i} \cdot \{u\}_k - \frac{\partial \{u\}_i}{\partial x_i} \cdot \{v\}_k \right)$$

Further we define basic notions about tableau representations. The height of a reduced term $v = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{k_p}^{k_p}$, $0 \leq k_i \leq p-1$, is the number $h(v) = 1 + k_1 + k_2 p + \dots + k_p p^{p-1}$, and the height $h(f)$ of any reduced polynomial $f(x_1, \dots, x_p)$ is the maximal height of its terms. The height of the zero polynomial is zero.

The integer vector

$$h(u) = \langle h(\{u\}_1), h(\{u\}_2), \dots, h(\{u\}_m) \rangle$$

is called the characteristic of the tableau $u \in L_m$. We define the partial order on characteristics by coordinatewise comparison. The vector $\langle 1, p, p^2, \dots, p^{m-1} \rangle$ is maximal and $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ is minimal with respect to this order.

Definition 1. A subalgebra U of L_m is called *parallelotopic* if for all tableaux $u, v \in L_m$ the conditions $u \in U$ and $h(v) \leq h(u)$ imply $v \in U$.

Every parallelotopic subalgebra U is uniquely defined by the vector

$$h(U) = \langle \max_{u \in U} \{h(\{u\}_1)\}, \dots, \max_{u \in U} \{h(\{u\}_m)\} \rangle,$$

which is called its *characteristic*. The parallelotopic subalgebra with characteristic h consists of all tableau with characteristic $\leq h$.

Lemma 1. [6] *For arbitrary tableaux $u, v \in L_m$ the following inequalities hold*

- (i) $h\left(\frac{\partial\{v\}_k}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i\right) \leq h(\{v\}_k) - 1$ for $i < k$;
 (ii) $h(\{(u, v)\}_k) \leq \max(h(\{u\}_k), h(\{v\}_k)) - 1$.

Moreover, for every $u \in L_m$ there exists a tableau $v \in L_m$ such that $h(\{(u, v)\}_k) = h(\{u\}_k) - 1$.

Theorem 1. [6] *The k -th term $\gamma_k(L_m)$ ($k \geq 1$) of the lower central series of the Lie algebra L_m is the parallelotopic subalgebra of characteristic*

$$\langle (1 - k + 1)^+, \dots, (p^{m-1} - k + 1)^+ \rangle, \quad (3)$$

where $(p^* - k + 1)^+ = \max\{0, p^* - k + 1\}$.

Theorem 2. [6] *The k -th term $\zeta_k(L_m)$ ($k \geq 0$) of the upper central series of the Lie algebra L_m is the parallelotopic subalgebra of characteristic*

$$\langle t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots, t_m^{(k)} \rangle,$$

where $t_i^{(k)} = \max\{0, p^{i-1} - p^{m-1} + k\}$.

The next statement describes when a parallelotopic subalgebra is an ideal.

Proposition 1. [6] *A parallelotopic subalgebra I of characteristic*

$$\langle \underbrace{0, \dots, 0}_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \dots, h_m \rangle$$

is an ideal in L_m if and only if

$$h_i \geq p^{i-1} - p^l \text{ for every } i \geq l + 1.$$

Proposition 2. *Let G be a finite p -group and $L(G) = \oplus_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ be the Lie algebra associated with the lower central series of the group G . Then every automorphism $\varphi \in \text{Aut}(G)$ induces an automorphism $\varphi \in \text{Aut}(L(G))$.*

Proof. Since every term $\gamma_i(G)$ of the lower central series of the group G is characteristic, then every automorphism of the group induces a linear map of the Lie algebra $L(G)$ that preserves quotients $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$. $\square$

2 Characteristic subalgebras in L_m

Fix a tuple $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{F}_p^m$ with m non-zero elements of the field $\mathbb{F}_p$. Define the transformation w of the Lie algebra L_m by the rule: the tableau $u \in L_m$ with coordinates $u_i(x_1, \dots, x_{i-1})$, $i = 1, \dots, m$ is mapped to the tableau with coordinates

$$w_i \cdot u_i(w_1^{-1}x_1, w_2^{-1}x_2, \dots, w_{i-1}^{-1}x_{i-1}).$$

The set of all transformations w we denote by W_m .

Proposition 3. *The set W_m is a subgroup of the group $\text{Aut}(L_m)$.*

Proof. Let us prove that each transformation w is an endomorphism of L_m . The linearity of w follows from the definition of addition and multiplication by scalars in the Lie algebra L_m . We check that w preserves the Lie bracket: $\{((w(u), w(v)))_k = w_k \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial v_k(w_1^{-1}x_1, \dots, w_k^{-1}x_k)}{\partial x_i} \cdot w_i^{-1} \cdot w_i \cdot u_i(w_1^{-1}x_1, \dots, w_{i-1}^{-1}x_{i-1}) - \frac{\partial u_k(w_1^{-1}x_1, \dots, w_k^{-1}x_k)}{\partial x_i} \cdot w_i^{-1} \cdot w_i \cdot v_i(w_1^{-1}x_1, \dots, w_{i-1}^{-1}x_{i-1}) \right) = w_k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial v_k(w_1^{-1}x_1, \dots, w_k^{-1}x_k)}{\partial x_i} \cdot u_i(w_1^{-1}x_1, \dots, w_{i-1}^{-1}x_{i-1}) - \frac{\partial u_k(w_1^{-1}x_1, \dots, w_k^{-1}x_k)}{\partial x_i} \cdot v_i(w_1^{-1}x_1, \dots, w_{i-1}^{-1}x_{i-1}) \right) = w(\{((u, v))_k\}$.

The transformation w is bijective, because it has an inverse w^{-1} , which is defined by the tuple $w^{-1} = (w_1^{-1}, w_2^{-1}, \dots, w_m^{-1})$. Therefore w is an automorphism of the Lie algebra L_m .

Moreover, the product of two automorphisms $w \cdot w' = (w_1 w'_1, w_2 w'_2, \dots, w_m w'_m)$ belongs to W_m and does not depend on the order of the factors. Hence W_m forms an abelian subgroup of $\text{Aut}(L_m)$ isomorphic to $W_m \simeq \underbrace{C_{p-1} \times C_{p-1} \times \dots \times C_{p-1}}_m$. $\square$

Theorem 3. *Every characteristic subalgebra of the Lie algebra L_{q_1} is parallelotopic.*

Proof. Let L be a characteristic subalgebra of L_m . Define $k_i = \max_{u \in L} h(\{u\}_i)$ for each $i = 1, \dots, m$, and let us prove that L is the parallelotopic subalgebra with the characteristic $h(L) = \langle k_1, k_2, \dots, k_m \rangle$.

Let u be a tableau from L with i -th coordinate $u_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ of height k_i . Consider the automorphism w from W_m given by the tuple $\langle \bar{1}, \dots, \bar{1}, \bar{2}, \bar{1}, \dots, \bar{1} \rangle$, where $\bar{2}$ is on the i -th place. Then the tableau $v = w(u) - u \in L$ is of the form

$$[0, \dots, 0, u_i(x_1, \dots, x_{i-1}), v_{i+1}(\dots), \dots, v_m(\dots)].$$

Hence $h(\{v\}_i) = h(u_i(x_1, \dots, x_{i-1})) = k_i$. Similarly, one can show that the subalgebra L contains a tableau $f_1 = [0, \dots, 0, c_m(x_1, \dots, x_{m-1})]$ with $h(c_m(x_1, \dots, x_{m-1})) = k_m$.

Since the group P_m and the Lie algebra L_m have similar tableau representations, we can identify tableaux from L_m with elements of P_m . Consider the inner automorphism $\varphi_v(u) = v^{-1}uv$ of the group P_m and define the corresponding automorphism $\bar{\varphi}_v$ of the Lie algebra L_m as in Proposition 2, i.e., for a homogeneous element $\bar{u} = u \cdot \gamma_{i+1}(P_m)$ the map is defined by

$$\bar{\varphi}_v(\bar{u}) = \varphi_v(u) \cdot \gamma_{i+1}(P_m)$$

and is expanded to all elements by linearity.

Let $\bar{u} = u \cdot \gamma_{i+1}(P_m)$ and $\bar{v} = v \cdot \gamma_{i+1}(P_m)$ be homogeneous elements of $L(P_m)$ such that

$$u = [0, \dots, 0, ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}, 0, \dots] \in \gamma_i(P_m),$$

$$v = [0, \dots, 0, bx_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_l^{j_l}, 0, \dots] \in \gamma_i(P_m).$$

Consider the element $\varphi_v(u) \gamma_{i+1}(P_m)$. If $k = l$ then $v^{-1}uv = u$. Consider the case $k \neq l$ and we can assume $k < l$. Then we get

$$(i) \quad \{v^{-1}uv\}_s = 0 \text{ для } s \neq l+1, k+1;$$

$$(ii) \quad \{v^{-1}uv\}_{l+1} = -bx_1^{j_1} \dots x_l^{j_l} + bx_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot (x_{k+1} + ax_1^{i_1} \dots x_k^{i_k})^{j_{k+1}} \cdot x_{k+2}^{j_{k+2}} \dots x_l^{j_l} = -bx_1^{j_1} \dots x_l^{j_l} + \\ & + bx_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \left(\sum_{r=0}^{j_{k+1}} C_{j_{k+1}}^r x_{k+1}^{j_{k+1}-r} (ax_1^{i_1} \dots x_k^{i_k})^r \right) \cdot \\ & \cdot x_{k+2}^{j_{k+2}} \dots x_l^{j_l} = -bx_1^{j_1} \dots x_l^{j_l} + bx_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} (x_{k+1}^{j_{k+1}} + \\ & + j_{k+1} x_{k+1}^{j_{k+1}-1} ax_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}) x_{k+2}^{j_{k+2}} \dots x_l^{j_l} + P(x_1, \dots, x_l) = \\ & = j_{k+1} bx_1^{j_1} \dots x_k^{i_k} x_{k+1}^{j_{k+1}-1} x_{k+2}^{j_{k+2}} \dots x_l^{j_l} + ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} + \\ & + P(x_1, \dots, x_l) = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} (bx_1^{j_1} \dots x_l^{j_l}) ax_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + P(x_1, \dots, x_l) = \frac{\partial \{u\}_{l+1}}{\partial x_{k+1}} \{u\}_{k+1} - \{u\}_{k+1} \frac{\partial \{u\}_{l+1}}{\partial x_{k+1}} + \\ & + P(x_1, \dots, x_l) = \{ \{u, v\} \}_{l+1} + P(x_1, \dots, x_l), \end{aligned}$$

where $P(x_1, \dots, x_l)$ is a polynomial whose height is less than the height of $j_{k+1} bx_1^{j_1} \dots x_k^{i_k} x_{k+1}^{j_{k+1}-1} \cdot x_{k+2}^{j_{k+2}} \dots x_l^{j_l} \cdot ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$.

$$(iii) \quad \{v^{-1}uv\}_{k+1} = ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}.$$

Hence the tableau $v^{-1}uv$ from the group P_m has the same characteristic as the tableau $(u, v) + u$ from the Lie algebra L_m . By Lemma 1 for every $u \in L_m$ and each $i = 1, \dots, m$ there exists a tableau $v \in L_m$ such that the height of the i -th coordinate $\{(u, v)\}_i$ is less by one than the height of $\{u\}_i$.

Then there exists a tableau $v_1 \in L_m$ and the automorphism $\bar{\varphi}_{v_1}$ of L_m such that $f_2 = \bar{\varphi}_{v_1}(f_1) - f_1 \in L$ and the height of the last coordinate of the tableau f_2 is less by one than the height of $c_m(x_1, \dots, x_{m-1})$. Similarly, there exists $v_2 \in L_m$ such that $f_3 = \bar{\varphi}_{v_2}(f_2) - f_2 \in L$ and the height of the last coordinate of f_3 is less by one than the height of the last coordinate of f_2 . Continuing this process we get a sequence $f_1, f_2, \dots, f_k$ of tableaux with the height of the last coordinates less by one each time. Hence the subalgebra L contains an arbitrary tableau $u_a = [0, \dots, 0, a]$ for $a \in \mathbb{F}_p$. Since L contains a tableau $z = [0, 0, \dots, ax + b]$ for some $a, b \in \mathbb{F}_p$, then $z - u_a = [0, \dots, 0, ax] \in L$. Therefore L contains all possible tableaux whose last coordinates have height two. Continuing this process we get that L contains all tableaux whose last coordinate is of height $1, 2, \dots, k_m$. Hence L contains all possible tableaux of the form $[0, \dots, 0, c_m(x_1, \dots, x_{m-1})]$, where $h(c_m(x_1, \dots, x_{m-1})) \leq k_m$.

In the same way, one can show that L contains all tableaux of the form $[0, \dots, c_i(x_1, \dots, x_{i-1}), 0, \dots, 0]$ for $i = 1, \dots, m-2$, where $h(c_i(x_1, \dots, x_{i-1})) \leq k_i$, and also all their sums. Hence L contains all tableaux whose i -th coordinate has height $\leq k_i$ for each $i = 1, \dots, m$. Therefore L is a parallelotopic subalgebra of the Lie algebra L_m . $\square$

Corollary 1. Every characteristic subalgebra of the Lie algebra L_m is an ideal.

Proof. Let L be a characteristic subalgebra of L_m . We need to check that $(u, v) \in L$ for all $u \in L$ and $v \in L_m$. It is sufficient to consider only tableaux u and v that have only one non-zero coordinate. In

the proof of the previous theorem we have proved that the tableaux (u, v) and $\bar{\varphi}_v(u) - u \in L$ have the same characteristic. Since L is parallelotopic, $(u, v) \in L$ and the statement is proved. $\square$

Further we prove that all parallelotopic ideals are characteristic. The proof is based on the following lemmas.

Lema 2. *Parallelotopic ideals A_s of depth s and with characteristic $\langle 0, \dots, 0, p^s, p^{s+1}, \dots, p^{m-1} \rangle$ are characteristic subalgebras of L_m .*

Proof. The proof goes by induction on m . The case $m = 1$ is trivial and this is our base of induction.

Suppose the statement of the lemma holds for the Lie algebra L_{m-1} . Consider the ideal $A_{m-1} \subset L_m$ with characteristic $\langle 0, \dots, 0, p^{m-1} \rangle$. Take the r -th term $\zeta_r(L_m)$ of the upper central series of the Lie algebra L_m for $r = p^{m-2} + 1$, which has characteristic

$$h(\zeta_r(L_m)) = \langle t_1^{(r)}, t_2^{(r)}, \dots, t_m^{(r)} \rangle,$$

where $t_i^{(r)} = \max\{0, p^{i-1} - p^{m-1} + r\} = \max\{0, p^{i-1} - p^{m-1} + p^{r-2} + 1\}$, $1 \leq i \leq m$.

Notice that for $i < m$ the following inequality holds:

$$p^{i-1} - p^{m-1} + p^{m-2} + 1 < 1 + 2p^{m-2} - p^{m-1} < 0,$$

i.e., $t_i^{(r)} = 0$. For $i = m$ we have $t_m^{(r)} = p^{m-2} + 1$. Hence $\zeta_r(L_m)$ is a characteristic ideal that contains tableaux of the form $[0, 0, \dots, 0, a(x_1, \dots, x_{m-1})]$, where the height of the last coordinate is equal to $h(a(x_1, \dots, x_{m-1})) \leq p^{m-2} + 1$.

For arbitrary tableau $u \in A_{m-1}$ and an automorphism $\varphi \in \text{Aut}(L_m)$ the identity $(u, \zeta_r(L_m)) = 0$ implies

$$\begin{aligned} \varphi(u, \zeta_r(L_m)) &= (\varphi(u), \varphi(\zeta_r(L_m))) = \\ &= (\varphi(u), \zeta_r(L_m)) = 0. \end{aligned}$$

Hence $\varphi(u)$ can not have a non-zero coordinate before the m -th place. In other words $\varphi(u)$ is a tableau of the form $[0, \dots, 0, a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})]$, where $h(a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})) \leq p^{m-1}$. Then $\varphi(u) \in A_{m-1}$. Therefore A_{m-1} is a characteristic subalgebra.

Consider the subalgebra $\bar{L}_{m-1}$ of the algebra L_m which consists of all tableaux with zero last coordinate, i.e., $[a_1, a_2(x_1), \dots, a_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-2}), 0]$. Let $\bar{A}_s$

be the subalgebra of $\bar{L}_{m-1}$ with characteristic $\langle 0, \dots, 0, p^s, p^{s+1}, \dots, p^{m-2}, 0 \rangle$. It is clear that $\bar{L}_{m-1} \simeq L_{m-1}$ and $\bar{A}_s \simeq A_s$. Furthermore, $\bar{L}_{m-1} \simeq L_m/A_{m-1}$. Since A_{m-1} is a characteristic subalgebra, every automorphism $\varphi \in \text{Aut}(L_m)$ induces an automorphism $\bar{\varphi}$ on the quotients L_m/A_{m-1} , i.e., on $\bar{L}_{m-1}$. By the inductive hypothesis $\bar{A}_s$ is a characteristic subalgebra of $\bar{L}_{m-1}$. Since we have proved that the subalgebra A_{m-1} is characteristic, then A_s is a characteristic subalgebra. The statement is proved. $\square$

Lema 3. *Parallelotopic ideals $B_{h,s}$ with characteristic $\langle 0, \dots, 0, h, p^{s+1}, \dots, p^{m-1} \rangle$, where $0 < h < p^s$, are characteristic ideals of the Lie algebra L_m .*

Proof. Consider the $k = (p^s - h)$ -th term $\gamma_k(L_m)$ of the lower central series of the Lie algebra L_m . By Theorem [1] the characteristic of this ideal has $(s+1)$ -th coordinate of height:

$$\{h(\gamma_k(L_m))\}_{s+1} = p^s - p^s + h = h.$$

Then $B_{h,s} = (A_s \cap \gamma_k(L_m)) + A_{s+1}$. Since the ideals on the right hand side are characteristic, the ideal $B_{h,s}$ is also characteristic. $\square$

Lema 4. *Parallelotopic ideals C_s with characteristic $\langle 0, \dots, 0, p^s, p^{s+1} - p^s, \dots, p^{m-1} - p^s \rangle$ are characteristic ideals of the Lie algebra L_m .*

Proof. Consider the following $(s+1)$ -coordinate tableau of the Lie algebra L_m :

$$u = [0, \dots, 0, x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_s^{p-1} + 1, 0, \dots, 0],$$

where $h(\{u\}_{s+1}) = p^s$. Then one can directly check that $C_s = (L_m, u)$.

Then $\varphi(C_s) = \varphi((L_m, u)) = (\varphi(L_m), \varphi(u))$ for all automorphisms $\varphi \in \text{Aut}(L_m)$. Therefore in order to show that the ideal C_s is characteristic it is sufficient to prove that $\varphi(u) \in C_s$.

Since $u \in A_s$, the tableau $\varphi(u)$ is of depth s for every automorphism $\varphi \in \text{Aut}(L_m)$ by Lemma [2]. Consider the s -coordinate tableau $v = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$. By Lemma [3] the tableau $\varphi(v)$ has depth $s-1$. Apply p times the Lie bracket for the tableau u with the tableau v : $(\dots((u, v), v), \dots, v) = 0$. Then for an arbitrary automorphism $\varphi \in \text{Aut}(L_m)$ we obtain

$$\begin{aligned} \varphi(\dots((u, v), v), \dots, v) &= \\ = (\dots((\varphi(u), \varphi(v)), \varphi(v)), \dots, \varphi(v)) &= 0. \end{aligned}$$

Then $h(\{\varphi(u)\}_{s+1}) \leq p^s$ and $h(\{\varphi(u)\}_k) \leq p^s - p^s$ for $k > s+1$. Hence $\varphi(u) \in C_s$ and the statement is proved. $\square$

Lema 3. *Parallelotopic ideals $D_{s,h}$ with characteristic $< 0, \dots, 0, h, p^{s+1} - p^s, \dots, p^{m-1} - p^s >$, where $0 \leq h \leq p^s$, are characteristic ideals of the Lie algebra L_m .*

Proof. Consider the $k = (p^s - h)$ -th term $\gamma_k(L_m)$ of the lower central series of the algebra L_m . By Theorem [1] the characteristic of this ideal has the $(s+1)$ -th coordinate of height:

$$\{h(\gamma_k(L_m))\}_{s+1} = p^s - p^s + h = h.$$

Hence $D_{h,s} = (C_s \cap \gamma_k(L_m)) + \gamma_{p^s+1}(L_m)$. Since the ideals from the right hand side are characteristic, then $D_{h,s}$ is also a characteristic ideal of the algebra L_m . $\square$

Theorem 4. *Every parallelotopic ideal of the Lie algebra L_m is characteristic.*

Proof. Let I be a parallelotopic ideal with characteristic $< 0, \dots, 0, k_s, k_{s+1}, \dots, k_m >$. Then $k_i \geq p^i - p^s$ by Proposition [1]. Hence I is a union of characteristic ideals $D_{s,k_{s+1}}, D_{s+1,k_{s+2}}, \dots, D_{m-1,k_m}$ and therefore it is also characteristic. $\square$

Conclusions

The present paper is one more evidence that tableau representations and related computation technic can be widely used in the investigation of Lie algebras associated with symmetric groups and their subgroups. The results of the paper can be used further to study other properties of Lie algebras associated with the Sylow p -subgroup of finite symmetric group, in particular in the study of identities in L_m , verbal ideals, etc.

References

1. Bondarenko N.V., Gupta C.K., Sushchansky V.I. Lie algebra associated the group of finitary automorphisms of p -adic tree // Journal of Algebra. — 2010. — Vol. 324. — P. 2198-2218.
2. Bondarenko N.V. Lie algebras associated with wreath products of elementary abelian groups // Matematychni Studii. — 2006. — Vol. 26. — P. 1-16.
3. Kaloujnine L.A. La structure des p -groupes de Sylow des groupes symétriques finis // Ann. Sci de l'Ecole Norm. Supér. — 1948. — Vol. 65, № 3. — P. 239-276.
4. Lazard M. Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie // Ann. Sci de l'Ecole Norm. Supér. — 1954. — Vol. 71, № 3. — P. 101-190.
5. Shalev A. Lie methods in the theory of pro- p groups // In New horizons in pro- p groups, Progr. Math. — 2000. — Vol. 187. — P. 1-54.
6. Sushchansky V.I., Netreba N.V. Lie algebras associated with Sylow p -subgroups of finite symmetric groups // Matematychni Studii. — 2005. — Vol. 24. — P. 127-138.
7. Sushchansky V.I., Netreba N.V. Wreath product of Lie algebras and Lie algebras associated with Sylow p -subgroups of finite symmetric groups // Algebra and Discrete Mathematics. — 2005. — Vol. 1. — P. 122-132.

Received: 06.09.2012

УДК 512.55

Олена Гнатюк¹, аспірантка

Індуковані комодулі над коалгеброю

У роботі будується функтор на категорії індукованих комодулів і доводиться, що він є повним і строгим.

Ключові слова: коалгебра, бімодуль, індукований комодуль

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: olena.gnatyuk@gmail.com.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В.В.

1 Introduction

The notion of a box, introduced in [1], is an important tool or representation theory. In [2] was developed the box reduction technique. It turned out to be important in Drozd's proof of generalized Brauer-Thrall conjecture. On other hand, in [3] was proved, that the category of representations of box is equivalent to the category of induced comodules over some coalgebra.

In our paper we give an interpretation the box reduction from [2] using the coalgebra technique from [3].

2 Modules and comodules

We fix some field $\mathbf{k}$. Denote by $\mathbf{k}\text{-mod}$ the category of finite dimensional vector spaces over $\mathbf{k}$. The symbol $\otimes$ denotes the tensor product over $\mathbf{k}$. Let A be a small $\mathbf{k}$ -linear category with multiplication $m_A : A \otimes A \rightarrow A$.

The module (left) over A is a (covariant) functor $M : A \rightarrow \mathbf{k}\text{-mod}$. It means that

- for any $I \in \text{Ob} A$ there is $M(I) \in \mathbf{k}\text{-mod}$,
- for any $I, J \in \text{Ob} A$ there is a $\mathbf{k}$ -linear map

$$\begin{aligned} A(I, J) \otimes M(I) &\rightarrow M(J), \\ (\alpha \otimes m) &\mapsto \alpha(m) = \alpha m. \end{aligned}$$

- for all $I, J, K \in \text{Ob} A$ and for all $\alpha \in A(I, J), \beta \in A(K, I), m \in M(K)$ there holds $\alpha(\beta m) = (\alpha\beta)m$.

We define by $m_M : A \otimes M \rightarrow M$ the correspondent $\mathbf{k}$ -linear map.

Olena Gnatyuk¹, PhD student

Induced comodules over the coalgebra

We construct the functor on the category of induced comodules and prove that it is full and faithful.

Key words: coalgebra, bimodule, induced comodule

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: olena.gnatyuk@gmail.com.

For M, N the modules over A , the map $f : M \rightarrow N$ is called the morphism of modules, if the following diagram

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{1_A \otimes f} & A \otimes N \\ m_M \downarrow & & \downarrow m_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

commutes.

An analogous object, where tensor product over $\mathbf{k}$ is changed to tensor product over A , is called box.

Denote by $A\text{-mod}$ the category of finite dimensional modules over A .

V is called a coalgebra over the category A or A -coalgebra if V is A -bimodule with coalgebra structure, i.e. there are given a coassociative comultiplication $\mu : V \rightarrow V \otimes_A V$ and the counit $\varepsilon : V \rightarrow A$ with respect to μ , where μ, ε are A -bimodule morphisms and there hold

$$\begin{aligned} &(\mu \otimes 1_V)\mu = (1_V \otimes \mu)\mu, \\ &(\varepsilon \otimes 1_V)\mu = \varepsilon \quad \text{and} \quad (1_V \otimes \varepsilon)\mu = \varepsilon, \end{aligned}$$

where $\varepsilon : V \rightarrow A \otimes V$ and $\varepsilon : V \rightarrow V \otimes_A A$ are the canonical isomorphisms.

The module M over the category A is called comodule over A -coalgebra V , if there is the comultiplication $\mu_M : M \rightarrow V \otimes_A M$ such that the

following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu_M} & V \otimes_A M \\ \mu_M \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \mu_M \\ V \otimes_A M & \xrightarrow{\mu \otimes 1_M} & V \otimes_A V \otimes_A M \end{array}$$

For M, N comodules over V , $\mathbf{k}$ -linear map $f: M \rightarrow N$ is called the morphism of comodules, if the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mu_M \downarrow & & \downarrow \mu_N \\ V \otimes_A M & \xrightarrow{1_V \otimes f} & V \otimes_A N \end{array}$$

Denote by $V\text{-comod}$ the category of comodules over the A -coalgebra V .

3 Boxes

The box $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$ consists of a $\mathbf{k}$ -category A , and A -coalgebra V with the comultiplication $\mu: V \rightarrow V \otimes_A V$ and the counit $\varepsilon: V \rightarrow A$.

For the box $\mathcal{A}$, we define the category $\mathcal{A}\text{-mod}$ of representations. The objects of this category are the modules from $A\text{-mod}$, morphisms are defined by the formula:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = \text{Hom}_A(V \otimes_A M, N),$$

the composition of morphisms $\psi: V \otimes_A N \rightarrow L$ and $\varphi: V \otimes_A M \rightarrow N$ is defined as superposition:

$$V \otimes_A M \xrightarrow{\mu \otimes \varphi} V \otimes_A V \otimes_A M \xrightarrow{1_V \otimes \psi} V \otimes_A N \xrightarrow{\psi} L.$$

Morphism F of two boxes $\mathcal{A} = (A, V)$ and $\mathcal{B} = (B, W)$ is a pair (F_0, F_1) , where $F_0: A \rightarrow B$ is a functor and $F_1: V_A \rightarrow W_B$ is A -homomorphism, such that

$$F_0 \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ F_1,$$

$$\tilde{\nu} \circ F_1 \otimes F_2 \circ \mu_A = \mu_B \circ F_1.$$

It means that the diagrams

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varepsilon_A} & A \\ F_1 \downarrow & & \downarrow F_0 \\ A W_A & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_A V & \xrightarrow{F_1 \otimes F_1} & A W_A \otimes_A A W_A \\ \mu_A \uparrow & & \downarrow \tilde{\nu} \\ V & \xrightarrow{F_1} & A W_A \xrightarrow{\mu_B} W_B \otimes W_B \end{array}$$

commute, where $\tilde{\nu}: A W_A \otimes_A A W_A \rightarrow W_B \otimes W_B$ is a map generated by natural projection $\nu: B A \otimes_A A B \rightarrow B$.

4 Induced Comodules

Let V be a coalgebra over A , and $X \in A\text{-mod}$. The V -comodule $X_V = V \otimes_A X$ with the comultiplication $\mu_{X_V} = \mu \otimes 1_X: X_V \rightarrow V \otimes_A X_V$ is called induced V -comodule.

We denote by $V\text{-icomod}$ the category of induced V -comodules. For $X, Y \in A\text{-mod}$, the morphisms $V \otimes_A X \rightarrow V \otimes_A Y$, is $1_V \otimes f$ where $f: X \rightarrow Y$ is a morphism of A -modules.

The following proposition was proved in [3]:

Proposition 1. Let V be a coalgebra over the category A , $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$ box, X, Y left A -modules, and X_V, Y_V are correspondent induced comodules. Then there exists a canonical isomorphism

$$\text{Hom}_{V\text{-icomod}}(X_V, Y_V) \simeq \text{Hom}_A(V \otimes_A X, Y).$$

The category of representations of the box and the category of induced comodules are equivalent:

$$V\text{-icomod} \simeq \mathcal{A}\text{-mod}.$$

5 Induced functor on the categories of modules

Let A and B be $\mathbf{k}$ -categories, $\varphi: A \rightarrow B$ the $\mathbf{k}$ -linear functor. The functor φ endows the category B with a structure of left (right) A -module. The functor φ induces two functors

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_* & \\ A\text{-mod} & \xleftrightarrow{\varphi_*} & B\text{-mod} \\ & \varphi^* & \end{array}$$

The functor φ^* acts on $N \in B\text{-mod}$ by the rule:

$$\varphi^*(N) = (A \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow \mathbf{k}\text{-mod}) \in A\text{-mod}.$$

So $\varphi^*(N) = \text{Hom}_B(BA, N) \in A\text{-mod}$. Any morphism $f \in \text{Hom}_B(N_1, N_2)$ canonically gives the morphism $\varphi^*(f) : \text{Hom}_B(B, N_1) \rightarrow \text{Hom}_B(B, N_2)$, therefore φ^* is a covariant functor.

For $M \in A\text{-mod}$, put $\varphi_*(M) = B_A \otimes_A M \in B\text{-mod}$, and given morphism $f \in \text{Hom}_A(M_1, M_2)$, we put $\varphi_*(f) = 1_B \otimes f : B_A \otimes M_1 \rightarrow B_A \otimes M_2$.

The functors φ_* and φ^* are conjugate: for any $M \in A\text{-mod}$ and $N \in B\text{-mod}$, there holds

$$\text{Hom}_B(\varphi_*(M), N) \simeq \text{Hom}_A(M, \varphi^*(N)) \quad (1)$$

6 Box induced by functor

Let A and B be $\mathbf{k}$ -categories, $\varphi : A \rightarrow B$ the $\mathbf{k}$ -linear functor and $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$ – box.

We build the B -coalgebra

$$V^\varphi = {}_B B_A \otimes_A V \otimes_A B_B$$

with the comultiplication $\mu_\varphi : V^\varphi \rightarrow V^\varphi \otimes_B V^\varphi$ given by

$$\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) = \Sigma 1 \otimes v_{(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2)} \otimes 1$$

where $\mu(v) = \Sigma v_{(1)} \otimes v_{(2)}$; and with the counit $\varepsilon_\varphi : V^\varphi \rightarrow B$ such that

$$\varepsilon_\varphi : V^\varphi \xrightarrow{1_B \otimes \varepsilon \otimes 1_B} B \otimes_A A \otimes B \xrightarrow{\simeq} B \otimes_A B \xrightarrow{m_B} B,$$

here $m_B : B \otimes_A B \rightarrow B$ is induced multiplication in the category B .

Theorem 1. *Functor $\varphi : A \rightarrow B$ induces a box*

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^\varphi = (B, V^\varphi, \mu_\varphi, \varepsilon_\varphi).$$

Proof. First we calculate $V^\varphi \otimes_B V^\varphi =$

$$= (B \otimes_A V \otimes_B B) \otimes_B (B \otimes_A V \otimes_B B) = B \otimes_A V \otimes_B B \otimes_A V \otimes_B B.$$

It is enough to define comultiplication μ_φ and counit ε_φ on the elements of such kind: $1 \otimes v \otimes 1$, because $\mu_\varphi(b_1 \otimes v \otimes b_2) = b_1 \mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) b_2$ and $\varepsilon_\varphi(b_1 \otimes v \otimes b_2) = b_1 \varepsilon_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) b_2$. Let $\mu(v) = \Sigma v_{(1)} \otimes v_{(2)}$, then we define:

$$\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) = \Sigma 1 \otimes v_{(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2)} \otimes 1 =$$

$$\Sigma (1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1).$$

To prove the coassociativity of comultiplication μ_φ we write the condition

$$(\mu \otimes 1)\mu(v) = (1 \otimes \mu)\mu(v),$$

it means that

$$\sum v_{(1)(1)} \otimes v_{(1)(2)} \otimes v_{(2)} =$$

$$\sum v_{(1)} \otimes v_{(2)(1)} \otimes v_{(2)(2)} =$$

$$\sum v_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes v_{(3)}.$$

Now we check the coassociativity of μ_φ :

$$(\mu_\varphi \otimes 1)\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) =$$

$$\sum (\mu_\varphi \otimes 1)((1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1)) =$$

$$\sum \sum 1 \otimes v_{(1)(1)} \otimes 1 \otimes v_{(1)(2)} \otimes 1 \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1).$$

On the other hand,

$$(1 \otimes \mu_\varphi)\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) =$$

$$\sum (1 \otimes \mu_\varphi)((1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1)) =$$

$$\sum \sum (1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes 1 \otimes v_{(2)(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2)(2)} \otimes 1.$$

Equality

$$\sum \sum 1 \otimes v_{(1)(1)} \otimes 1 \otimes v_{(1)(2)} \otimes 1 \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1) =$$

$$\sum \sum (1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes 1 \otimes v_{(2)(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2)(2)} \otimes 1$$

is obtained from the coassociativity of comultiplication μ tensorly multiplied by 1.

Now we prove the axiom of counit for ε_φ :

$$(\varepsilon_\varphi \otimes 1_{V^\varphi})\mu = 1_{V^\varphi}.$$

It is enough to calculate $(\varepsilon_\varphi \otimes 1_{V^\varphi})\mu$ on the elements $(1 \otimes v \otimes 1)$:

$$(1 \otimes v \otimes 1) \xrightarrow{\mu_\varphi}$$

$$\sum (1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1) \xrightarrow{\varepsilon_\varphi \otimes 1_{V^\varphi}} \varepsilon(v_{(1)}) \cdot (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1)$$

Using $\varepsilon(v_{(1)}) \in A$, we obtain

$$\begin{aligned} \varepsilon(v_{(1)}) \cdot (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1) &= \\ \sum 1 \otimes \varepsilon(v_{(1)})v_{(2)} \otimes 1 &= \\ 1 \otimes (\sum \varepsilon(v_{(1)})v_{(2)}) \otimes 1 &= 1 \otimes v \otimes 1. \end{aligned}$$

The second equality of the counit axiom $(1_{V^*} \otimes \varepsilon_\varphi)\mu = 1_{V^*}$ is proved analogously.

It proves that $B = \mathcal{A}^* = (B, V^*, \mu_\varphi, \varepsilon_\varphi)$ is a box. $\square$

The new box $\mathcal{A}^*$ is called induced from the box $\mathcal{A}$ by φ .

The functor φ induces the functor of categories of induced comodules

$$\varphi_{\text{icomod}}^*: V^* - \text{icomod} \longrightarrow V - \text{icomod}$$

where V^* is B -bimodule induced by φ .

7 Main statement

Theorem 2. Let A, B be the categories, $\varphi: A \longrightarrow B$ the functor, $\varphi^*: B\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$ and $\varphi_*: A\text{-mod} \longrightarrow B\text{-mod}$ the induced functors on the categories of modules. Then there exists an induced functor on the category of induced comodules

$$\varphi_{\text{icomod}}^*: V^* - \text{icomod} \longrightarrow V - \text{icomod}$$

which sends $V^* \otimes_B M$ to $V \otimes_A \varphi^*(M)$. This functor $\varphi_{\text{icomod}}^*$ is full and faithful.

Proof. It has been proved that $\varphi_{\text{icomod}}^*$ is bijective and can be extended to morphisms.

We give construction of the functor $\varphi_{\text{icomod}}^*$. The functor $\varphi_{\text{icomod}}^*$ is already defined on the objects. Let F be a morphism in the category $V^* - \text{icomod}$:

$$V^* \otimes_B M \xrightarrow{F} V^* \otimes_B M'.$$

Then it can be continued to the morphism

$$V^* \otimes_B M \xrightarrow{f} M'$$

by the rule

$$V^* \otimes_B M \xrightarrow{F} V^* \otimes_B M' \xrightarrow{\varepsilon_B \otimes 1} M'.$$

Using the equalities $\varphi^*(M) = B \otimes_B M$,

$$V^* \otimes_B M = B \otimes_A V \otimes_B B \otimes_B M = \varphi_*(V \otimes_A \varphi^*(M))$$

and the formula (1), we obtain:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_B(V^* \otimes_B M, M') &\cong \\ \text{Hom}_B(\varphi_*(V \otimes_A \varphi^*(M)), M') &\cong \\ \text{Hom}_A(V \otimes_A \varphi^*(M), \varphi^*(M')) & \end{aligned}$$

Now we can use the Proposition 1:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(V \otimes_A \varphi^*(M), \varphi^*(M')) &\cong \\ \text{Hom}_{V - \text{icomod}}(V \otimes_A \varphi^*(M), V \otimes_A \varphi^*(M')). & \end{aligned}$$

and see, that obtained morphism is needed morphism in the category $V - \text{icomod}$. $\square$

Conclusions

In this work we use language of comodules from [1] to build full and faithful functor from [2] on the categories of induced comodules.

List of references

1. M. Kleiner and A. V. Roiter. *Representations of differential graded categories // "Matrix problems"*, Kiev, 1977, 5-70.
2. Yu. A. Drozd. *Tame and wild matrix problems // ICRA 1979, Calerton Math. Lecture Notes No. 25 (1980), vol. II, 2801-2817.*
3. M. Kleiner. *Induced modules and comodules and representations of BOCS's and DGC's // Lecture Notes in Math., vol. 903, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1981, pp. 168-185.*

Надійшла до редколегії 15.08.2012

УДК 519.21

В.Й. Дзямко¹, к.пед.н., доцент
Т.О. Яневич², к.ф.-м.н., н.с.**Збіжність за ймовірністю розкладів деяких випадкових процесів за поліномами Лежандра**

У роботі досліджується розклади φ -субгауссових випадкових процесів за ортонормованими системами, що будуються на основі поліномів Лежандра. Знайдено умови коли апроксимації отримані з таких розкладів збігаються за ймовірністю до початкового процесу.

Ключові слова: φ -субгауссові випадкові процеси, поліноми Лежандра.

¹Ужгородський національний університет, 8000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46.

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: yata452@univ.kiev.ua.

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Preface

This work is a continuation of the series of papers [1]. In the first paper from this series the convergence of the expansions for the φ -sub-Gaussian periodic stochastic processes in $L_2([0, \pi], \mu)$ was investigated. In particular, the expansions based on sine and Legendre polynomials systems were considered. In the second paper the conditions and speed of convergence for the expansions of the φ -sub-Gaussian periodic stochastic processes in the space $C([0, \pi])$ were studied.

This work is dedicated to the investigation of the convergence in probability of approximations of φ -sub-Gaussian periodic stochastic processes which use the expansions based on Legendre polynomials.

2 φ -sub-Gaussian random variables and stochastic processes.

The notion of φ -sub-Gaussian random variables was introduced in [2] in 1985. Further this theory was developed and complemented by many interesting results, in particular, those that are related to stochastic processes from the spaces of

V.Y. Dzyamko¹, PhD, Associative Professor
T.O. Ianevych², PhD, Scientist**Convergence in probability of some random process expansions based on Legendre polynomials**

The paper investigates the expansions of the φ -sub-Gaussian processes on orthonormal systems that are based on Legendre polynomials. Here we have found the conditions for the approximations used such expansion to be convergent in probability to the initial process.

Key Words: φ -sub-Gaussian random processes, Legendre polynomials.

¹Uzhhorod National University, 8000, Uzhhorod, 46.Pidhirna St.

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: yata452@univ.kiev.ua.

φ -sub-Gaussian random variables. More details on this topic you can find in [3, 4]. Now we give the basic definitions and results related to this paper.

Definition 2.1. [3] A function φ is called an Orlicz N -function if $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ is a continuous, even, convex function; $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ is monotonically increases as $x > 0$ and

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Example 1. The following functions are the Orlicz N -functions:

- 1) $\varphi(x) = a|x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0, \alpha > 1$;
- 2) $\varphi(x) = \exp\{c|x|^\alpha\} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0, \alpha > 1$.

Definition 2.2. It will be called that the condition **Q** is fulfilled for N -function $\{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ if

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

The possibility to take infinite values for c is not excluded.

Example 2. The condition **Q** is fulfilled for the following N -functions:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= |x|^\alpha, x \in \mathbb{R}, 1 < \alpha \leq 2; \\ \varphi(x) &= \exp\{|x|^\alpha\}, x \in \mathbb{R}, 1 < \alpha \leq 2. \end{aligned}$$

Definition 2.3. Let φ be some Orlicz N -function for which the condition **Q** is fulfilled. A random variable ξ belongs to the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, if $E\xi = 0$ and there exists the constant $a \geq 0$ such that $E \exp\{\lambda\xi\} = \exp\{\varphi(\lambda a)\}$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$.

In [3] it was proved that the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ is a Banach space with regard to the norm

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf_{V_{a \geq 0}} \{E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definition 2.4. A stochastic process $X = \{X(\theta), \theta \in T\}$ is called φ -sub-Gaussian if for every $\theta \in T$ the random variable $X(\theta)$ is φ -sub-Gaussian.

Definition 2.5. [4] A family Δ of random variables from the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ is called strictly φ -sub-Gaussian if there exists the constant C_Δ such that for every $\xi_i \in \Delta$ and $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ the following inequality is true

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} E\xi_i\right) \leq C_\Delta \left(E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{1/2},$$

where I is some finite set.

Definition 2.6. [4] The φ -sub-Gaussian stochastic process X is called strictly φ -sub-Gaussian if the family of random variables $\{X(\theta), \theta \in T\}$ is strictly φ -sub-Gaussian.

The determining constant C_X of this family will be the determining constant of the strictly φ -sub-Gaussian stochastic processes X .

The example of the strictly φ -sub-Gaussian stochastic processes and their properties can be found in the monograph [4].

3 Expansion into series of the standard process.

Let $X = \{X(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ be the strictly φ -sub-Gaussian 2π -periodic stochastic process for which $X(\theta) = X(-\theta)$, $EX(\theta) = 0$, $E|X(\theta)|^2 < \infty$ and $EX(\theta)X(\zeta) = R(\cos \theta, \sin \zeta)$, $0 \leq \theta, \zeta \leq \pi$.

We also suppose that $X(t)$ is continuous in mean square stochastic process. It means that the function $R(t, s)$, $-1 \leq t, s \leq 1$ is continuous. Since for the continuous in mean square stochastic processes there always exists the measurable modification so we assume that the process X is measurable. Furthermore, we will

suppose that this process is separable too. Under these assumptions we will call (as in the papers [1]) the process standard.

Let $T_k(\theta)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\theta \in [0, \pi]$ be the complete orthonormal system of real-valued trigonometric polynomials of k -th power in the space $([0, \pi], \mu)$ (μ is some measure). Then $X(\theta)$ can be transformed into series

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k T_k(\theta), \quad (1)$$

where $\xi_k = \int_0^\pi X(\theta) T_k(\theta) d\mu(\theta)$ and the series (1) converges with probability one in the norm of the space $L_2([0, \pi], \mu)$.

4 Allowable functions.

Further in this paper we will use the notion of the allowable function for some space. Let us introduce the strict definition.

Definition 4.1. A function $S(u)$, $u \geq 0$ is said to be allowable for the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ if there exists some constant $r \geq 0$ such that for all $u \geq r$ the function $\frac{S(u)}{S(u)}$ is monotonically increasing and for quite small $\epsilon > 0$ the following integral converges

$$\int_0^\epsilon \psi \left(\ln \left(S^{(-1)} \left(\frac{C}{u} \right) - r + 1 \right) \right) du, \quad (2)$$

where $C > 0$, $\psi(v) = \frac{v}{\varphi(-1)(v)}$.

In the following lemma we found the wide class of allowable functions for the spaces $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Lemma 4.1. Let the N -function φ is such that for some $\beta > 1$ and for quite large x

$$\varphi(x) \leq Cx^\beta.$$

Then for any $0 < \alpha < 1$ the function $S(x) = x^\alpha$, $x > 0$ will be allowable for the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$. In this case $r = 0$.

Proof. Let ν be some number such that $0 < \nu \leq 1$, and $x > 0$. In this case the following inequality holds true

$$\ln(1+x) = \frac{1}{\nu} \ln(1+x)^\nu \leq \frac{1}{\nu} \ln(1+x^\nu) \leq \frac{x^\nu}{\nu}. \quad (3)$$

The function $\frac{u}{S(u)} = u^{1-\alpha}$ is monotonically increasing as $u \geq 0$, that is $r = 0$. Let us check

whether the conditions (2) is true. Relation (3) implies that

$$\psi\left(\ln\left(1+S^{(-1)}\left(\frac{C}{u}\right)\right)\right) \leq \psi\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{C}{u}\right)^{\nu/\alpha}\right).$$

So, for quite large x the inequality holds $\varphi^{(-1)}(x) \geq (\frac{x}{C})^{1/\beta}$, therefore for such x $\psi(x) \leq \frac{1}{C^{1/\beta}} x^{1-\frac{1}{\beta}}$. It means that for quite small u

$$\begin{aligned} & \psi\left(\ln\left(1+S^{(-1)}\left(\frac{C}{u}\right)\right)\right) \leq \\ & \leq \frac{1}{C^{1/\beta}} \left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{C}{u}\right)^{\nu/\alpha}\right)^{1-\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{u^{\frac{\nu}{\alpha}(1-1/\beta)}} Z(\nu). \end{aligned} \quad (4)$$

Since in (4) θ can be so small that for it the inequality $\frac{\nu}{\alpha}(1-1/\beta) < 1$ holds true, so the condition (2) will be valid too. $\square$

Let us give the theorem that is the modification of those proved in paper [1].

Theorem 4.1. Let $X(\theta)$ be the standard φ -sub-Gaussian stochastic process, $X_N(\theta) = \sum_{k=0}^N \xi_k T_k(\theta)$ be the approximation of this process, and $S(u)$ be the allowed function for the space $Sub_\varphi(\Omega)$. If the following series converges

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |\xi_k \xi_l| S(k+r) S(l+r) C_k C_l,$$

where $C_k = \sup_{0 \leq u \leq \pi} T_k(u)$, then $X_N(\theta)$ converges in probability in space $C([0, \pi])$ to the initial process $X(\theta)$ (that is, for any $\varepsilon > 0$ $P\{\sup_{0 \leq \theta \leq \pi} |X_N(\theta) - X(\theta)| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$), and the process $X(\theta)$ is sample continuous with probability one.

This theorem and lemma 4.1 imply the following theorem.

Theorem 4.2. Let $X(\theta)$ be the standard φ -sub-Gaussian stochastic process where φ is such N -function that for quite large x and for some $\beta > 1$ $\varphi(x) \leq Cx^\beta$. $X_N(\theta) = \sum_{k=0}^N \xi_k T_k(\theta)$ is the approximation of this process obtained from the expansion (1).

If for some $0 < \alpha < 1$ the following series converges

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |\xi_k \xi_l| k^\alpha l^\alpha C_k C_l,$$

where $C_k = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} T_k(\theta)$, then $X_N(\theta)$ converges in probability in space $C([0, \pi])$ to the process $X(\theta)$ and the process $X(\theta)$ is sample continuous with probability one.

5 Expansions based on Legendre polynomials.

In this section we will consider the expansions of the standard φ -sub-Gaussian stochastic processes with regard to the systems of function build using Legendre polynomials. The information on Legendre polynomials, in particular, their properties, can be found in [5].

Let denote as $P_k(t)$ the Legendre polynomials. The system of functions $T_k(\theta) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(\cos \theta) \sin \theta$ is orthonormal and complete in the space $C([0, \pi], \mu)$, where $\mu(A) = \int_A \frac{d\theta}{\sin \theta}$ (see [5], p. 46).

If $X(\theta)$ is the standard φ -sub-Gaussian stochastic process then it can be expanded into series with regard to this system. Namely,

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k T_k(\theta),$$

where $\xi_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \int_0^\pi X(\theta) P_k(\cos \theta) d\theta$. Using this expansion we can build the approximation of the process $X(\theta)$ via the finite sum $X_N(\theta) = \sum_{k=0}^N \xi_k T_k(\theta)$. The theorem 5.1 includes the conditions under which such approximation converges in probability in the space $C([0, \pi])$.

Theorem 5.1. Let φ be such N -function that for quite large x and for some $\beta > 1$ $\varphi(x) \leq Cx^\beta$. Let us also consider the standard φ -sub-Gaussian stochastic process $X(\theta)$ with covariance function $EX(\theta)X(\eta) = R(\cos \theta, \cos \eta)$. If the derivative $\frac{\partial^4 R(t,s)}{\partial t^2 \partial s^2}$ of the function $R(t,s)$ is continuous then $X_N(\theta)$ converges in probability in the space $C([0, \pi])$ to the process $X(\theta)$ and this process $X(\theta)$ is sample continuous with probability one.

In order to prove the theorem 5.1 we need to prove the following lemma first.

Lemma 5.1. Under the conditions of the theorem 5.1 the following inequality holds true

$$|\xi_k \xi_l| \leq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1}}{k(k+1)l(l+1)} \times$$

$$\times \left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_k(t) P_l(s) W(t, s) dt ds \right|,$$

where $W(t, s)$ is some continuous function defined in (6).

Proof of the lemma 5.1. Introducing the substitution $\cos \theta = t$, $\cos \eta = s$ and making the integration we obtain

$$\begin{aligned} E\xi_k \xi_l &= \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi R(\cos \theta, \cos \eta) \times \\ &\times P_k(\cos \theta) P_l(\cos \eta) \sin \theta \sin \eta d\theta d\eta = \\ &= \frac{\sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(t, s) P_k(t) P_l(s) dt ds \quad (5) \end{aligned}$$

It is known (see [5]) that the Legendre polynomials satisfy the differential equation:

$$(1-t^2)P_k''(t) - 2tP_k'(t) + k(k+1)P_k(t) = 0.$$

It implies that

$$P_k(t) = \frac{1}{k(k+1)} (2tP_k'(t) - (1-t^2)P_k''(t)).$$

We also remind that $P_k(1) = 1$, $P_k(-1) = (-1)^k$. So, since the function $R(t, s)$ is even with regard to t and s then

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(t, s) P_k(t) P_l(s) dt ds = \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{l(l+1)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(t, s) \times \\ &\times (2tP_k'(t) - (1-t^2)P_k''(t)) \times \\ &\times (2sP_l'(s) - (1-s^2)P_l''(s)) dt ds = \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{l(l+1)} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 R(t, s) \times \right. \\ &\times (2tP_k'(t) - (1-t^2)P_k''(t)) dt \times \\ &\times (2sP_l'(s) - (1-s^2)P_l''(s)) ds. \end{aligned}$$

Let us calculate the inner integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 R(t, s) [2tP_k'(t) - (1-t^2)P_k''(t)] dt &= \\ &= \int_{-1}^1 R(t, s) 2tP_k'(t) dt - \\ &- \int_{-1}^1 R(t, s) (1-t^2)P_k''(t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 R(t, s) 2tP_k'(t) dt - \left(R(t, s) (1-t^2)P_k'(t) \right) \Big|_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 P_k'(t) \left[\frac{\partial R(t, s)}{\partial t} (1-t^2) - 2tR(t, s) \right] dt = \\ &= \int_{-1}^1 R(t, s) 2tP_k'(t) dt + \\ &+ \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial R(t, s)}{\partial t} (1-t^2) - 2tR(t, s) \right] P_k'(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 P_k'(t) \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} (1-t^2) dt = \\ &= P_k(t) \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} (1-t^2) \Big|_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 P_k(t) \left[\frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t^2} (1-t^2) - 2t \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \right] dt \end{aligned}$$

Denote as $Q(t, s) = 2t \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} - (1-t^2) \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t^2}$ then

$$I_{kl} = k(k+1)l(l+1) =$$

$$= \int_{-1}^1 P_k(t) dt \int_{-1}^1 \left[2sP_l'(s) - (1-s^2)P_l''(s) \right] Q(t, s) ds$$

Let us calculate the following

$$\begin{aligned} Z_{kl} &= \int_{-1}^1 \left[2sP_l'(s) - (1-s^2)P_l''(s) \right] Q(t, s) ds = \\ &= \int_{-1}^1 2sP_l'(s) Q(t, s) ds - \int_{-1}^1 (1-s^2)P_l''(s) Q(t, s) ds. \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-s^2)P_l''(s) Q(t, s) ds &= \\ &= P_l'(s) (1-s^2) Q(t, s) \Big|_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 P_l'(s) \left[(1-s^2) \frac{\partial Q(t, s)}{\partial s} - 2sQ(t, s) \right] ds. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} Z_{kl} &= \int_{-1}^1 P_l'(s) (1-s^2) \frac{\partial Q(t, s)}{\partial s} ds = \\ &= P_l(s) (1-s^2) \frac{\partial Q(t, s)}{\partial s} \Big|_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 P_l(s) \frac{\partial}{\partial s} \left((1-s^2) \frac{\partial Q(t, s)}{\partial s} \right) ds. \end{aligned}$$

Denote

$$\begin{aligned} W(t, s) &:= -\frac{\partial}{\partial s} \left((1-s^2) \frac{\partial Q(t, s)}{\partial s} \right) = \\ &= 2s \frac{\partial Q(t, s)}{\partial s} - (1-s^2) \frac{\partial^2 Q(t, s)}{\partial s^2} = \\ &= 2s \left[2t \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s} - (1-t^2) \frac{\partial^3 R(t, s)}{\partial t^2 \partial s} \right] + \\ &- (1-s^2) \left[2t \frac{\partial^3 R(t, s)}{\partial t \partial s^3} - (1-t^2) \frac{\partial^4 R(t, s)}{\partial t^2 \partial s^3} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

This implies the statement of the lemma. $\square$

Proof of the theorem 5.1. Since

$$\begin{aligned} I_{kl} \cdot k(k+1)l(l+1) &= \\ &= \left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_k(t) P_l(s) W(t, s) dt ds \right| = \\ &= \left| \int_0^\pi \int_0^\pi P_k(\cos \theta) \sin \theta \times \right. \\ &\times P_l(\cos \eta) \sin \eta W(\cos \theta, \cos \eta) d\theta d\eta \left| \leq \right. \\ &\leq \int_0^\pi \int_0^\pi |P_k(\cos \theta)| |\sin \theta| \times \\ &\times |P_l(\cos \eta)| |\sin \eta| |W(\cos \theta, \cos \eta)| d\theta d\eta \end{aligned}$$

and for the Legendre polynomials (see [5, p.50]) the inequality $|P_k(\cos \theta)| \sqrt{\sin \theta} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi k}}$ holds true, then

$$\begin{aligned} I_{kl} \cdot k(k+1)l(l+1) &= \\ &= \frac{4}{\pi \sqrt{kl}} \int_0^\pi \int_0^\pi |W(\cos \theta, \cos \eta)| d\theta d\eta \leq \frac{4}{\sqrt{kl}} B\pi \end{aligned}$$

since the function $W(t, s)$ is bounded (it means that there exists such B that for all $t, s \in [0, \pi]$ $|W(t, s)| \leq B$). And hence

$$|E\xi_k \xi_l| \leq 2B\pi \frac{\sqrt{2k+1}}{k(k+1)\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2l+1}}{l(l+1)\sqrt{l}}.$$

Moreover

$$\begin{aligned} C_k &= \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} |T_k(\theta)| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \sqrt{\frac{2k+1}{2}} |P_k(\theta)| |\sin \theta| \leq \sqrt{\frac{2(2k+1)}{k\pi}}. \end{aligned}$$

In this case the conditions of the theorem 4.2 are fulfilled for the process $X(\theta)$. Indeed,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| k^\alpha l^\alpha C_k C_l \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 4B \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2k+1)}{k^2(k+1)} \frac{(2l+1)}{l^2(l+1)} k^\alpha l^\alpha \sim \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^\alpha l^\alpha}{k^2 l^2} < \infty \end{aligned}$$

since $0 < \alpha < 1$. This implies the statement of the theorem. $\square$

6 Conclusions

$\square$ In the paper the expansions of the stochastic processes into series with regard to the orthonormal systems of Legendre polynomials are studied. The conditions were found for approximation of the processes obtained from these expansions to converge in probability to the initial series. This results can be useful for simulation of such processes, saving their trajectories.

References.

1. Dzyamko V.Yo., Kozachenko Yu.V., Motsa A.I. *On the representation of the φ -sub-Gaussian stochastic processes into series and their convergence.* // Scientific bulletin of Uzhgorod university. – 2012. – Vol. 23. – P. 42–54 (in Ukrainian).
2. Kozachenko Yu.V., Ostrovskiy E.I., *Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type.* // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 1985. – Vol.32 – P. 42–53. (in Russian).
3. Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V., *Metric characterization of random variables and random processes.* American Mathematical Society, Providence RI, 2000.
4. Vasylyk O.I., Kozachenko Yu.V., Yamnenko R.Ye. φ -sub-Gaussian stochastic processes. – K.: PC "Kyivskyi universytet", 2008. – 232 p. (in Ukrainian).
5. J. Kampe de Fériet et al. *Fonctions de la physique mathématique.* – M.: Fizmatgiz, 1963. – 102 p. (Russian edition).

Received on 01.08.2012

УДК 512.552.1

Журавльов Д. В.¹

Про нежорсткі сагайдаки

Вводиться поняття l -допустимого сагайдака і описується один клас нежорстких сагайдаків.

Ключові слова: l -допустимий сагайдак, жорсткий сагайдак, матриця показників, черепичний порядок.

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: dzhuravlev@ukr.net.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Один із важливих класів, що виникає в різних питаннях теорії кілець та теорії цілочисельних зображень, — клас черепичних порядків. З точки зору абстрактної теорії кілець черепичний порядок є первинним нетеровим напівадосконалим та напідистрибутивним кільцем з ненульовим радикалом Джекобсона. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець. Тому матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. Сагайдак матриці показників співпадає з сагайдаком черепичного порядку з даною матрицею показників.

Допустимі сагайдаки, тобто сагайдаки матриць показників, можуть мати, з точністю до еквівалентності, рівно одну матрицю показників, скінченну кількість матриць показників, більшу, ніж одну, та нескінченну кількість матриць показників з даним допустимим сагайдаком. Допустимий сагайдак, який має хоча б одну петлю, є сагайдаком черепичного порядку нескінченної глобальної розмірності. Крім цього, такий сагайдак має нескінченну кількість матриць показників з даним допустимим сагайдаком.

Мета цієї роботи — встановлення зв'язків між допустимими сагайдаками та матрицями показників з такими сагайдаками. Знайти умови, за яких допустимий сагайдак має нескінчен-

Zhuravlev D. V.¹

On non-rigid quivers

This paper introduces the notion of l -admissible quiver and describes a class of non-rigid quivers.

Key Words: l -admissible quiver, rigid quiver, exponent matrix, tiled order.

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: dzhuravlev@ukr.net.

ну кількість матриць показників з даним сагайдаком.

Основні відомості про черепичні порядки, матриці показників та їх сагайдаки можна знайти в [1], [2]. У роботі [4] описано деякі класи нежорстких сагайдаків, асоційованих зі скінченими частково впорядкованими множинами, які мають нескінченну кількість матриць показників з даним допустимим сагайдаком.

1.1 Попередні відомості

Нагадаємо, що напівамаксимальне кільце — це напівадосконале напівпервинне нетерове справа кільце A таке, що для кожного примітивного ідемпотенту $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим (не обов'язково комутативним).

Позначимо $M_n(B)$ кільце всіх $n \times n$ матриць над кільцем B .

Теорема 1 ([1]). Кожне напівамаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{a_{12}} 0 & \dots & \pi^{a_{1n}} 0 \\ \pi^{a_{21}} 0 & 0 & \dots & \pi^{a_{2n}} 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{a_{n1}} 0 & \pi^{a_{n2}} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $n \geq 1$, 0 — дискретно нормоване кільце з простим елементом π , a_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $a_{ij} + a_{jk} \geq a_{ik}$ для всіх i, j, k та $a_{ii} = 0$ для всіх i .

Первинне напівамаксимальне кільце називається черепичним порядком.

Означення 1.1. Цілочисельна матриця $(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається матрицею показників черепичного порядку і позначається $\mathcal{E}$.

Ми будемо використовувати наступне позначення: $A = \{O, \mathcal{E}(A)\}$, де $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця A , т.б. $A = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} O$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є зведеним, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, т.б., $\mathcal{E}(A)$ є зведеною.

Кільце O вкладється в класичне тіло часток D , і (1) означає множини всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(D)$ таких що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}} O = e_{ii} A e_{jj}$, де $e_{11}, \dots, e_{nn}$ — матричні одиниці кільця $M_n(D)$. Очевидно, що $M_n(D)$ є класичним кільцем часток кільця A .

Зрозуміло, що кільце A є як нетеровим справа, так і нетеровим зліва.

Означення 1.2. Модуль M називається дистрибутивним, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Очевидно підмодуль та фактор-модуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається напівдистрибутивним, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_A A$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним (див. [1]).

Теорема 2 ([1]). Наступні умови для напівдосконалого наліпеперичного нетерогового справа кільця A еквівалентні:

- кільце A напівдистрибутивне;
- кільце A є прямим добутком наліпеперичного артінового кільця та наліпеперичного кільця.

Позначимо $M_n(\mathbb{Z})$ кільце всіх квадратних $n \times n$ -матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Означення 1.3. Цілочисельна матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається матрицею показників, якщо

- $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$;
- $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для $1 \leq i, j, k \leq n$.

Матриця показників $\mathcal{E}$ називається зведеною, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$; $i \neq j$.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Покладемо $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ і $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \dots, n$, и $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj})$. Очевидно, $\mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} \in (0, 1)$ -матрицею. Ми називаємо сагайдак Q простим якщо його матриця суміжності $[Q] \in (0, 1)$ -матрицею, тобто в Q немає кратних стрілок і кратних петель.

Теорема 3. [1, теорема 14.7.1]. Матриця $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ є матрицею суміжності сильно зв'язного простого сагайдака $Q = Q(\mathcal{E})$.

Означення 1.4. Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ називається сагайдаком зведеної матриці показників $\mathcal{E}$.

Означення 1.5. Сильно зв'язний простий сагайдак називається допустимим, якщо він є сагайдаком зведеної матриці показників.

Означення 1.6. Дві матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ і $\Theta = (\theta_{ij})$ називаються еквівалентними, якщо одна може бути отримана з іншої перетвореннями наступних двох типів:

- віднімання цілого числа α від елементів i -ого рядка з одночасним додаванням α до елементів i -ого стовпчика;
- одночасна перестановка двох рядків і двох стовпчиків з однаковими номерами.

Твердження 1. [1]. Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ і $\Theta = (\theta_{ij})$ матриці показників, и Θ отримується з $\mathcal{E}$ перетвореннями типу (1). Тоді $[Q(\mathcal{E})] = [Q(\Theta)]$.

Твердження 2. [1]. При перетвореннях другого типу матриця суміжності $[Q]$ сагайдака $Q(\Theta)$ змінюється за формулою: $[Q] = P^T [Q] P$, де $[Q] = [Q(\mathcal{E})]$.

Означення 1.7. Допустимий сагайдак Q називається жорстким, якщо, з точністю до еквівалентності, існує єдина матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q = Q(\mathcal{E})$.

З кожної скінченною частково впорядкованою множиною $P = \{1, \dots, n\}$ ми зв'язуємо зведену $(0, 1)$ -матрицю показників $\mathcal{E}_P = (\lambda_{ij})$ наступним чином: $\lambda_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \leq j$, інакше $\lambda_{ij} = 1$.

Легко бачити, що $\mathcal{E}_P \in$ дійсно зведеною матрицею показників.

Позначимо через $P_{\max}$ множину всіх максимальних елементів множини P , через $P_{\min}$ — множину всіх мінімальних елементів множини P , і через $P_{\max} \times P_{\min}$ — їх декартів добуток.

Означення 1.8. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$, отриманий з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок σ_{ij} для всіх $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$ називається сагайдаком, асоційованим з частково впорядкованою множиною P .

Теорема 4. [1] Сагайдак $Q(\mathcal{E}_P)$ співпадає з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$.

У теоремах 5, 6 і 7 наводяться достатні умови для множини P , щоб сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не був жорстким.

Частково впорядковану множину зі зв'язною діаграмою будемо називати зв'язною.

Теорема 5. [4] Нехай P — скінченна зв'язна частково впорядкована множина, що задовольняє наступним умовам:

- для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке, що α_i і α_j не порівнюються;
- існують $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ такі, що $\alpha_u \not\leq \alpha_v$.

Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теорема 6. [4] Нехай P — скінченна зв'язна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:

- для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке, що α_i і α_j не порівнюються;
- для будь-яких $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ має місце нерівність $\alpha_u \leq \alpha_v$;
- існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P'_{\min}, P''_{\max}, P''_{\min} \neq \emptyset$;

Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теорема 7. [4] Нехай P — скінченна незв'язна частково впорядкована множина. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теоремами 5, 6, 7 можна узагальнити наступним чином.

Теорема 8. Нехай P — скінченна зв'язна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:

- для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке, що α_i і α_j не порівнюються;
- існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P'_{\min}, P''_{\max}, P''_{\min} \neq \emptyset$;

Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

2 l -допустимі сагайдаки та жорсткі сагайдаки

Нехай $Q = (X, U)$ — сагайдак з множиною вершин X та множиною стрілок U . Сагайдак $Q = (X, U)$ називається сильно зв'язним, якщо для будь-яких $x, y \in X$ існує маршрут $P = \{x = x_0, u_1, x_1, \dots, x_{t-1}, u_t, x_t = y\}$, де u_k — стрілка з початком у x_{k-1} та кінцем у x_k , $k = 1, \dots, t$. Маршрут, у якого всі стрілки різні, називається ланцюгом. Циклічний ланцюг, тобто коли $x_0 = x_t$ та $t \geq 2$, називається циклом. Ланцюг простий, якщо всі його вершини $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t$ різні. У випадку $x_t = x_0$ та $t \geq 2$, при відсутності інших співпадань вершин, маємо простий цикл.

Будемо позначати $Q[l] = (X, U; l)$ — сильно зв'язний сагайдак, у якого: $X = \{1, 2, \dots, n\}$ — множина вершин сагайдака Q , $X \neq \emptyset$; $X^2 \supset U$ — множина його стрілок з ваговою функцією $l: U \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Якщо $P = \{x_0, u_1, x_1, \dots, x_{t-1}, u_t, x_t\}$ — маршрут, то $l(P) := \sum_{u \in P} l(u) = \sum_{i=1}^t l(u_i)$. Число $S(x, y) := S_Q^l := \min\{l(P) | P \in P(x, y)\}$, де $P(x, y)$ — множина всіх простих ланцюгів з початком в точці x і кінцем в точці y , у випадку $x \neq y$, і во всіх простих циклах при $x = y$, називається відстанню від точки x до точки y по сагайдаку Q .

Для будь-якої стрілки $u \in U$ будемо позначати $b(u)$ — її початок і $e(u)$ — її кінець, $\{b(u), e(u)\} \subset X$.

Означення 2.1. Сагайдак $Q[l]$, для якого виконуються наступні умови:

- a) $\forall x \in X : S(x, x) = 1$ (існування циклу довжини 1),
 b) $\forall u \in U : l(u) < l(P)$ (довжина стрілки менша за довжину шляху),
 де $P = \{b(u) = x_0, u_1, x_1, \dots, x_{t-1}, u_t, x_t = e(u)\}$, $t \geq 2$,
 будемо називати l -допустимим.

Означення 2.2. Дві вагові функції l_1 та l_2 , задані на множині стрілок одного допустимого сагайдака Q , будемо називати еквівалентними, якщо l_2 можна отримати з l_1 перетвореннями типу (зміна довжини в точці x на величину h):

$$l_x^h(u) = \begin{cases} l(u) + h, & \text{якщо } b(u) = x, \\ l(u) - h, & \text{якщо } e(u) = x, \\ l(u), & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тобто існують набори $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\} \subset X$ та $\{h_1, h_2, \dots, h_{k-1}, h_k\} \subset \mathbb{Z}$, для яких $l_2(u) = l_1^{h_1 h_2 \dots h_{k-1} h_k}(u)$.

Введемо на множині таких сагайдаків відношення $\simeq$ за правилом: $Q_1[l_1] \simeq Q_2[l_2]$, якщо:

- a) $Q_1 \simeq Q_2$ в сенсі сагайдаків,
 б) $l_1 \simeq l_2$.

Легко бачити, що це відношення є відношенням еквівалентності.

Нехай $Q[l]$ — l -допустимий сагайдак. Позначимо $S(Q[l])$ матрицю, елементами якої є числа

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j, \\ S(i, j), & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Твердження 3. Для довільного l -допустимого сагайдака $Q[l]$ матриця $S(Q[l])$ є зведеною матрицею показників черепичного порядку. Причому для будь-яких l -допустимих сагайдаків $Q_1[l_1]$ та $Q_2[l_2]$ $S(Q_1[l_1]) \simeq S(Q_2[l_2])$ тоді і тільки тоді, коли $Q_1[l_1] \simeq Q_2[l_2]$.

Доведення. Нехай $Q[l]$ — l -допустимий сагайдак, тобто такий, що задовольняє наступні дві умови: $\forall x \in X : S(x, x) = 1, \forall u \in U : l(u) < l(P)$, де $P = \{b(u) = x_0, u_1, x_1, \dots, x_{t-1}, u_t, x_t = e(u)\}$, $t \geq 2$. Перевіримо, що $S(Q[l])$ є зведеною матрицею показників. Дійсно, $\alpha_{ii} = 0$ за визначенням, а $\alpha_{ik} = S(i, k) = \min_{P \in P(i, k)} l(P) \leq \min_{P \in P(i, j)} l(P) + \min_{P \in P(j, k)} l(P) = S(i, j) + S(j, k)$, для

$1 \leq i, j, k \leq n$. Отже, $S(Q[l])$ — матриця показників черепичного порядку. Більш того, вона зведена, бо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = S(i, j) + S(j, i) = \min_{P \in P(i, j)} l(P) + \min_{P \in P(j, i)} l(P) \geq \min_{P \in P(i, i)} l(P) = 1 > 0$.

Доведемо, що $[Q(\mathcal{E})] = [Q]$, де $[Q(\mathcal{E})] = (q_{ij})$. Нагадаємо, що $q_{ij} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{kj}) -$

$$\beta_{ij} = \min \left(1, \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}) \right) \text{ при } i \neq j \text{ і } q_{ii} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \beta_{ii} =$$

$$\min \left(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1) \right). \text{ Якщо } q_{ij} = 1 \text{ і } i \neq j, \text{ то } \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}) \geq 1, \text{ тобто}$$

$\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ для будь-яких $k \neq i, j$. Це означає, що довжина будь-якого маршрута з i в j , що не є стрілкою, строго більша за α_{ij} . Якщо $q_{ij} = 0$ та $i \neq j$, то $\min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}) = 0$, тобто існує k таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 0$.

Це означає, що існує маршрут з i в j , який не є стрілкою, довжина якого дорівнює α_{ij} .

Якщо $q_{ii} = 1$, то $\min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1) = 1$. Отже, $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 \geq 1$ для будь-якого $k \neq i$. Це означає, що довжина будь-якого циклу з i , що не є стрілкою, строго більше 1.

Якщо $q_{ii} = 0$, то $\min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1) = 0$, тобто існує k таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Це означає, що існує цикл з i , який не є петлею, довжина якого дорівнює 1.

Нехай $S(Q_1[l_1]) \simeq S(Q_2[l_2])$. Оскільки сагайдаки еквівалентних матриць показників еквівалентні, а $Q(S(Q_i[l_i])) = Q_i$, $i = 1, 2$, то $Q_1 \simeq Q_2$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $Q_1 = Q_2 = Q$. Кожній стрілці σ_{ij} сагайдака Q , що веде із точки i в точку j , відповідають твірні радикалів R_1 та R_2 черепичних порядків з матрицями показників $S(Q_1[l_1])$ та $S(Q_2[l_2])$. Тоді твірний радикал R_i черепичного порядку з матрицею показників $S(Q_i[l_i])$, що відповідає стрілці σ_{ij} , має вид $\pi^{\beta_{ij}} \alpha_{ij}^t e_{ij}$, де $\alpha_{ij}^t \in \mathcal{O}$, де $t \in \{1, 2\}$. Сукупність всіх елементів $\{\pi^{\beta_{ij}} \alpha_{ij}^t e_{ij}\}$ (по всіх стрілках сагайдака Q) — це мінімальна система твірних радикалів R_i , де $t \in \{1, 2\}$. Нехай $S(Q_1[l_1])$ отримувється з $S(Q_2[l_2])$ послідовному виконанні перетворень типу віднімання цілого числа α від елементів i -ого рядка з одночасним додаванням α до елементів i -ого стовпчика. Очевидно, що звуження цих пе-

ретворень на твірні радикалу показує шлях до встановлення еквівалентності l_1 та l_2 .

Навпаки, якщо $Q_1[l_1] \simeq Q_2[l_2]$, то $Q_1 \simeq Q_2$ та $l_1 \simeq l_2$. $Q(S(Q_1[l_1])) = Q_i, i = 1, 2$, тому $Q(S(Q_1[l_1])) \simeq Q(S(Q_2[l_2]))$. Тобто перетвореннями типу перестановки двох рядків і тих самих стовпчиків матриць показників $S(Q_1[l_1])$ та $S(Q_2[l_2])$ можна добитися, щоб $Q_1 = Q_2$. Не порушуючи еквівалентності матриць показників, можна вважати, що це дійсно так. Використовуючи, що $l_1 \simeq l_2$, отримаємо індуковані перетворення типу віднімання цілого числа α від елементів i -ого рядка з одночасним додаванням α до елементів i -ого стовпчика матриць показників $S(Q_1[l_1])$ та $S(Q_2[l_2])$. Отже, $S(Q_1[l_1]) \simeq S(Q_2[l_2])$. Твердження доведено. $\square$

Твердження 4. Допустимий сагайдак $Q = Q(X, U)$, у якого всі цикли проходять через одну точку, є жорстким.

Доведення. Нехай всі цикли сагайдака Q проходять через точку $x_0 \in X$. Доведемо, що з точністю до еквівалентності існує єдиний l -допустимий сагайдак, зі стрілками, що відповідають стрілкам Q . Існування впливає з допустимості Q . Доведемо єдиність при $|X| \geq 2$. З точністю до еквівалентності, можна вважати, що $S(x_0, x) = 0$, для будь-якого $x \in X \setminus \{x_0\}$ (якщо це не так, віднімаємо від x -го стовпчика елемент $S(x_0, x)$, додавши при цьому $S(x_0, x)$ до x -го рядка, для всіх $x \in X$). Виберемо $u \in U$ так, щоб $b(u) \neq e(u) = x_0$. Це можна зробити, якщо $|X| \geq 2$. Для точки $b(u)$ всі прості цикли проходять через точку x_0 , тому для будь-якої допустимої функції l :

$$1 = S(x_0, x_0) = S(x_0, b(u)) + S(b(u), x_0) = 0 + l(u).$$

Тобто $l(u) = 1$ для будь-яких $u \in U$ таких що $b(u) \neq e(u) = x_0$. Якщо $e(u) \neq x_0$, то $S(b(u), x_0) + S(x_0, e(u)) = 0 + 1 > l(u)$, тобто $l(u) = 0$. Звідси випливає, що існує лише одна з точністю до еквівалентності функція $l: U \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, для якої $Q[l]$ є l -допустимим. $\square$

Твердження 5. Якщо для допустимого сагайдака $Q = (X, U)$ існують два допустимих підсагайдака $Q_1 = (X_1, U_1)$ та $Q_2 = (X_2, U_2)$, такі що: $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, U_i = \{(b(u), e(u)) \mid \{b(u), e(u)\} \subset X_i, i \in \{1, 2\}\}$, то Q не є жорстким.

Доведення. Оскільки сагайдаки Q, Q_1, Q_2 -допустимі, можна визначити відповідні

l -допустимі сагайдаки $Q[l], Q_1[l_1], Q_2[l_2]$, поклавши значеннями $l(u), l_1(u), l_2(u)$ значення елементів матриць показників відповідних радикалів. Побудуємо новий l -допустимий сагайдак, змінивши l на $\tilde{l}$ за правилом:

$$\tilde{l} = \begin{cases} l(u) + 1, & \text{якщо } b(u) \in X_1, e(u) \in X_2, \\ l(u), & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Покажемо, що він дійсно l -допустимий. Для будь-якого $x \in X = X_1 \cup X_2$, випливає, що $\tilde{S}(x, x) = 1$. Перевіримо, що $l(u) < l(P)$, де $P = \{b(u) = x_0, u_1, x_1, \dots, x_{t-1}, u_t, x_t = e(u)\}$, $t \geq 2$. Якщо $u \in U_1$ або $u \in U_2$, то доводити нічого. Нехай тепер $b(u) \in X_1, e(u) \in X_2$. Оскільки P -простий ланцюг, то існує єдине $t, 1 \leq t \leq l$, таке що $b(u_t) \in X_1, e(u_t) \in X_2$. Тому

$$\tilde{l}(P) = \sum_{i=1}^t \tilde{l}(u_i) = \sum_{i=1}^{t-1} \tilde{l}(u_i) + \tilde{l}(u_t) + \sum_{i=t+1}^l \tilde{l}(u_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} l(u_i) + l(u_t) + 1 + \sum_{i=t+1}^l l(u_i) = l(P) + 1 >$$

$$l(u) + 1 = \tilde{l}(u). \quad \square$$

Висновок: у роботі отримано достатню умову для того, щоб допустимий сагайдак мав нескінченну кількість матриць показників з даним сагайдаком. Також доведено, що сагайдак, у якого всі цикли проходять через одну точку, є жорстким.

Література

1. M. Hazewinkel, N. Gubarení and V. V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications, 575, Kluwer Acad. Publish., 2004. xii+380pp.
2. M. Hazewinkel, N. Gubarení, V. V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules, Vol. 2, Series: Mathematics and Its Applications, Kluwer Acad. Publish. 586., 2007, xii+400pp.
3. V. V. Kirichenko, A. V. Zelenisky, V. N. Zhuravlev, Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings, *Algebra and Computation*, 15, No 5 & 6 (2005), pp. 997-1012.
4. V. V. Kirichenko, V. N. Zhuravlev, I. M. Tsyganivska, On rigid quivers. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, v. 12, No 8, 2008. p. 105-120.

Надійшла до редакції 25.09.2012

УДК 512.552

Журавльов В.М.¹, доцент
Зеленський О.В.², канд. ф.-м. н.
Дармосюк В.М.³, канд. ф.-м. н.

Одиничні сагайдаки матриць показників

У роботі досліджуються одиничні сагайдаки матриць показників.

Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак, одиничний сагайдак.

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: vshur@univ.kiev.ua.

²Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 32300, м. Кам'янець-Подільський, вул. Огієнка, 61.

³Миколаївський національний університет ім.В.О.Сухомлинського, 54030, м. Миколаїв, вул. Нікольська, 24.

E-mail: vshur@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

У роботі [5] охарактеризовано сагайдаки матриць показників як підклас простих сильно зв'язаних сагайдаків з ваговою функцією, визначеною на стрілках сагайдака. Такі сагайдаки називаються допустимими.

Мета цієї роботи — дослідити допустимі сагайдаки без петель та їх матриці показників. А саме: з'ясувати взаємне розташування двох одиничних циклів таких сагайдаків та знайти оцінку зверху для елементів матриць показників з такими сагайдаками.

Поняття черепичного порядку ввів І.Капланський. Черепичні порядки виникли у 70-их роках минулого століття. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець.

Термін "сагайдак" був введений П.Габрієлем в 1972 році у зв'язку з вивченням зображень скінченновимірних алгебр. Це, в точності, скінченний орієнтований граф, можливо з кратними стрілками і кратними петлями. Петля — це стрілка, початок і кінець якої співпадають.

Zhuravlev V.N.¹, Ass. Prof.
Zelensky A.V.², C. Sci (Phys.-Math.)
Darmosiuk V.M.³, C. Sci (Phys.-Math.)

Unit quivers of exponent matrices

We study unit quivers of exponent matrices

Key Words: exponent matrix, admissible quiver, unit quiver.

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: vshur@univ.kiev.ua.

²Kamyanec'-Podil'skiy National University of the name of Ivana Ogiienka, 32300, Kamyanec'-Podil'sk, vul. Ivana Ogiienka, 61.

³Mykolaiv National University of the name of Sukhomlinskogo, 54030, Mykolaiv, 24 Nikol'ska street.

Відзначимо, що в нашій термінології "черепичний порядок" — це петерсове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з неуніальним радикалом Джекобсона.

У даній роботі ми розглядаємо сагайдаки, які виникають у теорії черепичних порядків. Ці сагайдаки визначаються матрицями показників і відіграють важливу роль у вивченні властивостей черепичних порядків. Так, наприклад, якщо сагайдак черепичного порядку має петлю хоча б у одній вершині, то такой порядок має нескінченну глобальну розмірність.

Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. Робота присвячена дослідженню одиничних сагайдаків матриць показників та матриць показників таких сагайдаків.

1.1 Попередні відомості

Означення 1.1. Матриця $E = (e_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ ($M_n(\mathbb{Z})$ — це кільце матриць розмірності n з цілими елементами), для якої виконуються наступні умови:

- 1) $e_{ij} + e_{jk} \geq e_{ik}$ для всіх $i, j, k = 1, \dots, n$,
- 2) $e_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$,

називається матрицею показників. Матриця показників, для якої виконується умова

$$3) \alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1 \text{ для всіх } i, j \in \{1, \dots, n\} \\ (i \neq j)$$

називається зведеною матрицею показників.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{kj})$. Елементи матриць $\mathcal{E}^{(1)}$ та $\mathcal{E}^{(2)}$ задовольняють нерівність $0 \leq \gamma_{ij} - \beta_{ij} \leq 1$.

Означення 1.2. Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

Для елементів матриці суміжності сагайдака Q маємо наступні формули:

$$q_{ij} = \gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = \\ \min \left(1, \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \beta_{ij}) \right) = \\ \min \left(1, \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}) \right).$$

$$q_{ii} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \beta_{ii} = \\ \min \left(2, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki}) \right) - 1 = \\ \min \left(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1) \right).$$

Звідси отримуємо, що $q_{ij} = 1$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i, j$. $q_{ii} = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$ для всіх $k \neq i$.

Означення 1.3. Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називається еквівалентними, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1. Відняти ціле число t від елементів i -го рядка та додати це число до елементів i -го стовпчика,
2. Поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

Означення 1.4. Сагайдак Q називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 1.5. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається значенням, якщо визначена функція $\omega: AQ \rightarrow \mathbb{R}$. Функція ω називається вагою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Теорема 1. [5] Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega: AQ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє наступним умовам:

1. вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$;
2. вага петлі в точці i менше за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i , довжини $l \geq 2$;
3. вага будь-якого циклу більше або дорівнює 1;
4. вага петлі дорівнює 1;
5. через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Зауваження 1. Згідно умов (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

2 Одиничні сагайдаки

Означення 2.1. Простий цикл в сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати одиничним.

Твердження 1. В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, окрім стрілок цього циклу.

Доведення. Нехай $v_1, v_2, \dots, v_m, v_1$ — одиничний цикл сагайдака $Q = (VQ, AQ)$ і ω — вагова функція, задана на AQ . Тоді виконується рівність $\omega(v_1, v_2) + \dots + \omega(v_{m-1}, v_m) + \omega(v_m, v_1) = 1$. Припустимо протилежне, що існують вершини v_i та v_j , які не є сусідніми вершинами в циклі

та стрілка (v_i, v_j) належить Q . Не зменшуючи загальності можна вважати, що $i < j$. Тоді

$$\omega(v_i, v_{i+1}) + \omega(v_{i+1}, v_{i+2}) + \dots + \omega(v_{j-1}, v_j) > \omega(v_i, v_j). \quad (1)$$

Оскільки

$\omega(v_1, v_2) + \dots + \omega(v_{m-1}, v_m) + \omega(v_m, v_1) = 1$, то $\omega(v_i, v_{i+1}) + \omega(v_{i+1}, v_{i+2}) + \dots + \omega(v_{j-1}, v_j) \leq 1$ і нерівність (1) можлива тільки у випадку $\omega(v_i, v_{i+1}) + \omega(v_{i+1}, v_{i+2}) + \dots + \omega(v_{j-1}, v_j) = 1$, $\omega(v_i, v_j) = 0$.

Але тоді

$\omega(v_1, v_2) + \dots + \omega(v_{i-1}, v_i) + \omega(v_i, v_j) + \omega(v_j, v_{j+1}) + \dots + \omega(v_{m-1}, v_m) + \omega(v_m, v_1) = 0$. Отримали протиріччя. Твердження доведено. $\square$

Зауваження 2. Два одичні цикли можуть мати спільні стрілки.

Приклад 1. Зведена матриця показників $\mathcal{E} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ з матрицею суміжності } [Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ має одичні цикли } 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1.$$

Твердження 2. Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок (v_i, v_a) та (v_j, v_a) , де вершини v_i, v_j належать одному одичному циклу.

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай $v_1, v_2, \dots, v_m, v_1$ — одичний цикл сагайдака $Q = (VQ, AQ)$, $1 \leq i < j \leq m$. З твердження 1 випливає, що $a \notin \{1, 2, \dots, m\}$, тобто вершина v_a не належить одичному циклу $v_1, v_2, \dots, v_m$.

Нехай $x = \omega(v_i, v_{i+1}) + \dots + \omega(v_{j-1}, v_j)$ — вага шляху із вершини v_i в вершину v_j через вершини $v_{i+1}, \dots, v_{j-1}$, а дорівнює вазі шляху із вершини v_j в вершину v_i , тобто

$$y = \omega(v_j, v_{j+1}) + \dots + \omega(v_{m-1}, v_m) + \omega(v_m, v_1) + \omega(v_1, v_2) + \dots + \omega(v_{i-1}, v_i).$$

Оскільки вага шляху більша, ніж вага стрілки, то ми одержуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x + \omega(v_j, v_a) \geq \omega(v_i, v_a) + 1 > \omega(v_i, v_a), \\ y + \omega(v_i, v_a) \geq \omega(v_j, v_a) + 1 > \omega(v_j, v_a). \end{cases}$$

Додаючи ці нерівності отримаємо

$$x + y \geq 2.$$

Але $x + y = 1$, бо $v_1, v_2, \dots, v_m, v_1$ — одичний цикл. Отримали протиріччя. Твердження доведено. $\square$

Твердження 3. Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ не може містити стрілки (v_a, v_i) , (v_a, v_j) , де вершини v_i, v_j належать деякому одичному циклу.

Доведення. Твердження доводиться аналогічно до твердження 2. $\square$

Означення 2.2. Одичні цикли, які мають спільну вершину, будемо називати суміжними.

Наслідок 1. Якщо v_1, v_2, v_3 та $v_2, v_3, \dots, v_k, v_2$ — одичні цикли допустимого сагайдака Q то Q не містить стрілку (v_1, v_p) та Q не містить стрілку (v_p, v_1) , де $3 \leq p \leq k$.

Доведення. Сагайдак Q містить стрілку (v_1, v_2) та вершини v_p та v_2 належать одному одичному циклу. Тому за твердженням 3 Q не містить стрілку (v_1, v_p) .

Аналогічно, сагайдак Q містить стрілку (v_2, v_1) та вершини v_p та v_2 належать одному одичному циклу. Тому за твердженням 2 Q не містить стрілку (v_p, v_1) . $\square$

Твердження 4. Якщо допустимий сагайдак Q містить два одичні суміжні цикли v_1, v_2, v_3, v_1 та v_3, v_4, v_5, v_3 і стрілку (v_1, v_5) , то цикл v_1, v_5, v_3, v_1 — одичний.

Доведення. Оскільки вага шляху більша, ніж вага стрілки, то

$$\omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \omega(v_3, v_4) + \omega(v_4, v_5) \geq \omega(v_1, v_5) + 1.$$

Додамо до обох сторін нерівності $\omega(v_3, v_1) + \omega(v_5, v_3)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \omega(v_3, v_1) + \omega(v_3, v_4) + \\ \omega(v_4, v_5) + \omega(v_5, v_3) \geq \\ \geq \omega(v_1, v_5) + \omega(v_5, v_3) + \omega(v_3, v_1) + 1. \end{aligned}$$

Оскільки v_1, v_2, v_3, v_1 та v_3, v_4, v_5, v_3 одичні цикли, то

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \omega(v_3, v_1) = \\ \omega(v_3, v_4) + \omega(v_4, v_5) + \omega(v_5, v_3) = 1. \end{aligned}$$

Тому остання нерівність рівносильна наступній:

$$2 \geq \omega(v_1, v_3) + \omega(v_3, v_2) + \omega(v_2, v_1) + 1 \text{ або } \omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \omega(v_3, v_1) \leq 1.$$

Враховуючи те, що вага циклу не менша за одиницю, одержимо, що $\omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \omega(v_3, v_1) = 1$. Отже, v_1, v_2, v_3, v_1 — одиничний цикл. Твердження доведено. $\square$

Означення 2.3. Допустимий сагайдак Q будемо називати *одиничним*, якщо об'єднання одиничних циклів сагайдака Q утворює сильнозв'язний сагайдак Q_1 , такий що $VQ = VQ_1$.

Лема 1. Для довільного одиничного сагайдака Q існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q = Q(\mathcal{E})$ і $0 \leq \alpha_{ij} \leq n-1$ для всіх i, j .

Доведення. Розглянемо довільні дві вершини i, j одиничного сагайдака Q . Оскільки сагайдак Q одиничний, то існує простий шлях із i в j , який проходить тільки по стрілкам одиничних циклів. Цей шлях складається не більше, ніж з $(n-1)$ -ї стрілки. Тому вага шляху не перевищує $n-1$. Оскільки α_{ij} дорівнює вазі мінімального за вагою шляху з i в j , то $\alpha_{ij} \leq n-1$. Лема доведена. $\square$

Лема 2. Якщо $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ — матриця показників з одиничним сагайдаком $Q = Q(\mathcal{E})$ і $\alpha_{ij} = k$, то $\alpha_{ji} \leq n-1-k$.

Доведення. Оскільки $\alpha_{ij} = k$, то вага мінімального за вагою шляху, який починається в i та закінчується в j , дорівнює k . Тому вага шляху, який починається в i , закінчується в j та проходить по стрілкам одиничних циклів не менша за k . Нехай вага шляху з i в j , який проходить по стрілкам одиничних циклів, дорівнює $p \geq k$. Нехай цей шлях проходить через вершини $i = v_0, v_1, \dots, v_m = j$, де для $t = 0, \dots, m-1$ вершини v_t, v_{t+1} належать одному одиничному циклу, але вершини v_t, v_{t+1} не обов'язково є суміжними. Оскільки сума стрілок шляху дорівнює p , то кількість відрізків шляху вигляду v_t, v_{t+1} , вага яких дорівнює 0, не перевищує $m-p$.

Далі під шляхом v_t, v_{t+1} будемо розуміти частину одиничного циклу.

Розглянемо зворотній шлях, який проходить через вершини $j = v_m, \dots, v_0 = i$, де v_{t+1}, v_t — частина одиничного циклу. Якщо вага шляху v_{t+1}, v_t дорівнює 1, то вага шляху v_t, v_{t+1}

дорівнює 0. Тому кількість відрізків v_{t+1}, v_t , вага яких дорівнює одиниці, не перевищує $m-p$.

Отже, вага шляху $j = a_m, \dots, a_0 = i$ не перевищує $m-p$. Оскільки m не перевищує кількості стрілок шляху $a_0, a_1, \dots, a_m$, то $m \leq n-1$. $k \leq p$, тому $m-p \leq n-1-p \leq n-1-k$.

Враховуючи, що α_{ji} дорівнює вазі мінімального за вагою шляху із j в i , отримаємо, що α_{ji} не перевищує ваги шляху з j в i , який проходить по одиничним циклам. Тому $\alpha_{ji} \leq n-1-k$. Лема доведена. $\square$

Наслідок 2. Для довільного одиничного сагайдака Q існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ з $Q = Q(\mathcal{E})$, для якої $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \leq n-1$ для всіх i, j .

Доведення. За лемою 1 для сагайдака Q існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, $Q = Q(\mathcal{E})$, для якої $0 \leq \alpha_{ij} \leq n-1$. Нехай $\alpha_{ij} = k$. З леми 2 випливає, що $\alpha_{ji} \leq n-1-k$. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \leq n-1$. $\square$

В сагайдаку Q позначимо через $d(v_1, v_2)$ мінімальну кількість одиничних циклів, через вершини яких потрібно пройти, щоб з вершини v_1 потрапити у вершину v_2 . Будемо вважати $d(v, v) = 0$.

Лема 3. 1) $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ для всіх $v_i, v_j \in VQ$,

2) $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ для всіх $v_i, v_j, v_k \in VQ$.

Доведення. Припустимо протилежне, що $d(v_i, v_j) < d(v_j, v_i)$. Занумеруємо цикли на шляху із v_i в v_j числами $1, 2, \dots, m = d(v_i, v_j)$. Очевидно, що з вершини v_j рухаючись по стрілкам циклів $m, \dots, 1$ можна потрапити в вершину v_i . Тому $d(v_j, v_i) \leq m = d(v_i, v_j)$. Отже, припущення не вірне, тому $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$.

З вершини v_i можна потрапити в вершину v_j через вершину v_k . Тому $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$. $\square$

Лема 4. В одиничному сагайдаку Q існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ має місце нерівність $d(v_1, v_k) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Доведення. Побудуємо неорієнтований граф $G = (VG, AG)$, в якому вершини — це одиничні

цикли сагайдака Q . У графі G дві вершини з'єднані ребром, якщо в сагайдаку Q відповідні одиничні цикли мають спільну вершину. Оскільки сагайдак Q одиничний, то граф G є зв'язним. Побудуємо граф $G_1 = (VG_1, AG_1)$, який є остовним каркасом графа G . Тобто $VG_1 = VG$, $AG_1 \subseteq AG$ і граф G_1 є деревом. Нехай $l(t_k, t_p)$ — це відстань між двома вершинами (тобто $l(t_k, t_p)$ — це кількість ребер в мінімальному шляху з t_k в t_p).

У скінченному графі G_1 визначений діаметр $l(G_1) = \max_{t_k, t_p \in VG_1} l(t_k, t_p)$. Дерево має центр (один або два) (див. н-д, [4, теорема 4.2.2, стор. 84]) і радіус дерева $\rho(G_1) = \left\lceil \frac{l(G_1)+1}{2} \right\rceil$. Нехай t_r — центр дерева. Тоді для довільної вершини v_i одиничного циклу t_r маємо $d(v_i, v_j) \leq \rho(G_1) + 1$ для довільної вершини $v_j \in VQ$.

В загальному випадку $|VG_1| = |VG| \leq |VQ| - 1$. Причому рівність $|VG_1| = |VQ| - 1$ можлива лише тоді, коли всі одиничні цикли сагайдака Q мають довжину два. Для дерева G_1 завжди $l(G_1) \leq |VG_1| - 1$. Рівність $l(G_1) = |VG_1| - 1$ виконується у випадку, коли дерево G_1 є ланцюгом.

Якщо сагайдак Q містить одиничний цикл довжини більшої, ніж два, то $|VG_1| < |VQ| - 1$. Тоді $\rho(G_1) = \left\lceil \frac{l(G_1)+1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|VG_1|-1+1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|VQ|-2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{|VQ|}{2} \right\rceil - 1$.

Якщо дерево G_1 не є ланцюгом, то $l(G_1) < |VG_1| - 1$. Тоді $\rho(G_1) = \left\lceil \frac{l(G_1)+1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|VG_1|-1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|VQ|-2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{|VQ|}{2} \right\rceil - 1$.

У цих випадках $d(v_i, v_j) \leq \rho(G_1) + 1 \leq \left\lceil \frac{|VQ|}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{|VQ|}{2} \right\rfloor$.

Нехай сагайдак Q містить тільки одиничні цикли довжини два та дерево G_1 є ланцюгом. Тоді $|VG_1| = |VQ| - 1$ та $l(G_1) = |VG_1| - 1 = |VQ| - 2$.

Якщо $|VQ|$ — парне, то $\rho(G_1) = \frac{l(G_1)}{2} = \frac{|VQ|}{2} - 1$.

$$d(v_i, v_j) \leq \rho(G_1) + 1 = \frac{|VQ|}{2} = \left\lfloor \frac{|VQ|}{2} \right\rfloor.$$

Якщо $|VQ|$ — непарне, то $\rho(G_1) = \frac{l(G_1)+1}{2} = \frac{|VQ|-1}{2}$.

Дерево G_1 має 2 центри t_r, t_s , які є суміжними вершинами. Одиничні цикли t_r, t_s мають спільну вершину v_1 . Для цієї вершини $d(v_1, v_j) \leq \rho(G_1) = \frac{|VQ|-1}{2} = \left\lfloor \frac{|VQ|}{2} \right\rfloor$ для довільної вершини $v_j \in VQ$.

Лема доведена. $\square$

Теорема 2. Для довільного одиничного сагайдака Q існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q = Q(\mathcal{E})$ і $0 \leq \alpha_{ij} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ для всіх i, j .

Доведення. За лемою 4 існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ $d(v_1, v_k) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Оскільки сагайдак Q — допустимий, то існує зведена матриця показників $\mathcal{E}_1$ така, що $Q = Q(\mathcal{E}_1)$. З матриці $\mathcal{E}_1$ елементарними перетвореннями першого типу перейдемо до матриці $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, яка має нульовий стовпчик з номером v_1 . Зауважимо, що при елементарному перетворенні першого типу одиничний цикл залишається одиничним. Оскільки сагайдак одиничний, то $\alpha_{v_1 v_k} \leq d(v_1, v_k) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Тоді

$$\alpha_{ij} \leq \alpha_{v_1 v_i} + \alpha_{v_1 v_j} \leq 0 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \text{ Теорема доведена. } \square$$

Висновок: результати, отримані в роботі, дозволяють перевірити, чи є простий сильно зв'язний сагайдак без петель допустимим, за допомогою комп'ютерних обчислень. В подальшому цікаво розглянути жорсткі сагайдаки.

Література

1. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., *Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications*, Springer, 2004, v. 1, 380 p.
2. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., *Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications*, Springer, 2007, v. 2, 400 p.
3. V. V. Kirichenko, A. V. Zelensky, V. N. Zhuravlev, Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings, *Algebra and Computation*, 15, No 5 & 6 (2005), pp. 997–1012.
4. O. Ore, *Graph Theory*. Moscow, Nauka. 1980. 336 p.
5. V. N. Zhuravlev, Admissible quivers. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, v. 14, 2008. No 7, p. 121–128.

Надійшла до редколегії 30.09.2012

УДК 519.21

Ю.С. Мішур¹, д.ф.-м.н., професор
О.Л. Банна², к.ф.-м.н., асистент

Дробовий броунівський рух як границя марківських процесів

У роботі розглянуто наближення дробового броунівського руху марківськими процесами.

Ключові слова: дробовий броунівський рух, вінерівський процес, марківський процес.

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: myus@univ.kiev.ua.

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, Васильківська, 90а, e-mail: okskot@ukr.net.

Yu.S. Mishura¹, PhD, Professor
O.L. Banna², PhD, Assistant

Fractional Brownian motion as the limit of Markov processes

The paper investigates approximation of fractional Brownian motion by Markov processes.

Key Words: Fractional Brownian motion, Wiener process, Markov process.

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: myus@univ.kiev.ua.

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, 90A, vul. Vasylykivska, e-mail: okskot@ukr.net.

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Introduction

In the paper we continue the investigation of approximation of a fractional Brownian motion by stochastic processes in different classes.

Fractional Brownian motion with Hurst index $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ is a random process with long-term dependence. It is well known that a fractional Brownian motion is neither semimartingale nor a Markov process unless $H = \frac{1}{2}$. And also it is neither martingale nor a process of bounded variation. Semimartingale processes are good models for many problems, from statistics to finance. Therefore, stochastic analysis of semimartingale processes is deeply developed.

However, well studied semimartingale theory demonstrates insufficiency to describe the processes that occur in telecommunication connections, the processes of assets prices with long-term dependence and many others. In this connection, wide range of potential applications of fractional Brownian motion creates an interesting object of study. Fractional Brownian motion is a generalization of ordinary Brownian motion, and is used to simulate natural phenomena, technical and economic phenomena such as changes in weather and climate fluctuations, fluctuations in financial markets, hydromechanical and meteorological processes.

That is why a natural question arises: is

it possible to approximate a fractional Brownian motion in a certain metric by a Markov process, martingale, semimartingale or a process of bounded variation? As for a process of bounded variation and semimartingale, then answer is positive and corresponding results are presented in [1], [2] and [10]. The papers [3, 4, 5, 6, 7, 9] study approximation of a fractional Brownian motion with Gaussian martingales.

In the present paper we consider the approximation of a fractional Brownian motion by Markov processes.

2 Fractional Brownian motion representation

Fractional Brownian Motion (FBM) with Hurst index $H \in (0, 1)$ is a Gaussian process

$$\{B_t^H, t \geq 0\}$$

with zero mean

$$EB_t^H = 0$$

and covariation

$$EB_s^H B_t^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

such that $B_0^H = 0$. We only study the case when Hurst index satisfies $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. It is shown in [8] that the FBM $\{B_t^H, t \in [0, T]\}$ can be represented

as

$$B_t^H = \int_0^t z(t, s) dW_s, \quad (1)$$

where $\{W_t, t \in [0, T]\}$ is a Wiener process,

$$z(t, s) = (H - \frac{1}{2}) \cdot c_H s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2} (u - s)^{H-3/2} du,$$

where

$$c_H = \left(\frac{2H \Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \cdot \Gamma(2 - 2H)} \right)^{1/2},$$

 $\Gamma(x)$, $x > 0$ is Gamma function.Let $\alpha = H - \frac{1}{2}$.

A supplementary Gaussian process

$$Y_t = \int_0^t s^{-\alpha} dB_s^H$$

is used in [8] to obtain (1). Notice that Y_t is a solution of a stochastic differential equation

$$dY_t = t^{-\alpha} dB_t^H.$$

3 Fractional Brownian motion approximation by Markov processes

Let $\{B_t^H, t \in [0, T]\}$ be a fractional Brownian motion. In that case when $H \in (1/2, 1)$, then according to [8]

$$B_t^H = t^\alpha Y_t - \alpha \int_0^t s^{\alpha-1} Y_s ds = \int_0^t s^\alpha dY_s, \quad (2)$$

where $\alpha = H - 1/2$,

$$Y_t = C_H \int_0^t (t-u)^\alpha dM_u^H, \quad (3)$$

and Gaussian martingale

$$M_t^H = \int_0^t s^{-\alpha} dW_s,$$

$$C_H = \left(\frac{2H\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \right)^{1/2},$$

 W is a Wiener process.

Let's show that process Y_t can be represented with the following series:

Theorem 3.1. Process

$$Y_t = \int_0^t s^{-\alpha} dB_s^H$$

has representation

$$Y_t = \alpha C_H t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \binom{n-\alpha}{n} s^n M_{ts}^H ds, \quad (4)$$

where series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \binom{n-\alpha}{n} s^n M_{ts}^H ds$$

almost surely converges absolutely and uniformly.

Proof. Let's integrate the right-hand side of (3) by parts:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_H \int_0^t (t-u)^\alpha dM_u^H = \\ &= C_H (t-u)^\alpha \cdot M_u^H \Big|_0^t - \\ &- C_H \int_0^t M_u^H d(t-u)^\alpha = \\ &= C_H \int_0^t M_u^H \alpha (t-u)^{\alpha-1} du = \\ &= \alpha C_H \int_0^1 M_{ts}^H t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} d(ts) = \\ &= \alpha C_H t^\alpha \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} M_{ts}^H ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Then, applying binomial formula with $|x| < 1$ we obtain

$$\begin{aligned} (1-x)^{\alpha-1} &= \\ &= 1 + (1-\alpha)x + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2!} x^2 + \\ &+ \dots + \binom{n-\alpha}{n} x^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} x^n, \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$\binom{n-\alpha}{n} = (1-\alpha) \dots (n-\alpha) / n!, \quad \binom{-\alpha}{0} = 1.$$

Let's substitute (6) in (5):

$$Y_t = \alpha C_H t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \binom{n-\alpha}{n} s^n M_{ts}^H ds. \quad (7)$$

Such representation holds almost surely, and also the convergence is uniform, because the process M is continuous with probability 1, and therefore it is bounded on $[0, t]$ and we can estimate the remainder term of the series (7):

$$\begin{aligned} \left| \alpha C_H \sum_{n=N}^{\infty} \int_0^1 \binom{n-\alpha}{n} s^n M_{ts}^H ds \right| &\leq \\ &\leq C(\omega) \sum_{n=N}^{\infty} \int_0^1 \binom{n-\alpha}{n} s^n ds = \\ &= C(\omega) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{n-\alpha}{n}. \end{aligned}$$

It is well known that

$$\binom{n-\alpha}{n} \sim n^{-\alpha} / \Gamma(1-\alpha), n \rightarrow \infty$$

when $\alpha < 1$, therefore the last term is the remainder term of a convergent series. $\square$

After replacement $ts \rightarrow u$ in (7) we obtain

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha C_H t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \binom{n-\alpha}{n} \left(\frac{u}{t}\right)^n M_u^H d\left(\frac{u}{t}\right) = \\ &= \alpha C_H \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} t^{\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du. \end{aligned} \quad (8)$$

Theorem 3.2. FBM $\{B_t^H, t \in [0, T]\}$ admits the following representation:

$$B_t^H = m(t) + \sum_{n=0}^{\infty} t^{2\alpha-n-1} m_n(t), \quad (9)$$

where

$$m(t) = -C_H \int_0^t s^{2\alpha-1} M_s^H ds$$

and

$$m_n(t) = C_H \frac{\alpha(n+1-\alpha)}{n+1-2\alpha} \binom{n-\alpha}{n} \int_0^t M_s^H s^n ds$$

are martingales,

$$\begin{aligned} C_H &= \alpha^2 C_H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1-2\alpha} \binom{n-\alpha}{n} = \\ &= \alpha^2 C_H B(1-2\alpha, \alpha). \end{aligned}$$

Proof. Substitute Y_t from (8) into the left-hand side of the equality (2) and get the equalities

$$\begin{aligned} B_t^H &= t^\alpha Y_t - \alpha \int_0^t s^{\alpha-1} Y_s ds = \\ &= t^\alpha \alpha C_H \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} \left[t^{\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du \right] - \\ &\quad - \alpha^2 C_H \int_0^t s^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} \times \\ &\quad \times \left[s^{\alpha-n-1} \int_0^s M_u^H u^n du \right] ds = \\ &= \alpha C_H \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} \times \\ &\quad \times \left[t^{2\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \int_0^t s^{2\alpha-n-2} \int_0^s M_u^H u^n du ds \right] = \\ &= \alpha C_H \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} \times \\ &\quad \times \left[t^{2\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \int_0^t M_u^H u^n \int_u^t s^{2\alpha-n-2} ds du \right] = \\ &= \alpha C_H \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} \times \\ &\quad \times \left[t^{2\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \int_0^t M_u^H u^n \frac{t^{2\alpha-n-1} - u^{2\alpha-1}}{2\alpha-n-1} du \right] = \\ &= \alpha C_H \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} \times \\ &\quad \times \left[t^{2\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du \left(1 - \frac{\alpha}{2\alpha-n-1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^{2\alpha-1} du \right] = \\ &= \alpha C_H \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} \times \\ &\quad \times \left[t^{2\alpha-n-1} \frac{\alpha-n-1}{2\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2\alpha-n-1} \int_0^t u^{2\alpha-1} M_u^H du \right] = \end{aligned}$$

$$= -C_H' \int_0^t u^{2\alpha-1} M_u^H du + C_H' \frac{\alpha(n+1-\alpha)}{n+1-2\alpha} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{n} t^{2\alpha-n-1} \int_0^t M_u^H u^n du,$$

where

$$C_H' = \alpha^2 C_H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1-2\alpha} \binom{n-\alpha}{n} = \\ = \alpha^2 C_H B(1-2\alpha, \alpha).$$

Since all processes in the right-hand side of equality (9) are Markov processes, then as the result we obtained an approximation of FBM by the Markov processes. $\square$

4 Conclusion

An approximation of the fractional Brownian motion by Markov processes is studied.

References

1. Androschuk T. *Approximation the integrals with respect to fBm by the integrals with respect to absolutely continuous processes* // Theory Prob. and Mathem. Statistics. – 2005. – № 73. – P. 11–20.
2. Androschuk T., Mishura Yu. *Mixed Brownian-fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics* // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. – 2006. – Vol.78, №5. – P.281–300.
3. Banna O. L., Mishura Yu. S. *Approximation of fractional Brownian motion with associated Hurst index separated from 1 by stochastic integrals of linear power functions* // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – Vol.14(30), № 3-4. – P.1–16.
4. Banna O.L., Mishura, Yu.S. *Estimation of the distance between fractional Brownian motion and the space of Gaussian martingales on a segment* // Theory Prob. and Math. Statistics – 2010. – № 83. – P. 12–21.
5. Banna O. L. *The approximation of fractional Brownian motion with Hurst index, close to 1, by stochastic integrals with linear-power integrands* // Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. – 2007. – № 1. – P.60–67. (Ukrainian)
6. Banna O. L., Mishura Yu. S., *The simplest martingales of the best approximation of fractional Brownian motion* // Bulletin of Kiev National Taras Shevchenko University, Mathematics and Mechanics. – 2008. – № 19. – P. 38–43. (Ukrainian)
7. Mishura Yu. S., Banna O. L., *Approximation of fractional Brownian motion by Wiener integrals* // Theory Prob. and Math. Statistics. – 2008. – № 79. – P. 106–115.
8. Norros I., Valkkeila E., Virtamo J. *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions* // Bernoulli. – 1999. – Vol. 5, No. 4. – P.571–587.
9. Shklyar S., Shevchenko G., Mishura Yu., Doroshenko V., Banna O. *The approximation of fractional Brownian motion by martingales* // Submitted to Methodology and Computing in Applied Probability.
10. Thao T. H. *A note on fractional Brownian motion* // Vietnam J. Math. – 2003. – Vol.31, no.3. – P.255–260.

Received on 04.09.2012

УДК 519.21

Г.І. Сливка-Тилищак¹, к.ф.-м.н., доцент

**Умови існування узагальненого
розв'язку задачі про коливання
прямокутного паралелепіпеда з
випадковими початковими умовами з
простору Орліча**

У роботі розглядається крайова задача для рівняння математичної фізики з випадковими початковими умовами з простору Орліча, зокрема задача про коливання прямокутного паралелепіпеда. Досліджено умови існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку. Знайдено оцінку для розподілу супремуму розв'язку такої задачі.

Ключові слова: рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда, узагальнений розв'язок, випадкові процеси

¹Ужгородський національний університет, 8000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46, e-mail: aslyvka@tn.uz.ua.

A. I. Slyvka-Tylyshchak¹, Ph.D., Associate Professor

The conditions of existence of generalized solution of the problems of rectangular parallelepiped vibration with random initial conditions from Orlicz space

The first boundary problem for the hyperbolic type equation of the mathematics physics under random initial conditions is analyzed in the article, specifically the equation of rectangular parallelepiped vibration. The conditions of existence with probability one of generalized solution are investigated. For such a problem has been got the estimation for the distribution of supremum solving.

Key Words: equations of rectangular parallelepiped vibration, generalized solution, random processes

¹Uzhhorod National University, 8000, Uzhhorod, 46 Pidhirna St., e-mail: aslyvka@tn.uz.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Introduction

The equations of mathematical physics with random conditions are mathematical models of real processes. Its evolution depends on random factors. Their modern theory is at the junction of two mathematical areas: stochastic processes and differential equations. Therefore, the sources of methods of their studying are the classical theory of partial differential equations and the theory of random processes.

Recently, it is conducted an intensive studying of such problems. It proposes a new method that based on a study of the conditions of convergence in probability functional series in various norms and speed of convergence. This made it possible to justify application of the method Fourier to hyperbolic equations and study some properties solutions of these problems.

The first boundary problem for the hyperbolic type equation of the mathematics physics under random initial conditions is analyzed in the article, specifically the equation of rectangular parallelepiped vibration. The conditions of existence with

probability one of generalized solution are investigated. For such a problem has been got the estimation for the distribution of supremum solving.

Similar problems for a hyperbolic equation in the multidimensional case with the initial conditions of the Orlicz space considered in [3], for hyperbolic problems with random initial conditions of space $Sub_p(\Omega)$ studied in the works [5, 6, 4].

Results of this work can be used to justify the use of the Fourier method in terms of the correlation functions, for study the rate of convergence of series of functions, representing the solution of the problem, for model making, etc.

Formulation of the problem

Consider the problem of the rectangular parallelepiped vibration [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c], \quad t \in [0, \tau],$$

$$u|_{t=0} = \xi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \eta(x, y, z), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} \\ &= u|_{x=0} = u|_{x=c} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Let the initial conditions $(\xi(x, y, z), x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c])$ and $(\eta(x, y, z), x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c])$ are strongly Orlicz stochastic processes from the space $L_U(\Omega)$, and such that

$$\begin{aligned} \xi(0, y, z) &= \xi(a, y, z) = \xi(x, 0, z) \\ &= \xi(x, b, z) = \xi(x, y, 0) = \xi(x, y, c) = 0, \\ \eta(0, y, z) &= \eta(a, y, z) = \eta(x, 0, z) \\ &= \eta(x, b, z) = \eta(x, y, 0) = \eta(x, y, c) = 0, \end{aligned}$$

almost surely.

When solving similar problems 1) – (3) by using the Fourier method regardless of whether initial conditions are random or nonrandom, we look for a solution of the form [7]

$$u(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x, y, z) (a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t), \quad (4)$$

where

$$a_i = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \xi(x, y, z) V_i(x, y, z) dx dy dz,$$

$$b_i = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \eta(x, y, z) V_i(x, y, z) dx dy dz,$$

λ_i and $V_i(x, y, z)$ are eigenvalues and eigenfunctions of the following Sturm-Liouville problem

$$\Delta V_i + \lambda_i^2 V_i = 0,$$

$$V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b}$$

$$= V|_{x=0} = V|_{x=c} = 0,$$

where $V_i(x, y, z)$ and λ_i have the following forms

$$V_i(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c},$$

$$\lambda_i^2 = \pi^2 \left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2} \right).$$

$$\text{Let } D = [0; a] \times [0; b] \times [0; c] \times [0; \tau].$$

Definition 1. The solution (4) is called a generalized solution of problem (1) – (3) in the domain D if series (4) converge uniformly in probability.

Main result

Consider the conditions that ensure the uniform convergence in probability series (4) if the initial conditions are random processes from Orlicz space.

Lemma 1. [9] Let initial conditions $(\xi(x, y, z), x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c])$ and $(\eta(x, y, z), x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c])$ be strongly Orlicz stochastic processes and assume that the series (4) converge uniformly in probability. Then the random series (4) also is a strongly Orlicz stochastic process.

For $n \geq 1$ put

$$S_n(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n V_i(x, y, z) (a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t).$$

Theorem 1. Let $(\xi(x, y, z), x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c])$ i $(\eta(x, y, z), x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c])$ be strongly Orlicz stochastic processes. In order that a generalized solution of the problem (1) – (3) exists with probability one in the domain D and can be represented in the form of series (4) it is sufficient that:

1) for all $(x, y, z, t) \in D$ the series

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} V_i(x, y, z) V_j(x, y, z) \\ &\times [E a_i a_j \cos \lambda_i t \cos \lambda_j t \\ &+ E b_i b_j \sin \lambda_i t \sin \lambda_j t + 2 E a_i b_j \cos \lambda_i t \sin \lambda_j t], \end{aligned}$$

converges;

2) for $n \geq 1$

$$\sup_{\substack{|x-x_1| \leq b \\ |y-y_1| \leq b \\ |z-z_1| \leq b \\ |t-t_1| \leq h}} (E |S_n - S_n^1|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h),$$

where $S_n^1 = S_n(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $\sigma(h)$ is a monotone increasing continuous function such that $\sigma(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$, moreover

$$\begin{aligned} &\int_0^{\tau} U^{(-1)} \left[\left(\frac{a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right. \\ &\times \left. \left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right] du \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\tau}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < \infty, \quad (5)$$

where $\sigma^{(-1)}(u)$ is the inverse function to $\sigma(u)$.

Proof. Condition 1) implies that the series (4) converge in the mean square sense. According to theorem 4.1 of the paper [2] and Lemma 1 series (4) converges in probability space $C(D)$.

Example. Assume that $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$ are strongly Orlicz processes from the $L_U(\Omega)$. Let $U(x)$ be a function such that $U(x) = |x|^p$, for some $p > 4$. The conditions (5) holds the function $\sigma(h) = C|h|^\delta$ for $0 < \delta < 1$. Indeed for $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \int_{0+}^\varepsilon \left[\left(\frac{aC^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} + 1 \right) \left(\frac{bC^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} + 1 \right) \right. \\ & \times \left. \left(\frac{cC^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} + 1 \right) \left(\frac{\tau C^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} + 1 \right) \right]^\frac{1}{p} du, \\ & \int_{0+}^\varepsilon \left(\frac{aC^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} \cdot \frac{bC^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} \cdot \frac{cC^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} \cdot \frac{\tau C^\frac{1}{2}}{2u^\frac{1}{2}} \right)^\frac{1}{p} du \\ & \leq D \int_{0+}^\varepsilon \left(\frac{1}{u^\frac{\delta}{2}} \right) du, \end{aligned}$$

where $D = \left(\frac{ab\tau C^\frac{1}{2}}{16} \right)^\frac{1}{p}$. The latter integral converges under $n\delta > \frac{4}{p}$.

Theorem 2. Let $(\xi(x, y, z))$, $(\eta(x, y, z))$ be strongly Orlicz stochastic processes from the $L_U(\Omega)$, where $U(x) = |x|^p$, for some $p > 4$ and all $|x| > 1$. In order that a generalized solution of problem (1)-(3), exists in the domain D and can be represented in the form of series (4) it is sufficient that:

1) the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i^2 \lambda_j^2 [|Ea_i a_j| + |Eb_i b_j - 2|Ea_i b_j|];$$

converges;

2)

$$\left[(Ea_i^2)^\frac{1}{2} + (Eb_i^2)^\frac{1}{2} \left(k_i^\delta + m_i^\delta + l_i^\delta \right) \right] < \infty$$

for arbitrary $\delta > \frac{4}{p}$.

Доказання. Condition 1) of this theorem implies condition 1) of theorem 1. Example 1 and lemma 1 imply that conditions 2) of the theorem 1 follows from condition 2) of the theorem 2. It is clear that

$$\begin{aligned} & \left(E |S_n(x, y, z, t) - S_n(x_1, y_1, z_1, t_1)|^2 \right)^\frac{1}{2} \\ & = \left(E \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \right. \right. \\ & \quad \times [a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t] \\ & \quad \left. \left. - \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \right. \right. \\ & \quad \times (a_i \cos \lambda_i t_1 + b_i \sin \lambda_i t_1) \left. \right|^2 \right)^\frac{1}{2} \\ & \leq \sqrt{\frac{8}{abc}} \sum_{i=1}^n \left[(Ea_i^2)^\frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \right. \right. \\ & \quad \times \cos \lambda_i t - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \cos \lambda_i t_1 \\ & \quad \left. \left. + (Eb_i^2)^\frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \sin \lambda_i t \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \sin \lambda_i t_1 \right| \right]. \end{aligned}$$

Further

$$\begin{aligned} & \left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \cos \lambda_i t \right. \\ & \quad \left. - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \cos \lambda_i t_1 \right| \\ & \leq \left[\left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \right| + \left| \sin \frac{\pi l_i y}{b} - \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \sin \frac{\pi m_i z}{c} - \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \right| + |\cos \lambda_i t - \cos \lambda_i t_1| \right] \\ & \leq 2 \left(\left| \sin \frac{\pi k_i (x - x_1)}{2a} \right| + \left| \sin \frac{\pi l_i (y - y_1)}{2b} \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \sin \frac{\pi m_i (z - z_1)}{2c} \right| + \left| \sin \frac{\lambda_i (t - t_1)}{2} \right| \right). \quad (6) \end{aligned}$$

The inequality

$$|\sin \alpha| \leq |\alpha|^\delta, \quad 0 < \delta < 1$$

together with (6) implies that

$$\begin{aligned} & \left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \cos \lambda_i t \right. \\ & \quad \left. - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \cos \lambda_i t_1 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \left(\left| \frac{\pi k_i(x-x_1)}{2a} \right|^{\delta} + \left| \frac{\pi l_i(y-y_1)}{2b} \right|^{\delta} \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\pi m_i(z-z_1)}{2c} \right|^{\delta} + \left| \frac{\lambda_i(t-t_1)}{2} \right|^{\delta} \right) \\ &\leq 2^{1-\delta} \pi^{\delta} |h|^{\delta} \left(\left(\frac{k_i}{a} \right)^{\delta} + \left(\frac{l_i}{b} \right)^{\delta} + \left(\frac{m_i}{c} \right)^{\delta} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2}} \right)^{\delta} \right) \\ &\leq 2^{2-\delta} \pi^{\delta} |h|^{\delta} \left(k_i^{\delta} + l_i^{\delta} + m_i^{\delta} \right). \end{aligned}$$

Similarly

$$\begin{aligned} &\left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \sin \lambda_i t \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \sin \lambda_i t_1 \right| \\ &\leq 2^{2-\delta} \pi^{\delta} |h|^{\delta} \left(k_i^{\delta} + l_i^{\delta} + m_i^{\delta} \right). \end{aligned}$$

One can easily obtain that

$$\left(E |S_n(x, y, z, t) - S_n(x_1, y_1, z_1, t_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |h|^{\delta},$$

where

$$\begin{aligned} C &= \frac{2^{\frac{1}{2}-\delta} \pi^{\delta}}{\sqrt{abc}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[(E a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (E b_i^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad \times \left(k_i^{\delta} + l_i^{\delta} + m_i^{\delta} \right). \end{aligned}$$

□

Estimates of the distribution of the supremum of a solution of the boundary value problem.

Theorem 3. [2] Let (T, ρ) be a compact metric space and $N(u)$ the metric massiveness of the space (T, ρ) , that is, the minimum number of closed balls of radius U that cover (T, ρ) . Let $X = \{X(t), t \in T\}$ be a separable stochastic process from the space $L_U(\Omega)$, and let the function U satisfy the g -condition. Assume that there exists a monotone increasing continuous function $\sigma = \sigma(h)$, $0 \leq h \leq \sup_{t,s \in T} \rho(t,s)$ such that

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_U \leq \sigma(h).$$

If for some ε

$$\int_0^{\varepsilon} \chi_U \left(N \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du < \infty, \quad (7)$$

where

$$\chi_U(n) = \begin{cases} n, & n < U(z_0); \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geq U(z_0), \end{cases}$$

$C_U = k(1 + U(z_0)) \max(1, A)$, z_0 , k , A are constants from definition of C -function and $\sigma^{(-1)}(h)$ is the inverse of $\sigma(h)$, then the random variable $\sup_{t \in T} |X(t)|$ belongs to the space $L_U(\Omega)$ with probability one and

$$\begin{aligned} &\left\| \sup_{t \in T} |X(t)| \right\|_U \leq \|X(t_0)\|_U \\ &\quad + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\omega_{\theta}} \chi_U \left(N \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du = B(t_0, \theta), \end{aligned}$$

where $t_0 \in T$, $\omega_{\theta} = \sigma(\sup_{t \in T} \rho(t_0, t))$, $0 < \theta < 1$.

In addition, for all $\varepsilon > 0$ the following inequality holds:

$$P \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \left(U \left(\frac{\varepsilon}{B(t_0, \theta)} \right) \right)^{-1}.$$

The next result follows from Theorem 3.

Theorem 4. Let in conditions of theorem 3 $T = D = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c, 0 \leq t \leq \tau\}$, $\rho((x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1)) = \max(|x - x_1|, |y - y_1|, |z - z_1|, |t - t_1|)$. Then the condition 7 holds, when for all $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)} \left(\left(\frac{a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{\tau}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty, \\ &\quad B(x_0, y_0, z_0, t_0, \theta) \leq \tilde{B}(x_0, y_0, z_0, t_0, \theta) \\ &\quad = \|X(x_0, y_0, z_0, t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \int_0^{\omega_{\theta}} U^{-1} \left(\left(\frac{a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{\tau}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du. \end{aligned}$$

In addition, for all $\varepsilon > 0$ the following inequality holds

$$\begin{aligned} &P \left\{ \sup_{t \in T} |X(x, y, z, t)| > \varepsilon \right\} \\ &\leq \left(U \left(\frac{\varepsilon}{B(x_0, y_0, z_0, t_0, \theta)} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Put

$$u_n(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(x, y, z) (a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t).$$

As in theorem 1 assume that

$$\sup_{\substack{|x-x_1| \leq h \\ |y-y_1| \leq h \\ |z-z_1| \leq h \\ |t-t_1| \leq h}} (E|S_n - S_n^1|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h),$$

where $\sigma(h)$ is a monotone increasing continuous function such that $\sigma(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$, moreover

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)} \left[\left(\frac{a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \times \left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \times \left(\frac{c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \times \left(\frac{\tau}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right] du < \infty,$$

where $\sigma^{(-1)}(u)$ is the inverse function to $\sigma(u)$. Then

$$P \left\{ \sup_{t \in D} |u_n(x, y, z, t)| > \varepsilon \right\} \leq \left(U \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{B}(x_0, y_0, z_0, t_0, \theta)} \right) \right)^{-1},$$

where

$$\tilde{B}(x_0, y_0, z_0, t_0, \theta) \leq \tilde{B}(x_0, y_0, z_0, t_0, \theta)$$

$$\|u(x_0, y_0, z_0, t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$\times \int_0^{\varepsilon} U^{-1} \left[\left(\frac{a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \times \left(\frac{c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \times \left(\frac{\tau}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right] du.$$

References

1. Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V. Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions / Barrasa de la Krus E., Yu. V. Kozachenko // Random Oper. and Stoch. Eq. — 1995. — 3, № 3. — P. 201–220.
2. Kozachenko Yu. V., Veresh K. J. Boundary-value problems for a nonhomogeneous parabolic equation with Orlicz right side / Yu. V. Kozachenko, K. J. Veresh // Random Oper. and Stoch. Eq. — 2010. — 18. — P. 97–119.
3. Slyvka-Tylyshchak A. I., Veresh K. J. The conditions of existence of generalized solution of the hyperbolic equation with random initial conditions from Orlicz space. / A. I. Slyvka-Tylyshchak, K. J. Veresh // Visn. Don. Univ. Part 1–4. — 2009. — №1. — P. 87–91.
4. Slyvka-Tylyshchak A. I., Veresh K. J. The conditions of existence of generalized solution of the problems of heterogeneous string vibration with random initial conditions / A. I. Slyvka-Tylyshchak, K. J. Veresh // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Math. — 2008. — №2. — P. 26–30.
5. Slyvka-Tylyshchak A. I. The conditions of existence of generalized solution of the problems of round membrane's vibration with random initial conditions / A. I. Slyvka-Tylyshchak // Nauk. Visn. Yzh. Univ. Ser. Math. and Inform. — 2010. — № 20. — P. 140–146.
6. Slyvka-Tylyshchak A. I. Conditions of existence with probability one generalized solution of the boundary-value problems of hyperbolic equations with random initial conditions / A. I. Slyvka-Tylyshchak // Nauk. Visn. Yzh. Univ. Ser. Math. and Inform. — 2008. — №17. — P. 196–202.
7. Sobolev S.L. Equations of Mathematical Physics. — M., 1954.—454p.

Received on 7.09.2012

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 517.9

С.І. Балага¹, к.ф.-м.н.І.І. Король², д.ф.-м.н., доцентПеріодичні розв'язки вироджених
імпульсних систем

Отримано необхідні і достатні умови існування періодичних розв'язків алгебраїчно-диференціальних систем з імпульсною дією загального вигляду у випадку, коли вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми. Встановлено структуру та побудовано періодичні розв'язки таких систем.

Ключові слова: вироджені системи, диференціально-алгебраїчні системи, імпульсні системи, періодичні розв'язки.

¹ Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46, e-mail: baloga_switlana@e-mail.ua

² Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46, e-mail: korol_igor@ukr.net

S.I.Baloga¹, Ph.D.I.I.Korol², Dr.Sci., Associate ProfessorPeriodical solutions of singular impulsive
systems

We obtain a necessary and sufficient conditions of existence of periodical solutions of algebraic-differential systems with impulse effect of general form in case when degenerate system of differential equations can be reduced to central canonical form. We found the structure and constructed periodic solutions of such systems.

Key Words: singular systems, differential-algebraic systems, impulsive systems, periodical solutions.

¹ National University of Uzhhorod, 88000, Uzhhorod, Pidhigirna str., 46, e-mail: baloga_switlana@e-mail.ua

² National University of Uzhhorod, 88000, Uzhhorod, Pidhigirna str., 46, e-mail: korol_igor@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Постановка задачі

Дослідимо питання існування T -періодичних розв'язків виродженої T -періодичної імпульсної диференціальної системи

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \tau_i, \quad (1)$$

$$M_i x(\tau_i + 0) + N_i x(\tau_i - 0) = \alpha_i, \quad (2)$$

де $\text{rank} B(t) = n - r = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}, r > 0$; вектор-функції $f(t)$ і $(n \times n)$ -матриці $A(t)$, $B(t)$ є періодичними по t зі спільним періодом T і достатньо гладкими: $f(t) \in C_T^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $A(t), B(t) \in C_T^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$, k – деяке натуральне число; сталі $(m_i \times n)$ -матриці M_i, N_i , $1 \leq m_i \leq n$, сталі вектори α_i і моменти часу $t = \tau_i$ такі, що існує натуральне число p таке, що $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$M_{i+p} = M_i, \quad N_{i+p} = N_i, \quad \alpha_{i+p} = \alpha_i,$$

$$t_0 < 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p < T, \quad \tau_{i+p} = \tau_i + T.$$

Під T -періодичним розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти [1-5] T -періодичну кусково неперервно диференційовну на $\mathbb{R} \setminus \{\tau_i\}$ функцію

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [0 + kT, \tau_1 + kT], \\ x_i(t), & t \in (\tau_i + kT, \tau_{i+1} + kT], \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, яка задовольняє систему (1) і імпульсні умови (2). Будемо вважати функції $x_j(t)$ визначеними і неперервними на відповідних замкнених інтервалах $x_j(t) \in C[\tau_j, \tau_{j+1}]$:

$$x_j(\tau_j) = x_j(\tau_j + 0) = \lim_{t \rightarrow \tau_j + 0} x_j(t),$$

і що розв'язок є неперервним зліва, тобто

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t \rightarrow \tau_i - 0} x_{i-1}(t).$$

Основний результат

Для дослідження задачі (1), (2) застосуємо підхід запропонований в [7, 8, 9, 10]. Припускаємо, що за допомогою не виродженого лінійного перетворення система (1) може бути зведена до центральної канонічної форми.

Позначимо через $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ фундаментальні $(n \times (n-s))$ -вимірні матриці, стовпці яких є розв'язками відповідно однорідної виродженої системи

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad (3)$$

та спряженої до (3) системи

$$\frac{d}{dt} B^T(t)y = -A^T(t)y;$$

c_0 – $(n-s)$ -вимірний вектор-стовпчик довільних сталих;

$$R(t) = \left(\Psi^T(t) L(t) \Phi(t) \right)^{-1},$$

$$L(t) = A(t) - B(t) \frac{d}{dt} - \text{лінійний оператор:}$$

$$L : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Вважаємо, що $\text{rank} B(t) = n - q = \text{const} \forall t \in \mathbb{R}$, матриця $B(t)$ має повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t)$, який складається з q ланцюжків завдовжки s_j , $j = \overline{1, q}$, $q = \text{mas}_s$. Через $\Phi(t)$ і $\Psi(t)$ позначимо $n \times s$ -вимірні матриці, які складаються з векторів, що утворюють жорданові набори відповідно матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і транспонованої матриці $B^T(t)$ відносно оператора $L^T(t)$, де

$$L^T(t) = A^T + \frac{d}{dt} B^T y,$$

$$\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), \dots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \dots,$$

$$\dots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \dots, \varphi_q^{(1)}(t), \dots, \varphi_q^{(s_q)}(t)],$$

$$\Psi(t) = [\psi_1^{(1)}(t), \dots, \psi_1^{(s_1)}(t); \psi_2^{(1)}(t), \dots,$$

$$\dots, \psi_2^{(s_2)}(t); \dots, \psi_q^{(1)}(t), \dots, \psi_q^{(s_q)}(t)].$$

Тоді загальний розв'язок сингулярної системи (1) на інтервалі $t \in [0, \tau_1]$ має вигляд [7, 8, 9, 10]:

$$\begin{aligned} x(t, c_0) &= x_0(t, c_0) = X_{n-s}(t)c_0 + \\ &+ \int_0^t X_{n-s}(t) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ &- \Phi(t) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t) \right) \Psi^T(t) f(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Після дії імпульсного збурення в точці $t = \tau_1$ продовжимо розв'язок $x(t) = x_0(t, c_0)$ вигляду (4) з інтервалу $t \in [0, \tau_1]$ на $(n-s)$ -параметричний розв'язок $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t, c_1) = X_{n-s}(t)c_1 + \\ &+ \int_{\tau_1}^t X_{n-s}(t) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ &- \Phi(t) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t) \right) \Psi^T(t) f(t), \quad c_1 \in \mathbb{R}^{n-s}; \end{aligned} \quad (5)$$

який визначений на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$. Зв'язок між ними визначається умовою (2) при $i = 1$. Беручи до уваги неперервність справа функції $x_1(t) = x_1(t, c_1)$ в точці $t = \tau_1$, можемо записати умову (2) в цій точці наступним чином:

$$M_1 x_1(\tau_1) + N_1 x_0(\tau_1) = \alpha_1. \quad (6)$$

Підставляючи (4), (5) в (6), одержимо лінійне неоднорідне відносно c_0, c_1 матричне рівняння

$$\widetilde{M}_1 c_1 + \widetilde{N}_1 c_0 = \alpha_1 + M_1 \gamma_1 - N_1 F_1,$$

де через $\widetilde{M}_i, \widetilde{N}_i$ для кожного $i = \overline{1, p}$ будемо позначати $(m_i \times (n-s))$ -вимірні матриці вигляду

$$\widetilde{M}_i = M_i X_{n-s}(\tau_i), \quad \widetilde{N}_i = N_i X_{n-s}(\tau_i),$$

а через F_i, γ_i – n -вимірні вектори:

$$\gamma_i = \Phi(\tau_i) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(\tau_i) \Psi^T(\tau_i) f(\tau_i), \quad i = \overline{1, p},$$

$$F_0 = \int_0^{\tau_1} X_{n-s}(\tau_i) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \gamma_0.$$

$$F_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X_{n-s}(\tau_i) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \gamma_i, \quad i = \overline{2, p}.$$

Оскільки на кожному з інтервалів $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ розв'язок визначається за формулою

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i(t, c_i) = X_{n-s}(t) c_i + \\ &+ \int_{\tau_i}^t X_{n-s}(t) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ &- \Phi(t) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t) \right) \Psi^T(t) f(t), \quad c_i \in \mathbb{R}^{n-s}; \end{aligned} \quad (7)$$

то аналогічним чином одержимо, що в кожній точці імпульсу $t = \tau_i$ відповідні $(n-s)$ -вимірні вектори довільних сталих c_{i-1} , c_i повинні задовольняти рівняння

$$\widetilde{M}_i c_i + \widetilde{N}_i c_{i-1} = \alpha_i + M_i \gamma_i - N_i F_i. \quad (8)$$

Підставляючи розв'язки $x_j(t)$ вигляду (4), (7) у періодичні крайові умови

$$x(0) - x(T) = 0,$$

одержимо:

$$\begin{aligned} X_{n-s}(0) c_0 - X_{n-s}(T) c_p = \\ = \Phi(0) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(0) \right) \Psi^T(0) f(0) - \\ - \int_{\tau_p}^T X_{n-s}(T) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma + \\ + \Phi(T) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(T) \right) \Psi^T(T) f(T). \end{aligned} \quad (9)$$

Об'єднуючи (9) з (8) при всіх $i = \overline{1, p}$, одержимо систему матричних алгебраїчних

рівнянь

$$\begin{cases} X_{n-s}(0) c_0 - X_{n-s}(T) c_p = \\ = \Phi(0) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(0) \right) \Psi^T(0) f(0) + \\ + \int_{\tau_p}^T X_{n-s}(T) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ - \Phi(T) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(T) \right) \Psi^T(T) f(T), \\ \widetilde{N}_1 c_0 + \widetilde{M}_1 c_1 = \alpha_1 + M_1 \gamma_1 - N_1 F_1, \\ \dots \dots \dots \\ \widetilde{N}_p c_{p-1} + \widetilde{M}_p c_p = \alpha_p + M_p \gamma_p - N_p F_p, \end{cases}$$

яку можемо записати у вигляді

$$Dc = \beta, \quad (10)$$

де $D = ((n+m) \times (p+1)(n-s))$ -вимірна матриця,

$m = \sum_{i=1}^p m_i$, а $c_0, \beta_0 \in \mathbb{R}^n$, $c_i, \beta_i \in \mathbb{R}^{n-s}$:

$$D = \begin{pmatrix} X_{n-s}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & -X_{n-s}(T) \\ \widetilde{N}_1 & \widetilde{M}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \widetilde{N}_2 & \widetilde{M}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widetilde{N}_p & \widetilde{M}_p \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \Phi(0) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(0) \right) \Psi^T(0) f(0) + \\ &+ \int_{\tau_p}^T X_{n-s}(T) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ &- \Phi(T) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(T) \right) \Psi^T(T) f(T), \end{aligned}$$

$$\beta_i = \alpha_i + M_i \gamma_i - N_i F_i, \quad i = \overline{1, p}. \quad \text{де}$$

Згідно [5, 6], необхідною і достатньою умовою сумісності лінійної неоднорідної алгебраїчної системи (10) є умова ортогональності

$$P_{D^+} \beta = 0, \quad (11)$$

і у випадку її виконання розв'язки системи (10) мають вигляд

$$c^T = c^T(\xi) = P_{D^+} \xi + D^+ \beta, \quad \xi \in \mathbb{R}^u,$$

де $D^+ = ((p+1)(n-s) \times (n+m))$ -вимір-
на матриця, яка є єдиною псевдооберненою
за Муром-Пенроузом матрицею до матриці D ;
 $c^T = \text{col}(c_0^T(\xi), \dots, c_p^T(\xi)) \in \mathbb{R}^{(p+1)(n-s)}$, а через
 P_{D^+} позначено $((p+1)(n-s) \times u)$ -вимірну
матрицю, $u = (p+1)(n-s) - r$, $r = \text{rank} D \leq$
 $\min((p+1)(n-s), m)$, яка складається з лінійно
незалежних стовпців $((p+1)(n-s) \times (p+1)(n-s))$ -
вимірної матриці P_D , яка є ортопроектором
з простору $\mathbb{R}^{(p+1)(n-s)}$ на нуль простір $\text{Ker}(D)$
матриці D :

$$P_D: \mathbb{R}^{(p+1)(n-s)} \rightarrow \text{Ker}(D),$$

$$\text{Ker}(D) = P_D \mathbb{R}^{(p+1)(n-s)},$$

причому стовпці матриці P_{D^+} утворюють
повний базис ядра $\text{Ker}(D)$. Через P_{D^+} будемо
позначати $(v \times (n+m))$ -вимірну матрицю, $v =$
 $n+m-r$, рядками якої є лінійно незалежні
рядки матриці P_D , яка, в свою чергу, є
ортопроектором з простору $\mathbb{R}^m$ на нуль простір
 $\text{Ker}(D^T)$ матриці D^T :

$$P_{D^+}: \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Ker}(D^T), \quad \text{Ker}(D^T) = P_{D^+} \mathbb{R}^m,$$

причому рядки матриці P_{D^+} утворюють повний
базис ядра матриці D^T .

Таким чином, можемо сформулювати
основний результат.

Теорема 1. Вироджена T -періодична лінійна
диференціальна система (1) з імпульсною
дією (2) має T -періодичні розв'язки тоді і
тільки тоді, коли виконується умова (11).
При цьому T -періодичні розв'язки задачі (1),
(2) утворюють у-параметричну сім'ю вигляду

$$x(t) = z(t, \xi) = \begin{cases} x_0(t, c_0^T(\xi)), & t \in [0, \tau_1], \\ x_1(t, c_1^T(\xi)), & t \in (\tau_1, \tau_{i+1}], \end{cases} \quad (12)$$

$$\xi \in \mathbb{R}^u, \quad i = \overline{1, p}, \quad c_i(\xi) \in \mathbb{R}^{n-s},$$

$$x_i(t, \xi) = X_{n-s}(t) c_i^T(\xi) +$$

$$+ \int_{\tau_i}^t X_{n-s}(t) Y_{n-s}^T(\sigma) f(\sigma) d\sigma -$$

$$- \Phi(t) \cdot \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t) \right) \Psi^T(t) f(t).$$

Список використаних джерел

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Differential equations with impulse action. - Kyiv.: Vyscha Shkola. 1987. - 288 p. (in Russian).
2. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. - Singapore: World Scientific, 1999. - 462 p.
3. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skrypnik N.V. Differential equations with impulse effects: multivalued and discontinued right hand side. - Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2007. - 428 p. (in Russian).
4. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skrypnik N.V. Impulsive differential equations with multivalued right hand sides with discontinuities. - De Gruyter studies in mathematics; 40, 2011. - 308 p.
5. Boichuk A.A., Zhuravlev V.F., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Noetherian Boundary Value Problems. - Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 1995. - 318 p. (in Russian).
6. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. VSP Utrecht Boston, 2004. - 320 p.
7. Samoilenko A.M., Shkil M.H., Yakovets V.P. Linear systems of differential equations with singularities. - Kyiv.: Vyscha Shkola, 2000. - 294 p. (in Russian).
8. Korol I.I. Investigations of solutions of singular differential systems with impulse action // Scientific Herald of Uzhhorod University. Series: Mathematics and Informatics - 2009. - V.18. - P. 73-84. (in Ukrainian).
9. Korol I.I. Investigations of solutions of Noetherian boundary value problems for impulsive differential systems with singularity // Herald of Kyiv University. Series: Physical and Mathematical Sciences. - 2009. - V.3. - P. 71-80. (in Ukrainian).
10. Korol I.I. Solving of singular differential systems with singularities in impulsive conditions // Scientific Herald of Uzhhorod University. Series: Mathematics and Informatics - 2009. - V.19. - P. 42-52. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 23.11.2012

УДК 534+531.7+53.082.5+621.375.8

Івашченко Д.О.¹,
Яровой Л.К.², к.т.н.,
Розумнік В.І.³, к.ф.-м.н.**Світловодний сенсор механічних
коливань з підвищеною чутливістю в
нанометровому діапазоні**

Запропоновано створення завадозахищеного лазерного доплерівського віброметра з наддовгим світловодним зондом. Ідея сенсору базується на новій конфігурації лазерного віброметра з додатковим оптичним опорним каналом, випромінювання якого розповсюджується крізь світловодний зонд також. Теоретично показано, що при цьому вплив завади на світловодний тракт суттєво зменшується. Експериментально продемонстровано, що при використанні додаткового каналу рівень сигналу вібрації перевищує заваду на 6 дБ.

Ключові слова: лазерний доплерівський віброметр, наномірювання світловодні сенсори, лазерні гетеродинні системи.

¹⁻³ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

D.O. Ivashchenko¹,
L.K. Yarovoi², PhD
V.I. Rozumnuk³, PhD**The fiber optic sensor of mechanical
oscillation with improved sensitivity in
nanometer range**

A laser Doppler vibrometer with a long noise-immune fiber probe is proposed for nanometer measuring range. An idea of the vibrometer is based on new configuration with an additional optical referent channel that also transmitted through the fiber probe. It is shown theoretically, that for the layout the influence of an external perturbation on the is reduced substantially. In the experiment we have got 6.5 dB excess of the output vibration signal under the noise level for the laser vibrometer with additional referent channel.

Key Words: Laser vibrometer, nanoscale measurements, fiber sensors, laser heterodyne system.

¹⁻³ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

Лазерні доплерівські віброметри (ЛДВ) є сучасними засобами дослідження механічних коливань, котрі знайшли застосування у промисловості та наукових дослідженнях [1], зокрема, в задачах експериментальної механіки, неруйнівного контролю [2].

Як резонанс інтерференційного приладу, класичний ЛДВ використовує дві когерентні хвилі – зондувальну та опорну. Використання світловодів в якості каналів передачі оптичних сигналів в ЛДВ надає нові можливості при його застосуванні для досліджування вібрації віддалених об'єктів, і, передусім, об'єктів, доступ до яких є просторово обмеженим, для прямого лазерного випромінювання [3].

Загально відомо, що в ЛДВ когерентна зондувальна хвиля після відбиття від досліджуваної поверхні нелінійно змішується на

фотодетекторі з опорною хвилею, котра має оптичну частоту, зсунуту певною гетеродиною частотою. Після демодуляції миттєвої частоти струму фотодетектора на виході віброметра отримують сигнал пропорційний миттєвій частоті [4].

При застосуванні світловодних трактів в гетеродинних інтерференційних приладах виникають ефекти, спричинені відбиттям від торців світловоду зондувального випромінювання, призводячи до утворення додаткових хвиль, котрі також приймають участь у фотодетектуванні. Таким чином, замість класичного фотозмішування двох хвиль, спостерігається прийомні трихвильове фотозмішування [5], котре в загальному випадку викликає спотворення вихідного сигналу [6].

Окрім того, внаслідок зовнішнього впливу на світловод (рух світловода, вібрації, акустичні сигнали, температурні флуктуації, змінний тиск) змінюється фаза хвилі, що поширюється світловодом і це, в свою чергу, впливає на вихідний сигнал ЛДВ, спричиняючи, в загальному випадку, зростання завад.

Ця робота присвячена дослідженню впливу світловодного тракту на сигнал лазерного доплерівського сенсора вібрації з світловодним зондом в умовах трихвильового фотозмішування з метою підвищення чутливості такого віброметра до вимірювання вібрацій нанометрового діапазону.

Аналіз сигналів лазерного віброметра з ТХВ при синхронній дії завади на зондувальний та другий опорний канали

При трихвильовому фотозмішуванні (ТХФ) на поверхні фотодетектору інтерферують три когерентні хвилі: e_0 - опорна хвиля, e_1 - зондувальна хвиля, а також, e_2 - третя хвиля, яку будемо також називати другою опорною хвилею. Оскільки лазерні віброметри побудовані за гетеродинною схемою, то це означає, що опорна хвиля має зсув по частоті гетеродина f_0 (на відміну від додаткової опорної хвилі e_2 , котра такого зсуву не має).

Струм ідет фотоприймача віброметра є пропорційним сумарній інтенсивності лазерного випромінювання $E^2 = (e_0 + e_1 + e_2) \cdot (e_0 + e_1 + e_2)$. Як показано в [11], амплітуда та фаза складової фотоструму на частоті гетеродину $i_{det} = I \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi)$ в загальному випадку представляється, як:

$$I \approx \sqrt{2E_2 E_1 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + E_1^2 + E_2^2} - \text{амплітуда}$$

$$\varphi = \arctan \left[\frac{E_1 \sin(\Phi_1) + E_2 \sin(\Phi_2)}{E_1 \cos(\Phi_1) + E_2 \cos(\Phi_2)} \right] - \text{фаза.} \quad (1)$$

де Φ_1 , Φ_2 - фази, а E_1 , E_2 - амплітуди зондувальної та третьої хвилі.

Якщо фазу зондувального променя промодульовано досліджуваним сигналом $x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t)$ з додатковою фазовою модуляцією $\varphi_m(t) = m \cos(\Omega_m t)$, тоді $\Phi_1 = 2kX_1 \cos(\Omega t) + \varphi_m(t) + \varphi_1$, де X_1 - амплітуда, Ω - частота досліджуваних коливань, φ_1 - початкова фаза зондувального каналу. Розглянемо конфігурацію, коли фаза додаткової опорної хвилі $\Phi_2 = \varphi_2$ є сталою величиною та порівняємо з випадком, коли фазу Φ_2 було модульовано сигналом $\varphi_m(t)$: $\Phi_2 = \varphi_m(t) + \varphi_2$. У такому разі отримаємо миттєву частоту сигналу, як похідну від фази φ , і тоді із загальної формули (1) впливають, відповідно для першого та другого випадків, наступні співвідношення:

$$\omega'(t) = - \left(kX_1 \Omega \sin(\Omega t) + \frac{m}{2} \Omega_m \sin(\Omega_m t) \right) \cdot \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{2\eta \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) + m \cos(\Omega_m t) + \Delta\varphi) + \eta^2 + 1} \right] \quad (2)$$

$$\omega''(t) = - \left(kX_1 \Omega \sin(\Omega t) + m \Omega_m \sin(\Omega_m t) \right) - \frac{(\eta^2 - 1) \cdot kX_1 \Omega \sin(\Omega t)}{2\eta \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) + \Delta\varphi) + \eta^2 + 1} \quad (3)$$

де $\eta = E_1/E_2$ - відношення амплітуд зондувальної та додаткової опорної хвилі, $\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

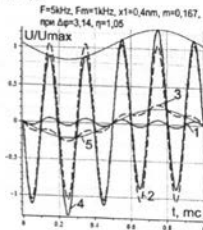


Рис.1 Вихідні сигнали ЛДВ з ТХФ

На рис.1 наведено результати моделювання вихідного сигналу віброметра $u(t)$ (який пропорційний миттєвій частоті) за умови $\Delta\varphi = \pi$ та для значення параметра $\eta = 1.05$. Випадок $\Delta\varphi = \pi$ є особливо цікавим, оскільки за такої умови відбувається підвищення рівня вихідного сигналу в системі з трьома хвилями [7]. У цьому можна пересвідчитись, порівнявши епюру 1 сигналу класичного віброметра ($E_1 \gg E_2$) при відсутності додаткової модуляції ($m=0$) та епюру 2 сигналу віброметра з трьома хвилями. Підвищення амплітуди сигналу складає $a(\eta) = \eta/(\eta-1)$ [8].

Коли присутня фазова модуляція $\varphi_m(t)$ (епюра 5), то у класичній схемі ЛДВ з двома хвилями вихідний сигнал має вигляд, як на епюрі (3), тобто внесок додаткової модуляції майже вдалі перевищує корисний сигнал. В той же час, коли ця додаткова модуляція також діє і в третьому

каналі (причому синфазно з модуляцією в зондувальному каналі, як це описується співвідношенням (3)), то рівень цієї додаткової модуляції у вихідному сигналі ЛДВ відносно сигналу зростає незначним чином – епора 4.

Розглянемо випадок, коли складова сигналу вібратора $u_m(t)$ на частоті Ω_m імітує заваду, а компонент $u_x(t)$ на частоті Ω є досліджуваним сигналом. Як було показано в [8], при $m < 0.4(\eta-1)$ та $X < 0.2(\eta-1)/k$ нелинійні спотворення вихідного сигналу є незначними, що підтверджує коректність розкладання вихідного сигналу вібратора на дві складові $u_{\text{впр}}(t) = u_x(t) + u_m(t)$.

Таким чином, підвищення чутливості без спотворення форми вихідного коливання відбувається саме для коливань з малими, нанометровими, амплітудами, оскільки наведена вище умова $X < 0.2(\eta-1)/k$ означає, що при $\eta \rightarrow 1$ на амплітуда вібрації повинна задовольняти умові $X \ll \lambda$.

Отже, отриманий результат можна використати для підвищення чутливості ЛДВ в схемі з світловодним зондом [9], оскільки зовнішні чинники, такі, як температура, вібрація, тиск, котрі впливають на фазу випромінювання, що розповсюджується у світловодному тракті, можуть бути представлені як модуляційний сигнал $\varphi_m(t)$.

Макет лазерного вібратора зі світловодом та експериментальні дослідження

Експериментальну перевірку викладених теоретичних результатів проведено за допомогою спеціально створеного стенду (рис.2) на основі лазерного вібратора CLV фірми (Polytec GmbH) [10], поєднаного зі світловодним зондом.

Цифрами на рис. 2 позначено: 1 – лазерний вібратор CLV, 2 – п'єзоелемент, призначений для створення додаткової модуляції, 3 – досліджуваний об'єкт, що вібрує. В досліджуваних використовувався одномодовий світловод – 9 (діаметр сердечини 50 мкм та довжиною 10 метрів). Лазерне випромінювання вводилось у світловод спеціальною системою 8, що складається з лінзи Л1 та юстувального столика. Система забезпечувала можливість введення до 40% випромінювання в світловод. Передній торць світловоду сколювався під кутом, достатнім для того, щоб уникнути потрапляння на фотодетектор вібратора відбитого від нього променя. Додаткова опорна хвиля (канал II) формувалась за рахунок відбиття частини випромінювання від дальнього торця світловода 9, а зондувальна хвиля – I

формувалась, відповідно, при відбитті випромінювання від поверхні об'єкту 3.

Для встановлення заданого співвідношення між амплітудами та фазами зондувального променя та другого опорного променя відстань між вихідним торцем світловода та п'єзоелементом 3 прецизійно змінювалась за допомогою юстувального столика 3.

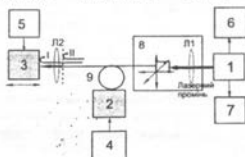


Рис.2 Оптична схема лазерного вібратора з світловодним зондом

мікрогвинтом. Це дозволяло змінювати кількість випромінювання, котре повертається в світловод.

Тонке налаштування фази виконувалося шляхом повороту додаткової тонкої скляної пластинки, розміщеної в зондувальному каналі (на малюнку не показано).

Фазова модуляція, що відображає зовнішній вплив на світловод, виникала внаслідок вібрацій п'єзоелементу 2, жорстко зв'язаного з фрагментом світловодного каналу 9.

Для того, щоб уникнути відбиття випромінювання від дальнього торця світловоду й реалізувати таким чином класичний двопротиневий ЛДВ, на невеликій відстані від торця світловоду розташовувалась тонка скляна пластинка, і в зазор між нею та світловодом вносились краплі іммерсійної рідини – гліцерину. Ця пластинка була нахилена під таким кутом до торця світловода, щоб випромінювання, відбите від неї, не потрапляло знову в світловод.

Система реєстрації даних складалась з осцилографу 6, АЦП (Lcard E-2010) та комп'ютера 7. На п'єзоелементі сигнал подавався від генераторів 4 та 5.

Експериментально отримані епори сигналів вихідного сигналу вібратора та відповідні спектри при різних конфігураціях оптичної схеми наведено на рис.3а-3а та рис.3б-3б при коливанні об'єкту 3 з амплітудою 0,7 нм і частотою 5.2 kHz.

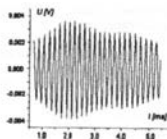


Рис.3 Двопроменева схема ЛДВ

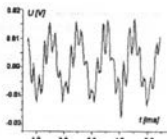


Рис.4 ЛДВ з додатковим каналом

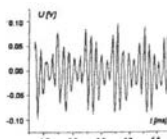


Рис.5 ЛДВ з додатковим каналом, та оптимальним налаштуванням

Епора та спектр на рис.3 відповідають "класичному" двопроменевому ЛДВ [4]. Повільна зміна амплітуди сигналу викликана впливом некомпенсованих завад (повільні механічні деформації установки, турбулентність, температура т.і.).

На рис. 4 – 5 представлено результати дослідження віброметра з ТХФ (додатковий опорний канал, що розповсюджується по світловоду разом з зондувальним променем).

Високоінтенсивний зовнішній вплив на світловодний тракт змодельовано шляхом подачі сигналу 1 kHz на п'єзоелемент 2, що призводить до паразитної фазової модуляції оптичного шляху другого та третього каналів з індексом $m=0,19$. Якщо співвідношення параметрів системи далеке від оптимального, то в цьому випадку шумовий сигнал на частоті 1 kHz майже втричі перевищує сигнал вібрації (див. рис. 4).

При налаштуванні параметрів зонду, близьких до оптимального, відбувається аномальне підсилення сигналу вібрації на 24 дБ, а рівень завади залишається майже незмінним (див. рис. 5).

На стенді також було змодельовано випадок, наближений до реальних умов, коли шум може бути доволі великим. Для цього на п'єзоелемент 2 подавався сигнал завади з рівномірною спектральною щільністю в діапазоні 1 kHz – 6 kHz. Експериментально отримані спектри вихідного сигналу віброметра при різних конфігураціях оптичної схеми наведено на рис.6 для випадку коливань об'єкту 3 з амплітудою 0,3 μm і частотою 5 kHz.

Суцільна чорна лінія (а) – це сигнал класичного ЛДВ з відсутнім додатковим опорним каналом. Завада при цьому також була відсутня. Можна бачити, що на частоті 5 kHz існує спектральний максимум, який відповідає вимірюваному сигналу.

Наявність завади, яка впливає на оптоволоконний тракт, збільшує рівень шуму у вихідному сигналі віброметра. Сигнал вібрації

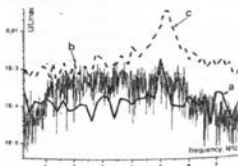


Рис.6 Спектри сигналів ЛДВ з світловодним зондом: а – "класична" схема ЛДВ; б – "класична" схема ЛДВ під впливом зовнішньої завади на світловодний зонд; с – ЛДВ з ТХФ під впливом зовнішньої завади.

зникає (суцільна сіра лінія – б).

При відсутності іммерсійної рідини на кінці світловоду з'являється френелівське відбиття від його торця, що відповідає вмиканню другого опорного каналу. Тонке налаштування відстані між торцем світловода 9 та поверхнею об'єкту 3 призводило до появи сигналу вібрації, котрий

перевищував рівень шуму приблизно на 6,5 dB (пунктирна чорна лінія (с)).

Висновки

Таким чином, теоретично та експериментально досліджено поведінку миттєвої частоти сигналу, котрий утворюється при оптичному гетеродинному прийомі трьох когерентних хвиль, на дві з яких синфазно впливає фазова модуляція, в частота одного з них має частотну модуляцію, яка є, наприклад, результатом відбиття випромінювання від поверхні, що коливається. Показано, що за умови, коли різниця фаз між цими двома хвилями складає π , а їх амплітуди близькі за величиною, виникає значне підсилення частотного сигналу вібрації порівняно з сигналом внаслідок синфазної фазової модуляції в обох каналах.

Як реалізацію теоретичних розрахунків, запропоновано та експериментально досліджено схему лазерного віброметра зі світловодним зондом. Багатомодовий світловод, котрий

використано в цій схемі, має довжину до 10 метрів з регульованим відбиттям частини світла від віддаленого кінця. В схемі віброметра передбачена можливість встановлення заданої фази між хвилями, що інтерферують. Для коливань досліджуваного об'єкту з амплітудою 0,3 nm і частотою 5kHz експериментально продемонстровано можливість підвищення співвідношення сигнал/шум в умовах впливу зовнішніх широкосмтових завад на світловодний тракт за дотримання вказаних вище умов інтерференції. Зокрема, для фазової завади з рівномірною спектральною щільністю в діапазоні 1kHz – 6kHz, яка зазвичай призводить до зникнення сигналу вібрації в шумах ($\text{SNR} = 1$) в схемі класичного двопробеневого віброметра, цей сигнал був поновлений до $\text{SNR} = 6,5$ dB шляхом додавання другого опорного каналу з оптимально підібраними фазою та амплітудою.

Список використаних джерел

1. Jianhua Shang, Yan He, Dan Liu, Huaguo Zang and Weibiao Chen. Laser Doppler Vibrometer for real-time speech-signal acquirement // Chinese Optics Letters. – 2009. – V.7, №8.
2. Pai P.F., Jin S. Locating structural damage by detecting boundary effects // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – V. 231, N4. – P. 1079–1110.
3. Yarovi L. Supersmall fiber probe of laser-Doppler velocimeters and vibrometers. Proc. SPIE. Optical Storage, Imaging, and Transmission of Information. – 1996. – V.3055. – P.306–310.
4. Drain L. E. The Laser Doppler Technique (New York: Wiley). – 1980.
5. Yarovi L., Siegmund G. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2004. – V. 15. – P.2150–2156.
6. Dussarrat Olivier J., Clark D. F., Moir T. J. New demodulation process to reduce cochannel interference for a laser vibrometer sensing system Proc. SPIE. Vibration Measurements by Laser Techniques. – 1998. – V. 3411. – P. 2-13.
7. Pat. 94564 Ukraine G01V 9/02, G01C 3/00. The method of measuring instantaneous vibration / Yarovi L.; applicant patentee Kyiv National Taras Shevchenko University. – № 201013706 submit. 18.11.10; print. 10.05.2011, Bull. Number 9.
8. Yarovi L. Some features of LDV with three interacting waves in nanometer range // Bulletin of Kyiv University. Series: Math. Mechanics. – 2011. – Issue. 26. – P. 39–43.
9. Pat. 990558 Ukraine from 09.04.2012 G01C 3/00, G01C 3/08, G01B 9/02. Laser Doppler vibration meter / Yarovi L., Ivashchenko D., Rozumnyuk V.; applicant Kyiv National Taras Shevchenko University – № a20110548 Ukraine; print. 10.07.12, Bull. Number 13.
10. Lewin A. Compact laser vibrometer for industrial and medical application. Vibration Measurements by Laser Techniques. Proc. SPIE, Advances and Applications, . – 1998. – V. 3411. – P. 61–67.
11. Yarovi L. Method of discrete measurement of small transmissions by laser Doppler vibrometer// Bulletin of Kyiv University. Series: Mechanics and Mathematics. – 2006. – Issue. 15-16. – P. 53-57.

Надійшла до редколегії 15.11.2012

УДК 519.9

Краснопольська Т.С.¹, д.ф.-м.н., с.н.с.,
Приходько Д.Ф.², аспірант
Гуржій О.А.³, д.ф.-м.н., с.н.с.**Динамічні характеристики консольного
стрижня з малою жорсткістю на згин**

В статті вивчаються закономірності коливань консольного пружного стрижня з малою жорсткістю на згин. Визначено критичне значення згинної жорсткості, при якій відбувається вилучування пружного стрижня. Побудовані власні форми та знайдені власні значення для різних величин згинної жорсткості.

Ключові слова: пружна система, згинна жорсткість, власна форма.

¹ Інститут гідромеханіки Національної Академії Наук України, 03057, м. Київ, вул. Желязова, 8/4, e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com

³ Національний технічний університет України "КПІ", 03056, м. Київ, пр-т. Перемоги, 37, e-mail: a.gourjii@gmail.com

T. S. Krasnopol'skaya¹, Dr. Sc. (Phys.- Math.),
D.F. Prykhodko², Ph.D. student
O.A. Gourjii³, Dr. Sc. (Phys.- Math.)

**Dynamic characteristics of a cantilever bar
with low bending rigidity**

Oscillation properties and laws of a cantilever bar with low bending rigidity are studied. The critical value of a bending rigidity, when buckling of a bar occurs, is determined. Eigen modes are constructed and eigen values for different bending rigidities are found.

Key Words: cantilever bar, bending rigidity, eigenmodes.

¹ Institute of Hydromechanics National Academy of Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabov st., 8/4, e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com

³ National Technical university of Ukraine "KPI", 03056, Kyiv, Peremoga av., 37, e-mail: a.gourjii@gmail.com

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Машиніра В.Т.

Вступ

Проблема динамічної стійкості оберненого математичного маятника відома ще з початку 20-го століття, починаючи з класичних експериментів А. Стефенсона [3]. Роботами академіків М. М. Боголюбова, В. В. Болотіна, Р. Ф. Ганієва, П. Л. Капіці, В. М. Челомея та інших видатних вчених минулого була створена завершена теорія коливань такого маятника при динамічному гармонічному збудженні точки підвіси. При цьому накопичен великий обсяг даних, які мають важливе застосування в різних галузях промисловості, авіа-ракетно- та суднобудуванні, зокрема.

Близько двадцяти років тому, починаючи з 1993р., теоретичними та експериментальними роботами британського вченого Д. Ачесон [1],[2] була привернута увага до більш складної системи, яка складається з N послідовно з'єднаних обернених плоских маятників при

гармонічному збудженні нижньої точки підвіси. Були визначені області параметрів, при яких відбуваються стійкі (регулярні та хаотичні) коливання. Виникає важливе питання: що буде в системі з розподіленими параметрами, як граничний перехід до нескінченного N при зменшенні довжини кожного маятника.

В даній статті наводяться та досліджуються базові рівняння коливань пружного тонкого стрижня малої жорсткості на згин. Модель тонкого пружного стрижня може розглядатися як перехід від системи нескінченного числа N послідовно з'єднаних обернених плоских маятників при зменшенні довжини кожного маятника (коли мала пружність нібито додається у місця з'єднання) до системи з розподіленими параметрами [1]. В роботі вивчаються динамічні характеристики (власні форми та власні частоти) та знаходяться положення, при яких може знаходитися у відносному спокої така система.

Крім того, наводяться деякі результати експериментальних досліджень коливань стрижнів малої жорсткості на згин в лабораторії механіки спржених хвильових полів при кафедрі Теоретичної та Прикладної механіки КНУ ім. Шевченка механіко-математичного факультета.

Експериментальні дослідження

При експериментальних дослідженнях використовувалась сталеві проволочка, яка являла собою щільну кругову намотанку у вигляді жгута з 35 сталевих струн діаметра 0,25 мм. Зовні жгут був покритий пластиковою оболонкою. Ця проволочна система була закріплена консольно, тобто один кінець жорстко закріплений та прикріплений до кривошипно шатунного механізму, який був з'єднаний з валом електро двигуна. Двигун крутився з частотами від 5 Гц до 50 Гц і амплітудою 10 мм



Рис. 1а Початкове положення

Рис. 1б Положення стабілізації

На Рис. 1а, б стрілкою 1 показано закріплення, стрілками 2 - пружну систему.

На Рис. 1а показано фотографію початкового положення пружної системи (коливання відсутні). При увімкненні двигуна і збільшенні частоти обертання система втрачає стійкість і починає повільно підійматись вгору. В деякий момент вона підіймається і зупиняється в положенні, показаному на Рис. 1б.

Таким чином ефект стабілізації пружної системи реалізується аналогічно тому як він реалізується в системі скінчених N обернених маятників [1].

Постановка задачі

Розглянемо гнучкий стрижень, схема якого показана на Рис. 2. Припускаємо що поперечні перетини стрижня залишаються плоскими та перпендикулярним

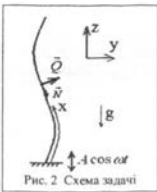


Рис. 2 Схема задачі

и до деформованої вісі, а нормальні напруження на площадках паралельних осі дуже малі порівняно з поєдовжніми напруженнями, вісь стрижня залишається нерозтяжною (гіпотеза Кіргофа).

$N(x)$ - поєдовжня сила зв'язана з масою стрижня, що знаходиться над розглядуваним елементом, F - площа поперечного перетину стрижня, E - модуль Юнга, J - момент інерції стрижня відносно вісі y , ρ - густина стрижня,

$Q = \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ - перерізуюча сила. Рівняння

згинних коливань стрижня при розподіленому зовнішньому навантаженні $q(x, t)$ має вигляд [4]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (1)$$

Якщо перетинах стрижня діє продольна сила $N(x)$, то рівняння (1) запишеться в такому вигляді:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (2)$$

Якщо місце кріплення пружної системи до кривошипно шатунного механізму здійснює вертикальні, коливання $A \cos \omega t$, тоді поєдовжня сила $N(x)$, яка виникає під дією сили тяжіння, сили інерції коливань частини стрижня від перетину x до його кінця l має вид:

$$N(x) = \rho F x \left\{ g(l-x) + (l-x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A \cos \omega t) \right\}. \quad (3)$$

Підставимо рівність (3) в рівняння (2) за умов, що поперечні перетини не змінюють форму і стрижень має сталий поперечний перетин, $(\rho, F, J, E - \text{const})$. Розглянемо деформації стрижня коли $q(x, t) = 0$, а також $A = \text{const}$. В цьому випадку рівняння деформацій стрижня має вид:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (l-x) \left[g + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\cos \omega t) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Проведемо безрозмірювання задачі. Для цього введемо безрозмірні змінні:

$$w^* = \frac{w}{l}, t^* = t\omega, x^* = \frac{x}{l}, \varepsilon^* = \frac{A\omega^2}{g}, \quad (5)$$

$$B^* = \frac{EJ}{\rho Fgl^3}, I^* = \frac{l\omega^2}{g}.$$

Підставивши змінні (5) в рівняння (4) маємо:

$$B^* \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \{1 - \varepsilon^* \cos t^*\} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[(1 - x^*) \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right] + I^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 0. \quad (5^*)$$

В цьому випадку рівняння (5^{*}) після відкидання «^{*}» при змінних має вигляд:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{B}{I} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{I} (1 - \varepsilon \cos t) \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x) \frac{\partial w}{\partial x} \right]. \quad (6)$$

Дана задача має наступні граничні умови:

Розглянемо граничні умови: На кінці з жорстким закріплення стрижня $x = 0$ прогин та кут прогину рівні нулю, а на вільному кінці $x = 1$, тобто згинний момент перерізує сила та рівні нулю. Математичне формулювання цих граничних умов має вид:

$$\begin{cases} x = 0: w = 0, w' = 0 \\ x = 1: w'' = 0, w''' = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Власні частоти, власні форми коливань.

Динамічна поведінка пружних систем при періодичному навантаженні суттєво залежить від динамічних характеристик самої системи, а саме власних форм і власних частот коливань. Як відомо власні форми та власні частоти коливань пружної системи визначаються як загальний розв'язок рівняння пружної системи вільної від зовнішніх впливів. Таким чином, щоб визначити такі характеристики як власні форми та власні частоти коливань системи в рівнянні (6) покладемо $\varepsilon = 0$. Тоді рівняння (6) прийме вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{B}{I} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{I} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x) \frac{\partial w}{\partial x} \right]. \quad (8)$$

Для знаходження власних форм $\phi_n(x)$ та власних частот γ_n , ($n = 1, \dots, \infty$) використаємо метод розділення змінних. Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$w(x, t) = \sum \phi_n(x) (A_n \cos \gamma_n t + B_n \sin \gamma_n t). \quad (9)$$

Кожна власна форма повинна задовольняти рівняння:

$$B \frac{\partial^4 \phi_n}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right] - \lambda_n \phi_n = 0, \quad (10)$$

де $\lambda_n = \gamma_n^2 I$

Система функцій ϕ_n , ($n = 1, \dots, \infty$) повинна бути повною системою ортогональних функцій і задовольняти, згідно задачі Штурма-Ліувіля для однорідних граничних умов [6], наступним умовам:

$$\begin{cases} \int_0^1 \phi_n(x) \phi_m(x) dx = N_n \delta_{nm} \\ N_n = \int_0^1 \phi_n^2(x) dx \end{cases} \quad (11)$$

де δ_{nm} - символ Кронекера.

Розглядаємо консольна пружна система з малою жорсткістю на згин згинається під власною вагою (див. Рис. 1а). Для такої пружної системи безрозмірний параметер B в рівнянні (8) повинен бути малим.

Насамперед визначимо чи можливі власні значення $\lambda_n = 0$ та при яких значеннях B вони можливі.

З рівняння (10) отримаємо при $\lambda_n = 0$ отримаємо таке рівняння:

$$B \frac{\partial^4 \phi_n}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right] = 0. \quad (12)$$

Якщо про інтегруємо рівняння (12) по змінній x , отримаємо співвідношення:

$$B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (1 - x) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

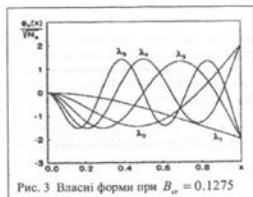
Рівняння (13) має розв'язок такого виду[1]:

$$w'(x) = \sqrt{1-x} \left\{ C_1 J_{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3} B^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] + C_2 J_{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3} B^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (14)$$

Використовуючи умову, що $w''(1) = 0$ отримаємо що $C_1 = 0$ і умова $w'(0) = 0$ дає такий результат:

$$w'(0) = C_2 J_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} B^{-\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad (15)$$

Рівняння (15) має нескінченну кількість коренів, найнижчий з його коренів $B_{cr} = 0.1275$, перші п'ять коренів $B = 0.1275, 0.0178, 0.0067, 0.0035, 0.0021$. Визначимо власні форми для першого кореня. Для цього $B_{cr} = 0.1275$ з (15) підставимо (10) і

Рис. 3 Власні форми при $B_{cr} = 0.1275$

інтегруємо по змінній x .

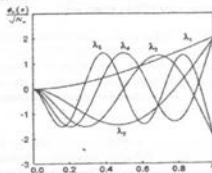
На Рис. 3 показані власні форми для пружної системи коли коли її згина жорсткості $B_{cr} = 0.1275$, а перші п'ять власних значень будуть: $\lambda_1 = 0.0$, $\lambda_2 = 53.285$, $\lambda_3 = 460.68$, $\lambda_4 = 1813.5$, $\lambda_5 = 5008.7$.

Власні значення λ_i та власні частоти γ_i рівні нулю. Згідно теорії Тимошенка при данному значенні коефіцієнта пружності на згин в пружній системі буде спостерігатися явище випучування, яке полягає в тому, що система втрачає прямолінійний вигляд і випучується по першій формі. Без будь-якого зовнішнього впливу, а тільки під дією власної ваги [5]. При нескінченно малому впливі стрижень приймає випучування по першій формі, яка показана на Рис. 3.

Список використаних джерел

1. Acheson D. A pendulum theorem. – Proc. R. Soc. Lond. 1993. – P.239-245.
2. Acheson D. Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum. – Proc. R. Soc. Lond. 1995 – P.89-95.
3. Stephenson A. Of a new type of dynamic stability. – Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc. 1908. – P.1-10.
4. Bolotin V.V. Dynamic stability of elastic systems. – Moscow, 1956

Знайдемо власні форми та власні значення для пружної системи коли її пружність менша $B_{cr} = 0.1275$. При $B = 0.1$ власні значення $\lambda_1 = -0.3431$, $\lambda_2 = 39.884$, $\lambda_3 = 355.63$, $\lambda_4 = 1401.7$, $\lambda_5 = 3906.5$

Рис. 5 Власні форми при $B = 0.1$

Власні форми приведені на Рис. 4. Таким чином, випучування пружної системи при $B = 0.1$ проходить також по першій формі, що відповідає λ_1 на Рис. 5..

Висновки

В роботі вперше визначені власні форми і власні значення (власні частоти) коливань пружного стрижня з малою жорсткістю на згин, що консольно закріплений. Конкретний вигляд форм для критичного значення жорсткості на згин, при якій спостерігається випучування пружного стрижня, побудован та приводиться в роботі.

Динамічні характеристики (власні форми і власні значення) визначені для меншого значення параметра жорсткості на згин, коли в стані спокою переміщення вільного кінця стрижня стають великими.

5. Timoshenko S., Gere J. Theory of elastic stability. – New York, 1961
6. Abramovitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs and Mathematical Tables. – Moscow, 1979
7. Kapitsa P. L. Pendulum with a vibrating suspension. – JETP, 1951

Надійшла до редколегії 26.11.12

УДК 517.9

Креневич А.П.¹, к.ф.-м.н., доцент

Асимптотична відповідність з ймовірністю 1 диференціальних рівнянь не розв'язаних відносно похідної зі збуренням типу білого шуму

Для системи диференціальних рівнянь вигляду $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt + B(t)dW(t)$ наведено достатні умови асимптотичної відповідності розв'язків розв'язкам лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Ключові слова: нелінійна система; система, не розв'язана відносно похідної; випадкове збурення; асимптотична відповідність з ймовірністю 1.

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: krenevich@ukr.net

A.P. Krenevych¹, PhD, Associate Professor

Asymptotic matching with probability 1 of differential equations unsolved relative to a derivative with white noise perturbation

We obtained sufficient conditions of asymptotic matching with probability one of differential system with random perturbation in form $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt + B(t)dW(t)$ to ordinary differential system.

Key Words: nonlinear system; system not solved relative to the derivative; random perturbation; asymptotic matching with probability one.

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: krenevich@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк.

1 Вступ

Якісна теорія займає значне місце у загальних питаннях дослідження диференціальних рівнянь. Одним із найважливіших розділів цієї теорії є стійкість. Ця проблематика присвячено безліч робіт, серед яких [1].

Ця робота присвячена дослідженню якісної поведінки диференціальних рівнянь із випадковим збуренням типу "білого шуму", не розв'язаних відносно похідної. Вона присвячена відшукуванню системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої, подібна до поведінки розв'язків вихідної сингулярної системи. Це дозволяє перейти від асимптотичного дослідження вихідної системи до дослідження значно простішої системи. Згаданий підхід до дослідження асимптотичної поведінки вивчався багатьма авторами. Так, у [1] наведено теорему Левінсона, що встановлює достатні умови асимптотичної еквівалентності для систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботах [2, 3, 4] це питання досліджено для стохастичних диференціальних систем, а у роботі [5] для детермінованих диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно

похідної.

2 Основні результати

Розглядається система диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

$$d(x - g(t, x)) = (Ax + f(t, x))dt + B(t)dW(t), \quad (1)$$

де $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$, з початковою умовою

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Тут A - стала матриця, f, g - неперервні за сукупністю змінних d -вимірні функції такі, що існують додатні сталі L_g, L_f, K , що для всіх $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$ виконуються нерівності

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq L_g |x - y|, \quad (3)$$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_f |x - y|, \quad (4)$$

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad (5)$$

причому $L_g^2 < 1/2$, $B(t)$ - неперервна, обмежена на додатній півосі d -вимірна функція, $W(t)$ - стандартний скалярний вінерівський процес, визначений для $t \geq 0$, на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ - потік σ -алгебр, породжений процесом $W(t)$.

З [6] випливає, що за наведених вище умов розв'язок системи (1), що задовольняє початкову умову (2), існує і єдиний на $t \geq 0$.

Поруч із системою (1) розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dy = Aydt, \quad (6)$$

де $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$.

Нехай $X = X(t - \tau)$ матрицант системи (6), нормований в 0, тобто такий, що $X(0) = I$, де I – одинична матриця. Тоді розв'язок системи (1) можна представити в інтегральному вигляді, використовуючи матрицант системи (6).

Лема 1. Розв'язок рівняння (1) з початковою умовою (2) задовольняє інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t)(x_0 - g(0, x_0)) + g(t, x(t)) + \\ & + \int_0^t X(t-s)Ag(s, x(s))ds + \\ & + \int_0^t X(t-s)f(s, x(s))ds + \\ & + \int_0^t X(t-s)B(s)dW(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення. Для доведення леми досить у рівності (7) перенести доданок $g(t, x(t))$ вліво і обчислити стохастичний диференціал від обох частин отриманої рівності. $\square$

Означення 1. Якщо кожному розв'язку $x(t)$ системи (1) відповідає розв'язок $y(t)$ системи (6), такий, що

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0\} = 1,$$

то система (1) називається асимптотично відносною до системи (6) з ймовірністю 1.

Теорема, наведена нижче, є узагальненням відомої теореми Левінсона у випадку диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, що збуджені "білим шумом".

Теорема 2.1. Нехай розв'язки системи (6) обмежені на $[0, \infty)$. Нехай функції $g(t, y)$, $f(t, y)$ задовольняють умови

$$|g(t, y)| \leq q(t)(1 + |y|),$$

$$|f(t, y)| \leq h(t)(1 + |y|),$$

де $q(t), h(t)$ – деякі невід'ємні функції, визначені на додатній півосі, і нехай для них виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \int_0^\infty q(t)dt &= M_q < \infty, \\ \int_0^\infty h(t)dt &= M_h < \infty, \end{aligned} \quad (8)$$

причому $q(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Нехай має місце оцінка

$$\int_0^\infty \|B(t)\|^2 dt = M_B < \infty.$$

Тоді система (1) асимптотично відносна до системи (6) у середньому квадратичному.

Доведення. Оскільки розв'язки системи (6) обмежені, то матрицант $X(t - \tau)$ можна представити у вигляді прямої суми

$$X(t - \tau) = X_1(t - \tau) + X_2(t - \tau), \quad (9)$$

причому

$$\|X_1(t)\| \leq e^{-\alpha t}, \|X_2(t)\| \leq b, t \geq 0, \quad (10)$$

де b, α – деякі додатні сталі.

Перепишемо систему (1), що задовольняє початкову умову (2) за допомогою матрицанта $X(t - \tau)$ у вигляді (7). Оцінивши математичне сподівання від квадрата лівої і правої частини цієї рівності, проводячи викладки, подібні до викладок робіт [3, 4, 5], та скориставшись лемою Гронуолла-Белмана, можемо показати обмеженість на додатній півосі в середньому квадратичному всіх розв'язків системи (1):

$$E|x(t)|^2 \leq K(x_0).$$

Враховуючи (9), перепишемо рівність (7) у такому вигляді

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t)(x_0 - g(0, x_0)) + g(t, x(t)) + \\ & + \int_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau, x(\tau))d\tau + \\ & + \int_0^t X_2(t-\tau)Ag(\tau, x(\tau))d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t X_1(t-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^t X_2(t-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^t X_1(t-\tau)B(\tau)dW(\tau) + \\
& + \int_0^t X_2(t-\tau)B(\tau)dW(\tau).
\end{aligned}$$

Використаємо еволюційну властивість матрицанта $X(t-\tau) = X(t-s)X(s-\tau)$ і перепишемо останню рівність у вигляді

$$\begin{aligned}
x(t) &= X(t) \left\{ x_0 - g(0, x_0) + \right. \\
& + \int_0^\infty X_2(-\tau)Ag(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^\infty X_2(-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& \left. + \int_0^\infty X_2(-\tau)B(\tau)dW(\tau) \right\} + \\
& + g(t, x(t)) + \\
& + \int_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^t X_1(t-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^t X_1(t-\tau)B(\tau)dW(\tau) - \\
& - \int_t^\infty X_2(t-\tau)Ag(\tau, x(\tau))d\tau - \\
& - \int_t^\infty X_2(t-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau - \\
& - \int_t^\infty X_2(t-\tau)B(\tau)dW(\tau).
\end{aligned} \tag{11}$$

Кожному розв'язку $x(t)$ системи (1) з початковою умовою $x(0) = x_0$ поставимо у відповідність розв'язок $y(t)$ системи (6) з початковою умовою

$$\begin{aligned}
y_0 &= x_0 - g(0, x_0) + \\
& + \int_0^\infty X_2(-\tau)Ag(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^\infty X_2(-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^\infty X_2(-\tau)B(\tau)dW(\tau).
\end{aligned} \tag{12}$$

Зауважимо, що всі невластні інтеграли в рівності (12) збігаються в середньому квадратично. Це впливає з обмеженості $E|x(t)|^2$ для системи (1).

Виберемо такі послідовності: послідовність $\{n_k | k \geq 1\}$, щоб $n_k > k, k \geq 1$ і

$$\int_{n_k}^\infty h(\tau)d\tau \leq \frac{1}{2k}, k \geq 1;$$

послідовність $\{m_k | k \geq 1\}$, щоб $m_k > k, k \geq 1$ і

$$\int_{m_k}^\infty \|B(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2k}, k \geq 1;$$

послідовність $\{p_k | k \geq 1\}$, щоб $p_k > k, k \geq 1$ і

$$\int_{p_k}^\infty q(\tau)d\tau \leq \frac{1}{2k}, k \geq 1;$$

і послідовність $\{q_k | k \geq 1\}$, щоб $q_k > k, k \geq 1$ і

$$\sup_{\tau \geq p_k} q(\tau) \leq \frac{1}{2k}, k \geq 1.$$

По вищевизначених послідовностях побудуємо послідовність l_k , таку, що

$$l_k = 2 \max\{n_k, m_k, p_k, q_k\}, k \geq 1.$$

Так як

$$y(t) = X(t)y_0,$$

де y_0 визначається формулою (12), то з формули (11) для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ для послідовностей $1/k$ отримаємо

$$P \left\{ \sup_{t \geq l_k} |x(t) - y(t)| \geq 1/k \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq P \left\{ \sup_{t \geq I_k} |g(t, x(t))| \geq \frac{1}{7k} \right\} + \\
&+ P \left\{ \sup_{t \geq I_k} \left| \int_0^t X_1(t-\tau) A g(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \geq \frac{1}{7k} \right\} + \\
&+ P \left\{ \sup_{t \geq I_k} \left| \int_0^t X_1(t-\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \geq \frac{1}{7k} \right\} + \\
&+ P \left\{ \sup_{t \geq I_k} \left| \int_0^t X_1(t-\tau) B(\tau) dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{7k} \right\} + \\
&+ P \left\{ \sup_{t \geq I_k} \left| \int_t^\infty X_2(t-\tau) A g(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \geq \frac{1}{7k} \right\} + \\
&+ P \left\{ \sup_{t \geq I_k} \left| \int_t^\infty X_2(t-\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \geq \frac{1}{7k} \right\} + \\
&+ P \left\{ \sup_{t \geq I_k} \left| \int_t^\infty X_2(t-\tau) B(\tau) dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{7k} \right\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Для кожного доданку, проводячи викладки подібні до описаних у [4], отримаємо, що

$$P \left\{ \sup_{t \geq I_k} |x(t) - y(t)| \geq 1/k \right\} \leq I_k.$$

де послідовність $\{I_k : k \geq 1\}$ така, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ збіжний. Отже, за лемою Бореля-Кантеллі отримуємо, що існує додатна ціла випадкова величина $M = M(\omega)$, така що $\forall k \geq M(\omega)$ виконується

$$P \left\{ \sup_{t \geq I_k} |x(t) - y(t)| < 1/k \right\} = 1 \tag{14}$$

Таким чином, для майже всіх ω , для довільного $\varepsilon > 0$, існує $T = T(\varepsilon, \omega) = I_{k_0}$, де $k_0 = \max\{[1/\varepsilon], M(\omega)\}$, що для всіх $t \geq T$ виконується

$$|x(t) - y(t)| \leq \sup_{t \geq T} |x(t) - y(t)| \leq 1/k_0 \leq \varepsilon.$$

Останнє означає асимптотичну еквівалентність з ймовірністю 1. Теорему доведено. $\square$

3. Висновки

У роботі розглянуто систему диференціальних рівнянь збурених випадковим процесом типу "білого шуму", не розв'язаних відносно похідної. Наведено достатні умови асимптотичної відповідності розв'язків такої системи розв'язкам лінійної диференціальної системи зі сталими коефіцієнтами. Ці результати стануть у нагоді при дослідженні якісної поведінки розв'язків вищезгаданих рівнянь, при дослідженні стійкості чи асимптотичної поведінки, а також можуть практично застосовуватися для конкретних задач, що виникають при моделюванні різних фізичних, біологічних чи економічних процесів.

Список використаних джерел

1. Demidovich B.P., Lectures on Stability Theory. — Moscow: Nauka, 1967 — 472 p (in Russian).
2. Krenevych A.P. Asymptotic equivalence of the solutions of the linear stochastic Ito systems // Ukrainian Mathematical Journal—2006.— 58, №10.— P.1368—1384. (in Ukrainian).
3. Krenevych A.P. Asymptotic equivalence of the solutions of the semilinear stochastic Ito systems // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. —2006.— №1.— P.69-76. (in Ukrainian).
4. Stanzhitskii A. N., Krenevych A. P., Novak I. G. Asymptotic Equivalence of Linear Stochastic Ito Systems and Oscillation of Solutions of Linear Second-Order Equations // Differential Equations—2011. — 47, № 6. — P.796-810.
5. Krenevych A.P., Bogonis A. R. Research of asymptotic equivalence of singular differential equations // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. — 2009. — №1. — P. 55-59. (in Ukrainian).
6. Krenevych A.P. On solving the differential equation with random perturbation not solved relative to the derivative // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. —2012.— №3.— P.81-84. (in Ukrainian).

Надійшло до редколегії 11.09.2012

УДК 517.977

Ловеїкін Ю.В., к. ф.-м. н., доцент

**Керування коливними процесами в одній
двомасовій системі**

Досліджується задача стабілізації за найкоротший час керованої двомасової системи, в якій керуванням виступає зовнішня сила, що спричиняє коливний рух цієї системи.

Ключові слова: двомасова система, коливний процес, керування, стабілізація.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64,
e-mail: yuriyl@ua.fm

Статтю представив д.ф.-м.н., академік НАН України, професор Перестюк М.О.

1. Вступ

Вивчення коливних процесів має суттєве значення для найрізноманітніших розділів механіки, фізики та техніки. Вібразії споруд і машин, електромагнітні коливання в радіотехніці та оптиці, автоколивання в системах регулювання та слідуючих системах, звукові та ультразвукові коливання – всі ці явища описуються схожим математичним апаратом, розробці якого присвячені роботи багатьох вчених. Окрему увагу приділено питанням керування коливними процесами, що можуть виникати у системі. При цьому найрозповсюдженішими цілями керування є або гасіння коливних процесів, або підтримка автоколивного режиму [1].

Колівання взаємодіючих систем з зосередженими та розподіленими параметрами є предметом чисельних досліджень. Зокрема, розглядалися пружні коливання стрижнів з підвішеним вантажем [2, 3]. Багато досліджень присвячено задачам про різноманітні динамічні гасителі пружних коливань [4].

Метою цієї роботи є мінімізація часу коливань, які виникають у системі, що складається з двох тіл, перше з яких може рухатись вздовж однієї осі, а друге – знаходиться на підвісі до першого, причому в якості керуючого параметру виступає зовнішня сила, що діє на перше тіло. Аналогічна задача у випадку, коли керування здійснюється за допомогою двох параметрів: положення першого тіла та довжини підвісу розглянута в [9].

© Ю.В. Ловеїкін, 2012

Loveikin Y.V., Ph.D., Associate Professor

**Oscillation process controlling in one
two-mass system**

Minimum time stabilization problem for two-mass controlling system in which control is external force that makes oscillation motion of this system is considered.

Keywords: two-mass system, oscillation process, controlling, stabilization.

National Taras Shevchenko University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymirskaya str., 64
e-mail: yuriyl@ua.fm

2. Постановка проблеми

Будемо розглядати систему, яка складається з двох тіл. Одне тіло може рухатись вздовж однієї осі, друге тіло є маятником, який знаходиться на підвісі до першого. Еволюція такої системи описується системою двох диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_p - m_2 \frac{g}{l} (x_1 - x) - F_0 \operatorname{sign} \dot{x}_1, \\ \ddot{x} = \frac{g}{l} (x_1 - x), \end{cases} \quad (1)$$

в якій x_1 – положення першого тіла відносно осі, вздовж якого воно рухається, x – положення другого тіла відносно цієї ж осі, m_1, m_2 – маси першого та другого тіл відповідно, g – прискорення вільного падіння, l – довжина підвісу від другого тіла до першого, F_0 – сила опору, що перешкоджає руху першого тіла внаслідок впливу зовнішніх факторів, F_p – зовнішня сила, що спричиняє рух першого тіла, і може змінюватись у заданих межах ($F_p \in [-F_m, F_m]$).

Будемо розглядати процеси, що відбуваються у цій двомасовій системі після початку руху першого тіла під впливом сили F_p зі стану спокою. Задача полягає у виборі такої сили F_p , яка б за найкоротший час припинила коливання

другого тіла, що виникають після початку руху зі стану спокою.

Таким чином, досліджуваний процес описується системою (1) з крайовими умовами

$$x(0) = x_1(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x(T) &= x_1(T), \\ \dot{x}(T) &= \dot{x}_1(T) = v_0, \\ \ddot{x}(T) &= \ddot{x}_1(T), \end{aligned} \quad (3)$$

де $v_0 > 0$ – стала, T – кінцевий момент часу, який потрібно мінімізувати, керуючи зовнішньою силою F_p .

Отже, розглядатимемо задачу оптимальної швидкодії, в якій керована система описується крайовою задачею (1) – (3), керуванням виступає зовнішня сила, що спричиняє рух системи.

Для зручності введемо додаткові фазові змінні $y = \dot{x}$, $y_1 = \dot{x}_1$, і тоді задача набуває вигляду

$$\begin{cases} T \rightarrow \inf, \\ \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = u - p(x_1 - x) - f_0 \operatorname{sign} y_1, \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = q(x_1 - x), \\ x(0) = x_1(0) = 0, \quad y(0) = y_1(0) = 0, \\ x(T) = x_1(T), \quad y(T) = y_1(T) = v_0, \\ \dot{y}(T) = \dot{y}_1(T), \\ u \in [-f_m, f_m], \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{де } q = \frac{g}{l} > 0, \quad p = \frac{m_2}{m_1} q > 0, \quad f_0 = \frac{F_0}{m_1} > 0,$$

$$u = \frac{F_p}{m_1} - \text{керування.}$$

3. Основні результати

Слід відразу зауважити, що в задачі (4) задовольнити умову $\dot{y}(T) = \dot{y}_1(T)$ при виконанні інших умов в момент $t = T$ можна лише, якщо $\dot{y}(T) = \dot{y}_1(T) = 0$ і $u(T) = f_0 \operatorname{sign} y_1(T)$. Це означає, що при $t > T$ рух має бути рівномірним.

Рух розпочинається зі стану спокою у напрямку осі Ox . Для початку руху сила F_p має бути додатною в момент $t = 0$, або, що те саме,

$u(0) > 0$. Також, від початку руху щонайменше протягом деякого часу ($t \in (0, t_1)$) функція y_1 додатна: $y_1(t) > 0$, $t \in (0, t_1)$. Тому на першому етапі еволюція керованої системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = u - f_0 - p(x_1 - x), \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = q(x_1 - x). \end{cases}$$

Умови на початку руху залишаються без змін. Для кінцевого моменту можлива одна з двох ситуацій. Якщо момент T настає раніше, ніж момент t_1 , тобто в деякий момент T ($0 < T \leq t_1$) виконуються умови

$$x(T) = \dot{x}_1(T), \quad y(T) = y_1(T) = v_0, \quad (5)$$

то T є моментом завершення процесу і для задоволення умови $\dot{y}(T) = \dot{y}_1(T)$ покладемо $u(t) = f_0 \operatorname{sign} y_1(t)$ для $t \geq T$. Якщо на проміжку $(0, t_1)$ не існує точки T , для якої виконуються (5), то процес продовжується далі і щонайменше протягом деякого проміжку часу після t_1 функція y_1 від'ємна: $y_1(t) < 0$, $t \in (t_1, t_2)$, і на цьому проміжку еволюція керованого об'єкту описується системою

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = u + f_0 - p(x_1 - x), \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = q(x_1 - x). \end{cases}$$

Розглядатимемо випадок, коли рух системи розпочинається зі стану спокою у додатному напрямку осі Ox .

Для розв'язання задачі (4) використовується принцип максимуму Понтрягіна [5, 6].

З умови максимуму одержуємо, що оптимальне керування визначається функцією

$$u(t) = \begin{cases} f_m, & \Psi_2(t) > 0, \\ -f_m, & \Psi_2(t) < 0, \end{cases}$$

де стала $f_m = \frac{F_m}{m_1}$, а функція $\Psi_2(t) -$

компонента розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1 = p\Psi_2 - q\Psi_4, \\ \dot{\Psi}_2 = -\Psi_1, \\ \dot{\Psi}_3 = -p\Psi_2 + q\Psi_4, \\ \dot{\Psi}_4 = -\Psi_3, \end{cases}$$

який задовольняє умови трансверсальності

$$\Psi_1(0) = \lambda_1, \quad \Psi_1(t_*) = \lambda_3,$$

$$\Psi_2(0) = \lambda_2, \quad \Psi_2(t_*) = \lambda_7,$$

$$\Psi_3(0) = \lambda_2, \quad \Psi_3(t_*) = \lambda_8,$$

$$\Psi_4(0) = \lambda_4, \quad \Psi_4(t_*) = \lambda_8,$$

де λ_j – множники Лагранжа.

Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь для спряжених змінних і враховуючи умови трансверсальності, знаходимо, що функція $\Psi_2(t)$ має вигляд

$$\Psi_2(t) = \frac{-c}{\cos(\sqrt{p+q}t)} \left(\frac{p}{q} + \cos(\sqrt{p+q}(t-t_*)) \right),$$

де c – деяка стала.

Функція $\Psi_2(t)$ має такі властивості: $\Psi_2(0) > 0$, $\Psi_2(t_*) < 0$ і на відрізку $[0, t_*]$ змінює знак лише один раз.

З умови оптимальності закінчення процесу та з умови $\Psi_2(t_*) < 0$ маємо, що

$$\frac{c}{\cos(\sqrt{p+q}t_*)} > 0.$$

Крім того має місце нерівність

$$\cos(\sqrt{p+q}t_*) + \frac{q}{p} < 0.$$

У результаті застосування принципу максимуму одержано такий результат.

Теорема 1. Оптимальне керування для задачі (4) визначається функцією

$$u(t) = \begin{cases} f_*, & \varphi(t) > 0, \\ -f_*, & \varphi(t) < 0, \end{cases}$$

де стала $f_* = \frac{F_*}{m_1}$, функція

$$\varphi(t) = -\frac{q}{p} - \cos(\sqrt{p+q}(t-t_*)),$$

а t_* задовольняє нерівність

$$\cos(\sqrt{p+q}t_*) + \frac{q}{p} < 0. \quad (6)$$

Варто зауважити, що для виконання умови (6) необхідно виконання нерівності $q < p$, яка еквівалентна нерівності $m_1 < m_2$, що є природним у реальних процесах.

Момент t_* можна представити у вигляді

$$t_* = \frac{1}{\sqrt{p+q}} \arccos\left(-\frac{q}{p}\right) + \tau,$$

де $\tau > 0$ – деяке число.

Функція $\varphi(t)$ має такі властивості:

- 1) в початковий момент часу ($t=0$) функція $\varphi(t)$ додатна $\varphi(0) > 0$;
- 2) в момент $t=t_*$ функція від'ємна $\varphi(t_*) < 0$;
- 3) на інтервалі $(0, t_*)$ функція $\varphi(t)$ один раз змінює знак.

Зауважимо, що повний час руху T керованої системи залежить від τ , і мінімальний час руху одержуються при $\tau=0$. Але у такій ситуації отримуємо для функції $\varphi(t)$, що $\varphi(0)=0$ і $\varphi(t) < 0$ на $(0, t_*)$, де $t_* > 0$ – деяке число. І це означає, що рух керованої системи не відбувається, тобто вона залишається у початковому стані. Отже, оптимального керування задача (4) не має, проте, вибираючи τ достатньо малим, можна досягти мінімального часу з як завгодно великою точністю, тобто побудувати субоптимальне керування [7, 8].

Остаточно, опускаючи технічні деталі проведеного дослідження, одержано такий остаточний результат.

Теорема 2. Керування зовнішньою силою для задачі (4) має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} f_*, & t \in [0, \tau), \\ -f_*, & t \in [\tau, T), \\ f_0, & t > T \end{cases} \quad (7)$$

у випадку руху системи вздовж додатного напрямку осі, і керування задається функцією

$$u(t) = \begin{cases} -f_n, & t \in [0, \tau), \\ f_n, & t \in [\tau, T), \\ -f_b, & t > T \end{cases} \quad (8)$$

у випадку руху системи вздовж від'ємного напрямку осі.

Величина τ має бути додатною і може вибиратись виходячи з властивостей досліджуваної системи.

Таким чином, у результаті дослідження одержано субоптимальне керування (7), (8) зовнішньою силою керованої системи.

4. Висновки

У роботі розглянуто систему, що складається з двох тіл, перше з яких може рухатись вздовж однієї осі, а друге - є маятником, який знаходиться на підвісі до першого. Для такої двомасової системи розглянуто процеси, що відбуваються після початку руху зі стану спокою. А саме, досліджується питання усунення за найкоротший час коливань процесів, які виникають у системі після початку руху. У роботі показано, що досягти мінімального часу неможливо та, використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, побудовано субоптимальне керування зовнішньою силою, яка спричиняє рух системи.

Список використаних джерел

1. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. Vibrations control. - M.: Nauka, 1980. - 384 p. (in Russian)
2. Nimoshenko S.P. Oscillations in engineering. - M.: Nauka, 1967. - 444 p. (in Russian)
3. Filippov A.P. The oscillations of deformed systems. - M.: Mashinostroenie, 1970. - 734 p. (in Russian)
4. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Waves in rods. Dispersions. Dissipation. Nonlinearity. - M.: Fizmatlit, 2002. - 208 p. (in Russian)
5. The mathematical theory of optimal processes / Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. - M.: Nauka, 1969. - 384 p. (in Russian)
6. Krotov V.F. Fundamentals of the theory of optimal control. - M.: Vysshaya shkola, 1990. - 429 p. (in Russian)
7. Moiseev N.N. Numerical methods in the theory of optimal systems. - M.: Nauka, 1971. - 424 p. (in Russian)
8. Moiseev N.N. Asymptotic methods of nonlinear mechanics. - M.: Nauka, 1981. - 400 p. (in Russian)
9. Strelcov P.M. Oscillation damping of cargo as it moves on the suspension of variable length // Bulliten of Odessa National Sea University. - 2012. - № 35. - P. 179 - 187. (in Russian)

Надійшла до редколегії 28.08.2012

УДК 517.9

О.Е. Любима, аспирант
Прискорення ітерацій для автономної
крайової задачі методом
Ньютона-Канторовича

Побудовано нову ітераційну процедуру для знаходження розв'язків неперервної слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь в критичному випадку.

Ключові слова: автономна система звичайних диференціальних рівнянь, метод Ньютона-Канторовича.

Донбаський державний педагогічний університет, 84116, м.Слов'янськ, вул. Г.Батюка, 19

e-mail: olya.pirus@rambler.ru

Статтю представив академік НАН України, д. ф.-м. н., професор М.О. Перестюк

1 Постановка задачі

Досліджено задачу про побудову розв'язку

$$z(t, \varepsilon) \in C^2[a, b(\varepsilon)], \quad C[0, \varepsilon_0], \quad b(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

автономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$z'' = Az + Bz' + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon), \quad (1)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Розв'язок неперервної ($m \neq n$) задачі (1) шукаємо у малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in C^2[a, b^*], \quad b^* := b(0)$$

порядкуючої задачі

$$z_0'' = Az_0 + Bz_0' + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad (2)$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m.$$

Нелінійності $Z(z, z', \varepsilon)$ та $J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – неперервно-диференційовні по z і z' у малому околі порядкуючої задачі і неперервно-диференційовні по малому параметру ε на відріжку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний та $J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторні функціонали [1, 2, 3]

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b(\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

О.Е. Liubyma, PhD student

Acceleration of iteration for autonomous
boundary-value problem by the method
by Newton-Kantorovich

We obtain a new iteration procedure for finding solutions of a Noetherian weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case.

Key Words: an autonomous system of ordinary differential equations, the method by Newton-Kantorovich.

Donbass State Pedagogical University, 84116, Slov'yansk, H.Batyuka str., 19

e-mail: olya.pirus@rambler.ru

У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умови

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f \right] (\cdot) \right\} = 0$$

порядкуюча задача (2) має сім'ю розв'язків [4]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_0 + G \left[f; \alpha \right] (t),$$

$$X_r(t) = X(t)P_{Q^*}, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q = \ell X(\cdot) - (m \times n)$ -вимірна матриця, $\text{rank } Q = n_1$, $n - n_1 = r$, $P_{Q^*} - (m \times m)$ -матриця-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$, $X(t)$ – фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (2); $P_{Q^*} - (n \times r)$ -матриця, складена із r – лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ - матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow N(Q)$;

$$G \left[f; \alpha \right] (t) = X(t)Q^* \left\{ \alpha - \ell K \left[f \right] (\cdot) \right\} + K \left[f \right] (t)$$

– узагальнений оператор Гріна задачі (2), Q^* -псевдообернена матриця за Муром-Пенроузом [1], $K[f](t)$ – оператор Гріна задачі Коші [4] для диференціальної системи (2). Для спрощення викладок припустимо, що диференціальна система (1) не містить дисипативного члену Bz' , або його величина мала і доданок Bz' може бути віднесений до нелінійності. В цьому випадку

диференціальна система (2) не містить дисипативного члена Bz'_0 , а оператор Гріна задачі Коші набуває зображення

$$K[f](t) = X(t) \int_0^t Y(s) f \, ds,$$

$$Y(t) := V^{-1}(t) \begin{pmatrix} O \\ I_n \end{pmatrix};$$

тут $V(t)$ нормальна фундаментальна матриця системи

$$V'(t) = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \cdot V(t), \quad V(a) = I_{2n}.$$

Як фундаментальну матрицю $X(t)$ однорідної частини диференціальної системи (2) використовуємо блок матриці $V(t)$:

$$V(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{pmatrix}.$$

Характерною особливістю автономної крайової задачі (1) є той факт, що на відміну від аналогічних неавтономних крайових задач, правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$, на якому шукаємо розв'язок задачі (1), не відомий і підлягає визначенню в процесі побудови розв'язків. Здійснюючи в задачі (1) заміну змінної [2, 3]

$$t = a + (\tau - a) \left(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right), \quad \beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0],$$

$$b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon \left(b^* - a \right) \beta(\varepsilon), \quad \beta(0) = \beta_0,$$

отримуємо задачу про відшукування розв'язків

$$z(\tau, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^2[a, b^*], \quad z(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$z'' = Az + f + \varepsilon [Z(z, z', \varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon))(Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon))], \quad (3)$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon [\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon))]. \quad (4)$$

Тут $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний та $\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторні функціонали

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \quad \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b^*] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Розв'язок задачі (3), (4) шукаємо у вигляді

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Для знаходження збурення

$$x(\tau, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^2[a, b^*], \quad x(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

отримуємо задачу

$$x'' = Ax + \varepsilon [Z(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon) + \beta(2 + \varepsilon \beta)(Az + f + \varepsilon Z(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon))],$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon [\tilde{J}(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon, \varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon \tilde{J}(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon))]. \quad (5)$$

Позначивши вектор $\hat{c}_0 = \text{col}(c_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^{r+1}$

та $P_{Q_2^*}$ – $(d \times m)$ -вимірну матрицю, складену із $d := m - n$ – лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q^*} ,

$$\varphi_0(\hat{c}_0) = 2\alpha\beta_0 + J(z_0(\cdot, c_0), z'_0(\cdot, c_0), 0),$$

$$f_0(s, \hat{c}_0) = 2\beta_0 \left[Az_0(s, c_0) + f \right] + Z(z_0, z'_0, 0)$$

аналогічно [2, 3], приходимо до необхідної умови розв'язності задачі (5).

Лема 1. Якщо крайова задача (1) в критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z_0(t, c_0)$, то вектор $\hat{c}_0$ задовольняє рівнянню [2]

$$F(\hat{c}_0) = P_{Q_2^*} \left\{ \varphi_0(\hat{c}_0) - \ell K[f_0(s, \hat{c}_0)](\cdot) \right\} = 0. \quad (6)$$

Припустимо, що рівняння (6) має простий ($P_{B_2^*} P_{Q_2^*} = 0$) дійсний корінь $\hat{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+1}$.

2 Достатня умова існування розв'язку

Для знаходження розв'язку задачі (3), (4) використовуємо розвинення функції $Z(z, z', \varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_0)$, його похідної $z'_0(\tau, c_0)$ та точки $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_0) + x'(\tau, \varepsilon), \varepsilon) =$$

$$= Z(z_0(\tau, c_0), z'_0(\tau, c_0), 0) + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) +$$

$$+ A_2(\tau)x'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_0)) +$$

$$+ R_1(z_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_0) + x'(\tau, \varepsilon), \varepsilon);$$

тут

$$A_1(\tau) = Z'_z(z_0(\tau, c_0), z'_0(\tau, c_0), 0),$$

$$A_2(\tau) = Z'_\tau(z_0(\tau, c_0), z'_0(\tau, c_0), 0),$$

$$A_3(\tau) = Z'_\varepsilon(z_0(\tau, c_0), z'_0(\tau, c_0), 0).$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за першими двома аргументами функціоналу

$$J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_0) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$$

і неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за третім аргументом, виділяємо лінійні частини цього функціоналу [5]

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) := \tilde{J}_x(z_0(\cdot, c_0), z'_0(\cdot, c_0), 0),$$

$$\ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) := \tilde{J}_{x'}(z_0(\cdot, c_0), z'_0(\cdot, c_0), 0),$$

$$\varepsilon \cdot \ell_3(z_0(\cdot, c_0)) := \varepsilon \cdot \tilde{J}_\varepsilon(z_0(\cdot, c_0), z'_0(\cdot, c_0), 0)$$

і член

$$J(z_0(\cdot, c_0), z'_0(\cdot, c_0), 0) = J(z(\cdot, 0), z'(\cdot, 0), 0)$$

нульового порядку по ε в околі точок $x = 0$, $x' = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_0) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = \\ = J(z_0(\cdot, c_0), z'_0(\cdot, c_0), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \\ + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_0)) + J_1(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

З урахуванням розвинень нелінійностей задача (5) набуває вигляду

$$\begin{cases} x'' = Ax + \varepsilon \{ \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon))(Az + f) + \\ + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon))) [Z(z_0, z'_0, 0) + \\ + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_0)) + \\ + R_1(z_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_0) + x'(\tau, \varepsilon), \varepsilon)] \}, \\ \ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \alpha \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) + \varepsilon (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)(2 + \\ + \varepsilon \beta(\varepsilon))) [J(z_0, z'_0, 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \\ + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_0)) + J_1(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)]. \end{cases}$$

Позначимо вектор-функцію

$$\hat{c}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} c(\varepsilon) \\ \beta(\varepsilon) \end{bmatrix} : C[0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \hat{c}(0) := \hat{c}_0,$$

$(d \times m)$ -вимірну матрицю

$$B_0 = P_{B_0^*} \{ \tilde{\ell}_1(z_0(\cdot, c_0)) - \ell K \{ \tilde{A}_1(z_0(\tau, c_0)) \}(\cdot) \}$$

та її ортогопроектор: $P_{B_0^*} : \mathbb{R}^d \rightarrow N(B_0^*)$. Тут

$$\tilde{A}_1(z_0) = \{ (2\beta_0 A + A_1)X_r + A_2 X'_r; 2(Az_0 + f) \},$$

$$\tilde{\ell}_1(z_0(\cdot, c_0)) = \{ \ell_1 X_r + \ell_2 X'_r, 2\alpha \}$$

— $(n \times (r+1))$ та $(m \times (r+1))$ -вимірні матриці. За умови $P_{B_0^*} P_{Q_2^*} = 0$ принаймні один із розв'язків задачі (3), (4) визначає операторна система

$$z(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau)c(\varepsilon) + \xi(\tau, \varepsilon), \quad (7)$$

$$\xi(\tau, \varepsilon) = \varepsilon g \left[z(s, \varepsilon), \hat{c}(\varepsilon) \right](\tau),$$

$$\begin{aligned} \hat{c}(\varepsilon) = -B_0^* P_{Q_2^*} \{ \varepsilon \beta^2 \alpha + \ell_1 \xi(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 \xi'(\cdot, \varepsilon) + \\ + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_0)) + J_1(z, z, \varepsilon) + \varepsilon \beta(2 + \varepsilon \beta) \tilde{J}(z, z', \varepsilon) - \\ - \ell K \{ 2\beta Ax + \varepsilon \beta^2(Az + f) + A_1(\tau)\xi + A_2(\tau)\xi' + \\ + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_0)) + R_1(z, z', \varepsilon) + \\ + \varepsilon \beta(2 + \varepsilon \beta) Z(z, z', \varepsilon) \}(\cdot) \}; \end{aligned}$$

тут

$$\begin{aligned} g \left[z(s, \varepsilon), \hat{c}(\varepsilon) \right] := \varepsilon G \left\{ Z(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon) + \right. \\ \left. \beta(2 + \varepsilon \beta)(Az + f + \varepsilon Z(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon)); \right. \\ \left. \tilde{J}(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \times \right. \\ \left. \times (\alpha + \varepsilon \tilde{J}(z_0 + x, z'_0 + x', \varepsilon)) \right\}(\tau). \end{aligned}$$

Метою даної статті є побудова ітераційної техніки за методом Ньютона. Позначимо оператор

$$\Psi \left(\hat{c}(\varepsilon), z(\tau, \varepsilon) \right)(\varepsilon) : C[0, \varepsilon_0] \rightarrow C[0, \varepsilon_0],$$

де

$$\begin{aligned} \Psi \left(\hat{c}(\varepsilon), z(\tau, \varepsilon) \right)(\varepsilon) := \hat{c}(\varepsilon) + B_0^* P_{Q_2^*} \{ \varepsilon \beta^2 \alpha + \\ + \ell_1 \xi(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 \xi'(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_0)) + \\ + J_1(z, z, \varepsilon) + \varepsilon \beta(2 + \varepsilon \beta) \tilde{J}(z, z', \varepsilon) - \\ - \ell K \{ 2\beta Ax + \varepsilon \beta^2(Az + f) + A_1(\tau)\xi + \\ + A_2(\tau)\xi' + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_0)) + R_1(z, z', \varepsilon) + \\ + \varepsilon \beta(2 + \varepsilon \beta) Z(z, z', \varepsilon) \}(\cdot) \}. \end{aligned}$$

Припустимо, що для вектор-функцій

$$z(\tau, \varepsilon) \in C^2[a, b^*], \quad C[0, \varepsilon_0], \quad \|x(\tau, \varepsilon)\| \leq q$$

справджуються нерівності

$$\left\| \Psi \left(\hat{c}_0, z(s, \varepsilon) \right)(\varepsilon) \right\| \leq \mu_1(\varepsilon),$$

$$\left\| \left[\Psi'_\varepsilon \left(\hat{c}_0, z(s, \varepsilon) \right)(\varepsilon) \right]^{-1}(\varepsilon) \right\| \leq \mu_2(\varepsilon),$$

$$\left\| \Psi_{\varepsilon}'' \left(\tilde{z}(\varepsilon), z(s, \varepsilon) \right) (\varepsilon) \right\| \leq \mu_3(\varepsilon).$$

Згідно з теоремою Ньютона [5, с. 680, 682] за умови $P_{B_2^*} P_{Q_2^*} = 0$ та

$$2 \cdot \mu_1(\varepsilon) \cdot \mu_2(\varepsilon) \cdot \mu_3(\varepsilon) < 1$$

для побудови принаймні одного із розв'язків операторної системи (7) застосовна ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_{k+1}(\tau, \varepsilon) &= X_r(\tau) c_{k+1}(\varepsilon) + \varepsilon \cdot g[z_k, \tilde{c}_k(\varepsilon)](\tau), \\ \tilde{c}_{k+1}(\varepsilon) &= \tilde{c}_k(\varepsilon) - \\ &\quad - \left[\frac{\partial \Psi(\tilde{c}_k(\varepsilon), z_k + \varepsilon \cdot g[z_k, \tilde{c}_k(\varepsilon)](\tau))}{\partial \tilde{c}} \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \Psi \left[\tilde{c}_k(\varepsilon), z_k + \varepsilon \cdot g[z_k, \tilde{c}_k(\varepsilon)](\tau) \right](\varepsilon), \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. У критичному

$$P_{Q^*} \neq 0$$

випадку для кожного кореня $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (6) за умови $P_{B_2^*} P_{Q_2^*} = 0$ задача (1) має принаймні один розв'язок

$$z(t, \varepsilon) \in C^2[a, b(\varepsilon)], \quad C[0, \varepsilon_0], \quad b(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z_0(\tau, c_0)$. Для побудови розв'язку задачі (1) у випадку $2 \cdot \mu_1(\varepsilon) \cdot \mu_2(\varepsilon) \cdot \mu_3(\varepsilon) < 1$ застосовна ітераційна схема (8).

Ефективність техніки знаходження розв'язків з використанням методу Ньютона-Канторовича продемонстрована нами на прикладі періодичної задачі для рівнянь Лямбярта та Ван-дер-Поля.

Список використаних джерел

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
2. Boichuk A.A., Chuiko S.M. Autonomous weakly nonlinear boundary-value problems // Differential Equations. 1992. — 28, N 10. — P. 1668 — 1674. (in Russian).
3. Chuiko S.M., Boichuk I.O. An autonomous Noether boundary-value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2009. 12. N 3, P. 405 — 416. (in Russian).
4. Shovkoplyas, T.V. Criterion for solvability of linear boundary-value problem for a second order system // Ukrainian Mathematical Journal, 2000, 52, № 6. — P. 861 — 864. (in Ukrainian).
5. Kantorovich L.V., Akyllov G.P. Functional analysis. — Moscow: Science, 1977. — 744 P. (in Russian).
6. Malkin I.G. Some theory of nonlinear oscillations problem. — Moscow: Gostekhizdat. 1956. — 491 P. (in Russian).

Надійшла до редколегії 19.11.2012

УДК 517.98

Сиротенко А.В.¹, аспірант,**Обмежені та сумовні зі степенем p
розв'язки різницевого рівняння з
цілочисельним аргументом.**

Отримано необхідні і достатні умови, при виконанні яких різницеве рівняння з цілочисельним аргументом має єдиний сумовний зі степенем p (обмежений) розв'язок для довільної сумовної зі степенем p (обмеженої) послідовності із деякого спеціального класу.

Ключові слова: сумовна зі степенем p послідовність, лінійний обмежений оператор, різницеве рівняння.

¹ Національний технічний університет України "Київський Політехнічний Інститут", 03056, м.Київ-56, проспект Перемоги, 37
e-mail: antonsyrotenko86@gmail.com

Syrotenko A.V.¹, Postgraduate Student,**Bounded and p -summable solutions for an
difference equation with integer argument.**

We consider a linear non-homogeneous difference equation of the first order in a complex Banach space. For input p -summable sequences from a particular class, we obtain necessary and sufficient conditions, under which the above equation has a unique p -summable solution.

Key words: p -summable sequence, linear bounded operator, difference equation.

¹ National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 37 Prospect Peremogy, Kiev 03056, Ukraine
e-mail: antonsyrotenko86@gmail.com

Статтю представив академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Нехай B – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$. Зафіксуємо $p \in [1, \infty]$ і покладемо

$$l_p(B) = \left\{ \bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset B \mid \|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

при $p \in [1, \infty)$;

$$l_\infty(B) = \left\{ \bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset B \mid \|\bar{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

$(l_p(B), \|\cdot\|_p)$ – банахів простір з

покоординатними додаванням елементів та множенням на комплексне число.

Нехай A – лінійний обмежений оператор, що діє із B в B . Розглянемо в B різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

в якому $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – задана послідовність елементів з B , $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – шуканий розв'язок.

Відомо (див. наприклад [4]), що при фіксованому $p \in [1, \infty]$ різницеве рівняння (1) має

для довільного $\bar{y} \in l_p(B)$ єдиний розв'язок $\bar{x}$ у просторі $l_p(B)$ (тобто сумовний зі степенем p при $p \in [1, \infty)$ або обмежений при $p = \infty$) тоді і тільки тоді, коли спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з одиничним колом $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

У даній статті досліджується питання щодо існування єдиного розв'язку рівняння (1) у просторі $l_p(B)$ для кожного $\bar{y}$ із деякої спеціальної підмножини простору $l_p(B)$ у випадку, коли умова $\sigma(A) \cap S = \emptyset$ не виконується. Аналогічні результати для різницевого рівнянь з дискретним та неперервним аргументом на півосі отримано в роботах [3, 6].

2. Допоміжні результати.

Зафіксуємо $p \in [1, \infty]$. Нехай D^* – нетривіальний лінійний многовид в банаховому просторі B . У подальшому використовуються наведені нижче твердження.

Лема 1. Припустимо, що різницеве рівняння (1) має для довільного $\bar{y} \in l_p(D^*)$ єдиний розв'язок у просторі $l_p(D^*)$. Нехай оператор

$C: D(C) \subset I_p(D^*) \rightarrow I_p(D^*)$, де
 $D(C) = \{\bar{x} \in I_p(D^*) \mid \bar{x} - \text{єдиний сумовний зі}$
 $\text{степенем } p \text{ (обмежений при } p = \infty) \text{ розв'язок (1)}$
 $\text{при деякому } \bar{y} \in I_p(D^*)\}$,
 $C\bar{x} = \{(C\bar{x})_n = x_{n+1} - Ax_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $x \in D(C)$. Тоді
існує набір лінійних операторів
 $T_n: D^* \rightarrow D^*$, $n \in \mathbb{Z}$, таких що коли $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$
— така фінитна послідовність, що $y_k = \bar{0}$, $|k| > m$,
то

$$C^{-1}\bar{y} = \left\{ (C^{-1}\bar{y})_n = \sum_{k=-m}^n T_{n-k} y_k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тут C^{-1} — арифметичний обернений до оператора C .

Доведення. Зафіксуємо $y \in D^*$ і $k \in \mathbb{Z}$.

Покладемо

$$T_k y := (C^{-1}\bar{y})_k, \quad (2)$$

де

$$\bar{y} = (\dots, \underset{0}{\bar{0}}, y, \bar{0}, \dots). \quad (3)$$

Оскільки оператор C^{-1} — арифметичний обернений до оператора C , то виконуються такі рівності:

$$T_k y = AT_0 y + y, \quad T_{n+1} y = AT_n y, \quad n \neq 0. \quad (4)$$

Неважко переконатися, що оператори T_k , $k \in \mathbb{Z}$ — лінійні.

Перевіримо виконання умови для фінитних послідовностей. Зафіксуємо $y \in D^*$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ і розглянемо $\bar{y}(k) = (\dots, \underset{k}{\bar{0}}, y, \bar{0}, \dots)$.

Для цього $\bar{y}(k)$ різницеve рівняння (1) записується у вигляді

$$x_{k+1} = Ax_k + y, \quad x_{n+1} = Ax_n, \quad n \neq k. \quad (5)$$

Тому, внаслідок (4),

$$x_n = T_{n-k} y, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Залишилось скористатися лінійністю оператора C . Лемі 1 доведено.

Лема 2. Нехай I — одиничний, O — нульовий оператори в D^* . Покладемо $P := I - T_1$ і позначимо через $\text{Ker } P$ та $R(P)$ відповідно ядро і образ оператора P . Тоді справедливі наступні твердження:

$$1) \quad T_1 - AT_0 = I, \quad T_{k+1} - AT_k = O, \quad k \neq 0;$$

$$2) \quad T_n = A^{n-1}(I - P), \quad n \geq 1, \quad -P = A^{-n+1}T_n, \quad n < 0;$$

3) якщо $\{x_n, n \geq 1\} \subset D^*$ така, що $x_{n+1} = Ax_n$, $n \geq 1$, а також $(\dots, \bar{0}, x_1, x_2, \dots) \in I_p(D^*)$, то $Px_1 = \bar{0}$;

4) $P = P^2$, а також для кожного $y \in \text{Ker } P$: $PAy = APy$;

5) якщо $(\dots, x_{-n}, \dots, x_0, x_1, \bar{0}, \dots) \in I_p(D^*)$ і при $n \leq 1$: $x_n = Ax_{n-1}$, то $Ax_1 = PAx_1$;

6) якщо $y \in R(P)$, $x_n := T_n y$, $n \in \mathbb{Z}$, то $x_0 \in R(P)$, $x_1 = \bar{0}$;

$$7) \quad R(P) = A(R(P));$$

$$8) \quad \text{якщо } y \in A(R(P)), \quad Ay = \bar{0}, \text{ то } y = \bar{0};$$

9) A діє бієктивно із $R(P)$ в $R(P)$, а отже на $R(P)$ існує арифметичний обернений A^{-1} до A , звідки $T_n = -A^{-n-1}P$, $n \leq 0$;

$$10) \text{ на } D^* \text{ виконується } AP = PA.$$

Твердження лемі 2 послідовно перевіряються за допомогою міркувань, аналогічних до використаних при доведенні теореми 7.6.5 з [2, с. 251].

Лема 3. Покладемо $D_- = \text{Ker } P$, $D_+ = R(P)$. Тоді D_-, D_+ — інваріантні лінійні многовиди для A , а також D^* є прямою сумою D_- та D_+ .

Доведення лемі 3 випливає з тверджень 1), 2), 9) лемі 2.

Лема 4. Зафіксуємо $y \in D_-$. Тоді відповідний до $(\dots, \underset{0}{\bar{0}}, y, \bar{0}, \dots)$ сумовний зі степенем p розв'язок різницевого рівняння (1) має такі координати: $x_n = \bar{0}$, $n \leq 0$, $x_n = A^{n-1}y$, $n \geq 1$.

Лема 5. Зафіксуємо $y \in D_+$. Звуження A , оператора A на D_+ має алгебраїчний обернений оператор A_+^{-1} , а також відповідний до $(\dots, \underset{0}{\bar{0}}, y, \bar{0}, \dots)$ сумовний зі степенем p розв'язок різницевого рівняння (1) має такі координати:

$x_n = \bar{0}$, $n \geq 1$, $x_n = -A_+^{n-1}y$, $n \leq 0$.

Твердження лем 4 і 5 випливають з тверджень 1), 2), 9) лемі 2.

Лема 6. Нехай U — лінійний многовид, що складається з усіх таких $u \in B$, що для кожного $u \in U$ розв'язок різницевого рівняння (1), відповідний до $(\dots, \underset{n}{\bar{0}}, u, \bar{0}, \dots)$ єдиний, сумовний зі степенем p і записується у вигляді

$$(\dots, \bar{0}, \bar{0}, \bar{u}, Au, A^2u, \dots).$$

Нехай довільний сумовий зі степенем p послідовності елементів U відповідає єдиний сумовий зі степенем p розв'язок рівняння (1).

Тоді U – інваріантна множина відносно A , U – замкнена, а також для зруження A_u оператора A на U виконується нерівність $r(A_u) < 1$.

Доведення. Тут і надалі будемо наводити доведення для випадку $p \in [1, \infty)$. Для $p = \infty$ міркування аналогічні.

Покажемо, що

$$U = \left\{ u \in B \left| \|u\|_p \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n u\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right. \right\}. \quad (7)$$

Нехай $\|u\|_p < \infty$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_1 = Ax_0 + u, \quad x_{n+1} = Ax_n, \quad n \geq 0.$$

Тоді $(\dots, \bar{0}, \bar{0}, \bar{u}, Au, A^2u, \dots)$ – його сумовий

зі степенем p розв'язок, який є єдиним таким, що відповідає $(\dots, \bar{0}, \bar{u}, \bar{u}, \bar{0}, \dots)$.

Отже права частина (7) міститься в U .

В інший бік включення очевидне.

З (7) і теореми 1 [3, с. 41] випливає, що виконується твердження леми 6.

Далі використовується така умова.

Умова 1. Якщо послідовностям $(\dots, \bar{0}, \bar{u}, \bar{u}, \bar{0}, \dots)$ та $(\dots, \bar{0}, \bar{u}_m, \bar{0}, \dots)$, $m \geq 1$,

відповідають сумові зі степенем p розв'язки різницевого рівняння (1) $\bar{x}$ та $\bar{x}_m$, $m \geq 1$ відповідно, а також $\|u_m - u\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, то $\|\bar{x}_m - \bar{x}\|_p \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Лема 7. Нехай W – лінійний многовид, що складається з усіх $w \in B$ таких, що для довільного $w \in W$ розв'язок різницевого рівняння (1), відповідний до $(\dots, \bar{0}, w, \bar{0}, \dots)$, єдиний

сумовий зі степенем p і записується у вигляді $(\dots, x_{-1}, x_0, \bar{0}, \dots)$, причому

$$A^n x_{-n+1} = -w, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Тоді: 1) W – інваріантна відносно A множина;

2) якщо виконується умова 1 та зруження A_w оператора A на W є біскцією, то W – замкнена множина.

Доведення. Для доведення інваріантності W досить подіяти на (8) оператором A . Дістанемо $A^n(Ax_{-n+1}) = -Aw$, $n \geq 1$, тобто $(\dots, Ax_{-1}, Ax_0, \bar{0}, \dots)$ – розв'язок різницевого рівняння, що відповідає послідовності $(\dots, \bar{0}, Aw, \bar{0}, \dots)$.

Покажемо, що W – замкнена множина.

Нехай це не так і $\bar{W}$ – замикання множини W . Доведемо спочатку, що множина $\bar{W}$ є інваріантною для оператора A . Зафіксуємо $x \in \bar{W}$. Тоді існує така послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset W$, що $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$, а отже, $Ax_n \rightarrow Ax$, $n \rightarrow \infty$, причому $\{Ax_n, n \geq 1\} \subset W$.

Тому $Ax \in \bar{W}$. Покажемо, що $A: \bar{W} \rightarrow \bar{W}$ – біскція. Якщо ні, тобто A – біскція на W і не є біскцією на $\bar{W}$, то існують різні $a, b \in \bar{W}$: $Aa = Ab$. Звідси існує $u \neq \bar{0}$, $u \in \bar{W} \setminus W$: $Au = \bar{0}$. Але тоді $(u, Au, A^2u, \dots)$ сумовна зі степенем p послідовність, тому із твердження 1) леми 2 випливає, що $u \in U$.

Оскільки $u \in \bar{W} \setminus W$, то існує послідовність $\{w_m, m \geq 1\} \subset W$ така що $w_m \rightarrow u$, $m \rightarrow \infty$. Нехай кожний із послідовностей $(\dots, \bar{0}, w_m, \bar{0}, \dots)$ відповідає сумовий зі степенем p розв'язок різницевого рівняння (1) $(\dots, x_{-1}(m), x_0(m), \bar{0}, \dots)$.

Тоді за умовою 1 $(\dots, x_{-1}(m), x_0(m), \bar{0}, \dots) \rightarrow (\dots, \bar{0}, \bar{0}, u, \bar{0}, \dots)$ в $l_p(B)$. Звідси $u = \bar{0}$.

Тому A – неперервна біскція на $\bar{W}$. Отже, за теоремою Банаха про обернений оператор існує A^{-1} – неперервний на $\bar{W}$. Тоді з (8) випливає, що для довільного $w \in W$ відповідний до $(\dots, \bar{0}, w, \bar{0}, \dots)$ розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$\bar{w} = (\dots, -A^{-2}w, -A^{-1}w, \bar{0}, \dots). \quad (9)$$

При цьому (1) на просторі $\bar{W}$ записується у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n, & n \neq 0, \\ x_1 = Ax_0 + w. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_n = A^{-1}x_{n+1}, n \neq 0, \\ x_0 = A^{-1}x_1 - A^{-1}w. \end{cases}$$

Виконавши заміну $x_n = y_{-n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$,
отримасмо

$$\begin{cases} y_1 = A^{-1}y_0 - A^{-1}w, \\ y_{-n+1} = A^{-1}y_{-n}, n \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Також

$$W = \left\{ w \in \bar{W} \left| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|A^{-n}w\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right. \right\},$$

тому до системи (10) можна застосувати теорему 1 із [3], згідно з якою множина W є замкнутою в $\bar{W}$, тобто співпадає з $\bar{W}$, а отже, W – замкнена в B множина, а також для A_w виконується $r(A_w^{-1}) < 1$. Лему 7 доведено.

Лема 8. $W \cap U = \{\bar{0}\}$.

Доведення леми 8 очевидне.

Лема 9. Припустимо, що виконується умова (1). Тоді пряма сума $U + W$ лінійних многовидів U і W є замкнутою множиною у тому і тільки у тому випадку, коли множини U і W замкнені.

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{u_m, m \geq 1\}$ – фундаментальна в U . Внаслідок замкненості $U + W$ існує $x \in (U + W)$ такий, що $u_m \rightarrow x, m \rightarrow \infty$. Елемент x зображується у вигляді $x = u + v$, де $u \in U, v \in W$. Також послідовність $\{u_m - u, m \geq 1\} \subset W$ збігається до $w \in W$, а отже, за умовою 1, у просторі $l_p(B)$

$$\begin{aligned} & (... , \bar{0}, \bar{0}, (u_m - u), A(u_m - u), ...) \rightarrow \\ & (... , \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, ...) \rightarrow \bar{0}, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $w = \bar{0}$, а отже, U – замкнена множина.

Замкненість W перевіряється аналогічно.Достатність. Нехай U, W – замкнені.Покажемо, що $U + W$ – замкнена.

Розглянемо оператор $P: U + W \rightarrow U$, що діє за правилом $P(u + w) = u, (u + w) \in U + W$. P – лінійний. Тому для доведення неперервності P

достатньо показати, що якщо $u_n + w_n \rightarrow \bar{0}$, то $u_n \rightarrow \bar{0}, n \rightarrow \infty$.

Нехай це не так. Тоді існують $\varepsilon_n > 0$ і підпослідовність $\{u_{n_k}, k \geq 1\}$ така, що для кожного $k \geq 1$: $\|u_{n_k}\| \geq \varepsilon_n$, причому $u_{n_k} + w_{n_k} \rightarrow \bar{0}, k \rightarrow \infty$.

Тоді $\inf_{u \in W} \|u_{n_k} + z\| = \rho(u_{n_k}, W) \rightarrow 0$. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує k_0 , що для всіх $k \geq k_0$

$$\rho(u_{n_k}, W) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ а отже, при } m, k \geq k_0:$$

$$\rho(u_{n_k}, u_{n_m}) \leq \rho(u_{n_k}, W) + \rho(u_{n_m}, W) < \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність $\{u_{n_k}, k \geq 1\}$ фундаментальна. А оскільки множина U замкнена, то існує $u \in U$ таке, що $u_{n_k} \rightarrow u, k \rightarrow \infty$. З вище наведених міркувань випливає, що $u \neq \bar{0}$, але $\rho(u_{n_k}, W) \rightarrow \rho(u, W)$, отже $\rho(u, W) = 0$, тобто u – гранична точка W , що суперечить зробленому припущенню. Отже, P – неперервний.

Аналогічно $Q: U + W \rightarrow W, Q(u + w) = w$ – неперервний. Тому із фундаментальності послідовності $\{u_n + w_n, n \geq 1\}$ випливає фундаментальність послідовностей $\{u_n, n \geq 1\}$ і $\{w_n, n \geq 1\}$. Скориставшись замкненістю U та W , отримаємо $u_n \rightarrow u \in U, w_n \rightarrow w \in W, n \rightarrow \infty$. Тоді $(u_n + w_n) \rightarrow (u + w) \in U + W, n \rightarrow \infty$. Лему 9 доведено.

Розглянемо тепер множину D , яка містить всі $u \in B$, для яких різницеве рівняння

$$x_1 = Ax_0 + u, x_{n+1} = Ax_n, n \neq 0, \quad (11)$$

має єдиний розв'язок $\bar{x}$ у просторі $l_p(B)$.

Лема 10. Нехай $D \neq \emptyset$. Тоді D – лінійний многовид і D – інваріантна відносно A множина.

Доведення. Незавжди переконатися, що D – лінійний многовид.

Покажемо, що для кожного $u \in D, Au \in D$.

Справді, оскільки $u \in D$, то для координат відповідного до u розв'язку $\bar{x}$ різницевого рівняння (11) виконуються рівності (11). Поділяючи на обидві частини цих рівностей оператором A , дістанемо

$$Ax_1 = A(Ax_0) + Au, Ax_{n+1} = A(Ax_n), n \neq 0,$$

а отже, $Au \in D_*$. Лему 10 доведено.

3. Основний результат.

Із попередніх лем випливає, що виконуються така теорема.

Теорема 1. Нехай $D_* \neq \emptyset$, а також:

1) якщо $\{u_m, m \geq 1\} \subset D_*$, $u \in D_*$ і $\|u_m - u\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, то для відповідних їм єдиних розв'язків $\bar{x}(m), m \geq 1, \bar{x}$ виконуються $\|\bar{x}(m) - \bar{x}\|_p \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$;

2) для довільної послідовності $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset D_*$ різниці рівняння (1) має єдиний сумовий зі степенем p розв'язок $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset D_*$.

Тоді D_* – інваріантний відносно A підпростір в B і для збуження A_* оператора A на D_* виконуються

$$\sigma(A_*) \cap \{z \mid |z| = 1\} = \emptyset. \quad (12)$$

Наступна теорема показує, що справджується і в певному сенсі обернене до теореми 1 твердження.

Список використаних джерел

1. A.Ya. Dorogovtsev. Periodic and stationary conditions of infinite-dimensional determinated and stochastic dynamical systems. – Kyiv: Vishcha Shkola, 1992. – 320 p. (in Russian).
2. D. Henry. Geometric theory of semilinear parabolic equations. – Moscow: Mir, 1985. – 376 p. (in Russian).
3. O.V.Viatchaninov. Summable with p -th power recurrent sequences in Banach space // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2010. – №2. – P. 40-44. (in Ukrainian).

Теорема 2. Нехай $D_* \neq \emptyset$ – інваріантний відносно A підпростір в B і виконуються (12). Тоді виконуються умови 1), 2) теореми 1.

Доведення. Нехай виконано (12). Тоді можна розщепити оператор A_* так, як це показано в [1, с. 8].

Для заданої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset D_*$ такої, що $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(D_*)$, покладемо

$$x_n = \sum_{j=0}^{\infty} (A_* P_*)^j y_{n-1-j} - \sum_{j=-\infty}^{-1} (A_* P_*)^j y_{n-1-j}, n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(D_*)$, а ряди

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|(A_* P_*)^j\|^p \quad \text{і} \quad \sum_{j=-\infty}^{-1} \|(A_* P_*)^j\|^p$$

внаслідок умови (12), то $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(D_*)$ відповідним до $\bar{y}$ сумовим зі степенем p розв'язком рівняння (1).

Єдиність розв'язку випливає з єдиності розв'язку однорідного рівняння. Таким чином, умова 2) теореми 6 виконуються. Виконання умови 1) випливає з (11) і того, що існує $(A_* P_*)^{-1} \in L(l_p(D_*))$. Теорему 2 доведено.

4. M.F.Gorodnii. l_p - solutions of a difference equation in a Banach space. // Ukrainian Mathematical Journal. – 2003. – Vol. 55, №3 – P. 425-430 (in Ukrainian).
5. M.F.Gorodnii, O.V.Viatchaninov. On the limitations of a recurrent sequence in a Banach space. // Ukrainian Mathematical Journal. – 2009. – Vol. 61, №6 – P.1293-1296. (in Ukrainian).
6. M.F.Gorodnii, A.V.Syrotenko. On integrable with p -th power solutions of difference equations with continuous argument in a Banach space. // Nonlinear Oscillations – 2012. – Vol. 15, №3 – P. 337-343. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 26.11.12

УДК 539.3

Хотенко О.О.¹, м.н.с.**Аналіз впливу початкової амплітуди на
затухання нелінійної пружної хвилі Релея**

Вивчається плоска задача про поширення квадратично нелінійної пружної хвилі Релея в класичній постановці. Визначальні співвідношення відповідають нелінійному потенціалу Мурнагана.

Ключові слова: плоска нелінійна пружна задача, модель Мурнагана, нелінійна хвиля Релея, квадратично нелінійні хвильові рівняння, генерація другої гармоніки.

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: h.khotenko@gmail.com

О.О. Khotenko¹, junior research scientist**Analysis of the effect of the initial amplitude on
the nonlinear elastic Rayleigh wave attenuation**

The plane problem of the quadratically nonlinear elastic Rayleigh wave propagation in classical statement is studied. Constitutive relations correspond to the nonlinear Murnaghan potential.

Keywords: nonlinear elastic two-dimensional plane problem, Murnaghan model, nonlinear Rayleigh wave, quadratically nonlinear wave equations, the second harmonic generation.

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova str., 3
e-mail: h.khotenko@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.Т. Маципура

Вступ

В попередніх публікаціях [1–4] автором були отримані квадратично нелінійні хвильові рівняння для варіантів загальної, геометричної та фізичної нелінійностей для випадків нехтування та врахування нелінійного перехресного впливу переміщень та потенціалів. Наближені розв'язки рівнянь отримані за допомогою методу послідовних наближень. Досліджена роль граничних умов в нелінійному аналізі хвилі Релея. В даній роботі буде проведений числовий аналіз впливу початкової амплітуди, частоти та параметрів пружного матеріалу на затухання нелінійної хвилі Релея, тобто, залежність зміщень u_1 та u_2 від координати x_1 .

Аналіз результатів

Основне дослідження проводилось для 9 матеріалів: алюміній, вольфрам, мідь, молибден, сталь, сталь Necla17, полістирол, оргскло та плавлений кварц для чотирьох значень початкових амплітуд: $1 \cdot 10^{-8}$, $5 \cdot 10^{-8}$, $1 \cdot 10^{-7}$, м та на дев'яти частотах: 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 кГц, а також було проведено ряд додаткових розрахунків для визначення частот, на яких починають проявлятися нелінійні ефекти. Параметри досліджених матеріалів (густина,

пружні сталі другого порядку, Ляме, та третього порядку, Мурнагана) наведені в Табл. 1.

Було виявлено наступні особливості. По-перше, для кожного значення початкової амплітуди відношення амплітуд u_2/u_1 при зростанні частоти є від'ємним, і повільно спадає. Для різних значень початкової амплітуди утворюється сімейство кривих, наближених до прямих, що лежать тим ближче до осі, чим більше значення початкової амплітуди. По-друге, зміна вигляду графіків при зростанні частоти однакова для усіх значень початкових амплітуд, однак ефекти, що в них проявляються, в залежності від матеріалу та початкової амплітуди проявляються на відмінних між собою частотах.

Коротко охарактеризуємо ці ефекти. При малих значеннях частоти (для кожного матеріалу та початкової амплітуди – своє значення), вплив другої гармоніки майже відсутній, тобто, графіки описують експоненціальне затухання, причому, зміщення u_1 початково має від'ємні значення, а u_2 – додатні, та майже рівні між собою за абсолютними значеннями. На Рис. 1 зображено графік для алюмінію, $A_1 = 1 \cdot 10^{-8}$ м, $f = 400$ кГц, Рис. 2 – для міді, $A_1 = 5 \cdot 10^{-8}$ м, $f = 500$ кГц, Рис. 3 – для вольфраму, $A_1 = 1 \cdot 10^{-7}$ м, $f = 400$ кГц.

Таблиця 1

Фізико-механічні параметри досліджуваних матеріалів

Матеріали	$\rho, 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\lambda, 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\mu, 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$A, 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$	$B, 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$	$C, 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$
Алюміній	2,7	5,2	2,7	-0,65	-2,05	-3,7
Вольфрам	18,9	7,5	7,3	-1,08	-1,43	-9,08
Мідь	8,93	10,7	4,8	-2,8	-1,72	-2,4
Молибден	10,2	15,7	1,1	-0,26	-2,83	3,72
Сталь	7,8	9,4	7,9	-3,25	-3,1	-8
Сталь Necla 17	8,72	11	8,2	-6,68	-2,61	-0,67
Полістирол	1,05	0,369	0,114	-0,108	-0,079	-0,098
Оргскло	1,16	3,9	11,9	0,19	-0,07	-0,04
Плавлений кварц	2,3	1,6	3,1	-0,044	0,9,3	0,27

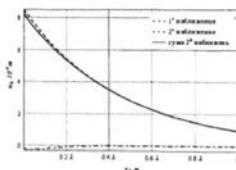
Рис. 1 Залежність зміщення u_3 від координати x_3 .

Рис. 4 – 5 – полістиролу, $A_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, $f = 300 \text{ кГц}$. Рис. 6 – сталі Necla17, $A_1 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $f = 500 \text{ кГц}$.

При збільшенні частоти, вплив другої гармоніки зростає, на графіку з'являється «вигин», що продовжує зростати до певного значення частоти, на яких починає з'являтися такий ефект наведені в Табл. 2 в стовпцях із заголовками «вигин».

Зі збільшенням частоти такий вигин продовжує зростати, а сама амплітуда до певного значення частоти постійно згасає. При деякому значенні частоти на графіках для усіх досліджуваних матеріалів для u_3 наступає момент, при якому з'являються три особливі точки: початкова точка 1; точка 2, в якій згасання амплітуди закінчується; точка 3, що характеризується тим, що амплітуда між точками 2 та 3 трохи наростає, а після точки 3 – асимптотично згасає прямуючи до нуля (Рис. 2 – 5). При зростанні частоти значення амплітуди для усіх матеріалів, окрім молибдену, в точках 1 та 3 на

графіках для u_3 стають рівними (Рис. 3). Ця частота в таблиці 1 для кожного матеріалу та початкової амплітуди наведена в стовпчику із заголовком «перетин». Після цього, при подальшому підвищенні частоти, амплітуда в точці 1 стає меншою, ніж в точці 3.

Як видно з Табл. 2, для усіх матеріалів ефект перетину присутній лише для залежності $u_3(x_3)$ і відсутній для $u_1(x_3)$. Виняток складає лише молибден, для якого цей ефект не проявляється для жодної з залежностей.

При подальшому збільшенні частоти наступає момент, коли графік торкається осі Ox_3 в точці 2 (Рис. 4) – в Табл. 2 ці значення частоти для кожного матеріалу і відповідної початкової амплітуди наведені в стовпчиках під заголовком «Зміна знаку», після чого відбувається зміна знаку між точками перетину осі графіком (точки 2 і 4 Рис. 5, та точки 1 і 4 Рис. 6).

Формально, форма графіку після перетину осі не відрізняється від форми графіку перед перетином, але, враховуючи знак зміщення, відбувається така трансформація: з'являються нові особливі точки 1 – 5 (Рис. 6 – точки 1, 3–5) такі що від точки 1 до точки 2 амплітуда згасає до нуля, від точки 2 до точки 3 (Рис. 6 – від точки 1 до точки 3) зростає з протилежним знаком, далі від точки 3 до точки 4 знову згасає до нуля, від точки 4 до точки 5 зростає, після точки 5 асимптотично згасає прямуючи до нуля.

При значному збільшенні амплітуди та/або частоти досягається значне зростання піку вигину в точці 3 відносно решти хвилі (Рис. 6).

Для усіх матеріалів зберігається така залежність: чим вища початкова амплітуда, тим нижче частота, при якій спостерігається кожен

Таблиця 2

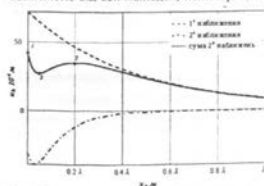
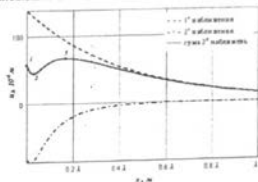
Частоти, на яких проявляються ефекти

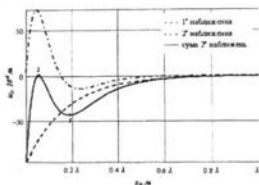
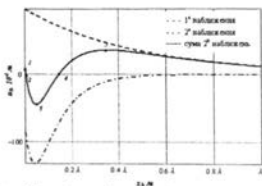
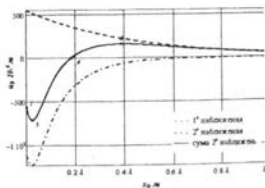
Амплітуда		Вигин	Перегин	Зміна знаку	Вигин	Перегин	Зміна знаку	Вигин	Перегин	Зміна знаку
		Алюміній			Вольфрам			Мідь		
$1 \cdot 10^{-8}$, м	$u_1(x_2)$	1100	—	2530	800	—	1900	750	—	1750
	$u_2(x_2)$	800	1800	2100	700	1150	1550	650	1300	1450
	$u_3(x_2)$	500	—	1130	400	—	850	350	—	780
$5 \cdot 10^{-8}$, м	$u_1(x_2)$	500	850	940	300	530	700	300	560	650
	$u_2(x_2)$	350	—	800	300	—	600	250	—	560
	$u_3(x_2)$	300	600	660	250	370	490	200	400	460
$1 \cdot 10^{-7}$, м	$u_1(x_2)$	150	—	360	120	—	270	100	—	250
	$u_2(x_2)$	140	250	295	100	170	220	80	180	205
	$u_3(x_2)$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$5 \cdot 10^{-7}$, м	$u_1(x_2)$	100	—	240	1100	—	3000	1100	—	2800
	$u_2(x_2)$	70	—	180	1000	1850	2450	850	1750	2300
	$u_3(x_2)$	50	—	106	550	—	1350	500	—	1260
$5 \cdot 10^{-8}$, м	$u_1(x_2)$	30	—	81	550	850	1100	500	800	1030
	$u_2(x_2)$	30	—	76	350	—	950	350	—	890
	$u_3(x_2)$	19	—	57	350	600	780	300	600	730
$1 \cdot 10^{-7}$, м	$u_1(x_2)$	16	—	34	150	—	390	200	—	395
	$u_2(x_2)$	10	—	26	150	200	325	150	250	325
	$u_3(x_2)$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$5 \cdot 10^{-7}$, м	$u_1(x_2)$	250	—	670	4500	—	11600	1600	—	4050
	$u_2(x_2)$	200	540	540	3600	5900	9000	1500	2100	3200
	$u_3(x_2)$	120	—	300	2300	—	5200	700	—	1800
$1 \cdot 10^{-7}$, м	$u_1(x_2)$	110	245	245	2000	2600	4000	600	1000	1430
	$u_2(x_2)$	80	—	211	1600	—	3700	500	—	1280
	$u_3(x_2)$	70	160	172	1200	1900	2850	400	700	1010
$5 \cdot 10^{-7}$, м	$u_1(x_2)$	35	—	95	600	—	1650	220	—	570
	$u_2(x_2)$	25	77	77	500	800	1270	200	300	450
	$u_3(x_2)$	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ефект. Зміна пружних властивостей матеріалу, має наслідком зміну частоти, на яких наступає ефект.

Якщо за даними Табл. 2 побудувати графік залежності частоти від початкової амплітуди, то в результаті отримаємо сімейство кривих (за віддаленістю від осі: молібден; полістирол; мідь;

вольфрам; алюміній/сталь/сталь Hecla17, які майже збігаються; плаваний кварц; оргскло), які повторюючи характер одна одної віддаляються від осі та «розтягуються» за амплітудою. Оргскло найбільш віддалене від усіх інших та за амплітудою майже в три рази перевищує найбільший з них.

Рис. 2. Залежність зміщення u_2 від координати x_2 .Рис. 3. Залежність зміщення u_2 від координати x_2 .

Рис. 4. Залежність зміщення u_3 від координати x_3 .Рис. 5. Залежність зміщення u_3 від координати x_3 .Рис. 6. Залежність зміщення u_3 від координати x_3 .

Висновки

Таким чином, основний нелінійний ефект при затуханні пружної поверхневої хвилі полягає в тому, що характерна для лінійної хвилі Релея експоненціальна залежність вертикального зміщення від відстані від поверхні поширення значно ускладнюється і в результаті експоненціальна крива трансформується в криві, для яких властиві вигин, перегин та зміна знаку.

Список використаних джерел

1. Rushchitsky J.J., Khotenko O.O. Approximate solutions of nonlinear wave equations describing elastic surface Rayleigh waves / J.J. Rushchitsky, O.O. Khotenko // *Dopovidi NAN Ukrainy*. – 2012. – №1. – P. 64 – 69. (in Ukrainian)
2. Khotenko E.A. Numerical analysis of nonlinear elastic Rayleigh wave (first and second approximation). / E.A. Khotenko // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – 48, N 6. – P.114 – 123.
3. Rushchitsky J.J., Khotenko E.A. On Rayleigh Wave in Quadratically Nonlinear Elastic Half-Space (Murnaghan Model) / J.J. Rushchitsky, E.A. Khotenko // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – 47, N 3. – P. 268 – 275.
4. Rushchitsky J.J., Khotenko E.A. On Role of Boundary Conditions in Nonlinear Analysis of the Rayleigh Wave / J.J. Rushchitsky, E.A. Khotenko // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – 48, N 3. – P. 305 – 318.

Надійшла до редколегії 20.11.12

УДК 517.9

Яременко М.І.¹, к.ф.-м.н.**Властивості строго локальних генераторів
напівгрупи нелінійних операторів стиску в
просторах Лебега**

Досліджені властивості строго локальних генераторів нелінійних напівгруп стиску. Доведено теорему про однозначність деякого відображення, що асоційоване з генератором напівгрупи.

Ключові слова: напівгрупа, дисипативність, локальний генератор, фільтр.

¹ ММЦ НАН України, Київ 4, вул.
Терещенківська, 3.

*E-mail: math.kiev@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., М. О. Перестюк

1. Вступ. У даній роботі досліджені властивості строго локальних генераторів напівгрупи нелінійних операторів стиску в просторах $L^p(R^1, d^1x)$, $p > 2$ та розширення таких генераторів. Доведено теорему про однозначність деякого відображення, що асоційоване з генератором напівгрупи [2, 5].

2. Попередні відомості. Означення 1.

Відображення $\tilde{A}$ називається розширенням відображення A , якщо

$$\tilde{A}: C_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t] \ni u \rightarrow$$

$$\{v \in L_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t]: \exists u_n \in D(A) \subset C_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t], n \in N$$

$$v_n \in Au_n, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u, \sigma - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v\}, \text{ де}$$

$\sigma = \sigma(L_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t], C_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t])$ – σ -слабка топологія в $L_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t]$ відносно $C_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t]$.

Означення 2. Елемент $u \in C_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t_0]$ називається слабким розв'язком узагальненого рівняння

$$\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t), u(t) \in L^p(R^1, d^1x), t \in [0, t_0], \quad (1)$$

якщо існує послідовність абсолютно неперервних розв'язків $u_n, n \in N$, таких, що

N.I.Yaremenko¹, Ph.D**Properties of infinitesimal generator semi-group of contraction in Lebesgue spaces**

Properties of infinitesimal generator semi-group of contraction in Lebesgue spaces are investigated. Theorem about uniqueness one operator that associated with generator of semi-group are proved.

Key Words: semi-group, dissipative, infinitesimal generator, filter.

¹ IMC NAS of Ukraine, Kyiv 4,
Tereshchenkivska st., 3.

$$\frac{d}{dt}u_n(t) \in \tilde{A}u_n(t), n \in N, \text{ майже при всіх } t \in [0, t_0] \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in C_{L^p(R^1, d^1x)}[0, t_0].$$

Означення 2. Відображення $A: L^p(R^1, d^1x) \rightarrow L^p(R^1, d^1x)$, взагалі кажучи, багатозначне, називається дисипативним, якщо

$$\|f - g\|, (f - g)\|f - g\|^{p-1} \leq 0$$

$$\forall f \in Af, g \in Ag, \quad (2)$$

де Af, Ag – множина значень відображення A елементів f і g відповідно.

Якщо A – однозначний оператор, то умова (2) набуває вигляду

$$\|Af - Ag\|, (f - g)\|f - g\|^{p-1} \leq 0$$

$$\forall f, g \in L^p(R^1, d^1x).$$

Під відображенням $A_*: L^p(R^1, d^1x) \rightarrow L^p(R^1, d^1x)$ ми розуміємо наступне відображення:

$$A_*f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h f - f}{h}, f \in L^p(R^1, d^1x). \quad (3)$$

яке називається строго інфінітезимальним генератором.

Границя в (3) розуміється в сенсі топології, що породжена нормою простору $L^p(R^1, d^1x)$. Звідси випливає, що не завжди має місце властивість $T_h f \in D(A_*) \forall f \in D(A_*)$.

Означення 3.

Відображення

$$A_h : L^p(R', d'x) \rightarrow L^p(R', d'x),$$

де

За визначенням умова $q - A_h q = f$, де $q \in L^p(R', d'x)$, еквівалентна рівності

$$A_h f = w - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h f - f}{h}, \quad f \in L^p(R', d'x) \quad (4)$$

називається ϕ -локальним генератором нелінійної напівгрупи $T_t, t \geq 0$, якщо $\phi = \{\varphi\}$ – максимальний фільтр множин $\varphi \subset (0, \infty)$, що збігається до нуля, за умови, що границя в (4) існує в просторі $L^p(R', d'x)$.

В (4) “ $w - \lim$ ” розуміємо як границю в сенсі слабкої топології.

3. Основний результат. Теорема (про властивості оператора A_h). Якщо A_h – строго локальний генератор напівгрупи T_t , то A_h – дисипативний оператор, який має таке дисипативне розширення A , що відображення $(I - A)^{-1}$ однозначне і неперервне на $L^p(R', d'x)$.

Доведення. Введемо множину відображень: $A_h = \frac{T_h - I}{h}$, де $h > 0$. Оскільки відображення A_h однозначне, то для будь-яких $\{f, q\} \subset L^p(R', d'x)$, можемо записати $\langle A_h f - A_h q, (f - q) | f - q \rangle^{p-2} \leq 0$. Далі внаслідок однозначності A_h можемо використати теорію однозначних дисипативних операторів в $L^p(R', d'x)$ робимо висновок про неперервність відображення $(I - \lambda A_h)^{-1}$ доведено для випадку $\lambda > 0$.

Зафіксуємо $\lambda > 0$ і розглянемо відображення $(I - \lambda A_h)^{-1}$. Для будь-яких $f, q \in R((I - \lambda A_h))$. Тоді

$$\langle (I - \lambda A_h) f - (I - \lambda A_h) q, (f - q) | f - q \rangle^{p-2} \geq \|f - q\|^p - \langle A_h f - A_h q, (f - q) | f - q \rangle^{p-2} \geq \|f - q\|^p$$

$$\text{і } \|(I - \lambda A_h)^{-1} f - (I - \lambda A_h)^{-1} q\| \leq \|f - q\|.$$

Отже

$$\|(I - \lambda A_h)^{-1} f - (I - \lambda A_h)^{-1} q\| \leq \|f - q\|, \quad (5)$$

тобто неперервність

Визначимо відображення

$$E: \varphi \rightarrow \frac{h}{1+h} f + \frac{1}{1+h} T_h \varphi.$$

Очевидно,

$$\|E\varphi - E\psi\| \leq \frac{1}{1+h} \|T_h \varphi - T_h \psi\| \leq \frac{1}{1+h} \|\varphi - \psi\|.$$

Тоді на підставі принципу стискаючих відображень можемо стверджувати, що рівняння $q = E q$ має розв'язок.

Отже ми одержали, що оператор $(I - \lambda A_h)^{-1}$ визначений на $L^p(R', d'x)$.

Визначимо, взагалі кажучи, неоднозначне відображення A наступним чином:

$$A q =$$

$$\{q - f : f \in L^p(R', d'x), q = w - \lim_{h \rightarrow 0} (I - A_h)^{-1} f\}.$$

Дослідимо властивості оператора A . Нехай $q \in D(A_h)$. Тоді існує $f = q - \lim_{h \rightarrow 0} A_h q$.

Покладемо $q_h = (I - A_h)^{-1} f$, $f_h = q - A_h q$. Тоді $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\| = 0$. Використовуючи (5) і теорему “про проміжну границю”, маємо $\lim_{h \rightarrow 0} \|q_h - q\| = 0$ або $\lim_{h \rightarrow 0} (I - A_h)^{-1} f = q$ при $q \in D(A_h)$. Отже

$$f = q - A_h q. \quad (6)$$

За припущенням $D(A_h)$ не порожня множина, тобто існує елемент $q_h \in D(A_h)$, для якого $f_h = q_h - A_h q_h$.

Для довільного елементу $f \in L^p(R', d'x)$ виконується нерівність

$$\|(I - A_h)^{-1} f - (I - A_h)^{-1} f_h\| \leq \|f - f_h\|,$$

отже множина $\{(I - A_h)^{-1} f : h \in (0, \gamma)\}$ обмежена в $L^p(R', d'x)$. Це означає її компактність в слабкій топології. Отже можемо стверджувати, що існує границя

$$q = w - \lim_{h \rightarrow 0} (I - A_h)^{-1} f, \quad \text{де } \phi = \{\varphi\} - \text{максимальний фільтр множин } \varphi \subset (0, \infty), \text{ що збігаються до } 0.$$

Оскільки $(I - A)^{-1} f = w - \lim_{h \rightarrow 0} (I - A_h)^{-1} f$, то оператор $(I - A)^{-1}$ визначено на просторі $L^p(R', d'x)$ і

$\Lambda_* f \in \mathcal{A}$ при $f \in D(\Lambda_*)$. Ця властивість є наслідком (6).

Таким чином доведено, що оператор Λ є розширенням оператора Λ_* .

Покажемо тепер дисипативність оператора Λ . Для цього візьмемо елементи $q_1, q_2 \in D(\Lambda)$ і виберемо $f_1 \in q_1 - \Lambda q_1$, $f_2 \in q_2 - \Lambda q_2$. Покладемо $q_{1\delta} = (I - \Lambda)^{-1} f_1$, $q_{2\delta} = (I - \Lambda)^{-1} f_2$. Це означає, що виконуються рівності

$$w - \lim_{\delta} q_{1\delta} = q_1 \text{ і } w - \lim_{\delta} q_{2\delta} = q_2.$$

Дисипативність оператора Λ є наслідком довільності елемента $q_1 - f_1 - (q_2 - f_2)$ із множини $\Lambda q_1 - \Lambda q_2$ і нерівності

$$\begin{aligned} & \left\langle q_1 - f_1 - (q_2 - f_2), (q_1 - q_2) \right\rangle |q_1 - q_2|^{p-2} = \\ & = \|q_1 - q_2\|^p - \left\langle f_2 - f_1, (q_1 - q_2) \right\rangle |q_1 - q_2|^{p-2} \leq \\ & \leq \lim_{\delta} \|q_{1\delta} - q_{2\delta}\|^p - \\ & - \lim_{\delta} \left\langle f_1 - f_2, (q_{1\delta} - q_{2\delta}) \right\rangle |q_{1\delta} - q_{2\delta}|^{p-2} = \\ & = \lim_{\delta} \left\langle q_{1\delta} - f_1 - (q_{2\delta} - f_2), (q_{1\delta} - q_{2\delta}) \right\rangle |q_{1\delta} - q_{2\delta}|^{p-2} = \\ & = \lim_{\delta} \left\langle \Lambda_* q_{1\delta} - \Lambda_* q_{2\delta}, (q_{1\delta} - q_{2\delta}) \right\rangle |q_{1\delta} - q_{2\delta}|^{p-2} \leq 0. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

4. Теорема. Нехай T_t – напівгрупа стиску в просторі $L^p(R^1, d^1x)$. Тоді якщо $T_t f \in$ сильно вимірною за $t \in (0, \infty)$ для $f \in L^p(R^1, d^1x)$, то T_t є сильно неперервною за $t \in (0, \infty)$.

Доведення. Запишемо наступні оцінки для $q \in L^p(R^1, d^1x)$ і $t_1, t_2 \in (0, \infty)$. Маммо:

$$\|T_{t_1+t_2} q - q\| = \|T_{t_1} T_{t_2} q - T_{t_1} q + T_{t_1} q - q\| \leq$$

$$\leq \|T_{t_1} T_{t_2} q - T_{t_2} q\| + \|T_{t_2} q - q\| \leq \|T_{t_1} q - q\| + \|T_{t_2} q - q\|$$

оскільки $T_t f$ є обмеженою на компактних підмножинах з $(0, \infty)$ і інтеграл $\int_0^t T_s f ds$ існує при

$$0 < a \leq b < \infty.$$

Для заданого $t > 0$ виберемо a і b так, щоб $0 < a \leq b < t$. Тоді виконується рівність

$$(b-a)T_t f = \int_a^b T_s f ds = \int_a^b T_s T_{t-s} f ds.$$

Для деякого достатньо малого $\delta > 0$ знаходимо

$$(b-a)\|T_{t+\delta} f - T_t f\| \leq \int_a^b \|T_s T_{t+\delta-s} f - T_s T_{t-s} f\| ds \leq$$

$$\int_a^b \|T_{t+\delta-s} f - T_{t-s} f\| ds.$$

З властивості сильної інтегрованості одержуємо

$$\int_a^b \|T_{t+\delta-s} f - T_{t-s} f\| ds \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

тобто

$$\int_a^b \|T_{t+\delta} f - T_t f\| ds \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Теорему доведено.

5. Приклад. При дослідженні еліптичних задач часто виникають оператори які асоціюються з $\Lambda: L^p(R^1, d^1x) \rightarrow L^p(R^1, d^1x)$.

Так за еліптичним рівнянням вигляду

$$\lambda u - d \circ a \circ du + b(x, u, \nabla u) = f, \quad \lambda > 0,$$

де матриця в головній частині еліптичного рівняння обмежена зверху і знизу, а нелінійність є форм обмеженою відносно головної частини еліптичного оператора.

Далі будуватиметься задача Коші для узагальненого параболічного рівняння

$$\frac{d}{dt} u(t) \in \Lambda u(t),$$

$$u(t) \in L^p(R^1, d^1x), \quad t \in [0, t_0], \quad u(0) = u_0.$$

Оператор Λ побудовано спеціальним чином за лівою частиною еліптичного рівняння, а саме: спочатку за еліптичним рівнянням для $u \in W_1^{p,p}(R^1, d^1x)$, $v \in W_{1,\lambda}^{p,p}(R^1, d^1x)$ визначено

нелінійну відносно елемента $u \in W_1^{p,p}(R^1, d^1x)$

$$\text{формулу } h_2^p(u, v) \text{ згідно формули: } h_2^p(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \langle b(x, u, \nabla u), v \rangle.$$

Для форми $h_2^p(u, v)$ виконуються всі умови теореми Банаха, а отже ця форма $h_2^p(u, v)$ породжує нелінійний еліптичний оператор $\Lambda_2^p: W_1^{p,p}(R^1, d^1x) \rightarrow W_{1,\lambda}^{p,p}(R^1, d^1x)$, тобто

$$h_2^p(u, v) = \langle \Lambda_2^p(u), v \rangle.$$

Надалі використовується властивість неперервності і щільності вкладення просторів $W_1^p(R^l, d^l x) \subset L^p(R^l, d^l x) \subset W_{-1}^p(R^l, d^l x)$.

А отже можна визначити звуження $\tilde{A}_1^p$ оператора A_1^p на простір $L^p(R^l, d^l x)$, а саме

$$\tilde{A}_1^p = A_1^p \upharpoonright L^p(R^l, d^l x),$$

$$D(\tilde{A}_1^p) = \{u \in W_1^p(R^l, d^l x) : A_1^p(u) \in L^p(R^l, d^l x)\}.$$

За визначенням покладемося $A = -\tilde{A}_1^p$. Зауважимо, що оператор A може визначати неодиозначне відображення.

Оператор $\tilde{A}_1^p : D(A_1^p) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ визначає скор'єктивне відображення і, як наслідок, еліптичне рівняння має розв'язок в $D(\tilde{A}_1^p)$.

Оскільки оператор $\tilde{A}_1^p$ є максимальним монотонним [4-7] на просторі $L^p(R^l, d^l x)$ оператором, то $A = -\tilde{A}_1^p$ – максимальний дисипативний оператор, а отже маємо узагальнене параболічне рівняння:

$$\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t).$$

Список використаних джерел

1. Dubinskiy U.A. Nonlinear parabolic and elliptic equations / U.A. Dubinskiy // Results of science and technology. Series: Contemporary Mathematics. – M.: 1976. – V. 9. – P. 5 – 130.
2. Hille E., Phillips R. Functional Analysis and Semi-Groups / E. Hille, R. Phillips. – Providence: Amer. Math. Society, 1957. – 720 p.

Слід зазначити, що питання про зв'язок між еліптичними рівняннями та узагальненими параболічними задачами досліджувалося І.В.Скрипником та Ю.А.Дубінським [1], в працях яких спочатку вивчалися еліптичні рівняння, а потім отримані результати використовувалися при дослідженні узагальнених параболічних задач.

Зауважимо, що існують й інші точки зору на питання про вивчення диференціальних рівнянь еліптичного і параболічного типів, коли навпаки, спочатку вивчаються рівняння параболічного типу, а потім отримані результати застосовуються при вивченні рівнянь еліптичного типу. При цьому параболічну задачу можна досліджувати побудувавши спочатку напівгрупу, а потім перейшовши до еліптичного рівняння.

5. Висновки. Введені означення для опису розширення нелінійного параболічного оператора $A : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ та доведено теорему про односторонність деякого відображення, що асоційоване з генератором напівгрупи стиску, розглянуто приклад побудови таких операторів.

3. Kato T. Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.
4. Kato T. Non-linear semigroups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 508 – 520.
5. Komura Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493 – 507.
6. Kato T. Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.
7. Minty G. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / G. Minty // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341 – 346.

Надійшла до редакції 29.10.2012

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.8

Бармак О.В.¹, к.т.н., доц.**Про один підхід до синтезу та розпізнавання жестової інформації на основі базисних елементів**

В даній статті розглядається підхід до формалізації жестового мовлення для відтворення його віртуальною моделлю. Запропонований підхід дозволяє використовувати отримані формальні ознаки для ідентифікації одиниць жестового мовлення.

Ключові слова: жестова мова, формалізація, ідентифікація.

¹ Хмельницький національний університет, 29000, м.Хмельницький, вул. Інститутська, 11, e-mail: barmak@svitonline.com

O. V. Barmak¹, Ph.D., As.Prof.**Synthesis and recognition of sign information based on basic elements approach**

This paper proposes an approach to formalize the sign language to playback its virtual model. The approach allows obtaining formal features to identify units of speech gestures.

Key Words: sign language, formalization, identification.

¹ National University of Khmelnytskyi, 29000, Khmelnytskyi, 11, Instytutska str.

This paper was presented by Fedir Garashchenko, Ph.D., Prof.

Introduction

Sign language (SL) is a way of communication for deaf people. To communicate in SL people use visual-kinetic means (hand gestures, lip articulation, face emotions). Basic semantic unit is a SL gesture (visual-kinetic act). SL is determined by kinetic nature of the gesture and the visual perception characteristics: opportunity to locate a gesture in space in a certain way, perform two gestures with both hands simultaneously, etc.

The specifics of Ukrainian SL (Russian, Belarusian) is that different regions have different dialects. The development of computer technology, WEB-technology allows us to overcome these dialectal differences. It is necessary to offer advanced multimedia computer tools for the description, visualization and identification SL. Therefore, the actual problem is the creation of modern technology for recording, visualization and identification SL.

Lexical gestural elements in SL can be formalized as follows: configuration (hands or arms shape), localization (where are the hands that perform gesture), and the nature of the movement (how the hands are moving). Such a description was firstly proposed in [1] for the American SL (AMSLEN).

Formulation of the problem. The approach for the formalization of SL (example Ukrainian) in order

to use the structural elements for synthesis and to identify any gesture.

Formalization Sign Language

For formalization it is offered to decompose gesture on the following elements that it uniquely characterized by: 1) the configuration of the fingers, 2) localization, 3) the direction and the nature of the movement.

Lets represent the configuration of fingers with following set:

$$F = \left\{ \left\{ F_i^k(t); F_i^k(t) = \{L^{beg}, L^{end}, t\} \right\} \right. \\ \left. \left\{ F_i^k; F_i^k = \{L^{beg}\} \right\} \right\} \quad (1)$$

where F_i^k - i -th configured the k -th finger ($i = \overline{0, p}, k = \overline{1, 5}$); L^{beg}, L^{end} - sets the names of bones and Euler values in these bones for the initial and final state of the configurations; t - the interpolation factor for calculation the intermediate state ($t \in [0, 1]$), p - a fixed positive number.

Lets define the following configuration of fingers:
the thumb finger ($k = 1$):

$F_0^1(t)$ - from pressed state, ($t = 0$), to straight state ($t = 1$);

F_1^1 - connected to the pad with the forefinger;

F_2^1 - pressed to the palm;

for the forefinger ($k = 2$):

$F_0^2(t)$ - from pressed state to straight state;

F_1^2 - extends in a horizontal position;

F_2^2 - forefinger and thumb finger are routed;

for the middle ($k = 3$):

$F_0^3(t)$ - from pressed state to straight state;

F_1^3 - extends in a horizontal position;

F_2^3 - fore finger and middle finger are routed;

F_3^3 - middle finger is on the forefinger;

for the ring finger ($k = 4$):

$F_0^4(t)$ - from pressed state to straight state;

F_1^4 - extends in a horizontal position;

F_2^4 - middle finger and ring finger routed;

to the little finger ($k = 5$): $F_0^5(t)$ - from pressed state to straight state;

F_1^5 - extends in a horizontal position;

F_2^5 - ring finger and little finger routed.

Hand position is uniquely determined by the values of the Euler angles ($\varphi^x, \varphi^y, \varphi^z$) corresponding to the bone:

$$D = \{D_i : D_i = \{\varphi_i^x, \varphi_i^y, \varphi_i^z\}\} \quad (2)$$

Lets define the following specific provisions of the palm:

D_1 - up,

D_2 - normal,

D_3 - down,

D_4 - to owner,

D_5 - aside.

To localize the implementation of gesture the state of bones are captured for the areas located on the intersection of the horizontal (over the top, at the level of the forehead, eyebrow line, eye line, the level of the right and left ear, cheek level, mouth, chin, under the chin, neckline, shoulders; chest, waist, the under waist line) and vertical (left, center, right) levels. For each location specified criteria is set: with or without touch:

$$L = \{L_i(\mu) : L_i(\mu) = \{K_i, \mu\}\}, \quad (3)$$

where L_i - the state corresponding to a specific location; K_i - the name of bones and Euler angles for them; μ - a criterion of contact.

Lets describe several gestures using the proposed method (Table 1).

Table 1

Example of characters of the alphabet description

Description	Motion Capture	According to the formula
$R(L_1(0), D_1,$ B: $F_0^1(0.5), F_0^2(1),$ $F_0^3(1), F_0^4(1), F_0^5(1))$ - the right hand; in the chest; on the right, without touching; hand to the side; thumb and index fingers extended; the other fingers extended.		
$R(L_1(0), D_5,$ Г: $F_0^1(1), F_0^2(1),$ $F_0^3(0), F_0^4(0), F_0^5(0))$ - the right hand; in the chest; on the right; without touching; palm up; thumb rectified by half; remaining in the pressed state.		

Proposed formal description of gesture consists of certain key states of bones (obtained from the digitization a native SL-speaker gestures) and functionally calculated trajectory of the moves. This set of states and trajectories are fixed. With them, and synthesis algorithm of intermediate trajectories is possible to synthesize an arbitrary gesture.

So, with the help of native SL-speaker a fixed set of states of the generalized skeleton for an arbitrary number of virtual models is created. Using formalized in this way description of any gesture we automatically synthesized many gestures for SL.

For non-verbal communication among deaf people it is offered to create on-line resources, including a glossary of key gestures and variants how they are used in sign structures. Using this resource can accomplish the following:

1) expanding range of experts in sign language area,

- 2) creation of an automated translation from sign language on-line to facilitate communication between deaf and hearing,
- 3) standardization of gestures for different groups of deaf people,
- 4) creation of new gestures for different areas of knowledge.

For the implementation of on-line resource, offered WEB-realization [2] to playback 3D images in browser, using the proposed approach.

The client part of on-line resource is designed with the following technologies:

- HTML5 - as it implemented the ability to connect context WebGL;
- WebGL - for rendering three-dimensional graphics;
- JavaScript - to call functions WebGL and manipulate vertex model with skinning;
- library «webgl-utils.js» - for transformations on matrices.

The server component is implemented on Microsoft ASP.NET 4.0.

The proposed implementation of the virtual model animates SL in real time on computers with minimal requirements: the presence of a video card and a browser that supports HTML5 and WebGL.

In the test application (Fig. 1) the described mechanism for building arbitrary gesture is implemented.



Fig.1. Synthesis of gesture

Identification Sign Language

Lets apply received formal description for recognition of gesture. We mean recognition as assigning an object to one of the mutually exclusive classes. When a class contains only one object, the classification is equal to identification. From this it follows that the gesture identification will contain of gesture component identification (1) - (3).

For identification of an image containing a gesture, offered to use linear classification methods based on the scalar multiplication of vectors (Support Vector Machine and like that) [3,4].

To construct a system of attributes is proposed to use a method based on histograms of oriented gradients. The method was first presented in [5]. Initially, this method of construction signs was designed for detection problems human figures in images, but further studies [6,7] have shown the effectiveness of the method for many other classification problems. Lets describe the algorithm of construction of the feature vector using the histograms of oriented gradients. Construction of the feature vector can be divided into the following steps:

1. Normalization of brightness, contrast, and other parameters of monochrome images I_{ij} , $i = 0, \dots, M$, $j = 0, \dots, N$. This step allows you to achieve sustainability of signs system in relation to changes of brightness and contrast.

2. The calculation of the image gradient in the horizontal and vertical direction. To approximate the image gradient different discrete differential operators can be used, such as, for example, Sobel operator. Selection operator that approximates the gradient image, affects the quality of the classification.

3. The calculation for each (i, j) pixel the direction Θ_{ij} and magnitude of the gradient G_{ij} :

$$\Theta_{ij} = \arctan(G_{ij}^x / G_{ij}^y),$$

$$G_{ij} = \sqrt{(G_{ij}^x)^2 + (G_{ij}^y)^2}$$

4. Construction for each disjoint cells of pixels in the image histogram of gradient direction $(0, 2\pi/t, \dots, 2\pi)$ on the following areas:

$$H_{\alpha\alpha} = \left\{ \sum_{\Theta_{ij} \in [0, 2\pi/t] \cup [2\pi/t, 2\pi]} |G_{ij}| \delta(i, j) \in C_{\alpha\alpha}, k = 0, \dots, t \right\}$$

Cell size and number of lines of gradient t are important methods parameters significantly affecting the informative features and performance for classification tasks. Note that the normalization of histograms in cells allowed the use of different cell sizes of the images.

5. Normalization of histograms in blocks that contain cells:

$$H_{\infty} = H_{\infty} / \left\| \bigcup_{H_{\infty} \in \mathcal{H}_{\infty}} H_{\infty} \right\|$$

Note that for blocks of histograms crossing each other is allowed.

6. Formation of the feature vector of normalized histograms in cells images:

$$HOG(I) = [H_{10}, \dots, H_{m,n}]$$

This scheme of the construction of signs can be easily generalized to color images with different color channels I_{ja} , $i = 0, \dots, M$, $J = 0, \dots, N$, $k = 0, \dots, K$, by simply combining the histograms of oriented gradients for each of the images I_{ja} .

To test the proposed approach the related software was created. Functions to obtain HOG-features were implemented. Fragments corresponding to the elements of (1) (Fig. 2) were cut from photographic images of hands with gestures.



Fig.2. Example of an image element of the set (1)

Each photo-fragment was transformed into a HOG-features vector.

Scalar multiplication of each vector from the corresponding class with the vector from the other classes showed that a sufficient difference. This made it possible to train a linear classifier such as Support Vector Machine. With the help of a trained classifier identifying gestures alphabet has been made (Fig. 3).



Fig. 3. Identification of gesture

Conclusions

The proposed approach allowed to solve complex design problem as well as the task of identifying an arbitrary gesture. Obtained during the synthesis sets of components that describe any gesture are used as classes for identification problem.

Using oriented gradients for the feature vector histograms led to more stable detection (in comparison with other methods).

Testing the proposed approach has shown its viability for the synthesis and analysis of structures of sign language.

Further areas of research presented in this paper are the improvement of the approach, scaling it to other SL, full filling the sets of components.

References

1. *Stokoe W.C. Sign Language Structure: An Outline of the Visual Communication Systems of the American Deaf / Stokoe W.C. // Studies in Linguistics. – 1960. – №8. – 78 p.*
2. *Kryvonos Y.G. Formalizing the formation of gestures using three-dimensional models for human Ukrainian sign language / Kryvonos Y.G., Krak Y.V., Barmak O.V. // Problems programming. – 2012. №2-3. P. 398-405*
3. *Vapnik, V.N. Statistical Learning Theory. New York: Wiley, 1998*
4. *Kirichenko N.F. Synthesis of systems neuro functional changes in the task of classification / N.F.Kirichenko, Krivonos Yu.G., Lepekha N.P. // Cybernetics and system analysis. – 2007. – №1. P. 47-56*
5. *Dalal, N. Histograms of Oriented Gradients for Human Detection. / N. Dalal, W. Triggs // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR05. 2005. – Vol. 1(3). – P. 886-893.*
6. *Wang, X. An HOG-LBP Human Detector with Partial Occlusion Handling / X. Wang, T.X. Han // IEEE Computer Engineering. – 2009. – P. 32-39.*
7. *Ruta, A. In-vehicle camera traffic sign detection and recognition / A. Ruta, F. Porikli, S. Watanabe, Y. Li // Machine Vision and Applications. – 2011. – Vol. 22(2) – P. 359-375.*

Arriving to an editorial board 10.11.12

УДК 681.3.06

Бойко Б.І.¹, к.ф.-м.н., доц.**Каркасно-слотове програмування***Мотивується та обґрунтовується використання каркасно-слотових конструкцій в програмуванні.*

Ключові слова: Каркас, слот, програмування, структурування.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: bboiko@ukr.netB. I. Boiko¹, PhD, Associate Professor**Frame-slot programming***Motivated and justified the use of frame-slot structures in programming.*

Key Words: frame, slot, programming, structuring.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: bboiko@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Вступ. Чисельні дослідження в галузі теорії та технології розробки складних програмних систем довели необхідність формалізації набору прийомів та методів розробки, що дістали широке визнання. Так від констатування того факту, що в програмуванні недостатньо класичних теоретико-множинних підходів до уточнення більшості його понять, дослідники перейшли до усвідомлення необхідності залучення іменувань до конструювання більш складних структур даних та програм із більш простих, що дало можливість сформулювати основні концепції композиційного програмування [1].

Подальші дослідження [2] висунули на передній план ще й необхідність вивчення як логік внутрішньої побудови, так і логік процесів створення програмних виробів - засобів композиційно-номінативного програмування. Дослідження мікрорівня в основному мають на меті вивчення семантичних, синтаксичних та інших аспектів структурування даних та мов програмування. Практичні розробки великих автоматизованих інформаційних систем (АІС), що оперують великими обсягами даних та обслуговують велику кількість користувачів, потребують обґрунтування та моделювання засобами програмної інженерії макрорівня, коли значний відсоток програмної документації використовує поряд

із формалізованими строго означеними конструкціями ще й фрагменти, що виражені конструкціями природної мови. Це вимагає залучення до розгляду ще й положень суміжних гілок наукових знань, як семантика природних мов, семіотика та ін.

Спроба запропонувати один із можливих варіантів містка як проміжного рівня абстракції між мікрорівнем та макрорівнем якраз і є однією з цілей цієї роботи.

В природознавстві існує багато явищ та об'єктів, що структуруються схожим чином із елементарних (атомарних). Правила такого структурування відбивають ті чи інші закономірності, багато з яких є незалежними від специфіки предметної області. У множині правил є підмножина, що визначає потенційну можливість поєднання елементарних та раніше складених об'єктів та визначення їх імен. Усім відома формула, що поєднує 2 неподільних об'єкти із одним іншого типу – формула води H_2O . Із формальної точки зору ці ж два неподільні об'єкти можна поєднати з іншим та отримати формулу H_2SO_4 . Таке поєднання справді можливе, оскільки підтверджується досвідом. Цю підмножину правил поєднання можна було б назвати правилами формальної побудови каркасу (шаблону). Але практика показує, що тільки формальних правил побудови каркасу недостатньо для конструювання інших об'єктів, що мали б у

своєму складі все ті ж два неподільних (атомарних) та один простий чи складений. Та й сам процес побудови є надто статичним.

Висловлена В.М. Глушковым ідея адаптованості структури (архітектури) АІС (точніше – її апаратного, програмного та інформаційного забезпечення) до специфіки розв'язуваної проблеми із усією множиною підсистем, груп функцій, особливостей інформаційних баз та ін. крім усього іншого мала на увазі створення ієрархії типових проектних рішень у вигляді шаблонів (каркасів, макетів) проектування, що надавали б можливість використовувати опрацьовані раніше компоненти, випробувані досвідом експлуатації у складі раніше створених АІС.

У процесі розвитку основних положень програмної інженерії пройшли апробацію різні тлумачення компонентного програмування як органічного поєднання каркасної (структурної) складової, що моделювала потоки управління та потоки даних, із операційною, що відповідала за перетворення даних від початкового стану до бажаних результатів.

Оскільки загальноприйнятого формалізованого означення каркасно-слотового структурування немає, спробуємо навести кілька прикладів різного рівня складності [3]:

1. Найпростіша структура даних, наприклад, масив, що містить 13 елементів, має каркас із 13 комірок – слотів, а конкретна структура цього типу утворюється шляхом заповнення комірок (усіх або тільки частини) конкретними цілими числами.

2. Найпростіша блок-схема програми, що представлена двома блоками, коли на ілюстрації є два прямокутники та стрілка, що задає порядок виконання фрагментів програми, представлених у цих прямокутниках

3. Текстовий файл, де основною частиною (каркасом) є текст HTML-формату, а слотами – включені скрипти, що формулюються, наприклад, за правилами мови PHP чи іншої мови для написання скриптів.

4. Генеровані візуальними інструментальними середовищами макети

(каркаси) додатків, коли слотами є написані професійним програмістом процедури обробки даних чи реакції на події, викликані діалогом АІС - користувач.

5. Діаграми, що є результатом (документом), який отримано на виході CASE-засобу, що автоматизує той чи інший процес у ході розробки АІС. Правила та особливості оформлення таких діаграм визначаються як їх призначенням, так і методологією, що обґрунтовуються різними науковими школами із певними особливостями.

Наведений у першому прикладі масив є масивом цілих чисел. Якщо ж у комірках розташовані дійсні числа, будемо мати масив дійсних чисел. Сам факт, що масив складається з 13 елементів, є однією з кількох програмних реалізацій математичного означення послідовності, і це вдало відображено в каркасі. А от часткова чи повна заповненість цілими або дійсними числами мають бути уточнені засобами, що виходять за рамки традиційної ілюстрації масиву як намальованих поряд 13 прямокутників.

Нагадаємо також, що в теорії та практиці програмування крім часткової заповненості масивів (а в загальному випадку структури даних) є ще й проблема масивів змінної довжини, масивів, що в якості елементів мають раніше означені структури даних, які в більш загальному контексті і є одним із рівнів абстракції у процесах побудови більш складних програмних структур їх менш складних.

Як математичне уточнення процесів, що практикуються у ході таких побудов, будемо розглядати узагальнені навантажені графи, де поряд із традиційними множинами вершин та ребер від вершин будуть відходити чи у вершини вводити промені, які б символізували своєрідні валентності, дескриптори, інтерфейсні рядки чи щось інше, використовуване в цих побудовах.

Зауважимо, що будь-яка спроба такого уточнення не може одразу охопити усі рівні абстракції, кожен з яких міг би бути найбільш адекватним рівню конструювання, що застосовується у практиці розробки

програмного забезпечення. Мотивується це хоча б тим, що на кожному з рівнів до розгляду залучається різна кількість деталей, що є суттєвими саме на цьому рівні.

Так, на мікрорівні процес побудови графа, що буде складатись із двох вершин та зв'язувального ребра, може на вході мати дві вершини із променями-валентностями (лескриптори, інтерфейсними рядками). Але правила композиції можуть вимагати досить складних обчислень, метою яких є як сама можливість поєднання саме цих вершин, так і визначення позначок для новоутвореного рядка, а також і появи нових валентностей (інтерфейсних рядків) для існуючих вершин.

На проміжних рівнях абстракції достатньо залучати апарат іменувань із не надто складними структурами імен. На рівнях подальшої конкретизації (деталізації) мають використовуватись структури іменувань, що за своєю складністю можуть порівнюватись із складністю мов програмування. Так в додатках, що використовують бази даних, у якості імен можна записувати конструкції мов маніпулювання даними. Наприклад, у вже традиційному прикладі масиву у третій комірці може бути оператор мови SQL `select avg(stipedia) from stud_tbl`.

Окремо зазначимо, що як у слоті, так і у валентності можуть бути не тільки власне дані (наприклад, числа), але й конструкції, які ми за традицією називаємо навігаційними, тобто, такими, що допомагають знайти та виокремити потрібні дані. Не вся інформація, що насправді є в якійсь структурі даних, представляється явно. Наприклад, конкретний масив чисел

(записаних явно) подає ще й інформацію про кількість чисел чи кількість парних цілих чисел та ін.

За аналогією з наведеним прикладом в конкретному заповненні таблиць бази даних це не тільки її наповнення, але й, наприклад, все, що можна „добути“ з цього наповнення, якщо для добування використовувати якийсь інструмент (зовнішній засіб, як SQL-машина), то й множина всіх результатів виконання запитів, які можна записати за правилами SQL. Якщо згаданим зовнішнім засобом є множина правил конструювання, то неявно задається також все, що можна побудувати правильним застосуванням цих правил, якщо цим засобом є множина виразів певної алгебри виразів, то й множина обчислених значень цих виразів, якщо таким засобом є система рівнянь, то вони в неявному вигляді представляють множину всіх розв'язків.

Каркасно-слотова модель програми повинна узгоджуватись із тезою про вплив з боку вже існуючих структур на практично будь-який її елемент, що виникає не тільки в момент включення (додання) до раніше побудованої структури нових складових, але й у процесі використання вже побудованих структур.

Висновки. Наведені приклади та аналіз досвіду розробки програм різного призначення обґрунтовують потребу використання каркасно-словових конструкцій в програмуванні та розробки відповідних інструментальних засобів.

program // Probl. programming. – 2012. – N 2. – P. 234-238. (in Russian).

3. Boiko B.I.. The structure of naming in programming. // Scientific notes NAUKMA, Computer Science, 2000. – 687 p. (in Ukrainian).

Список використаних джерел

1. Red'ko V.N. Composition and compositional software programming. // Programming: Moscow, 1975. – N 5. – P. 3-24. (in Russian).
2. Nikitchenko N.S. Composite-nominative approach to clarify the concepts of the

Надійшла до редколегії 3.12.2012

УДК 004.519.6

¹ Буй Д.Б., д.ф.-м.н., професор,
² Компан С.В., аспірантD. B. Buy¹, PhD, Professor
S. V. Kompan², aspirant**Уточнення множинного успадкування у вигляді операції накладання**

В статті уточнюється поняття специфікації класу, розглядається операція об'єднання специфікацій класів. За допомогою операції накладання виконується формальне уточнення множинного успадкування.

Ключові слова: клас, множинне успадкування, операція накладання, багатосортна алгебраїчна система.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: buy@unicyb.kiev.ua

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: robin_2005@mail.ru

Specification of multiple inheritance in the form of the overlap operation

In the paper the notion of class specification is rectified, the operation of combination of class specifications is considered. The formal clarification of multiple inheritances is realized due to the overlap operation.

Key Words: class, multiple inheritance, overlap operation, heterogenic algebraic system.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: buy@ugicyb.kiev.ua

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: e-mail: robin_2005@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Вступ

Для реляційних баз даних (БД) вже побудована формальна модель: за допомогою логік першого порядку та реляційних алгебр описується робота таких БД [1-9].

Клас можна розглядати як тип даних. Причому в мовах програмування (Java, C++ та інші), в яких реалізований об'єктно-орієнтований підхід, типи даних реалізуються у вигляді класів. Для примітивних типів даних в мові Java такий клас описується з модифікатором класу `final`, який призначений для того, щоб заборонити створення похідних класів. З іншого боку клас може описувати тип даних користувача. Під типом даних розуміємо специфікацію класу, тобто множини атрибутів і множини методів. Формальне уточнення поняття специфікації дамо нижче.

Клас в свою чергу можна розглядати як множину об'єктів одного типу. Тобто можна зробити висновок, що об'єкт належить класу, в той же час об'єкт має тип [10]. Отже, носій об'єктної алгебри повинен мати дуальну природу. З одного боку носієм алгебри виступає

екстенс¹ класу, а з іншого – множина специфікацій класів. Тоді в загальному випадку можна розглядати багатосортну алгебраїчну систему [11].

Формально таку алгебраїчну систему можна описати так: $\langle O, K; \Omega_+, \Omega_-, \leq \rangle$, де O – множина об'єктів класу, K – множина специфікацій класу, яка формально буде розглянута далі, Ω_+ – операції над об'єктами, Ω_- – операції над специфікаціями класів, а $\leq \subseteq K \times K$ – відношення часткового порядку, яке уточнює відношення успадкуванням. Метою статті є уточнення множинного успадкування.

Зробимо деякі загальні зауваження. Під класом будемо розуміти пару $K = \langle s, \mu \rangle$, де s – функціональне бінарне відношення, яке атрибуту ставить у відповідність значення з універсального домену D , а μ – функціональне бінарне відношення, яке методу ставить у відповідність його сигнатуру. Функціональні бінарні відношення s та μ визначають специфікацію класу. Очевидно, що екземпляр

¹ Множина екземплярів (об'єктів) класу.

класу має ту ж саму специфікацію, що і сам клас. В множині методів можна виділити спеціалізовані і звичайні методи. Спеціалізованими методами можуть виступати конструктори, в яких описана логіка створення екземпляра класу або логіка перетворення об'єкта одного типу в інший. Звернемо увагу на те, що знаючи специфікацію класу, можна однозначно визначити клас, до якого належить об'єкт. Тоді можна ототожнити множину екземплярів класу (екстент) з самим класом.

Уточнення множинного успадкування

Розглянемо операцію $\cup$ на множині специфікацій класів (типів даних), яка виступає носієм алгебраїчної системи. Операцію $\cap$ множини специфікацій класів розглянемо у наступній статті.

Позначимо K – множину специфікацій класів, $K \in K$ – специфікацію класу. Операція об'єднання специфікацій класів є операцією вигляду $\cup: K \times K \rightarrow K$. В загальному випадку формально об'єднання специфікацій класів може бути записано так:
 $\langle s_1, \mu_1 \rangle \cup \langle s_2, \mu_2 \rangle = \langle s_1 \nabla s_2, \mu_1 \nabla \mu_2 \rangle$, де ∇ – операція накладання [12].

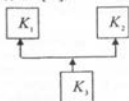


Рис. 1. Зображення операції об'єднання специфікацій класів

При об'єднанні класів K_1 та K_2 отримаємо новий клас K_3 , для якого класи K_1 та K_2 будуть батьківськими, а клас K_3 буде відігравати роль похідного (рис. 1). В похідному класі класи K_1 та K_2 є розширенням один до одного. До похідного класу ми повинні додати спеціальний метод (конструктор) $Constructor(\pi^1 s, \cup \pi^1 s_1)$, на основі якого будуть створюватися об'єкти зі значеннями атрибутів по замовченню (хоча це необов'язково, так як в похідний клас потраплять set- і get-методи з батьківських) [13].

Твердження 1. Для довільних функціональних бінарних відношень α і β виконується $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha = \alpha \cup \beta$.

Доведення. Покажемо спочатку, що $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha = \alpha \cup \beta$. Для цього

скористаємося означеннями операцій сумісності і накладання:

$$\alpha \nabla \beta = \beta \cup \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta),$$

$$\beta \nabla \alpha = \alpha \cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha),$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) = \beta \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \quad \square$$

Розпишемо

$$\begin{aligned} \alpha \cup \beta &= \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha) = \\ &= \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha \cup dom \beta \cap dom \alpha) = \\ &= \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \alpha \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) \cup \\ &\cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha) \cup \beta \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) = \\ &= \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \beta \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) \cup \\ &\cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha) \cup \beta \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) = \\ &= \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \beta \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) \cup \\ &\cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha) \cup \beta \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) = \end{aligned}$$

(Скористаємося означенням сумісності двох функціональних відношень ($\alpha = \beta$)).

$$\alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \beta \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) \cup$$

$$\cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha) = \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup$$

$$\cup \beta \setminus (dom \beta \setminus dom \alpha) = \alpha \setminus (dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \beta = \alpha \nabla \beta.$$

Отже, маємо:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cup \beta = \alpha \nabla \beta \wedge \alpha \cup \beta = \beta \nabla \alpha, \quad \text{тобто}$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha = \alpha \cup \beta.$$

Покажемо, що $\alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$.

Доводити будемо від супротивного. Нехай α і β несумісні. Це означає, що:

$$\alpha \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) \neq \beta \setminus (dom \alpha \cap dom \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x \in dom \alpha \cap dom \beta, \quad \alpha(x) \neq \beta(x). \quad \text{З іншого}$$

боку, $\langle x, \alpha(x) \rangle \in \beta \nabla \alpha$, $\langle x, \beta(x) \rangle \in \alpha \nabla \beta$. Це

означає, що пари $\langle x, \alpha(x) \rangle$, $\langle x, \beta(x) \rangle \in \alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha$ – одному значенню x відповідають два різних значення, а це суперечить функціональності $\alpha \nabla \beta$ і $\beta \nabla \alpha$. Отже, прийшли до протиріччя. $\square$

Твердження 2. Нехай α, β – функціональні відношення. Тоді наступні твердження еквівалентні:

$$a) \alpha \cup \beta \text{ – функціональне}; \quad (1)$$

$$b) \alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha; \quad (2)$$

$$в) \alpha \nabla \beta = \alpha \cup \beta; \quad (3)$$

$$г) \alpha = \beta \quad \square \quad (4)$$

Доведення. Для наочності доведення скористаємося (рис. 2). Еквівалентність твердження (1) і (4) випливає з того, що об'єднання двох функціональних бінарних відношень α і β буде функціональним тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \beta$ [12]. Еквівалентність

твердження (2) і (4) випливає з того, що:
 $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha = \alpha \cup \beta$ (Твердження 1).
 Еквівалентність тверджень (3) і (4) випливає з
 властивості комутативності операції накладання
 та з означення відношення сумісності функцій:
 $\alpha \nabla \beta = \alpha \cup \beta \Rightarrow \alpha \approx \beta$. З останнього маємо, що
 $\alpha \nabla \beta$ є функціональне бінарне відношення, тоді
 $\alpha \cup \beta$ теж функціональне бінарне відношення, а
 отже $\alpha \approx \beta$. $\square$

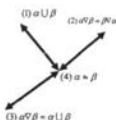


Рис. 2. Еквівалентність тверджень (1)–(4)

Розглянемо часткові найважливіші випадки:

а) $\pi'_1 x, \Pi \pi'_1 x_1 = \emptyset$ і $\pi'_1 \mu, \Pi \pi'_1 \mu_1 = \emptyset$.

Тоді отримуємо похідний клас
 $K_1 = \{x, \cup x_1, \mu, \cup \mu_1\}$.

б) $\pi'_1 x, \Pi \pi'_1 x_1 \neq \emptyset$ або/та $\pi'_1 \mu, \Pi \pi'_1 \mu_1 \neq \emptyset$.

Тоді потрібно визначити за певним
 критерієм (правилом), який саме атрибут (метод)
 необхідно додавати в похідний клас. Таким
 правилом може бути реалізація успадкування
 класів з однаковими атрибутами і/або методами в
 постреляційній СУБД Cache [14]. Формалізація
 успадкування класів була виконана в статті [15].

Висновки: Запропонований підхід
 розглядати для ООП багатосортну алгебраїчну
 систему, в якості носія якої виступають множина
 об'єктів та множина специфікацій класів. За
 допомогою операції накладання виконано
 уточнення множинного успадкування. В
 подальшому планується розширити ряд операцій
 над специфікацією класів.

Список використаних джерел

1. Codd E.F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages / Codd E.F. // Data Base Systems. – New York: Prentice-Hall, – 1972. – P. 65-93.
2. Codd E. F. The Relational Model for Database Management: Version 2 / E. F. Codd. – Addison-Wesley, 1990. – 541 p.
3. Lacroix M. Domain-oriented Relational Languages / M. Lacroix, A. Pirotte // Proc. 3rd Int. Conf on Very Large Data Bases. – Tokyo, October, 1977. – P. 370-378.

4. Maier D. The Theory of Relational Databases / D. Maier. – Moscow, 1987. – 608 p. (in Russian).

5. Ullman D. First Course in Database Systems / Jeffrey. D. Ullman. – Pearson Education, 1982. – 470 p.

6. Glushko I. Generalization of the classical result Codd-Lacroix-Pirout about equivalence of relational (table) algebra and corresponding relational calculi / I. Glushko // Physical and mathematical notes: Collected Works. – Nizhyn, 2011. – P. 28-35. (in Ukrainian).

7. Buy D. Generalized table algebra, calculus of generalized strings generalized calculus on the domain and their equivalence / D. Buy, I. Glushko // Visnik of Taras Shevchenko National University of Kyiv. – 2011. – Issue. 1. – P. 86-95. (in Ukrainian).

8. Buy D. Equivalence of Table Algebras of Finite (Infinite) Tables and Corresponding Relational Calculi / D. Buy, I. Glushko // Proceedings of the Eleventh International Conference on Informatics INFORMATICS'2011, November 16-18, 2011, Rožňava, Slovakia. – P. 56-60.

9. Redko V. Relational databases: tabular algebra and SQL-like language / V. Redko, Y. Brona, D. Buy, S. Polyakov – Kyiv. Publishing House "Academperiodika", 2001. – 196 c. (in Ukrainian).

10. Piskunov A. The formalization of the OOP, many types of classes / electronic resource. : <http://agpl.hx0.ru/articles/typeSetsClasses.pdf>.

11. Glushkov V. Algebra. Languages. Programming / V. Glushkov, G. Ceitlin, E. Yushchenko – Moscow: Mir, 2000. – 319 p. (in Russian).

12. Buy D. Properties of set-theoretic constructions full image and restrictions / D. Buy, N. Kahuta // Visnik of Taras Shevchenko National University of Kyiv – 2005. – Issue. 2. – P. 232-240.

13. Barker J. Beginning Java Objects From Concepts to Code / Jacquie Barker. – Apress, 2005. – 917 p.

14. Kirsten V. Post-relational DBMS Cache. Object-oriented application development / V. Kirsten – Moscow: Binom, 2008. – 401 p. (in Russian).

15. Dmitriy Buy. The Concepts of Object, Class, Inheritance, Life Cycle: Formalization / Dmitriy Buy, Sergiy Kompan. // First International Workshop Critical infrastructure safety and security (CriSS-Dessert'11) Kirovograd Ukraine May 11-13, 2011. – P. 235-243. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 6.12.12

УДК 519.7

О.А. Галкін, аспірант

Автоматичне налаштування коефіцієнтів масштабування у проблемі вибору характеристик для ОВМ

Запропонована методологія вибору характеристик для опорно-векторних машин. Застосування процедури пошуку оптимальних коефіцієнтів масштабування та схеми зворотнього видалення. Алгоритм рекурсивного видалення характеристик для лінійних ОВМ.

Ключові слова: опорно-векторна машина, вибір характеристик, коефіцієнти масштабування, ядро.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

Oleksandr A. Galkin, postgraduate (PhD)

The automatic tuning of scaling coefficients in feature selection problem for SVMs

The feature selection methodology for the support vector machines is proposed. Application of the procedure of optimal scaling factors search and the backward elimination scheme. The algorithm of recursive feature elimination for linear SVMs.

Key words: support vector machine, feature selection, scaling factors, kernel.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

Статтю представив: чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

In this paper we consider one of the applications of the support vector machines called the feature selection problem. The motivation of the study of the feature selection problem is the following three main factors: reducing the dimensionality of the input space, improving the generalization error and also identifying the appropriate features.

The problem of feature selection can be solved by the following two manners: (1) if we have a set $m \square d$, our goal is to find the m features which provide the smallest expected generalization error; or (2) having a maximum admissible generalization error γ , find the smallest m . The expected generalization error is unknown in both of these problems, and thus must be evaluated. In this paper we will consider problem (1). It should be noted that options of m in problem (1) can usually be reparameterized in the same way as options of γ in problem (2).

Problem (1) is formed as follows. Having a defined set of functions $y = f(x, \alpha)$, the purpose is to detect a pre-processing of the data $x \mapsto x * \sigma, \sigma \in \{0, 1\}^d$ and the parameters α of the function f that provide the minimum value of

$$R(\sigma, \alpha) = \int_{f(x * \sigma, \alpha) \neq y} dP(x, y) \quad (1)$$

subject to $\|\sigma\|_0 = m$, where $P(x, y)$ is unknown fundamental probability generating the data,

$x * \sigma = (x_1 \sigma_1, \dots, x_d \sigma_d)$ designates an elementwise product and $\|\cdot\|_0$ denotes the "0-norm".

There exist two types of methods to address this problem: the filter and wrapper methods [1]. Filter methods are determined as a preprocessing stage to induction that can eliminate inappropriate characteristics before induction occurs, and thus wish to be true for any set of functions $f(x, \alpha)$. For instance, one common filter method is to use Pearson correlation coefficients.

The wrapper method is more exact method to minimize (1). It is identified as a search through the set of feature subsets using the evaluated accuracy from an induction algorithm as a criterion of goodness of a specific feature subset. More exactly, having a given σ , the induction algorithm yields a function $f((x * \sigma), \alpha^0(\sigma))$. Having an approximation of T (such as execution on a validation set) of R , one minimizes $T^0(\sigma) = T(\sigma, \alpha^0(\sigma))$. Wrapper methods can ensure more exact solutions than filter methods [2]. Filter methods need better estimations of the fundamental density as they should determine subsets of features which operate for any set of functions, rather than only a set with small size. Besides, they do not take into account a specific algorithm bias toward preserving definite types of features. Wrapper methods take this bias into

account; however, they are more computationally expensive since the evaluated error T of the induction algorithm should be estimated over each feature set (vector σ) examined. Since there are 2^d various vectors σ , wrapper methods normally use greedy approaches such as forward or backward elimination.

In this paper, we present a feature selection algorithm for support vector machines that takes advantage of the performance raise of wrapper methods while avoiding their computational complexity. Note that some prior on feature selection for SVMs does exist, however results have been restricted to linear kernels [3-4] or linear probabilistic models [5]. Our method can be applied to non-linear problems.

Feature selection problem for support vector machines

Recursive Feature Elimination algorithm

We first introduce a presentative method of feature selection for linear support vector machines called Recursive Feature Elimination (RFE) [4]. It is based on the concept that the significance of a feature i must be connected with the norm of its weight $|w_i|$. Combining this concept with a backward elimination provides the following algorithm:

1. Training an SVM on the active features.
2. Eliminating some of the features corresponding to small $|w_i|$.
3. Going back to step 1 or stop if there are only m features left.

This algorithm is very simple to implement, but it is not straightforward to extend it to non-linear SVMs [7-10].

Scaling factors

The primary concept of feature selection approach for support vector machines is based on the automatic tuning of scaling coefficients. In fact, if one of the input components is unnecessary for the classification problem, its scaling factor is probably to become small. However, if a scaling factor becomes small enough, it means that it is possible to eliminate it without manipulating the classification algorithm. This leads to the next idea for feature selection: retain the features whose scaling factors are the largest.

We consider the following parametrization of the kernel.

$$K_{\sigma}(x, y) = K(\sigma^T x, \sigma^T y), \quad (2)$$

where $\sigma \in \mathbb{R}^d$.

We compute σ and α using the following iterative procedure:

1. Initializing $\sigma = (1, \dots, 1)$.
2. Solving the SVM optimization problem with kernel $K_{\sigma}(x, y) = K(\sigma^T x, \sigma^T y)$.
3. Minimizing the estimate of the error T with respect to θ with a gradient step.
4. If a local minimum of T is not reached going to step 2.
5. Discarding dimensions corresponding to small elements in σ and return to step 2 (normally discard half of the components).
Stop when $\|\sigma\|_0 \leq m$.

In the case, when $T = R^2 / M^2 = R^2 w^2$, the RFE algorithm can be considered as an approximation of this method. Indeed, in the linear case, if R^2 is approximated by the variance then we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2 / M^2}{\partial \sigma_p} \Big|_{\sigma=1} &= -R^2 \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^p x_j^p \\ &+ w^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^p)^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n x_i^p x_j^p \right) \\ &= -R^2 w_p^2 + w^2 \text{Var}(x_p), \end{aligned}$$

where $\text{Var}(x_p)$ is the variance of the input component p . When we apply RFE, a standard preprocessing is to divide each component by its standard deviation and in this case $\text{Var}(x_p) = 1$. After one gradient step of our method, the smallest scaling factors would correspond to components with the smallest weights w_p^2 and RFE amounts to make one gradient step and eliminate components with the smallest σ .

If the problem is only in the preservation of m features, it is possible to approximate the integer programming by minimizing

$$R^2 / M^2(\sigma) + \lambda \sum_{i=1}^d \sigma_i^p \quad (3)$$

subject to $\sum_i \sigma_i = m, \sigma_i \geq 0, i = 1, \dots, d$.

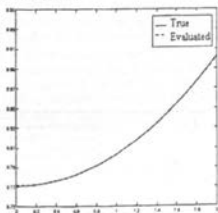
For large enough λ as $p \rightarrow 0$ only m elements of σ will be nonzero.

Advanced feature elimination

The algorithm presented above has several iterations. At each one, a gradient descent is performed on R^2/M^2 and some features rejected (normally half of them). When the gradient descent algorithm terminates with some very small scaling factors, there are no difficulties in rejecting the corresponding components. That was the motivation for preserving the components that have the largest scaling factors. However, in the situation when all the components have a significant scaling factor, it is not evident that the components with the smallest ones must be eliminated. Instead, we offer to eliminate the features such that the conclusive R^2/M^2 will be as small as possible (see figure 1).

In terms of *explicitness*, after the gradient descent, for each component, set its scaling factor to 0, retrain an SVM and prescribe the conclusive R^2/M^2 as a score for this feature. Then reject the features with the smallest scores.

Similarly to the Optimal Brain Damage technique [6], the idea of using notion of *approximativeness* is to use second order information to estimate the influencing of setting a scaling factor to 0. More precisely, let $T = R^2/M^2$ and σ^0 the scaling coefficients which minimize T (found by gradient descent). Then



$$T(\sigma_1^0, \dots, \sigma_{p-1}^0, 0, \sigma_{p+1}^0, \dots, \sigma_d^0) \\ \approx T(\sigma^0) - \underbrace{\sigma_p^0 \frac{\partial T}{\partial \sigma_p}}_{=0} \Big|_{\sigma=\sigma^0} + \frac{(\sigma_p^0)^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma_p^2} \Big|_{\sigma=\sigma^0}.$$

As a result, instead of rejecting the features with small scaling factors σ_p , we reject the features with the smallest values of

$$(\sigma_p^0)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma_p^2} \Big|_{\sigma=\sigma^0}. \quad (4)$$

The explicit method is more exact but more time consuming since it requires one SVM training per component. It has to be applied when the number of features left is small. Furthermore, in this method, it would be possible to apply the span-estimate

$$t_s = \frac{1}{n} \ell(x_s, y_1, \dots, x_s, y_s) \\ = \frac{1}{n} \text{Card} \{ p : \alpha_p^0 S_p^2 \geq y_p f^0(x_p) \}$$

instead of R^2/M^2 to compute the score related to each feature [11-15].

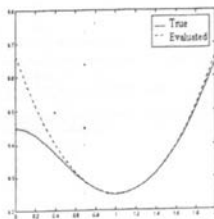


Figure 1. Two distinct examples of performance of R^2/M^2 as a function of a scaling factor σ_i .

In the example on the left, it is easy to see that this feature must be rejected since R^2/M^2 diminishes when σ_i goes to 0. On the right side, the situation is more complicated: the gradient descent algorithm found $\sigma_i = 1$ as the optimal scaling factor and eliminating this feature will result in a rise of

R^2/M^2 which can be evaluated through the curve at the optimum, as in equation (4).

Non-linear RFE

Despite the fact that the RFE algorithm presented at the beginning of this paper was designed

for linear SVMs, there exists the following generalization of RFE to the non-linear case [4]:

For each feature p , compute the kernel $K^{(p)}$ with feature p being eliminated, preserve the same α^0 and designate to this feature the score $\sum_i \alpha_i^0 y_i y_j K^{(p)}(x_i, x_j)$.

We will include this algorithm in our experiments.

Experiments

Our purpose was to evaluate the ability of the algorithm to select a small number of target features in the presence of inappropriate and unnecessary features.

Linear case. Six dimensions of 200 were reasonable and also the probability of $y=1$ or -1 was identical. The first three features $\{x_1, x_2, x_3\}$ were issued as $x_i = yN(i, 1)$ and the second three features $\{x_4, x_5, x_6\}$ were issued as $x_i = N(0, 1)$ with a probability of 0.7, otherwise the first three were issued as $x_i = N(0, 1)$ and the second three as $x_i = yN(i - 3, 1)$. The rest features are considered as noise $x_i = N(0, 20), i = 7, \dots, 202$.

Non-linear case. Two dimensions of 50 were reasonable and the probability of $y=1$ or -1 was identical. The data are issued from the following: if $y=-1$ then $\{x_1, x_2\}$ are issued from $N(\mu_1, \Sigma)$ or $N(\mu_2, \Sigma)$ with equal probability, $\mu_1 = \left\{-\frac{3}{4}, -3\right\}$

and $\mu_2 = \left\{\frac{3}{4}, 3\right\}$ and $\Sigma = I$, if $y=1$ then $\{x_1, x_2\}$ are issued again from two normal distributions with identical probability, with $\mu_1 = \{3, -3\}$ and $\mu_2 = \{-3, 3\}$ and the same Σ as above. The rest of the features are considered as noise $x_i = N(0, 20), i = 3, \dots, 52$.

In the linear case the first six features have superfluity and the remaining features are inappropriate. In the nonlinear case all but the first two features are inappropriate.

A linear SVM and a second order polynomial kernel of degree 2 were used for the linear case and for the nonlinear case, respectively.

We conducted a comparative analysis between an advanced version of the gradient descent on R^2/M^2 and RFE. The algorithm we offer a backward elimination united with the search for optimal scaling factors. This algorithm has two modes depending on number of features left:

Crude (more than 10 features): at each iteration half of the features having the smallest score (4) are rejected;

Exact (less than 10 features): a feature is rejected at a time and it is selected such that the conclusive span-estimate is minimized.

The results for the linear problem are shown in figure 2 and for the non-linear one in figure 3.

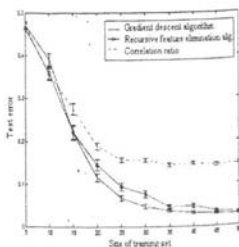
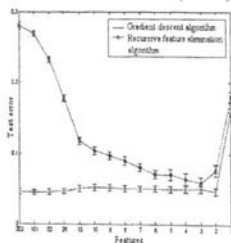


Figure 2. Linear case. Left: progress of the test error as a function of the number of iterations in the backwards elimination. Right: test error as a function of training samples with two features chosen.

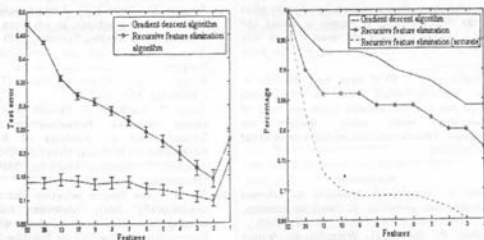


Figure 3. Non-linear case. The x-axis corresponds to the number of remaining features at each iteration of the backwards feature elimination. The y-axis is either the test error (left) or the percentage of time the two appropriate features are chosen (right).

Our proposed method and the RFE algorithm provides the best results compared to the other methods represented in [12], recursive feature elimination algorithm is slightly worse.

In experiments, it seems that the backwards elimination is not required: in the linear case (figure 2, left), an SVM trained with the 200 features leads to an mean test error of 28%, but when the scaling factors are optimized the test error decreases to 4.6%. After optimization, most of the scaling factors are around zero and up to a defined point, the backwards elimination is an obvious task because it just eliminates those features.

In addition, we intend to note a strange fact in the RFE algorithm. The non-linear case of RFE had the next motivation: assume that when a feature p is eliminated and the new kernel $K^{(p)}$ recomputed, the optimal value of the Lagrange multipliers α^0 does not modify. Under this assumption, the norm of the new weight vector would be

$$\|\tilde{w}^{(p)}\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i^0 \alpha_j^0 y_i y_j K^{(p)}(x_i, x_j).$$

The idea is that an inappropriate feature should act such that $\|w\|^2 - \|\tilde{w}^{(p)}\|^2$ is small. This algorithm can be examined as an expansion of the linear case

since for linear SVMs, we have $\|w\|^2 - \|\tilde{w}^{(p)}\|^2 = w_p^2$.

The value $\|\tilde{w}^{(p)}\|^2$ is easy to compute since the initial α^0 is used. However, we wanted to observe what would be the modification in execution of the algorithm if the vector α^0 is recomputed after a feature has been eliminated and thus compute the precise value $\|\tilde{w}^{(p)}\|^2$. This is the line RFE accurate in the graph on the right hand side of figure 2. There is a reduction in performance, which means that there is something lacking in the initial foundation of the RFE algorithm. Thus, the causes for the good efficiency of this algorithm are still unclear.

Conclusions

In this paper tools were presented to execute feature selection for SVMs. The two basic components are the search of optimal scaling factors and the backward elimination method. The tools introduced here are quite pliable and can lead to effective feature selection algorithms. They can process high dimensional datasets, in contradistinction to other available wrapper methods which are computationally unfeasible for such datasets.

However, we would like to note that we represented tools and concepts on how to execute feature selection. The way to unite optimally those tools in order to have a common and powerful feature selection method is still unclear. On the other hand, the RFE algorithm is simple to realize and even if it has not a reliable relevance, it gives very good results. For this reason, we suggest this latter for practical use.

Finally, even if SVM have been destined to process high-dimensional data, the experiments displayed that they can actually suffer the curse of dimensionality when many features are inappropriate. Feature selection becomes an essential stage in this case.

References

1. Blum A., Langley P. Selection of relevant features and examples in machine learning. *Artificial Intelligence*, 97 (1-2):245-271, 1997.
2. Kohavi R., John G.H. Wrappers for feature subset selection, *Artificial Intelligence*, 97(1-2), 273-324, 1997.
3. Bradley P.S., Mangasarian O.L. Feature selection via concave minimization and support vector machines. In *Proc. 13th International Conference on Machine Learning*, pages 82-90, San Francisco, CA, 1998.
4. Guyon I., Weston J., Barnhill S., Vapnik V. Gene selection for cancer classification using support vector machines. *Machine Learning*, 46(1/3):289, 2002.
5. Jebara T., Jaakkola T. Feature selection and dualities in maximum entropy discrimination. In *Uncertainty In Artificial Intelligence*, 2000.
6. LeCun Y., Denker J., Solja S., Howard R.E., Jackel L.D. Optimal brain damage. *Advances in Neural Information Processing Systems II*, San Mateo, CA. Morgan Kaufman, 1990.
7. Bartlett P., Shawe-Taylor J. Generalization performance of support vector machines and other pattern classifiers. In Scholkopf B., Burges C., Smola A., editors. *Advances in Kernel Methods – Support Vector Learning*. MIT Press, Cambridge, MA, 1999.
8. Campbell C. and Ying Y. *Learning with Support Vector Machines*, Morgan and Claypool, 2011.
9. Cristianini N. and Shawe-Taylor J. *An Introduction to Support Vector Machines*. Cambridge University Press, 2000.
10. Hsu C.-W. and Lin C.-J. A simple decomposition method for support vector machines. To appear in *Machine Learning*, 2001.
11. Jebara T., Jaakkola T. Feature selection and dualities in maximum entropy discrimination. In *Uncertainty In Artificial Intelligence*, 2000.
12. Weston J., Mukherjee S., Chapelle O., Pontil M., Poggio T., Vapnik V. Feature selection for support vector machines. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2000.
13. Kecman V. *Learning and Soft Computing – Support Vector Machines, Neural Networks, Fuzzy Logic Systems*, the MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
14. Leray P., Gallinari P. Feature selection with neural networks. *Behaviourmetrika*, 26(1). Special issue on Analysis of Knowledge Representation in Neural Network Models, 1999.
15. Mitchell T. *Machine Learning*. McGraw-Hill International, 1997.
16. Ng A.Y. On feature selection: learning with exponentially many irrelevant features as training examples. In *Proceedings of the 15th International Conference on Machine Learning*, pages 404-412, San Francisco, CA, Morgan Kaufmann, 1998.
17. Radulovic D., Wegkamp M. Weak convergence of smoothed empirical processes: Beyond donsker classes. In Gine E., Mason D.M., Wellner J.A., editors. *High Dimensional Probability II*, volume 47 of *Progress in Probability*, pages 89-106. Springer, 2000.
18. Smola A.J., Bartlett P.L., Scholkopf B., and Schuurmans D. (Eds.). *Advances in Large Margin Classifiers*. MIT Press, 2000.
19. Smola A.J., Scholkopf B. Sparse greedy matrix approximation for machine learning. In Langley P., editor, *Proceedings of the 17th International Conference on Machine Learning*, pages 911-918, San Francisco, Morgan Kaufman, 2000.
20. Vapnik V. *Statistical Learning Theory*. Wiley-Interscience, 1989.
21. Vapnik V. *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer, New York, 1995.
22. Joachims T. Text categorization with support vector machines: learning with many relevant features. In Claire Nedellec and Celine Rouveirol, editors. *Proceedings of ECML-98, 10th European Conference on Machine Learning*, number 1398 in *Lectures Notes in Artificial Intelligence*, pages 137-142, Heidelberg. Springer Verlag, 1998.

Надійшла до редколегії 26.11.2012

УДК 519.6

Галкін О.В., к. ф.-м. н.

Апроксимація рядів динаміки за допомогою нейронних мереж

У статті розглядається апроксимація динамічного ряду з використанням радіально-базисної та узагальнено-регресійної нейронних мереж.

Ключові слова: нейронна мережа, радіально-базисна нейронна мережа, узагальнено-регресійна нейронна мережа

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: galkin@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Вступ.

В даний час існує принципова задача побудови альтернативних сценаріїв розвитку складних систем. Ці проблеми тим більш актуальні, якщо доводиться вибирати не між хорошим і кращим, а між поганим і дуже поганим варіантом. Проблема пошуку стійких і безпечних шляхів розвитку має безпосереднє відношення до нелінійної динаміки. Соціально-технологічні об'єкти являють собою складні ієрархічні системи з різними ступенями нестійкості та меж передбачуваності. В економічній системі горизонт прогнозування різко зменшився: якщо ще 15 років тому нормою в світі було 5-річне директивне або індикативне планування, то зараз про це говорити не доводиться. У світі стає все більше пропозицій «швидких грошей» і все менше «повільних». З іншого боку, сталий розвиток суспільства вимагає стратегічних цілей, що повільно змінюються. Тому необхідні нові інструменти, які дозволять б аналізувати можливу динаміку «різночасових систем» і на цій основі спрямовувати їх розвиток. Сьогодні при

O.V.Galkin, Ph.D

Aproximation of the dynamic range using neural networks.

In this paper we consider the approximation of the dynamic range using radial basis and generalized regression neural networks.

Key Words: neural networks radial basis neural networks, generalized regression neural networks

Taras Shevchenko Kiev National University
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: galkin@unicyb.kiev.ua

аналізі подібних систем на перший план виходить нелінійна динаміка [1], пов'язана з пошуком єдиних механізмів в нелінійних системах різної природи. Модель об'єкта, котрим може бути як окрема галузь, так і сукупність галузей економіки, дозволяє аналізувати безліч потенційних шляхів розвитку об'єкта (або окремих характерних рис явища, що супроводжує розвиток об'єкта) і вибирати найраціональніший шлях його розвитку відповідно до цілей і завдань поставлених дослідником. Для пошуку таких шляхів розвитку та побудови моделей в складних нелінійних системах використовується ряд спеціальних математичних методів.

Основним математичним апаратом нелінійної динаміки є, як правило, нелінійні рівняння в частинних або в звичайних похідних. Тільки такі рівняння можуть демонструвати великий спектр різних режимів, на відміну від звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Однак частина з цих рівнянь не має аналітичного рішення, яке є найбільш цінним для аналізу, тому

використовуються численні числові алгоритми вирішення таких рівнянь і побудови фазових діаграм. Необхідність побудови фазових і біфуркаційних діаграм виходить з завдання аналізу довготермінової (глобальної) динаміки динамічної системи, а також виявлення локальних особливостей поведінки системи.

В даний час поряд з традиційними математичними способами побудови моделей систем розроблені сучасні методи, до яких відноситься апарат нейронних мереж.

Нейронні мережі.

Нейронні мережі [2-3] дозволяють вирішувати завдання, з якими не можуть впоратися традиційні методи; вони здатні успішно вирішувати завдання, спираючись на неповну, зашумлену та спотворену інформацію. Нейронна мережа - це система, що складається зі сукупності простих обчислювальних елементів (нейронів), певним чином пов'язаних між собою. Найпоширенішими є багатопшарові мережі, в яких нейрони об'єднані в шари. Шар, в свою чергу, - це сукупність нейронів, до яких в кожен такт часу паралельно надходить інформація від інших нейронів мережі, тобто виходи нейронів з'єднуються з входами інших нейронів. Так сигнал від одного елемента передається іншим. Після того, як визначено число шарів і число елементів в кожному з них, потрібно навчити мережу, тобто знайти значення для ваг і порогів мережі, які мінімізували б помилку прогнозу, який видає мережа. Для цього існують алгоритми навчання. Помилка для конкретної конфігурації мережі визначається шляхом прогону через мережу всіх наявних спостережень і порівняння значень, які видає мережа з бажаними (цільовими) значеннями. По суті, процес навчання є підгонкою моделі, що реалізується мережею, до наявних навчальних даних. Застосування нейронних мереж в економічному моделюванні та прогнозуванні дозволяє вирішувати наступні класи завдань:

- кластеризація / категоризація даних і пошук залежностей;
- прогнозування;
- оптимізація;

- знаходження оптимального керуючого впливу на систему.

Основними недоліками апарату нейронних мереж є:

- відсутність точної теорії за вибором структури нейронних мереж;
- практична неможливість вивчення набутих знань з навченої нейронної мережі.

Застосування нейромережевих технологій і методів нечіткої логіки з урахуванням їх властивостей (навчання, абстрагування та узагальнення) дозволяє розробляти компактні гнучкі системи моделювання, прогнозування та управління, які з істотно меншими витратами дозволяють вирішувати практичні завдання.

При побудові нейромережевих моделей перше, треба визначити кількість шарів. Шар, в свою чергу, - це сукупність нейронів, на які в кожен такт часу паралельно надходить інформація від інших нейронів мережі, тобто виходи нейронів з'єднуються з входами інших нейронів. Так сигнал від одного елемента передається іншим. Після того як визначено число шарів і число елементів в кожному з них, потрібно навчити мережу, тобто знайти значення для ваг і порогів мережі, які мінімізували б помилку прогнозу, який видає мережею. Для цього існують алгоритми навчання. Помилка для конкретної конфігурації мережі визначається шляхом прогону через мережу всіх наявних спостережень і порівняння вихідних значень, які реально видає мережа з бажаними (цільовими) значеннями. По суті, процес навчання являє собою підгонку моделі, яка реалізується мережею, до наявних навчальних даних.

Нейромережева апроксимація ряду динаміки.

Розглянемо задачу апроксимації ряду динаміки, тобто побудови моделі за кінцевим набором точок. Ряд представлений на рис.1

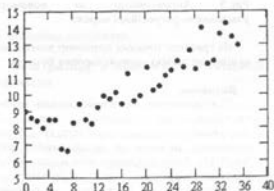


Рис.1 Обсяг експорту товарів.

Пристаючи до розробки нейромережевої моделі, як правило, зустрічаються із проблемою вибору структури нейронної мережі. Завдання апроксимації експериментальних даних можна вирішувати за допомогою мереж наступних типів: багатошарового персептрона, мереж з радіально-базисними функціями, узагальнено-регресійних, лінійних мереж. Розглянемо розв'язок завдання апроксимації динамічного ряду з використанням нейронних мереж радіально-базисного типу та узагальнено-регресійного типу [4].

Радіально-базисна нейронна мережа має проміжний шар з радіальних елементів, кожний з яких відтворює гаусову поверхню відгуку

$$f(s) = \exp(-s^2/\sigma^2),$$

де параметр σ визначає радіус впливу кожної базисної функції та швидкість прагнення до нуля при віддаленні від центру.

Оскільки ці функції нелінійні, то досить одного проміжного шару, необхідно лише підібрати потрібне число радіальних елементів. Залишається розв'язати питання про те, як слід скомбінувати виходи прихованих радіальних елементів, щоб одержати з них вихід мережі. Виявляється, що досить підібрати їх лінійну комбінацію (тобто зважену суму гаусових функцій). Радіально-базисна нейронна мережа має вихідний шар, що складається з елементів з лінійними функціями активації (рис.2).

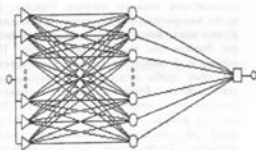


Рис.2 Радіально-базисна нейронна мережа.

Процес навчання радіально-базисних нейронних мереж включає дві стадії: процес налаштування центрів базисних функцій і навчання нейронів у схованому шарі.

У результаті моделювання радіальної базисної мережі для реальних даних була отримана апроксимуюча функція, представлена на рис.3.

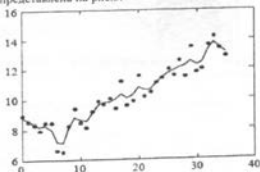


Рис.3 Апроксимація радіально-базисною нейронною мережею

Узагальнено-регресійна нейронна мережа в якості першого проміжного шару має радіально-базисний шар, другий проміжний шар - лінійний (рис. 4). Узагальнено-регресійна нейронна мережа копіює всередину себе всі навчальні спостереження і використовує їх для оцінки відгуку в довільній точці. Остаточна вихідна оцінка мережі виходить як зважене середнє виходів з цієї мережі. Величини спостережень, де величини ваг відображають відстань від цих спостережень до тієї точки, в якій проводиться оцінювання, і, таким чином, більш близькі точки вносять більший внесок в оцінку. Другий проміжний шар містить елементи, які

допомагають оцінити зважене середнє. Для цього використовується спеціальна процедура. Кожен вихід має в цьому шарі свій елемент, що формує для нього зважену суму. Щоб одержати зі зваженої суми зважене середнє, цю суму треба поділити на суму вагових коефіцієнтів. Останню суму обчислює спеціальний елемент другого шару. Після цього у вихідному шарі відбувається власне поділ (за допомогою спеціальних елементів «поділу»). Таким чином, число елементів в другому проміжному шарі на одиницю більше, ніж у вихідному шарі.

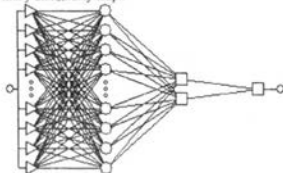


Рис.4 Узагальнено-регресійна нейронна мережа

Процес навчання узагальнено-регресійної нейронної мережі аналогічний навчанню радіально-базисної нейронної мережі. Спочатку налаштовуються центри базисних функцій, потім навчається вихідний шар. Узагальнено-регресійна мережа має єдиний керуючий параметр навчання, значення якого має вибиратися користувачем - ступінь згладжування.

Результати апроксимації даних із застосуванням узагальнено-регресійної нейронної мережі наведено на рис. 5.

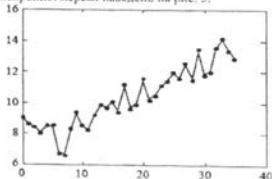


Рис.5 Апроксимація за допомогою узагальнено-регресійної мережі

На графіках точками позначені вихідні дані, суцільною лінією - апроксимуюча функція.

Висновок.

Підсумовуючи викладене, можна зробити висновок, що нейронні мережі не поступаються традиційному методу побудови трендових моделей із застосуванням рядів Фур'є [5]. Тому нейронмережові моделі можуть використовуватися для аналізу та прогнозування подальшої поведінки розглянутих процесів.

Список використаних джерел

1. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Meyer A.G. Qualitative theory of the second order dynamical systems. M.: Nauka, 1966. 236p.
2. Haykin S. Neural Networks. Prentice Hall, New Jersey, 2006, 1104p.
3. Mkrtychan S.O. Neurons and neural networks. M.: Energy, 1971. 231p.
4. Albert A. Regression, pseudoinversion and recursive estimation. M.: Nauka 1977. 400p.
5. Tolstov G.P. Fourier series. M.: Nauka 1980. 381p.

Надійшла до редколегії 23.11.2012

УДК 519.7

О.А. Галкіна, аспірантка

Міри ризику в проблемах оптимізації портфеля

У даній роботі представлена проблема оптимізації портфеля, що визначається як проблема розподілу капіталу серед різних активів для отримання максимального доходу від інвестицій та мінімізації ризиків. У цій статті розглянуто одноетапну проблему оптимізації портфеля, наведено сучасні характеристики міри ризику та побудовано міри ризику з необхідними властивостями.

Ключові слова: ризик, портфель, актив, дисперсія

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глущкова 4д, e-mail: o.a.galkina@yandex.ru

Olga A. Galkina, postgraduate (PhD)

Risk measures in the portfolio optimization problems

In this paper the portfolio optimization problem as the problem of allocating capital over different assets in order to maximize the return on the investment and minimize its risk is presented. In this paper we consider one-stage portfolio optimization problems, present new characterizations of the risk and construct the risk measures with desirable properties.

Key words: risk, portfolio, asset, variance

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: o.a.galkina@yandex.ru

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анисимов А.В.

The problem of allocating capital over different assets in order to maximize the return on the investment and at the same time minimize its risk is called the portfolio optimization problem. Usually portfolio returns are uncertain and investors want to maximize the expected return of the investment. Representation of different characteristics of the risk is a very difficult problem. Markowitz was the first one who introduced the first portfolio optimization problem. In his representation risk was characterized by the variance of the return. Afterwards, lots of other characterizations of risk were proposed.

In the problem of decision-making the objective function is chosen in an appropriate way in order to show all the risks associated with the sequence of decisions that must be taken. Then, the problem can be represented as a linear or quadratic problem.

In this paper we consider one-stage portfolio optimization problems, present state of the art characterizations of the risk and construct a risk measure with desirable properties.

Introduction

Let there exist I assets, and denote by $\xi := [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_I]$ their random returns. Returns are modeled in a probability space $(R', B(R'), P)$, where the Borel σ -algebra $B(R')$ defines the set of

total returns that are assigned probabilities by the probability measure P . Let we have the amount W_0 to invest. In one-stage portfolio optimization, we have to decide on the amount w_i that should be invested in each of the assets $i, i = 1, \dots, I$ such that $\sum_{i=1}^I w_i = W_0$. Let define $w := [w_1, \dots, w_I]$ and the total portfolio return r_p can be presented as $r_p = w^T \xi$. Two main characteristics that could describe each investor: greediness and risk-aversion. Every investor tries to maximize the expected portfolio return and minimize its risk. The expected rates of returns are $E(\xi) = [E(\xi_1), E(\xi_2), \dots, E(\xi_I)]$ and thus the expected portfolio return r_p is $r_p = w^T E(\xi)$. Risk of an investment could be described in different ways. It could be presented as the variability of the portfolio return due to market changes and uncertain events.

Coherent risk measure

Let introduce a general probability space (Ω, F, P) and a linear space of measurable functions $Z := \{Z: \Omega \rightarrow R\}$. Let the functional

$\rho: Z \rightarrow R$ be a risk measure. The number $\rho(Z)$ is interpreted as the minimum extra cash the investor will add to the risky position Z and invest it in a risk free asset to be allowed to proceed in appropriate time with risk value 0. In a same manner, if the number $\rho(Z)$ is negative, then cash amount $-\rho(Z)$ can be withdrawn from the position. The functional ρ is a coherent risk measure for Z' , if it satisfies the following axioms:

- positive homogeneity:

If $\alpha \geq 0$ and $Z \in Z'$, then $\rho(\alpha Z) = \alpha \rho(Z)$. It means that if an investment in a portfolio is increased (decreased), the risk increases (decreases) by the same factor.

- translation invariance:

If $\alpha \in R$ and $Z \in Z'$, then $\rho(Z + \alpha) = \rho(Z) - \alpha$. It means that adding a risk free amount α to the initial position Z , decreases the risk by α . If $\alpha = \rho(Z)$ then $\rho(Z + \rho(Z)) = 0$, which follows our interpretation of $\rho(Z)$ given above.

- monotonicity:

If $Z_1, Z_2 \in Z'$ and $Z_1 \leq Z_2$, then $\rho(Z_1) \leq \rho(Z_2)$. It means that if a portfolio Z_1 has worse values than portfolio Z_2 under all realizations, then the risk of Z_1 should be greater than the risk of Z_2 .

- sub-additivity:

If $Z_1, Z_2 \in Z'$, then $\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$. It means that the risk of two separate portfolios can not be smaller than the risk of having both portfolios together.

Theorem 1. Coherent risk measures are convex functions.

Proof.

We suggest that $Z_1, Z_2 \in Z'$ and we should proof that:

$$\forall \lambda = [0, 1]$$

$$\rho(\lambda Z_1 + (1 - \lambda) Z_2) \leq \lambda \rho(Z_1) + (1 - \lambda) \rho(Z_2)$$

We can write:

$$\begin{aligned} \rho(\lambda Z_1 + (1 - \lambda) Z_2) &\leq \rho(\lambda(Z_1) + \rho((1 - \lambda) Z_2)) \\ &= \lambda \rho(Z_1) + (1 - \lambda) \rho(Z_2) \end{aligned}$$

where the inequality holds due to sub-additivity property. The equality holds due to positive homogeneity property.

The theorem is proven.

Variance

An important measure used to describe a portfolio risk is the variance δ_p^2 of the portfolio. Having the variance of each individual asset i (δ_i^2) and the covariance between assets i and j (δ_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, I\}$), the variance of the portfolio is defined as:

$$\begin{aligned} \delta_p^2 &= E((r_p - \bar{r}_p)^2) \\ &= E((\sum_{i=1}^I w_i \xi_i - \sum_{i=1}^I w_i E(\xi_i))^2) \\ &= E((\sum_{i=1}^I w_i \xi_i - E(\xi_i))(\sum_{j=1}^I w_j \xi_j - E(\xi_j))) \quad (1) \\ &= E(\sum_{i,j=1}^I w_i w_j (\xi_i - E(\xi_i))(\xi_j - E(\xi_j))) \\ &= \sum_{i,j=1}^I w_i w_j \delta_{ij} \\ &= w^T \Sigma w \end{aligned}$$

In our notation Σ - covariance matrix. Variance as a risk measure has one important disadvantage: penalizing both profits and losses. However, investors try to minimize only the possibility of losses.

Value at Risk

Value at Risk VaR is a risk measure defined as a threshold loss value $\alpha \in R$ that is, by the end of the investing period, only exceeded with a probability level $(1 - \beta) \in R$. Let $f(w, \xi)$ be the loss associated with the decision vector $W \in R^I$ and the random vector $\xi \in R^I$. The underlying probability distribution of $\xi \in R^I$ has a density denoted by $p(\xi)$. The probability of $f(w, \xi)$ not exceeding a threshold $\alpha \in R$ is given by:

$$\Psi(w, \alpha) = \int_{f(w, \xi) \leq \alpha} p(\xi) d\xi \quad (2)$$

We define the β -VaR values for the loss random variable associated with w and any specified probability level $\beta \in (0, 1)$ denoted by $\alpha_\beta(w)$ using the following equation:

$$\alpha_\beta(w) = \min \{ \alpha \in R : \Psi(w, \alpha) \geq \beta \} \quad (3)$$

Conditional Value at Risk

Conditional Value at Risk (CVaR) is a coherent risk measure, which takes into account the conditional expected value of loss, under the condition that it exceeds the VaR value. This is defined by:

$$\phi_\beta(w) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(w, \xi) \geq \alpha_\beta(w)} f(w, \xi) p(\xi) d\xi \quad (4)$$

Comparing CVaR and VaR, we can see that CVaR is more conservative risk measure than VaR:

$$\alpha_\beta(w) \leq \phi_\beta(w).$$

We define the function $F_\beta(w, \alpha) : R^I \times R \rightarrow R$:

$$\begin{aligned} F_\beta(w, \alpha) &= \alpha + (1 - \beta)^{-1} \\ &\times \int_{\xi \in R^I} [f(w, \xi) - \alpha]^+ p(\xi) d\xi \\ &= \alpha + (1 - \beta)^{-1} E([f(w, \xi) - \alpha]^+) \end{aligned} \quad (5)$$

where $[x]^+ = x, x \geq 0$ та $[x]^+ = 0, x \leq 0$

Theorem 2. As a function of (w, α) , $F_\beta(w, \alpha)$ is convex and continuously differentiable. The β -CVaR of the loss associated with any $w \in R^I$ can be determined by

$$\phi_\beta(w) = \min_{\alpha \in R} F_\beta(w, \alpha) \quad (6)$$

Additionally, minimizing the β -CVaR of the loss associated with w over all feasible $w \in R^I$ is equivalent to minimizing $F_\beta(w, \alpha)$ over $(w, \alpha) \in R^I \times R$, in a sense that:

$$\min_{w \in R^I} \phi_\beta(w) = \min_{(w, \alpha) \in R^I \times R} F_\beta(w, \alpha) \quad (7)$$

Proof [3].

Value at Risk vs. Conditional Value at Risk

CVaR is much better representation of risk than VaR:

1. CVaR is a more conservative risk measure: $CVaR \geq VaR$
2. CVaR measures only downside risk
3. CVaR is a coherent and convex measure of risk

Mean-variance efficient portfolio

Harry Markowitz was the first one who found the first mathematical model for the portfolio selection problem and found that optimal (efficient portfolio) could be specified by solving a convex quadratic program. In his model, Markowitz measured the 'return' and 'risk' of a portfolio by the mean and variance respectively. Markowitz portfolio model is known as the mean-variance model.

The mean-variance efficient portfolio defines portfolios with minimal variance given the required expected return $\bar{r}_p$. It can be formulated as the following optimization problem:

$$\begin{aligned} \min \delta_p^2 &= w^T \Sigma w \\ \text{s.t. } w &\in R^I \\ w^T e &= W_e \\ w^T E(\xi) &\geq \bar{r}_p \end{aligned} \quad (8)$$

Efficient frontier can be obtained by plotting the standard deviation σ_p of the solutions of the problem (8) for all possible values of $\bar{r}_p$. Portfolios that lie on the efficient frontier have the minimal variance for a given expected return $\bar{r}_p$. Bounds $[r_p^{\min}, r_p^{\max}]$ for all possible values of $[r_p^{\min}, r_p^{\max}]$ can be obtained by solving two special portfolio optimization problems. In order to obtain the upper

bound $r_p^{\max}$, the maximal value of the total expected return must be found without considering risk. If w^* is the optimal solution of the problem

$$\begin{aligned} \min w^T E(\xi) \\ s.t. w \in R^I \\ w^T e = W_0 \end{aligned} \quad (9)$$

then $r_p^{\max} = w^{*T} E(\xi)$.

In order to obtain the lower bound $r_p^{\min}$, the minimal value of the variance must be found without imposing a target expected return in the constraints of the problem. If w^* is optimal solution of the problem

$$\begin{aligned} \min w^T \Sigma w \\ s.t. w \in R^I \\ w^T e = W_0 \end{aligned} \quad (10)$$

then $r_p^{\min} = w^{*T} E(\xi)$.

Mean-CVaR efficient portfolio

The efficient frontier of other risk measures can be constructed similarly. The mean-CVaR efficient portfolio is the solution of the following optimization problem:

$$\begin{aligned} \min \alpha + (1 - \beta)^{-1} E(Z(\xi)) \\ s.t. \alpha \in R, w \in R^I, z \in L_{I,1}^n \\ z(\xi) \geq 0 \\ z(\xi) \geq -w^T \xi - \alpha \\ w^T e = W_0 \\ w^T E(\xi) \geq r_p \end{aligned} \quad (11)$$

where $L_{I,1}^n$ defines the space of all Borel measurable functions from R^I to R in n variables.

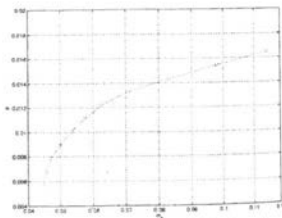


Figure 1. Example of the efficient frontier

Conclusion

In this paper the portfolio optimization problem as the problem of allocating capital over different assets in order to maximize the return on the investment and minimize its risk is presented. Usually portfolio returns are uncertain and investors want to maximize the expected return of the investment. Representation of different characteristics of the risk is a very difficult problem.

In the problem of decision-making the objective function is chosen in an appropriate way in order to show all the risks associated with the sequence of decisions that must be taken. Then, the problem can be represented as a linear or quadratic problem. In this paper we consider one-stage portfolio optimization problems, present new characterizations of the risk and construct a risk measure with desirable properties.

Having discussed the advantages of the Conditional Value at Risk, we conclude that it is much better to use it as a risk measure in the optimization problems instead of portfolio variance and Value at Risk metric.

References

1. H.M. Markowitz. Portfolio selection, J. Finance 7, (1952), pp. 77–91.
2. M. Kaut. Scenario generation for stochastic programming. Presentation, (2006).
3. S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications. Financial engineering news, (2000).

Надійшла до редколегії 21.11.2012

УДК 004.8

Ефімов Г.М.¹, к.т.н., ст. викладач**Технологія для моделювання і
розпізнавання емоцій на обличчі людини**

В даній статті розглядається інформаційна технологія для автоматичного визначення і розпізнавання довільного емоційного стану обличчя людини як виуклої комбінації деяких базисних емоційних станів.

Ключові слова: інформаційна технологія, аналіз мімічних проявів, B-сплайн апроксимація.

¹Таврійський державний агротехнологічний університет 72316 м. Мелітополь, Запорізька обл., проспект Б.Хмельницького, 18, e-mail: doggod70@gmail.com

G.M. Efimov, PhD in Tech., lecturer

**Technology for human face emotions
modeling and recognition**

The information technology for the automatic defining and recognition of any emotional condition of an human face as a convex combination of some basic conditions is suggested within this paper.

Key Words: information technology, analysis of facial displays, B-spline approximation.

¹Taurian state agrotechnological university. 72316 Melitopol, Zaporozhye region, 18 B.Hmelnitskogo's av, e-mail: doggod70@gmail.com

This paper was presented by Denis Khusainov, Ph. D., Prof.

Introduction and Problem Statement

Modeling and recognition of emotions are one of the channels for nonverbal signaling and regulating communications which physical show the emotions of an individual, are an important direction of research for the creation of computer recognition systems and visual image synthesis. An insufficient amount of research into the question of differential facial expressions relating to emotions and the practical application for safety, crime, virtual reality, the computer interface and so on, are some of the reasons for further and much needed research.

The research aim is the working out of method, models and algorithms for the modeling and recognition of displays of various emotions from a photo of an individual.

**The development for the methods of the
recognition of an individuals facial displays
of emotions**

Based on the papers Izard [1], who developed a system of coding of basic emotional facial displays (Facial Action Coding System or FACS). And this system is based on an individuals basic facial expressions and facial movements and on the papers of Ekman [2] who determined with sufficient accuracy that there are basic facial expressions regardless of nationality and culture, following further research it was established there was a link between the persons emotions and facial displays. After further research it was shown that there were certain common facial expressions in all individuals depending on their common emotional state.

On the basis of analyzing existing psychological models of emotional displays [3], the formal psychological model [4] that operated with formal designations of the emotional conditions is proposed.

For the proposed formal model of emotional conditions, the formal model of displays of these emotional conditions was designed and constructed i.e. it is the transition from certain facial points which describe certain basic emotions in certain situations and transposing them to characterize a visual sign for basic emotional conditions.

To formal identify the visual signs for basic emotional conditions, for the construction of the basis of model of emotional conditions and the reproduction of the derivative emotional conditions the following were carried out and completed: a number of photographic images of actors displaying various facial expressions were used as the base for the model and the similar facial chrematistics found in the different emotions reflected within these photographic images was described; the photographic images of actors where analyzed for the purpose of revealing the area of face which contained characteristic signs of emotions and using both human anatomy and FACS; after the analyzing and the revealing of the areas of the face which contains characteristic signs of emotions this was the basis for the separation of the characteristic into vectors; the received chrematistic signs were analyzed and grouped systematically according to the degree of influence and importance relating to an emotion.

During the research 21 different facial characteristic signs, when combined they formed the basis of emotional displays and these were identified and recorded.

In the paper [5], for the transition from the phenomenological definition of these characteristic signs to the formalization it was proposed to use a method of a model that was modified and updated by ourselves. This updated model identified identical characteristic facial features subject to an emotion. This model was created by means of non-uniform rational basis splines – NURBS-curves.

The advantage of modeling a facial contour by means of NURBS-curves is in the following: 1) the dimension decreased several times and in ratio; 2) the deformation of NURBS-curves (for imitation of emotional displays) are clearer and more easily defined, similar to the facial movement and expression of a real person.

The reduction of these dimensions was a result of the transition from the photographic image pixels (thousands of small points) to the operating points of the NURBS-curves (on this system one point equals ten pixel points). A more clearer deformation of curves resulted from the properties of these curves.

Within the research the model was constructed of various templates – NURBS-curves which corresponded to the contours of eyebrows, eye and mouth. The 21 different facial characteristic signs identified in earlier research are set by means of NURBS-curves. Recognizing that certain reference points of these NURBS-curves defined a particular curve during the research only these certain vector of reference points of these NURBS-curves were used.

Several basic models for the confirmation of the possibility of these vector reference points to be able to create characteristic signs were analyzed. During research this confirmation was confirmed.

To receive upon the image the dot curves that corresponded to the contours of eyebrow, eye and mouth it was required to create an contour of the image [6], which simulated the reaction of an eye receptor in a human.

For the automatic deformation of the dot curves, the approximation with assistance of the B-spline curves was used. A problem of B-spline approximation is a problem of adjustment of the B-spline curve with a reference point to a dot curve and it was necessary to redefine the linear equation system.

On the basis of the developed method of analyzing the facial display of emotions the following finished and completed information technology was proposed.

1) from the same focal point and using the same illumination a series of eight photographic images were taken of different individuals. Each of these photographic images showed their facial reaction to emotions such as pleasure, grief, hope, fear, satisfaction, anger (see fig.1), interest and neglect;



Fig. 1 The photographic image corresponding to the basic emotion of anger

1. The eyebrows were closer together and arching downwards with vertical wrinkles between them.

2. The upper eyelids are partly closed with the lower eyelids also partly closed and are arched upwards.

3. The mouth is closed with the lips being tightly clinched together.

2) with the software we normalized the image of the centre of the eyes (for this purpose corresponding labels on the image panel could be regulated with the assistance of the software);

3) by using the known technologies of contouring and skeletonizing of photographic images contours of the following parts of a face were created, wrinkles on the forehead, eyebrows, upper and lower eyelids, small wrinkles near the outside of the eyes, wrinkles under the mouth (fig.2) and eyelids, wrinkles stretching from the nose to the corner of the mouth,

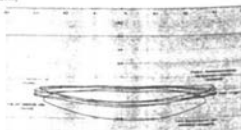


Fig. 2 A contour of a mouth in the form of the NURBS-curves template

4) using flexible templates in the form of NURBS-curves and a B-spline approximation a set of reference points of NURBS-curves for templates that characterized each of the eight base emotions (1 above) was found (fig. 3);

5) from the research and identification of reference points of the NURBS-curves (templates) and a vector of characteristic facial signs for wrinkles the basis of emotional conditions of an individual is under construction.



Fig. 3 The image with the integrated NURBS-curves for the basic emotion of anger

Results of modeling

For the analysis of individuals photographic image taken randomly items 1 to 4 must be carried out. As a result of the analysis of any photographic image of any emotion the vector which consists of NURBS-curves reference points and a vector of characteristic facial signs for wrinkles was discovered. The arranging for construction of the basis in 5), the factors and each of the factors value which define their contribution to the facial expressions relating to the eight emotions as in 1 above were found.

As an example of the realization of information technology in fig. 4 situations resulting in the emotions of fault and sympathy were reproduced.



Fig. 4 The image of the integrated NURBS-curves for the derivate emotions of fault and sympathy

For the emotion of «self fault» the following factors of a convex combination of basic conditions were found: $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.3$, all others are equal

to zero, where $\alpha_i, i=1,8$ correspond to the following emotional conditions, pleasure, grief, hope, fear, satisfaction, anger, interest and neglect. According to the formal model of emotions the condition which consists of a combination of satisfaction and grief this combination corresponds to the emotion of «self fault».

Conclusions

The mathematical model and the finished information technology for the automatic facial recognition of any emotional condition of any individual as convex combination of some basic conditions are proposed. For this purpose with the assistance of a mathematical model and the original

computer software, the basic emotional state of any individual are created within the computer space and then within the computer space any displays of emotion by an individual are recreated and displayed as a convex combination in this computer space.

For the construction of this basis computer space facial emotional conditions it was necessary to design and construct flexible templates by means of NURBS-curves.

Any adjustment of a flexible template for a dot contour of a photographic image of an individual was achieved with the help of the V-spline and an approximation created by the decision of the non-uniform system of the linear equations.

The offered technology has practical value in systems of visual control over an emotional condition of an individual in many spheres of human activity where a large degree of concentration is required and necessary and it is required to make decision in real time. Any further research will be direct towards improving methods and algorithms of automatic recognition of facial emotional displays of an individual and to develop the system so that it automatically allows for the recognition of these facial emotional signals during the natural aging process of an individual.

References

1. K. Izard. Psychology of emotions / K. Izard. - St.Petersburg, 2009. - 464p.
2. P. Ekman. Felt, false and miserable smiles / P.Ekman, Friesen W.V. //Journal of Nonverbal Behavior. - 1982. - V6(4). - P. 238-252.
3. Іу.І. Крак. Synthesis of fasial expressions of emotions on the basis of formal model / Іу.І. Крак, О.І. Бармак, Г.М. Ефімов//Artificial intelligence.-2007.-№ 2.-Р. 22-31. (in Ukrainian)
4. І.О. Леонтьєв. Classification of emotions. - Odessa: 2002. - 84p. (in Ukrainian).
5. Іу.І. Крак. Application of planimetric models for the construction of basic of facial emotional expressios space / Іу.І. Крак, О.І. Бармак, Г.М.Ефімов// Artificial intelligence. - 2007. - № 4. - P. 288-296. (in Ukrainian).
6. Іу.І. Крак. Modeling and analysis of facial emotional expressions of an individual / Іу.І. Крак, О.І. Бармак, Г.М. Ефімов// Bulletin of Taras Shevchenko Kiev National University.Cybernetics. - 2008. - №8 - P. 37-41. (in Ukrainian).

Arriving to an editorial board 26.11.12

УДК 004.4

Іванов Є.В.¹, аспірант**Підхід до композиції абстрактних систем
обробки сигналів**

У статті формалізовано поняття системи обробки сигналів на абстрактному рівні і запропоновано метод композиції для широкого класу таких систем. Запропонована формалізація базується на понятті сигналу як величини, що змінюється у часі, ланки як абстрактної (і можливо не детермінованої) системи обробки сигналів, структурної схеми як сукупності з'єднаних ланок і композиції як операції, яка відображає структурні схеми у ланки.

Ключові слова: абстрактна система обробки сигналів, композиція, структурна схема.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: ivanov.eugen@gmail.com

Ie. V. Ivanov¹, PhD student**An approach to composing abstract signal
processing systems**

We formalize the notion of a signal processing system on an abstract level and propose a method of composing a large class of such systems. Our formalization is based on the notions of a signal as a time-varying quantity, a block as an abstract (and possibly non-deterministic) signal processing system, a block diagram as a collection of interconnected blocks, and a composition as an operation which maps block diagrams to blocks. Key Words: abstract signal processing system, composition, block diagram.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: ivanov.eugen@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

1. Introduction

Many software tools for developing control and signal processing systems are based on block diagram notations familiar to control engineers. Such diagrams consist of blocks (components) connected by links. The blocks may or may not represent physical entities, but in general, they describe operations which transform input signals (as time-varying quantities) into output signals. Examples include system design software *Simulink*, *Scicos*, *Dymola*, *SCADE*, some embedded synchronous languages [8], some embedded programming languages [10, 11].

Wide applicability of block diagram notations makes them an interesting object of study from a theoretical perspective. Classical control theory and signal processing provide some degree of formal treatment of block diagrams, but this is usually not sufficient to handle important aspects of modern system design languages, e.g. mixing of analog and discrete-time blocks, partially defined block operations, non-numeric data processing, computational aspects, etc.

To take these issues into account, researchers gave a formal semantics to block diagram languages (and more generally, hybrid system modeling language)

implemented by system modeling tools [3, 12].

Some effort has been made to unify approaches taken by different engineering system modeling and analysis tools and make them interoperable by the use of exchange languages with well-defined semantics [6, 13] such as *Hybrid System Interchange Format* (HSIF) which represents hybrid systems as dynamic networks of hybrid automata [5, 9].

Although hybrid automata-based approaches like HSIF can be used to give semantics to block diagram languages [14], we consider them not entirely satisfactory from a theoretical standpoint for the following reasons:

1) Semantics of a system component (block) is based on the notion of a dynamical system with internal state which may not be observable from outside of a component. Thus components with the same externally observable behavior can be semantically distinguishable. In our opinion, this is not needed, if semantics is high-level and does not aim to describe the details of the component's implementation.

2) Semantics of a system has a computational nature: it describes a sequence of discrete steps, where a step may involve function computations, solving initial-value problems for differential

equations, etc. It is adequate in certain cases, but it does not always capture the behavior of a physical realization of a system. For example, a Zeno execution [5] of a hybrid automaton can be described as an infinite sequence of discrete steps which takes a bounded total time (each step takes a non-zero time). This normally does not correspond to the behavior of a physical system described by the automaton. Usually, this is caused by the system modeling simplifications. The conflict is normally resolved by applying some method of continuation of an execution beyond Zeno time (regularization, Filippov solution, etc.) [7]. But an extended execution is not, in fact, a sequence of discrete steps, as it resumes after the accumulation point.

In our opinion, in the general case, the dynamic behavior of a system should not be restricted to a particular scheme like a sequence of discrete steps and continuous evolutions.

The goal of this paper is to give an abstract semantics to blocks and block diagrams which overcomes limitations of the classical control/signal-theoretic approach to them and does not enforce implementation details or particular kinds of dynamic behavior on blocks. The semantics of block diagrams is based on the notion of a composition as an operation which maps block diagrams (as syntactic objects) into blocks.

2. Notation

We will use the following notation: $\mathbf{R}$ is the set of real numbers, $f: A \rightarrow B$ is a total function from A to B , $f: A \rightarrow B$ is a partial function from A to B , 2^A is the power set of a set A , $f|_X$ is the restriction of a function f onto a set X . If A, B are sets, then B^A denotes the set of all total functions from A to B . For a function $f: A \rightarrow B$ the symbol $f(x) \downarrow$ ($f(x) \uparrow$) means that $f(x)$ is defined (respectively undefined) on the argument x . The symbols $\neg, \vee, \wedge$ denote the logical negation, disjunction and conjunction respectively. The symbols $\sup$ and $\inf$ denote supremum and infimum. The symbol $\circ$ denotes the functional composition: $(f \circ g)(x) = g(f(x))$. The domain and range of a function are denoted as $\text{dom}(f) = \{x \mid f(x) \downarrow\}$ and $\text{range}(f) = \{y \mid \exists x f(x) \downarrow \wedge y = f(x)\}$. We use the same notation for the domain and range of a binary relation: if $R \subseteq A \times B$, then $\text{dom}(R) = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$ and $\text{range}(R) = \{y \mid \exists x (x, y) \in R\}$.

By T we denote the positive real time scale $[0, +\infty)$. We assume that T is equipped with a topology induced by the standard topology on the real numbers. Additionally, we define the following set:

$$T_0 = \{\emptyset\} \cup \{[0, t] \mid t \in T \setminus \{0\}\} \cup \{[0, t] \mid t \in T\}.$$

We will need the notion a multi-valued function:

Definition 1 [2]. A (total) multi-valued function from a set A to B (denoted as $f: A \rightarrow_m B$) is a function $f: A \rightarrow 2^B \setminus \{\emptyset\}$.

An application of a multi-valued function to an argument is interpreted as a non-deterministic choice of a result. The inclusion $y \in f(x)$ means that y is a possible value of f on x .

Also, we will need a notion of a named set to formalize an assignment of values to variable names:

Definition 2 [2]. A named set is a partial function $f: V \rightarrow W$ from a non-empty set of names V to a set of values W .

We will use a special notation for the set of named sets: ${}^V W$ denotes the set of all named sets $f: V \rightarrow W$ (this notation only emphasizes that V is interpreted as a set of names). We consider named sets equal, if their graphs are equal. An expression of the form $[n_1 \mapsto a_1, n_2 \mapsto a_2, \dots]$ (where $n_1, n_2, \dots$ are distinct names) denotes a named set d such that the graph of d is $\{(n_1, a_1), (n_2, a_2), \dots\}$. A nowhere-defined named set is called the empty named set and is denoted as $[\]$.

3. An abstract block

In this section we introduce abstract notions of a signal as a time-varying quantity and a block as a signal transformer. We will use a real time scale for signals, but we will not require them to be continuous or real-valued. In particular, signals can be piecewise-constant and can be used to represent discrete-time evolutions.

Informally, a block (see Fig. 1) is a device which receives input signals and produces output signals. We call a collection of input (output) signals an input (resp. output) signal bunch. At each time moment (the value of) a given signal may be present or absent. In the general case, the presence of an input signal at a given time does not imply the presence of an output at the same or any other time moment.

A block may operate non-deterministically, i.e. for one input signal bunch it may choose an output signal bunch from a set of possible variants. But for any input signal bunch there exists at least one corresponding output signal bunch (though the values of all signals in it may be absent at all times which means that the block does not produce output values).

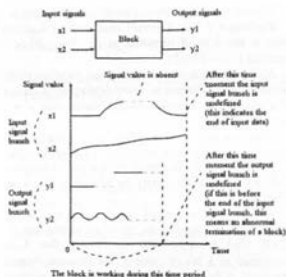


Fig. 1. A block with input signals x_1, x_2 and output signals y_1, y_2 . The plot displays example evolutions of input and output signals. The input and output signals are lumped into an input and output signal bunch respectively. Solid curves represent (present) signal values. Dashed horizontal segments indicate signal absence. Dashed vertical lines indicate the right boundaries of the domains of signal bunches

Normally, a block processes the whole input signal bunch and does or does not produce output values. However, in the general case, a block may not process the whole input signal bunch and may terminate before its end. This is interpreted as an abnormal situation (e.g. caused by invalid input).

Let W be a non-empty set of values.

Definition 3.

- (1) A (partial) V -signal bunch (where V is a set of names) is a function $s: T \rightharpoonup V$ such that $\text{dom}(s) \in \mathcal{T}_0$. The set of all V -signal bunches is denoted as $Sb(V, W)$.
- (2) A signal bunch is a partial V -signal bunch for some V .
- (3) A signal bunch s is called trivial (denoted as $\perp$), if $\text{dom}(s) = \emptyset$ and is called total, if $\text{dom}(s) = T$.
- (4) For a signal bunch s , a signal corresponding to a name x is a partial function $t \mapsto s(t)(x)$. It is denoted as $s[x]$.
- (5) A signal bunch s_1 is a prefix of a signal bunch s_2 (denoted as $s_1 \leq s_2$), if $s_1 = s_2|_A$ for some $A \in \mathcal{T}_0$. Note that $\leq$ on V -signal bunches is a partial order.

Later we will need generalized versions of the prefix relation for pairs and indexed families of pairs of signal bunches. For any signal bunches s_1, s_2, s'_1, s'_2

denote $(s_1, s_2) \leq^2 (s'_1, s'_2)$ iff there exists $A \in \mathcal{T}_0$ such that $s_1 = s'_1|_A$ and $s_2 = s'_2|_A$. For any indexed families of pairs of signal bunches $(s_j, s'_j)_{j \in J}$ and $(s''_j, s'''_j)_{j \in J}$ of signal bunches let us denote $(s_j, s'_j)_{j \in J} \leq^{2,2} (s''_j, s'''_j)_{j \in J}$ iff there exists $A \in \mathcal{T}_0$ such that $s_j = s''_j|_A$ and $s'_j = s'''_j|_A$ for all $j \in J$.

It is easy to check that $\leq^2$ is a partial order on pairs of signal bunches and $\leq^{2,2}$ is a partial order on J -indexed families of pairs of signal bunches.

A block has a syntactic aspect (e.g. a description in some specification language) and a semantic aspect – a partial multi-valued function on signal bunches.

Definition 4.

- (1) A block is an object B (syntactic aspect) together with an associated set of input names $In(B)$, a set of output names $Out(B)$, and a total multi-valued function $Op(B): Sb(In(B), W) \rightarrow_m Sb(Out(B), W)$ (operation, semantic aspect) such that $o \in Op(B)(i)$ implies $\text{dom}(o) \subseteq \text{dom}(i)$.
- (2) Two blocks B_1, B_2 have the same semantics, if $In(B_1) = In(B_2)$, $Out(B_1) = Out(B_2)$, and $Op(B_1) = Op(B_2)$.
- (3) An I/O pair of a block B is a pair of signal bunches (i, o) such that $o \in Op(B)(i)$. The set of all I/O pairs of B is denoted as $IO(B)$ and is called the input-output (I/O) relation of B .

An inclusion $o \in Op(B)(i)$ means that o is a possible output of a block B on the input i . For each input signal bunch i there is some output signal bunch o . The domain of o is a subset of the domain of i . A situation when o becomes undefined at some time t , but i is still defined at t can be interpreted as a fatal error during block's operation (the block cannot resume its operation after t).

The operation of a block on a given input signal bunch is interpreted as a non-deterministic choice of an output signal bunch. However, we would also like to describe this choice as dynamic, i.e. that a block chooses output signal values at each time t , and in doing so it cannot use future values (i.e. values at some time $t' > t$) of input signals (this is normally the case in block diagram languages used for engineering system design).

We formalize this description using the notion of a non-anticipative block.

Definition 5. A block B is non-anticipative, if:

- (1) if $(i, o) \in IO(B)$ and $(i', o') \leq^2 (i, o)$, then $(i', o') \in IO(B)$;
- (2) if $o \in Op(B)(i)$ and $i \leq i'$, then $(i, o) \leq^2 (i', o')$ for some $o' \in Op(B)(i')$.

Lemma 1 given below shows that the notion of a non-anticipative block can be considered as a

generalization of the notion of a causal system which is used in the control theory and signal processing.

Definition 6. A block B is deterministic, if $Op(B)(i)$ is a singleton set for each i .

Lemma 1. Let B be a deterministic block. Then B is non-anticipative iff for all i_1, i_2, o_1, o_2 and $A \in \mathcal{T}_0$ such that $o_1 \in Op(B)(i_1)$, $o_2 \in Op(B)(i_2)$, and $A \subseteq dom(i_1) \cap dom(i_2)$, the equality $i_1|_A = i_2|_A$ implies $o_1|_A = o_2|_A$.

The proof follows from Definition 5 and 6.

Definition 7. A block B is a sub-block of a block B' (denoted as $B \leq B'$), if $In(B) = In(B')$, $Out(B) = Out(B')$, and $IO(B) \subseteq IO(B')$.

Informally, a sub-block has a reduced non-determinism comparing to a block.

Lemma 2. A block B is non-anticipative iff for each pair $(i, o) \in IO(B)$ there exists a non-anticipative deterministic sub-block $B' \leq B$ such that $(i, o) \in IO(B')$.

Proof. "If": The statement follows from the fact that if $IO(B) = \bigcup_j IO(B_j)$ for some family $\{B_j\}$ of non-anticipative blocks, then B is non-anticipative (which itself follows from Definition 5).

"Only if": Let us fix an element $(i, o) \in IO(B)$ and find some $(i', o') \in IO(B)$ such that $dom(i') = T$ and $(i, o) \leq^2 (i', o')$ (this is possible because B is non-anticipative). Using the axiom of choice we can find a functional and total relation $R \subseteq IO(B)$ such that $(i', o') \in R$ and $dom(i') = T$ for all $i' \in dom(R)$. We can define a sub-block B' such that $IO(B') = \{(i, o_1) \mid \exists (i_2, o_2) \in R (i_1, o_1) \leq^2 (i_2, o_2)\}$. It is easy to show that B' is indeed a block and that it is deterministic and non-anticipative. The lemma is proved.

This lemma implies that the operation of a non-anticipative block is determined by the operations of its non-anticipative deterministic sub-blocks. Informally, this allows us to re-interpret the operation of a non-anticipative block as a choice of a non-anticipative deterministic sub-block B' followed by a choice of an output for a given input consistent with the operation of B' .

4. An example of a non-anticipative block

Let us consider an example of a non-anticipative block. Assume that $W = \mathbb{R}$. Let n, m, s be positive integers, and $F_k, G_k: T \times \mathbb{R}^{m+s} \rightarrow \mathbb{R}$, $k=1, 2, \dots, s$, and $H_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j=1, 2, \dots, m$.

For each $\{1, 2, \dots, n\}$ -signal bunch i let $XO(i)$ be the set of all pairs (x, o) , where x is a $\{1, 2, \dots, s\}$ -signal bunch and o is a $Out(B)$ -signal bunch such that

(1) $i|_j$, $j=1, 2, \dots, n$ is defined and measurable on $dom(o)$;

(2) $dom(x) = dom(o)$ and each $x[k]$, $k=1, 2, \dots, s$ is defined and locally absolutely continuous on $dom(o)$;

(3) The next differential-algebraic inclusions hold:

- $dx[k]/dt \in F_k(t, x[1], \dots, x[s], i[1], \dots, i[n])$ almost everywhere (with respect to Lebesgue measure) on $dom(o)$, $k=1, 2, \dots, s$;
- $x[k] \in G_k(t, x[1], \dots, x[s], i[1], \dots, i[n])$ on $dom(o)$, $k=1, 2, \dots, s$;
- $o[j] \in H_j(x[1], x[2], \dots, x[s])$ on $dom(o)$, $j=1, 2, \dots, m$.

We assume that $\perp$ is trivially locally absolutely continuous.

Let $XO_m(i)$ be the set of all maximal elements of $XO(i)$ with respect to $\leq^2$ and $O_m(i) = \{o \mid \exists x(x, o) \in XO_m(i)\}$. The items (1) and (2) of Proposition 1 below show that we can define a block B such that $In(B) = \{1, 2, \dots, n\}$, $Out(B) = \{1, 2, \dots, m\}$, and $Op(B)(i) = O_m(i)$ for each $In(B)$ -signal bunch i , and the items (4), (5) imply that B is non-anticipative.

Proposition 1.

- (1) $O_m(i) \neq \emptyset$ for each i .
- (2) If $o \in O_m(i)$, then $dom(o) \subseteq dom(i)$.
- (3) If $(x, o) \in XO_m(i)$ and $A \in \mathcal{T}_0$, then $(x|_A, o|_A) \in XO_m(i|_A)$.
- (4) If $o \in O_m(i)$ and $A \in \mathcal{T}_0$, then $o|_A \in O_m(i|_A)$.
- (5) If $o \in O_m(i)$ and $i \leq i'$, then $(i, o) \leq^2 (i', o')$ for some $o' \in O_m(i')$.

Proof. Let us show (1). It is easy to check that $(\perp, \perp) \in XO(i)$ and each non-empty $\leq^2$ -chain of elements of $XO(i)$ has an upper bound in $XO(i)$. Then by Zorn's lemma, $XO_m(i) \neq \emptyset$. Hence $O_m(i) \neq \emptyset$.

The statements (2) and (3) follow from the definitions of XO and XO_m , and (4) follows from (3) and the definition of O_m . To show (5), assume that $o \in O_m(i)$ and $i \leq i'$. Then it follows that $(x, o) \in XO_m(i)$ for some x . Using Zorn's lemma we show that there exists a $\leq^2$ -maximal element (x', o') of $XO(i')$ such that $(x, o) \leq^2 (x', o')$. Then $(x', o') \in XO_m(i')$ and $o' \in O_m(i')$. Then using (3) we show $(i, o) \leq^2 (i', o')$.

The proposition is proved.

For each input signal bunch the block B outputs a bunch of signals according to the differential-algebraic inclusions described above. Non-anticipative blocks of this form can describe many kinds of systems studied in the control theory.

It is not difficult to show using the same method that blocks described by commonly used discrete-continuous dynamical system models, e.g. switched systems [5], are also non-anticipative.

5. Composition of blocks

By connecting inputs and outputs of several (non-anticipative) blocks one can form a larger block – a composition of blocks (see Fig. 2). We assume that an output can be connected to several inputs, but each input can be connected not more than to one output. Unconnected inputs and outputs of constituent blocks become inputs and output of the composition. Connections are interpreted as signal equality constraints and they always relate an output of some block ("source") with an input of the same or another block ("target"). We represent connections in the graphical form (like in Fig. 2) as arrows connecting blocks.

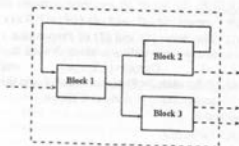


Fig. 2. A block composition. Three blocks are composed to form a larger block (a dashed rectangle). Solid arrows denote connections between blocks. Dashed arrows denote unconnected inputs/outputs of the blocks 1, 2, 3 (which become the input/outputs of the dashed block).

Definition 8.

- (1) A block diagram is a pair $((B_j)_{j \in J}, \rightarrow)$ of an indexed family of blocks $(B_j)_{j \in J}$ and an injective binary relation $\rightarrow \subseteq V_{out} \times V_{in}$, which is called an interconnection relation, where $V_{in} = \bigcup_{j \in J} \{j\} \times In(B_j)$ and $V_{out} = \bigcup_{j \in J} \{j\} \times Out(B_j)$.
- (2) A block diagram $((B_j)_{j \in J}, \rightarrow)$ is called regular, if each $B_j, j \in J$ is non-anticipative.

A relation $(j, x) \rightarrow (j', x')$ means that the output x of the block B_j is connected to the input x' of $B_{j'}$.

We define the notion of a block composition only for non-anticipative blocks. To describe it informally consider a block B_1 with inputs x_1, x_2 and outputs y_1, y_2 . Let $J = \{1\}$ and $\rightarrow = \{((1, y_2), (1, x_2))\}$ be the interconnection relation (which connects y_2 to x_2). Let B' be a composition of $(B_j)_{j \in J}$ (i.e. of one block) under the relation $\rightarrow$. Informally, the operation of B' can be described as follows. The block B_1 chooses (non-deterministically) some deterministic sub-block $B_0 \subseteq B_1$. When a signal starts flowing into the input x_1 , the block B' chooses the initial values for the

signals of y_1, y_2, x_2 so that they satisfy the operation of the block B_0 ($Op(B_0)$) and the signals of x_2 and y_2 have the same values. If such initial values do not exist, the block B' terminates (the output signal bunch is nowhere defined). Otherwise, B' continues to operate in the similar way until either the signals of y_1, y_2, x_2 cannot be continued, or the input signal (x_1) ends.

Definition 9. Let $((B_j)_{j \in J}, \rightarrow)$ be a regular block diagram. A block B is a composition of $(B_j)_{j \in J}$ under the interconnection relation $\rightarrow$, if

1. $In(B) = (\bigcup_{j \in J} \{j\} \times In(B_j)) \setminus range(\rightarrow)$,
2. $Out(B) = (\bigcup_{j \in J} \{j\} \times Out(B_j)) \setminus dom(\rightarrow)$,
3. $Op(B)(i)$ is the set of all $Out(B)$ -signal bunches o such that there exist non-anticipative deterministic sub-blocks $B'_j \subseteq B_j, j \in J$ and a family $(i_j, o_j)_{j \in J} \in X_{in}(i)$ such that
 - (1) $dom(o) = dom(o_j)$ for all $j \in J$,
 - (2) $o[(j, x)] = o_j[x]$ for all $(j, x) \in Out(B)$,
 where $X_{in}(i)$ is the set of $\leq^{J,2}$ -maximal elements of $X(i)$, and $X(i)$ is the set of all indexed families of pairs of signal bunches $u = (i_j, o_j)_{j \in J}$ such that
 - (3) $dom(i_j) = dom(o_j) = dom(i_{j'}) = dom(o_{j'}) \subseteq dom(i)$ for all $j, j' \in J$,
 - (4) $i_j[x] = i_{j' dom(i_j)}[x]$ for each $(j, x) \in In(B)$,
 - (5) $(i_j, o_j) \in IO(B'_j)$ for each $j \in J$,
 - (6) $(j, x) \rightarrow (j', x')$ implies $o_j[x] = i_{j'}[x']$.

In this definition, i_j and o_j denote input and output signal bunches of the j -th block. The usage of deterministic non-anticipative sub-blocks to characterize a composition is founded on Lemma 2. The set $X_{in}(i)$ contains maximally extended (in sense of the relation $\leq^{J,2}$) indexed families of signal bunches defined on a subset of the domain of i (the input signal bunch of B) which satisfy constraints imposed by the interconnection relation. Any such family gives a possible output of B for the given i by formula (2) (output signals of B are obtained from the output signals of the sub-blocks B'_j). From Definition 9 it is clear that any two compositions of $(B_j)_{j \in J}$ under $\rightarrow$ have the same semantics.

Theorem 1. If $((B_j)_{j \in J}, \rightarrow)$ is a regular block diagram, then

- (1) a composition of $(B_j)_{j \in J}$ under $\rightarrow$ exists;
- (2) if B is a composition of $(B_j)_{j \in J}$ under $\rightarrow$, then B is non-anticipative.

This theorem can be proven using the same method as Proposition 1.

On the basis of this theorem we can consider a composition as a non-deterministic operation which

maps a block diagram $((B_j)_{j \in J}, \rightsquigarrow)$ into a block B which is a composition of $(B_j)_{j \in J}$ under $\rightsquigarrow$.

The Definition 9 describes only a semantic aspect of a composition block B . A trivial (abstract) syntax for this block is just a block diagram $((B_j)_{j \in J}, \rightsquigarrow)$.

Another possible syntax (the equational syntax) represents a block composition as a tuple $((B_j)_{j \in J}, Var, E)$, where Var is a set of variable names and E is a set of equations of the form $(v'_z)_{z \in Out(B_j)} = j((v_z)_{z \in In(B_j)})$, where $v_z, v'_z \in Var$ and $j \in J$ (j plays the role of a block identifier). Moreover, each $z \in Var$ appears on the left-hand side of some equation exactly once and each $j \in J$ appears on the right-hand side of some equation exactly once. The relation $\rightsquigarrow$ is specified by the sets Var and E as follows: $(j, x) \rightsquigarrow (j', x')$ iff there exist equations $(u'_z)_{z \in Out(B_j)} = j((u_z)_{z \in In(B_j)})$ and $(v'_z)_{z \in Out(B_{j'})} = j'((v_z)_{z \in In(B_{j'})})$ in E such that $u'_z = v'_z$. It is easy to check that $\rightsquigarrow$ is indeed an interconnection relation and that every interconnection relation on $(B_j)_{j \in J}$ can be described in this way. This kind of syntax is used in declarative synchronous languages [9] for describing communications between program elements (nodes).

6. Conclusion

We have introduced the abstract notions of a block as a signal transformer, a connection between blocks as a signal equality constraint, a block diagram as a collection of interconnected blocks, and a composition as an operation which maps block diagrams into blocks. The proposed notions do not enforce implementation details or particular kinds of dynamic behavior on blocks.

References

1. Campbell S.L., Chancelier J.-P., Nikoukhah R. Modeling and Simulation in Scilab/Scicos with ScicosLab 4.4. – Springer, 2010.
2. Nikitchenko N.S. A composition nominative approach to program semantics. Technical report IT-TR 1998-020, Technical University of Denmark, 1998. – 103 p.
3. Agrawal A., Simon G., Karsai G. Semantic translation of Simulink/Stateflow models to hybrid automata using graph transformations // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. – 2004. – Vol. 109. – P. 43-56.
4. Carloni L.P., Passerone R., Pinto A. Languages and Tools for Hybrid Systems Design // Foundations and Trends in Design Automation. – 2006. – Vol. 1. – P. 1-204.
5. Goebel R., Sanfelice R., Teel R. Hybrid dynamical systems // IEEE Control Systems Magazine. – 2009. – Vol. 29. – P. 29-93.
6. Beek D.A., Reniers M.A., Schiffelers R.R., Rooda J.E. Foundations of a Compositional Interchange Format for Hybrid Systems // Proc. of Hybrid Systems Computation and Control. – 2007. – P. 587-600.
7. Camhbel M.K., Heemels A.J., van der Schaft A.J., Schumacher J.M. Solution concepts for hybrid dynamical systems // Proc. of the 15th IFAC Triennial World Congress. – 2002.
8. Caspi P., Pilaud D., Halbwachs N., Plaice J. LUSTRE: A declarative language for programming synchronous systems // Proc. of the 14th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages. – 1987. – P. 178-188.
9. Henzinger T. The theory of hybrid automata // Proc. of IEEE Symposium on Logic in Computer Science. – 1996. – P. 278-292.
10. Henzinger T., Horowitz B., Kirsch C. Giotto: A Time-Triggered Language for Embedded Programming. // Proc. of the First International Workshop on Embedded Software EMSOFT'01. – 2001. – P. 166-184.
11. Lubliner R., Tripakis S. Modular Code Generation from Triggered and Timed Block Diagrams // Proc. of IEEE Real-Time and Embedded Technology and Applications Symposium. – 2008. – P. 147-158.
12. Marian N., Ma Y. Translation of Simulink Models to Component-based Software Models // Proc. of the 8-th International Workshop on Research and Education in Mechatronics. – 2007.
13. Pinto R., Sangiovanni-Vincentelli A., Carloni L.P., Passerone R. Interchange formats for hybrid systems: Review and proposal // Proc. of Hybrid Systems Computation and Control. – 2005. – P. 526-541.
14. Schrammel P., Jeannot B. From hybrid data-flow languages to hybrid automata: a complete translation // Proc. of Hybrid Systems Computation and Control. – 2012. – P. 167-176.

Надійшла до редколегії 3.12.2012

УДК 004.512

Л.О.Катеринич¹, к.ф.-м.н.

Деякі підходи до можливості застосування адаптивних алгоритмів у нейронних мережах

Розглянуто деякі підходи, щодо можливості застосування адаптивних алгоритмів у розробці систем на нейронних мережах.

Ключові слова: нейронні мережі; штучний інтелект; адаптація; адаптивні алгоритми.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: katerinich@rambler.ru

L.Katerynych¹, PhD.

Some approaches to the possibility of using adaptive algorithms in neural networks.

Considers some approaches on the applicability of adaptive algorithms in designing systems on neural networks.

Key words: neural networks, artificial intelligence, adaptation, adaptive algorithms.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: katerinich@rambler.ru

Статтю представив д.т.н, проф. Заславський В.А.

Вступ

Одним з визначальних атрибутів інтелекту, в тому числі і штучного, є здатність пристосовуватися до зовнішнього середовища, здатність до адаптації.

Адаптивний алгоритм – це алгоритм, який намагається видати кращі результати шляхом постійного підстроювання під вхідні дані. Необхідність застосування адаптивного алгоритму виникає в тому випадку, якщо імовірнісні оцінки для вихідних даних невідомі до початку роботи алгоритму. Адаптивні алгоритми в сучасному програмному забезпеченні вузькоспеціалізовані. Вони застосовуються для розв'язання конкретних задач і розробляються з урахуванням характерних, специфічних умов їх застосування.

Відомо, що автоматизація окремих технологічних процесів розробки програм з використанням адаптивних алгоритмів в інтегрованих середовищах програмування і спеціалізованих інтегрованих середовищах, значно підвищує продуктивність, якість і надійність відповідного програмного забезпечення. Цим в значній мірі пояснюється науково-практична зацікавленість фахівців в розробці уніфікованих механізмів, моделей, мов і методологій створення інтегрованих

інструментальних засобів підтримки технологічних процесів на всіх етапах життєвого циклу програм – від проектування, реалізації і документування до впровадження і удосконалення [1].

Кількісні і якісні характеристики нейронних мереж. Всі завдання, що вирішуються людиною, з позицій нейроінформаційних технологій можна умовно розділити на дві групи.

1. Завдання, що мають відомий і визначений набір умов, на підставі якого необхідно отримати чітку, точну, недвозначну відповідь по відомому і визначеному алгоритму.
2. Завдання, в яких неможливо врахувати всі умови, від яких залежить відповідь, а можна лише виділити приблизний набір найбільш важливих умов. Оскільки частина умов при цьому не враховується, відповідь носить неточний, приблизний характер, а алгоритм знаходження відповіді не може бути виписаний точно [1].

Для вирішення задач першої групи з великим успіхом можна використовувати традиційні комп'ютерні програми. Як би не був складний алгоритм, обмеженість набору умов (вхідних параметрів) дає можливість

складання алгоритму розв'язання і написання конкретної програми, що розв'язує дану задачу. Немає сенсу у використанні нейроінформаційних технологій для вирішення таких задач, оскільки в цьому випадку нейромережеві методи будуть апіорно гірше вирішувати такі задачі. Єдиним виключенням є випадок, коли алгоритм обчислення відповіді дуже великий і громіздкий і час на розв'язання конкретної задачі по цьому алгоритму не задовольняє практичним вимогам; крім того, при знаходженні відповіді не потрібна абсолютна точність.

При розв'язанні задач другої групи використання нейротехнологій виправдовує себе за всіма параметрами, при виконанні двох умов: по-перше, наявність універсального типу архітектури і єдиного універсального алгоритму навчання (відсутність необхідності в їх розробці для кожного типу задач), по-друге, наявність прикладів (передісторії, фіксованого досвіду), на підставі яких виконуються навчання нейронних мереж. При виконанні цих умов швидкість створення експертних систем зростає в десятки разів, і відповідно зникає їх вартість.

Далі необхідно дослідити два питання, що постають перед кожним дослідником, що вирішив використовувати нейронні мережі: "Скільки нейронів необхідно для вирішення задачі?" і "Якою має бути структура нейронної мережі?". Об'єднуючи ці два питання, ми отримуємо третій: "Як зробити роботу нейронної мережі зрозумілою для користувача (логічно прозорою) і які вигоди може принести таке розуміння?".

При відповіді на питання "Скільки нейронів потрібно використовувати?" існує дві протилежні точки зору. Одна з них стверджує, що чим більше нейронів використовувати, тим більше надійна мережа вийде. Приблизники цієї позиції посилюються на приклад людського мозку. Дійсно, чим більше нейронів, тим більше число зв'язків між ними, і тим більше складні завдання здатні вирішити нейронна мережа.

Крім того, якщо використовувати більше число нейронів, чим необхідно для

розв'язання задачі, то нейронна мережа точно навчиться. Якщо ж починати з невеликого числа нейронів, то мережа може виявитися нездатною навчитися розв'язанню задачі і весь процес доведеться повторювати спочатку з великим числом нейронів. Ця точка зору (чим більше – тим краще) популярна серед розробників нейромережевого програмного забезпечення. Так, багато з них, як одне з основних переваг свого програмного забезпечення називають можливість використання будь-якого числа нейронів.

Друга точка зору спирається на таке "емпіричне" правило: чим більше підгонюєш параметрів, тим гірша апроксимація функції в тих областях, де її значення були заздалегідь невідомі. З математичної точки зору задачі навчання нейронних мереж зводяться до продовження функції заданої в скінченному числі точок на всю область визначення. При такому підході вхідні дані мережі вважаються аргументами функції, а відповіді мережі – значеннями функції. Згідно з другою точкою зору потрібне число нейронів визначається як мінімально необхідне. Основним недоліком є те, що це, мінімальне необхідне число, заздалегідь невідомо, а процедура його визначення шляхом поступового нарощування числа нейронів вельми трудомістка.

Підводячи підсумок аналізу двох крайніх позицій, можна сказати наступне: мережа з мінімальним числом нейронів повинна краще ("правильніше", гладше) апроксимувати функцію, але з'ясування цього мінімального числа нейронів вимагає великих інтелектуальних затрат і експериментів по навчанню мереж. Якщо число нейронів надлишкове, то можна отримати результат з першої спроби, але існує ризик побудувати "погану" апроксимацію. Істина, як завжди буває в таких випадках, лежить посередині: потрібно вибирати число нейронів більшим, ніж необхідно, але не набагато. Це можна здійснити шляхом подвоєння числа нейронів в мережі після кожної невдалої спроби навчання. Проте існує надійніший спосіб

оцінки мінімального числа нейронів – використання процедури контрастування.

Основні поняття процесу адаптації. Поняття адаптації як інструмента цілеспрямованого впливу на об'єкт останніми роками стало фігурувати в математичній, технічній і особливо в літературі пов'язаної з кібернетикою. [1,2].

Необхідність введення адаптації добре відчуває будь-який проєктувальник, якому доводиться створювати систему при значній апріорній невизначеності про умови її функціонування. Осереднення по цій невизначеності рідко буває вдалим. З іншого боку, будь-яке осереднення поведінки середовища дозволяє проєктувати систему, оптимально працюючу тільки при середньому стані середовища. Усяке ж відхилення середовища від середнього призводить до не оптимальності функціонування системи.

Саме тому так важливо вводити в систему адаптуючі підсистеми, які будуть її змінювати, з тим щоб підтримувати її ефективність в оптимальному стані незалежно від стану середовища.

У поняття адаптації як активного дії (управління) зазвичайкладають два сенси: пристосування до фіксованого середовища (назвемо пасивної адаптацією) і пошук середовища, адекватного даним системі (назвемо відповідно активної адаптацією). У першому випадку система, що адаптується функціонує так, щоб виконувати свої функції в даному середовищі найкращим чином, тобто максимізує свій критерій ефективності функціонування в даному середовищі. Активна адаптація, навпаки, має на увазі або зміну середовища з метою максимізації критерію ефективності, або активний пошук такого середовища, в якому досягається бажаний комфорт. Очевидно, що насправді, обидва види адаптації зустрічаються одночасно і взаємодіють один з одним.

У широкому розумінні адаптація нічим не відрізняється від управління, тобто, адаптація, як і будь-яке управління, є організація такого цілеспрямованого впливу на об'єкт, при якому досягаються задані цілі.

Ототожнюючи адаптацію та управління, необхідно визначити тип управління, до якого відноситься адаптація. Поширена думка, що адаптацію як управління.

Складні системи, як правило, не мають єдиного критерію функціонування. Такого роду системи функціонують в стані багатокритеріальності, причому ці критерії можуть бути не тільки екстремальними, але й мати характер обмежень. Це вимагає формулювати відразу кілька критеріїв та варіювати їх вибір залежно від ситуації, що склалася і внутрішніх потреб самої системи. Таким чином, вже вибір критеріїв адаптації є процесом адаптивним і повинен враховуватися при визначенні адаптації.

Тому, з урахуванням особливостей складних систем, адаптацію в широкому сенсі можна визначити як процес цілеспрямованого зміни параметрів і структури системи, який полягає в визначенні критеріїв її функціонування і виконанні цих критеріїв. Виділяють наступні підсистеми адаптації: апаратний рівень, алгоритмічний рівень, програмний рівень, системний та мережевий рівень [3].

Розглянемо алгоритмічний рівень адаптації для нейронних мереж (НМ). Мета такої адаптації – пристосувати алгоритми до специфіки задач, що розв'язуються НМ. Критеріями ефективності є середній час розв'язання задачі, точність цього розв'язку, ймовірність помилок тощо.

Специфіка задач, що розв'язуються, проявляється у вигляді статистично стійкою протягом деякого часу особливості цих задач, облік, якої дозволяє підвищити ефективність функціонування НМ за обраним критерієм.

Визначення об'єкта керування у процесі адаптації. Інколи виникає ситуація коли зв'язок об'єкта і середовища настільки сильний, що їх відокремити неможливо. Коли предметна область чітка, то така задача не виникає. Це буває у таких випадках, коли предметна область автономна. Однак у реальному житті предметні області настільки пов'язані, що визначити чітку межу майже не можливо. Ця обставина є поштовхом для виділення процесу визначення меж

предметної області та/або об'єкта в окремий етап.

У середовищі, що має формальний опис виділення об'єкта не є проблемою. Обмежуючи певні фактори середовища ми отримуємо певний екземпляр об'єкта і перевіряємо на моделі досяжність поставлених цілей. Також можливо оцінити чисельно ступінь нескерованості цього варіанту об'єкта. Повторюючи цю процедуру для інших варіантів об'єктів буде отримано той екземпляр об'єкта на якому може бути досягнута максимальна керованість процесом.

Маючи формальний опис середовища це не було б проблемою. Оскільки існування такого опису майже неможливо звертаються до експертів. Для цього необхідно експертно синтезувати декілька варіантів об'єкта, а потім за допомогою експерта оцінити їх за критерієм і обрати найкращий.

Таким чином виникає потреба виділити процес визначення об'єкта в самостійний етап керування. Задача зводиться до того, щоб для заданої множини цілей $\{Z^*\}$ і ресурсів R визначити такий КЕ, який по критерію досяжності цілей буде найкращий.

Адаптація або корекція всієї системи керування (всіх етапів) розглядається, як більш глибокий аналіз процесу керування складної системи [4].

Параметрична адаптація пов'язана з корекцією та налаштуванням параметрів C моделі. Така адаптація має місце при будь-якій зміні характеристик керуемого об'єкта, а саме КЕ. Адаптація дозволяє налаштувати модель на кожному кроці керування. Вихідною інформацією для цього виду адаптації - є неспівпадання вихідної/вхідної інформації та необхідною вхідною для КЕ. Оскільки процес керування нейронною мережею з КЕ не завжди здатен представити необхідну інформацію для найбільш точного остаточного результату, необхідно вводити додаткові елементи керування, а саме поповнювати вхідною інформацією початкову структуру вхідних даних НМ, що в свою чергу призведе до

формування більш точних вхідних даних для КЕ.

Структурна адаптація має місце при неспівпаданні структури моделі та структури НМ. За різних обставин структура НМ може змінитися, що в свою чергу буди вимагати зміни структури моделі, а саме до механізмів структурної адаптації. Перехід від однієї структури до іншої виконується процедурою вибору альтернативної структури моделі. Різниця може полягати як у кількості входів/виходів до моделі, варіантами декомпозиції або структурою елементів моделі. Слід зазначити, що альтернативні моделі при ідентифікації параметрів теж використовують методи параметричної адаптації.

Адаптація об'єкта необхідна у тому випадку, коли структурна адаптація не ефективна, тобто деякі цілі керування не досягаються. Ця адаптація пов'язана зі зміною організації потоків інформації в НМ. Додавання нової інформації призводить до підвищення його керованості, але вимагає більше затрат при параметричній та структурній адаптації. Вибір найкращого варіанту розподілення та переміщення потоків інформації у НМ в процесі керування і є основою процесу адаптації на цьому етапі.

Адаптація цілей керування. В робочому режимі системи де використовується НМ може виникати ситуація, коли виникають нові цілі, або їх уточнення. В цьому випадку необхідно визначити нову множину цілей $\{Z^*\}$, адаптовану під поточні потреби. Це є основою цього етапу.

Розглянемо задачу адаптації об'єкта F^* , як задачу керування. Ціль Z^* адаптації визначає вимоги до критеріїв. Ці потреби можуть бути записані наступним чином:

1. Критерій-нерівність
$$H(U) = (h_1(U), \dots, h_p(U)) \geq 0$$
2. Критерій-рівність:
$$G(U) = (g_1(U), \dots, g_s(U)) = 0$$
3. Критерій, що мінімізують:
$$Q(U) = (q_1(U), \dots, q_l(U)) \rightarrow \min,$$

де $h_i = M_i h_i'(Y) = M_i h_i'(F^0(X, U))$

($i = 1, \dots, p$);

$g_j = M_j g_j'(Y) = M_j g_j'(F^0(X, U))$ ($j = 1, \dots, s$);

$q_k(U) = M_k q_k'(Y) = M_k q_k'(F^0(X, U))$

($k = 1, \dots, l$);

M_i - оператор усереднення по X ;

$M(\bullet) = \int (\bullet) \rho(X) dX$, де $\rho(X)$ - щільність розподілу стану X середовища.

Ціль адаптації це розв'язок наступної задачі:

$$Q(U) \rightarrow \min_{U \in S} \Rightarrow U^* \quad (1)$$

де $S: \begin{cases} H(U) \geq 0; \\ G(U) = 0 \end{cases}$.

Такі задачі при заданій моделі F об'єкта F^0 і розподілу $\rho(X)$ називають задачам стохастичного програмування [1]. Проблема розв'язку поставлених задач очевидна. Але задачі адаптації ускладнюються ще й тим фактором, що модель об'єкта F відсутня. Також відсутні інформація о розподілі $\rho(X)$. Більш того, ці фактори мають тенденцію змінюватися у часі.

Отже, маючи алгоритм φ розв'язку задачі (1) с обмеженнями $Z_i = \Psi_i(S)$ ($i = 1, \dots, k$) у вигляді

$$U^* = \varphi(F, \rho(X)) \quad (2)$$

не можна вважати задачу адаптації розв'язаною. Необхідно додатково ідентифікувати об'єкт, що змінюється F^0 і статистичні властивості середовища, щоб отримати

$$W = V(F_i, \rho_i(X)) \quad (3)$$

де F_i - модель об'єкта, а ρ_i - щільність розподілу X . Ці обставини змушують відмовитися від пошуку алгоритму φ розв'язку поставленої задачі адаптації, оскільки для складного об'єкта адаптації залежності F_i і $\rho_i(X)$ достатньо складні.

Тому для розв'язку задачі (1) необхідно звертатися к алгоритмам адаптації, використовуючи лише значення функцій $h_i(\bullet), g_j(\bullet)$ і $q_k(\bullet)$

($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, l$) у визначені

моменти часу. У загальному випадку має такий вигляд:

$$U_{N+1} = \psi(\overline{U_N}, \overline{H'_N}, \overline{G'_N}, \overline{Q'_N}), \quad (10)$$

де ψ - алгоритм рекурентної адаптації.

$$\overline{U_N} = (U_N, U_{N-1}, \dots, U_{N-W});$$

$$\overline{H'_N} = (H'_N, H'_{N-1}, \dots, H'_{N-W});$$

$$\overline{G'_N} = (G'_N, G'_{N-1}, \dots, G'_{N-W});$$

$$\overline{Q'_N} = (Q'_N, Q'_{N-1}, \dots, Q'_{N-W});$$

$$H' = (h'_1, \dots, h'_p);$$

$$G' = (g'_1, \dots, g'_s);$$

$$Q' = (q'_1, \dots, q'_l)$$

де U'_N, H'_N, G'_N, Q'_N - значення параметрів, що адаптуються, N - момент часу, W - глибина пам'яті алгоритму ψ .

Загальна модель еволюції структури. В основі структурної адаптації лежить модель структурної еволюції. Нехай структура W об'єкта може змінюватися, причому ці зміни, тобто варіації (мутації) δW структури W , належать заданій множині Θ можливих варіацій:

$$\delta W \in \Theta \quad (4)$$

Множина Θ визначається обмеженнями H і G так, що при дотриманні (4) виконуються умови

$$S: \begin{cases} H(W + \delta W) \geq 0 \\ G(W + \delta W) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

якщо $H(W) \geq 0$ і $G(W) = 0$, де H і G - задані функціонали обмежень. Таким чином, будемо вважати, що множина S варіацій δW визначено і задача полягає в оптимізації заданого функціонала:

$$Q(W) \rightarrow \min_{W \in S} \quad (6)$$

визначеного на структурі W .

Процес еволюції структури W відбувається поетапно. На першому етапі породжуються обурені (матовані) структури:

$$W_{i0} = W_0 + \delta W_i, (i = 1, \dots, k_0) \quad (7)$$

де δW_i - i -я випадкова варіація (мутація) структури, обмежена (4), а число нових структур k_0 є параметром, який

призначається виходячи з конкретних умов еволюції.

Нові структури (7) оцінюються за критерієм ефективності

$$Q_{0i} = Q(W_{0i}), (i = 1, \dots, k_0) \quad (8)$$

і відбувається відбір, в процесі якого «вимірають» структури з великим значенням функціоналу, що мінімізується Q , в результаті чого на наступний етап еволюції залишається q_0 кращих структур. Можна скористатися алгоритмом імовірнісного відбору, при якому структура, яка має велике значення критерію, що мінімізується, вибуває з більшою ймовірністю, ніж структура з меншим критерієм. Наприклад, ймовірність вибування для $Q > 0$ може бути визначена так:

$$P_{0i} = \frac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{k_0} Q_{0i}} \quad (i = 1, \dots, k_0) \quad (9)$$

При цьому процес «розігрування» вибувають структур завершується тоді, коли залишилися q_0 структур. Так моделюється природний відбір, що становить основу біологічної еволюції. Зауважимо, що цілком може виявитися (особливо при малому k_0), що краща з нових структур гірше вихідної W_0 . В цьому випадку природно зберегти W_0 на наступний етап еволюції. На другому етапі еволюції кожна з решти структур мутує аналогічно (7) і дає стільки «нащадків», що їх загальна число разом з «батьками» дорівнює k_1 . Подальший відбір залишає на наступний етап еволюції q_1 структур. Далі процес повторюється.

Легко бачити, що такого роду еволюція структури буде «Прагнути» відбирати структури з малим значенням критерію якості, серед яких знаходиться і оптимальна структура. Випадковість варіації ΔW забезпечує збіжність процесу еволюції до оптимального рішення W^* .

Розглянемо вплив параметрів k_i і q_i ($k = 0, 1, \dots$). Ці параметри дозволяють змінювати чисельність «популяції» структур і рівень

відбору. При $q = 1$ на наступний етап еволюції залишається одна краща структура. Така стратегія ефективна при «унімодальності» завдання (6). Багатоекстремальність вимагає $q_i > 1$ і тим більше, чим складніше пошук глобального екстремуму. Чисельність популяції k_i впливає на ефективність процесу еволюції. При більшому k_i еволюція має глобальну тенденцію, але йде повільніше, так як вимагає значних витрат часу і пам'яті ЕОМ.

Значення цих параметрів слід адаптувати в процесі еволюції, враховуючи її специфіку, цілі і результати. Алгоритми адаптації повинні мати суто евристичний характер. Зауважимо, що важливу роль відіграє ефективність оцінки структури. Ця оцінка, як правило, буває дуже трудомісткою і зводиться або до обчислення багатовимірних інтегралів, або до оцінки функціонування імітаційної моделі з призначеною структурою. В обох випадках зручно скористатися методом Монте-Карло.

Список використаних джерел

1. Rutkovskaya D. Pylynsky M. L. Rutkovsky. Neural networks, algorithms and heuristicshekye nechetkye system. - M: Hotline - Telecom, 2006. - P.452. (in Russian).
2. Katerynych L. A. Provotar. Dyahnostyrovanye on neural setyah in the system Homeopath / / XIII-th International Conference: Knowledge Dialogue Solution. - Sofia, 2007. - V1. - P.64-68. (in Russian).
3. Katerynych L. A. Provotar. Synthesis of neural networks on the basis ynfarmatsionnyah granules / / International Book Series "Information Science and Computing: Advanced Research in Artificial Intelligence". - Sofia, 2008. - V1. - P.179-182. (in Russian).
4. Katerynych L. Control synthesis of neural networks / / Problems of programming. 2009. Issue 1. P.53-59. (in Russian).

Надійшла до редколегії 27.11.12

УДК 519.65

Каштур О.Ф.¹, к. ф.-м. н., доц.
Трубetskaya О.Д.², студентка**Розв'язання інтерполяційних задач типу
Ерміта та Ерміта-Біркхофа в
гільбертовому просторі**

В роботі для поліноміальних операторів другого, третього та четвертого степеня конструктивно побудовано інтерполяційні операторні формули для задач Ерміта та Ерміта-Біркхофа, знайдено системи вузлів інтерполяції та напрямків диференціалів Гато.

Ключові слова: поліноміальний оператор, інтерполяція, диференціали Гато.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: kof_unicyb@mail.ru

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: trubetskaya.cyb@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Кудін В.І.

Вступ. Апроксимація нелінійних та поліноміальних операторів є важливою задачею сьогодення, оскільки при розв'язанні прикладних задач в багатьох галузях таких як ядерна фізика, хімія складних сполук, біологія, медицина, економіка та інші виникають системи, математичні моделі яких описуються нелінійними та поліноміальними операторами. Достатньо часто математичні моделі будуються на основі спостереження за реакцією об'єкта на деякі дії навколишнього середовища (вхідні та вихідні сигнали). Таким чином, природно використовувати як один із методів розв'язання поставлених задач - інтерполявання.

В роботах [1] - [3] побудовано основи теорії поліноміальної інтерполяції для операторів, що є в загальному випадку нелінійними, а саме розв'язано інтерполяційні задачі типу Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа, знайдено умови існування розв'язку. В [4] за допомогою методу ортогональних моментів [5] знайдено інтерполяційний операторний поліном типу Лагранжа більш простого вигляду. Розв'язанням задач типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа в

O.F.Kashpur¹, PhD(Phyc-Math), ass.prof.
O.D.Trubetskaya², student**Solution of the Hermite and Hermite-
Birkhoff interpolation problem in Hilbert
space**

In this article for polynomial operator of second, third and four degree Hermite and Hermite-Birkhoff interpolation formulas are constructed. The interpolation node systems and direction of Gâteaux differential are obtained.

Key Words: polynomial operator, interpolation, Gâteaux differential.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: kof_unicyb@mail.ru

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: trubetskaya.cyb@gmail.com

гільбертовому просторі за допомогою інтерполанта із [4] присвячена дана стаття.

Постановка операторних інтерполяційних задач типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа. Нехай X, Y - гільбертові простори, P_n - множина операторних поліномів n -го степеня:

$$P_n = \{P_n(x); P_n(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \dots + L_nx^n\}$$
де L_kx^k - операторні форми, що отримані із k -лінійного неперервного симетричного оператора $L_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$, коли $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x$, $\{x_i\}_{i=1}^n, \{h_{ij}^k\}_{i,j=1, \dots, n, k=1, \dots, n} \subset X$ - ортонормовані системи елементів, $F_n: X \rightarrow Y$, $F_n \in P_n$ - оператор n разів диференційований за Гато. Потрібно побудувати інтерполяційний поліном n -го степеня $P_n: X \rightarrow Y$, що відповідає наступним умовам

$$P_n(x_i) = F_n(x_i), \\ P_n'(x_i)h_{ij}^{(1)} = F_n'(x_i)h_{ij}^{(1)},$$

© О.Ф.Каштур, О.Д.Трубetskaya, 2012

$$P_n^*(x_i)h_{i1}^{(2)}h_{i2}^{(2)} = F_n^*(x_i)h_{i1}^{(2)}h_{i2}^{(2)}, \quad (1)$$

$$P_n^{(k)}(x_i)h_{i1}^{(k)}h_{i2}^{(k)} \dots h_{in}^{(k)} = F_n^{(k)}(x_i)h_{i1}^{(k)}h_{i2}^{(k)} \dots h_{in}^{(k)}, \\ i = \overline{1, m},$$

де $F_n^{(k)}(x_i)h_{i1}^{(k)}h_{i2}^{(k)} \dots h_{in}^{(k)}$ - диференціал Гато k порядку оператора $F(x)$ у вузлі x_i за напрямками $h_{i1}^{(k)}, h_{i2}^{(k)}, \dots, h_{in}^{(k)}$, що обчислюється за формулою

$$F_n^{(k)}(x_i)h_{i1}^{(k)}h_{i2}^{(k)} \dots h_{in}^{(k)} = \frac{\partial^k}{\partial h_{i1}^{(k)} \dots \partial h_{in}^{(k)}} F_n(x_i + \\ + \sum_{j=1}^k \alpha_j h_{ij}^{(k)}) \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_k=0}.$$

У напрямків диференціалів Гато верхній індекс означає, що напрямок відноситься до k -го диференціалу, перший нижній індекс, що диференціал визначається в i -му вузлі.

Постановка інтерполяційної задачі типу Ерміта-Біркгофа аналогічна вище наведеній за виключенням того, що серед інтерполяційних умов (1) можуть існувати "пропуски", т.т. якщо в (1) в кожному вузлі задані значення оператора та його диференціали Гато до певного порядку включно, то в інтерполяційних умовах Ерміта-Біркгофа значення оператора у вузлі чи декілька його диференціалів Гато можуть бути відсутніми. Наведемо частинний випадок таких умов:

$$P_n(x_i) = F_n(x_i),$$

$$P_n^*(x_i)h_{i1}^1 = F_n^*(x_i)h_{i1}^1,$$

$$P_n^{(k)}(x_i)h_{i1}^6 h_{i2}^6 \dots h_{in}^6 = F_n^{(k)}(x_i)h_{i1}^6 h_{i2}^6 \dots h_{in}^6, \quad i = \overline{1, m}.$$

В [2] розв'язок інтерполяційної задачі типу Лагранжа у випадку коли задані значення оператора у вузлах: $0, x_i, i = \overline{1, m}$ та в будь-яких сумах цих елементів по два, три і т.д. до n доданків включно побудований у вигляді

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m L_{i_1}^{(k)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})(x, x_{i_1}) \dots (x, x_{i_k}), \quad (2)$$

де $(\cdot)$ - скалярний добуток в просторі X , а невідомі коефіцієнти $L_{i_1}^{(k)}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ (значення k -лінійних форм у вузлах інтерполяції) знаходяться за наступними рекурентними співвідношеннями:

$$L_{i_1}^{(k)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \frac{1}{n!} [F_n(x_{i_1} + \dots + x_{i_k}) - \\ - [F_n(x_{i_1} + \dots + x_{i_{k-1}}) + \dots + F_n(x_{i_2} + \dots + x_{i_k})] + \\ + [F_n(x_{i_1} + \dots + x_{i_{k-2}}) + \dots + F_n(x_{i_1} + \dots + x_{i_k})] + \dots + \\ + (-1)^{k-1} [F_n(x_{i_1}) + \dots + F_n(x_{i_k})] + (-1)^k F(0)]. \quad (3)$$

Для знаходження значень $L_{i_1}^{(k)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ в формулі (3) заміняємо n на $n-1$, а значення оператора $F_n(x)$ у вузлах інтерполяції на значення оператора $F_{n-1}(x) = F_n(x) - L_{i_1}^{(k)}x^n$ в цих же вузлах і т.д., поки не знайдемо значення всіх операторних форм.

Надалі розв'язок інтерполяційних задач типу Ерміта та Ерміта-Біркгофа будемо шукати у вигляді (2). Задача буде повністю розв'язана, якщо конструктивно побудуємо формули для знаходження всіх операторних форм із (2) у вузлах інтерполяції. При розв'язанні поставлених задач виникає проблема вибору вузлів та напрямків диференціалів Гато в інтерполяційних умовах. Тому в статті розглянуто декілька частинні випадки цих задач, а саме коли задані значення оператора та його диференціали Гато до другого порядку включно у вузлах та побудовано інтерполанти 2 - 4-го степеня. Зауважимо, що при розв'язанні прикладних задач не використовують інтерполяційні поліноми високого степеня.

Нехай система вузлів інтерполяції співпадає із системою напрямків диференціалів Гато, т.т. $x_i = h_i, i = \overline{1, m}$, а $n = 2$. Розглянемо наступні задачі: типу Ерміту

$$P_2(0) = F_2(0),$$

$$P_2(x_i) = F_2(x_i),$$

$$P_2^*(x_i)x_i = F_2^*(x_i)x_i, \quad (4)$$

$$P_2^{(j)}(x_j)x_k x_i = F_2^{(j)}(x_j)x_k x_i,$$

$$i \neq k, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, m},$$

і задачі типу Ерміта-Біркгофа

$$P_2(0) = F_2(0),$$

$$P_2^*(x_i)x_i = F_2^*(x_i)x_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$P_2^{(j)}(x_j)x_k x_i = F_2^{(j)}(x_j)x_k x_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$P_2^{(j)}(x_j)x_k x_i = F_2^{(j)}(x_j)x_k x_i,$$

$$i \neq k, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

$$P_2(0) = F_2(0),$$

$$\begin{aligned}
 P_2(x_i) &= F_2(x_i), \\
 P_2'(x_i)x_i x_i &= F_2''(x_i)x_i x_i, \quad i = \overline{1, m}, \\
 P_2''(x_j)x_i x_i &= F_2''(x_j)x_i x_i, \\
 i \neq k, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Розглянемо розв'язок задачі (4). При її розв'язанні для знаходження значень операторних форм $L_k(x_i, \dots, x_i)$, $k = 1, 2$ врахуємо інтерполяційні умови (4) та наступні співвідношення

$$P_2(0) = L_0', \quad (7)$$

$$P_2(x_i) = L_0' + L_1'(x_i) + L_2'(x_i, x_i), \quad (8)$$

$$P_2'(x_i)x_i = L_1'(x_i) + 2L_2'(x_i, x_i), \quad (9)$$

$$P_2''(x_i)x_i x_i = 2L_2'(x_i, x_i). \quad (10)$$

Отже отримаємо

$$L_0' = F_2(0)$$

$$L_2'(x_j, x_k) = \frac{1}{2} F_2''(x_j)x_j x_k, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{1, m},$$

$$L_2'(x_i, x_i) = F_2''(x_i)x_i - F_2(x_i) + F_2(0), \quad i = \overline{1, m},$$

$$L_1'(x_i) = -F_2'(x_i)x_i + 2F_2(x_i) - 2F_2(0), \quad i = \overline{1, m}.$$

Зауважимо, що другі диференціали Гато $F_2''(x_j)x_i x_i$, $i \neq k$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$; в інтерполяційних умовах (4)-(6) можуть бути задані в будь-яких вузлах.

Перейдемо до розв'язання інтерполяційної задачі (5). На підставі умов (5) та вище наведених формул (7), (9), (10), розв'язок (5) запишеться у вигляді:

$$L_0' = F_2(0),$$

$$L_2'(x_j, x_k) = \frac{1}{2} F_2''(x_j)x_j x_k, \quad j, k = \overline{1, m},$$

$$L_1'(x_i) = F_2'(x_i)x_i - F_2''(x_i)x_i x_i, \quad i = \overline{1, m},$$

а задачі (6) наступним чином

$$L_0' = F_2(0),$$

$$L_2'(x_j, x_k) = \frac{1}{2} F_2''(x_j)x_j x_k, \quad j, k = \overline{1, m},$$

$$L_1'(x_i) = F_2(x_i) - \frac{1}{2} F_2''(x_i)x_i x_i - F_2(0), \quad i = \overline{1, m}.$$

В роботі не розглядається задача інтерполювання із умовами, що містять тільки значення оператора у вузлах та значення перших

диференціалів Гато, оскільки в [4] побудовано розв'язок, що визначається формулою (2), операторної задачі інтерполяції типу Ерміта, коли задані значення поліноміального оператора другого степеня та його диференціалів Гато першого порядку у вузлах обраних певним чином.

Побудуємо інтерполяційний поліном типу Ерміта $P_3(x)$ третього степеня ($n=3$). Для визначення всіх значень операторних форм $L_k'(x_i, \dots, x_i)$, $k = \overline{1, 3}$, що містяться в (2) задамо наступні інтерполяційні умови

$$P_3(0) = F_3(0),$$

$$P_3(x_i) = F_3(x_i), \quad i = \overline{1, m},$$

$$P_3'(x_i)x_i = F_3'(x_i)x_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (11)$$

$$P_3''(x_i)x_i x_i = F_3''(x_i)x_i x_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$P_3''(x_i)x_p x_p = F_3''(x_i)x_p x_p, \quad (12)$$

$$i \neq p, \quad i = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, m}$$

$$P_3'(x_i)x_p = F_3'(x_i)x_p, \quad (13)$$

$$i = \overline{1, m-1}, \quad p = \overline{1, i+1},$$

$$P_3''(x_k)x_i x_j = F_3''(x_k)x_i x_j, \quad i \neq k \neq j, \quad (14)$$

$$k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \quad j = \overline{k+2, m}.$$

Рівності (11) можна розглядати як систему функціональних рівнянь відносно невідомих $L_k'(x_i, \dots, x_i)$, $k = \overline{0, 3}$, розв'язавши яку дістанемо

$$L_0' = F_3(0),$$

$$L_1'(x_i) = 3F_3(x_i) - 3F_3(0) - 2F_3'(x_i)x_i + \frac{1}{2} F_3''(x_i)x_i x_i,$$

$$L_2'(x_i, x_i) = 3F_3'(x_i)x_i - 3F_3(x_i) + 3F_3(0) - F_3''(x_i)x_i x_i,$$

$$L_3'(x_i, x_i, x_i) = \frac{1}{2} F_3''(x_i)x_i x_i - F_3'(x_i)x_i + F_3(x_i) - F_3(0), \quad i = \overline{1, m}.$$

Із (12), (13) та на підставі формул

$$P_3(x_i) = L_0' + L_1'(x_i) + L_2'(x_i, x_i) + L_3'(x_i, x_i, x_i),$$

$$P_3'(x_i)x_j = L_1'(x_j) + 2L_2'(x_i, x_j) + 3L_3'(x_i, x_i, x_j),$$

$$P_3''(x_j)x_i x_k = 2L_2'(x_j, x_k) + 6L_3'(x_i, x_j, x_k). \quad (15)$$

Одержимо

$$L_1^i(x_i, x_p, x_p) = \frac{1}{6} \{ F_3''(x_i) x_p x_p - 6 F_3'(x_p) x_p - 6 F_3(x_i) + F_3(0) - F_3''(x_p) x_p x_p \}, \quad i, p = \overline{1, m}, \quad i \neq p$$

$$L_2^i(x_i, x_p, x_i) = \frac{1}{6} \{ F_3''(x_i) x_p x_p - 6 F_3'(x_p) x_p - 6 F_3(x_i) + F_3(0) - F_3''(x_p) x_p x_p \}, \\ i, p = \overline{1, m}, \quad i \neq p,$$

$$L_2^i(x_i, x_p) = \frac{1}{2} \{ F_3''(x_i) x_p + 2 F_3'(x_p) x_p + 3 F_3'(x_i) x_i - \\ - \frac{1}{2} F_3''(x_p) x_p x_p + \frac{1}{2} F_3''(x_i) x_i x_i - \\ - \frac{1}{2} F_3''(x_p) x_i x_i - 3 F_3(x_p) + 3 F_3(x_i) \}, \\ i = \overline{1, m-1}, \quad p = \overline{i+1, m}.$$

Враховувавши (14), (15) дістанемо

$$L_3^i(x_k, x_i, x_j) = \frac{1}{6} \left\{ F_3''(x_k) x_i x_j + \frac{1}{2} F_3''(x_j) x_i x_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} F_3''(x_j) x_i x_i - \frac{1}{2} F_3''(x_i) x_j x_j - \right. \\ \left. - F_3'(x_i) x_j - 2 F_3'(x_j) x_j - 3 F_3'(x_i) x_i + 3 F_3(x_j) - 3 F_3(x_i) \right\}, \\ i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \quad j = \overline{k+2, m}, \\ (16)$$

Якщо інтерполяційні умови (14) замінити на наступні

$$P_3^{(3)}(x_k) x_i x_j = F_3^{(3)}(x_k) x_i x_j, \\ i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \quad j = \overline{k+2, m},$$

то формула (13) набуває вигляду

$$L_3^i(x_k, x_i, x_j) = \frac{1}{6} F_3^{(3)}(x_k) x_i x_j, \\ i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \quad j = \overline{k+2, m}.$$

Таким чином визначені всі значення операторних форм $L_k^i(x_1, \dots, x_m)$, $k = 0, 3$, що містяться в (2), тим самим побудований інтерполяційний операторний поліном (2) третього степеня.

Надалі розглянемо інтерполяційну задачу типу Ерміта-Біркгофа для поліноміального

оператора $F_4 \in \Pi_4$. Для побудови інтерполянта (2) задамо наступні інтерполяційні умови:

$$P_4(0) = F_4(0), \\ P_4(x_i) = F_4(x_i), \quad i = \overline{1, m}, \\ P_4(2x_i) = F_4(2x_i), \quad i = \overline{1, m},$$

$$P_4'(x_i) x_i = F_4'(x_i) x_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ P_4''(x_i) x_i x_i = F_4''(x_i) x_i x_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ P_4'''(x_i) x_i x_j = F_4'''(x_i) x_i x_j, \\ i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m},$$

$$P_4''(2x_i) x_j x_j = F_4''(2x_i) x_j x_j, \\ i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m}$$

$$P_4''(x_j) x_i x_i = F_4''(x_j) x_i x_i, \\ i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m},$$

$$P_4'(x_i) x_j = F_4'(x_i) x_j, \\ i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m}$$

$$P_4'(2x_i) x_j = F_4'(2x_i) x_j, \\ i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m},$$

$$P_4''(x_j) x_i = F_4''(x_j) x_i, \\ i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m},$$

$$P_4'''(x_i) x_j x_k = F_4'''(x_i) x_j x_k, \\ i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \\ j = \overline{k+2, m}$$

$$P_4''(2x_i) x_j x_k = F_4''(2x_i) x_j x_k, \\ i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \\ j = \overline{k+2, m},$$

$$P_4''(x_j) x_i x_k = F_4''(x_j) x_i x_k, \\ i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \\ j = \overline{k+2, m},$$

$$P_4'''(x_i) x_j x_i = F_4'''(x_i) x_j x_i, \\ i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \\ j = \overline{k+2, m}.$$

Інтерполяційні умови (26), (27) дістали із (24) заміною місцями вузол інтерполяції з одним із напрямків диференціала Гато.

$$P_4''(x_i + x_j) x_p x_k = F_4''(x_i + x_j) x_p x_k, \\ i \neq j \neq p \neq k.$$

Як і вище, із системи рівнянь (17) визначаємо:

$$L_0^I = F_4(0),$$

$$L_1^I(x_i) = 4F_4(x_i) - \frac{1}{2}F_4(2x_i) - 2F_4'(x_i)x_i +$$

$$+ F_4''(x_i)x_i x_i - \frac{9}{2}F_4(0),$$

$$L_2^I(x_i, x_i) = -6F_4(x_i) + \frac{3}{2}F_4(2x_i) + 3F_4'(x_i)x_i -$$

$$- \frac{5}{2}F_4''(x_i)x_i x_i + \frac{9}{2}F_4(0),$$

$$L_3^I(x_i, x_i, x_i) = 4F_4(x_i) - \frac{3}{2}F_4(2x_i) - F_4'(x_i)x_i +$$

$$+ 2F_4''(x_i)x_i x_i - \frac{5}{2}F_4(0),$$

$$L_4^I(x_i, x_i, x_i, x_i) = -F_4(x_i) + \frac{1}{2}F_4(2x_i) -$$

$$- \frac{1}{2}F_4''(x_i)x_i x_i + \frac{1}{2}F_4(0), \quad i = \overline{1, m}.$$

Із (18), (19) та формул

$$F_4(x_i) = L_0^I + L_1^I(x_i) + L_2^I(x_i, x_i) +$$

$$+ L_3^I(x_i, x_i, x_i) + L_4^I(x_i, x_i, x_i, x_i),$$

$$F_4'(x_i)x_j = L_1^I(x_j) + 2L_2^I(x_i, x_j) +$$

$$+ 3L_3^I(x_i, x_i, x_j) + 4L_4^I(x_i, x_i, x_i, x_j),$$

$$F_4''(x_i)x_j x_k = 2L_2^I(x_j, x_k) +$$

$$+ 6L_3^I(x_i, x_j, x_k) + 12L_4^I(x_i, x_i, x_j, x_k)$$

дістанемо

$$L_2^I(x_i, x_j, x_j) = \frac{1}{3} \left\{ F_4''(x_i)x_j x_j - \right.$$

$$\left. \frac{1}{4}F_4''(2x_i)x_j x_j - \frac{3}{2}L_2^I(x_j, x_j) \right\},$$

$$L_4^I(x_i, x_i, x_j, x_j) = \frac{1}{12} \left\{ -F_4''(x_i)x_j x_j + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}F_4''(2x_i)x_j x_j + L_2^I(x_j, x_j) \right\}.$$

Із (20) знайдемо

$$L_3^I(x_j, x_i, x_i) = F_4''(x_j)x_i x_i - 2L_2^I(x_i, x_i) -$$

$$- 12L_4^I(x_i, x_i, x_j, x_i).$$

Умови (21), (22) розглянемо як систему функціональних рівнянь відносно невідомих $L_1^I(x_i, x_j),$

$$L_4^I(x_i, x_i, x_i, x_j),$$

$i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m}$ роз'язавши яку одержимо

$$L_2^I(x_i, x_j) = \frac{1}{6} \left\{ 4F_4''(x_i)x_i - \frac{1}{2}F_4''(2x_i)x_i - \right.$$

$$\left. \frac{7}{2}L_1^I(x_j) - 6L_3^I(x_i, x_i, x_j) \right\},$$

$$L_4^I(x_i, x_i, x_i, x_j) = \frac{1}{4!} \left\{ F_4''(2x_i)x_j - 2F_4''(x_i)x_j + \right.$$

$$\left. + L_1^I(x_j) - 6L_3^I(x_i, x_i, x_j) \right\}.$$

Із (23) знаходимо

$$L_4^I(x_j, x_i, x_i, x_i) = F_4''(x_j)x_i - L_1^I(x_i) -$$

$$- 2L_2^I(x_i, x_j) - 3L_3^I(x_i, x_i, x_j).$$

Надалі із системи рівнянь (24), (25) визначимо

$$L_3^I(x_i, x_j, x_k) = \frac{1}{3} \left\{ -\frac{1}{2}F_4''(2x_i)x_j x_k + \right.$$

$$\left. + 2F_4''(x_i)x_j x_k - 3L_2^I(x_j, x_k) \right\},$$

$$L_4^I(x_i, x_i, x_j, x_k) = \frac{1}{8} \left\{ F_4''(2x_i)x_j x_k - \right.$$

$$\left. - 2F_4''(x_i)x_j x_k + 2L_2^I(x_j, x_k) \right\},$$

$$i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \quad j = \overline{k+2, m},$$

а із (26), (27) - решту значень $L_4^I(x_i, x_i, x_j, x_k):$

$$L_4^I(x_i, x_j, x_j, x_k) = \frac{1}{12} \left\{ F_4''(x_j)x_i x_k - \right.$$

$$\left. - 2L_2^I(x_i, x_k) - 6L_3^I(x_j, x_i, x_k) \right\},$$

$$L_4^I(x_i, x_j, x_k, x_k) = \frac{1}{12} \left\{ F_4''(x_k)x_j x_i - \right.$$

$$\left. - 2L_2^I(x_i, x_j) - 6L_3^I(x_j, x_i, x_k) \right\},$$

$$i \neq k \neq j \quad k = \overline{1, m-2}, \quad i = \overline{k+1, m-1}, \quad j = \overline{k+2, m}.$$

Із (27) маємо

$$L_4^I(x_i, x_j, x_p, x_k) = \frac{1}{4!} \left\{ F_4''(x_i+x_j)x_p x_k - \right.$$

$$- 2L_2^I(x_p, x_k) - 6L_3^I(x_i, x_p, x_k) -$$

$$- 6L_3^I(x_j, x_p, x_k) - 12L_4^I(x_i, x_i, x_p, x_k) -$$

$$- 12L_4^I(x_j, x_j, x_p, x_k) \left. \right\}, \quad i \neq j \neq p \neq k.$$

Таким чином всі невідомі значення операторних форм із формули (2) визначені.

Як бачимо для поліноміального оператора четвертого степеня при побудові інтерполянта типу Ерміта-Біркгофа, що визначається формулою (2), коли задані диференціали Гато порядку не вище другого, потрібно використовувати за вузли суми елементів $x_i + x_k$, $i \neq k$, $i, k = \overline{1, m}$. Це ж стосується і операторних поліномів степеня вище четвертого. Зауважимо, що кількість інтерполяційних умов в вище наведених задачах та число невідомих із формули (2) співпадають.

Аналогічно до викладеного вище можна навести інтерполяційні умови типу Ерміта та Ерміта-Біркгофа для поліноміального оператора p' -того степеня $F_3 \in P_3$ та розв'язати поставлену задачу. Дана задача повністю аналогічна до попередньої.

Висновки. В статті поставлено операторні інтерполяційні задачі типу Ерміта та Ерміта-Біркгофа для поліноміальних операторів другого, третього та четвертого степеня, тобто задана система вузлів та напрямків диференціалів Гато; знайдено рекурентні співвідношення для розв'язання поставлених задач. На відміну від результатів робіт [1]-[3], де розв'язані задачі Ерміта та Ерміта-Біркгофа для довільного оператора в загальному випадку (система вузлів інтерполювання та напрямки диференціалів Гато не пов'язані між собою), в роботі розглянуто частинні випадки цих задач (система вузлів інтерполювання та напрямки диференціалів Гато пов'язані між собою співвідношеннями), але побудовані формули мають більш простий вигляд та для їх застосування потрібно менше використовувати арифметичних операцій.

Список використаних джерел

1. Makarov V.L., Khlobystov V.V. Bases of polynomial interpolation Theory. – Kyiv: Mathematics Inst., 1998. – 278 p. (in Russian).
2. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. Operator interpolation. – Kyiv: Naukova Dumka, 2004. – 476 p. (in Russian).
3. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. Method of operator interpolation. – Kyiv: Mathematics Inst., 2010. – 516 p. (in English).
4. Khlobystov V.V., Kashpur E.F. To the polynomial operator interpolation problem// Kibernetika i sistemny analiz. – 1996. – N 3. – P.102-108. (in Russian).
5. Pupkov K.A., Kapalin V.I., Ushchenko A.S. Functional series in theory of nonlinear systems. – Moscow: Nauka, 1976. – 448 p. (in Russian).

Надійшла до редакції 30.11.2012

УДК 004.932.2

Кобзар А.Ю., аспірант

Структура бази зображень для побудови панорамних знімків

Запропоновано структуру бази знімків для процесу побудови панорамних зображень. Визначено процедуру її послідовного заповнення та швидкого пошуку довільного зображення в ній.

Описаний метод був ефективно реалізований для мобільного телефону. Завдяки додатковим даним з датчика прискорення проведено оптимізацію швидкодії та точності алгоритму.

Ключові слова: панорамні знімки, обробка зображень, пошук зображень, датчик прискорення.

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: taras55@gmail.com

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Алгоритм побудови панорамних знімків складається з послідовності етапів: знаходження ключових точок, опис знайдених точок, з'єднання точок в пари, відкидання помилкових пар, пошук взаємної орієнтації зображень та об'єднання окремих знімків в один файл панорами. Короткий опис всіх етапів можна знайти в [1] та [2]. В цій статті детально описується відкидання помилкових пар та пошук взаємної орієнтації зображень, оскільки ці етапи тісно пов'язані і не можуть виступати як окремі частини алгоритму.

Загальним підходом до поставленої задачі є використання комбінації алгоритмів градієнтної оптимізації та RANSAC [3] для відкидання хибних пар. Однак ця методика дає не найкращий результат, оскільки вона не враховує деякі її особливості. Більш ефективним вирішенням проблеми є ітераційна процедура, основана на геометричній інтерпретації руху камери, та відкидання хибних пар на основі пошуку найбільшого графа на площині з відповідними ребрами однакової довжини.

Також в роботі представлено дворівневу структуру бази для швидкого пошуку та її модифікації з врахуванням даних датчика

A. Kobzar, postgraduate (PhD)

Structure of the image database for constructing panoramic images

We suggest the structure of the image database for the process of panoramic images construction. The procedure of sequential database completion and quick search of arbitrary images is determined.

This method has been effectively implemented for a mobile phone. With additional data from the acceleration sensor, speed and accuracy of the algorithm have been optimized.

Key Words: panoramic shots, image processing, image searching, acceleration sensor.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: taras55@gmail.com

прискорення. В інших роботах база реалізується як набір зображень серед яких ведеться попарне порівняння.

Структура бази зображень

З огляду на поставлену задачу (побудова програмного забезпечення для панорамної зйомки з мобільного телефону) робота з базою зображень повинна включати в себе дві функції: *пошук* та *додавання* зображення. Пошук, здебільшого, використовується для того щоб показати зображення з бази поруч із зображенням з видошукача, для попереднього перегляду. Щоб забезпечити комфортну роботу, пошук повинен вестись якнайшвидше, тоді як швидкість додавання може бути на порядок нижчою.

База складається з двох рівнів: загальної бази вибраних точок всіх зображень та повного списку точок для кожного зображення. Разом з цим зберігається граф зв'язків між зображеннями, де кожному ребру відповідає взаємна орієнтація зображень, які воно зв'язує.

Пошук ведеться лише по точках загальної бази. Причому у випадку використання пошуку для попереднього перегляду параметри

алгоритму підбираються так, щоб забезпечити більшу швидкість.

Результатом пошуку є орієнтація зображення в системі координат бази, яка представляється у вигляді трьох кутів Ейлера.

Першим етапом пошуку є побудова пар точок за допомогою алгоритму BBF [4], перший елемент яких береться з загальної бази, а другий з точок зображення, положення якого знаходиться. Далі серед знайдених пар відбираються лише коректні, на основі яких за допомогою ітеративної процедури і знаходяться кути Ейлера.

Якщо алгоритм виділення ключових точок знаходить точки декількох класів (наприклад алгоритм DoG, що використовується в SIFT [5], виділяє темні п'ятна на світлому фоні і світлі п'ятна на темному фоні), то це можна використати для розбиття бази пошуку і знаходити відповідності лише в межах класів. Цим самим зменшуючи базу для пошуку та збільшуючи швидкість алгоритму.

Додавання складається з декількох етапів:

- Спочатку зображення, що додається, обробляється алгоритмом пошуку, причому його параметри тепер вибираються для збільшення точності результату.

- На основі знайденого положення, серед окремих зображень бази знаходяться ті, що мають перетин достатньої площі з зображенням, що додається.

- Скоротивши список підозрілих, проводиться їх попарне порівняння з новим.

Знаючи оцінку положення як зображення, що додається, так і всіх зображень з бази, можна з деякою точністю знайти координати ключових точок всіх цих зображень. Маючи таку інформацію, процес побудови пар можна скоротити до об'єднання лише просторово близьких точок.

Однак проблема виникає тоді, коли нове зображення замикатиме цикл в графі зв'язків (наприклад, при останній фотографії кільцевої зйомки). До утворення циклу, крайні елементи знаходяться на відстані близько 10 зв'язків (ребер), що спрощує накопичення похибки в положенні. Через це точки, що повинні бути з'єднані в пари, знаходяться далеко одна від одної. В такому випадку, якщо максимальна відстань між зображеннями, серед яких ведеться пошук, більша 5, то проводиться повний пошук по ключовим точкам для всіх зображень з використанням алгоритму BBF [4].

- Після вставки зображення в потрібне місце, проводиться розподіл похибки між всіма зв'язками панорами. Це відбувається ітеративним перерахунком положень всіх зображень на основі положень сусідів та зв'язків між ними.

- Останнім етапом є додавання до глобальної бази частини ключових точок нового зображення. Також після оновлення положень зображень при розподілі похибки, слід оновити положення всіх точок глобальної бази.

Для економії оперативної пам'яті дані про точки можна зберігати на жорсткому диску і завантажувати тільки при додаванні нового зображення. Також цей підхід дозволяє відновлювати роботу програми після аварійного завершення.

Вибір коректних пар

Розглянемо дві пари точок:

$$(a_1, b_1) \text{ та } (a_2, b_2),$$

де a_1, a_2 – точки першого зображення, а b_1, b_2 – точки другого зображення.

Якщо вони обидві є правильно визначеними, тоді з врахуванням похибки можна записати:

$$|\rho(a_1, a_2) - \rho(b_1, b_2)| < \epsilon,$$

де ϵ – порогове значення похибки, а $\rho(\cdot, \cdot)$ – значення кута, під яким точки видно з центру проєкції. Пари, що задовольняють цю нерівність називаємо сумісними.

Якщо ж хоча б одна з пар визначена некоректно, то відстані між відповідними точками будуть випадковими значеннями з деякого розподілу. Ймовірність їх сумісності можна записати як:

$$\alpha(\epsilon) = P(|\rho(a_1, a_2) - \rho(b_1, b_2)| < \epsilon)$$

причому ϵ обирається таким чином, щоб $\alpha(\epsilon)$ було близьким до 0. Отже якщо для обраних пар виконуватиметься нерівність:

$$|\rho(a_1, a_2) - \rho(b_1, b_2)| \geq \epsilon,$$

тоді враховуємо це збільшуючи лічильник кількості помилок для кожної з них.

Перебравши таким чином всі пари пар, для кожної отримуюмо кількість пар з якими вона не є сумісною. Пари, що належать істинному перетворенню, будуть несумісними лише з $1 - \alpha(\epsilon)$ частиною некоректно визначених пар. Тоді як некоректні пари будуть несумісними з $1 - \alpha(\epsilon)$ частиною всіх пар. Таким чином ми знайшли критерій поділу пар.

Відкидаючи хибні пари будемо починаючи з «найгірших», тобто тих, які мають найбільшу

кількість несумісностей. Знайшовши кандидата на відкидання, викреслюємо його зі списку пар та зменшуємо кількість помилок для всіх несумісних пар з обраною. Цю процедуру будемо повторювати доти, доки існують несумісні пари. В кінці кінців отримуємо множину попарно сумісних пар. Якщо кількість пар менша (емпірично) обраного порогового значення, то пошук вважається невдалим, інакше можна приступати до визначення кутів Ейлера для зображення, для якого здійснюється пошук.

На практиці мінімальна кількість пар бралася рівня 5, а порогове значення похибки на рівні 1° .

Пошук кутів Ейлера

Результатом алгоритму пошуку є три Ейлерові кути, які описують положення зображення в системі координат зображень, вже присутніх в базі. Для пошуку цих кутів на попередніх етапах було знайдено пари відповідних точок та відкинуто помилково визначені з них. Кути обираються таким чином, щоб координати точок в глобальній системі координат для кожної з пар – співпадали.

Знайдені пари позначимо як $((x_i^1, y_i^1, z_i^1), (x_i^2, y_i^2, z_i^2))$, де (x_i^1, y_i^1, z_i^1) – нормовані координати першої точки i -тої пари, що береться з бази точок, а (x_i^2, y_i^2, z_i^2) – координати другої точки i -тої пари, що береться з зображення.

В термінах оптимізації цю задачу можна представити як мінімізацію суми квадратів відстаней між точками пар:

$$\sum_{i=1}^n \left((x_i^1, y_i^1, z_i^1)^T - R(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \frac{(x_i^2, y_i^2, z_i^2)^T}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + 1}} \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \beta, \gamma}$$

де $R(\alpha, \beta, \gamma)$ – матриця поворотів на кути Ейлера. Розв'язок задачі можна знайти різними градієнтними методами, однак вони не враховують особливості задачі та досить громіздкі при розрахунках через велику кількість тригонометричних функцій.

В даній статті пропонується звести просторову задачу до ітеративного застосування двовимірної задачі [6]. На кожному кроці уточнюється положення центру зображення (β та γ), що знаходиться.

В якості початкового наближення обираємо усереднене положення точок пар, що належать базі пошуку:

$$(x, y, z) = \sum_{i=1}^n (x_i^1, y_i^1, z_i^1)$$

$$\beta_0 = \arctg \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \gamma_0 = \arctg \frac{y}{x}.$$

Тепер маючи наближення положення $(0, \beta_k, \gamma_k)$ на попередньому кроці треба знайти наступне наближення $(0, \beta_{k+1}, \gamma_{k+1})$. Спроектуємо точки (x_i^1, y_i^1, z_i^1) на площину зображення:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_i^1 \\ \tilde{y}_i^1 \\ \tilde{z}_i^1 \end{pmatrix} = R^{-1}(0, \beta_k, \gamma_k) \begin{pmatrix} x_i^1 \\ y_i^1 \\ z_i^1 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{x}_i^1, \tilde{y}_i^1) = \left(\frac{\tilde{x}_i^1}{\tilde{z}_i^1}, \frac{\tilde{y}_i^1}{\tilde{z}_i^1} \right).$$

Отримані таким чином пари $((\tilde{x}_i^1, \tilde{y}_i^1), (x_i^2, y_i^2))$ належать до одного зображення і при точних значеннях (α, β, γ) їх елементи повинні співпадати. Розглянемо перетворення вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{x}_i^1 = x_i^2 \cos \theta - y_i^2 \sin \theta + x_0 \\ \tilde{y}_i^1 = x_i^2 \sin \theta + y_i^2 \cos \theta + y_0 \end{cases}$$

де $x_0, y_0, \cos \theta, \sin \theta$ – параметри перетворення. Знайти їх оптимальні значення можна методом найменших квадратів. Застосувавши перетворення до центру зображення, ми уточнюємо його положення в просторі:

$$(x, y, z)^T = R(0, \beta_k, \gamma_k) (x_0, y_0, 1)^T$$

$$\beta_{k+1} = \arctg \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \gamma_{k+1} = \arctg \frac{x}{z}.$$

Знайти положення за одну ітерацію неможливо, оскільки при проектуванні точок (x_i^1, y_i^1, z_i^1) на площину зображення відбувається нелінійне викривлення, яке неможливо компенсувати за допомогою МНК.

На останній ітерації знаходиться кут $\alpha = \theta = \arctg \frac{s \sin \theta}{s \cos \theta}.$

Значення $s = \sqrt{(s \sin \theta)^2 + (s \cos \theta)^2}$ можна використати як додатковий критерій правильності визначення положення. В разі помилки s сильно відрізняється від 1.

Використання даних акселерометра

Акселерометр, або датчик прискорення являє собою пристрій, який вимірює напрямки та величину прискорення, що діє на нього. Цим датчиком укомплектована переважна більшість сучасних мобільних телефонів. Найважливішим аспектом є те, що в нерухомому положенні він вимірює напрямки гравітації в системі координат телефону.

Завдяки даним про гравітацію можна однозначно визначити кути α та β :

$$\alpha = \arctg \frac{G_x}{G_y}, \beta = \arctg \frac{G_z}{G_x \sin \alpha + G_y \cos \alpha}$$

Але точність такої інформації для побудови панорамних знімків є не задовільною. Однак це допомагає скоротити пошук, поділивши базу точок на окремі частини.

Перед побудовою пар в процедурі пошуку, для кожної точки (x_i, y_i) знаходиться кут ϕ_i :

$$(x, y, z) = R(\alpha, \beta, 0)(x_i, y_i, 1) \\ \phi_i = \arctg \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

який змінюється від $-\pi/2$ до $\pi/2$. На основі цих кутів пошук ведеться лише у відповідній базі, що відповідає одному з інтервалів, на які розбивається відрізок $[-\pi/2, \pi/2]$.

Для функціонування алгоритму потрібно знати кут огляду камери. Є два шляхи для його визначення:

1. Зняти кільцеву панораму та мінімізувати похибку, змінюючи значення кута огляду.

2. Використати датчик прискорення для уточнення значення кута огляду. Хоча цей метод і дає меншу точність, однак його можна здійснювати в процесі зйомки.

Також за допомогою датчика прискорення без особливих проблем визначається рівень горизонту.

Аналіз отриманих результатів

Запропонована схема алгоритму була реалізована, як частина програмного комплексу для побудови панорамних знімків в мобільному телефоні. Особливістю підходу можна назвати використання специфіки задачі для отримання кращих результатів як по якості, так і по швидкості. Обрана структура бази зображень дозволила вести пошук зображень для

попереднього перегляду та накопичувати вміст бази. Та використані припущення звузили область використання алгоритму, для якого тепер потрібно попередньо з'ясувати кут огляду кожного зображення.

Вагомий вклад в процес оптимізації та автоматизації внесла наявність датчика прискорення. Завдяки якому вдалось пришвидшити пошук та програмно визначити горизонт. Розвинути даний напрямок можна завдяки використанню гіроскопа, який дозволяє наближено знайти всі 3 Ейлерові кути.

На телефоні Samsung Wave S8500 пошук зображення ведеться за 70 мілісекунд, що дозволяє виводити картинку в режимі реального часу з частотою 7 кадрів/секунду. Додавання ж відбувається за 1-2 секунди, залежно від кількості зв'язків зображення та наповненості бази зображень.

Висновки

На прикладі даного алгоритму можна пересвідчитись, в більшій ефективності конкретизованих алгоритмів над загальними. Обрані припущення дозволили реалізувати програмне забезпечення для побудови панорамних знімків прямо з телефону методами, які раніше були доступні лише на стаціонарних комп'ютерах.

Описана в [1] модель програмного комплексу з використанням запропонованих в даній статті підходів дозволила впровадити метод створення панорамних знімків, який не поступається по зручності таким як Photo Sphere для Android та Photosynth для Windows Phone, які використовують гіроскоп.

Список використаних джерел

1. Verchenko A., Kobzar A. About one of the algorithms of panoramic images building // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2011. N 3. – P.109–114.
2. Brown M., Lowe D. Automatic panoramic image stitching using invariant features // International Journal of Computer Vision. – 2007. – Vol.74, Issue 1. – P.59–73.
3. Fischler M., Bolles R. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with application to image analysis and automated cartography // Communications of the ACM. – Vol.24, Issue 6. – 1981. – P.381–395.
4. Beis J., Lowe D. Shape indexing using approximate nearest-neighbour search in highdimensional spaces // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, June 17-19, 1997, San Juan, Puerto Rico: proceedings. – P.1000–1006.
5. Lowe D. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // International Journal of Computer Vision. – Vol.60, Issue 2. – 2004. – P.91–110.
6. Kobzar A. Search mutual position shots from panorama // Theses 14th International Conference Academician M. Kravchuk. – 2012. – Section 2. – P.138.

Надійшла до редакції 29.11.12

УДК 517.9

Колянова Т.В.¹, асистент**Математична модель природженого імунітету. Вплив запізнення на характер стійкості стаціонарних точок.**

Розглядається математична модель природженого імунітету, яка описується системою нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням. Аналізується вплив запізнення на стійкість стаціонарних точок, наводяться біологічні наслідки.

Ключові слова: система нелінійних диференціальних рівнянь, імунітет, антиген, стійкість стаціонарного стану.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

Статтю представив д. т. н., с. н. с. Кудін В.І.

To study the effect of reaction delay bacterial flora to change amount of infections we will consider a nonlinear system of ordinary differential equations describing the effect of innate immunity:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N(\mu_N - \gamma_1 B), \\ \frac{dB}{dt} &= (B^* - B)(\mu_B - \gamma_2 N(t - \tau) - \gamma_3 \Phi).\end{aligned}\quad (1)$$

The initial conditions are given by

$$\begin{aligned}N(t_0) &= N_0, B(t_0) = B_0, \\ N(t) &= 0 \text{ for } t_0 - \tau < t < t_0.\end{aligned}\quad (2)$$

Suppose the parameter τ small. Replace function $N(t - \tau)$ its linear approximation:

$$N(t - \tau) \approx N(t) - \tau \frac{dN(t)}{dt}.$$

Thus, we have

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N(\mu_N - \gamma_1 B), \\ \frac{dB}{dt} &= (B^* - B)(\mu_B - \gamma_2 N(1 - \tau(\mu_N - \gamma_1 B)) - \gamma_3 \Phi).\end{aligned}\quad (3)$$

T.V. Kolianova¹, assistant**Mathematical model of innate immunity. Influence of delay on character of stability of stationary points.**

A mathematical model of innate immunity, which is described by a system of nonlinear differential equations with delay. Influence of delay is analyzed on stability of stationary points, and in the end, we give the biological consequences.

Keywords: system of nonlinear differential equations, the immune system, antigen, the stability of the stationary point.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

Stationary points found from the system:

$$\begin{aligned}N(\mu_N - \gamma_1 B) &= 0, \\ (B^* - B)(\mu_B - \gamma_2 N(1 - \tau(\mu_N - \gamma_1 B)) - \gamma_3 \Phi) &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

The first stationary point

$$N_1 = 0, B_1 = B^*, \quad (5)$$

describes a healthy organism,

and the second stationary point

$$N_2 = \frac{\mu_B - \gamma_3 \Phi}{\gamma_2}, B_2 = \frac{\mu_N}{\gamma_1}, \quad (6)$$

which is the condition $\mu_B > \gamma_3 \Phi$ (environmental factors are not limiting), responds for a sick organism.

Investigate the stability of stationary points.

Lets start with the first point (5). To do this, we will make this stationary point small perturbation

$$N_1 = 0 + \tilde{N}, B_1 = B^* + \tilde{B},$$

where $\tilde{N}, \tilde{B}$ – new variables that are considered small.

Linearized system of differential equations (3) in around of this point will look like

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{N}}{dt} &= (\mu_N - \gamma_1 B^*) \tilde{N}, \\ \frac{d\tilde{B}}{dt} &= -(\mu_B - \gamma_3 \Phi) \tilde{B}.\end{aligned}\quad (7)$$

We write the matrix coefficients for the linearized system

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu_N - \gamma_1 B^* & 0 \\ 0 & -(\mu_B - \gamma_3 \Phi) \end{pmatrix}.$$

Characteristic equation will look like

$$\det(A_1 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (\mu_N - \gamma_1 B^*) - \lambda & 0 \\ 0 & -(\mu_B - \gamma_3 \Phi) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

or

$$((\mu_N - \gamma_1 B^*) - \lambda)(-(\mu_B - \gamma_3 \Phi) - \lambda) = 0,$$

here received

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mu_N - \gamma_1 B^*, \\ \lambda_2 &= -(\mu_B - \gamma_3 \Phi).\end{aligned}$$

Clearly, that $\lambda_2 < 0$ always (due to the fact that $N_2 > 0$). As for the sign λ_1 , then if $\lambda_1 < 0$ ($\mu_N < \gamma_1 B^*$) – singular point is a stable node, and if $\lambda_1 > 0$ ($\mu_N > \gamma_1 B^*$) – singular point is a saddle.

Results. In the case of stable node ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) bacterial flora of the organism quickly responds to the rate of reproduction antigen (infection). The negative impact of the environment on the recovery rate of bacterial flora in the body is essential. This situation is stable, and at the proper level of immunity, the so-called “first” barrier will not be passed.

In the case of the saddle ($\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 < 0$) low concentration of antigen is present in the body, bacterial flora will restrain its rapid development, but

with time at constant depletion may be an allergic reaction [1, 2].

Being such a «specific equilibrium» can be maintained control parameters μ_B and γ_3 .

Linearized system of differential equations (3) in around of the second point (6) will look like

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{N}}{dt} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\mu_B - \gamma_3 \Phi) \tilde{B}, \\ \frac{d\tilde{B}}{dt} &= -\gamma_2 (B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3 \Phi) \tilde{N} + \tau \mu_N (\mu_B - \gamma_3 \Phi) \tilde{B}.\end{aligned}$$

Matrix coefficients for the linearized system has the form

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\mu_B - \gamma_3 \Phi) \\ -\gamma_2 (B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3 \Phi) & \tau \mu_N (\mu_B - \gamma_3 \Phi) \end{pmatrix}$$

Characteristic equation will look like

$$\begin{aligned}\det(A_2 - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\mu_B - \gamma_3 \Phi) \\ -\gamma_2 (B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3 \Phi) & \tau \mu_N (\mu_B - \gamma_3 \Phi) - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-\lambda)(\tau \mu_N (\mu_B - \gamma_3 \Phi) - \lambda) - \\ &\quad - \gamma_1 (B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3 \Phi)(\mu_B - \gamma_3 \Phi) = 0.\end{aligned}$$

Then we have

$$\begin{aligned}\lambda^2 &- \lambda \tau \mu_N (\mu_B - \gamma_3 \Phi) - \\ &- \gamma_1 (\mu_B - \gamma_3 \Phi) (B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3 \Phi) = 0.\end{aligned}$$

Roots of this quadratic equation have the form

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} + \\ &+ \sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}, \\ \lambda_2 &= \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} - \\ &- \sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}.\end{aligned}\quad (8)$$

We must evaluate the sign

$$D_1 = \gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi).$$

If $\tau = 0$, then we have

$$\lambda_1 = +\sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}.$$

In this case:

if $D_1 > 0$,

then $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ – stationary point is a saddle,

if $D_1 < 0$, then roots of the characteristic equation are purely imaginary because of $\text{Re}\lambda_{1,2} = 0$

$$\lambda_1 = +i\sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)},$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}.$$

and the special point is the center, and the phase portrait of the linearized system of equations – the family of ellipses.

If the $\tau > 0$, then we have:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} + \\ &+ \sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}, \\ \lambda_2 &= \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} - \\ &- \sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}.\end{aligned}$$

for $D_1 = 0$, we have

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} > 0$$

(because of $N_2 > 0$)

and roots of the characteristic equation are positive multiples, so we have an unstable degenerate node;

if $D_1 < 0$, then

$$\lambda_1 = \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} + i\sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)},$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} - i\sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}.$$

moreover $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$, so we have unstable focus;

for $D_1 > 0$, we have

$$\lambda_1 = \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} + \sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)},$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau\mu_N(\mu_B - \gamma_3\Phi)}{2} - \sqrt{\gamma_1(\mu_B - \gamma_3\Phi)(B^* - \frac{\mu_N}{\gamma_1})(1 - \gamma_3\Phi)}.$$

Clearly that $\lambda_1 > 0$ always, but $\lambda_2 > 0$ or $\lambda_2 < 0$, in particular, when τ increases, than we have $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 > 0$.

Results. At $\tau = 0$, in the case of a stationary point of saddle – the organism or be able to overcome the disease or may die. When special point is the center, the organism will have a chronic disease that periodically will escalate.

At $\tau > 0$, we will have some different situations.

In the case of a special point of type unstable focus, an organism will always feel some "hesitation": deteriorating health and weakening of the immune system (reduction of the protective barrier of the body in the form of low-level bacterial flora). This constant stress on the immune system lead to its depletion [3, 4], resulting in the organism

can not cope with antigens that attack it. The first barrier of protection will be halted, and antigens penetrate inside the body (then in effect should join acquired immunity).

Where the singular point is unstable node, depending on the state of the immune system (the meaning and value of output parameters), the organism can inhibit the growth of populations of certain antigens long period of time; but in the case of impaired immunity – will be rapid growth in population antigens imbued in the middle of the organism and cause disease.

Список використаних джерел

1. Khayrer E., Nerset P., Vanner of Gramme. *Decision of usual differential equalizations. Non-rigid tasks.* Moscow, 1990. (in Russian).
2. Pontryagin L.S. *Usual differential equalizations.* L.S. Pontryagin. M.: Science, 1974. - 332 p. (in Russian).
3. Bernet F. *Cellular immunology.* M., «World», 1971. (in Russian).
4. Hege J.S. A mathematical model relating circulating antibody and antibody forming cells / J.S. Hege, G. Cole // *J. Immunol.* 1966. V. 97. P. 34-40. (in English).

Надійшла до редколегії 27.11.12

УДК 004.8

Корлюк О.С.¹, м.н.с.

Гіперплощинний класифікатор повнотекстних документів

В даній статті розглядається модель класифікатора повнотекстових документів на природній мові, на прикладі вибірки веб-сторінок. Розроблена методика передбачає самоналаштування алгоритму в процесі його виконання, засобами адаптації параметрів функцій Ляпунова.

Ключові слова: класифікація, простір ознак, функції Ляпунова

¹ Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова Національної академії наук України, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 40, e-mail: arheys@gmail.com

This paper was presented by Denis Khusainov, Ph. D., Prof.

Introduction

There are actual different targets of automatically recognizing various text information of large amounts of textual information in natural language in information systems, such as web pages. The task of documents classification is to determine the identity of electronic document to one or more categories, based on its content. The tasks of classification can be divided into two types: controlled document classification, during which some external mechanisms (such as expert analysis) provide information on the correct classification of documents and uncontrolled or automatic document classification, where classification should automatically be done in the absence of external information.

There is considered the full-text documents classification model in natural language using the example of web pages sample. Developed method involves self-tuning algorithm through its execution by adaptation options means of Lyapunov's functions [1].

Language statistical model for constructing the features vector of classes topics

The automatic classification of texts based on the assumption that the set texts for each subject (class) contains some different features from other sets that belong to other subjects, so the presence or absence of these features suggests the text belonging

A. Korlyuk¹, junior researcher

Hyperplane classifier of full-text documents

There is considered the full-text documents classification model in natural language using the example of web pages sample. Developed method involves self-tuning algorithm through its execution by adaptation options means of Lyapunov's functions.

Keywords: classification, feature space, Lyapunov's functions

¹ Glushkov Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine, 40 Glushkov av., Kyiv, Ukraine, 03680

to a particular topic. The most common model of document representation is the model called «bag-of-words».

According to this model, the text should be presented as a set of terms, the combination of which determines the meaning of the document and accordingly its topic.

Computer data processing does not include work on features (terms), so the text should be presented in the form of reduced numerical vector of terms (features vector), which reflects the frequency of using of the terms in the text. Thus, will be used frequency words indicator in the text in determining the variables which are the parts of the features vector. The documents of one category have the similar distributions of relative frequencies of the words in the text.

Every word with a lexical collection is assigned to coordinates in features space in determining the features vector for the document. It is proportional to the frequency of words in this document. The dimension of features vector is equal to the number of different terms from the whole array of words in the text.

To construct the features vector, let's take the standard function *tfidf* [2], which is defined as follows:

$$tfidf(t, d_j) = tf(t, d_j) \cdot idf(t), \quad (1)$$

where tf – term frequency in the document,
 idf – inverse document frequency.

$$idf(t_i) = \log \frac{|D|}{df_i}$$

where $|D|$ – the number of documents that are contained in the training sample, df_i – number of documents containing the term t_i .

Also, it is necessary to consider the different lengths of documents. The weights obtained by (1), should be led to a normal form:

$$\omega_{ij} = \frac{tfidf(t_i, d_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{|T|} (tfidf(t_i, d_j))^2}}$$

The i -th term weight in the j -th document of ω_{ij} is calculated such a way that amount of squared weights of each document.

The dimension space in constructing the features vector is the number of the unique terms which are contained in the training sample. If the documents are quite large, the dimension of space can be quite large too, that may affect the speed of classification algorithm, thus reduction (decrease) the dimension of features space can positively affect the quality of classification in following cases.

The simplest approach for the dimension decrease is deletion so-called stop words from the features vector. The stop-words are the most common words (can be found almost in all documents) and often the words which do not carry any meaning and are typically used to connect words in a sentence.

Another measure for reduction the dimension of the features space is stemming algorithms [3], which are based on the rules of word formation, and its combinations. Bringing all the word forms into one form or other methods [4] can positively affect the result of the classification.

Selecting of a set of classes

The collection of documents consists of training and test samples. The training set consists of 1907 sites from Open Directory – DMOZ (<http://www.dmoz.org/>), which, in turn, belong to the hierarchical set of classes. The upper level consists of the following sections: Games (69 – number of sites), Internet (325), Business (1341), Sources of information (98), Free time (76), Home and Family (38), Kids and Teens (40) Health (445) Computers

(517) Art (439), Science (283) News and Media (201) Education (550) Shopping (175) Sports (260), Society (566). The test sample consists of 18177 sites of Yandex Catalogue (<http://yaca.yandex.ua/>). The training and the test samples have the similar structure sections. It is used an automatic translation GoogleTranslate service for the sites with the test sample in the case of non-Ukrainian sites (<http://translate.google.com.ua/>).

Web sites consist of HTML-pages which have not only the semantic text, but also the significant amount of the service marking HTML-tags, the navigation elements, etc., which may distort the results of the classification. So it needs to use only the content of a web document, instead of using the whole text submitted by the page for the classification. There are selected the pages from each site (excluding official, such as «Contacts», «Site-map», etc.), just one a click away from the home page on the same domain.

The hyperplane classifier of full text documents with options adaptation

It is necessary to build the model of classifier after the constructing features vectors for categories.

Let's mark the Lyapunov's function as $V(x, \hat{x}, n, R)$ and explore the variables x and parameters $\hat{x}, R, n$.

The training sequence of points is each k -th class defines the function $V_k(k) = (x, x(k), n(k), R_k)$ on the stage synthesis of the signal classification system for l classes.

Distance from the point x , for which it is needs to make a decision to which category it belongs, it is more appropriate to measure with not using Euclidean norm, but based on the constructed Lyapunov's functions:

$$V_1(x, \hat{x}(1), n(1), R_1) < V_2(x, \hat{x}(2), n(2), R_2).$$

There are set the recurrence relations of the modified Lyapunov's function of refill set $x(1), \dots, x(n)$ a new starting point $x(n+1)$ in order to receive the algorithms of correcting parameters $\hat{x}, n, R$ Lyapunov's functions $V(x, \hat{x}, n, R)$ for recognizing particular signals.

The parameter adaptation (tuning) occurs when a signal $x(j)$ is detected incorrectly, although it belongs to the k -th class, and is brought by the system to the s -th class. In this case, the recurrent recalculation options Lyapunov function $V_k(x)$ made as follows.

For the function

$$V_i(x) = (x - \hat{x}(k))^T R(\hat{X}_i)(x - \hat{x}(k))n(k) \quad (2)$$

the new values for the parameters $x(k)$, $R(\hat{X}_i)$, $n(k)$ are defined by the formulas:

1) The matrix $R(\hat{X}_i)$ has a new value shown by the dependence of the following parameters:

$$R_i = \frac{R_i \Delta x \Delta x^T R_i}{1 + \Delta x^T R_i \Delta x} \quad (3)$$

$$R_i = R(\hat{X}_i) - \frac{R(\hat{X}_i) \tilde{x}(j) \tilde{x}(j)^T R(\hat{X}_i)}{1 + \tilde{x}(j)^T R(\hat{X}_i) \tilde{x}(j)} \quad (4)$$

$$\tilde{x}(j) = x(j) - x(k), \Delta x = x \frac{1}{1 + n(k)} \tilde{x}(j)$$

when,

2) $n(k)$ accepts the new value

$$1 + n(k) \quad (5)$$

3) $\hat{x}(k)$ accepts the new value, which is calculated through the old parameter values

$$x(k) + \frac{1}{1 + n(k)} \tilde{x}(j) = x(k) + \frac{x(j) - x(k)}{1 + n(k)} \quad (6)$$

Such approach allows to configure the features vector at algorithm testing, namely algorithm is adjusted and improved as new data came.

Testing

Consider two samples, there are chosen more general categories in the first case Fig. 1.

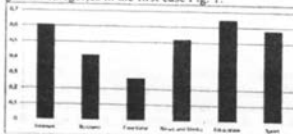


Fig. 1. The testing of the first level categories

As shown in Fig. 1, the accuracy of the algorithm to more general categories ranging from 0.28 to 0.65%.

The second sample Fig. 2, consists of more narrow categories

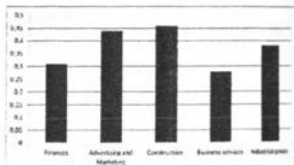


Fig. 2. The testing of the second level categories

For the categories shown in Fig. 2, accuracy from 0.27 to 0.46%.

For more specific categories within the meaning of accuracy is much worse than in the case with the general categories. Also note that for different testing samples test results may vary significantly depending on the quality of the test sites.

Conclusions

The test results show that the web pages are quite difficult complex dataset for classification task, therefore the accuracy of the identification subject is not high enough. First of all, the complication is due to low quality of the training and the test samples. The further ways of method improving are connected, first of all, with more careful selection of the relevant information from the web page, filtering overhead, stemming algorithm improvement.

References

1. Kirichenko M.F. The use of the Lyapunov functions for the investigation of the problems of signal classification / M.F. Kirichenko, O.S. Korlyuk // USiM. – 2009. – № 5. – P. 89–92. (in russian)
2. Kantrovitz M., Mohit B., Mittal V. Stemming and its effects on TFIDF Ranking / In proceedings of ACM-SIGIR // Athens, Greece – 2000.
3. Hull D.A. Stemming Algorithms – A Case Study for Detailed Evaluation // JASIS – 1996. – 47(1) – P. 70 – 84.
4. Kirichenko M.F. Method of K-hyperplane clustering of text information / M.F. Kirichenko, O.S. Korlyuk // USiM. – 2008. – № 5. – P. 79 – 75. (in russian)

Arriving to an editorial board 22.11.12

УДК 004.85

Котляров С.В.

Аналіз використання гібридного алгоритму навчання штучної нейронної мережі для деяких задач класифікації

Авторський гібридний алгоритм навчання штучної нейронної мережі з використанням модифікованого алгоритму мурашиної колонії та зміненого алгоритму зворотного поширення помилки протестований на задачах моделювання поведінки персонажу для комп'ютерної гри, установлення діагнозу захворювання сечостатевої системи і встановлення істинності грибів. Гібридний алгоритм застосований для різних пар функцій і наборів параметрів. Проведений порівняльний аналіз з класичним алгоритмом навчання нейронної мережі.

Ключові слова: штучна нейронна мережа, алгоритм мурашиної колонії, навчання нейронної мережі

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2.
E-mail: jimis@ua.fm

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції ТАAPSD'2012).

Introduction

One of the main problems of the artificial intelligence theory is the artificial neural network training. Neural networks are widely used in various spheres of the human activity [1-2], in particular, for information input and processing, texts recognition, information transfer in communication systems, for Internet information processing, in economics, in business, in medicine, in the enterprises scheduling, in political and sociological technologies, in security systems, in modeling behavior of independent agents and in many others.

One of classical artificial neural network training methods is the back propagation algorithm, suggested in 1974 at the same time and independently from each other in A.I. Galushkin's works [3] and P.J. Werbos [4]. In the following years this method was essentially developed in D.E. Rumelhart's, G.E. Hinton and R.J. Williams works [5], and S.I. Barcev and V.A. Ohonin [6]. This

Eugene Kotlyarov,

The application analysis of hybrid artificial neural network training algorithm for some classification problems

The author's hybrid algorithm for artificial neural network training with use of the modified ant colony algorithm and the changed back propagation algorithm has been tested on problems of modeling of the character's behavior in a computer game, as well as the determination of urine-gynecological system diseases diagnoses and determination of mushrooms edibility. The hybrid algorithm has been applied to various couples of functions and sets of parameters. The comparative analysis with classical neural network training algorithm has been carried out.

Key Words: artificial neural network, ant colony algorithm, neural network training

Odessa I.I. Mechnikov national university,
Dvoryanskaya str., 2, Odessa, 65082
E-mail: jimis@ua.fm

method gave an additional impetus in development of the artificial neural networks theory and was applied for the solutions of problems of numerous classes. However, this algorithm has a number of serious shortcomings:

- network paralysis,
- existence of local minimum,
- complexity of correct step size choice,
- temporary instability of process which not always allows solving a problem.

For increasing efficiency of the neural network training, in particular, for decrease of the problems computing complexity, alongside with one of classical training algorithms, since the beginning of the XXI century [7-9] one of stochastic algorithms has been used, i.e. the training algorithm became hybrid. One of stochastic algorithms is the ant colony optimization algorithm. It is based on indirect interaction between independent agents-ants. The ants use pheromones for interaction with each other.

In work [7] neural network hybrid training using an ant algorithm is applied to research a coal mines tunnels. The neural network is trained by a combination of algorithms: fuzzy C-mean value clustering algorithm and the ant colony algorithm, which allowed reducing computing complexity of a problem. The factors influencing durability of walls have the characteristic of variety, non-linearity, incertitude, etc.

In work [8] hybrid training algorithm is applied to the problems of function approaching and modeling quantitative structure-activity relationships of Herbicides. The network is trained by two algorithms: back propagation algorithm and ant colony algorithm. Results of experiments showed that the suggested hybrid algorithm reaches the set accuracy for smaller number of iterations, than back propagation algorithm. The question of nodes number possibility change on the hidden layers is also studied.

Ant colony algorithm using for neural network training by traditional back propagation algorithm for combinational optimization is given in work [9]. Thus the basic ant colony algorithm underwent changes: both matrices – a discrete matrix of pheromones and a probabilistic matrix – are assumed not discrete, but continuous.

In works [10-11] for artificial neural network training the hybrid algorithm based on significantly modified ant colony algorithm and changed back propagation algorithm is suggested. The algorithm is tested on the problems:

- modeling of the character's behavior in a computer game;
- determination of urine-gynecological system diseases diagnoses;
- determination of mushrooms edibility.

In the present article the suggested hybrid algorithm analysis is carried out, and results of algorithm testing on problems of modeling of the character's behavior in a computer game, determination of urine-gynecological system diseases diagnoses and determination of mushrooms edibility are given.

Hybrid algorithm idea

The multilayered perceptron with one hidden layer and number of nodes n, m and p on the input, hidden and output layers respectively is considered as a trained artificial neural network.

The network weights and bias values setting and network signal distribution are the same as in

classical back propagation algorithm. Initial network weights and bias values are set by any real numbers from a segment $[-1, 1]$.

The functions of the following type

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

$$f_2(x, a) = \frac{1}{1 + e^{-ax}},$$

$$f_3(x, a) = \frac{1}{1 + a^{-x}},$$

$$f_4(x) = 1 + e^{-x^2},$$

$$f_5(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

are used as activation functions.

It is suggested to use the following hybrid algorithm for neural network training quality increasing. The essence of algorithm consists of preliminary finding of priority ways of movement on the neural network. For this purpose alongside with the changed back propagation algorithm it is suggested to apply the modified ant colony algorithm.

Ant colony algorithm modification for a priority ways choice consists of the following:

- the ants quantity on each input node is sufficient for visiting by ants of all nodes on the hidden and output layers of the network,
- the following node choice rule is simplified,
- the distance passed by an ant accounting is changed,
- pheromones accounting function is suggested,
- the ant movement probabilistic accounting is changed.

Initial level of pheromones on all network edges is equal to zero.

For ants uniform visiting of the hidden and output layers nodes at the first travel special method is used. And on the second and the subsequent steps ants use the simplified following node choice rule.

After all ants finish their travelling, there is a reallocation of pheromones in a network. The ant leaves pheromones on two passed edges, thus the quantity of left pheromones on each passed edge depends on mistake value in that output node to which the ant came.

For accounting pheromones influence at network weights correction the pheromones

accounting function $\eta(x, k)$, where k – parameter is suggested. When carrying out experiments the following pheromones accounting functions were used:

$$\eta_1(x, k) = \frac{k}{x+1} + 1 - \frac{k}{2},$$

$$\eta_2(x, k) = \frac{k}{x^2+1} + 1 - \frac{k}{2},$$

$$\eta_3(x, k) = k^{1-x},$$

$$\eta_4(x, k) = k * \arccos(x) + 1.$$

Change of back propagation algorithm is based on the fact that at calculation of adjustment coefficients of network weights the pheromones accounting function is used.

The following parameters are used:

θ – network training coefficient,

Q – pheromones quantity, which one ant per one travel can extend,

ρ – pheromones update coefficient.

Hybrid algorithm application for modeling of the character's behavior in a computer game

The hybrid neural network models character's behavior in a computer game [12]. The following parameters of neural network training are:

$n=4$, $m=3$, $p=4$, $\theta=0,15$, $Q=0,2$, $\rho=0,2$.

Activation function $f_1(x)$ is used. Pheromones accounting function is $\eta_1(x, k)$ at $k=5$.

Four input neurons respectively are responsible for:

- health of the character (2 – good, 1 – normal, 0 – bad),
- his having a knife (0 – hasn't, 1 – has),
- his having a gun (0 – hasn't, 1 – has),
- number of enemies (the integer non-negative number).

Four output neurons are designated respectively by a certain action: attack, run, wander and hide.

Network training was carried out by two algorithms: classical back propagation algorithm, and the suggested hybrid one. Networks testing was carried out on 20 training samples.

Experiments results are showed in Table 1. One step is understood as one full pass on training set.

On the average the back propagation algorithm needs 1627.4 full passes on training set, and the modified algorithm takes 69.8 full passes. Speed of network training grew more than by 20 times.

For network correct work checking from 20 training samples two groups of 14 and of 6 samples were allocated. On 14 samples the network was trained, and on 6 it was tested. Results of testing are given in Table 2.

Table 1.

Comparative characteristic of classical and hybrid algorithms

Experiment no	Classical algorithm (steps quantity)	Hybrid algorithm (steps quantity)
1	953	36
2	661	68
3	565	53
4	987	74
5	3119	82
6	811	121
7	1189	76
8	551	26
9	1063	84
10	1415	78

Table 2.

Network testing results

Testing sample number	Target result	Obtained result
1	Attack	Attack
2	Wander	Wander
3	Hide	Hide
4	Hide	Run
5	Run	Run
6	Hide	Hide

Testing results show that the network answered 5 samples from 6 correctly.

Hybrid algorithm application for determination of urine-gynecological system diseases diagnoses

The public UCI Machine Learning Repository resource provided for quality check of neural network training by classical and hybrid algorithms was used for algorithm testing. The problem of determination of urine-gynecological system diseases diagnoses of a database [13] created by the Polish doctor of philosophy Jacek Czerniak at the institute of research systems of the Polish Academy of Sciences was chosen. The base contains 120 samples for testing of the determination of urine-gynecological system diagnoses of two diseases.

The testing goal was to carry out a comparative assessment of different parameters control options of the suggested hybrid algorithm and its elements. Various sets of functions couples (activation function and pheromones accounting function) and influence of their type on the efficiency and quality of training are considered.

Base characteristic: the base contains 6 input attributes characterizing the patient condition and two output attributes for establishment of the disease diagnosis.

Input attributes are:

- the patient's temperature;
- occurrence of nausea;
- lumbar pain;
- urine pushing;
- micturition pains;
- burning of urethra, itch, swelling of urethra outlet.

All input attributes, except the first one, accept integer values (1 – has or 0 – hasn't), and the first has real values as $35^{\circ}\text{C} + 0,1^{\circ}\text{C} \cdot n$, where $n = 0,1, \dots, 70$.

Output attributes are the diseases diagnoses:

- inflammation of urinary bladder;
- nephritis of renal pelvis origin.

All output attributes accept integer values (1 – has or 0 – hasn't).

The base in a random way was divided into 102 training and 18 testing samples. The algorithm was tested by 5 various activation functions $f_i(x, k), k = 1, 4, 5$, $f_i(x, a), k = 2, 3$ and 4 various pheromones accounting functions $\eta_i(x, k), i = 1, 2, 3, 4$. Thus, if the chosen function has a parameter, experiments are made for various values of parameters. The size of the maximum network error in all experiments was set as equal to 0.01.

When carrying out experiments the following parameters were set: $n = 6$, $m = 4$, $p = 2$, $\theta = 0,2$, $Q = 1$.

Comparative experiments were made: one – with back propagation algorithm, the others 32 – with various activation functions and various pheromones accounting functions. Results of experiments are reflected in Table 3. Algorithm accuracy is understood as the relation of correctly solved samples by means of this algorithm for the total number of the solved samples. Algorithm accuracy is expressed as a percentage.

The result received by means of back propagation algorithm is given in the first line of Table 3. In all other lines of Table 3 it is specified,

what activation function, and what pheromones accounting function were used in experiment, besides, the iterations number is specified.

Table 3.

Experiments results table

Activation function	Pheromones accounting function	Iteration number	Accuracy
Back propagation algorithm		-	78%
$f_1(x)$	$\eta_1(x, 5)$	16	89%
$f_2(x)$	$\eta_2(x, 5)$	18	83%
$f_3(x)$	$\eta_3(x, 5)$	72	94%
$f_4(x)$	$\eta_4(x, 5)$	9	83%
$f_1(x)$	$\eta_1(x, 10)$	9	83%
$f_2(x)$	$\eta_2(x, 10)$	12	83%
$f_3(x)$	$\eta_3(x, 10)$	70	78%
$f_4(x)$	$\eta_4(x, 10)$	18	56%
$f_2(x, 2)$	$\eta_1(x, 5)$	9	89%
$f_2(x, 2)$	$\eta_2(x, 5)$	7	89%
$f_2(x, 2)$	$\eta_3(x, 5)$	17	89%
$f_2(x, 4)$	$\eta_2(x, 5)$	12	100%
$f_2(x, 4)$	$\eta_3(x, 5)$	12	89%
$f_3(x, 3)$	$\eta_1(x, 5)$	13	83%
$f_3(x, 3)$	$\eta_2(x, 5)$	14	89%
$f_3(x, 3)$	$\eta_3(x, 5)$	57	94%
$f_3(x, 3)$	$\eta_4(x, 5)$	7	89%
$f_3(x, 5)$	$\eta_1(x, 5)$	10	83%
$f_3(x, 5)$	$\eta_2(x, 5)$	8	83%
$f_3(x, 5)$	$\eta_3(x, 5)$	22	89%
$f_3(x, 5)$	$\eta_4(x, 5)$	10	78%

Experiments results showed that the best accuracy (100%) is reached by means of hybrid algorithm if to choose $f_2(x, 4)$ as activation function and to choose function $\eta_2(x, 5)$ as pheromones accounting function. Good results (from 85% to 95%) are reached by means of the following couples of functions:

$f_1(x)$ and $\eta_1(x, 5)$;	$f_1(x)$ and $\eta_3(x, 5)$;
$f_2(x, 2)$ and $\eta_1(x, 5)$;	$f_2(x, 2)$ and $\eta_2(x, 5)$;
$f_2(x, 2)$ and $\eta_3(x, 5)$;	$f_2(x, 4)$ and $\eta_3(x, 5)$;
$f_3(x, 3)$ and $\eta_2(x, 5)$;	$f_3(x, 3)$ and $\eta_3(x, 5)$;
$f_3(x, 3)$ and $\eta_4(x, 5)$;	$f_3(x, 5)$ and $\eta_3(x, 5)$;

Hybrid algorithm application for determination of mushrooms edibility

The public UCI Machine Learning Repository resource is used for algorithm testing. The problem of determination of mushrooms edibility in database [14] of the Audubon Society Field Guide to North American Mushrooms (1981) is chosen. The base contains 8124 samples of edible and poisonous mushrooms for testing

Base characteristic: the base contains 22 input attributes and 2 output attributes. Input attributes are:

- cap (shape, surface and color),
- bruises,
- odor,
- gill (attachment, spacing, size and color),
- stalk (shape, root, surface above ring, surface below ring, color above ring and color below ring),
- veil (type and color),
- ring (type and number),
- spore print color,
- population,
- habitat.

Output attributes are: the mushroom is edible or the mushroom is poisonous. Thus those mushrooms which can't be carried to a certain type, are considered poisonous.

The base in a random way was divided into 5000 training and 3124 testing samples. The algorithm is tested by means of 5 various activation functions $f_k(x), k=1,4,5$, $f_k(x,a), k=2,3$ and 4 various pheromones accounting functions $\eta_i(x,k), i=1,2,3,4$. Thus, if the chosen function has a parameter, experiments are made for various values of parameters. The size of the maximum network error in all experiments is set equal to 0.01.

When carrying out experiments the following parameters were set: $n=22$, $m=12$, $p=2$, $\theta=0,2$, $Q=1$.

Results of some experiments are reflected in Table 4. It is specified, what activation function, and what pheromones accounting function were used in experiment, besides, the iterations number and accuracy are specified.

The back propagation algorithm gives the accuracy of 76.63%. The hybrid algorithm for various couples of activation functions and the pheromones accounting functions gives accuracy from 81.05% to 85.15%.

Table 4.

Experiments results table

Activation function	Pheromones accounting function	Iteration number	Accuracy
Back propagation algorithm		-	76.63%
$f_1(x)$	$\eta_1(x,5)$	49	82.49%
$f_1(x)$	$\eta_2(x,5)$	48	82.36%
$f_1(x)$	$\eta_3(x,5)$	64	82.68%
$f_1(x)$	$\eta_4(x,5)$	25	81.05%
$f_2(x,a)$	$\eta_2(x,5)$	50	82.11%
$f_3(x,5)$	$\eta_1(x,5)$	39	82.23%
$f_3(x,5)$	$\eta_2(x,5)$	36	81.31%
$f_3(x,5)$	$\eta_3(x,5)$	50	85.15%

Time and quality of hybrid algorithm training increased in comparison with classical one, and it is connected with the need of additional calculations when forming priority ants' ways.

Conclusions

The algorithm testing on various problems showed its practical applicability. However, because of the introduction of "intelligence" "overhead costs" increased during the algorithm work, to be exact, the training time increased. The exact network weights control allows expecting that on large data volumes algorithm productivity will increase. The hybrid algorithm can be considered more reliable in cases when the problem can't be solved by means of the classical one.

In particular, when modeling the character's behavior in a computer game the network training speed increased more than by 20 times. While choosing the various couples of activation function and pheromones accounting function, for the solution of determination of urine-gynecological system diseases diagnoses problem, a couple of functions was found, at which the accuracy of 100% is reached

The further plans are to test a network on large volumes of real data.

References

1. Simon Haykin, Neural Networks: A Comprehensive Foundation (2nd Edition) – Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.

2. Anil K. Jain, Jianchang Mao, K.M. Mohiuddin Artificial Neural Networks: A Tutorial, Computer, Vol.29, No.3, March/1996, pp. 31-44. Translated from the original English version and reprinted with permission. (IEEE)
3. Galushkin A.I. Sintez mnogosloinuh system raspoznavania obrazov. – M.: «Energia», 1974.
4. Werbos P. J., Beyond regression: New tools for prediction and analysis in the behavioral sciences. Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, MA, 1974.
5. Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams R.J., Learning Internal Representations by Error Propagation. In: Parallel Distributed Processing, vol. 1, pp. 318 – 362. Cambridge, MA, MIT Press. 1986.
6. Barcev S.I., Ohonin V.A. Adaptivnue seti obrabotki informacii. Krasnoyarsk: Institut fiziki CO AN USSR, 1986. Preprint N 59B. – 20 p.
7. Neural Network Based on Ant Colony Clustering Algorithm Applied to Predict the Stability of the Roof in Coal Mining. ISDA '06 Proceedings of the Sixth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications – Volume 01, 2006
8. Evolving Neural Networks Using the Hybrid of Ant Colony Optimization and BP Algorithms, Advances in Neural Networks – ISSN 2006, Lecture Notes in Computer Science, 2006, Volume 3971/2006, pp. 714-722, DOI: 10.1007/11759966_105
9. Study on the Feed forward Neural Network Based on Ant Colony Optimization, Journal of Wuhan University of Technology [Transportation Science & Engineering], 2009-03
10. E.V. Kotlyarov, T.I. Petrushina, Hybrid training method of artificial neural network on the basis of the modified ant algorithm / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies 5/4 (59) 2012, pp. 16-21.
11. Kotlyarov E.V., Neural network learning method based on ant colony algorithm for classification problems solution / Electrotechnic and computer systems No. 08 (84), 2012, pp. 122-129.
12. M. Tim Jones, AI Application Programming, Charles River Media, Inc, Hingham, Massachusetts, 2003, 363 p.
13. Machine Learning Repository, database [internet source] / Database access mode: <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Acute+Inflamations>.
14. Machine Learning Repository, database [internet source] / Database access mode: <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Mushroom>

Надійшла до редколегії 3 грудня 2012 року

УДК 004.021: 004.312.4: 004.421.6: 004.414.2

Лук'янова О.О., к.ф.-м.н, доц.

**Про зв'язок мови CN-моделі з
компонентами-переходами і мови детальної
моделі Петрі паралельної розподіленої
системи**

Досліджуються мови однакових і однотипних складових компонент CN-мережі. Визначається сюр'єктивний гомоморфізм мов початкової детальної паралельної розподіленої системи та її CN-моделі, що містить тільки компоненти-переходи

Ключові слова: мережа Петрі, компонентна мережа Петрі, вільна мова мережі Петрі, конкатенація, епіморфізм

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: lukyanyova@i.ua

Lukyanova E.A., PhD

**On the Relationship between the Language
of CN-Model with Component Junctions, and
the Language of Detailed Petri Model of
Parallel Distributed System**

The languages of similar and one-type constituents of CN-net components are examined. Surjective homomorphism of languages of the initial detailed parallel distributed system and its CN-model that contains only the component junctions is determined

Key words: Petri Net, : Petri Net, componental Petri Net, free language of Petri Net, concatenation, epimorphism

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: lukyanyova@i.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Вступ

Компонентна мережа Петрі (CN-мережа) є досить зручним інструментом як для моделювання паралельних розподілених систем, так і для визначення властивостей мережі і системи, що моделюється. Аналіз компонентної мережі дає можливість визначати властивості мережі та системи, що моделюється, незалежно від початкових розмірів моделі або досліджуваної системи. Виділення однакових або однотипних складових компонент (компонент-місць C_p і компонент-переходів C_t) дає змогу ефективно спростувати детальну (базову) модель досліджуваної системи [3] і значно зменшувати обсяг дискретної інформації, яка задіяна в процесі знаходження мережевих інваріантів [4], що найкращим чином відбивається на прискоренні процесу встановлення структурних властивостей моделі.

Однією з важливих характеристик системи є множина всіх можливих послідовностей дій, які можуть відбутися. Питання, пов'язані з аналізом динаміки функціонування динамічної системи, з

характером множини можливих у ній послідовностей реалізації подій, можна вирішувати на рівні мов мережі Петрі. Тому задача вивчення мовних властивостей компонентної мережі Петрі є актуальною.

Метою цієї роботи є визначення мовних особливостей компонентної мережі Петрі, зокрема, визначення і вивчення мов однакових і однотипних складових компонент компонентної мережі Петрі, визначення мови компонентної мережі Петрі, в якій за складові компоненти виступають тільки компоненти-переходи, і встановлення зв'язку для мов CN-моделі, що містить тільки компоненти-переходи, і початкової детальної моделі Петрі досліджуваної паралельної розподіленої системи.

1. Постановка задачі

Модель досліджуваної системи можна охарактеризувати відповідним класом породжуваної нею мови, що кодує різні можливі способи функціонування системи. При визначенні мови, породжуваної CN-мережею, доведеться враховувати наявність у компонентній

мережі Петрі двох різних типів складових компонент (компонент-місця C_p і компонент-переходи C_t), а також двоаспектний підхід, який застосовується до функціонування компонентної мережі Петрі [3]. Отже, виникає необхідність окремого розгляду послідовності спрацювань переходів у складових компонентах і поетапного вивчення мов CN -мережі: 1) компонентної мережі тільки з компонентами-переходами, 2) компонентної мережі тільки з компонентами-місцями та 3) компонентної мережі з компонентами-місцями і компонентами-переходами.

У цій статті будуть розглянуті питання, що стосуються мов складових компонент компонентної мережі Петрі і компонентної мережі, яка має тільки компоненти-переходи.

2. Приклади однакових і однотипних складових компонент

Серед виділених у CN -моделі паралельної розподіленої системи складових компонент можуть бути однакові й однотипні складові компоненти [5]. Однакові складові компоненти моделюють однакові процеси, і моделі цих компонент повністю збігаються. Однотипні або ті, що відносяться до одного типу, складові компоненти моделюють однотипні процеси і відрізняються тільки кількістю однакових паралельних процесів.

Як приклад однотипних складових компонент на Рис. 1 а, б показані однотипні складові компоненти-місця CN -мережі, що моделює схему руху залізничного транспорту залізничного вузла з [5]. Подані складові компоненти відображають рух поїздів через тупикові залізничні станції $Sta 4$ (Рис. 1 а) і $Sta 2$ (Рис. 1 б), що приймають та відправляють поїзди з одного напрямку. Станція $Sta 4$ – станція з одною вхідною колією і з трьома внутрішніми коліями, станція $Sta 2$ – станція з двома вхідними коліями і п'ятьма внутрішніми коліями.

Однотипні складові компоненти з Рис. 1 а і б відрізняються кількістю однакових паралельних процесів, доданих у компоненті, що моделює станцію $Sta 2$, відносно до компоненти, що моделює станцію $Sta 4$, на етапах спрацювання I–IV.

На Рис. 1 в подана компонента-перехід T . Складові компоненти T , що неодноразово зустрічаються в моделях станцій $Sta 4$ і $Sta 2$, є однаковими складовими компонентами.

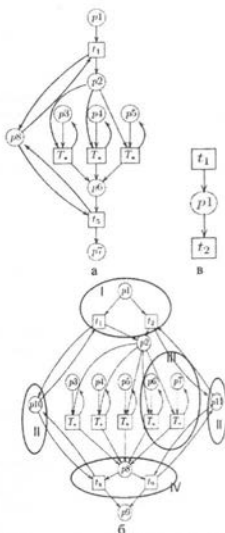


Рис. 1. Однотипні складові компоненти-місця, що моделюють рух залізничного транспорту: а) станції $Sta 4$, б) станції $Sta 2$; в) однакові складові компоненти-переходи T в моделях $Sta 4$ і $Sta 2$

3. Мова однакових і однотипних складових компонент

Двоаспектний підхід до функціонування CN -мережі, що забезпечує компонентний аналіз моделі досліджуваної системи [3, 5], базується на тому, що миттєве спрацювання (виконання умови) складовою компонентою як переходом або місцем в CN -мережі для самої складовою компоненти зумовлює знаходження її деякий час в активному стані і виконання повного циклу роботи складової компоненти. Відзначимо, що складові компоненти самі можуть містити

компоненти-переходи і компоненти-місця, що є звичайними мережами Петрі, які відповідають визначенням складових компонент [6].

Описуючи функціонування мережі в термінах послідовностей спрацювань переходів [1, 2], отримуюмо множину T^* усіх слів у алфавіті T , складених із символів переходів мережі, підмножиною якого є множина послідовностей спрацювань мережі. Тоді кожен крок складової компоненти так само породжує символ з множини імен переходів цієї компоненти, позначимо його через A . Якщо до множини A додати пусте слово ϵ , то отримаємо множину $A^* = A \cup \{\epsilon\}$ усіх слів в алфавіті A .

Визначення 1. Позначимо в однакових і однотипних складових компонентах однаковими символами відповідні місця і переходи і однаковими символами відповідні місця і переходи в однакових паралельних процесах. Тоді мовою складової компоненти N_C компонентної мережі Петрі назвемо множину $L(N_C, M_0, M) = \{\sigma / M_0 \xrightarrow{\sigma} M\}$, де $\sigma \in A^*$ – слово, яке породжене компонентою N_C , M_0 і M – відповідно початкова і фінальна розмітка компоненти.

На Рис. 2 показані деякі однотипні складові компоненти – компоненти-місця, в яких місця і переходи позначені згідно з визначенням 1.

Мають місце очевидна теорема 1 і теорема 2.

Теорема 1. Мови однакових складових компонент збігаються.

Теорема 2. Мови однотипних складових компонент збігаються.

Доведення. Множина послідовностей спрацювання складової компоненти N_C утворює множину всіх слів $\sigma \in A^*$, отриманих виписуванням символів переходів уздовж колій у графі розміток, що розпочинаються в початковій розмітці M_0 . Ця множина утворює мову N_C . Оскільки однотипні складові компоненти відрізняються тільки кількістю однакових паралельних процесів, то додавання до N_C вже наявних паралельних процесів не дає можливості отримання нових ланцюжків послідовностей спрацювання над алфавітом A . Ніяких нових слів отриманою однотипною складовою компонентою не породжується ■

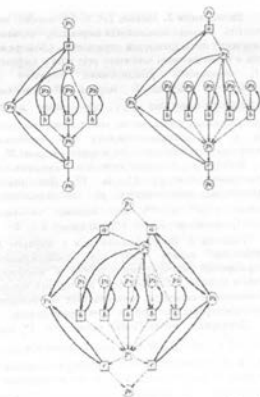


Рис. 2. Однотипні компоненти-місця, місця і переходи в яких позначені згідно з визначенням 1

4. Епіморфізм мов детальної моделі Петрі та CN-моделі з компонентами-переходами і паралельної розподіленої системи

Проведемо дослідження мови CN-мережі, яка містить тільки компоненти-переходи C_i .

Нехай X і Y є відповідно скінченими алфавітами детальної моделі Петрі та CN-моделі тільки з компонентами-переходами досліджуваної системи. Тоді $X^* = (X \cup \{T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*\})^*$ – множина всіх слів в алфавіті X , $Y^* = (Y \cup \{T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*\})^*$ – множина всіх слів в алфавіті Y , де $T_k^* (k = 1, 2, \dots, n)$ імена різних компонент-переходів $C_k (k = 1, 2, \dots, n)$ у CN-мережі.

Визначення 2. Мовою $L(N)$ детальної моделі Петрі N , у якій можуть бути виділені складові компоненти – компоненти-переходи C_i , назвемо її вільну мову, для якої припускаємо, що розмітка для однакових і однотипних компонент-переходів C_i однакова згідно з визначенням 1.

Визначення 3. Мовою $L(CN)$ CN -мережі, яка містить тільки компоненти-переходи, назвемо множину послідовностей спрацювань CN -мережі, що є підмножиною множини всіх слів у алфавіті Y , отриманого розширенням алфавіту X початкової детальної моделі N іменами компонент-переходів T_i^* , при якому в Y^* допускаються слова, які не містять тих символів із X , що використовуються при означенні переходів в компонентах-переходах в мережі N .

Установимо взаємозв'язок між символічними послідовностями з X^* та Y^* . Для цього розглянемо перетворення φ , що переводить слова з X^* в Y^* або, іншими словами, відображення $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$, при цьому $X \subset Y$.

Теорема 3. Відображення слів у алфавіті X детальної моделі Петрі N досліджуваної паралельної розподіленої системи в множину слів в алфавіті Y її CN -моделі, що містить тільки компоненти-переходи, визначається з точністю до епіморфізму, що зберігає конкатенацію слів.

Доведення. Нехай деяке слово $p \in X^*$ має вигляд $p = abt_1t_2t_3cdt_4t_5gh$, де символами a, b, c, d, g, h позначені імена переходів детальної моделі N , що не входять ні в які компоненти-переходи C_i , а символами t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 – імена переходів, які є елементами компонент-переходів C_i . У розглянутому запису слова p беруть участь імена переходів двох різних компонент C_i .

У слові p зробимо наступні позначення:

$$ab = p_1, t_1t_2t_3 = \bar{p}_1, cd = p_2, t_4t_5 = \bar{p}_2, gh = p_3$$

і отримаємо запис вихідного слова p у вигляді конкатенації слів $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2, p_3$, так, що $p = p_1\bar{p}_1p_2\bar{p}_2p_3$.

При відображенні φ образом слова $p \in X^*$ є деяке слово $\varphi(p) = q \in Y^*$, де $q = p_1T_1^*p_2T_2^*p_3$. Таким чином, дія перетворення φ на слово p визначається образами слів, що беруть участь в конкатенації слова p :

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \varphi(p_1\bar{p}_1p_2\bar{p}_2p_3) = \\ &= \varphi(p_1)\varphi(\bar{p}_1)\varphi(p_2)\varphi(\bar{p}_2)\varphi(p_3) = p_1T_1^*p_2T_2^*p_3\end{aligned}$$

При цьому, остаточно, для деякого довільного слова $p = abt_1t_2t_3cdt_4t_5gh$ з X^* , отримаємо його образ – слово $q = \varphi(p) = abT_1^*cdT_2^*gh$ з Y^* . Можна зробити висновок, що відображення φ

повністю визначається значеннями на буквах алфавіту X так, що кожен символ $u \in Y$ є образом хоча б одного символу $x \in X$, тобто при $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ для будь-якого $u \in Y$ знайдеться $x \in X$ таке, що $u = \varphi(x)$.

Отже, відображення $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ зберігає бінарну операцію конкатенації слів. При відображенні φ для всіх слів p_1 і p_2 над алфавітом X виконуються рівняння $\varphi(p_1p_2) = \varphi(p_1)\varphi(p_2)$ і $\varphi(e) = e$. Відображення φ повністю визначається значеннями на буквах алфавіту X . Значить, відображення φ є сюр'єктивним гомоморфізмом (епіморфізмом), що зберігає конкатенацію слів. ■

Розглянемо скінченну підстановку σ , яка є відображенням X^* у множину скінченних підмножин Y^* , таку, що $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ виконано для всіх x і y над X . При цьому мають місце наступні висновки щодо розглянутого відображення σ :

1. $\sigma(x) = x$ для слів будь-якої довжини з імен переходів мережі N , що не є іменами переходів ніякої складової компоненти C_i ;

2. $\sigma(x) = T_i^*$ для всіх слів будь-якої довжини (послідовностей спрацювань) x складовою компоненти C_i .

Тоді для $L(CN)$ – мови CN -мережі, що містить тільки компоненти-переходи, – виконується

$$L(CN) = \sigma(L(N)) = \{y \mid y = \sigma(x), \text{ где } x \in L(N)\}$$

Має місце теорема.

Теорема 4. Мова CN -мережі, що містить тільки компоненти-переходи, є сюр'єктивним гомоморфним образом мови початкової детальної моделі Петрі N досліджуваної паралельної розподіленої системи.

Доведення теореми ґрунтується на висновках теореми 3 і на умовах, які виконуються для відображення σ .

5. Приклад епіморфізму мов детальної моделі Петрі і CN -моделі з компонентами-переходами на моделях N і CN руху залізничного транспорту через тупикову залізничну станцію (ЗС)

На Рис. 3 показано невелику компонентну мережу Петрі з компонентами-переходами T^* . Ця компонентна мережа є моделлю паралельної

розподіленої системи руху залізничного транспорту через тупикову ЗС Sta 4.

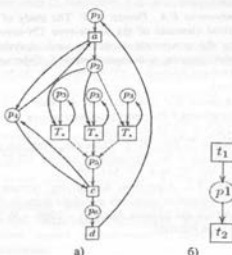


Рис. 3. а) CN-мережа, що моделює рух залізничного транспорту через ЗС Sta 4; б) компоненти-перехід T^*

У поданій моделі ЗС (Рис. 3, а) компонентою T^* (Рис. 3, б) і місцем p_1 моделюються паралельні процеси системи – функціонування кожної колії ЗС. Складовою компонентою T^* відбивається процес прибуття і відправлення поїзда з внутрішньої колії станції. Переходи a і c моделюють вхід і вихід поїздів із станції. Місця p_1, p_3 забезпечуються відповідно умови наявності поїздів для входу і виходу зі станції. Місце p_4 – умова виключення конкуренції для поїздів на вході і виході зі станції.

Розглянемо мову $L(N)$ – мову детальної моделі N , що моделює рух залізничного транспорту через ЗС Sta 4. Ця детальна модель N не зображена окремо в роботі, але її легко уявити, якщо в CN-мережі з Рис. 3, а замість складових компонент T^* поставити їх зображення, показане на Рис.3, б. При цьому вхідні дуги компоненти-переходу T^* є вхідними дугами для переходу t_1 , а вихідні дуги компоненти-переходу T^* – вихідними дугами переходу t_2 з Рис.3, б.

Мова $L(N) = (a, at_1, at_1t_2, at_1t_2c, at_1t_2cd, at_1t_2cda, at_1t_2cda t_1, at_1t_2cda t_1t_2, \dots)$.

Застосуємо до $L(N)$ відображення σ . Згідно з умовами, яким відповідає відображення σ , для

мови $L(CN)$ CN-моделі руху залізничного транспорту через ЗС Sta 4 маємо:

$$\begin{aligned} L(CN) &= \sigma(L(N)) = (\sigma(a), \sigma(at_1), \sigma(at_1t_2), \\ &\sigma(at_1t_2c), \sigma(at_1t_2cd), \sigma(at_1t_2cda), \\ &\sigma(at_1t_2cda t_1), \sigma(at_1t_2cda t_1t_2) \dots) = \\ &= (a, at_1^*, at_1^*c, at_1^*cd, at_1^*cda, at_1^*cda t_1^*, \dots). \end{aligned}$$

Отримані мови є нескінченними мовами, тому що розглянуті моделі N і CN руху залізничного транспорту через ЗС Sta 4 є моделями з зацикленням. Використання такого виду моделей (моделей з зацикленням) зручно для встановлення структурних властивостей моделі досліджуваної системи за допомогою матричних методів знаходження її T - і S -інваріантів [7, 8]. Це пов'язано з тим, що системи лінійних діофантових рівнянь, які відповідають отриманим мережам Петрі, будуть однорідними, оскільки у таких мережах початкова та кінцева розмітки однакові.

Висновок

У мережах Петрі події, послідовна реалізація подій у досліджуваній системі моделюються відповідно: переходами, запусками переходів і послідовностями спрацьовувань переходів. Отже, множина допустимих послідовностей спрацьовувань переходів розглянутої моделі, поданої або у вигляді детальної мережі Петрі або у вигляді компонентної мережі Петрі, зумовлює динаміку досліджуваної мережі та зі ступенем коректності моделювання досліджуваної системи відповідною мережею Петрі характеризує систему, що моделюється. Розглядаючи послідовність переходів як слово, а множину послідовностей переходів – як мову, маємо можливість з кожної розглянутої мережею Петрі пов'язати мову в алфавіті переходів мережі.

У роботі розглянуті:

1. Мови однакових і однотипних складових компонент, що моделюють однакові або однотипні процеси досліджуваної системи і входять у детальну модель Петрі N у вигляді ділянок мережі N , які відповідають визначенням складових компонент [6];

2. Мова компонентної мережі Петрі, що містить тільки компоненти-переходи.

Установлено, що мови однакових і однотипних складових компонент збігаються, а мова компонентної мережі Петрі, що містить тільки компоненти-переходи, є спор'ядкованим гомоморфізмом (епіморфізмом) образом мови

початкової детальної моделі Петрі N досліджуваної паралельної розподіленої системи.

Подальші дослідження мови компонентної мережі Петрі (компонентної мережі тільки з компонентами-місцями, компонентної мережі і з компонентами-місцями і компонентами-переходами), встановлення властивостей цієї мови дає можливість з'ясувати виразні можливості досліджуваної детальної мережі Петрі, а потім і властивості вихідної системи, що моделюється. При цьому, можливо, вдасться встановити, що мову компонентної мережі Петрі можна розглядати як деяке зображення мов мереж Петрі.

Список використаних джерел

1. Kapitonova Y.V., Letichevsky A.A. The mathematical theory of design of computer systems. – Moscow: Nauka, 1988. – 294 p. (in Russian).
2. Kotov V.E. Petri nets. – Moscow: Nauka, 1984. – 160 p. (in Russian).
3. Lukyanova E.A. On component analysis of parallel distributed systems // TVIM – 2011. – № 2. – P. 71-81. (in Russian).
4. Lukyanova E.A. On acceleration of calculations of estimation of structural invariants for -network

component analysis // Visnyk of Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – № 2. – P. 155-160. (in Ukrainian).

5. Lukyanova E.A., Dereza A. V. The study of the structural elements of the single-type CN-network during the component modelling and analysis of complex systems with concurrency // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – № 6. – P. 20-29. (in Russian).
6. Lukyanova E.A. The structural elements of a Petri net component // Problemy programuvannya – 2012. – № 2-3. – P. 25-32. (in Russian).
7. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications // In "Proceedings of the IEEE". – 1989. – Vol. 77, № 4. – P. 541-580.
8. Kryvy S.L. Algorithms for solving systems of linear Diophantine equations in integer domains // In Cybernetics and Systems Analysis. – 2006. – № 2. – P. 3-17. (in Russian).

Надійшла до редакції

3.12.2012

УДК 681.3

Олександр О. Марченко, к.ф.-м.н., доц.

Застосування методів невід'ємної факторизації тензорів для визначення стійких семантичних відношень при обробці великих текстових корпусів

В роботі досліджується метод розкладу тензорів, що має назву невід'ємна тензорна факторизація. З його допомогою побудована модель багатосторонньої сполучності об'єктів. Даний підхід був застосований до задачі виведення семантичних відношень. Результати роботи системи доводять, що методи невід'ємної тензорної факторизації мають великі перспективи в комп'ютерній лінгвістиці.

Ключові слова: штучний інтелект, комп'ютерна лінгвістика, невід'ємна тензорна факторизація.

E-mail: rozenkrantz@yandex.ua

Статтю представив чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

Одним з найактуальніших на сьогодні напрямів в штучному інтелекті взагалі та в комп'ютерній лінгвістиці зокрема є розробка методів автоматичного та автоматизованого наповнення баз знань онтологічного типу. Найбільш цікавою задачею в автоматичному наповненні баз знань даними представляється виявлення нових семантичних відношень між існуючими концептами онтології з великих корпусів текстів природною мовою. При цьому визначення семантичних відношень між поняттями та поповнення ними онтологічної мережі нагадує процес читання людською мовою при навчанні. Основою таких алгоритмів виявлення семантичних зв'язків між словами-поняттями є частотні методи оцінки сумісного вживання слів в великих корпусах природномовних текстів.

Сучасні розподільні методи подібності є ефективним потужним засобом для виявлення семантичного значення слів. Сукупність контексту слова, як правило, дає достатньо інформації, щоб обчислити його значення, а саме його семантичну подібність або зв'язність з іншими словами.

© О.О. Марченко, 2012

Oleksandr O. Marchenko, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Applying of non-negative tensor factorization for induction of semantic relations in processing of large text corpora

This paper investigates a tensor decomposition method called non-negative tensor factorization to build a model of multi-way co-occurrences. The approach is applied to the problem of semantic relations induction. The results show that non-negative tensor factorization method has a great perspective on computational linguistics researches.

Key words: artificial intelligence, computational linguistics, non-negative tensor factorization.

До цих пір більшість алгоритмів використовувала дані двосторонньої сполучності для обчислення значення слів. Смісл слова може бути, наприклад, обчислений за врахуванням множини документів в яких містяться слово (слова*документи) або за врахуванням множини слів контексту навколо даного слова (слова*контексти слів). Данні зазвичай розміщуються в матричному представленні, де елемент $a[i,j]$ містить частотну оцінку сумісного існування (або вживання) i -того та j -го елементів з двох множин (наприклад, частоту використання i -того слова в j -тому тексті).

Але в мовній практиці сполучність різних типів елементів не обмежується розмірністю 2. Дуже важливим для комп'ютерної лінгвістики є дослідження частотних оцінок сполучень слів згідно синтаксичних шаблонів «підмет»-«присудок», «підмет» - «присудок» - «додаток», «підмет» - «присудок» - «додаток» - «обставина», «підмет» - «присудок» - «додаток» - «обставина»-«означення». Тому сьогодні дуже актуальним напрямом є розробка методів аналізу n -арних масивів лінгвістичних даних. Через неможливість застосування алгоритмів сингулярного

векторного розкладу[1] та простої невід'ємної факторизації матриць[2] з огляду на їх обмеженість розмірністю 2 та ряд інших об'єктивних причин, пропонується застосування сучасного універсального методу обробки парних масивів даних – невід'ємної тензорної факторизації.

Для розробки методів автоматичного визначення стійких семантичних відношень між концептами онтології дуже важливим є саме виявлення багатовимірних відношень предикативно - аргументного типу. Саме цим обумовлюється перспективність використання для визначення багатовимірних семантичних відношень алгоритмів невід'ємної тензорної факторизації.

Алгоритми невід'ємної тензорної факторизації

Тензор – це багатовимірний масив, або багатовимірна матриця.

Означення 1.1 (Тензор) Візьмемо $\Pi, \Pi_2, \dots, \Pi_N \in \mathbb{N}$ як верхню границю індексів. Тензор $\underline{Y} \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ порядку N це N -вимірний масив, де елементи $y_{i_1 i_2 \dots i_N}$ проіндексовані по $i_n \in \{1, 2, \dots, I_n\}$ для $1 \leq n \leq N$.

Означення 1.2 (Шар Тензору) Шар Тензору – це двовимірна секція(фрагмент)тензору, отриманий фіксацією всіх індексів за виключенням двох індексів.

Для тривимірного тензору відрізняють вертикальний, горизонтальний та фронтальний тип шарів.

Означення 1.3 (Векторний добуток) Векторним добутком тензорів $\underline{Y} \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ та $\underline{X} \in R^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M} \in \underline{Z} = \underline{Y} \times \underline{X} \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N \times J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$, де $z_{i_1 i_2 \dots i_N j_1 j_2 \dots j_M} = y_{i_1 i_2 \dots i_N} x_{j_1 j_2 \dots j_M}$.

Зазначимо, що тензор $\underline{Z}$ містить всі можливі комбінації парних добутків між елементами $\underline{Y}$ і $\underline{X}$.

Як окремі випадки, векторний добуток двох векторів $a \in R^I$ та $b \in R^J$ дає одиорангову матрицю

$$A = a \cdot b = ab^T \in R^{I \times J}$$

та векторний добуток трьох векторів: $a \in R^I, b \in R^J$ та $c \in R^Q$ дає тензор 3-го порядку:

$$\underline{Z} = a \cdot b \cdot c \in R^{I \times J \times Q} \text{ де } z_{ijk} = a_i b_j c_k.$$

Означення 1.4 (Добуток Кронекера) Добутком Кронекера двох матриць $A \in R^{I \times J}$ та $B \in R^{T \times R}$ є матриця $A \otimes B \in R^{I \times T \times J \times R}$, яка має вигляд

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} B & a_{12} B & \dots & a_{1J} B \\ a_{21} B & a_{22} B & \dots & a_{2J} B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1} B & a_{I2} B & \dots & a_{IJ} B \end{bmatrix} = [a_1 \otimes b_1 \ a_1 \otimes b_2 \ a_1 \otimes b_3 \ \dots \ a_1 \otimes b_{R-1} \ a_1 \otimes b_R]$$

Означення 1.5 (Добуток Катрі-Рао) Для двох матриць $A = [a_1, a_2, \dots, a_J] \in R^{I \times J}$ та $B = [b_1, b_2, \dots, b_J] \in R^{T \times J}$ з однаковою кількістю стовпчиків J , їх добуток Катрі-Рао має вигляд:

$$A \circ B = [a_1 \otimes b_1 \ a_2 \otimes b_2 \ \dots \ a_J \otimes b_J] = [\text{vec}(b_1 a_1^T) \ \text{vec}(b_2 a_2^T) \ \dots \ \text{vec}(b_J a_J^T)] \in R^{I \times T \times J}.$$

Означення 1.6 (Добуток Хадамарда) Добутком Хадамарда є

$$A \odot B = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} & a_{12} b_{12} & \dots & a_{1J} b_{1J} \\ a_{21} b_{21} & a_{22} b_{22} & \dots & a_{2J} b_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1} b_{I1} & a_{I2} b_{I2} & \dots & a_{IJ} b_{IJ} \end{bmatrix}.$$

Невід'ємна Тензорна Факторизація

Дано тензор даних $\underline{Y} \in R^{I \times T \times Q}$ та додатний індекс J . Потрібно знайти трьох-компонентні матриці, які ще називаються факторами, $A = [a_1, a_2, \dots, a_J] \in R^{I \times J}$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_J] \in R^{T \times J}$ та $C = [c_1, c_2, \dots, c_J] \in R^{Q \times J}$, що виконують наступну апроксимовану факторизацію

$$\underline{Y} = \sum_{j=1}^J a_j \circ b_j \circ c_j + E = \underline{\mathbb{I}}[A, B, C] + E,$$

або еквівалентно в елементній формі

$$y_{iqt} = \sum_{j=1}^J a_{ij} b_{jt} c_{jq} + e_{iqt} \quad [3].$$

Алгоритми PARAFAC[4] виконують декомпозицію даного тензора у вигляді комбінації лінійних членів (в цьому випадку трилінійних) в спосіб, аналогічний білінійній матричній декомпозиції. На відміну від сингулярного векторного розкладу, алгоритми PARAFAC не накладають ніяких вимог

ортогональності. Модель, що накладає вимогу невід'ємності на фактор-матриці має назву Невід'ємна Тензорна Факторизація (NTF) або невід'ємний PARAFAC.

Зручно вважати, що всі вектори мають одиничну довжину, щоб ми могли використовувати модифіковану PARAFAC модель Харшмана[4]:

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^J \lambda_j \mathbf{a}_j \circ \mathbf{b}_j \circ \mathbf{c}_j + \mathbf{E} \approx [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]_{\mathbf{Y}}$$

або у еквівалентній елементній формі

$$y_{iqt} = \sum_{j=1}^J \lambda_j a_{ij} b_{jq} c_{jt} + e_{iqt},$$

де λ_j - фактори масштабування та $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J]^T$. Основна модель може бути представлена в компактній матричній формі через використання представлення розгортки тензора $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y}_{(1)} \approx \mathbf{A} (\mathbf{C} \circ \mathbf{B})^T,$$

$$\mathbf{Y}_{(2)} \approx \mathbf{B} (\mathbf{C} \circ \mathbf{A})^T,$$

$$\mathbf{Y}_{(3)} \approx \mathbf{C} (\mathbf{B} \circ \mathbf{A})^T,$$

де $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$, $\circ$ - добуток Катрі-Паро.

Використовуючи p -мірний добуток тензора на матрицю, отримаємо

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C} + \mathbf{E},$$

де $\mathbf{A} \in R^{I \times J \times J}$ - діагональний кубічний тензор з ненульовими елементами λ_i на супердіагонали.

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \in R^{I \times J \times J} \text{ з } g_{iij} \neq 0.$$

$$\text{Vec}(\mathbf{Y}) \approx (\mathbf{C} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \lambda.$$

Трьохстороння PARAFAC модель може бути описана за допомогою фронтальних, бокових та горизонтальних шарів наступним чином

$$\mathbf{Y}_q \approx \mathbf{A} \mathbf{D}_q(\mathbf{c}_q) \mathbf{B}^T,$$

$$\mathbf{Y}_t \approx \mathbf{A} \mathbf{D}_t(\mathbf{b}_t) \mathbf{C}^T,$$

$$\mathbf{Y}_i \approx \mathbf{B} \mathbf{D}_i(\mathbf{a}_i) \mathbf{C}^T,$$

де $\mathbf{D}_i(\mathbf{a}_i)$, $\mathbf{D}_t(\mathbf{b}_t)$ та $\mathbf{D}_q(\mathbf{c}_q)$ - діагональні матриці, що отримують i -тий, t -тий та q -тий рядок матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ та $\mathbf{C}$ відповідно, та продукують діагональні матриці розміщенням відповідного рядку на головній діагоналі.

Зокрема, дуже зручно представляти тристоронню модель в термах фронтальних шарів, як $\mathbf{Y}_q = \mathbf{Y}_{(q)} \mathbf{C}_q$ тензору $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y}_q \approx \mathbf{A} \mathbf{D}_q \mathbf{B}^T, (q = 1, 2, \dots, Q)$$

де матриця $\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_q(\mathbf{c}_q)$ - діагональна матриця, основана на q -тому рядку $\mathbf{C}$.

PARAFAC факторизація може бути представлена як одночасна діагоналізація множини матриць, що приводить до швидкого та надійного обчислення розкладання.

Для того, щоб обчислити невід'ємні компоненти матриць $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ зазвичай використовується обмежена оптимізація мінімізацією функції вартості відповідної будови. Як правило мінімізуються (відповідно до компонентів матриць) наступні глобальні функції вартості:

$$\begin{aligned} D_F(\mathbf{Y} \parallel [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]) &= \|\mathbf{Y} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]\|_F^2 + \\ &+ \alpha_A \|\mathbf{A}\|_F^2 + \alpha_B \|\mathbf{B}\|_F^2 + \alpha_C \|\mathbf{C}\|_F^2, \end{aligned}$$

відповідно до обмежень невід'ємності, $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ - невід'ємні параметри регуляризації.

Існує як мінімум три різних підходи до розв'язання цієї оптимізаційної задачі. Перший підхід - використання векторизованої форми цінкової функції у вигляді $J(\mathbf{x}) = \text{vec}(\mathbf{Y} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}])^T \mathbf{x}$, та застосування невід'ємного методу найменших квадратів. Цей підхід було вперше застосовано для невід'ємної факторизації тензору в роботі[5], а також[6,7]. Якобін такої функції може бути великих розмірів $(I+T+Q)J \times ITQ$, що дає дуже високу ціну обчислень.

Інший підхід пропонує оптимізувати цінкову функцію одночасно по відношенню до всіх змінних використовуючи сучасний нелінійний оптимізаційний метод сполучених градієнтів[8]. Але ж така цінкова функція взагалі не є опуклою і не гарантовано, що досягне оптимального розв'язку, хоча результати дуже перспективні.

Найбільш популярним підходом є метод ALS - метод змінних найменших квадратів. В цьому підході обчислюється градієнт функції вартості відносно кожної окремої компоненти матриці (вважаючи що інші зафіксовані та незалежні):

$$\nabla_A D_F = -\mathbf{Y}_{(1)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{B}) + \mathbf{A} [(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) * (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) + \alpha_A \mathbf{I}],$$

$$\nabla_B D_F = -\mathbf{Y}_{(2)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{A}) + \mathbf{B} [(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) * (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \alpha_B \mathbf{I}],$$

$$\nabla_C D_F = -\mathbf{Y}_{(3)} (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) + \mathbf{C} [(\mathbf{B}^T \mathbf{B}) * (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \alpha_C \mathbf{I}],$$

де $\circ$ - добуток Катрі-Паро,

$*$ - добуток Хадамара

Привіюючи компоненти градієнта до нуля і застосовуючи нелінійну проєкцію для підтримки невід'ємності компонентів, отримуємо ефективні і відносно прості невід'ємні оновлені правила ALS для невід'ємної факторизації тензорів:

$$\begin{aligned} A &\leftarrow [Y_{(1)}(C \otimes B) [(C^T C) * (B^T B) + \alpha_A I]^{-1}]^T, \\ B &\leftarrow [Y_{(2)}(C \otimes A) [(C^T C) * (A^T A) + \alpha_B I]^{-1}]^T, \\ C &\leftarrow [Y_{(3)}(B \otimes A) [(B^T B) * (A^T A) + \alpha_C I]^{-1}]^T. \end{aligned}$$

Головна перевага ALS алгоритмів це висока швидкість збіжності та їх масштабованість для завдань великої розмірності.

Виявлення стійких семантичних відношень між поняттями шляхом частотного аналізу великих текстових корпусів із застосуванням алгоритмів невід'ємної факторизації тензорів

Методи подібності розподілу зазвичай представляють дані сумісної сполучності об'єктів в формі матриці. Раніше традиційно використовувалися дані розмірності 2, але як було зазначено вище для досліджень комп'ютерної лінгвістики актуальними є п-сторонні моделі, де $p > 2$. Розглянемо тристоронній випадок для представлення сполучності типу «підмет-присудок-додаток». Тривимірний тензор для зберігання частотних даних сполучностей підметів, присудків та прямих додатків, отриманих в результаті аналізу великих текстових корпусів, зображений на малюнку 1.



Малюнок 1. Тривимірний тензор для зберігання частотних даних сполучностей підметів, присудків та прямих додатків.

Можна застосувати тензор довільної більшої розмірності для зберігання частотних даних сполучностей об'єктів різних типів (де $p > 3$), наприклад, «підмет» $\times$ «присудок» $\times$ «додаток» $\times$ «обставина», «підмет» $\times$ «присудок» $\times$ «додаток» $\times$ «обставина» $\times$ «означення» і т.д. Зазвичай утворюється розріджений тензор великої розмірності. З метою створення стислої та узагальненої моделі отриманих даних, до них застосовуються статистичні методи скорочення розмірності, зокрема невід'ємна тензорна факторизація[9].

Даний підхід є полілінійним аналогом сингулярного векторного розкладу (SVD), який широко застосовується в латентному семантичному аналізі. Основна ідея методу

полягає в мінімізації суми квадратів між оригіналом тензору та факторизованою моделлю тензору. Для тривимірного випадку тензору $T \in R^{(D1 \times D2 \times D3)}$, це відповідає рівнянню 2.1, де k – число вимірів у факторизованій моделі.

$$\min_{x_i \in R^{D1}, y_i \in R^{D2}, z_i \in R^{D3}} \|T - \sum_{i=1}^k x_i \circ y_i \circ z_i\|_F^2 \quad (2.1)$$

При невід'ємній тензорній факторизації обмеження невід'ємності посилюються перетворюючи модель (2.2)

$$\min_{x_i \in R_+^{D1}, y_i \in R_+^{D2}, z_i \in R_+^{D3}} \|T - \sum_{i=1}^k x_i \circ y_i \circ z_i\|_F^2 \quad (2.2)$$

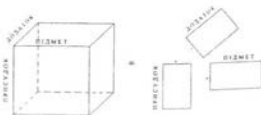
Алгоритм генерує три матриці, що містять відображення кожної з трьох множин у факторизовані виміри. Модель можна представити графічно наступним чином, враховуючи, що дана декомпозиція складається з суми векторних добутків p (в даному випадку трьох) векторів.



Малюнок 2. Графічне представлення невід'ємної тензорної факторизації як суми векторних добутків.

Модель невід'ємної тензорної факторизації обчислюється з застосуванням алгоритму змінних найменших квадратів. На кожній ітерації два виміри фіксуються, а третій підбирається методом найменших квадратів. Процес повторюється до моменту досягнення збіжності.

Декомпозиція невід'ємної тензорної факторизації для тензору частотних оцінок сполучностей об'єктів «підмет» $\times$ «присудок» $\times$ «додаток» у вигляді трьох матриць представлена на малюнку 3.



Мал.3 Графічне представлення невід'ємної тензорної факторизації для лінгвістичних даних.

Використовуючи НТФ модель для аналізу тристоронньої сполучності (s,v,o) («підмет» $\times$

«присудок» × «додаток»), дослідники виділяють з текстових корпусів узагальнені моделі селективних переваг, а також деякі елементи моделей фреймової семантики (семантичних відмінок).

В результаті факторизації кожен підмет-іменник, присудок-дієслово та додаток-іменник отримує своє значення навантаження для кожного фактору виміру відповідної матриці.

Оригінальні значення для трійки (s, v, o) x_{svo} може бути відновлене згідно рівняння

$$x_{svo} = \sum_{i=1}^k s_{sv} v_i o_{oi} \quad (2.3)$$

Для того щоб встановити оцінку селективної переваги для трійки (засць, застрелив, мисливця), потрібно знайти вектор підмету для значення *засць*, потім вектор-присудок для значення *застрелив*, і, нарешті, вектор додатка для значення *мисливця*. Потім для кожного виміру i в моделі потрібно помножити i -те значення трьох векторів. Сума цих значень і буде оцінкою селективної переваги для трійки (засць, застрелив, мисливця).

Експерименти підтверджують ефективність та точність даного методу при виявленні оцінок селективної переваги між класами лексем. Навіть без застосування обмежень невід'ємності модель факторизації тензорів помітно переважає моделі матричної факторизації, демонструючи показники точності біля 85% (для $k=50$, в той час SVD має оцінку приблизно 70%, NMF – 82%). При цьому показники погіршуються із збільшенням k .

Метод невід'ємної тензорної факторизації має оцінку 91% для $k=300$, хоча і для менших значень k точність біля 90% [9].

Необхідно зробити декілька зауважень стосовно описаної моделі. Експерименти виявили, що дуже часто отримані виміри є легко інтерпретованими з точки зору фреймової семантики, але також формувалися виміри, які зазнали збурення через змінення значень, що відповідали різним значенням дієслів. Деякі виміри базуються не стільки на семантиці, скільки на синтаксичних характеристиках (також існує вплив сталих виразів, займенників і т.д.) Якщо на початку процесу під час обробки текстових корпусів окрім синтаксичної розмітки («підмет», «присудок», «додаток») виконувати просту семантичну розмітку, що полягає у розв'язанні неоднозначних лексем та фіксації семантичних значень слів (можливо разом із розв'язком займенникової анафори, навіть на синтаксичному рівні), можливо суттєво

покращити якість представленої моделі. При цьому для розв'язання семантичних неоднозначностей доцільно застосовувати методику, описану в роботі [10].

Окрім того, метод найменших квадратів та мінімізація суми квадратів відстаней передбачає нормальний розподіл, в той час як мовні явища дуже рідко відповідають нормальному розподілу. Застосування, наприклад, мінімізації відстані Кульбака—Лейблера [11] є більш адекватним засобом для моделювання мовних явищ.

Також потрібно зазначити, що описана модель факторизації вимагає значних обчислювальних потужностей, що робить дуже актуальними задачі оптимізації та розпаралелювання тензорних перетворень. Перспективним підходом в даному випадку є оптимізація невід'ємної тензорної факторизації із використанням графічних процесорів [12].

Висновки

В статті розглянута задача виявлення стійких семантичних відношень між існуючими поняттями онтології з великих корпусів текстів природною мовою за допомогою методів частотного аналізу та подальшої обробки багатовимірних масивів даних статистичними методами скорочення розмірності, зокрема невід'ємною тензорною факторизацією. Особлива увага приділена опису моделей невід'ємної тензорної факторизації, а також їх застосуванню для розкладання багатовимірних розріджених масиву лінгвістичних даних. Оцінки якості роботи описаного методу свідчать про ефективність та перспективність його використання на практиці не лише в комп'ютерній лінгвістиці. Також було зазначено основні напрямки для покращення і оптимізації наведеного алгоритму невід'ємної факторизації лінгвістичних корпусних тензорів для підвищення точності роботи моделі та прискорення тензорних перетворень шляхом розпаралелювання і використання для цього графічних процесорів.

Список використаних джерел

1. Michael E. Wall, Andreas Rechtsteiner, Luis M. Rocha Singular value decomposition and principal component analysis / Michael E. Wall, Andreas Rechtsteiner, Luis M. Rocha // In D.P. Berrar, W. Dubitzky, M. Granzow. A Practical Approach to Microarray Data Analysis. Norwell, MA: Kluwer. -2003. - pp. 91-109.
2. Daniel D. Lee and H. Sebastian Seung Algorithms for Non-negative Matrix Factorization/ Daniel D. Lee and H. Sebastian Seung // Advances in Neural Information Processing Systems 13: Proceedings of the 2000 Conference. MIT Press. - 2001). - pp. 556-562.
3. A. Cichocki, R. Zdunek, A.H. Phan and S. Amari Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation /A. Cichocki, R. Zdunek, A.H. Phan and S. Amari // Wiley, 470 pages, September 2009.
4. Richard A. Harshman Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-modal factor analysis /Richard A. Harshman// UCLA Working Papers in Phonetics (Ann Arbor: University Microfilms) 16: 84. No. 10,085. - 1970.
5. P. Paatero Least-squares formulation of robust nonnegative factor analysis/ P. Paatero //Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. - 37. - 1997. - pp. 23-35.
6. G. Tomasi and R. Bro PARAFAC and missing values/ G. Tomasi and R. Bro // Chemometrics Intelligent Laboratory Systems. - 75(2). - 2005. - pp.163-180
7. G. Tomasi and R. Bro A comparison of algorithms for fitting the PARAFAC model/ G. Tomasi and R. Bro// Computational Statistics and Data Analysis. - April 2006.- 50(7). - pp.1700-1734.
8. E. Acar, T.G. Kolda and D.M. Dunlavy An optimization approach for fitting canonical tensor decompositions / E. Acar, T.G. Kolda, and D.M. Dunlavy// Technical Report SAND2009-0857. - Sandia National Laboratories. - Albuquerque. - NM and Livermore. - CA. - February 2009.
9. Tim Van de Cruys A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction. /Tim Van de Cruys// Journal of Natural Language Engineering.- Cambridge University Press.-2010.- 16(4). - pp.417-437.
10. A. Anisimov, O. Marchenko, V. Kysenko A method for the computation of the semantic similarity and relatedness between natural language words./A. Anisimov, O. Marchenko, V. Kysenko // Cybernetics and Systems Analysis, Volume 47. - Number 4. - July 2011. - pp.515-522(8)
11. Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency / Kullback S., Leibler R.A. // The Annals of Mathematical Statistics. - 1951. - V.22, №1. - pp. 79-86.
12. Oleksandr Marchenko, Volodymyr Kysenko, Karl Rupp, Siegfried Selberherr and Anatoly Anisimov GPU-Accelerated Non-negative Matrix Factorization for Text Mining / Volodymyr Kysenko, Karl Rupp, Oleksandr Marchenko, Siegfried Selberherr and Anatoly Anisimov //NATURAL LANGUAGE PROCESSING AND INFORMATION SYSTEMS. - Lecture Notes in Computer Science. - 2012. - Volume 7337/2012. - pp.158-163.

Надійшла до редакції 22.11.2012

УДК 519.8

S.O.Mashchenko, D.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

The problem of alternatives rational choice with the fuzzy set of non-fuzzy preference relations

The decision making problem with a purpose which is set with the fuzzy set of non-fuzzy preference relations is considered in this paper. The definition of union and intersection of fuzzy set of non-fuzzy relations is explored. The fuzzy set of weakly-effective alternatives are defined, its properties are explored.

Keywords: multicriterion optimization, fuzzy relation of type 2, decision making problem, rational choice.

*E-mail: msomail@yandex.ru

Paper submitted by Ph. D., Prof. Garashchenko F.G.

In this paper the problem of alternatives rational choice under a condition that the purpose of the person which makes decision (PMD), set with the fuzzy set of non-fuzzy preference relations is considered. Such models generalize the decision making problems with a PMD purpose, which is set with the ordinary (non-fuzzy) set of non-fuzzy preference relations. On the one hand, such generalization allows analyzing situations in the case when it is impossible to build the functions of PMD utility, and on the other hand – they will allow using the fuzzy set membership function of actual for the PMD preference relations as an additional information generator for the choice of sole alternative.

Let the PMD be able to compare any pair of alternatives x, y from the set X of Euclidean space E by non-fuzzy preference relations: $R_i \subseteq X \times X$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$. These preference relations can be understood as some criteria under which the PMD compares alternatives from the point of view of achieving the purpose. Preference relations R_i , $i \in N$, we will consider in quite a wide sense as the unstrict orders, i.e. binary complete relations.

We remind that for the unstrict order R , its asymmetric part $S = R \setminus R^{-1}$ is called the prevailing relation (by strict preference, strict order), which is asymmetric and irreflexive, and the symmetric part $I = \bar{S} \cup (\bar{S})^{-1}$ is called the indifference relation, which is symmetric and reflexive. As an unstrict

Машченко С.О., д. ф.-м. н., доц.

Задача раціонального вибору альтернатив з нечіткою множиною чітких відношень переваги

Розглядається задача прийняття рішень з ціллю, яка задається нечіткою множиною чітких відношень переваги. Досліджуються поняття об'єднання та перетину нечіткої множини чітких відношень. Визначається поняття нечіткої множини слабо-ефективних альтернатив досліджуються його властивості.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, нечітке відношення типу 2, задача прийняття рішень, раціональний вибір.

order R is the complete relation $(xRy \vee yRx, \forall x, y \in X)$, therefore $R \supseteq \bar{R}^{-1}$ and $R^{-1} \supseteq \bar{R}$. From here follows, that $S = R \setminus R^{-1} = R \cap (\bar{R})^{-1} = \bar{R}^{-1}$ and, vice versa $R = \bar{S}^{-1}$, but $I = R \cap R^{-1}$.

We will consider the aggregation of preference relations R_i , $i \in N$, in the aggregated preference relation R by their union $R = \bigcup_{i \in N} R_i$.

It is obvious that the relation R is complete, and therefore is the unstrict order. Let S – be the prevailing relation, induced by the aggregated preference relation R , then we will get $S = R^{-1} = (\bigcup_{i \in N} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in N} (\bar{R}_i)^{-1} = \bigcap_{i \in N} S_i$, where $S_i = \bar{R}_i^{-1}$ – is the criterion prevailing relation, induced by the preference relation R_i , $i \in N$.

Aggregation by the union of criterion relations results in the next understanding of the aggregated prevailing relation. Let the alternative x strongly prevail the alternative y for the PMD, if x prevails y by every criterion relation. If we assume the existence of utility functions $u_i : X \rightarrow E^1$ by every criterion prevailing relation S_i , $i \in N$ ($xS_i y \Leftrightarrow u_i(x) > u_i(y)$, $\forall x, y \in X$), the resulted higher interpretation of the aggregated prevailing relation will answer the known weak axiom of Pareto comparison of alternatives ($x \gg y \Leftrightarrow u_i(x) > u_i(y)$, $i \in N$).

Such method of alternatives comparison results in the notion of a weakly-effective alternative as a maximal element of set X under the relation S .

The alternative x^* is called weakly-effective in preference relations (let us denote their set as WE), if $y \bar{S} x^*, \forall y \in X$.

By means of formulas (1) it is possible to present the set of weakly-effective alternatives in terms of criterion preference relations thus: $WE = \{x^* \mid x^* (\bigcup_{i \in N} R_i) y, \forall y \in X\}$.

The PMD cannot expressly say sometimes what preference relations $R_i, i \in N$, characterize his or her purpose, but can set some fuzzy subset $\tilde{N} \subseteq N$ of these relations. In this case the generalization of set weakly-effective alternatives notion will result in the necessity of construction of a next set $FWE = \{x^* \mid x^* (\bigcup_{i \in \tilde{N}} R_i) y, \forall y \in X\}$, where the relation $\tilde{R} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} R_i$ presents by itself the union of fuzzy set of non-fuzzy relations $R_i, i \in N$. Consonant to [1] it is the fuzzy relation of type 2, i.e. the values of the membership function of this relation form fuzzy sets.

We will denote $r_j: X \times X \rightarrow \{0,1\}$ - characteristic function of relation R_j (i.e. $xR_j y \Leftrightarrow r_j(x,y) = 1, x \bar{R}_j y \Leftrightarrow r_j(x,y) = 0$).

We will denote $\eta: N \rightarrow \{0,1\}$ the membership function of fuzzy set $\tilde{N}$ of preference relations R_i , which characterize a PMD purpose.

For each $x, y \in X$ we will denote: $N^U(x, y) = \{i \in N \mid \exists j \in N: (r_j(x, y), \eta(j)) > (r_i(x, y), \eta(i))\}$ (1) - set of those indexes of criterion preference relations, which don't get better with the increase of characteristic functions of relations $R_i, i \in N$, and membership functions $\eta(i)$ of fuzzy set $\tilde{N}$;

$$\eta^U(x, y, i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^U(x, y), \\ 0, & i \notin N^U(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

- membership function of fuzzy subset of set N with a transmitter $N^U(x, y)$.

We specify notion of union of fuzzy set of relations [1] on the case, when they are non-fuzzy.

The union of fuzzy set $\tilde{N}$ of non-fuzzy relations $R_i, i \in N$, we will call $\tilde{R} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} R_i$ - fuzzy relation of type 2, which is definite on the set X , and given by

triplets $(x, y, r(x, y, z))$, where x, y are alternatives from set $X, r: X \times X \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ is membership function of fuzzy image $\tilde{R}(x, y)$, which executes the role of the "fuzzy membership function" of fuzzy relation $\tilde{R}$ of type 2, and is defined by: $r(x, y, z) =$

$$= \begin{cases} \max_{i \in N} \{\eta^U(x, y, i) \mid r_i(x, y) = z\}, & r_i(x, y) = z, \\ 0, & r_i(x, y) \neq z, z \in \{0,1\}. \end{cases} \quad (3)$$

The values of fuzzy reflection $\tilde{R}(x, y)$ at fixed $x^0, y^0 \in X$ form fuzzy subset $\tilde{R}(x^0, y^0)$ of set $\{0,1\}$ with the membership function $r(x^0, y^0, z), z \in \{0,1\}$. We will mark that the set $\{0,1\}$ sets to the universal set of images of fuzzy reflection, as after (3) $z \neq r_i(x, y) \in \{0,1\} \Rightarrow r(x, y, z) = 0$ for $\forall x, y \in X, i \in N$. The value $r(x, y, 1)$ can be understood as a membership degree $(x, y) \in X \times X$ to the relation $\tilde{R}$. Accordingly the value $r(x, y, 0)$ can be understood as a degree of absence of membership $(x, y) \in X \times X$ to the relation $\tilde{R}$.

The following theorem allows to structurally build the membership function $r(x, y, z)$.

Let's denote: $I^* = \{i \in N \mid \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j)\}$.

Theorem. Let $R_i, i \in N$, be non-fuzzy relations defined on the set X which are fixed by the characteristic function $r_i(x, y), x, y \in X, i \in N$; $\eta(i), i \in N$, is the membership function of fuzzy set $\tilde{N}$. In order for the fuzzy relation $\tilde{R}$ of type 2, which is set by the membership function $r(x, y, z); x, y \in X, z \in \{0,1\}$, to correspond to the union of fuzzy set $\tilde{N}$ of relations $R_i, i \in N$, i.e. $\tilde{R} = \bigcup_{i \in \tilde{N}} R_i$, it is necessary and it is sufficient, that for $x, y \in X$:

$$r(x, y, 1) = \begin{cases} \max_{j \in N} \eta(j), & \exists j \in N: r_j(x, y) = 1, \\ 0, & r_j(x, y) = 0, \forall j \in N, \end{cases} \quad (4)$$

$$r(x, y, 0) = \begin{cases} \max_{j \in N} \eta(j), & r_i(x, y) = 0, \forall i \in I^*, \\ 0, & \exists i \in I^*: r_i(x, y) = 1, \end{cases}$$

Proof. We will show first, that formula (3) is equivalent to the following one:

$$r(x, y, z) = \begin{cases} \max_{i \in N^U(x, y, z)} \eta(i), & N^U(x, y, z) \neq \emptyset, \\ 0, & N^U(x, y, z) = \emptyset, \end{cases} \quad (5)$$

where for $\forall x, y \in X \quad \forall z \in \{0,1\}$

$$N^U(x, y, z) = \{i \in N \mid z = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j)\}. \quad (6)$$

We will mark that from (2), (3) follows, that $\tilde{R} = \bigcup_{x \in R} R_x \Leftrightarrow r(x, y, z) =$

$$= \begin{cases} \max_{i \in N^U(x, y)} \{\eta(i) \mid r_i(x, y) = z\}, & r(x, y) = z, \\ 0, & r(x, y) \neq z. \end{cases} \quad (7)$$

$x, y \in X, z \in \{0, 1\}$. Therefore, for proving of equivalence of (3) and (5) it is sufficient to show that (7) is equivalent to (5), (6). So, we will show

$$N^U(x, y) = \{i \in N \mid r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j)\}, x, y \in X. \quad (8)$$

Let the following equalities be executed for some $x, y \in X, i \in N$:

$$r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j). \quad (9)$$

We will assume the opposite $i \notin N^U(x, y)$. Then according to (1) $\exists l \in N$, for which $r_l(x, y) > r_i(x, y)$, $\eta(l) \geq \eta(i)$, or $r_l(x, y) \geq r_i(x, y)$, $\eta(l) > \eta(i)$.

In the first case, from here follows that $r_i(x, y) > \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y)$. In the second case, we get $\eta(l) > \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j)$, and it, contradicts (9).

Let $i \in N^U(x, y)$. We will assume the opposite, that $r_i(x, y) < \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y)$ is executed or $\eta(i) < \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j)$.

In the first case, we see that $\exists l \in N$, for which $\eta(l) \geq \eta(i)$, $r_l(x, y) > r_i(x, y)$. Then $(r_l(x, y), \eta(l)) > (r_i(x, y), \eta(i))$ and according to (1) $i \notin N^U(x, y)$.

Like in the second case $\exists k \in N$ for which $r_k(x, y) > r_i(x, y)$, $\eta(k) \geq \eta(i)$. Then $(r_k(x, y), \eta(k)) > (r_i(x, y), \eta(i))$ and according to (1) $i \notin N^U(x, y)$.

Thus, we got a contradiction and (8) takes place, and from here follows the equality $N^U(x, y, z) = \{i \in N \mid r_i(x, y) = z\} \cap N^U(x, y)$, then formula (7) is equivalent (5), (6), and so the formulas (3) and (5) are equivalent.

Now for the proof of theorem it is sufficient to show the equivalence of (4) and (5).

First we will write (6) for $z=1$ in two possible cases. At first let $r_i(x, y) = 0, \forall i \in N$. Then according to (4) $r(x, y, 1) = 0$. On the other hand, from (6) follows, that $N^U(x, y, 1) = \emptyset$ and then according to (5) $r(x, y, 1) = 0$.

In the second case, let $\exists i \in N : r_i(x, y) = 1$. We will define for (5) the value $r(x, y, 1)$. For this purpose according to (6) we will build the set: $N^U(x, y, 1) = \{i \in N \mid 1 = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j)\}$. We will show that $N^U(x, y, 1) = \text{Arg max}_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$ is executed. We'll denote $\eta_i^*(x, y) = \max_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$. Let $i \in \text{Arg max}_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$, then we have $\eta(i) = \eta_i^*(x, y)$ and $\max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y) = \max\{\max_{\eta(j) \geq \eta_i^*(x, y)} r_j(x, y), \max_{\eta(j) \geq \eta_i^*(x, y)} r_j(x, y)\} = \max\{1, \max_{\eta(j) \geq \eta_i^*(x, y)} r_j(x, y)\} = 1 = r_i(x, y)$. From here it is obvious that $i \in N^U(x, y, 1)$.

Now vice versa, let $i \in N^U(x, y, 1)$. Then $1 = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y)$ and $\eta(i) = \eta_i^*(x, y)$. From here $i \in \text{Arg max}_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$, so according to (5) $r(x, y, 1) = \eta_i^*$, and thus the formulas (4), (5) are equivalent for $z=1$.

Then we will write down (6) for $z=0$ in two possible cases. We will mark: $\eta_0^* = \max_{j \in N} \eta(j)$, $I^* = \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j)$. At first let $r_i(x, y) = 0, \forall i \in I^*$.

Then according to (4) $r(x, y, 0) = \eta_0^*$. We will define the value $r(x, y, 0)$ from the formula (5). For this purpose we will build according to (6) the set: $N^U(x, y, 0) = \{i \in N \mid 0 = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j)\} = \{i \in I^* \mid 0 = r_i(x, y) = \max_{j \in I^*} r_j(x, y)\} = I^*$. From here by (5) $r(x, y, 0) = \eta_0^*$.

In the second case, let $\exists i \in I^* : r_i(x, y) = 1$. Then according to (4) $r(x, y, 0) = 0$. We will define the value $r(x, y, 0)$ according to (5). For this purpose after (6) we will build $N^U(x, y, 0) = \{i \in N \mid 0 = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{r_j(x, y) \geq r_i(x, y)} \eta(j)\} = \eta_0^* = \{i \in I^* \mid 0 = r_i(x, y) = \max_{j \in I^*} r_j(x, y) = 1\} = \emptyset$.

From here according to (5) $r(x, y, 0) = 0$, and thus the formulas (4), (5) are equivalent for $z=0$.

The theorem has been proven.

We will pass on to the choice of fuzzy weak-effective alternatives.

Before us arises the alternatives rational choice problem from the set X with a purpose which is set by the fuzzy relation of type 2 with the membership function $r(x, y, z)$, $x, y \in X$, $z \in \{0, 1\}$ of kind (4). If we generalize the notion of a set weakly-effective alternatives on this case, it is necessary to build the set $FWE = \{x^* \mid x^* (\bigcup_{j \in N} R_j) y, \forall y \in X\}$ and offer rational a approach to the choice of some concrete alternative.

We will consider two cuts of fuzzy relation $\tilde{R}$ of type 2.

If we choose $z = 0$, we get an ordinary (type 1) fuzzy set with the membership function $r(x, y, 0)$. It characterizes the degree of membership absence of alternatives pair to the aggregated preference relation $\tilde{R}$.

If we fix $z = 1$, we also get an ordinary (type 1) fuzzy set with the membership function $r(x, y, 1)$. As according to the theorem the function $r(x, y, 1)$ characterizes the membership degree of alternatives pair to the aggregated preference relation, it is possible to count the value $r(x, y, 1)$ by the membership degree of the alternative x above the alternative y . Then a value $\mu(x) = \min_{y \in X} r(x, y, 1)$ can

be considered the membership degree of alternative x above any alternative from the set X . These considerations give ground to defining the set of solutions of alternatives rational choice problem with the fuzzy set of preference relations, as follows.

The fuzzy set FWE , which is definite on the set of alternatives X , and has the membership function $\mu(x) = \min_{y \in X} r(x, y, 1)$ we will call the fuzzy set weakly-effective alternatives.

As the PMD, as a rule, is interested in the choice of some sole alternative, he or she needs to choose a fuzzy weak-effective alternative x^* with the maximal degree of preference $\mu(x)$. These considerations lead to the following notion.

We will call the alternative $x^* \in X$ a maximizing fuzzy weak-effective alternative, if

$$\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in X} r(x, y, 1). \quad (10)$$

Statement. For the alternatives rational choice problem with the fuzzy set of preference relations, there is always a maximizing fuzzy weakly-effective alternative.

Proof. According to definition of the maximizing alternative $\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in X} r(x, y, 1)$.

From (4) follows, that $r(x, y, 1) = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \eta_j(j)$ or $r(x, y, 1) = 0$. As function $r(x, y, 1)$ for $\forall x, y \in X$ can take on only finite values from the finite set $\{0; \bigcup_{j \in N} \{\eta_j(j), j \in N\}\}$, from here follows, that there always exists $\max_{x \in X} \min_{y \in X} r(x, y, 1)$.

Statement is proven.

It is clear, that the PMD first of all will be interested in only such a solution x^* of alternatives rational choice problem with the fuzzy set of preference relations, in which $\mu(x^*) > 0$. On the one hand such a requirement complicates the problem of choice, as it is not possible in any case. On the other hand, this requirement even simplifies the problem (10) of finding maximizing fuzzy weakly-effective alternative. It is explained by the fact that according to formulas (4) for $\mu(x^*) > 0$ it is necessary and it is sufficient, that $\exists j \in N$, for which $r_j(x^*, y) > 0$, and then $r(x, y, 1) = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \eta_j(j)$. Thus, under the condition $\mu(x^*) > 0$, the problem (10) takes the form:

$$\mu(x^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in X} \left[\max_{j \in \{1, \dots, m\}} \eta_j(j) \mid \sum_{j \in N} r_j(x, y) \geq 1 \right].$$

In conclusion it should be noted that the approach to the decision of alternatives rational choice problem with the fuzzy set of non-fuzzy preference relations considered in paper naturally complements the known [2] methods of alternatives rational choice with the non-fuzzy and fuzzy set of non-fuzzy preference relations.

List of used sources

1. Mashchenko S. Individual optimum equilibriums in games with fuzzy purposes of players / Sergiy Mashchenko // International Journal "Information Theories and Applications". – 2012. – 19. – N 2. – P. 116 - 125.
2. Mashchenko S.O. Decision making with the fuzzy set of preference relations / S. O. Mashchenko, O.M. Bovsunivskyi // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2011. – N 2. – P. 131 - 136.

Received 12.10.2012

УДК 519.7

Негадайлов П.А.¹, к. ф.-м.н., асистент
Полоцький С.В.², к. ф.-м.н., асистент**Про моменти нерегулярного мартингалу,
пов'язані з гіллястим випадковим
блуканням**

Знайдено асимптотичну поведінку
функціоналу від нерегулярного мартингалу,
пов'язаного з гіллястим випадковим блуканням.
Ключові слова: нерегулярний мартингал,
моменти, гіллясте випадкове блукання.

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д, e-mail: npasha@list.ru

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д, e-mail: pilot_ser@mail.ru

P. A. Negadaylov¹, PhD degree, assistant
S. V. Polotskiy², PhD degree, assistant**About moments of nonregular martingale
related to the branching random walk**

Asymptotic behavior of functional from non-
regular martingale is found.

Key Words: Nonregular martingale, moments,
branching random walk.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: npasha@list.ru

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: pilot_ser@mail.ru

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г.

Нехай S - точковий процес на R , тобто
випадкова, локально скінченна міра, що рахує.
Процес S задається так:

$$S(A)(\omega) := \sum_{i=1}^{J(\omega)} \delta_{x_i(\omega)}(A),$$

де $J = S(R)$, $(X_i: i = \overline{1, J})$ - точки S , A -
довільна борелівська множина на прямій, δ_x -
міра Дірака, зосереджена у точці x . Величина J
може бути детермінованою або випадковою,
скінченною або нескінченною з додатною
ймовірністю. Надалі припускається, що

$$S\{-\infty\} = 0 \text{ м.н.} \quad (1)$$

Розглянемо популяцію, яка зароджується
єдиним предком, що знаходиться в нулі дійсної
осі. Початковий предок є єдиним індивідомом
нульового покоління популяції, а його нащадки
утворюють перше покоління популяції, діти всіх
індивідів першого покоління утворюють
друге покоління популяції і т.д. Індивідууми
популяції розташовані на дійсній осі, при цьому
зміщення позиції нащадків кожного індивідуума
відносно їх батька задаються копією точкового
процесу S , а для різних індивідів ці копії є
незалежними. Для $n \in N_0 := \{0, 1, \dots\}$ через S_n

будемо позначати точковий процес, що задає
положення нащадків n -го покоління на дійсній
осі. Послідовність $(S_n: n \in N_0)$ називається
гіллястим випадковим блуканням (ГВБ).
Формальне означення таке. Гіллястим
випадковим блуканням називається
послідовність точкових процесів $(S_n: n \in N_0)$, де
для борелівської множини $A \subset R$

$$S_0(A) = \delta_0(A), S_{n+1}(A) = \sum_i S_{x_i}(A - X_{x_i}), i \in N_0. \quad (2)$$

Тут (X_{x_i}) - точки S_x , (S_{x_i}) - незалежні
копії S .

Надалі ми розглядаємо лише надкритичні
ГВБ. Тому, якщо $P\{J < \infty\} = 1$, то додатково
припускається, що $EJ > 1$. Нагадаємо, що
надкритичність гарантує виживання популяції з
додатною ймовірністю.

Позначимо через $V := \bigcup_{n=0}^{\infty} N^n$ нескінченне
дерево Улама-Харріса всіх скінченних
послідовностей $v = v_1 \dots v_n$ з корнем $\emptyset$
($N^0 := \{\emptyset\}$) та ребрами, які з'єднують кожну
вершину $v \in V$ з вершинами $v_i, i = 1, 2, \dots$, які

слідують за нею. Довжину v позначимо через $|v|$. Надалі v будемо називати індивідуумом. З такою інтерпретацією $|v|$ позначає номер покоління, в якому індивідуум v знаходиться. Кожному ребру (v, v') дерева V поставимо у відповідність мітку $X_i(v)$, що задає зсув позиції індивідуума v' відносно позиції індивідуума v . Визначимо $X_\emptyset := 0$ та $X_n := X_i(v) + X_v$. В.в. X_v задає позицію індивідуума v на дійсній осі. Тепер точковий процес S_n , що задає позиції індивідуумів n -го покоління ГВБ, може бути поданий так:

$$S_n(A) = \sum_{|v|=n} \delta_{X_v}(A \cap R),$$

де A - довільна борелівська множина на прямій.

Подібним чином, для кожного $u \in V$ покладемо $X_\emptyset(u) := 0$ та $X_u(u) := X_i(v) + X_u(u)$. В.в. $X_u(u)$ задає зсув позиції індивідуума u відносно позиції індивідуума u . ГВБ можна інтерпретувати як поміщене випадкове дерево (V, X) , де $X := (X_v(w) : v \in V, w \in V)$.

Припустимо, що існує $\gamma > 0$ таке, що

$$m_\gamma = E \sum_{|v|=1} e^{\gamma X_v} < \infty.$$

Покладемо

$$W_n = W_n(\gamma) = \sum_{|v|=n} e^{\gamma X_v}, m_\gamma^* = \sum_{|v|=n} L_v, n \in N_0, \quad (3)$$

$$\text{де } L_v = e^{\gamma X_v} m_\gamma^{[v]}.$$

Нехай F_0 - тривіальна σ -алгебра, $F_n = \sigma(X_i(v) : i \in N, |v| \leq n)$, $n \in N$, та $F_\infty = \sigma(F_n : n \in N_0)$. Послідовність $((W_n, F_n) : n \in N_0)$ утворює невід'ємний мартингал і тому збігається м.н. до граничної в.в., яку будемо позначати через W . Зазначимо, що в.в. W є додатною з додатною ймовірністю тоді і тільки тоді, коли мартингал $(W_n : n \in N_0)$ є рівномірно інтегровним. В окремих випадках критерій рівномірної інтегровності був встановлений [2], [8], [9]. У повній загальності його можна знайти у роботах [1] та [6].

Коли мартингал $(W_n : n \in N_0)$ є регулярним, він збігається майже напевно до випадкової величини W , що є додатною з

додатною ймовірністю. В цьому випадку пошук умов, які гарантують скінченність $E W f(W)$ для заданої функції f , є класичною задачею теорії гіллястих процесів. У випадку, коли мартингал не є регулярним, природним аналогом згаданої задачі є дослідження асимптотики $E W_n f(W_n)$ при $n \rightarrow \infty$. У даній роботі така проблема досліджується для функції $f(x) = \ln^+ x$.

Якщо мартингал $(W_n : n \in N_0)$ не є регулярним, то за теоремою Валлс-Пуссена (теорема T22 [11])

$$\sup_{n \geq 0} E W_n \ln^+ W_n = \infty.$$

За умови $E W_1 \ln^+ W_1 < \infty$ послідовність $(W_n \ln^+ W_n : n \in N_0)$ є невід'ємним інтегровним субмартингалом. Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E W_n \ln^+ W_n = \infty.$$

Позначимо через M випадкову величину, розподіл якої задається рівністю

$$E k(M) = E \sum_{|v|=1} L_v k(L_v),$$

що припускається виконаною для довільної борелівської функції k .

Формулювання та доведення результату

Теорема 1 Припустимо, що

(а) існує послідовність додатних сталес

$(b_n : n \in \mathbb{N})$ така, що

$$\ln M_1 + \ln M_2 + \dots + \ln M_n b_n \Rightarrow \rho_\alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

де ρ_α - стійкий закон з параметром

$\alpha \in (1, 2]$, а $M_1, M_2, \dots, M_n$ - незалежні копії в.в. M ;

(б) для деякого $\varepsilon > 0$

$$E W_1 (\ln^+ W_1)^{\alpha+\varepsilon} < \infty.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E W_n \ln^+ W_n b_n = E \sup_{0 \leq t \leq 1} Z(t) \in (0, \infty), \quad (4)$$

де $(Z(t) : t \geq 0)$ - α -стійкий процес Леві такий, що розподіл $Z(1) \in \rho_\alpha$.

Зауваження 2 Умова (а) означає, що розподіл в.в. $\ln M$ належить області притягання стійкого закону з параметром α , $\alpha \in (1, 2]$. З цього, зокрема, випливає, що $E \ln M = 0$.

Добре відомо (див., наприклад, [10]), що $b_n = n^{1/\alpha} L(n)$ для деякої функції L , що повільно змінюється на ∞ , та що

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} \rho_n(dx) = \exp(-\lambda |t|^\alpha (1 + i\beta \operatorname{sgn} t \tan(\pi\alpha/2))), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $\lambda > 0$ та $|\beta| \leq 1$.

Зуваження 3 Якщо $s^2 := D \ln M < \infty$, то (4) набуває вигляду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E W_n \ln^+ W_n \sqrt{n} = \sqrt{2\pi} s.$$

Дійсно, в цьому випадку $b_n = s\sqrt{n}$, відповідний процес Леві ($Z(t): t \geq 0$) є броунівським рухом, а з принципу відбиття Андре випливає, що

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} Z(t) \stackrel{d}{=} |Z(1)|.$$

$$\text{Тому } E \sup_{0 \leq t \leq 1} Z(t) = \sqrt{2\pi}.$$

Доведення. Нехай $(Q_k, k \in N)$ - незалежні копії випадкової величини Q розподіл якої визначається наступним чином

$$P\{Q \in A\} = x P\{W_1 \in A\}, \quad (5)$$

для кожної борелівської множини A на $\mathbb{R}^+$. Покладемо $\Pi_n := \prod_{i=1}^n M_i$.

З результатів роботи [1] випливає: якщо $g(\cdot)$ є неспадною та вгнутою функцією, а $h(\cdot)$ є неспадною функцією, то

$$E W_n g(W_n) \leq E g\left(\sum_{i=1}^n \Pi_{i-1} Q_i\right), \quad n \in N, \quad (6)$$

та

$$E W_n h(\max_{1 \leq k \leq n} W_k) \geq E h(\max_{1 \leq k \leq n} \Pi_{k-1} Q_k), \quad n \in N. \quad (7)$$

Використовуючи нерівності

$$\ln^+ x \leq \ln(x+1) \leq \ln^+ x + \ln 2, \quad (8)$$

(6) з $g(x) = \ln(x+1)$ та

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Pi_{i-1} Q_i &\leq n \max_{1 \leq k \leq n} \Pi_{k-1} Q_k \leq \\ &\leq n \max_{1 \leq k \leq n} \Pi_{k-1} \max_{1 \leq k \leq n} Q_k, \end{aligned} \quad (9)$$

маємо

$$\begin{aligned} E W_n \ln^+ W_n &\leq E W_n \ln(W_n + 1) \\ &\leq E \ln\left(\sum_{i=1}^n \Pi_{i-1} Q_i + 1\right) \\ &\leq \ln(2n) + \ln^+(\max_{1 \leq k \leq n} \Pi_{k-1}) + \\ &+ \ln^+(\max_{1 \leq k \leq n} Q_k) = \\ &= \ln(2n) + \max_{0 \leq k \leq n-1} T_k + \ln^+(\max_{1 \leq k \leq n} Q_k), \end{aligned} \quad (10)$$

де $T_k := \ln \Pi_k$, $k \in N_0$. Оскільки $(T_n: n \in N_0)$ є мартингалом, то для $\beta \in (1, \alpha)$ виконується L_β -нерівність Дуба

$$E \left(\frac{\max_{0 \leq m \leq n} |T_m|}{b_n} \right)^\beta \leq \left(\frac{\beta}{\beta-1} \right)^\beta E \left(\frac{|T_n|}{b_n} \right)^\beta. \quad (11)$$

$$\text{Крім того, згідно з [10] моменти } E \left(\frac{|T_n|}{b_n} \right)^\beta$$

є рівномірно обмеженими (по n).

Внаслідок нерівності

$$E \left(\frac{\max_{0 \leq m \leq n} T_m}{b_n} \right)^\beta \leq E \left(\frac{\max_{0 \leq m \leq n} |T_m|}{b_n} \right)^\beta,$$

послідовність $\left(\frac{\max_{0 \leq m \leq n} T_m}{b_n}; n \in N \right)$ є рівномірно інтегрованою.

Згідно з теоремою 4 [5]

$$\frac{\max_{0 \leq m \leq n} T_m}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{вп.}} \sup_{0 \leq t \leq 1} Z(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Враховуючи рівномірну інтегровність, маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{\max_{0 \leq m \leq n} T_m}{b_n} \right] = E \sup_{0 \leq t \leq 1} Z(t) \in (0, \infty). \quad (12)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} E(\ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} Q_k b_n)^{q^{***}} &= E(\max_{1 \leq k \leq n} \ln^+ Q_k b_n)^{q^{***}} \leq \\ &\leq n b_n^{q^{***}} E(\ln^+ Q_1)^{q^{***}}, \end{aligned}$$

і внаслідок того, що $b_n = n^{1/\alpha} L(n)$, та

$$E(\ln^+ Q_1)^{q^{***}} = E W_1 (\ln^+ W_1)^{q^{***}} < \infty$$

за припущенням, права частина останньої нерівності прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} Q_k b_n) = 0. \quad (13)$$

Таким чином, використовуючи (10), робимо висновок:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{EW_n \ln^+ W_n}{b_n} \leq E \sup_{0 \leq r \leq 1} Z(r). \quad (14)$$

Нерівність (7) з $h(x) = \ln^+ x$ виглядає так:

$$\begin{aligned} EW_n \ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} W_k &\geq \\ &\geq E \ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} \Pi_{k-1} Q_k, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Міркуючи у такий самий спосіб, як при отриманні формули на с. 159 [4], переконаємось у тому, що

$$\begin{aligned} P\{\max_{1 \leq k \leq n} (T_{k-1} + \ln Q_k) > x\} &\geq \\ &\geq P\{\ln Q > y\} P\{\max_{0 \leq k \leq n-1} T_k > x - y\}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Вибираючи $y < 0$ так, що $P\{\ln Q > y\} > 0$, маємо

$$\begin{aligned} E(\ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} \Pi_{k-1} Q_k b_n) &= E(\max_{1 \leq k \leq n} (T_{k-1} + \ln Q_k) b_n) \\ &= \int_0^\infty P\{\max_{1 \leq k \leq n} (T_{k-1} + \ln Q_k) > x b_n\} dx \\ &\geq P\{\ln Q > y\} \int_0^\infty P\{\max_{0 \leq k \leq n-1} T_k > x b_n - y\} dx \\ &= P\{\ln Q > y\} y + E \max_{0 \leq k \leq n-1} T_k b_n. \end{aligned}$$

Враховуючи (12) та спрямовуючи $n \rightarrow \infty$, а потім $y \rightarrow -\infty$, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} \Pi_{k-1} Q_k b_n \geq E \sup_{0 \leq r \leq 1} Z(r).$$

Внаслідок (15)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EW_n \ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} W_k b_n \geq E \sup_{0 \leq r \leq 1} Z(r). \quad (16)$$

Використовуючи обчислення, наведені на с. 3014-3015 [7], отримуємо, що для довільного $x_0 > e$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} x_0 - 1x_0 EW_n \ln^+ \max_{1 \leq k \leq n} W_k &\leq \\ &\leq EW_n \ln^+ W_n + \ln(x_0 - 1) + 1x_0. \end{aligned}$$

Беручи до уваги (16) та спрямовуючи у останній нерівності спочатку $n \rightarrow \infty$, а потім $x_0 \rightarrow \infty$, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{EW_n \ln^+ W_n}{b_n} \geq E \sup_{0 \leq r \leq 1} Z(r),$$

що разом з (14) доводить теорему.

Список літератури

1. Alsmeyer G. Iksanov A. A log-type moment result for perpetuities and its

application to martingales in supercritical branching random walks. Electronic J. Probab. (2009) 14, 289-313.

2. Biggins J.D. Martingale convergence in the branching random walk. J. Appl. Probab. 14, (1977), no. 1, 25-37.
3. Biggins J.D. Grey D.R. Continuity of limit random variables in the branching random walk. J. Appl. Probab., 16, 740-749, 1979.
4. Goldie C. M. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. Ann. Appl. Probab., 1, 126-166, 1991.
5. Heyde C.C. On the maximum of sums of random variables and the supremum functional for stable processes. J. Appl. Probab., 6, 419-429, 1969.
6. Iksanov A. Elementary fixed points of the BRW smoothing transforms with infinite number of summands. Stoch. Proc. Appl., 114, no. 1, 27-50, 2004.
7. Iksanov A., Marynych A. A note on non-regular martingales. Stat. Prob. Lett., 78, 3014-3017, 2008.
8. Liu Q. Sur une e'quation fonctionnelle et ses applications: une extension du the'or'eme de Kesten-Stigum concernant des processus de branchement. Adv. Appl. Probab., 29, no. 2, 353-373, 1997.
9. Lyons R. A simple path to Biggins' martingale convergence for branching random walk. Classical and Modern Branching Processes, IMA Volumes in Mathematics and its Applications (K. Athreya and P. Jagers eds.), Springer, Berlin, pp.217-221.
10. Ibragimov I., Linnik Y. Independent and stationary related random variables. - Moskva: Nauka, 524p, 1965. (in Russian)
11. Meyer P. Probabilities and Potential. - Moskva: Mir, 324p, 1973. (in Russian)
12. Iksanov A. Random series, branching random walk, self-decomposability. - Kiev: Zirka, 192p, 2007. (in Ukrainian)

Надійшло до редколегії 29.11.12

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н., доц.**Композиційно-номінативні логіки
квасіарних предикатів: семантичні аспекти**

Вивчаються чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Для опису семантичних властивостей цих логік використано спеціальні предикати-індикатори наявності значення для змінних. Досліджено різні формалізації відношення логічного наслідку.

Ключові слова: логіка, предикат, семантика, логічний наслідок.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

M.S.Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.),
Professor, S.S.Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-
Math.), Ass. Professor.

**Composition-nominative logics of quasiary
predicates: semantic aspects**

Pure first-order composition-nominative logics of partial single-valued, total multi-valued, and partial multi-valued quasiary predicates are studied. Special variable definedness predicates are used for description of semantic properties of such logics. Various formalizations of logical consequence relation are investigated.

Key words: logic, partial predicate, semantics, logical consequence.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Розвиток інформаційних технологій та розширення сфери їх застосування виводить на перший план задачу побудови надійних та ефективних програмних систем. Успішне вирішення цієї задачі неможливе без широкого використання понять і методів математики логіки й програмування. З одного боку, поняття і методи математичної логіки знаходять широке й ефективне застосування в програмуванні. З іншого боку, таке використання індукує зворотний вплив програмування на логіку, вимагає зробити математичну логіку ближчою й адекватнішою до його потреб. В основі різноманітних логічних систем, які використовуються в програмуванні та моделюванні (див., напр., [1]), як правило, лежить класична логіка предикатів. Ця логіка добре досліджена, вона має багатий досвід застосування. Проте класична логіка має принципові обмеження, вона базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, водночас для програмування й моделювання характерне використання часткових відображень над складними даними, причому ці відображення можуть бути неоднозначними. Таким чином, постає проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Низку різноманітних логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності (див., напр.,

[2–5]) розроблено на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу. Логіки, збудовані на його основі, називають композиційно-номінативними (КНЛ). Такі логіки базуються на загальних класах квазіарних відображень – часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень.

Метою даної роботи є дослідження семантичних властивостей чистих першопорядкових КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Логіки однозначних часткових предикатів називають логіками з неокласичною семантикою, вони вивчалися в [2]. Логіки тотальних неоднозначних предикатів називають логіками з пересиченою семантикою, логіки часткових неоднозначних предикатів – логіками із загальною семантикою. Класична логіка – це логіка тотальних однозначних предикатів. Нестандартні семантики для пропозиційної логіки та різноманітні відношення логічного наслідку досліджено О.Д. Смирновим [6]. В роботі [3] подібні семантики та формалізації відношення логічного наслідку узагальнені на випадок КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів на номінативних рівнях. Далі такі логіки вивчалися, зокрема, в роботах [4, 5], при цьому велику увагу приділено спеціальним X - Y -означеном відношенням логічного наслідку. В да-

ній роботі для опису семантичних властивостей КНЛ використано спеціальні предикати-індикатори наявності значення для предметних змінних. Дотримуємось позначень роботи [5].

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [2, 3, 5].

1. Семантичні моделі та мови

В даній статті, як і в попередніх роботах [3–5], ми трактуємо часткові неоднозначні предикати на множині D як відповідності (відношення) між D та множиною істиннісних значень $Bool = \{T, F\}$. Такі предикати називаємо *предикатами реляційного типу*. Вони формалізують найпростіше уточнення поняття часткового неоднозначного предиката, таке уточнення не завжди є адекватним (див., напр., [7]). Загальніші уточнення ми плануємо дослідити в наступних роботах.

В цій статті будемо досліджувати *квазірні предикати реляційного типу*, задані на множині A всіх V -іменних множин над A .

Будемо позначати $P[d]$ множину тих значень, які предикат $P: {}^VA \rightarrow Bool$ може прийняти на $d \in {}^VA$. Зрозуміло, що $P[d] \subseteq Bool$. Зауважимо, що в попередніх роботах для цього ми використовували позначення $P(d)$.

Областю істинності й областю хибності V -квазірного предиката P назвемо множини

$$T(P) = \{d \in {}^VA \mid T \in P[d]\} \text{ та}$$

$$F(P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P[d]\}.$$

Якщо P однозначний, то $T(P) \cap F(P) = \emptyset$.

Клас однозначних V -квазірних предикатів реляційного типу ізоморфний класу традиційних V -квазірних предикатів, що визначаються [2] як однозначні функції типу ${}^VA \rightarrow Bool$.

Значення однозначного предиката P на $d \in {}^VA$ будемо традиційно позначати $P(d)$.

Якщо P тотальний, то $T(P) \cup F(P) = {}^VA$.

V -квазірний предикат P на A назвемо:

- тотально істинним, якщо $T(P) = {}^VA$;
- тотально хибним, якщо $F(P) = {}^VA$;
- тотожно істинним, якщо $T(P) = {}^VA$ і $F(P) = \emptyset$;
- тотожно хибним, якщо $T(P) = \emptyset$ і $F(P) = {}^VA$;
- тотально насиченим, якщо $T(P) = F(P) = {}^VA$;
- неспростовним, або частково істинним, якщо $F(P) = \emptyset$;
- виконуваним, якщо $T(P) \neq \emptyset$.

Базовими композиціями чистих першопорядкових КНЛ є пропозиційні композиції (логічні зв'язки) заперечення $\neg$ та диз'юнкція $\vee$, композиції реномінація R_i^* та квантифікація $\exists x$.

Предикати $\neg P$, $P \vee Q$, $R_i^*(P)$, $\exists x P$ задаємо так:

$$T(\neg P) = F(P); \quad F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q); \quad F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q);$$

$$T(R_i^*(P)) = r_i^*(T(P)); \quad F(R_i^*(P)) = r_i^*(F(P));$$

$$T(\exists x P) = \{d \in {}^VA \mid \exists e \in P[d \vee x \rightarrow a] \text{ для деякого } a \in A\};$$

$$F(\exists x P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P[d \vee x \rightarrow a] \text{ для всіх } a \in A\}.$$

Композиції кон'юнкція $\&$, імплікація $\rightarrow$, еквіваленція $\leftrightarrow$ та квантифікація $\forall x$ є похідними.

Зазначені композиції задаються так:

$$T(P \& Q) = T(P) \cap T(Q); \quad F(P \& Q) = F(P) \cup F(Q);$$

$$T(P \rightarrow Q) = F(P) \cup T(Q); \quad F(P \rightarrow Q) = T(P) \cap F(Q);$$

$$T(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap T(Q)) \cup (F(P) \cap F(Q));$$

$$F(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q));$$

$$T(\forall x P) = \{d \in {}^VA \mid T \in P[d \vee x \rightarrow a] \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$F(\forall x P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P[d \vee x \rightarrow a] \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Основні властивості пропозиційних композицій аналогічні властивостям відповідних класичних логічних зв'язок. Це такі властивості (див [3]):

– комутативність і асоціативність $\vee$ та $\&$;

– дистрибутивність $\vee$ щодо $\&$ та $\&$ щодо $\vee$;

– ідемпотентність $\vee$ та $\&$;

– закони контрапозиції, зняття подвійного заперечення, де Моргана.

Композиції $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ виражаються через $\neg$, $\vee$, $\&$

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q;$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \& Q) \vee (\neg Q \& \neg P).$$

Зауважимо, що наведені визначення $P \rightarrow Q$ та $P \leftrightarrow Q$ є природними для однозначних предикатів. Для неоднозначних можливо $T(P) \cap F(P) \neq \emptyset$, звідки маємо парадоксальне $F(P \rightarrow P) \neq \emptyset$. Властивість $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$ теж вірна лише для однозначних предикатів (див [3]).

Основні властивості композицій R_i^* , $\exists x$, $\forall x$, які вірні для загального випадку часткових неоднозначних предикатів, наведені в [3].

Монотонність. Фундаментальною властивістю відображень, які використовуються в програмуванні, є монотонність щодо розширення даних новими компонентами. Окремим випадком монотонності є сквітонність – збереження прийнятого значення при розширенні даних.

Предикат $P: {}^VA \rightarrow \{T, F\}$ *монотонний*, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P[d] \subseteq P[d']$.

Предикат $P: {}^VA \rightarrow \{T, F\}$ *еквітонний*, якщо з умови $P[d] \neq \emptyset$ та $d \subseteq d'$ випливає $P[d'] = P[d]$.

Для однозначних предикатів маємо визначення однозначний $P: {}^VA \rightarrow \{T, F\}$ *еквітонний*, якщо з умови $P(d) \downarrow$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d') \downarrow = P(d)$.

Для неоднозначних предикатів визначення монотонності й обидва визначення сквітонності рівносильні. Проте для неоднозначних предикатів це вже не так.

Приклад 1. Задамо предикат P таким чином: $P[\emptyset] = \emptyset$; $P[d] = \{T\}$ для всіх одноелементних d ; $P[d] = \{T, F\}$ для всіх d , які мають не менш двох іменних елементів.

Таким P монотонний, але він не є еквітонним.

Для однозначних часткових предикатів монотонність можна неформально трактувати як збереження інформативності предиката при збільшенні інформативності вхідних даних. Проте для тотальних монотонних предикатів при розширенні вхідних даних інформативність може лише зменшуватися, для таких предикатів поняття монотонності малозмістовне. Для тотальних предикатів прийнятною щодо змістовності є дуальна до монотонності властивість антитонності, яка, проте, малозмістовна для однозначних предикатів.

Предикат $P: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$ антитонний, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P[d] \supseteq P[d']$.

Теорема 1. Композиції $\neg, \vee, R_1^2, \exists x$ зберігають властивості еквітонності та антитонності.

Деякі важливі закони класичної логіки невірні вже для логіки часткових однозначних еквітонних предикатів. Це, зокрема, *modus ponens*, транзитивність імплікації та еквіваленції.

Приклад 2. Задамо P як тотожно істинний предикат, Q – як усюди невизначений, S – як тотожно хибний предикат. Тоді:

– Q та $Q \rightarrow S$ частково істинні, водночас S – тотожно хибний предикат;

– $P \rightarrow Q$ та $Q \rightarrow S$ частково істинні, водночас $P \rightarrow S$ – тотожно хибний предикат;

– $P \rightarrow Q$ та $Q \rightarrow S$ частково істинні, водночас $P \rightarrow S$ – тотожно хибний предикат.

Приклад 3. Розглянемо такі співвідношення:

$$T(R_{\emptyset, \emptyset}^{0,1}(P)) \subseteq T(R_{\emptyset}^0(\exists x P)) \quad (TR\exists)$$

$$F(R_{\emptyset}^0(\exists x P)) \subseteq F(R_{\emptyset, \emptyset}^{0,1}(P)) \quad (FR\exists)$$

Теорема 2. 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірні $TR\exists$ та $FR\exists$.

2) Для еквітонних предикатів вірне $TR\exists$ та невірне $FR\exists$.

3) Для антитонних предикатів вірне $FR\exists$ та невірне $TR\exists$.

Мови. Семантичними моделями чистих першопорядкових КНЛ є композиційні системи квазіарних предикатів кванторного рівня – трійки вигляду $({}^V A, Pr^A, C)$, де C задана множиною базових композицій $\{\neg, \vee, R_1^2, \exists x\}$. Така композиційна система задає неокласичну алгебру (алгебраїчну систему) даних (A, Pr^A) та композиційну алгебру предикатів (Pr^A, C) .

Побудова композиційної системи визначає мову логіки: терми алгебри предикатів трактуємо як формули мови.

Алфавіт мови: множина V предметних імен; множина Ps предикатних символів (ПС) – сигнатура мови; символи базових композицій $\neg, \vee, R_1^2, \exists x$.

Множина Fr формул мови визначається так:

$$- Ps \in Fr;$$

$$- \Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_1^2\Phi, \exists x\Phi \in Fr.$$

Інтерпретуємо мову на композиційних системах квазіарних предикатів $({}^V A, Pr^A, C)$. Відображення інтерпретації формул $J: Fr \rightarrow Pr^A$ визначається на основі тотального однозначного відображення $I: Ps \rightarrow Pr^A$, яке позначає символами множини Ps базові предикати. Задано J так:

$$1) J(p) = I(p) \text{ для кожного } p \in Ps.$$

$$2) J(\neg\Phi) = \neg(J(\Phi)), J(\vee\Phi\Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi)),$$

$$J(R_1^2\Phi) = R_1^2(J(\Phi)), J(\exists x\Phi) = \exists x(J(\Phi)).$$

Відображення I пов'язує алгебру даних (A, Pr) із мовою КНЛ. Отримуємо об'єкт вигляду $((A, Pr^A), I)$ – алгебраїчну систему (АС) з доданою сигнатурою, яка визначає композиційну систему $({}^V A, Pr^A, C)$. Такі АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову КНЛ із алгебрами даних. Назвемо їх моделями мови та скорочено позначимо (A, I) .

Предикат $J(\Phi)$ далі позначимо Φ_A .

Формула Φ (частково) істинна при інтерпретації на $A = (A, I)$, або A -неспростовна (позн. $A \models \Phi$), якщо Φ_A – частково істинний предикат.

Φ усюди істинна, або неспростовна (позн. $\models \Phi$), якщо $A \models \Phi$ для кожної моделі мови A .

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації на $A = (A, I)$ (позн. $A \models \Phi$), якщо Φ_A – тотально істинний предикат.

Φ тотально істинна (позн. $\models \Phi$), якщо $A \models \Phi$ для кожної моделі мови A .

Формула Φ виконується при інтерпретації на $A = (A, I)$, або A -виконується, якщо Φ_A – виконується предикат.

Φ виконується, якщо Φ A -виконується при інтерпретації на кожній моделі мови A .

Подібним чином даємо визначення формули:

- тотально хибної на A та тотально хибної;
- тотожно істинної на A та тотожно істинної;
- тотожно хибної на A та та тотожно хибної.

Теорема 3. 1) У випадку неокласичної семантики (інтерпретації на АС з частковими однозначними предикатами) множина тотально істинних формул порожня;

2) у випадку пересиченої семантики (інтерпретації на АС з тотальними неоднозначними предикатами) множина неспростованих формул порожня;

3) у випадку загальної семантики (інтерпретації на АС з частковими неоднозначними предикатами) множини тотально істинних та неспростованих формул порожні.

В класичній логіці та логіці еквітонних предикатів кожна формула вигляду $\neg \exists x \Phi \& \Phi$ не є виконуваною. Водночас для загального випадку логіки однозначних квазіарних предикатів маємо:

Приклад 4. Існують виконувані формули вигляду $\neg \exists x \Phi \& \Phi$.

Нехай $\Phi \in Ps$. Інтерпретуємо Φ на $A = (A, I)$:

$$\Phi_A(d) = \begin{cases} F, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ T, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

Для кожного $d \in {}^V A$ маємо: $\exists x \Phi_A(d) = F$, звідки $\neg \exists x \Phi_A(d) = T$. Для $\delta \in {}^V A$ такого, що $x \in asn(\delta)$, тоді $\Phi_A(\delta) = T$, звідки $(\neg \exists x \Phi \& \Phi)_A(\delta) = T$.

Модель мови $B = (A, I_B)$ дуальна до $A = (A, I_A)$, якщо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ і $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$ для кожного $\Phi \in Ps$. Тоді $A = (A, I_A)$ дуальна до $B = (A, I_B)$.

Тут $\overline{}$ позначає доповнення до S у ${}^V A$.

Якщо $A = (A, I_A)$ – із частковими неоднозначними предикатами, то дуальна $B = (A, I_B)$ – із тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Теорема 4. Нехай $B = (A, I_B)$ дуальна до $A = (A, I_A)$. Тоді для кожної $\Phi \in Fr$:

- 1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$;
- 2) Φ_A еквітонний $\Rightarrow \Phi_B$ антитонний;
- 3) Φ_A антитонний $\Rightarrow \Phi_B$ еквітонний.

Наслідок 1. Φ_A неспростовний на АС A із частковими неоднозначними предикатами $\Leftrightarrow \Phi_B$ тотально істинний на дуальній АС B із тотальними неоднозначними предикатами.

Таким чином, неокласична семантика та пересичена семантика дуальні.

Для квазіарних предикатів характерним є те, що значення $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Це веде до того, що для логік квазіарних предикатів вже невірні [3–5] деякі важливі закони класичної логіки:

– у випадку неокласичної семантики не завжди вірні $\models \forall x \Phi \rightarrow \Phi$, $\models \Phi \rightarrow \exists x \Phi$; для деяких формул Φ можливо: $\models \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ та $\models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$;

– у випадку пересиченої семантики не завжди вірні $\models \forall x \Phi \rightarrow \Phi$, $\models \Phi \rightarrow \exists x \Phi$; для деяких формул Φ можливо: $\models \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ та невірно $\models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$.

Таким чином, при інтерпретаціях формул варто явно вказувати означені та неозначені предме-

тні імена. Це можна робити за допомогою спеціальних X – Y -означених відношень логічного наслідку (див. [3–5]). В цій роботі використовуємо запропоновані в [8] спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори ε_z , які визначають наявність в даних компонентах з відповідним іменем z .

Предикати-індикатори ε_z визначаємо так:

$$T(\varepsilon_z) = \{d \mid d(z) \uparrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \in asn(d)\};$$

$$F(\varepsilon_z) = \{d \mid d(z) \downarrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \notin asn(d)\}.$$

Наведемо основні властивості предикатів ε_z :

- 1) $T(\exists y \varepsilon_y) = T(\forall y \varepsilon_y) = F(\exists y \neg \varepsilon_y) = F(\forall y \neg \varepsilon_y) = \emptyset$;
- 2) $F(\forall y \varepsilon_y) = F(\exists y \neg \varepsilon_y) = T(\exists y \neg \varepsilon_y) = T(\forall y \neg \varepsilon_y) = {}^V A$;
- 3) $T(\exists y (\varepsilon_y \& P)) = T(\forall y (\varepsilon_y \& P)) = \emptyset$;
- 4) $F(\exists y (\varepsilon_y \& P)) = F(\forall y (\varepsilon_y \& P)) = {}^V A$;
- 5) $T(\exists y (\neg \varepsilon_y \vee P)) = T(\exists y (\varepsilon_y \rightarrow P)) = T(\forall y (\neg \varepsilon_y \vee P)) = T(\forall y (\varepsilon_y \rightarrow P)) = {}^V A$;
- 6) $F(\exists y (\neg \varepsilon_y \vee P)) = F(\exists y (\varepsilon_y \rightarrow P)) = F(\forall y (\neg \varepsilon_y \vee P)) = F(\forall y (\varepsilon_y \rightarrow P)) = \emptyset$;
- 7) $\exists y (\varepsilon_y \vee P) = \exists y (\neg \varepsilon_y \rightarrow P) = \exists y (\neg \varepsilon_y \& P) = \exists y P$;
- 8) $\forall y (\varepsilon_y \vee P) = \forall y (\neg \varepsilon_y \rightarrow P) = \forall y (\neg \varepsilon_y \& P) = \forall y P$.

Теорема 5. $T(R_{\varepsilon_z}^{B,A}(P)) \cap F(\varepsilon_y) \subseteq T(R_{\varepsilon_z}^B(\exists x P))$ та

$$F(R_{\varepsilon_z}^B(\exists x P)) \cap F(\varepsilon_y) \subseteq F(R_{\varepsilon_z}^{B,A}(P)).$$

Далі розглядаємо чисті першопорядкові КНЛ, в яких мови розширені за допомогою множин символів предикати-індикаторів $\{\varepsilon_x \mid x \in I\}$. Такі розширені логіки задають підрівень кванторного рівня із базовими композиціями $\neg$, $\vee$, R_I^B , $\exists x$, ε_x .

2. Відношення логічного наслідку

На множині формул введено [3] такі "природні" відношення: "істиннісний" $\models_T$, "хибнісний" $\models_F$, "сильний" $\models_{TF}$, "неспротівнісний" $\models_C$, "насічений" $\models_{CN}$ логічні наслідки. Для пропозиційної логіки такі відношення розглядалися в [6].

Задамо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови A :

- 1) $\Phi_A \models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A)$;
- 2) $\Phi_A \models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$;
- 3) $\Phi_A \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A)$ та $F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$;
- 4) $\Phi_A \models_C \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \cap F(\Psi_A) = \emptyset$;
- 5) $\Phi_A \models_{CN} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_A) \cap T(\Psi_A) = {}^V A$.

Відповідні відношення логічного наслідку $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_C$, $\models_{CN}$ визначаємо за такою схемою:

$$\Phi \models_* \Psi \Leftrightarrow \Phi_A \models_* \Psi \text{ для кожної моделі мови } A.$$

Тут і надалі $*$ – це одне з CI , Cm , T , F , TF .

Введені відношення $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_C$, $\models_{CN}$ рефлексивні й транзитивні.

Теорема 6. Нехай АС $B = (A, I_B)$ дуальна до АС $A = (A, I_A)$. Тоді:

- 1) $\Phi_A \models_T \Psi \Leftrightarrow \Phi_B \models_F \Psi$ та $\Phi_A \models_F \Psi \Leftrightarrow \Phi_B \models_T \Psi$;

$$2) \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \text{ та } \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi.$$

Для загальної семантики відношення $\models_{\mathcal{A}}$ та $\models_{\mathcal{A}}$ порожні; із теореми 6 випливає, що для загальної семантики $\Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi$. Таким чином, у випадку загальної семантики маємо єдине природне змістовне відношення $\models_{\mathcal{A}}$.

Для неокласичної семантики відношення $\models_{\mathcal{A}}$ порожні; можна розглядати $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$.

Для пересиченої семантики відношення $\models_{\mathcal{A}}$ порожні; можна розглядати $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$.

Для першопорядкових логік також усталюються від пропозиційної логіки відношення тавтологічного [2] наслідку: Ψ є тавтологічним наслідком Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Відношення $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$ рефлексивні й транзитивні.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності.

Відношення еквівалентності в АС $\mathcal{A}$ $\mathcal{A} \models \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \mathcal{A}$ визначаємо за схемою:

$$\Phi \mathcal{A} \Psi, \text{ якщо } \Phi \mathcal{A} \Psi \text{ та } \Psi \mathcal{A} \Phi.$$

Відношення логічної еквівалентності $\sim_{\mathcal{A}}$, $\sim_{\mathcal{A}}$, $\sim_{\mathcal{A}}$, $\sim_{\mathcal{A}}$ визначаємо за схемою:

$$\Phi \sim_{\mathcal{A}} \Psi, \text{ якщо } \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \text{ та } \Psi \models_{\mathcal{A}} \Phi.$$

Для кожної моделі мови $\mathcal{A}$ маємо:

$$\Phi \mathcal{A} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi) = T(\Psi) \text{ та } F(\Phi) = F(\Psi).$$

Отже, $\Phi \mathcal{A} \Psi$ означає, що Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат.

Наведені відношення еквівалентності рефлексивні, транзитивні й симетричні.

Теорема 7. Для кожної моделі мови $\mathcal{A}$ маємо:

$$1) \Phi \mathcal{A} \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi \text{ та}$$

$$\Phi \mathcal{A} \neg \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi;$$

$$2) \Phi \mathcal{A} \neg \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi \text{ та}$$

$$\Phi \mathcal{A} \neg \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi.$$

Поведінка відношень $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$, $\models_{\mathcal{A}}$ та $\sim_{\mathcal{A}}$, $\sim_{\mathcal{A}}$, $\sim_{\mathcal{A}}$ вельми специфічна (див. [3, 5]). Наведемо найхарактерніші з таких специфічних властивостей.

Теорема 8. 1) Для неокласичної семантики:

$$- \Phi \mathcal{A} (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{\mathcal{A}} \Psi, \Phi \mathcal{A} (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{\mathcal{A}} \Psi;$$

$$- \Phi \mathcal{A} \neg \Psi \vee \Phi \mathcal{A} \neg \Psi; \Phi \mathcal{A} \neg \Psi \vee \Phi \mathcal{A} \neg \Psi;$$

$$- \Phi \vee \Psi \mathcal{A} \neg \Psi \neg \Phi, \text{ невірнo } \Phi \vee \Psi \mathcal{A} \neg \Psi \neg \Phi;$$

$$- \Phi \mathcal{A} (\Psi \vee \neg \Psi) \neg \Phi, \text{ невірнo } \Phi \mathcal{A} (\Psi \vee \neg \Psi) \neg \Phi;$$

$$- \Phi \mathcal{A} \neg \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \vee \neg \Psi, \Phi \mathcal{A} (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{\mathcal{A}} \Psi \vee \Phi \mathcal{A} \neg \Psi.$$

2) для пересиченої семантики:

$$- \Phi \mathcal{A} (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{\mathcal{A}} \Psi, \Phi \mathcal{A} (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{\mathcal{A}} \Psi;$$

$$- \Phi \mathcal{A} \neg \Psi \vee \Phi \mathcal{A} \neg \Psi; \Phi \mathcal{A} \neg \Psi \vee \Phi \mathcal{A} \neg \Psi;$$

$$- \Phi \vee \Psi \mathcal{A} \neg \Psi \neg \Phi, \text{ невірнo } \Phi \vee \Psi \mathcal{A} \neg \Psi \neg \Phi;$$

$$- \Phi \mathcal{A} (\Psi \vee \neg \Psi) \neg \Phi, \text{ невірнo } \Phi \mathcal{A} (\Psi \vee \neg \Psi) \neg \Phi;$$

$$- \Phi \mathcal{A} \neg \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \vee \neg \Psi, \Phi \mathcal{A} (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{\mathcal{A}} \Psi \vee \Phi \mathcal{A} \neg \Psi.$$

2) для загальної семантики:

$$\Phi \mathcal{A} \neg \Phi \models_{\mathcal{A}} \Psi \vee \neg \Psi; \Phi \mathcal{A} (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{\mathcal{A}} \Psi \vee \Phi \mathcal{A} \neg \Psi.$$

Наслідок 2. Невірними є такі співвідношення:

$$\Phi \mathcal{A} \neg \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi, \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi \mathcal{A} \neg \Psi;$$

$$\Phi \mathcal{A} \neg \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi, \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi \mathcal{A} \neg \Psi;$$

$$\Phi \mathcal{A} \neg \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi, \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi \mathcal{A} \neg \Psi;$$

$$\Phi \mathcal{A} \neg \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi, \neg \Psi \mathcal{A} \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi \mathcal{A} \neg \Psi.$$

Таким чином, для $\models_{\mathcal{A}}$ та $\models_{\mathcal{A}}$ закон контрапозиції невірний, для $\neg_{\mathcal{A}}$ та $\neg_{\mathcal{A}}$ не можна знімати заперечення в обох частинах еквівалентності.

Наведемо основні властивості, пов'язані з компліментарними реномінаціями та квантифікації (див. також [3, 5]):

$$RT) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi) \sqcap_{\mathcal{A}} R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi);$$

$$R \neg) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\neg \Phi) \sqcap_{\mathcal{A}} \neg R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi);$$

$$R \vee) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi \vee \Psi) \sqcap_{\mathcal{A}} R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi) \vee R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Psi);$$

$$RR) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi)) \sqcap_{\mathcal{A}} R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi);$$

$$\Phi N) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi) \sqcap_{\mathcal{A}} R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi),$$

якщо у строго неістотне [3] для Φ ,
 $R \exists) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\exists x \Phi) \sqcap_{\mathcal{A}} R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\exists x \Phi),$
 $R \exists \exists) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\exists x \Phi) \sqcap_{\mathcal{A}} \exists x \Phi;$

$$R \exists) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\exists y \Phi) \sqcap_{\mathcal{A}} \exists y R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi), \text{ якщо } y \notin \{ \bar{x}, \bar{x} \};$$

$$R \text{en}) \exists x \Phi \sqcap_{\mathcal{A}} \exists y R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi),$$

якщо у строго неістотне для Φ .

Основні властивості кванторів:

$$Q1) \exists x \exists y \Phi \models_{\mathcal{A}} \exists y \exists x \Phi \text{ та } \forall x \forall y \Phi \models_{\mathcal{A}} \forall y \forall x \Phi;$$

$$Q2) \neg \forall x \Phi \models_{\mathcal{A}} \exists x \neg \Phi \text{ та } \neg \exists x \Phi \models_{\mathcal{A}} \forall x \neg \Phi;$$

$$Q3) \exists x \Phi \models_{\mathcal{A}} \forall x \exists x \Phi, \exists x \Phi \models_{\mathcal{A}} \exists x \exists x \Phi;$$

$$\forall x \Phi \models_{\mathcal{A}} \forall x \forall x \Phi, \forall x \Phi \models_{\mathcal{A}} \exists x \forall x \Phi;$$

$$Q4) \exists x \Phi \vee \exists x \Psi \models_{\mathcal{A}} \exists x (\Phi \vee \Psi) \text{ та}$$

$$\forall x \Phi \mathcal{A} \forall x \Psi \models_{\mathcal{A}} \forall x (\Phi \mathcal{A} \Psi);$$

$$Q5) \exists x (\Phi \mathcal{A} \Psi) \models_{\mathcal{A}} \exists x \Phi \mathcal{A} \exists x \Psi \text{ та}$$

$$\forall x \Phi \vee \forall x \Psi \models_{\mathcal{A}} \forall x (\Phi \vee \Psi);$$

$$Q6) \exists y \forall x \Phi \models_{\mathcal{A}} \forall x \exists y \Phi; \text{ водночас}$$

$$\forall x \exists y \Phi \models_{\mathcal{A}} \exists y \forall x \Phi \text{ (} \bullet \text{ – одне з } Cl, Cm, T, F, TF);$$

$$Q7) \forall x \Phi \models_{\mathcal{A}} \exists x \Phi, \text{ водночас } \Phi \mathcal{A} \exists x \Phi,$$

$$\exists x \Phi \mathcal{A} \Phi, \forall x \Phi \mathcal{A} \Phi, \Phi \mathcal{A} \exists x \Phi, \Phi \mathcal{A} \forall x \Phi;$$

$$QR) R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi) \mathcal{A} \exists x \Phi \text{ та } \forall x \Phi \mathcal{A} R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi).$$

Для логік часткових однозначних та тотальних неоднозначних предикатів відповідно додаємо:

$$QP) \models_{\mathcal{A}} \forall x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi) \text{ та } \models_{\mathcal{A}} \exists x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi);$$

$$\models_{\mathcal{A}} \forall x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi) \text{ та } \models_{\mathcal{A}} \exists x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi);$$

$$QT) \models_{\mathcal{A}} \forall x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi) \text{ та } \models_{\mathcal{A}} \exists x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi);$$

$$\models_{\mathcal{A}} \forall x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi) \text{ та } \models_{\mathcal{A}} \exists x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi).$$

Приклад 5. Існують АС $\mathcal{A}$ та формула Φ такі:

$$\Phi \mathcal{A} \neg \forall x \Phi, \exists x \Phi \mathcal{A} \neg \Phi, \exists x \Phi \mathcal{A} \neg \Phi.$$

$$\text{Нехай } \Phi \text{ – це формула } \forall x p \rightarrow p \text{ для ПС } p.$$

Інтерпретуємо p на АС A так:

$$p_A[d] = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d). \end{cases}$$

Отримуємо наступні співвідношення для відповідних відношень логічного наслідку.

1. Неокласична семантика:

$$\models_{TF} \subset \models_T, \models_{TF} \subset \models_F, \models_T \subset \models_O, \models_F \subset \models_O; \models_{C\&} = \emptyset;$$

$$\models_i \subset \models_T, \models_i \subset \models_F, \models_{TF} \subset \models_i.$$

2. Пересичена семантика:

$$\models_{TF} \subset \models_T, \models_{TF} \subset \models_F, \models_T \subset \models_{C\&}, \models_F \subset \models_{C\&}; \models_O = \emptyset;$$

$$\models_i \subset \models_T, \models_i \subset \models_F, \models_{TF} \subset \models_i.$$

3. Загальна семантика:

$$\models_{TF} = \models_T = \models_F; \models_O = \emptyset, \models_{C\&} = \emptyset;$$

$$\models_i \subset \models_{TF}, \models_{TF} \subset \models_i.$$

4. Загальна семантика еквівентних та загальна семантики антитонних предикатів:

$$\models_{TF} \subset \models_T, \models_{TF} \subset \models_F; \models_O = \emptyset, \models_{C\&} = \emptyset;$$

$$\models_i \subset \models_{TF}, \models_{TF} \subset \models_i.$$

Зобразимо графічно співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку в різних семантиках (рис. 1–4).

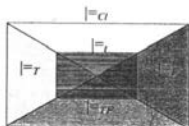


Рис. 1. Неокласична семантика.

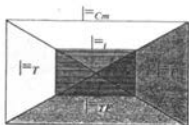


Рис. 2. Пересичена семантика.

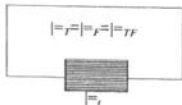


Рис. 3. Загальна семантика.

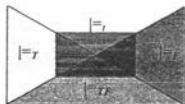


Рис. 4. Загальна семантика еквівентних предикатів чи антитонних предикатів.

Для відношень $\sim_O, \sim_{C\&}, \sim_{TF}, \sim_i$ вірна

Теорема 9 (еквівалентності). Нехай Φ' отримана з Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$. Якщо $\Phi_i \sim_i \Psi_i, \dots, \Phi_n \sim_n \Psi_n$, то $\Phi \sim_i \Phi'$.

Для відношень $\sim_T$ та $\sim_F$ теореми 9 невірні.

3. Відношення наслідку для множин формул

Задано відношення наслідку для множин формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови АС A . Нехай $\Gamma \subseteq F_T$ та $\Delta \subseteq F_T$.

$$\Gamma_A \models_O \Delta, \text{ якщо } \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \emptyset;$$

$$\Gamma_A \models_{C\&} \Delta, \text{ якщо } \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A) = F_A;$$

$$\Gamma_A \models_T \Delta, \text{ якщо } \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A);$$

$$\Gamma_A \models_F \Delta, \text{ якщо } \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A);$$

$$\Gamma_A \models_{TF} \Delta, \text{ якщо } \Gamma_A \models_T \Delta \text{ та } \Gamma_A \models_F \Delta.$$

Відношення логічного наслідку для множин формул $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_O, \models_{C\&}$ задано за схемою:

$$\Gamma \models_i \Delta, \text{ якщо } \Gamma_A \models_i \Delta \text{ для кожної моделі мови } A.$$

Теорема 10. Нехай АС $B = (A, I_B)$ дуальна до АС $A = (A, I_A)$. Тоді:

$$1) \Gamma_A \models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_F \Delta \text{ та } \Gamma_A \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_T \Delta;$$

$$2) \Gamma_A \models_O \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_{C\&} \Delta \text{ та } \Gamma_A \models_{C\&} \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_O \Delta.$$

Наслідок 2. 1) $\Gamma \models_O \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma \models_{C\&} \Delta$ в пересиченій семантиці;

2) $\Gamma \models_T \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta$ в пересиченій семантиці;

3) $\Gamma \models_F \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta$ в пересиченій семантиці;

4) у випадку загальної семантики отримуємо $\Gamma \models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta$.

Для загальної семантики природно розглядати $\models_{TF}$; для неокласичної – $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_O$; для пересиченої – $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{C\&}$.

Δ с тавтологічним наслідком Γ (позн. $\Gamma \models \Delta$), якщо для кожної $\tau: F \rightarrow \{T, F\}$ із умови $\tau(\Phi) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ випливає: $\tau(\Psi) = T$ для деякої $\Psi \in \Delta$.

Теорема 11 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тоді:

$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Замість $\sim_{TF}$ в теоремі 11 можна брати $\sim_O$, $\sim_{CM}$, $\sim_I$. Тоді $\models$ буде відповідно $\models_O$, $\models_{CM}$, $\models_I$.

Властивості пропозиційного рівня. Для цих властивостей $\models$ – це $\models_I$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_O$, $\models_{CM}$, $\models_I$. Для неокласичної семантики відповідає $\models_{CM}$, для пересиченої – $\models_O$, для загальної – $\models_O$ та $\models_{CM}$.

1) Нехай $\Gamma \models \Delta$, $\Delta \subseteq \Sigma$, $\Gamma \subseteq \Lambda$; тоді $\Lambda \models \Sigma$;

2) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$;

3) $\neg \neg \Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta, \neg \neg \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

4) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$;

5) $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \Phi, \neg \Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg \Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg \Psi$.

Для $\models_O$, $\models_{CM}$ та $\models_I$ також маємо:

6) $\neg \neg \Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\Gamma \models \Delta, \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

Водночас $\neg$ невірне для $\models_F$, $\models_I$, $\models_{TF}$ (див. [3]).

Властивості, які додатково гарантують наявність логічного наслідку:

CL) $\Phi, \neg \Phi, \Gamma \models_F \Delta$ (неокласична семантика);

$\Phi, \neg \Phi, \Gamma \models_I \Delta$ (пересичена семантика);

CR) $\Gamma \models_F \Delta, \Phi, \neg \Phi$ (неокласична семантика);

$\Gamma \models_I \Delta, \Phi, \neg \Phi$ (пересичена семантика);

CLR) $\Phi, \neg \Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg \Psi$ (неокласична семантика та пересичена семантика).

Для $\models$ та для $\models_O$ (неокласична семантика) і $\models_{CM}$ (пересичена семантика) властивості CL, CR, CLR впливають із C та $\neg$.

Властивості реномінації. Властивості RT, FN, RER, ER, R $\neg$, RV, RR індукують відповідні властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Це властивості RT $_{\neg}$, RT $_{\neg}$, $\neg$ RT $_{\neg}$, $\neg$ RT $_{\neg}$, FN $_{\neg}$, FN $_{\neg}$, $\neg$ FN $_{\neg}$, $\neg$ FN $_{\neg}$, RER $_{\neg}$, RER $_{\neg}$, $\neg$ RER $_{\neg}$, $\neg$ RER $_{\neg}$, ER $_{\neg}$, ER $_{\neg}$, $\neg$ ER $_{\neg}$, $\neg$ ER $_{\neg}$, RR $_{\neg}$, RR $_{\neg}$, $\neg$ RR $_{\neg}$, R $\neg$, R $\neg$, $\neg$ R $\neg$, $\neg$ R $\neg$, RV $_{\neg}$, RV $_{\neg}$, $\neg$ RV $_{\neg}$, $\neg$ RV $_{\neg}$. Зазначені властивості отримуються на основі теорем заміни еквівалентних, вони вірні для $\models_{TF}$, $\models_F$, $\models_I$, $\models_O$, $\models_{CM}$. Необхідність властивостей для випадку зовнішнього заперечення на реномінацію впливає з того, що для $\models_F$, $\models_I$, $\models_{TF}$ не можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки. Водночас для $\models_O$ та $\models_{CM}$ можна обмежи-

ти властивостями RT $_{\neg}$, RT $_{\neg}$, FN $_{\neg}$, FN $_{\neg}$, RER $_{\neg}$, RER $_{\neg}$, ER $_{\neg}$, ER $_{\neg}$, R $\neg$, R $\neg$, $\neg$ R $\neg$, $\neg$ R $\neg$, RV $_{\neg}$, RV $_{\neg}$.

Наведемо тут для прикладу властивості типу $\neg R_{\neg}$, RV $_{\neg}$, $\neg RV_{\neg}$, RER $_{\neg}$, $\neg RER_{\neg}$, ER $_{\neg}$, $\neg ER_{\neg}$.

$\neg R_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg R_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

RV $_{\neg}$ $R_{\neg}^c(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\Phi) \vee R_{\neg}^c(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

RV $_{\neg}$ $\Gamma \models \Delta, R_{\neg}^c(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\neg}^c(\Phi) \vee R_{\neg}^c(\Psi)$;

$\neg RV_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R_{\neg}^c(\Phi), \neg R_{\neg}^c(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg RV_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{\neg}^c(\Phi) \vee \neg R_{\neg}^c(\Psi)$;

RER $_{\neg}$ $R_{\neg}^c(\exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\exists x \Phi), \Gamma \models \Delta$;

RER $_{\neg}$ $\Gamma \models \Delta, R_{\neg}^c(\exists x \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\neg}^c(\exists x \Phi)$;

$\neg RER_{\neg}$ $R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta$;

RER $_{\neg}$ $R_{\neg}^c(\exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

RER $_{\neg}$ $\Gamma \models \Delta, R_{\neg}^c(\exists x \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x \Phi$;

$\neg RER_{\neg}$ $R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg RER_{\neg} \Leftrightarrow R_{\neg}^c(\neg \exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$$\Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \epsilon\gamma.$$

$$2) \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \epsilon\gamma, \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \\ \text{та } \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \neg R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma.$$

На основі теорем 12–15 сформулюємо властивості елімінації кванторів:

$$\begin{aligned} \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma; \\ \exists_{\alpha} \downarrow) \quad & \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma; \\ \neg \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \neg \exists_{\alpha} \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, \neg \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \exists \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \neg \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \neg R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma; \\ \neg \exists \downarrow) \quad & \neg \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x\Phi, \neg R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma. \end{aligned}$$

Для властивостей $\exists R_{\alpha} \downarrow, \neg \exists R_{\alpha} \downarrow, \exists R_{\alpha} \downarrow, \neg \exists R_{\alpha} \downarrow$ такі умови: $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi))$. Для $\exists_{\alpha} \downarrow, \neg \exists_{\alpha} \downarrow$, $\exists \downarrow, \neg \exists \downarrow$ такі умови: $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$.

$$\begin{aligned} \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \epsilon\gamma \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \exists_{\alpha} \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \epsilon\gamma \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \neg \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \neg R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma; \\ \neg \exists_{\alpha} \downarrow) \quad & \neg \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg \exists x\Phi, \neg R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma; \\ \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \epsilon\gamma, \Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi) \\ \text{та } \Gamma \models \Delta, R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \exists \downarrow) \quad & \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \epsilon\gamma, \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \text{ та} \\ \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \epsilon\gamma; \\ \neg \exists R_{\alpha} \downarrow) \quad & \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \epsilon\gamma, \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \text{ та} \\ & \neg R_{\alpha}^{\beta}(\exists x\Phi), \neg R_{\alpha}^{\beta, \gamma}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma; \\ \neg \exists \downarrow) \quad & \neg \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \epsilon\gamma, \neg \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \text{ та} \\ & \neg \exists x\Phi, \neg R_{\alpha}^{\beta}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \epsilon\gamma. \end{aligned}$$

Висновки

В роботі досліджено семантичні властивості чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неозначених та часткових неозначених квазіарних предикатів. Велика увага приділена вивченню відношень логічного наслідку. Розглянуто властивості цих відношень в різних семантиках для загального випадку квазіарних предикатів, для логік сквітонних і логік антитонних предикатів. Характерною особливістю роботи є використання спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для змінних.

Проведене дослідження відношень логічного наслідку є семантичною основою побудови числень секвенційного типу.

Список використаних джерел

1. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.] – Oxford: Clarendon Press, 1994–2000.
2. Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S. Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskiy Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
3. Shkilniak S.S. Relations of Logical Consequence in Composition-Nominative Logics // Problems in Programming. – 2010. – № 1 – P. 15–38 (in Ukrainian).
4. Shkilniak S.S. First-Order Logics of Quasi-ary Predicates // Cybernetics and Systems Analysis. – 2010. – № 6. – P. 32–49 (in Russian).
5. Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S. First-Order Composition-Nominative Logics // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – № 4. – P. 176–185 (in Ukrainian).
6. Smirnova E.D. Logic and Philosophy. – Moscow: ROSSPEN, 1996. – 304 p. (in Russian).
7. Nepeivoda N.N. Applied logic. – Novosibirsk: NGU, 2000. – 521 p. (in Russian).
8. Nikitchenko M., Tymofieiev V. Satisfiability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 347. – P. 89–110. – Springer, 2012.

Надійшло до редколегії 05.12.2012

УДК 004.04

Погорілий С.Д., д.т.н., проф.,
Потебня А.В., студент

Розробка новітніх систем штучного інтелекту для розв'язання задачі комівояжера

Виконано дослідження архітектури еластичної нейронної мережі та показано придатність її використання для розв'язання задачі комівояжера. Запропоновано спосіб відновлення спотворених маршрутів за допомогою алгоритмів локальної оптимізації. Для збільшення якості одержаних розв'язків сформовано низку оптимізованих нейронних структур та гібридні інтелектуальні системи. Наведено рекомендації щодо використання розроблених мереж при розв'язанні прикладних задач.

Ключові слова: Еластична нейронна мережа, задача комівояжера, самоорганізовані карти, мережа Хопфілда-Танка, алгоритми локальної оптимізації, гібридна інтелектуальна система, граф.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна,
e-mail: sdp77@i.ua, potebna@yandex.ru

Sergiy D. Pogorilyy, doctor of SCI (engineering),
Professor,
Artem V. Potebnya, student

Development of new artificial intelligence systems for solving the travelling salesman problem

Investigation of elastic neural network architecture is completed and its suitability for use in solving the travelling salesman problem is reviewed. The method of corrupted tracks restoration using local optimization algorithms is proposed. To increase the solutions quality a set of optimized neural structures and hybrid intelligent systems is introduced. Recommendations of developed networks usage for applied tasks solving are presented.

Key words: Elastic neural network, travelling salesman problem, self-organizing maps, Hopfield-Tank network, local optimization algorithms, hybrid intelligent system, graph.

Kyiv National Taras Shevchenko University,
Ukraine
e-mail: sdp77@i.ua, potebna@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Вступ

Надзвичайно поширеними у багатьох сферах досліджень є системи штучного інтелекту, які моделюють діяльність різних природних механізмів. До них належать нейронні мережі, методи бджолоїної колонії, алгоритми штучних бактерій, генетичні алгоритми, штучні річкові потоки, алгоритми імунної системи та багато інших [1]. Разом з тим, відсутність досконалих розробок призводить до потреби впровадження новітніх систем штучного інтелекту, придатних для розв'язання надскладних задач.

Здолавши тривалий шлях від математичної головоломки до актуальної задачі XX століття, задача комівояжера (travelling salesman problem) здобула широке застосування у багатьох сферах сучасного життя [2, 3]. Наприклад, при розробці надвеликих інтегральних схем (VLSI), виникає

необхідність з'єднати їх компоненти у такий спосіб, щоб одержаний пристрій був компактним, споживав мало потужності та швидко проводив сигнали. Подібні вимоги враховуються при створенні електричних мереж, синтезі універсальних ланцюжків ДНК, а також при розв'язанні задач маршрутизації та плануванні руху робота [4, 5].

Класичні алгоритми не застосовні до задач такого типу, що належать до класу NP-складних. Обчислювальні затрати на їх розв'язання експоненційно зростають зі збільшенням розмірності оброблюваних графів.

Групою вчених розроблено пакет програмного забезпечення для точного розв'язання задачі комівояжера – Concorde TSP Solver [6]. Він забезпечив одержання оптимальних розв'язків для всіх тестів з бібліотеки TSPLIB [7], зокрема, для графа, що

містить 85900 вершин. Тому його використано для відстеження якості розв'язків задачі комівояжера, отриманих у цій статті.

Для одержання якісних розв'язків задачі комівояжера у статті обрано самоорганізовані карти (СК), що є найбільш поширеними серед штучних нейронних мереж [8]. СК є математичним інструментом, придатним для розв'язання широкого діапазону прикладних задач: від аналізу зображень до керування виробничими процесами та категоризації електричних сигналів мозку [8]. Наприклад, у праці [9] подано близько 4000 робіт, сформованих з використанням СК. Варто зауважити, зокрема, про підхід до проєктування структури телекомунікаційної мережі з використанням задачі комівояжера, наведений у статті [10]. Відповідно навчені СК отримали назву еластичних нейронних мереж (ЕНМ). Дослідження архітектури ЕНМ для розв'язання задачі комівояжера наведено в праці [11].

Метою дослідження є формування новітніх систем штучного інтелекту для розв'язання задачі комівояжера. Виконано їх експериментальну реалізацію з метою встановлення залежностей якості одержаних розв'язків від різних наборів вхідних даних. У статті запропоновано низку оптимізованих структур нейронних мереж та наведено переваги їх використання при розв'язанні цієї задачі.

Основоположні поняття

Нехай, граф G задано за допомогою множини вершин V , множини ребер E та вагової функції $w: E \rightarrow R$. Розв'язання задачі комівояжера передбачає знаходження замкненого циклу найменшої ваги, що містить всі вершини, наявні у графі [2]. Слід зазначити, що в загальному випадку умова їх одноразових відвідин може штучно збільшити шлях комівояжера. Наприклад, для графа в статті [12] нехтування цим обмеженням дозволило збільшити якість розв'язків на 12%. Тому, в цій роботі для дослідження обрано симетричну евклідову задачу комівояжера, для якої виконуються умови $c_{i,j} = c_{j,i}$ та $c_{i,i} + c_{j,j} \geq c_{i,j}$, де $c_{i,j}$ – вага ребра $e_{i,j}$ та $i, j \in V$ [13].

Сьогодні є безперечним значний науковий та практичний інтерес до обчислювальних структур нового типу – штучних нейронних мереж. Він спричинений низкою успішних застосувань цієї технології, яка дозволила розробити ефективні підходи до вирішення проблем, що вважались

складними для реалізації на традиційних комп'ютерах.

Відомо, що нейрони мають спеціальні відростки та синаптичні контакти, що слугують для обміну інформацією з іншими нервовими клітинами (рис. 1). Реалізація моделі формального нейрона, що відтворює лише ці прості властивості, заклала підвалини для розробки сучасних ефективних нейронних мереж.

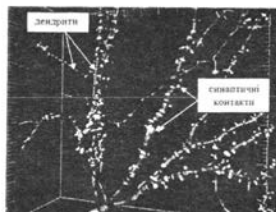


Рис. 1 – Структура типового нейрона, відтворена за допомогою пакету Imaris [14]

Ансамблі нейронів, об'єднані синаптичними зв'язками, формують мозок з його різноманітними функціональними можливостями. Таким чином, штучна нейронна мережа є структурою, яка складається з великої кількості процесорних елементів, кожен з яких має локальну пам'ять і може взаємодіяти з іншими за допомогою відповідних комунікаційних каналів [15].

Розв'язання задачі комівояжера за допомогою штучних нейронних мереж

Згідно з [13] СК та мережі Хопфілда-Танка (МХТ) [16] є найбільш придатними для розв'язання задачі комівояжера. Впровадження МХТ призводить до проблеми пошуку глобального мінімуму енергетичної функції, що відповідає шуканому оптимальному розв'язку [13, 17].

Варто зауважити, що спроби застосування МХТ нашоюхнулися на ряд труднощів:

1. Значне зростання кількості міжнейронних зв'язків при збільшенні розмірності графа.
2. Поверхня функції енергії в просторі станів мережі має складну форму, яка характеризується великою кількістю локальних

мінімумів, що викликає сумніви щодо точності запропонованих розв'язків [15, 18].

3. Відсутність систематичних методів визначення спеціальних коефіцієнтів, значення яких впливають на збіжність розв'язків [18].

4. Недоліком асоціативної пам'яті, яка реалізується на МХТ є її незначний об'єм. Наприклад, у роботі [19] доведено, що його граничне значення складає $0,15N$, де N – кількість нейронів.

Згадані недоліки та ряд інших, характерних для побудованої на основі класичної МХТ асоціативної пам'яті, спричиняють її непридатність для практичного використання та пояснюють вибір СК у даній роботі.

Еластична нейронна мережа

Серед нейронних мереж, що реалізують принцип "Winner Take All" (WTA), СК вирізняються структурою розподіленої пам'яті. Подібна організація дозволяє уникнути катастрофічної деградації у випадку відмови одного з нейронів, забезпечуючи ефект підвищеної живучості [15].

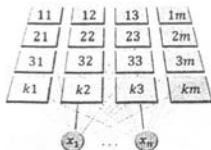


Рис. 2 – Архітектура самоорганізованих карт

В архітектурі СК (рис. 2) елементи вхідного вектора сигналів $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ потрапляють на вхід кожного з нейронів, структурованих у вигляді двовимірної матриці. Таким чином, множина вагових коефіцієнтів мережі має вигляд:

$$W = \begin{pmatrix} W^{11} & W^{12} & \dots & W^{1m} \\ W^{21} & W^{22} & \dots & W^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^{k1} & W^{k2} & \dots & W^{km} \end{pmatrix}$$

Компонентами даної матриці є вектори вагових коефіцієнтів $W^{iq} = (w_1^q, w_2^q, \dots, w_n^q)$, що масштабують відповідні елементи вхідного набору [15, 17].

СК є одним з кластерних методів навчання, що дає можливість формування нових топологій відповідно до вигляду функції сусідства (neighborhood function) $\Phi_q(t)$ [14, 16]. Тут виберемо найбільш поширену функцію сусідства, що базується на законі розподілу Гауса:

$$\Phi_q(t) = \alpha(t) e^{-\frac{r_q^2}{2\sigma^2(t)}},$$

де $\alpha(t)$ – коефіцієнт навчання (learning rate), $\sigma(t)$ – параметр, що задає розмір області сусідства (neighborhood of winner neuron), або температура ЕНМ [9], r_q – квадрат відстані від нейрона з координатами (i, j) до центру кластера. На відміну від класичних СК, ЕНМ мають кільцеву структуру. У цьому випадку, величина r_q характеризує віддаленість вузлів на колі, спадаючи зі зближенням нейронів до нуля [20]. Детальний опис процесу розв'язання прикладних задач з використанням СК наведено в [8].

Таким чином, схема алгоритму навчання ЕНМ має вигляд:

сформувати конфігурацію початкового кластера нейронів;

обрати значення параметрів $\alpha(t_0)$ та $\sigma(t_0)$;

якщо результат перевірки критерію збіжності негативний

то

для випадково вибраної вершини графа повторювати

$$\text{знайти відстані } d_q = \sum_{p=1}^n |x_p(t) - w_p^q(t)|$$

між вектором вхідного сигналу та кожним з нейронів мережі;

вузол з найменшим значенням d_q

обрати центром кластера;

виконати підстроювання вагових коефіцієнтів нейронів за формулою:

$$W^{iq}(t+1) = W^{iq}(t) + \Phi_q(t) (X(t) - W^{iq}(t));$$

зменшити значення параметрів $\alpha(t)$ та $\sigma(t)$;

кінець циклу

Розглянемо приклад виконання цього алгоритму. Нехай, конфігурацію початкового кластера обрано у вигляді кола, зображеного на рис. 3а. З плином ітерацій зміна параметрів призводить до зменшення області збудження навколо центру кластера (рис. 3б). Знайдений

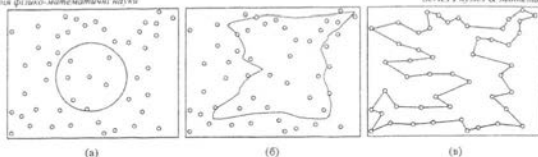


Рис. 3 – Приклад роботи еластичної нейронної мережі

цикл, що є найменшим для даного графа, міститься на рис. 3в.

Визначення оптимальних параметрів еластичної нейронної мережі

Відомо, що збурення прилеглих до центру кластера вузлів дозволяє суттєво збільшити якість одержаних розв'язків [20]. Однак, неправильний вибір параметрів ЕНМ може призвести до значних спотворень топології та низки інших важливих порушень. Особливого значення ця проблема набуває при розв'язанні задачі комівояжера для графів великої розмірності.

Варто зауважити, що кількість вузлів, які беруть участь у формуванні кластера, зменшується під час роботи ЕНМ, так, як деякі з них потрапляють до «пастки», опиняючись під контролем своїх сусідів. Однак, створення додаткових нейронів призводить до збільшення часу роботи алгоритму, що пов'язано зі зростанням обсягу необхідних обчислень. Експериментально встановлено, що при виборі кількості вузлів ЕНМ найбільш оптимальним є запас у 30 – 40%.

На рис. 4 сформовано залежність довжини нейронного кільця від початкової температури $\sigma(t_0)$ та кількості виконаних ітерацій. Отримані

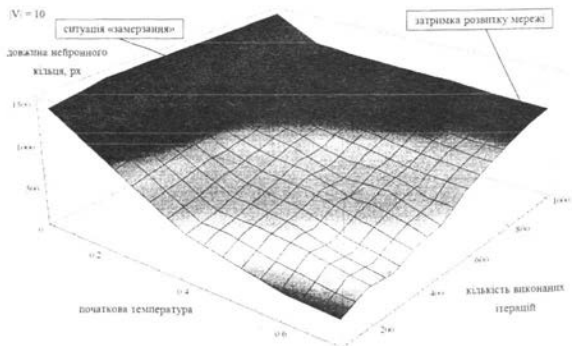


Рис. 4 – Залежність довжини нейронного кільця від початкової температури та кількості виконаних ітерацій

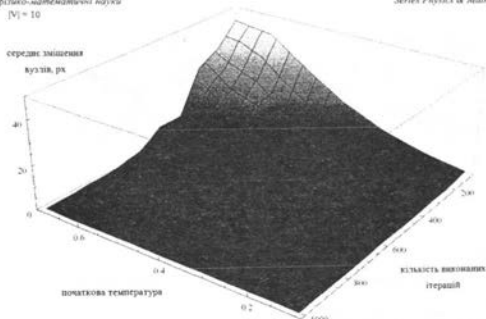


Рис. 5 – Залежність зміщення вузлів від початкової температури та кількості виконаних ітерацій

результати підтверджують складність визначення оптимальних параметрів ЕНМ. Вибір невеликих значень початкової температури (0,1 – 0,25) призводить до «замерзання» нейронної мережі.

Для пояснення цього явища, на рис. 5 наведено залежність середнього зміщення вузлів від $\sigma(t_0)$ та кількості виконаних ітерацій. З її вигляду можна зробити висновок про згубний вплив малої рухливості на процес перебудови топології ЕНМ. Проте, встановлення високої температури (вище 0,5) призводить до затримки розвитку нейронної мережі. Відповідні ділянки обох залежностей мають характерні коливання, пов'язані з постійними хаотичними змінами топології. Таким чином, найбільш стабільна робота ЕНМ спостерігається за проміжних значень початкової температури (0,25 – 0,5).

Неправильний вибір значення початкового коефіцієнта навчання $\alpha(t_0)$ може спричинити додаткові порушення топології нейронної мережі. Рекомендації щодо його визначення викладені в роботі [21]. Експериментально вибране в даній статті значення $\alpha(t_0)$ складає 0,5.

Використання алгоритмів локальної оптимізації для відновлення спотворених розв'язків

У зв'язку зі значними пошкодженнями топології, нейронні мережі в ситуації

«замерзання» виявляються неспроможними до формування якісних розв'язків задачі комівояжера. Однак, застосування допоміжних оптимізаційних алгоритмів (local search optimization algorithm) забезпечує суттєве покращення отриманих маршрутів. Наприклад, у роботі [22] подібні способи оптимізації використано з метою відновлення розв'язків, одержаних за допомогою методів декомпозиції. Слід зазначити також про їх застосування у праці [23] для збільшення якості маршрутів, запропонованих генетичними алгоритмами.

Для здійснення локальної оптимізації спотворених розв'язків у даній роботі використано один з найпоширеніших способів – 2-орт. Під час послідовного сканування початкового маршруту цей алгоритм здійснює заміну двох ребер з метою збільшення якості запропонованих розв'язків. Важливою перевагою його використання є малий час роботи при обробці циклів для графів великої розмірності.

Розглянемо приклад відновлення спотвореного розв'язку за допомогою алгоритму 2-орт. Нехай, маршрут, одержаний за низького значення початкової температури $\sigma(t_0)$, зображено на рис. 6а. Застосування оптимізаційного алгоритму призводить до вилучення внутрішніх циклів та формування розв'язку, наведеного на рис. 6б. Відновлений у такий спосіб маршрут називають 2-оптимальним.

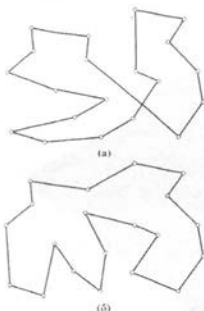


Рис. 6 – Приклад роботи алгоритму 2-орт

Таблиця 1 демонструє здатність оптимізаційного алгоритму до покращення розв'язків, одержаних за різних значень початкової температури для графів, що містять 20 вершин. Отримані результати підтверджують доцільність використання процедури 2-орт для вдосконалення розв'язків, запропонованих нейронними мережами в ситуації «замерзання». Крім того, потужність алгоритму не зазнає особливих змін зі збільшенням розмірності оброблюваних графів.

Таблиця 1.

Придатність алгоритму 2-орт для відновлення спотворених розв'язків (при $|V|=20$)

початкова температура $\sigma(t_0)$	частка покращення маршруту, %
0,06	7,0639
0,08	4,8420
0,1	3,2241
0,12	3,0365
0,14	2,1099
0,16	0,8988
0,18	0,5194
0,2	0,1762

Проблема вибору кількості запасних нейронів набуває вирішального значення в ситуації «замерзання». Збільшуючи рухливість ЕНМ, додані вузли беруть участь у формуванні

топології кластера та дозволяють суттєво збільшити якість одержаних розв'язків (рис. 7).

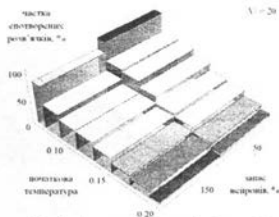


Рис. 7 – Вплив запасних нейронів на якість одержаних маршрутів

Таким чином, розв'язання задачі комівояжера в ситуації «замерзання» вимагає збільшення запасу вузлів до 150%. Непрактичність додаткового нагромадження нейронів обумовлена зростанням обсягу необхідних обчислень та значним ускладненням операції «відсіювання» допоміжних вузлів.

Оптимізація форми початкового кластера еластичної нейронної мережі

Відсутність можливостей аналітичного визначення оптимальної конфігурації розміщення нейронів спонукає дослідників до впровадження різних форм початкового кластера [20]. Відомо, що найбільш поширеним способом є ініціалізація вагових коефіцієнтів вузлів випадковими значеннями. У працях [9, 20] обрано початкове розміщення нейронів у формі кола. Однак, у даній роботі додатково запропоновано спосіб організації початкового кластера вузлів у вигляді логарифмічної спіралі.

Таблиця 2.

Залежність якості запропонованих маршрутів від форми нейронного кластера

конфігурація початкового кластера	середня довжина розв'язків (порівняно з даними бібліотеки TSPLIB), %
випадкова	103,7398
коло	103,0156
логарифмічна спіраль	102,1964

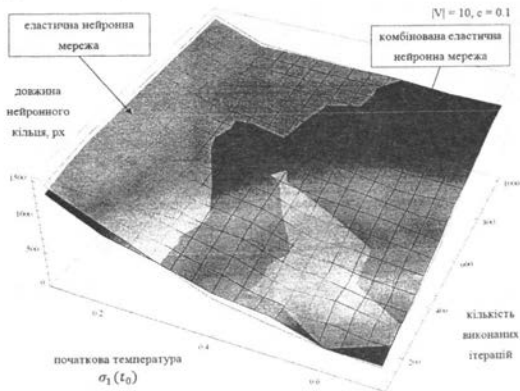


Рис. 8 – Залежність довжини нейронного кільця ЕНМ та КЕНМ від початкової температури та кількості виконаних ітерацій при $c = 0,1$

У таблиці 2 наведено залежність якості запропонованих розв'язків від обраної форми нейронного кластера. Згідно з отриманими результатами, організація вузлів у вигляді спіралі дозволяє відчутно зменшити довжину сформованих циклів. Крім того, відповідні нейронні мережі, виявляють особливу стійкість до ситуації «замерзання» та значно швидше завершують роботу за високих значень $\sigma(t_0)$.

Комбінована еластична нейронна мережа

Утворені за допомогою різних інтегрованих компонентів, гібридні інтелектуальні системи (hybrid intelligent systems) є інструментом потужного штучного інтелекту, призначеного для розв'язання надскладних задач. Подібно до цих громіздких комплексів організовані мережі Ворда, внутрішні шари нейронів яких поділені на окремі блоки. У цьому випадку складність архітектури поєднується з можливістю використання різних передавальних функцій для кожної з груп вузлів, що значно збільшує якість

розв'язання задач прогнозування та розпізнавання образів [24].

У даній статті для розв'язання задачі комбінованого використання комбінованих еластичних нейронних мереж (КЕНМ). Архітектура сформованого комплексу містить два прихованих блоки нейронів, кожен з яких здійснює окремі розрахунки значень вагових коефіцієнтів на основі наданого вхідного вектора.

Виконання кожної ітерації розробленої гібридної системи потребує додаткового налаштування вагових коефіцієнтів вузлів за допомогою формули:

$$\Delta x_{ij} = \frac{c}{1 + s_i} (x_{i1} - x_{i2})$$

де Δx_{ij} – приріст координати нейрона, що входить до складу першого блоку, s_i – середнє зміщення вузлів мережі, x_{i1}, x_{i2} – координати нейронів першої та другої груп відповідно, c – стала, передбачена для налаштування міри взаємодії блоків.

За конструкцією даного комплексу, другий шар нейронів здійснює формування розв'язків за постійного значення температури $\sigma_2 = 0,1$. Ці особливості забезпечують стійкість гібриду до ситуації «замерзання» та стримують його від безладних змін топології за високої величини $\sigma_1(t_0)$. Переконатися в цьому можна за допомогою залежності довжини нейронного кільця від значення початкової температури та кількості виконаних ітерацій (рис. 8).

Причиною появи своєрідного «заглиблення» на характеристиці КЕНМ є хаотичність змін топології комплексу, що спричинює тимчасову затримку його розвитку. Наприклад, встановлення більш «жорсткого» контролю роботи гібриду за допомогою збільшення коефіцієнта взаємодії ϵ у 10 разів призводить до суттєвого скорочення розмірів цієї ділянки (рис. 9).

Залежність для середнього змищення вузлів КЕНМ, наведена на рис. 10, додатково демонструє підвищену надійність роботи комплексу за несприятливих значень його

параметрів. Згідно з експериментальними даними, застосування розробленого гібриду забезпечує збільшення якості розв'язків на 0,9512% порівняно з використанням класичних ЕНМ.

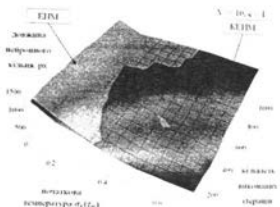


Рис. 9 – Залежність довжини нейронного кільця ЕНМ та КЕНМ від початкової температури та кількості виконаних ітерацій при $\epsilon = 1$

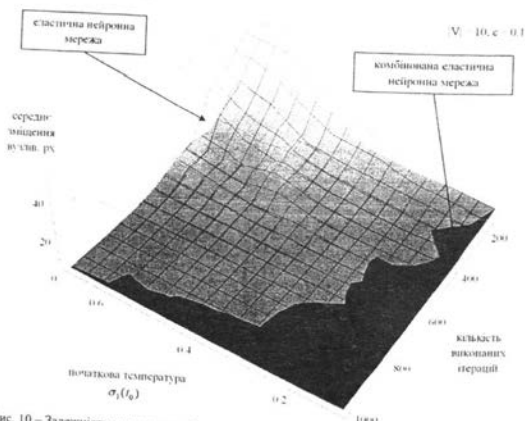


Рис. 10 – Залежність середнього змищення вузлів ЕНМ та КЕНМ від початкової температури та кількості виконаних ітерацій при $\epsilon = 0,1$

**Розв'язання задачі комівояжера з
врахуванням просторової структури графа**

У зв'язку зі значними часовими затратами при знаходженні циклів для графів великої розмірності виникає необхідність застосування ефективних методів декомпозиції, приклади яких наведено в працях [25, 26].

У даній роботі для розв'язання задач великої розмірності запропоновано використання гібридного алгоритму з врахуванням густини розташування вузлів графа. Пошук розв'язку в даному випадку здійснюється послідовним виконанням наступних етапів:

1. Відстеження у вихідному графі кластерів з високою концентрацією вершин та ізольованих точок, що містяться у міжкластерному просторі. Відповідні операції можуть бути виконані за допомогою алгоритмів кластеризації за густиною (density-based clustering). Наприклад, у даній

роботі обрано найбільш поширений спосіб – DBSCAN, основна перевага якого полягає в можливості виділення груп вузлів довільної форми [27].

2. Пошук частинних розв'язків задачі для кожного з утворених кластерів за допомогою ЕНМ або КЕНМ.

3. Зшивання частинних маршрутів у загальний. Для цього виконуються пошук геометричних центрів усіх кластерів та знаходження оптимального шляху між ними й ізольованими точками за допомогою ЕНМ. На наступному кроці, відповідно, визначаються вхідна та вихідна точки для кожної групи вузлів. На основі отриманих даних здійснюється сполучення окремих розв'язків та формування загального маршруту комівояжера.

4. Застосування алгоритмів локальної оптимізації для вдосконалення одержаного розв'язку.

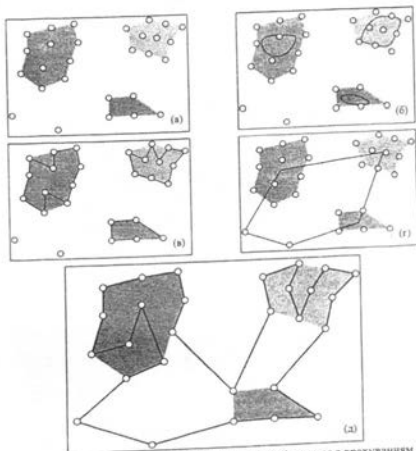


Рис. 11 – Приклад роботи алгоритму розв'язання задачі комівояжера з врахуванням просторової структури графа

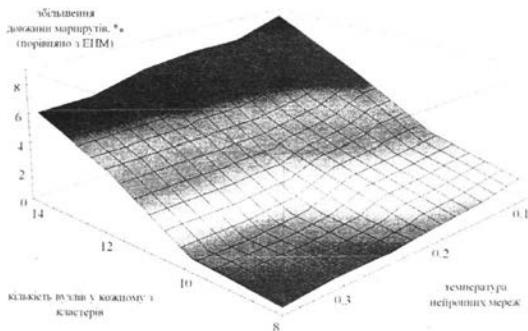


Рис. 12 – Залежність збільшення довжини маршрутів при використанні гібридного алгоритму (порівняно з застосуванням класичних ЕІМ) від кількості вузлів у кластерах та температури ЕІМ

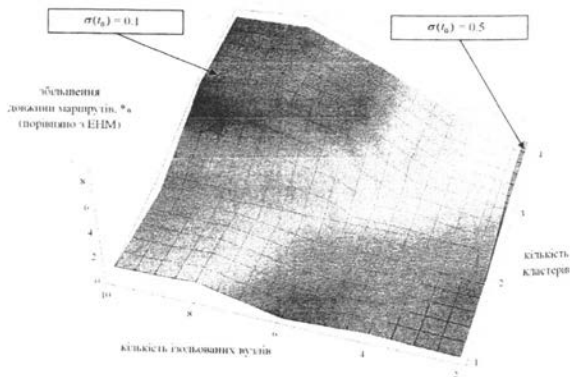


Рис. 13 – Залежність збільшення довжини маршрутів при використанні гібридного алгоритму (порівняно з застосуванням класичних ЕІМ) від кількості ізоляваних вузлів та кількості кластерів у графі для різних значень температури ЕІМ, що визначає порядок зшивання циклів

Розглянемо приклад роботи цього алгоритму. Виконання процедури кластеризації DBSCAN призводить до виділення трьох окремих кластерів, зображених на рис. 11а. Формування частинних розв'язків за допомогою ЕНМ показано на рис. 11б. Отримані цикли (рис. 11в) зшиваються в загальний розв'язок у порядку, заданому на рис. 11г. Знайдений після виконання алгоритму 2-орт маршрут міститься на рис. 11д.

Застосування даного алгоритму дозволяє забезпечити швидке одержання якісних циклів порівняно з використанням класичної ЕНМ. Однак, вибір неправильних значень параметрів нейронних мереж, що здійснюють формування частинних розв'язків, може спричинити катастрофічні порушення маршрутів у зв'язку з накопиченням похибок на кожному етапі роботи алгоритму.

Ця проблема має особливе значення при знаходженні частинних розв'язків для кластерів, що містять велику кількість вузлів. Наприклад, на рис. 12 показано згубний вплив ситуації «замерзання» нейронних мереж на якість розв'язків, одержаних після завершення роботи алгоритму.

При збільшенні кількості кластерів та ігнорованих точок, виділених у графі на етапі кластеризації, зростає важливість налаштування ЕНМ, що визначає порядок сполучення частинних розв'язків. Вплив «замерзання» цієї мережі на якість сформованих циклів продемонстровано на рис. 13.

Згідно з експериментальними даними, застосування даного алгоритму забезпечує одержання розв'язків, що мають на 7 – 10 % меншу якість порівняно з використанням класичних ЕНМ.

Висновки

У статті виконано розробку новітніх систем штучного інтелекту та продемонстровано придатність їх використання для розв'язання задачі комівояжера. Варто зауважити, що значення початкової температури $\sigma(t_0)$ може слугувати критерієм якості, достатні значення якого дозволяють одержати досконалі цикли за тривалий проміжок часу, а менші – призводять до миттєвого формування спотворених маршрутів. Однак, дотримання запропонованих у даній роботі простих рекомендацій дозволяє суттєво збільшити якість таких розв'язків. Експериментальні дослідження розробленої КЕНМ підтверджують її особливу стійкість до ситуації «замерзання» та можливості швидкого

завершення роботи за високих значень $\sigma(t_0)$. Істотно зменшити довжину сформованих циклів дозволяє також організація початкового кластера вузлів ЕНМ у вигляді логарифмічної спіралі. Для розв'язання задач великої розмірності запропоновано використання гібридного алгоритму з врахуванням просторової структури графа.

Подальший напрямок досліджень пов'язаний з реалізацією та дослідженням нових потужних гібридних інтелектуальних систем, здатних до формування вдосконалених маршрутів комівояжера.

Список використаних джерел

1. Supaporn Suwannarongsi, Deacha Puangdownreong, Solving traveling salesman problems via artificial intelligent search techniques, Proceedings of the 11th WSEAS international conference on Artificial Intelligence, Knowledge Engineering and Data Bases, p. 137 – 141, February 22 – 24, 2012, Cambridge, UK.
2. Mudrov V. I., Travelling salesman problem. – Moscow: «Znaniye», 1969. – 62 p. (in Russian).
3. Introduction to Algorithms / [Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein]. – [3rd edition]. – The MIT Press, 2009. – 1292 p.
4. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study / [Applegate D.L., Bixby R.E., Chvatal V., Cook W.J.]. – Princeton University Press, 2006. – 606 p.
5. TSP: Applications of the TSP [Electronic Resource]. – Mode of access: URL: <http://www.tsp.gatech.edu/apps/index.html>.
6. TSP: Concorde TSP Solver [Electronic Resource]. – Mode of access: URL: <http://www.tsp.gatech.edu/concorde/>.
7. Gerhard Reinelt, TSPLIB – A Travelling Salesman Problem Library // ORSA Journal on Computing. – 1991 – Vol. 3, № 4. – P. 376 – 384.
8. Teuvo Kohonen, Self-Organizing Maps. – [3rd edition]. – Springer, 2001. – 501 p.
9. S. Kaski, J. Kangas, T. Kohonen: Bibliography of self-organizing map (SOM) papers: 1981 – 1997. Neural Computing Surveys, 1 (3&4): 1 – 176, 1998.
10. Ageev D.V., Research of application conditions of the elastic network technique at designing of telecommunication systems // Eastern-European Journal of Enterprise

- Technologies. – Kharkiv, 2009 - № 4/11 (40). – P. 18 – 24. (in Russian).
11. Pogorilyy S.D., Potebnia A.V., Investigation and optimization of elastic neural network architecture for solving the travelling salesman problem // Proceedings of the 9th International Conference «Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development (TAAPSD'2012)». (Ukraine, Kyiv, 3 – 7 December, 2012). – P. 236 – 244. (in Ukrainian).
 12. Kutkovetsky V. Ya., Artificial increasing of the ways in classical traveling salesman problem // Black Sea State University publishing. Computer technologies. – 2011 – issue. 148, v. 160. – P. 184 – 187. (in Ukrainian).
 13. Satoshi Uchida, Modification of the Kohonen Algorithm for the Travelling Salesman Problem // Journal of the Korean Physical Society. – 2002 – Vol. 40, № 6. – P. 1086 – 1090.
 14. BITPLANE: Scientific Software [Electronic Resource]. – Mode of access: URL: <http://www.bitplane.com/>.
 15. Nesterenko B.B., Novotarskiy M.A., Artificial neural networks: computations // Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. – V50. – Kyiv: Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 2004. – 408 p. (in Ukrainian).
 16. Hopfield J.J., Tank D.W., «Neural» computation of decisions in optimization problems // Biological Cybernetics. – 1985 – Vol. 52. – P. 141 – 152.
 17. Robert Callan, The Essence of Neural Networks. – Prentice Hall Europe, 1999. – 232 p.
 18. Mandziuk J., Solving the travelling salesman problem with the Hopfield-type neural network // Demonstratio Mathematica. – 1996 – Vol. 29(1). – P. 219 – 231.
 19. Hopfield J.J., Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 1982 – Vol. 79, № 8. – P. 2554 – 2558.
 20. An new self-organizing maps strategy for solving the traveling salesman problem / Yanping Bai, Wendong Zhang, Zhen Jin // Chaos, Solitons & Fractals. – 2006 – Vol. 24, Issue 4. – P. 1082 – 1089.
 21. Physics-based model of the Kohonen ring / [Petia Radeva, Jordi Guerrero, Carmen Molina, Roger Serneels] // Proceedings of SPIE. – 1998 – Vol. 3338 (1). – P. 1345 – 1356.
 22. Decomposition and scanning optimization algorithms for TSP / [Bazylevych R., Prasad B., Kutelmakh R., Bazylevych L.] // Proceedings of the 2008 International Conference on Theoretical and Mathematical Foundations of Computer Science (TMFCS-08), Orlando, Florida, USA, 2008. P. 110 – 116.
 23. Sengoku H., Yoshihara, A Fast TSP solver using GA on GAVA // Proc. Of 3rd Int'l Symp. On Artificial Life and Robotics. – 1998 – Vol. 1. – P. 283 – 288.
 24. WARDSYSTEMS: NeuroShell 2 [Electronic Resource]. – Mode of access: URL: <http://www.wardsystems.com/neuroshell2.asp/>.
 25. A Kohonen-like decomposition method for the Euclidean traveling salesman problem – KNIES_DECOMPOSE / Necati Aras, I. Kuban Altinel, John Oommen // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2003 – P. 869 – 890.
 26. Clustering Strategy to Euclidean TSP Hamilton Path Role in Tour Construction / Abdulah Fajar, Nur Azman Abu, Nunna Suryana Herman // Second International Conference on Computer Modeling and Simulation. ICCMS '10. – 2010 – P. 508 – 512.
 27. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise / [Martin Ester, Hans-peter Kriegel, Jörg S. Xiao, Wei Xu] // Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. – 1996 – P. 226 – 231.

Надійшла до редколегії 03.12.2012

УДК 004.655

Поляков С.А.¹, к.ф.-м.н., м.н.с.
Сільвейструк Л.М.², к.ф.-м.н., н.с.
Шишацька О.В.³**Уніфікована модель даних на основі
підходу «сутність-зв'язок»**

Метою статті є класифікація та огляд моделей даних, спираючись на єдиний концептуальний базис – колекції та відношення на колекціях. Побудовані реляційні дерева, які є композицією бінарних зв'язків.

Ключові слова: модель даних, колекція, мультимножина, реляційне дерево.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: polyakov@unicyb.kiev.ua
² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: slm-klm@ukr.net
³ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: olena74@i.ua

S.A. Polyakov¹, PhD,
L.M. Silvestruk², PhD,
O.V. Shyshats'ka³, engineer.**Data model is unified on the base approach
model «entity-relationship»**

The purpose of the article is classification and review of data models using collections and relations on the collections. Relational trees has been constructed which are the composition of binary relations.

Key Words: data model, collection, multiset, bag relational tree.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: polyakov@unicyb.kiev.ua
² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: slm-klm@ukr.net
³ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: olena74@i.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Основні поняття

Модель даних відноситься до фундаментальних понять в теорії баз даних. Це поняття згадувалось ще в статті Е. Кодда, присвяченій реляційним базам даних [6], але без деталізації. Пізніше Кодда розглянув це поняття більш детально в статті "Моделі даних в керуванні базами даних" в 1981 р. [7].

Далі модель даних буде задаватися через – тип атомарних даних та тип сукупностей даних;

– тип допустимих зв'язків на сукупностях даних;

Атомарні дані об'єднуються в рядки. Кожний рядок може розглядатися як множина пар (ім'я, значення) або як функція. Однотипні рядки групуються у множини, мультимножини та послідовності. Для узагальненої назви таких сукупностей будемо використовувати термін "колекція". Тобто колекція відіграє роль метатипу, значеннями або спеціалізаціями якого виступають множини, мультимножини та послідовності.

Перейдемо до зв'язків між колекціями. Зв'язки будуть задаватися за допомогою

відношень. Для множин відношення розуміються як підмножини декартового добутку множин.

Для послідовностей та мультимножин такий спосіб не підходить внаслідок наявності дублікатів. Наприклад, нехай є дві мультимножини $\{a, a\}$ та $\{b, b\}$. Тоді їх декартовим з'єднанням буде мультимножина $\{(a, b), (a, b), (a, b), (a, b)\}$. В ній відсутня інформація про те, які саме екземпляри елементів a та b входять до декартового з'єднання. Тому відношення, яке складається з першого екземпляру елемента a і першого екземпляру елемента b , виглядає так само, як і відношення, яке складається з другого екземпляру елемента a і другого екземпляру елемента b , а саме $\{(a, b)\}$. Як буде показано нижче, ця інформація є важливою при маніпулюванні з відношеннями. Така ж сама ситуація має місце і для послідовностей.

Введемо операцію розширеного декартового з'єднання. Для наведених вище мультимножин, розширеним декартовим з'єднанням буде множина вигляду $\{((a, 1), (b, 1)), ((a, 1), (b, 2)), ((a, 2), (b, 1)), ((a, 2), (b, 2))\}$

, другий компонент елементів якої враховує, який саме екземпляр входить до елементів з'єднання. Тоді відношення, яке складається з першого екземпляру елемента a і першого екземпляру елемента b , задається як $\{(a,1),(b,1)\}$, а відношення, яке складається з другого екземпляру елемента a і другого екземпляру елемента b задається як $\{(a,2),(b,2)\}$. Для послідовностей будемо враховувати місце (позицію), яке займає елемент в послідовності. Наприклад для послідовностей (a,b,a) і (c) розширене декартове з'єднання $\{(a,1),(c,1)\}, \{(b,2),(c,1)\}, \{(a,3),(c,1)\}$ означає, що в парі $\{(a,1),(c,1)\}$ елемент a знаходиться на першій позиції в вихідній послідовності, а в парі $\{(a,3),(c,1)\}$ елемент a знаходиться на третій позиції в вихідній множині. На перший

погляд може здатися, що не має значення, який саме екземпляр елемента мультимножини використовується, або з якої позиції в вихідній послідовності він береться. Насправді, це може не мати значення, коли колекція використовується тільки в одному відношенні. Якщо ж деяка колекція бере участь у кількох відношеннях, то вміння розрізняти окремі екземпляри одного і того ж елементу має принципове значення. Наприклад, нехай є мультимножина $\{a,a,b,c\}$, на якій задані відношення $\{(b,1),(a,1)\}, \{(a,1),(c,1)\}$ та $\{(b,1),(a,1)\}, \{(a,2),(c,1)\}$. В транзитивному замиканні першого відношення з'явиться новий елемент $\{(b,1),(c,1)\}$, в той час як в транзитивному замиканні другого відношення цей елемент буде відсутній, див. рис. 1.

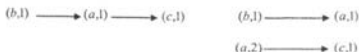


Рис. 1. Приклад відношень на мультимножинах

Перейдемо до зв'язків, під якими будемо розуміти відношення з накладеними на них обмеженнями спеціального виду. Зв'язок виду $1-1$ (один до одного) є бінарним відношенням на колекціях A та B , для якого кожний елемент колекції A знаходиться у відношенні рівно з одним елементом колекції B та навпаки. Таке відношення задає бієкцію між A та B .

Зв'язок виду $1-m$ (один до багатьох) є бінарним відношенням на колекціях A та B , для якого кожний елемент колекції A знаходиться у відношенні з одним та більше елементами колекції B (але кількість таких елементів скінченна), а кожний елемент колекції B знаходиться у відношенні рівно з одним елементом колекції A . Такий зв'язок задає сюр'єктивну функцію, яка відображає B на A .

Зв'язок виду $1-0..m$ є бінарним відношенням на колекціях A та B , для якого кожний елемент колекції A знаходиться у відношенні з довільною (скінченною) кількістю елементів колекції B , в тому числі нульовою, а кожний елемент колекції B знаходиться у відношенні рівно з одним елементом колекції A . Такий зв'язок задає функцію, яка

відображає B в A та, взагалі кажучи, не є сюр'єкцією.

Зв'язок виду $0..1-0..m$ є бінарним відношенням на колекціях A та B , для якого кожний елемент колекції A знаходиться у відношенні з довільною (скінченною) кількістю елементів колекції B , в тому числі нульовою, а кожний елемент колекції B знаходиться у відношенні не більш ніж з одним елементом колекції A . Такий зв'язок задає часткову функцію, яка відображає B в A .

Поряд з бінарними зв'язками, будуть використовуватись і n -арні зв'язки виду один до багатьох, $n=3,4,\dots$. Під n -арним зв'язком виду один до багатьох, будемо розуміти множину $n-1$ бінарних відношень виду один до багатьох $\{C_0R_1C_1,C_0R_2C_2,\dots,C_0R_{n-1}C_{n-1}\}$, в яких колекція C_0 однакова для всіх зв'язків.

Насправді існує набагато більше видів зв'язків (дивись, наприклад, [4]). Тут розглянуті лише ті види, які будуть використовуватись для характеристики моделей даних.

Для характеристики моделей даних потрібно буде розглядати не окремі бінарні відношення, а сукупності таких відношень, які утворюють спеціальні ієрархічні структури даних, які будемо називати деревами відношень.

(або реляційними деревами). Поняття реляційного дерева введемо індуктивним чином.

Бінарне відношення виду один до одного або один до багатьох C_1RC_2 є реляційним деревом з коренем C_1RC_2 та кореневою колекцією C_1 .

Якщо $RT_1, RT_2, \dots, RT_n$ – реляційні дерева з спільною кореневою колекцією C_1 , а C_0RC_1 – бінарне відношення виду один до одного або один до багатьох і колекція C_0 не входить до будь-якого дерева $RT_1, RT_2, \dots, RT_n$, то $(C_0RC_1, (RT_1, RT_2, \dots, RT_n))$ є реляційним деревом з коренем C_0RC_1 та кореневою колекцією C_0 .

В реляційному дереві елементи колекцій, в свою чергу, утворюють дерева, дуги яких задаються відношеннями реляційного дерева. Будемо вважати, що дуги є орієнтованими, і проходять від лівого елемента пари, яка належить відношенню, до правого. Розглянемо тепер випадок бінарного відношення C_0RC_0 виду один до багатьох, заданого на одній і той же самій колекції C_0 . Якщо граф, який відповідає цьому відношенню, є ациклічним і кожна вершина має не більше ніж одну вхідну дугу, то він утворює ліс на елементах колекції C_0 . Якщо ж існує рівно одна вершина, яка не має вхідних дуг, то це буде дерево.

Моделі даних першого рівня (табличні моделі)

Розглянемо моделі, які взагалі не містять відношень. Такі моделі назвемо моделями першого рівня. Вони складаються тільки з колекцій однотипних рядків та операцій на колекціях. Нехай рядки визначені тільки на атомарних даних, тобто значеннями атрибутів виступають тільки атомарні дані.

Якщо в якості колекції виступає множина, то отримаємо реляції (таблиці) з реляційної алгебри Кодда. Якщо в якості колекції виступає мультимножина, то отримаємо таблиці, які використовуються в реляційних базах даних. Якщо в якості колекції виступає послідовність, то така модель задає курсори реляційних баз даних.

Моделі даних другого рівня (багаторівневі моделі)

Перейдемо до моделей, в яких присутні зв'язки виду один до одного. Рядки, як і раніше, містять тільки атомарні дані. Така модель має одну досить цікаву інтерпретацію. А саме, нехай потрібно працювати з рядками, що мають багаторівневі заголовки, наприклад, такими, які зображені в табл. 1 і які містять інформацію про людину.

Таблиця 1

Приклад багаторівневої таблиці

Ідентифікатор	ПІБ			Адреса				Рік народження
	Прізвище	Ім'я	По батькові	Місто	Вулиця	Дім	Кв.	

Така складна таблиця, очевидно, може бути зображена у звичайну, однорівневу, таблицю. Але при цьому буде втрачена інформація про логічні групи атрибутів, що ускладнює розуміння моделі бази даних і може привести до помилок при маніпулюванні з даними. В той же час таблиця може бути розділена на три окремі частини, між якими встановлюється зв'язок один до одного, як зображено на рис. 2. Такі багаторівневі таблиці складаються з сукупності багаторівневих рядків, кожний з яких, в свою

чергу, складається з одного рядка першого рівня (кореневого рядка) та довільної кількості рядків другого рівня. В свою чергу, рядки другого рівня можуть містити в собі рядки третього рівня і так далі. Кожний такий багаторівневий рядок у графічному вигляді зображається як дерево, вершини якого є рядками першого, другого та ін. рівнів, а іменовані дуги задають зв'язки між рядками. Сукупність багаторівневих рядків (багаторівнева таблиця) утворює ліс.



Рис. 2. Приклад зв'язку типу один до одного 1–1

В якості типу колекції може виступати множина або мультимножина. Аналогічно моделям першого рівня послідовність таких рядків може розглядатись як аналог курсору для випадку багаторівневих таблиць.

Моделі даних третього рівня (ієрархічні моделі даних)

Перейдемо до більш відомого типу моделей даних – до ієрархічних моделей. Історично цей тип баз даних з'явився першим. В ієрархічній базі даних в якості елементів колекції використовуються рядки з атомарними значеннями, а зв'язки мають вид один до багатьох. Причому зв'язки мають утворювати реляційне дерево.

Прикладом ієрархічної моделі даних є квазіреляції [1]. На неформальному рівні ієрархічна структура може бути представлена як таблиця, в яку вкладаються інші таблиці. Більш точно така структура задається через ієрархічні

таблиці, які визначаються рекурсивним чином як пара (стан, схема). Спочатку задамо ієрархічну схему.

1) Множина атрибутів $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ є ієрархічною схемою S листового типу.

2) Множина виду $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, де h_i є атрибутом, який будемо називати листовим, або паркою (A_i, s_i) , A_i – атрибут, а s_i – ієрархічна схема, є ієрархічною схемою.

Ієрархічним рядком назовемо рядок, значеннями будь-якого атрибуту в якому є або атомарне дане, або множина ієрархічних рядків.

Будемо говорити, що ієрархічний рядок відповідає ієрархічній схемі $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, якщо множина атрибутів рядка співпадає з множиною атрибутів схеми, а значеннями атрибутів в ньому виступають або атомарні дані для листових атрибутів, або множини (можливо порожні) рядків для нелістових атрибутів, які відповідають підсхемі даного атрибуту. Порожня множина відповідає будь-якій схемі.

Станом ієрархічної таблиці схеми S назвемо множину ієрархічних рядків, які відповідають даній схемі.

Аналогічним чином можуть бути визначені ієрархічні таблиці на мультимножинах.

Моделі даних четвертого рівня (мережні моделі даних)

Мережна модель даних з'явилась майже в той же самий період, що і ієрархічна модель даних. В жовтні 1969 р. комітет DBTS (Data Base Task Group) більш відомий під своєю первісною назвою CODASYL (Conference on Data Systems Languages) опублікував специфікацію мови для мережної моделі даних. В цій моделі в якості колекцій виступають послідовності рядків, значеннями атрибутів яких можуть бути як атомарні дані, так і більш складні типи даних, наприклад, аналоги масивів. Між колекціями задається довільна кількість n -арних зв'язків виду один до багатьох, точніше кажучи, зв'язків

виду $1-0..M$. Для кожного зв'язку існує один тип колекції, який називається власником, і один або більше типів колекцій, які називаються членами зв'язку. Особливим випадком є зв'язок з відсутнім власником. Вважається, що власником такого типу зв'язку є віртуальна колекція, яка називається "Система". Такий зв'язок по суті дозволяє задавати колекції, на яких не задано жодного зв'язку.

Зв'язки можуть задаватися між довільними колекціями, за винятком зв'язків на одній і тій самій колекції, тобто петлі не є допустимими. В той же час інші види циклів можуть задаватися. Зв'язок, разом з типами колекцій, на яких він заданий, називається набором (set). Зв'язок без власника називається сингулярним набором.

Класифікація моделей даних

Наприкінці розділу наведемо таблицю, яка містить перелік розглянутих моделей даних і їх характеристики.

Таблиця 2

Класифікаційна таблиця моделей даних

Назва	Тип колекцій	Тип зв'язку	Множина операцій
Табличні моделі			
Реляційна	Множина	відсутній	реляційна алгебра
комерційні СУД	мультимножина	відсутній	SQL алгебра
Курсори	Послідовність	відсутній	навігація по курсору
Багаторівневі таблиці			
Багаторівневі таблиці	Послідовність	1-1	
Багаторівневі таблиці	Множина	1-1	
Багаторівневі таблиці	мультимножина	1-1	
Ієрархічні моделі			
Ієрархічна	Послідовність	1-0..M, утворює реляційне дерево	операції мови DL/1 СУБД IMS
Ієрархічні таблиці	Множина	1-0..M, утворює реляційне дерево	
Ієрархічні таблиці	мультимножина	1-0..M, утворює реляційне дерево	
Рекурсивні таблиці	Послідовність	1-0..M на одній і той самій колекції	
Рекурсивні таблиці	Множина	1-0..M на одній і той самій колекції	
Рекурсивні таблиці	мультимножина	1-0..M на одній і той самій колекції	
Мережні моделі			
КОДАСИЛ	Послідовність	1-0..M	навігаційні операції КОДАСИЛ
	Множина	1-0..M	
	мультимножина	1-0..M	

Висновки

Спираючись на поняття колекцій рядків та зв'язків між рядками, побудована класифікаційна схема, в якукладаються широко відомі моделі даних, такі, як реляційна, ієрархічна, квазіреляційна та мережна. Для класифікації моделей даних недостатньо використовувати тільки бінарні зв'язки між колекціями, а необхідно розглядати композиції об'єднання бінарних зв'язків у більш складні структури, які, по суті, є n -арними зв'язками спеціального вигляду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Basarab I.A. Composition database / I. A. Basarab, M. S. Nikitchenko, V. N. Redko. – K.:Lubid, 1992. – 192 p. (in Ukrainian).
2. Martin J. Database organization in computer systems / J. Martin. – M.: Mir, 1980. – 660 p. (in Russian).
3. Redko V.N. Relational data base: table algebras and family of the SQL languages / V.N.Redko, U.I.Brona, D.B.Buy, S.A.Polyakov. – Kiev: Publisher "Academperiodica", 2001. – 196 p. (in Ukrainian).
4. Silvestruk L. M. Formalization of model „entity-relationship”: entity types, relationship types

and their constraints: thesis for a candidate degree of Physics and Mathematics: Speciality 01.05.03 – Mathematical and software support of computers and systems. – National Taras Shevchenko University of Kyiv. – Kyiv, 2009. – 173 p. (in Ukrainian).

5. Data language CODASYL. – M.:Statistika, 1981. – 183 p. (in Russian).

6. Codd E.F. A relational model of data for large shared data banks / E. F. Codd //Comm. ACM. – V. 13, N 6. – 1970. – P. 377-387.

7. Codd E.F. Data Models in Database Management / E. F. Codd. Proc. Workshop in Data Abstraction, Databases, and Conceptual Modelling (Michael L. Brodie and Stephen N. Zilles, eds.), Pingree Park, Colo. (June 1980); ACM SIGART Newsletter No. 74 (January 1981); ACM SIGMOD Record 11(2), February 1981; ACM SIGPLAN Notices 16(1), January 1981.

8. Meltz D. An Introduction to IMS: Your Complete Guide to IBM's Information Management System / D. Meltz, R. Long, M. Harrington, R. Hain, G. Nicholls. – IBM Press, 2004. – 592 p.

Надійшло до редколегії 07.12.12

УДК 519.21

Савкіна М. Ю.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

Коваріаційна матриця оцінки параметрів моделі сплайнової регресії з обмеженнями на параметри у вигляді рівностей

Знайдено в явному вигляді коваріаційну матрицю оцінки параметрів моделі сплайнової регресії з обмеженнями на параметри у вигляді рівностей, коли функція регресії – лінійний сплайн на відрізку $[0,1]$ з одним вузлом. Розташування вузла відоме; обмеження на параметри у першому випадку – одне лінійне рівняння, в другому – два лінійні рівняння.

Ключові слова: модель сплайнової регресії, нормалізований B-сплайн, коваріаційна матриця.

¹ Інститут математики НАН України, 01601, м.Київ, вул.Терещенківська, 3, e-mail:marta@imath.kiev.ua

Статтю представив д.т.н. проф. Кулін В.І.

Розглянемо модель регресії

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – незалежні у сукупності нормально розподілені випадкові величини з $E\varepsilon_i = 0$ та $D\varepsilon_i = \sigma^2$, а функцію регресії можна подати у вигляді лінійної комбінації трьох базисних функцій

$$f(x) = b_0 B_0(x) + b_1 B_1(x) + b_2 B_2(x). \quad (2)$$

b_0, b_1, b_2 – невідомі параметри, які підлягають оцінюванню.

Для оцінювання параметрів b_0, b_1, b_2 скористаємося методом найменших квадратів (МНК), який полягає в мінімізації суми $\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2$ відносно b_0, b_1, b_2 .

Позначимо

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} B_0(x_0) & B_1(x_0) & B_2(x_0) \\ B_0(x_1) & B_1(x_1) & B_2(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0(x_n) & B_1(x_n) & B_2(x_n) \end{pmatrix}$$

Тоді оцінка МНК $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ параметрів b_0, b_1, b_2 матиме вигляд [1]

$$(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2)^T = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

М. Ю. Савкіна¹, cand. of m.-ph. science

Covariance matrix of equality constrained estimation of parameters in spline regression model

Covariance matrix of equality constrained estimation of parameters of spline regression model is found in explicit form, where function of regression is linear spline on segment $[0,1]$ with one knot point. The location of knot point is known; parameter's constraints are one linear equation in first case and two linear equations in second one.

Key Words: splineregression model, normalized B-spline, covariance matrix.

¹ Institute of mathematics of NASU, 01601, Kyiv, Tereshchenkovskaya street, 3, e-mail:marta@imath.kiev.ua

а її матриця коваріацій -

$$\text{cov}[(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2)^T] = \sigma^2 (X^T X)^{-1}.$$

Припустимо тепер, що невідомі параметри задовільняють співвідношенням

$$b_0 + r_1 b_1 + r_2 b_2 = r_3. \quad (3)$$

або

$$\begin{cases} b_0 + r_{11} b_1 + r_{12} b_2 = r_{13} \\ b_0 + r_{21} b_1 + r_{22} b_2 = r_{23} \\ r_{11} r_{22} \neq r_{12} r_{21} \end{cases} \quad (4)$$

Знайдемо матриці коваріацій

$$\text{cov}[(\hat{b}_0^{(3)}, \hat{b}_1^{(3)}, \hat{b}_2^{(3)})^T],$$

$$\text{cov}[(\hat{b}_0^{(4)}, \hat{b}_1^{(4)}, \hat{b}_2^{(4)})^T],$$

де $(\hat{b}_0^{(3)}, \hat{b}_1^{(3)}, \hat{b}_2^{(3)})^T$ та $(\hat{b}_0^{(4)}, \hat{b}_1^{(4)}, \hat{b}_2^{(4)})^T$ – оцінки вектора (b_0, b_1, b_2) , що мінімізують суму $\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2$ при обмеженнях (3) та (4) відповідно.

Позначимо елементи матриць $X^T X$ та $(X^T X)^{-1}$ наступним чином

$$X^T X = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_4 & \bar{a}_6 \\ \bar{a}_4 & \bar{a}_2 & \bar{a}_5 \\ \bar{a}_6 & \bar{a}_5 & \bar{a}_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Нехай

$$k_1 = d^2 \sigma^{-2} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 r_1^2 + \bar{a}_3 r_2^2 + 2\bar{a}_4 r_1 + 2\bar{a}_6 r_2 + 2\bar{a}_5 r_1 r_2),$$

де

$$d = a_1 a_2 a_3 + 2a_4 a_5 a_6 - a_2 a_6^2 - a_1 a_5^2 - a_3 a_4^2;$$

$$k_2 = [(r_{12} r_{21} - r_{11} r_{22})^2 a_1 + (r_{11} - r_{21})^2 a_3 + (r_{12} - r_{22})^2 a_2 - 2(r_{11} - r_{21})(r_{12} - r_{22})a_5 + 2(r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21})(r_{12} - r_{22})a_4 + 2(r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21})(r_{21} - r_{11})a_6] / \sigma^2.$$

Тоді

$$\text{cov} \left[\left(\hat{b}_0^{(3)}, \hat{b}_1^{(3)}, \hat{b}_2^{(3)} \right)^T \right] =$$

$$= k_1^{-1} \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} & \theta_{31} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{32} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де

$$\theta_{11} = r_2^2 a_2 + r_1^2 a_3 - 2r_1 r_2 a_5,$$

$$\theta_{22} = r_2^2 a_1 - 2r_2 a_6 + a_3,$$

$$\theta_{33} = r_1^2 a_1 - 2r_1 a_4 + a_2,$$

$$\theta_{21} = -r_2^2 a_4 - r_2 a_5 - r_1 a_3 + r_1 r_2 a_6,$$

$$\theta_{31} = -r_2 a_2 + r_1 a_5 + r_1 r_2 a_4 - r_1^2 a_6,$$

$$\theta_{32} = r_2 a_4 - r_1 r_2 a_1 - r_1 a_6 - a_5;$$

$$\text{cov} \left[\left(\hat{b}_0^{(4)}, \hat{b}_1^{(4)}, \hat{b}_2^{(4)} \right)^T \right] =$$

$$= k_2^{-1} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \mu_{31} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{32} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

де

$$\mu_{11} = (r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21})^2,$$

$$\mu_{22} = (r_{12} - r_{22})^2, \quad \mu_{33} = (r_{11} - r_{21})^2,$$

$$\mu_{21} = (r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21})(r_{12} - r_{22}),$$

$$\mu_{31} = -(r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21})(r_{11} - r_{21}),$$

$$\mu_{32} = -(r_{12} - r_{22})(r_{11} - r_{21}).$$

Доведення. Згідно з [1] оцінка, що мінімізує суму квадратів відхилень при обмеженнях на параметри у вигляді рівностей, для регресії (1),(2) при обмеженнях (3) матиме вигляд

$$\left(\hat{b}_0^{(3)}, \hat{b}_1^{(3)}, \hat{b}_2^{(3)} \right)^T = \left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2 \right)^T +$$

$$+ (X^T X)^{-1} R_1^T S_1 \left(r_3 - R_1 (\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2)^T \right).$$

де

$$R_1 = (1, r_1, r_2),$$

$$S_1 = [R_1 (X^T X)^{-1} R_1^T]^{-1}, \quad (7)$$

а її матриця коваріацій -

$$\text{cov} \left[\left(\hat{b}_0^{(3)}, \hat{b}_1^{(3)}, \hat{b}_2^{(3)} \right)^T \right] =$$

$$= \sigma^2 (X^T X)^{-1} [I - R_1^T S_1 R_1 (X^T X)^{-1}], \quad (8)$$

I - одинична матриця.

З (7) маємо

$$S_1 = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 r_1^2 + \bar{a}_3 r_2^2 + 2\bar{a}_4 r_1 + 2\bar{a}_6 r_2 + 2\bar{a}_5 r_1 r_2)^{-1}.$$

З рівності (8) після низки перетворень отримаємо

$$\text{cov} \left[\left(\hat{b}_0^{(3)}, \hat{b}_1^{(3)}, \hat{b}_2^{(3)} \right)^T \right] =$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{21} & c_{22} & c_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де

$$c_{11} = S_1 (r_1^2 (\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_4^2) + r_2^2 (\bar{a}_1 \bar{a}_3 - \bar{a}_6^2) - 2r_1 r_2 (\bar{a}_4 \bar{a}_6 - \bar{a}_1 \bar{a}_5)),$$

$$c_{21} = S_1 (r_1^2 (\bar{a}_3 \bar{a}_4 - \bar{a}_5 \bar{a}_6) - r_1 (\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_4^2) + r_2 (\bar{a}_4 \bar{a}_6 - \bar{a}_1 \bar{a}_5) + r_1 r_2 (\bar{a}_4 \bar{a}_5 - \bar{a}_2 \bar{a}_6)),$$

$$c_{31} = S_1 (r_1^2 (\bar{a}_2 \bar{a}_6 - \bar{a}_4 \bar{a}_5) + r_1 (\bar{a}_4 \bar{a}_6 - \bar{a}_1 \bar{a}_5) - r_2 (\bar{a}_1 \bar{a}_3 - \bar{a}_6^2) - r_1 r_2 (\bar{a}_3 \bar{a}_4 - \bar{a}_5 \bar{a}_6)).$$

$$c_{22} = S_1(r_2^2(\bar{a}_2\bar{a}_3 - \bar{a}_5^2) + 2r_2(\bar{a}_2\bar{a}_6 - \bar{a}_4\bar{a}_5) + (\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4^2)),$$

$$c_{32} = S_1(r_1(\bar{a}_4\bar{a}_5 - \bar{a}_2\bar{a}_6) - r_2(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_5\bar{a}_6) - r_1r_2(\bar{a}_2\bar{a}_3 - \bar{a}_5^2) - (\bar{a}_4\bar{a}_6 - \bar{a}_1\bar{a}_5)),$$

$$c_{33} = S_1(r_1^2(\bar{a}_2\bar{a}_3 - \bar{a}_5^2) + 2r_1(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_5\bar{a}_6) + (\bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_6^2)).$$

Враховуючи співвідношення між елементами матриць $(X^T X)^{-1}$ та $X^T X$:

$$d(\bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_6^2) = a_2, \quad d(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4^2) = a_3,$$

$$d(\bar{a}_2\bar{a}_3 - \bar{a}_5^2) = a_1, \quad d(\bar{a}_4\bar{a}_6 - \bar{a}_1\bar{a}_5) = a_5,$$

$$d(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_5\bar{a}_6) = -a_4, \quad d(\bar{a}_2\bar{a}_6 - \bar{a}_4\bar{a}_5) = -a_6,$$

з (9) отримаємо (5).

Далі, згідно з [1] оцінка, що мінімізує суму квадратів відхилень при обмеженнях на параметри у вигляді рівностей, для регресії (1), (2) при обмеженнях (4) матиме вигляд

$$(\hat{b}_0^{(4)}, \hat{b}_1^{(4)}, \hat{b}_2^{(4)})^T = (\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2)^T + (X^T X)^{-1} R_2^T S_2 (r - R_2(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2)^T),$$

де

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & r_{11} & r_{12} \\ 1 & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = [R_2(X^T X)^{-1} R_2^T]^{-1}, \quad (10)$$

а її матриця коваріацій -

$$\text{cov}[(\hat{b}_0^{(4)}, \hat{b}_1^{(4)}, \hat{b}_2^{(4)})^T] = \sigma^2 (X^T X)^{-1} [I - R_2^T S_2 R_2 (X^T X)^{-1}]. \quad (11)$$

З (10) маємо

$$S_2 = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$s_{11} = r_{21}^2 \bar{a}_2 + r_{22}^2 \bar{a}_3 + 2r_{21}r_{22} \bar{a}_5 + 2r_{21} \bar{a}_4 + 2r_{22} \bar{a}_6 + \bar{a}_1,$$

$$s_{12} = -(r_{11}r_{21} \bar{a}_2 + r_{11}r_{22} \bar{a}_5 + r_{12}r_{21} \bar{a}_5 + r_{12}r_{22} \bar{a}_3 + r_{11} \bar{a}_4 + r_{12} \bar{a}_6 + r_{21} \bar{a}_4 + r_{22} \bar{a}_6 + \bar{a}_1),$$

$$s_{21} = s_{12},$$

$$s_{22} = r_{11}^2 \bar{a}_2 + r_{12}^2 \bar{a}_3 + 2r_{11}r_{12} \bar{a}_5 + 2r_{11} \bar{a}_4 + 2r_{12} \bar{a}_6 + \bar{a}_1.$$

$$\Delta = \frac{1}{d} ((r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22})^2 a_1 + (r_{11} - r_{21})^2 a_3 + (r_{12} - r_{22})^2 a_2 - 2(r_{11} - r_{21})(r_{12} - r_{22})a_5 - 2(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})(r_{12} - r_{22})a_4 + 2(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})(r_{21} - r_{11})a_6).$$

Далі,

$$I - R_2^T S_2 R_2 (X^T X)^{-1} = \frac{1}{d\Delta} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$v_{11} = (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})Z_1,$$

$$Z_1 = (r_{12} - r_{22})a_4 - (r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22})a_1 - (r_{11} - r_{21})a_6,$$

$$v_{12} = (r_{12} - r_{22})Z_1,$$

$$v_{13} = (r_{11} - r_{21})Z_1,$$

$$v_{21} = (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})Z_2,$$

$$Z_2 = (r_{22} - r_{12})a_2 + (r_{11} - r_{21})a_5 - (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})a_4,$$

$$v_{22} = (r_{22} - r_{12})Z_2,$$

$$v_{23} = (r_{11} - r_{21})Z_2,$$

$$v_{31} = -(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})Z_3,$$

$$Z_3 = (r_{11} - r_{21})a_3 - (r_{12} - r_{22})a_5 + (r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22})a_6,$$

$$v_{32} = -(r_{12} - r_{22})Z_3,$$

$$v_{33} = (r_{11} - r_{21})Z_3.$$

Насамкінець,

$$(X^T X)^{-1} (I - R_2^T S_2 R_2 (X^T X)^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{d\Delta} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{11} & \hat{\mu}_{12} & \hat{\mu}_{13} \\ \hat{\mu}_{21} & \hat{\mu}_{22} & \hat{\mu}_{23} \\ \hat{\mu}_{31} & \hat{\mu}_{32} & \hat{\mu}_{33} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{11} &= (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})(\bar{a}_1Z_1 - \bar{a}_4Z_2 - \bar{a}_6Z_3), \\ \hat{\mu}_{12} &= (r_{12} - r_{22})(\bar{a}_1Z_1 - \bar{a}_4Z_2 - \bar{a}_6Z_3), \\ \hat{\mu}_{13} &= -(r_{11} - r_{21})(\bar{a}_1Z_1 - \bar{a}_4Z_2 - \bar{a}_6Z_3), \\ \hat{\mu}_{21} &= (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})(\bar{a}_4Z_1 - \bar{a}_2Z_2 - \bar{a}_5Z_3), \\ \hat{\mu}_{22} &= (r_{12} - r_{22})(\bar{a}_4Z_1 - \bar{a}_2Z_2 - \bar{a}_5Z_3), \\ \hat{\mu}_{23} &= -(r_{11} - r_{21})(\bar{a}_4Z_1 - \bar{a}_2Z_2 - \bar{a}_5Z_3), \\ \hat{\mu}_{31} &= (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})(\bar{a}_6Z_1 - \bar{a}_5Z_2 - \bar{a}_3Z_3), \\ \hat{\mu}_{32} &= (r_{12} - r_{22})(\bar{a}_6Z_1 - \bar{a}_5Z_2 - \bar{a}_3Z_3), \\ \hat{\mu}_{33} &= -(r_{11} - r_{21})(\bar{a}_6Z_1 - \bar{a}_5Z_2 - \bar{a}_3Z_3). \end{aligned}$$

Помітимо, що

$$\begin{aligned} \bar{a}_1Z_1 - \bar{a}_4Z_2 - \bar{a}_6Z_3 &= r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}, \\ \bar{a}_4Z_1 - \bar{a}_2Z_2 - \bar{a}_5Z_3 &= r_{12} - r_{22}, \\ \bar{a}_6Z_1 - \bar{a}_5Z_2 - \bar{a}_3Z_3 &= r_{11} - r_{21}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{11} &= \mu_{11}, & \hat{\mu}_{22} &= \mu_{22}, & \hat{\mu}_{33} &= \mu_{33}, \\ \hat{\mu}_{12} &= \hat{\mu}_{21} = \mu_{21}, & \hat{\mu}_{13} &= \hat{\mu}_{31} = \mu_{31}, \\ \hat{\mu}_{23} &= \hat{\mu}_{32} = \mu_{32}. \end{aligned}$$

тобто з (11) та (12) отримаємо (6).

Теорему доведено.

У випадках, коли невідомі параметри задовільняють одному з співвідношень

$$r_1b_1 + r_2b_2 = r_3, \quad (3')$$

$$\begin{cases} b_0 + r_{11}b_1 + r_{12}b_2 = r_{13}, \\ r_{21}b_1 + r_{22}b_2 = r_{23}, \end{cases} \quad (4')$$

$$\begin{cases} r_{11}b_1 + r_{12}b_2 = r_{13}, \\ r_{21}b_1 + r_{22}b_2 = r_{23}, \\ r_{11}r_{22} \neq r_{12}r_{21}, \end{cases} \quad (4'')$$

матриці коваріацій відповідних оцінок будуть

$$\text{cov} \left[\left(\hat{b}_0^{(3')}, \hat{b}_1^{(3')}, \hat{b}_2^{(3')} \right)^T \right] =$$

$$= k_1^{-1} \begin{pmatrix} \theta'_{11} & \theta'_{21} & \theta'_{31} \\ \theta'_{21} & \theta'_{22} & \theta'_{32} \\ \theta'_{31} & \theta'_{32} & \theta'_{33} \end{pmatrix}. \quad (5')$$

де

$$\begin{aligned} \theta'_{11} &= r_2^2a_2 + r_1^2a_3 - 2r_1r_2a_5, \\ \theta'_{22} &= r_2^2a_1, & \theta'_{33} &= r_1^2a_1, \\ \theta'_{21} &= -r_2^2a_4 + r_1r_2a_6, \\ \theta'_{31} &= -r_1^2a_6 + r_1r_2a_4, & \theta'_{32} &= -r_1r_2a_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[\left(\hat{b}_0^{(4')}, \hat{b}_1^{(4')}, \hat{b}_2^{(4')} \right)^T \right] &= \\ &= k_2^{-1} \begin{pmatrix} \mu'_{11} & \mu'_{21} & \mu'_{31} \\ \mu'_{21} & \mu'_{22} & \mu'_{32} \\ \mu'_{31} & \mu'_{32} & \mu'_{33} \end{pmatrix}. \quad (6') \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mu'_{11} &= (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})^2, \\ \mu'_{22} &= r_{22}^2, & \mu'_{33} &= r_{21}^2, & \mu'_{32} &= -r_{21}r_{22}, \\ \mu'_{21} &= \sqrt{\mu'_{11}}r_{22}, & \mu'_{31} &= -\sqrt{\mu'_{11}}r_{21}; \\ \text{cov} \left[\left(\hat{b}_0^{(4'')}, \hat{b}_1^{(4'')}, \hat{b}_2^{(4'')} \right)^T \right] &= \\ &= k_2^{-1} \begin{pmatrix} (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6'') \end{aligned}$$

Розглянемо тепер модель регресії (1)(2), в якій $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ – нормалізовані B -сплайни першого порядку [2]. Для такої регресії у випадку, коли $x_i = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, а $x^* \in [x_n, x_{n+1}]$, в роботі [3] знайдено a_i , $i = 0, 1, \dots, n$. При обмеженнях на параметри вигляду (3), (3'), (4), (4'), (4''), для її параметрів мають місце формули (5), (5'), (6), (6'), (6'').

Список використаних джерел

1. Demidenko E.Z. Linear and nonlinear regression. - Moscow: Finansci & Statistika. 1981.-304 p. (in Russian).
2. Zayalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. Methods of Spline Functions. - Moscow: Nauka, 1980.-352 p. (in Russian).
3. Savkina M.Yu. Confidence band for line of spline regression. // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. 2010.-4.- P.173-176. (in Ukrainian).

Надійшло до редакції 12.11.2012

УДК 517.9

Семенов В. В., д.ф.-м.н., проф.

**Три теореми про напівнеперервні зверху
опуклі функціонали**

Описано задані в локально опуклих просторах спеціального типу опуклі функціонали, що досягають максимуму на довільній опуклій, замкненій та обмеженій множині. Одержано узагальнення теореми Вайнберга про слабку неперервність, доведено критерій двоїстого типу слабкої неперервності опуклих функціоналів.

Ключові слова: опуклий функціонал, максимум, слабка напівнеперервність зверху, топологія.

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: semenov.volodya@gmail.com

V. V. Semenov, PhD, prof.

**Three theorems about upper semicontinuous
convex functionals**

Convex functionals which defined in locally convex spaces of special type and attaining a maximum at an arbitrary convex, closed and bounded set are described. The generalization of Vainberg's weak continuity theorem is obtained. The dual type necessary and sufficient condition for weak continuity of convex functionals is proved.

Key Words: convex functional, maximum, upper weak semicontinuity, topology.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: semenov.volodya@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Важливим класом неопуклих екстремальних задач є задачі максимізації опуклих функціоналів на опуклих множинах. Вже цим задачам властива багатоекстремальність, яка ускладнює розробку алгоритмів пошуку глобального екстремуму. Для нескінченновимірних задач при традиційних припущеннях питання існування розв'язків у багатьох випадках теж є проблемою. З іншого боку, наявність опуклої структури часто дозволяє отримати змістовні результати.

Дана робота є продовженням статей [1-3]. У [1] було поставлено та розв'язано таку задачу: охарактеризувати клас заданих у рефлексивному банаховому просторі E напівнеперервних зверху опуклих функціоналів, що досягають свого супремуму на довільній обмеженій замкненій й опуклій підмножині простору E . Такі приклади, як $x \mapsto \|x\|_E$, $x \mapsto \langle x', x \rangle_{E', E}$, $x' \in E'$, указують, що, властивість секвенційної неперервності у топології $\sigma(E, E')$ є характеристичною. Це і було доведено в [1].

Далі ми узагальнюємо результат роботи [1] на випадок локально опуклих просторів.

Нехай E, F – два лінійних простори, що приведені у двоїстість білінійним функціоналом $E \times F \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$, $\sigma = \sigma(E, F)$ – най-

слабша локально опукла топологія на E , угоджена з двоїстістю між E і F , а $\tau = \tau(E, F)$ – топологія Маккі на E [4]. Будемо розглядати лише такі двоїсті пари (E, F) , що задовольняють умову (S) τ -замикання кожної опуклої обмеженої підмножини E співпадає з її секвенційним τ -замиканням.

Має місце

Теорема 1. Нехай двоїста пара (E, F) задовольняє умову (S), секвенційно τ -напівнеперервний знизу опуклий функціонал f не є секвенційно σ -неперервним. Тоді існує обмежена, замкнена та опукла множина $X \subseteq E$, на якій функціонал f не досягає свого супремуму.

Доведення. Нехай $x' \in E'$ – точка, у якій функціонал f не є секвенційно неперервним у топології σ , тобто, існують число $\varepsilon > 0$ і послдовність $x_n \in E$ такі, що $x_n \rightarrow x'$ у топології σ та $\forall n \in \mathbb{N}: |f(x_n) - f(x')| \geq \varepsilon$. Можна вважати, що $f(x') = 0$.

Відмітимо існування $n' \in \mathbb{N}$ такого, що $\forall n \geq n'$ маємо $f(x_n) \geq \varepsilon$. Дійсно, інакше існує

підпослідовність (x_n) така, що $f(x_n) < -\varepsilon$ і, відповідно, $\lim_{p \rightarrow \infty} f(x_p) \leq -\varepsilon$. А це суперечить секвенційній τ -напівнеперервності знизу f .

Для $n \geq n^*$ існує така точка $y_n \in [x_n, x^*]$, що $f(y_n) = \alpha_n \varepsilon$, де (α_n) – послідовність дійсних чисел з інтервала $(0, 1)$, що монотонно збігається до 1. Зрозуміло, що $y_n \rightarrow x^*$ у топології σ . Позначимо через X замикання в топології τ множини $\text{conv}\{y_n : n \geq n^*\}$. Ясно що X – τ -замкнена опукла та обмежена множина. Із опуклості та τ -напівнеперервності f випливає, що $X \subseteq \{x \in X : f(x) \leq \varepsilon\}$.

Покажемо від супротивного, що f не досягає супремуму на множині X . Нехай існує $\bar{x} \in X$: $f(\bar{x}) = \sup_{x \in X} f(x)$. Зокрема, $\forall n \geq n^*$ маємо

$$f(\bar{x}) \geq f(y_n) = \alpha_n \varepsilon.$$

Звідки

$$f(\bar{x}) \geq \sup_{n \geq n^*} \alpha_n \varepsilon = \varepsilon. \quad (1)$$

Розглянемо таку послідовність (z_p) , що $z_p \in \text{conv}\{y_n : n \geq n^*\}$ та $z_p \rightarrow \bar{x}$ у топології τ . Із τ -напівнеперервності f та (1) випливає $f(\bar{x}) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} f(z_p)$ і $\varepsilon \leq \lim_{p \rightarrow \infty} f(z_p)$. Якщо ми доведемо, що $z_p \rightarrow x^*$ у топології σ , то отримаємо $\bar{x} = x^*$ і абсурдну нерівність

$$f(x^*) = 0 < \varepsilon \leq f(\bar{x}) = 0.$$

Для довільного $p \in \mathbb{N}$ вектор z_p має вигляд $z_p = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} y_n$, де $\lambda_{p,n} \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} = 1$ і $\lambda_{p,n} = 0$ при фіксованому p , починаючи з деякого n .

Доведемо, що $\forall n \geq n^*$: $\lambda_{p,n} \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Із опуклості функціоналу f $\forall m \geq n^*$ випливає нерівність

$$\begin{aligned} f(z_p) &= f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} y_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} f(y_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} \alpha_n \varepsilon \leq \lambda_{p,n} \alpha_n \varepsilon + \sum_{n=n^*}^{\infty} \lambda_{p,n} \varepsilon = \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} + (\alpha_n - 1) \lambda_{p,n}\right) \varepsilon = (1 + (\alpha_n - 1) \lambda_{p,n}) \varepsilon.$$

Перейдемо до нижньої границі по p , фіксуємо $m \geq n^*$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} f(z_p) &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} (1 + (\alpha_n - 1) \lambda_{p,n}) \varepsilon = \\ &= (1 + (\alpha_n - 1) \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \lambda_{p,n}) \varepsilon. \end{aligned}$$

Звідки $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \lambda_{p,n} \leq 0$ та, урахувавши невід'ємність $\lambda_{p,n}$, отримуємо

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{p,n} = 0. \quad (2)$$

Візьмемо $l \in F$ і позначимо $C = \sup_{x \in X} \langle x, l \rangle$. Маємо $\langle x^*, l \rangle \leq C$, $\langle y_n, l \rangle \leq C$ $\forall n \geq n^*$. Із σ -збіжності послідовності (y_n) до x^* випливає, що

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists n' \geq n^* : \langle y_n - x^*, l \rangle < \frac{\varepsilon'}{2} \quad \forall n \geq n'.$$

Маємо $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} \langle y_n - x^*, l \rangle \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} \langle y_n - x^*, l \rangle < \\ &< \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} \right) \frac{\varepsilon'}{2} \leq \frac{\varepsilon'}{2}. \end{aligned}$$

Урахувавши (2), робимо висновок, що $\exists p' \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \lambda_{p,n} < \frac{\varepsilon'}{4Cn'} \quad \forall p \geq p', n' \leq n < n'.$$

Отже, $\forall p \geq p'$:

$$\begin{aligned} \langle z_p - x^*, l \rangle &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p,n} \langle y_n - x^*, l \rangle \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{n'-1} \lambda_{p,n} \langle y_n - x^*, l \rangle + \sum_{n=n'}^{\infty} \lambda_{p,n} \langle y_n - x^*, l \rangle < \\ &< \sum_{n=1}^{n'-1} \frac{\varepsilon'}{4Cn'} 2C + \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Ми довели, що $z_p \rightarrow x^*$ у топології σ . ■

З доведеної теореми випливає основний результат статті [1].

Наслідок 1 ([1]). Нехай E – рефлексивний банаховий простір, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – напівнеперервний знизу опуклий функціонал. Тоді наступні умови рівносильні:

1) f досягає супремуму на довільній обмеженій замкненій опуклій множині $X \subseteq E$;

2) f секвенційно $\sigma(E, E^*)$ -неперервний.

Доведення. Імплікація $1) \Rightarrow 2)$ випливає з теорем 1, а зворотнє твердження – класичний результат, що випливає з теорем Вейєрштрасса, Махура та рефлексивності простору E . ■

У світлі отриманих тверджень природно виникає проблема знаходження конструктивних умов слабкої секвенційної неперервності опуклих функціоналів. Має місце така проста достатня умова слабкої секвенційної неперервності.

Теорема 2. Нехай E – банаховий простір, $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – власний напівнеперервний знизу опуклий функціонал. Якщо для довільної обмеженої множини $X \subseteq \text{dom}(f)$ множина $\partial f(X) = \bigcup_{x \in X} \partial f(x)$ відносно компактна у сильній

топології простору E^* , то функціонал $f|_{\text{dom}(f)}$ секвенційно неперервний у топології $\sigma(E, E^*)$.

Доведення. Міркуємо від супротивного. Нехай $x_0 \in \text{dom}(f)$ – точка, у якій функціонал f не є секвенційно неперервним у топології $\sigma(E, E^*)$, тобто, існують таке число $\varepsilon > 0$ і послідовність $x_n \in \text{dom}(f)$, що

$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow x_0 \text{ у топології } \sigma(E, E^*), \\ \forall n \in \mathbb{N}: |f(x_n) - f(x_0)| &\geq \varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Із означення субдиференціалу $\partial f(\cdot)$ випливає

$$\begin{aligned} \langle y_0, x_n - x_0 \rangle_{E^*, E} &\leq f(x_n) - f(x_0) \leq \\ &\leq \langle y_n, x_n - x_0 \rangle_{E^*, E}, \end{aligned}$$

де $y_0 \in \partial f(x_0)$, $y_n \in \partial f(x_n)$.

Множина $X = \{x_n : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \subseteq \text{dom}(f)$ є обмеженою, тобто, за умовою існує така під-послідовність (y_n) і точка $y \in E^*$, що

$$\|y_n - y\|_{E^*} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \langle y_0, x_n - x_0 \rangle_{E^*, E} &\leq f(x_n) - f(x_0) \leq \\ &\leq \langle y_n - y, x_n - x_0 \rangle_{E^*, E} + \langle y, x_n - x_0 \rangle_{E^*, E} \leq \\ &\leq 2K \|y_n - y\|_{E^*} + \langle y, x_n - x_0 \rangle_{E^*, E}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $K = \sup_{n \geq 0} \|x_n\|_E < +\infty$.

Звіда та справа у нерівності (4) стоять нескінченно малі послідовності, отже, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ при $k \rightarrow \infty$, що суперечить нерівності (3). ■

Зуваження 1. Наведена теорема 3 є частковим узагальненням відомої теореми з [5] на випадок недиференційованих функціоналів.

Нагадаємо, що спряжений до f функціонал визначається так

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E} \{ \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} - f(x) \}.$$

Відмітимо, що для довільного f функціонал f^* є опуклим напівнеперервним знизу функціоналом, що приймає значення в розширеній прямій $\overline{\mathbb{R}}$ [6].

Із теореми 2 роботи [2] випливає критерій слабкої неперервності неперервного опуклого функціоналу.

Теорема 3. Неперервний опуклий функціонал $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервним у топології $\sigma(E, E^*)$ тоді і тільки тоді, коли розмірність лінійної оболонки ефективної області $\text{dom}(f^*) \subseteq E^*$ є скінченною.

Доведення. Слабка неперервність опуклого неперервного функціоналу f рівносильна $\sigma(E \oplus \mathbb{R}, E^* \oplus \mathbb{R})$ -відкритості множини

$$M = \{(x, \alpha) \in E \oplus \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}.$$

Множина $M \subseteq E \oplus \mathbb{R}$ опукла і відкрита. Отже, за теореми 2 роботи [2] вона відкрита у топології $\sigma(E \oplus \mathbb{R}, E^* \oplus \mathbb{R})$ тоді і лише тоді, коли лінійна оболонка полярис $M^\circ \subseteq E^* \oplus \mathbb{R}$ скінченновимірна.

Розглянемо структуру множини M° . За означенням полярис маємо

$$M^\circ = \{(x^*, \alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} :$$

$$\sup_{(x, \alpha) \in M} \{ \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} + \alpha^* \alpha \} \leq 1 \}.$$

Ясно, що $(0, 0) \in M^\circ$. Оскільки $\forall x \in E$ із включення $(x, \alpha) \in M$ випливає, що $(x, \alpha^*) \in M$ для всіх $\alpha^* \geq \alpha$, то другі координати елементів множини M° не можуть бути додатними. Нехай $(x^*, 0) \in M^\circ$. Тоді

$$\sup_{(x, \alpha) \in M} \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} = \sup_{x \in E} \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} \leq 1.$$

що можливо лише коли $x^* = 0$. Тобто, якщо $(x^*, 0) \in M^0$, то $x^* = 0$.

Розглянемо множину

$$M^0 \setminus \{(0, 0)\} = \{(x^*, \alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} :$$

$$\sup_{(x, \alpha) \in M} \{ \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} + \alpha^* \alpha \} \leq 1, \alpha^* < 0 \}.$$

Має місце ланцюжок рівностей

$$M^0 \setminus \{(0, 0)\} = \{(x^*, -\alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} :$$

$$\sup_{(x, \alpha) \in M} \{ \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} - \alpha^* \alpha \} \leq 1, \alpha^* > 0 \} = \\ = \{(x^*, -\alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} :$$

$$\sup_{x \in E} \{ \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} - \alpha^* f(x) \} \leq 1, \alpha^* > 0 \} = \\ = \{(x^*, -\alpha^*) \in E^* \oplus \mathbb{R} :$$

$$\alpha^* f^*\left(\frac{x^*}{\alpha^*}\right) \leq 1, \alpha^* > 0 \}.$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $f^*(x^*) > 0$ для всіх $x^* \in E^*$. Дійсно, $\forall A \in \mathbb{R}$ маємо $(f - A)^* = f^* + A$, $\text{dom}(f^*) = \text{dom}((f - A)^*)$. Візьмемо таке число A , що $f(0) - A < 0$. Тоді для всіх $x^* \in E^*$

Список використаних джерел

1. Lyashko S.I., Semenov V.V., Katsev M.V. Some remarks concerning supremum attainment by convex functional // Journal of Automation and Information Sciences, vol. 38, no. 4, pp. 1-7, 2006.
2. Grynenko A.A., Semenov V.V., Chubenko O.V. Minimization on preconvex sets: existence of solutions // J. Num. Appl. Math. – 2007. – N 2. – P. 32-35. (in Ukrainian).
3. Semenov V.V. On Solvability of Maximization Problems in Conjugate Spaces // Journal

$$(f - A)^*(x^*) = \\ = \sup_{x \in E} \{ \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} - f(x) + A \} \geq \\ \geq -f(0) + A > 0.$$

Ураховуючи додатність f^* , приходимо до рівності

$$M^0 = \left\{ \left(\frac{z^*}{\beta^*}, -\frac{1}{\beta^*} \right) : f^*(z^*) \leq \beta^* \right\} \cup \{(0, 0)\} = \\ = \left\{ \left(\frac{z^*}{\beta^*}, -\frac{1}{\beta^*} \right) : (z^*, \beta^*) \in \text{epi}(f^*) \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Звідси випливає, що M^0 лежить у скінченновимірному підпросторі простору $E^* \oplus \mathbb{R}$ тоді і лише тоді, коли $\text{epi}(f^*)$ лежить у скінченновимірному підпросторі простору $E^* \oplus \mathbb{R}$. Звичайно, остання умова рівносильна скінченновимірності лінійної оболонки ефективної області $\text{dom}(f^*) \subseteq E^*$. ■

Робота виконана за фінансової підтримки ДФФД України (Грант Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених, проект GP/F44/042).

of Automation and Information Sciences, vol. 41, no. 4, pp. 51-55, 2009.

4. Robertson A.P., Robertson W. Topological vector spaces. – New York: Cambridge Univ. Press, 1964.
5. Vainberg M.M. Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations. – New York: Wiley, 1973.
6. Zalinescu C. Convex Analysis in General Vector Spaces. – Singapore: World Scientific, 2002.

Надійшла до редколегії 20.11.12

УДК 681.5

Олександр С. Слабоспицький*,
к.ф.-м.н., доц.**Оцінювання нестационарних параметрів
методом найменших квадратів зі змінним
фактором забування та мінімальною
нормою відхилення від точок "тяжіння"
для систем при неklasичних
припущеннях**

Для регресійної моделі розглядається задача оцінювання нестационарних параметрів у випадку, коли в кожен момент для вектора параметрів відома його точка "тяжіння". Для оцінки параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок "тяжіння" отримані явна та рекурентна форми представлення для вищезгаданих систем при неklasичних припущеннях.

Ключові слова: оцінювання нестационарних параметрів, оператор псевдообернення, регресійна модель, метод найменших квадратів, змінний фактор забування, рекурентний алгоритм, точки "тяжіння".

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова, 4д, e-mail: sl@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Побудова якісної математичної моделі для об'єкта у ряді випадків може бути проведена шляхом знаходження оцінок невідомих параметрів його моделі. Задачу оцінювання цих параметрів можна розв'язувати, скориставшись одним із відомих підходів [1].

У таких ситуаціях може стати у нагоді метод найменших квадратів (МНК) [2]. Завдяки використанню оператора псевдообернення по Муру-Пенроузу, вдалося поширити оцінку МНК на випадок, коли можуть порушуватися класичні припущення, які гарантують єдиність цієї оцінки, та отримати для регресійної моделі рекурентні алгоритми для оцінки стаціонарних параметрів МНК з найменшою нормою та відповідної залишкової суми квадратів [3].

Оцінка з найменшою нормою нестационарних параметрів регресійної моделі за допомогою МНК зі змінним фактором забування аналізується у роботах [4, 5]. У них були отримані явна та рекурентні форми представлення для підрахунку цієї оцінки, а

Alexander S. Slabospitsky*,
Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor**Non-stationary parameter estimation by the
least squares method with variable
forgetting factor and minimal deviation
norm from 'attraction' points for systems
under non-classical assumptions**

The estimation problem of non-stationary parameter is considered for regression model in case when for parameter vector its 'attraction' point is known at any moment. Explicit and recurrent forms of representation are obtained for parameter estimate by the least squares method with variable forgetting factor and minimal deviation norm from 'attraction' points for above-mentioned systems under non-classical assumptions.

Key words: non-stationary parameter estimation, pseudoinverse operator, regression model, least squares method, variable forgetting factor, recurrent algorithm, 'attraction' points.

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, 4d Glushkov av., e-mail: sl@univ.kiev.ua

також рекурент для відповідної зваженої залишкової суми квадратів.

Наявність у довільний момент додаткової інформації про точки "тяжіння" невідомих параметрів регресійної моделі, у ситуації можливого порушення класичних припущень, що забезпечують єдиність оцінки МНК, викликає необхідність внесення корекцій у цю оцінку. А саме, замість оцінки МНК з найменшою нормою, пропонується використовувати оцінку МНК з найменшою нормою відхилення від цих заданих точок "тяжіння" у кожен момент. Відповідна задача оцінювання стаціонарних параметрів регресійної моделі МНК з найменшою нормою відхилення від відомих точок "тяжіння" при можливому порушенні класичних припущень, що гарантують єдиність цієї оцінки, була розв'язана у роботі [6]. У ній були отримані рекурентні алгоритми для оцінки параметрів та відповідної залишкової суми квадратів.

У даній роботі останні результати поширено на випадок оцінювання нестационарних

параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від відомих точок "тяжіння" у кожен момент.

Розглянемо задачу оцінювання вектора невідомих параметрів α регресійної моделі:

$$y(k) = x^T(k)\alpha + \xi(k), \quad k = \overline{1, N}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де $y(k)$ - доступні скалярні спостереження, $x(k)$ - відомі детерміновані вектори, $\alpha \in \mathbb{R}^r$, $\xi(k)$ - похибки моделі.

Припустимо, що вектор параметрів α може повільно змінюватися та для нього в кожен момент N задана його точка "тяжіння" $\alpha_*(N)$, $N = 0, 1, 2, \dots$

Знайдемо явну та рекурентну форми представлення для оцінки МНК зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точки "тяжіння" $\alpha_*(N)$ у кожен момент N , $N = 0, 1, 2, \dots$

Представимо систему (1) у матричному вигляді:

$$y_N = X_N \alpha + \xi_N, \quad N \in \mathbb{N},$$

де

$$y_N = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}, \quad X_N = \begin{pmatrix} x^T(1) \\ x^T(2) \\ \vdots \\ x^T(N) \end{pmatrix}, \quad \xi_N = \begin{pmatrix} \xi(1) \\ \xi(2) \\ \vdots \\ \xi(N) \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення

$$Q(\alpha, N) = \sum_{k=1}^N w(k, N) \xi^2(k),$$

де $w(k, N)$ визначаються таким чином:

Теорема. Для регресійної моделі (1) рекурентний алгоритм для оцінки (3) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\alpha_*(N)$ у кожен момент N має такий вигляд:

якщо $\delta(N+1) > 0$, то

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(N+1) = \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\delta(N+1)} P(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) \hat{\alpha}(N)] + \\ + \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) \right] [\alpha_*(N+1) - \alpha_*(N)], \\ R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} [P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) + \right. \\ \left. + P(N) x(N+1) x^T(N+1) R(N)] + \frac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N), \end{cases} \quad (4)$$

$$w(k, N) = \begin{cases} \prod_{i=k}^{N-1} \lambda(i), & \text{якщо } k = \overline{1, N-1}, \\ 1, & \text{якщо } k = N, \end{cases}$$

а $\lambda(i)$ - заданий змінний фактор забування ($\lambda(i) \in (0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$).

Коли можливе порушення класичних припущень, оцінка методу найменших квадратів зі змінним фактором забування не обов'язково буде єдиною, а множина усіх цих оцінок буде мати вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \text{Arg min}_\alpha Q(\alpha, N) &= \{\hat{\alpha}_*(N)\}; \\ \hat{\alpha}_*(N) &= \tilde{X}_N^* \tilde{y}_N + (E_p - \tilde{X}_N^* \tilde{X}_N) c, \quad c \in \mathbb{R}^r, \end{aligned} \quad (2)$$

де $(^*)$ - оператор псевдообернення по Муру-Пенроузу, E_p - одинична матриця порядку p ,

$$\tilde{y}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1, N) y(1) \\ w^{\frac{1}{2}}(2, N) y(2) \\ \dots \\ w^{\frac{1}{2}}(N, N) y(N) \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1, N) x^T(1) \\ w^{\frac{1}{2}}(2, N) x^T(2) \\ \dots \\ w^{\frac{1}{2}}(N, N) x^T(N) \end{pmatrix}.$$

В якості єдиної оцінки $\hat{\alpha}(N)$ на множині усіх оцінок (2) візьмемо оцінку методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точки "тяжіння" $\alpha_*(N)$ у кожен момент N , яка буде мати таку явну форму представлення [6]:

$$\hat{\alpha}(N) = \tilde{X}_N^* \tilde{y}_N + (E_p - \tilde{X}_N^* \tilde{X}_N) \alpha_*(N), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Для практичного застосування оцінки (3) корисно мати її рекурентне представлення.

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(N+1) = \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}(N)] + \\ + P(N)[\alpha_*(N+1) - \alpha_*(N)], \\ R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (5)$$

з початковими умовами: $\hat{\alpha}(0) = \alpha_*(0)$, $R(0) = O$, $P(0) = E_p$,

де $\gamma(N+1) = \lambda(N) + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$, $\delta(N+1) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$, O – нульова матриця.

Доведення. Введемо позначення

$$\hat{\alpha}_0(N) = \hat{X}_N^* \hat{y}_N, \quad R(N) = (\hat{X}_N^T \hat{X}_N)^{-1}, \quad P(N) = E_p - \hat{X}_N^* \hat{X}_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що для останнього оператора справедливо

$$P(N) = E_p - \hat{X}_N^* \hat{X}_N = E_p - X_N^* X_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

А безпосередню оцінку (3) в момент $N+1$ можна записати у такому вигляді:

$$\hat{\alpha}(N+1) = \hat{X}_{N+1}^* \hat{y}_{N+1} + (E_p - \hat{X}_{N+1}^* \hat{X}_{N+1}) \alpha_*(N+1) = \hat{\alpha}_0(N+1) + P(N+1) \alpha_*(N+1).$$

Прийmemo до уваги, що для оцінки $\hat{\alpha}_0(N)$ у роботі [4] вже була отримана відповідна рекурентна процедура, а саме:

якщо $\delta(N+1) > 0$, то

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0(N+1) = \hat{\alpha}_0(N) + \frac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}_0(N)], \\ R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} [R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + \right. \\ \left. + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)] + \frac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \quad (6)$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0(N+1) = \hat{\alpha}_0(N) + \frac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}_0(N)], \\ R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (7)$$

з початковими умовами:

$$\hat{\alpha}_0(0) = o, \quad R(0) = O, \quad P(0) = E_p,$$

де o – нульовий вектор.

У наведеній рекурентній процедурі (6),(7) залишилось тільки замінити рекурент для $\hat{\alpha}_0(N)$ на рекурентний алгоритм для оцінки $\hat{\alpha}(N)$.

Зробимо спочатку це для випадку, коли $\delta(N+1) > 0$. Для цього достатньо скористатися вищенаведеним співвідношенням (6) та прийняти до уваги, що

$$\hat{\alpha}_0(N) = \hat{\alpha}(N) - P(N) \alpha_*(N).$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(N+1) &= \hat{\alpha}_0(N+1) + P(N+1)\alpha_*(N+1) = \hat{\alpha}_0(N) + \frac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}_0(N)] + \\
&+ \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right] \alpha_*(N+1) = \hat{\alpha}(N) - P(N)\alpha_*(N) + \\
&+ \frac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)(\hat{\alpha}(N) - P(N)\alpha_*(N))] + \\
&+ \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right] \alpha_*(N+1) = \\
&= \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}(N)] + \\
&+ \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right] [\alpha_*(N+1) - \alpha_*(N)].
\end{aligned}$$

У протилежному випадку, коли умова $\delta(N+1) > 0$ не виконується, буде справедливо $P(N)x(N+1) = 0$.

А це разом з співвідношенням (7) дозволяє стверджувати, що має місце такий ланцюг перетворень:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(N+1) &= \hat{\alpha}_0(N+1) + P(N+1)\alpha_*(N+1) = \hat{\alpha}_0(N) + \\
&+ \frac{1}{\gamma(N+1)}R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}_0(N)] + P(N)\alpha_*(N+1) = \hat{\alpha}(N) - P(N)\alpha_*(N) + \\
&+ \frac{1}{\gamma(N+1)}R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)(\hat{\alpha}(N) - P(N)\alpha_*(N))] + P(N)\alpha_*(N+1) = \\
&= \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\gamma(N+1)}R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}(N)] + P(N)[\alpha_*(N+1) - \alpha_*(N)].
\end{aligned}$$

Що і завершує доведення теореми.

У підсумку, для розв'язання задачі оцінювання нестационарних параметрів регресійної моделі (1) отримані явна та рекурентна форми представлення (3) та (4), (5) відповідно для оцінки методу найменших

квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\alpha_*(N)$ у кожен момент N , $N = 0, 1, 2, \dots$

Список використаних джерел

1. *Ljung L. System Identification: Theory for the User* / L. Ljung. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. – 544 p.
2. *Hsia T.C. System Identification. Least-Squares Methods* / T.C. Hsia. – Toronto: Lexington Books, 1977. – 165 p.
3. *Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse* / A. Albert. – New York: Academic Press, 1972. – 180 p.
4. *Slabospitsky A.S. Recursive algorithm of least squares estimation with variable forgetting factor under nonclassical assumptions* / A.S. Slabospitsky // Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 1999. – №4. – p. 237-240.

5. *Slabospitsky A.S. Recursive estimation of nonstationary parameters by the least squares method with variable forgetting factor under nonclassical assumptions* / A.S. Slabospitsky // Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2000. – №1. – p. 282-285.
6. *Slabospitsky A.S. Usage of supplementary information in the recurrent parameter estimation of the systems with discrete time by the least squares method under nonclassical assumptions* / A.S. Slabospitsky // Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2008. – №4. – p. 179-182.

Надійшла до редколегії 22.10.2012

УДК 519.68, 681.3 513

В.М. Терешченко, д.ф.-м.н., доцент

**Пошук найкоротшого шляху у простому
многокутнику з перешкодами**

У роботі розглядається модифікація одного з методів знаходження найкоротшого шляху між двома точками у простому многокутнику з перешкодами (у вигляді простих многокутників).

Ключові слова: найкоротший шлях, простий многокутник, перешкода, пошуковий запит.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: vtereshch@gmail.com

V.M. Tereshchenko, Dr. Sci.(Phys.-Math.), Associate Professor

The shortest-path in a simple polygon with obstacles

In this paper, we consider the modification of two-point shortest-path query problem in simple polygon with obstacles (in the form of simple polygons).

Key Words: shortest-path, simple polygon, obstacle, search query.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: vtereshch@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Постановка проблеми. На сьогоднішній день проблема знаходження найкоротшого шляху за менш ніж квадратичний час вже не є відкритою, але оптимальне використання пам'яті залишається проблемою. В роботі пропонується оптимізувати модифікацію одного з найшвидших алгоритмів на сьогоднішній день.

Аналіз останніх досліджень. Основні досягнення при розв'язанні задачі протягом минулих років представлено в роботах [12, 13, 14]. Найкращими за ефективністю були алгоритми з часом $O(n \log n)$ [7]. В більшості цих алгоритмів основою є парадигма Дейкстри [9]. Окрім того, пропонувались інші підходи, зокрема, алгоритми з $O(n + k^2 \log n)$ часом, в основі яких лежить побудова графа видимості [8]. Гуйбас та Хершбергер [5] показали, як з використовуючи попередню обробку за час $O(n)$, та структуру даних розміром $O(n)$, можна знайти найкоротший шлях за $O(\log n)$ у простому многокутнику з перешкодами.

Варто відзначити апроксимуючі алгоритми пошуку найкоротшого шляху [2,3,4]. Так у

методі Кларксона [4] використовується структура даних розміром $O(n^2)$ і часом побудови $O(n^2 \log n)$, яка дозволяє за $(1+e)$ оптимальну кількість запитів і час $O(\log n)$ знайти шлях, для будь-якого $e > 0$. В [3] показано як використовуючи майже лінійну пам'ять можна знайти найкоротший шлях за час $O(\log n)$, використовуючи $(6+e)$ апроксимацію та структуру даних розміром $O(n \log n)$.

Цікавий розв'язок для многокутника з перешкодами у вигляді опуклих многокутників подано в роботі [1]. Авторами одержано час пошуку $O((\sqrt{n}/m^{1/4}) \log n)$ з використанням структури даних, розмір і час побудови якої $O(n^{6/5} m^{1/5})$, для будь-яких $1 \leq m \leq n^2$, та $\delta > 0$. В роботі [6] запропоновано алгоритм з лінійною попередньою обробкою, що дає час пошуку $O((\log n)/e^{1/2} + 1/e^2)$ (де $O(1/e^{1/2})$ це кількість сегментів найкоротшого шляху).

Новизна та ідея. В роботі пропонується модифікація, яка покращує роботу алгоритму в окремих випадках та суттєво зменшує об'єм використаної пам'яті.

Мета статті. Описати алгоритм і запропоновану модифікацію.

2. Побудова алгоритму

На сьогодні проблема швидких способів побудови ефективних структур даних для розв'язання задач пошуку найкоротшого шляху на множині перешкод в простому многокутнику залишається відкритою [12].

Опишемо алгоритм, що використовує $O(n^{1+10^{-\epsilon}})$ часу для побудови структури даних, за допомогою якої за час $O(n^{1-\delta} \log n)$ можна знайти найкоротший шлях для будь-якого $0 < \delta \leq 1$ та фіксованого $\epsilon > 0$. Зокрема, цей алгоритм досягає сублінійного часу $O(n)$ з використанням $O(n^{5+\epsilon})$ пам'яті та $O(\log n)$ з використанням $O(n^{15+\epsilon})$. Введемо деякі поняття та означення.

Означення. Позначимо через V множину всіх вершин P . Тоді *граф видимості* для P ($VG(P)$), це граф, який з'єднує кожну вершину з вершинами, які є видимими.

$VG(P)$ може бути побудований оптимально за час $O(\epsilon_{VG} \cdot n \log n)$, де ϵ_{VG} це кількість ребер цього графа [10]. Для будь-якої точки $z \in P$, всі видимі точки можна буде знайти за допомогою функції $VG(z)$.

Означення. Нехай z точка видимості, тоді *деревом найкоротших шляхів* $SPT(z)$, буде таке дерево, в якому шлях до будь-якої вершини з P буде найкоротшим.

Означення. *Картою найкоротших шляхів* $SPM(z)$ з точки z будуть регіони множини P , які будуть найкоротшими шляхами з точки z у будь-яку іншу.

$SPM(z)$ може бути побудована за час $O(n \log n)$ використовуючи $O(n \log n)$ пам'яті. Якщо $SPM(z)$ використовувати, як попередню обробку для задачі локалізації точки, то запит найкоротшого шляху можна буде швидко знайти з точки t за допомогою декомпозиції. Зокрема, якщо t лежить у кореневій до r частині, то довжина найкоротшого шляху до t визначається як

$$d(z, t) = d(z, r) + |rt|.$$

Інакше, найкоротший шлях від z до t може бути знайдений за час $O(k)$, де k це кількість вершин, що знаходяться на шляху.

Позначимо A^{SP} , як декомпозицію еквівалентності VP на P , де для регіону, в якому лежить точка z , $VP(z)$ - комбінаторна константа. A^{SP} отримується обчисленням розташування ребер перешкод, разом з розширеною видимістю

ребер графа. Звідси найгірша складність A^{SP} буде $O(\epsilon_{VG}) = O(n^4)$. Аналогічно для декомпозиції еквівалентності SPT на P (A^{SPT}).

Далі буде показано, як за допомогою 4-вимірної запиту локалізації точки, можна одержати час пошуку найкоротшого шляху порядку $O(\log n)$. Такий самий метод був застосований для випадку опуклих прямокутників [1].

Зазначимо, що найкоротший шлях з точки z у точку t буде відрізок (x, t) , якщо з точки z видно точку t , або ці точки містяться в одному многокутнику. У другому випадку найкоротший шлях буде одна з двох частин многокутника, розділених цими точками. Видимість з точки z точки t перевіряється за час $O(\log n)$ використовуючи пам'ять $O(n^2 \log n)$ та двоточкову структуру V .

Наше завдання - мінімізувати за даним запитом (x, y, x, y) вибір значення довжини за вибором наступних вершин: першої v_i та останньої v_j . Можна записати відповідну функцію $f: R^4 \rightarrow R$:

$$f(x_i, y_i, x_j, y_j) = \min_{i \in I, j \in I} [sv_i + d(v_i, v_j) + |v_j t|],$$

де мінімум береться за вибором вершин v_i (видимих з вершини z) та v_j (видимих з вершини t). Де I_i і I_j множини індексів, які залежать від координат (x_i, y_i, x_j, y_j) ; проте вони є константами по відношенню до даного вибору A^{SP} регіону σ_i , який містить z , і A^{SP} регіону σ_j , який містить t . Тому для кожного з $O(n^2)$ виборів пар (σ_i, σ_j) , ми будемо структуру даних щоб знайти найменше значення функції

$$f_{i,j}(x_i, y_i, x_j, y_j) = [sv_i + d(v_i, v_j) + |v_j t|].$$

Одержимо $O(n^2)$ функцій, кожна з яких представляє собою поверхню в R^4 , а ми намагасьмо знайти найменшу точку в R^4 . Це можна зробити за час $O(\log n)$ використовуючи структуру даних розміру $O(n^{2+2+3+\epsilon}) = O(n^{15+\epsilon})$ використовуючи результати з статті [11]. Тоді для кожного можливого вибору пари (σ_i, σ_j) використовуватимемо пам'ять розміром $O(n^{22+\epsilon})$ і час $O(\log n)$. Проте використання пам'яті можна покращити.

Так, як згідно припущення з z не видно точки t , то ми знаємо, що є принаймні одна перешкода на шляху. Тоді довжину визначимо за формулою $d(z, v_i) + d(v_i, t)$ для будь-якого вибору v_i . v_i не

повинна бути видимою з точок s і t , поки ми використовуємо геодезичну дистанцію $d(s, v_i)$ та $d(v_i, t)$. Таким чином мінімум береться по i , де

$$d(s, t) = \min_i (d(s, v_i) + d(v_i, t)).$$

Функція нижньої границі буде мати вигляд:

$$g(x_s, y_s, x_t, y_t) = d(s, v_i) + d(v_i, t)$$

Далі за допомогою структури даних *SMP* можемо перейти до наступних точок

$$g(x_s, y_s, x_t, y_t) = \sqrt{(x_s - x_{v_i})^2 + (y_s - y_{v_i})^2} + \\ + d(v_i, v_j) + d(v_j, w_i) + \sqrt{(x_t - x_{w_i})^2 + (y_t - y_{w_i})^2}$$

Регіон $\sigma_i(\sigma_j)$ з A^{SPT} що містить $s(t)$ дасть нам тотожні вершини $u_i(w_i)$ для кожного вибору v_i . Таким чином ми будемо A^{SPT} що зберігає пару для кожного вибору v_i . Це займе $O(n^2)$ пам'яті. Також для кожного з $O(n^2)$ виборів пар (σ_i, σ_j) ми будемо структуру даних розміром $O(n^{2+3+4}) = O(n^{9+4})$, яка підтримує пошук за час $O(\log n)$. Сумарна пам'ять, яку ми використаємо буде рівна $O(n^{15+4})$.

Остаточно ми отримаємо $O(n^{5+10+4})$ використаної пам'яті і $O(n^{1+4} \log n)$ часу, за який визначається найкоротший шлях для будь-якого $0 < \delta \leq 1$.

Окрім того, вище наведений алгоритм можна модифікувати розглянувши окремі випадки. Зокрема, з самого початку можна перевірити чи всі наші многокутники є опуклі. Це можна зробити за час $O(n)$. Також можна зробити прості многокутники опуклими, якщо у частинах, які ми будемо обрізати не знаходяться частини інших многокутників або початкові дві точки. В цьому випадку за $O(n \log n)$ можна зробити перевірку і для випадку, коли усі многокутники опуклі, знову скористатись алгоритмом представленим в роботі [1]. Дана модифікація зменшить використання пам'яті і час на попередню обробку на n у найгіршому випадку.

3. Практична частина

В роботі запропонована програмна реалізація розробленого алгоритму у середовищі C#. Основними модулями програми є: генерація простого многокутника, генерація перешкод у

вигляді простих многокутників та пошук найкоротшого шляху. Результат роботи програми представлено на рис. 1. Червоними точками і штриховими лініями показано перешкоди. Зеленим кольором виділено ламану, яка є найкоротшим шляхом для заданих нами точок запиту в простому многокутнику.

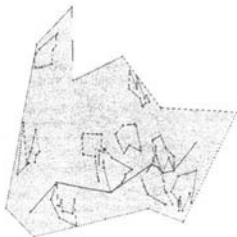


Рис. 1. Результат роботи програми пошуку найкоротшого шляху у простому многокутнику з перешкодами.

4. Висновки

У роботі розглядається задача пошуку найкоротшого шляху у простому многокутнику на множині перешкод. Зокрема, стояла задача побудови оптимізуючої модифікації алгоритму Агарвала [1]. Запропоновано модифікацію вказаного алгоритму, поширивши його на випадок перешкод у вигляді простих многокутників і зменшивши при цьому використання пам'яті на n^4 із збереженням ефективності пошуку.

Список використаних джерел

1. P. K. Agarwal, B. Aronov, J. O'Rourke, and C. A. Schevon. Star unfolding of a polytope with applications // *SIAM J. Comput.*, 26:1689-1713, 1997.
2. S. R. Arrikati, D. Z. Chen, L. P. Chew, G. Das, M. H. M. Smid, and C. D. Zaroliagis. Planar spanners and approximate shortest

- path queries among obstacles in the plane // *4th An. European Symposium, on Algorithms*, pages 514-528, 1996.
3. D. Z. Chen. On the a&pairs Euclidean short path problem // *In Proc. 6th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, pages 292-301, 1995.
 4. K. Clarkson. Approximation algorithms for shortest path motion planning // *In Proc. of the 19-th an. ACM symposium on Theory of comput.*, New York, USA, pages 56 – 65, 1987.
 5. L. J. Guibas and J. Hershberger. Optimal shortest path queries in a simple polygon // *J. Comput. Syst. Sci.*, V 39, pages 126-152, 1989.
 6. S. Har-Peled. Approximate shortest paths and geodesic diameters on convex polytopes in three dimensions // *In Proc. 13th An. ACM Sympos. Comput.*, pages 359-365, 1997.
 7. J. Hershberger and S. Suri. An optimal algorithm for Euclidean shortest paths in the plane / Manuscript, Wash.iugton University, 1995.
 8. S. Kapoor, S. N. Maheshwari, and J. S. B. Mitchell. An efficient algorithm for Euclidean shortest paths among polygonal obstacles in the plane // *Discrete Comput.*, V 18, pages 377-383, 1997.
 9. J. S. B. Mitchell. Shortest paths among obstacles in the plane // *Internat. J. Comput. Appl.*, V 6, pages 309-332, 1996.
 10. M. Pocchiola and G. Vegter. Computing the visibility graph via pseudo-triangulations // *In Proc. 1-th An. ACM Sympos. Comput.*, pages 248-257, 1995.
 11. M. Sharir and P. K. Agarwal. Davenport-Schinzel Sequences and Their Geometric Applications / Cambridge University Press, New York, 1995.
 12. J. E. Goodman and J. O'Rourke. Handbook of Discrete and Computational Geometry, CRC Press LLC, Boca Raton, 1997.
 13. Erik L. Wynters, J. S. B. Mitchell. Shortest Paths for a Two-Robot Rendez-Vous // *In Proc. of CCCG*, pages 216-221, 1993.
 14. J. S. B. Mitchell, M. Sharir. New Results on Shortest Paths in Three Dimensions // *In Proc. of the 20-th an. symposium on Comput. Geom., ACM New York, USA*, pages 124-133, 2004.

Надійшла до редколегії 28.10.12

УДК 519.68

Терешенко В.М.¹, д.ф.-м.н., доц.,
Фісуненко А.Л.², аспірант**Особенности разв'язання задач
регіонального пошуку для d-вимірного
випадку**

Робота присвячена дослідженню задачі регіонального пошуку в Евклідовому d-вимірному просторі. Зокрема, розглядається можливість застосування підходу розв'язання цієї задачі, який був запропонований для двовимірного випадку в роботі. В результаті розроблено метод з логарифмічною часовою складністю на пошук та використанням $O(N \log N)$ пам'яті.

Ключові слова: регіональний пошук, d-вимірний простір, квадро-дерево, опукла поверхня.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: vtereshch@gmail.com

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: alf.via@gmail.com

V.N. Tereshchenko¹, Dr. Sci.(Phis.-Math.), As. Prof.,
A. L. Fisunen², Postg. Stud.

**Features of solving the range searching
problems for d-dimensional case**

The paper is devoted research the range searching in Euclidean d-dimensional space. In particular, we consider the possibility of solving this problem by the approach that was proposed for two-dimensional case in [1]. The result is the developed method with logarithmic time complexity of search and which use $O(N \log N)$ memory.

Key Words: range searching, d-dimensional space, quad-tree, convex surface.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: vtereshch@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: alf.via@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Постановка проблеми. В роботі розглядається один із підходів розв'язання задачі регіонального пошуку для E^d простору.

Аналіз існуючих методів. Задачі регіонального пошуку для двовимірного випадку майже повністю досліджені, проте залишається багато відкритих питань для запитаних регіонів у тривимірному та інших просторах, де точні методи не досягають асимптотично-можливої нижньої оцінки складності, якщо існує лінійне обмеження по пам'яті. Звичайно існують наближені методи, та використання наближеного методу є доцільним лише тоді, коли існують суворі ресурсні обмеження по пам'яті при роботі алгоритму [4-6], [11]. При лінійному обмеженні на пам'ять складно побудувати швидкий алгоритм

пошуку в багатовимірній області, оскільки пам'яті не буде достатньо для побудови ефективних структур даних.

У роботах [3 - 6], [11] для розв'язання зазначеної задачі використовувється редукція задач в різних метричних просторах. Таке зведення для точного алгоритму, використовуючи розмірності Валика - Червоніска [3], дає $O(\sqrt{N} \log N)$ часу на регіональний запит у крузі та $O(N \log N)$ витрат пам'яті та попередньої обробки.

Іншим підходом є побудова ефективних структур даних, які б дозволяли одержати швидкий час пошуку з використанням $O(N \log N)$ пам'яті. В основному усі такі структури даних мають деревовидну структуру, що подібна до квадро-дерева/окто-дерева

регіону (quad/octtree region) [8], k -d *deques* [2] та *BD-deques* (BD-tree, fair-split tree) [9]. Зокрема, в [4], [5], [11] указується, що *BBD-дерево* являється узагальненням *BD-дерева* з додатковою функцією стяжки (*shrinking*). Усі структури даних є дерева висоти $O(\log_2 N)$. Вони відрізняються лише рівнем збалансованості дерева та множником, що вказує відношення поділу гіперплощиною гіперкуба відповідного вузла дерева для знаходження наступників (для *BD-дерева* та *BDD-дерева* це $\frac{1}{3}$, для k -d дерева

та квадродерева – $\frac{1}{2}$).

Таким чином доречним був би підхід, який з одного боку використовує редукцію, а з іншого швидкі структури даних для одержання бажаного результату. Так, зокрема, в роботі [1] запропонований ефективний алгоритм регіонального пошуку для запитного регіону, який обмежений криволінійною границею. Він дає асимптотичну складність пошуку $O(\log N)$ та $O(N^2)$ на попередню обробку і пам'ять. На етапі попередньої обробки цього алгоритму будується сітка (матриця) з N^2 точок вхідної множини. По заданій матриці будується тетрагідрове дерево, у вершинах якого містяться множини точок, які належать поточній півплощині. Якщо, наприклад, запитний регіон є круг, то розділивши його на чотири квадранти, для кожного такого квадранту в якому границя є монотонною функція, здійснюється пошук по квадро дереву вершин, які лежать всередині цієї частини круга.

В даній роботі ми пропонуємо модифікацію та узагальнення підходу, який представлено в [1], для багатовимірного випадку з асимптотичною оцінкою часу пошуку $O(\log N)$ та $O(N \log N)$ пам'яті.

2 Метод розв'язання задачі.

Не обмежуючи загальності, сформулює задачу регіонального пошуку для багатовимірної кулі в евклідовому просторі.

Постановка задачі регіонального пошуку у багатовимірній кулі. Для заданої фіксованої множини S із N точок визначити підмножину S' , $S' \subseteq S$ точок, які належить запитному регіону при будь-якому розташуванні кулі та величині її радіуса в просторі $\mathbb{R}^d$.

У загальному випадку регіоном може бути будь-яка геометрична фігура обмежена опуклою кривою поверхнею.

Побудуємо сітку між точками $A(a_1, a_2, \dots, a_d)$ та $B(b_1, b_2, \dots, b_d)$. Тобто одержимо всі можливі комбінації координат точок A та B , де i -та координата може бути або з A , або з B . Очевидно, що кількість таких комбінацій буде $2^d - 2$.

Твердження 1. Кожна точка розбиває простір $\mathbb{R}^d$ на 2^d півпросторів.

Означення 2. Гіперкубом простору $\mathbb{R}^d$ будемо називати декартовий добуток d обмежених відрізків $[l_1, r_1] \times [l_2, r_2] \times \dots \times [l_d, r_d]$, який ми запишемо у вигляді векторів цих обмежень $G = ([l_1, r_1], [l_2, r_2], \dots, [l_d, r_d])$, де $l_i \leq r_i, i = \overline{1, d}$.

2.1. Побудова розв'язку задачі.

При розв'язанні задачі регіонального пошуку для кулі ми модифікуємо існуючий алгоритм попередньої обробки, запропонований в роботі [1], враховуючи введені там позначення, що дозволить зменшити витрати пам'яті.

Попередня обробка та структури даних.

1. Складемо d векторів відповідних координат точок множини P' взятих окремо із кожної точки та відсортуємо їх. Отримаємо d векторів впорядкованих чисел

$$V = \{((x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^d))_{j=1}^d \mid j = \overline{1, d}, q = \overline{1, n}, \tilde{p}_q(p_i \in P' \wedge x_j^i = r_{i,j})\}$$

, усі можливі комбінації яких насправді відповідають значенням елементів із матриці K . Отже не потрібно зберігати всю інформацію з матриць K та $\tilde{K}$, а достатньо лише зберігати множини відсортованих координат точок.

2. Побудова дерева аналогічна [1].

Вектор V потребує $O(d \times N)$ пам'яті, а час на побудову квадро-дерева рівний $O(N \log_2 N)$ (аналогічно [1]). Дерево потребує $O(N \log_2 N)$ пам'яті, оскільки на кожному рівні дерева у нас завжди буде N точок і враховуючи, що висота дерева $\log_2 N$ отримаємо бажану оцінку. Тоді матиме місце алгоритм.

Алгоритм

Опишемо основні кроки алгоритму:

1. Без порушення загальності розглянемо одну з 2^d частин простору в якій частина сфери є монотонною функцією. Наприклад, гіперкуб простору $G_R = ([x_1^*, x_1^* + R], \dots, [x_d^*, x_d^* + R])$. Таке розбиття здійснюється (за твердженням 1) центром кулі $C(x_1^*, x_2^*, \dots, x_d^*)$.

2. Знаходимо гіперкуб $G^* = ([l_1^*, r_1^*], [l_2^*, r_2^*], \dots, [l_d^*, r_d^*])$, де $l_i^*, r_i^* \in [1, n], i = \overline{1, d}$ на матриці $\hat{K}$ (або у векторі V залежності від типу попередньої обробки), який відповідає обмеженню простору R^d гіперкубом G^{**} . Оскільки елементи в матриці $\hat{K}$ впорядковані за всіма координатами, то знаходження G^* потребує $O(\log_2 N)$ часу.

3. Наступний етап – це пошук на створеному дереві. Для цього послідовно від кореня до листків дерева перевіряються наступні твердження:

a) Якщо гіперкуб G вершини дерева повністю входить до G^{**} , то переходимо до пункту d).

b) Якщо гіперкуб G вершини не входить до G^{**} , тоді елементи множини S не будуть входити до кулі і пошук для заданої вершини дерева зупиняється.

c) Якщо гіперкуб G перетинається з G^{**} , тоді переходимо до пункту f).

d) Якщо для елемента $x^{\min} = (x_{i_1^{\min}, 1}^{\min}, x_{i_2^{\min}, 2}^{\min}, \dots, x_{i_d^{\min}, d}^{\min})$

матриці K (або

$$x^{\min} = (x_1^{i_1^{\min}}, x_2^{i_2^{\min}}, \dots, x_d^{i_d^{\min}}) \text{ для } V),$$

який має мінімальні індекси $(i_1^{\min}, i_2^{\min}, \dots, i_d^{\min})$, де $i_j^{\min} = l_j, j = \overline{1, d}$ з гіперкуба вершини

$G = ([l_1, r_1], [l_2, r_2], \dots, [l_d, r_d])$, не виконується

$$\text{нерівність } \sum_{j=1}^d (x_j^* - x_{i_j^{\min}, j}^{\min})^2 \leq R^2, \text{ то і усі}$$

елементи множини S відповідного піддерева не належать кулі, або S – порожня множина.

e) Якщо для елемента

$$x^{\max} = (x_{i_1^{\max}, 1}^{\max}, x_{i_2^{\max}, 2}^{\max}, \dots, x_{i_d^{\max}, d}^{\max})$$

(або $x^{\max} = (x_1^{i_1^{\max}}, x_2^{i_2^{\max}}, \dots, x_d^{i_d^{\max}})$ для V), матриці K , який має максимальні індекси $(i_1^{\max}, i_2^{\max}, \dots, i_d^{\max})$, де $i_j^{\max} = l_j, j = \overline{1, d}$ з

гіперкуба вершини $G = ([l_1, r_1], [l_2, r_2], \dots, [l_d, r_d])$, виконується

$$\text{нерівність } \sum_{j=1}^d (x_j^* - x_{i_j^{\max}, j}^{\max})^2 \leq R^2, \text{ то і}$$

всі відповідні піддерева (елементи множини S) належить кулі.

f) Інакше рекурсивно запускаємо алгоритм для нащадків поточної вершини дерева і переходимо до пункту а).

Таким чином ми отримаємо множину точок, які входять до заданої частини кулі. Час роботи такого алгоритму визначається пошуком по 2^d -гілковому дереву в найгіршому випадку $O(\log_2 N)$.

Застосувавши пункт 2) для всіх 2^d частин простору, де частина оболонки кулі є монотонною функцією та застосувавши пункт 3) з видозміненими підпунктами d) та f) отримаємо множину усіх точок, які належать кулі. Загальний час пошуку буде $O(2^d \log_2 N)$.

При фіксованому значенні d часова складність алгоритму буде $O(\log N)$ з витратами $O(N \log N)$ пам'яті. В той час як використання алгоритму попередньої обробки, який пропонується в [1] дає $O(N^d)$ витрат пам'яті.

3. Практична частина

Запропонований алгоритм реалізований на Java, що робить реалізацію не залежною від архітектури обчислювальної системи. Цього можна досягти, компілюючи початковий Java код у байт-код, який являє собою спрощені машинні команди. В подальшому програму можна виконати на будь-якій платформі, що має встановлену віртуальну машину Java, яка інтерпретує байт-код у код, пристосований до специфіки конкретної операційної системи і процесора.

4. Висновки

Ми запропонували один підхід до розв'язання задачі регіонального пошуку для заданого регіону обмеженого опуклою

поверхнею у евклідовому просторі. На прикладі регіону обмеженого сферою в E^d ми представили алгоритм, який виконує регіональний запит у режимі звіту за $O(\log N + i)$ часу та $O(N \log N)$ на попередню обробку та витрати пам'яті.

Практична реалізація алгоритму підтвердила вказані оцінки складності. Для практичної реалізації, яка потребує лінійної пам'яті потрібно перебудовувати структуру даних і використовувати наближені алгоритми. Алгоритм може працювати у кількісному режимі із запитними регіонами он-лайн, де проміжок між надходженнями даних не менше ніж $o(\log N)$ та кількістю точок не більшою ніж 10^5 .

Більше того, алгоритм можна узагальнити, не обмежуючись лише сферичними тілами. Для запитного регіону обмеженого гіперплощинами, можна організувати пошук на кожній частині простору, де функції гіперплощини монотонні. Тобто ми можемо це зробити аналогічно з нашим алгоритмом, змінюючи лише правило відсікання гілок дерева для заданої функції та правила вибору простору.

Список використаних джерел

1. Tereshchenko, Vasylyl' M.; Kas'yanov, Andriy A. On an approach to the solution of a local search problem // *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky*, Ky'iv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka 2006, No. 3, 265-269.
2. F. Preparata and M.I. Shamos / *Computational Geometry: An introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1985, -475 p.
3. Chazelle B., Welzl E.. Quasi-optimal range searching in spaces of finite VC-dimension //

Discrete Comput. Geom., 4(1989), pp. 467-489.

4. Arya S., Mount D.M.. Approximate range searching // *Computational Geometry: Theory and Applications*, 17 (2000). pp. 135-163.
5. Arya S., Malamatos T., Mount D. M. Space-time tradeoffs for approximate spherical range counting // *In Proc. 16th Annu. ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, pp. 535-544, 2005.
6. Fonseca G.D. da, Mount D.M., Approximate range searching: The absolute model // *Computational Geometry: Theory and Applications*, Elsevier, 43, pp. 434-444, 2010.
7. M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O.Schwarzkopf / *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2nd edition, 2000.
8. H.Samet. The Design and Analysis of Spatial Data Structures // Addison Wesley, Reading, MA, 1990.
9. P. B. Callahan and S. R. Kosaraju. A decomposition of multi-dimensional point-sets with applications to k-nearest-neighbors and n-body potential fields // *In Proc. 24th Annu. ACM Sympos. Theory Comput.*, pages 546-556, 1992.
10. H. Bronnimann, B. Chazelle, and J. Pach. How hard is halfspace range searching // *Discrete Comput. Geom.*, 10:143-155, 1993.
11. Arya S., Malamatos T., Mount D. M. The effect of corners on the complexity of approximate range searching // *Proc. of the 22nd annual symposium on Computational geometry*(2006), pp. 11-20.

Надійшла до редколегії 28.08.12

УДК 517.988

Халимон* О.О., студент

**Нова економічна модифікація методу
Корпелевич для монотонних задач про
рівновагу**

У роботі розглянуто алгоритми розв'язання монотонних задач про рівновагу. Проведено порівняльний аналіз класичних методів та їхніх модифікацій. Запропоновано новий алгоритм, який збігається швидше ніж інші на допустимих множинах складної структури. Доведено його слабку збіжність.

Ключові слова: задача про рівновагу, варіаційна нерівність, метод Корпелевич, проекція, слабка збіжність.

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м.Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: holyman.login@gmail.com

O. O. Khalymon*, student

**A new time-saving variant of Korpelevich's
method for monotone equilibrium problems**

We have analyzed and compared several classic search algorithms for monotone equilibrium problems and their modifications. Also, we introduced own method (a new time-saving modification), which showed itself more effective than classical ones for main sets of complicated structure and proved its weak convergence.

Key Words: equilibrium problem, variational inequality, Korpelevich's method, projection, weak convergence.

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova pr-t., 4d,
e-mail: holyman.login@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусайнов Д.Я.

Вступ

Досить широкий клас задач дослідження операцій, математичної економіки, тощо, можуть бути зведені до задач про рівновагу, для розв'язання яких існує багато методів, в тому числі методів градієнтного типу. Зазвичай досліджується дуже важливий частинний випадок — випадок варіаційних нерівностей. Як відомо, найпростіші з градієнтних методів у випадку неоптимізованих постановок вимагають для своєї збіжності використання підсилення умов монотонності. Одним зі способів подолання цієї проблеми є застосування методів екстраградієнтного типу. В своїй роботі [1] Г.М.Корпелевич запропонувала схему екстраградієнтного методу для частинних випадків рівноважних задач, котрий збігається лише за виконання умов монотонності та умови Ліпшица. Спосіб генерування послідовності в цьому методі ґрунтується на повторному проектуванні на допустиму множину двох трансляцій поточного наближення. Очевидно, що для допустимих множин складної структури зменшення числа проєктувань суттєво знижує обчислювальні витрати на здійснення однієї ітерації.

Узагальненням і дослідженням цього методу присвячено багато праць. Зокрема, в [2] була розглянута економічна (в сенсі складності обчислень на одному кроці) модифікація методу Корпелевич, де повторне проєктування на допустиму область було замінене проєктуванням на дотичну множину.

В даній роботі, поряд із цими двома алгоритмами, запропоновано ще кілька модифікацій методу Корпелевич, досліджено їх ефективність для варіаційних нерівностей та допустимих множин різного вигляду, доведено слабку збіжність найефективнішого з нових запропонованих алгоритмів.

Загальна задача про рівновагу

Для функціоналу $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ розглянемо задачу про рівновагу в наступному формулюванні:

$$\text{знайти } x \in C: f(x, y) \geq 0, \forall y \in C. \quad (1)$$

Постановка (1) включає в себе пошук сілових точок, рівноваг Неша, варіаційні нерівності та монотонні операторні вклучення. Наприклад, якщо покласти $f(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle$, то задача

(1) перетворюється на класичну варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: (Ax, y - x) \geq 0, \forall y \in C. \quad (2)$$

Нехай функціонал $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови:

- 1) $f(x, x) = 0, \forall x \in H$;
- 2) $f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \forall x, y \in H$ (монотонність);
- 3) $\forall x \in H$ функціонал $f(x, \cdot)$ опуклий та диференційований за Гато;
- 4) $\lim_{t \rightarrow 0} f(x + t(z - x), y) \leq f(x, y), \forall x, y, z \in H$.

Зауваження 1. Для варіаційної нерівності (2) умови 1) і 3) виконуються автоматично, а умови 2) і 4) рівносильні умовам монотонності та напівиісперанності оператора A відповідно.

Мас місце наступна лема.

Лема 1. Нехай C — опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , функціонал $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови 1)–4). Тоді для того, щоб точка $x \in C$ була розв'язком задачі (1), необхідно і достатньо виконання умови $(\nabla_2 f(y, y), y - x) \geq 0, \forall y \in C$, де $\nabla_2 f(a, b)$ — похідна Гато функціоналу $f(a, \cdot)$ в точці b .

Зауваження 2. Для справедливості леми 1 достатньо виконання умов 1)–4) на множині C .

Позначимо через S множину розв'язків задачі (1). З леми 1 випливає, що множина S опукла та замкнена. Надалі будемо вважати множину S непорожньою.

Екстраградісний метод Корпелевич

Нагадаємо основні моменти, пов'язані з екстраградісним методом Корпелевич.

Припустимо, що в додаток до 1)–4) функціонал $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ має властивість

$$5) \exists L \geq 0: \|\nabla_2 f(x, x) - \nabla_2 f(y, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

Зауваження 3. Для варіаційної нерівності (2) умова 5) рівносильна ліпшицевості зі сталою L оператора A .

Для задачі (1) схема екстраградісного методу Корпелевич має наступний вигляд.

Алгоритм 1.

1. Обрати початкове наближення $x_1 \in C, n = 1, \lambda > 0$.

$$2. \text{Обрахувати } y_n = Pr_C(x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n)).$$

3. Обрахувати

$$x_{n+1} = Pr_C(x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n)).$$

4. $n = n + 1$, перейти на крок 2.

Якщо в Алгоритмі 1 покласти $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$, то породжені ним послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ слабо збігаються до розв'язку задачі (1).

Зауваження 4. Якщо $y_n = x_n$, то $x_n \in S$ і Алгоритм 1 закінчить свою роботу. Дійсно, рівність

$$x_n = Pr_C(x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n))$$

рівносильна варіаційній нерівності

$$0 \leq (x_n - x_n + \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n), y_n - x_n) = \lambda (\nabla_2 f(x_n, x_n), y_n - x_n), \quad \forall y_n \in C.$$

$$\text{Звідки } f(x_n, y) = f(x_n, y) - f(x_n, x_n) \geq (\nabla_2 f(x_n, x_n), y - x_n), \quad \forall y \in C.$$

Зауваження 5. Для варіаційної нерівності (2) алгоритм матиме наступний вигляд

$$\begin{cases} y_n = Pr_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} = Pr_C(x_n - \lambda Ay_n). \end{cases}$$

Основний недолік Алгоритму 1 — необхідність обчислення двох метричних проєкцій на допустиму множину C для переходу до наступної ітерації. Лише при досить «простій» множині C ці проєктування конструктивно здійснені. В загальному випадку постає питання про ефективність методу Корпелевич.

Економічна модифікація екстраградісного методу Корпелевич

Відмовимось від умови, що точки $\{x_n\}$ належать множині C . Тоді для отримання x_{n+1} замість проєктування $x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n)$ на множину C природно запропонувати проєктувати точку $x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n)$ на дотичний для C в y_n півпростір, який визначається нормаллю $x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n) - y_n$. В результаті маємо наступний алгоритм.

Алгоритм 2.

1. Обрати початкове наближення $x_1 \in H, n = 1, \lambda > 0$.
2. Обрахувати $y_n = Pr_C(x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n))$.
3. Обрахувати $x_{n+1} = Pr_{T_{y_n}^C}(x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n))$, де $T_{y_n}^C = \{z \in H: (x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n) - y_n, z - y_n) \leq 0\}$.
4. $n = n + 1$, перейти на крок 2.

Зауваження 6. Обчислення на кроці 3 мають явний характер, а саме

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n) + \frac{x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n}{\|x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n\|^2} \times \begin{cases} 0, & x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n) \in T_n^x, \\ (x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n, y_n - x_n + \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n)), & x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n) \notin T_n^x. \end{cases}$$

Лема 2. Нехай послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ породжено Алгоритмом 2, $p \in S$. Тоді має місце нерівність $\|x_{n+1} - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Теорема 1. Нехай C — опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , функціонал $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови 1)–5), $S \neq \emptyset$, $\lambda \in (\delta_0, \frac{1}{L+\delta_1})$, $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$. Тоді послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, породжені Алгоритмом 2, слабко збігаються до деякої точки $z \in S$.

Трикрокові ітераційні алгоритми

Враховуючи ідеї робіт [1] та [2], природно запропонувати наступні трикрокові модифікації.

Алгоритм 3.

1. Обрати початкове наближення $x_1 \in C$, $n := 1$, $\lambda > 0$.
2. Обрахувати $y_n = Pr_C(x_n - \lambda Ax_n)$.
3. Обрахувати $z_n = Pr_C(y_n - \lambda Ay_n)$.
4. Обрахувати $x_{n+1} = Pr_C(x_n - \lambda Az_n)$.
5. $n := n + 1$, перейти на крок 2.

Зауваження 7. Алгоритм 3 експлуатує ідею Г.М.Корпелевича, але на кожному кроці здійснює три метричних проєкції на допустиму множину замість двох, як це робить Алгоритм 1.

Алгоритм 4.

1. Обрати початкове наближення $x_1 \in H$, $n := 1$, $\lambda > 0$.
2. Обрахувати $y_n = Pr_C(x_n - \lambda Ax_n)$.

$$x_{n+1} = y_n - \lambda Ay_n - \frac{\lambda Ax_n}{\|\lambda Ax_n\|^2} \times \begin{cases} 0, & y_n - \lambda Ay_n \in T_n^y, \\ (x_n - \lambda Ax_n - y_n, \lambda Ay_n), & y_n - \lambda Ay_n \notin T_n^y. \end{cases}$$

Доведення збіжності Алгоритму 6 почнемо зі встановлення для послідовності $\{x_n\}$ фейєрівської властивості (відносно множини S).

Лема 3. Нехай послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ породжено Алгоритмом 2, $p \in S$. Тоді має місце нерівність

$$= \|Pr_{T_n^x}(y_n - \lambda Ay_n) - (y_n - \lambda Ay_n) + (y_n - \lambda Ay_n) - p\|^2 = \|(y_n - \lambda Ay_n) - p\|^2 +$$

3. Обрахувати $z_n = Pr_{T_n^y}(y_n - \lambda Ay_n)$, де

$$T_n^y = \{z \in H: (y_n - \lambda Ay_n - z_n, z - z_n) \leq 0\}.$$

4. Обрахувати $x_{n+1} = Pr_C(x_n - \lambda Az_n)$.
5. $n := n + 1$, перейти на крок 2.

Алгоритм 5.

1. Обрати початкове наближення $x_1 \in H$, $n := 1$, $\lambda > 0$.
2. Обрахувати $y_n = Pr_C(x_n - \lambda Ax_n)$.
3. Обрахувати $z_n = Pr_{T_n^y}(y_n - \lambda Ay_n)$, де $T_n^y = \{z \in H: (y_n - \lambda Ay_n - z_n, z - z_n) \leq 0\}$.
4. Обрахувати $x_{n+1} = Pr_{T_n^x}(x_n - \lambda Az_n)$, де $T_n^x = \{z \in H: (x_n - \lambda Ax_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}$.
5. $n := n + 1$, перейти на крок 2.

Зауваження 8. Алгоритми 4 та 5 є синтезом ідей Алгоритмів 3 та 2.

Нова економічна модифікація екстраградієнтного методу Корпелевича

Алгоритм 6.

1. Обрати початкове наближення $x_1 \in H$, $n := 1$, $\lambda > 0$.
2. Обрахувати $y_n = Pr_C(x_n - \lambda Ax_n)$.
3. Обрахувати $x_{n+1} = Pr_{T_n^y}(y_n - \lambda Ay_n)$, де $T_n^y = \{z \in H: (\lambda Ay_n, y_n - z) \leq 0\}$.
4. $n := n + 1$, перейти на крок 2.

Зауваження 9. Обчислення на кроці 3 мають явний характер, а саме

$$\|x_{n+1} - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доведення. Маємо

$$\|x_{n+1} - p\|^2 = \|Pr_{T_n^y}(y_n - \lambda Ay_n) - p\|^2 =$$

$$\begin{aligned}
& + \|Pr_{T_n^Y}(y_n - \lambda Ay_n) - (y_n - \lambda Ay_n)\|^2 + 2 \left(Pr_{T_n^Y}(y_n - \lambda Ay_n) - (y_n - \lambda Ay_n), (y_n - \lambda Ay_n) - p \right) \\
\text{Оскільки} \quad & 2 \|Pr_{T_n^Y}(y_n - \lambda Ay_n) - (y_n - \lambda Ay_n)\|^2 + 2 \left(Pr_{T_n^Y}(y_n - \lambda Ay_n) - (y_n - \lambda Ay_n), (y_n - \lambda Ay_n) - p \right) = 2 \left((y_n - \lambda Ay_n) - Pr_{T_n^Y}(y_n - \lambda Ay_n), p - Pr_{T_n^Y}(y_n - \lambda Ay_n) \right) \leq 0, \\
& \text{то, } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ маємо} \quad \|x_{n+1} - p\|^2 \leq \|(y_n - \lambda Ay_n) - p\|^2 - \\
& - \|Pr_{T_n^Y}(y_n - \lambda Ay_n) - (y_n - \lambda Ay_n)\|^2 = \|(y_n - \lambda Ay_n) - p\|^2 - \|x_{n+1} - (y_n - \lambda Ay_n)\|^2 = \\
& = \|y_n - p\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda(p - x_{n+1}, Ay_n). \quad (4)
\end{aligned}$$

З монотонності оператора $\nabla_2 f(x, y)|_{x=y}$,
включення $p \in S$ та леми 1 слідує

Отже,

$$0 \leq (Ay_n - Ap, y_n - p) \leq (Ay_n, y_n - p) - (Ap, y_n - p) \leq (Ay_n, y_n - p) = (Ay_n, p - x_{n+1}) \leq (Ay_n, y_n - x_{n+1}). \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& - (Ap, y_n - p) \leq (Ay_n, y_n - p) = \\
& = (Ay_n, y_n - x_{n+1}) + (Ay_n, x_{n+1} - p).
\end{aligned}$$

Оцінивши за допомогою (5) праву частину (4), одержимо $\|x_{n+1} - p\|^2 \leq \|y_n - p\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda(Ay_n, y_n - x_{n+1})$.

$$\begin{aligned}
\text{Далі} \quad \|x_{n+1} - p\|^2 & \leq \|y_n - p\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \\
& + 2\lambda(Ay_n, y_n - x_{n+1}) = \|y_n - p\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \\
& + (-\|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_n - \lambda Ay_n - y_n, x_{n+1} - y_n)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Оскільки } x_{n+1} \in T_n^Y, \text{ то маємо} \quad & (y_n - \lambda Ay_n - y_n, x_{n+1} - y_n) = \\
& = (-\lambda Ax_n, x_{n+1} - y_n) + \lambda(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \lambda(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Отже,} \quad \|x_{n+1} - p\|^2 & \leq \|y_n - p\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 - \\
& - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Оскільки} \quad \|y_n - p\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 & = ((x_n, x_n) + (p, p) - 2(x_n, p)) + \\
& + (2(x_n, p) + 2(y_n, x_{n+1}) - 2(y_n, p)) - ((x_{n+1}, x_{n+1}) + (x_n, x_n)) \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{то з (6) маємо} \quad \|x_{n+1} - p\|^2 & \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\
& + 2\lambda(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n).
\end{aligned}$$

Враховуючи ліпшицевість $\nabla_2 f(x, y)|_{x=y}$, одержимо

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 & \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \\
& - \|x_{n+1} - y_n\|^2 + 2\lambda L \|x_n - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Звідки} \quad \|x_{n+1} - p\|^2 & \leq \|x_n - p\|^2 - \\
& - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2 - \\
& - (\|x_{n+1} - y_n\| - \lambda L \|x_n - y_n\|)^2 \leq \\
& \leq \|x_n - p\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2.
\end{aligned}$$

що й т.б.д.

Теорема 2. Нехай C — опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , функціонал $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови 1)-5), $S \neq \emptyset$, $\lambda \in (\delta_0, \frac{1}{L+\delta_1})$, $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$. Тоді послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, породжені Алгоритмом 6, слабо збігаються до деякої точки $z \in S$.

Доведення. Зафіксуємо точку $p \in S$ і покладемо $c = 1 - \lambda^2 L^2 \in (0, 1)$. З нерівності (3) маємо $c \|x_n - y_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2$. Оскільки $\|x_n - p\|^2 \leq \|x_{n-1} - p\|^2 - c \|x_{n-1} - y_{n-1}\|^2$, то $c \|x_n - y_n\|^2 + c \|x_{n-1} - y_{n-1}\|^2 \leq \|x_{n-1} - p\|^2$. Отже, $\forall n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\sum_{k=1}^n c \|x_k - y_k\|^2 \leq \|x_1 - p\|^2.$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - y_k\|^2 \leq \frac{\|x_1 - p\|^2}{c}$$

і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (7)$$

Згідно леми 1 та (7) впливає обмеженість послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$. Розглянемо підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, слабкозбіжну до деякої точки $z \in C$. Тоді

$$y_{n_k} \rightarrow z.$$

Покажемо, що $z \in S$. $\forall x \in C$ маємо

$$0 \leq (\lambda A x_{n_k}, x - y_{n_k}) \leq \lambda (A x, x - y_{n_k}).$$

Перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$, отримаємо $(A x, x - z) \geq 0$, $\forall x \in C$. Отже, $z \in S$.

Покажемо, що $x_n \rightarrow z$ (тоді з $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ буде випливати $y_n \rightarrow z$).

Від супротивного. Припустимо, що існує підпослідовність $\{x_{m_k}\}$ така, що $x_{m_k} \rightarrow z'$ і $z' \neq z$. З монотонності числової послідовності $(\|x_n - p\|)$ ($p \in S$) слідкує

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| < \\ < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z'\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z'\| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - z'\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|, \end{aligned}$$

що абсурдно. Отже, $z = z'$.

Реалізація алгоритмів

Розглядаємо реалізацію алгоритмів для варіаційної нерівності (2).

В якості простору оберемо n -вимірний евклідов простір.

Оператор A — лінійний, $A = (a_{ij})$; $i, j = \overline{1, N}$. Допустима множина C задається у вигляді

$$C = \bigcap_{i=1}^M C_i$$

де C_i — елементарна опукла множина, проектування на яку здійснюється просто.

Зуваження 10. Оскільки довільна опукла множина апроксимується півпросторами, то в якості множин C_i достатньо використовувати саме їх.

Далі, нехай C_i мають вигляд $(a_i, x) \geq b_i$. Проектування на них здійснюється наступним чином:

$$Pr_{C_i} x = \begin{cases} x, & (a_i, x) \geq b_i; \\ x - \frac{(a_i, x) - b_i}{\|a_i\|^2} a_i, & (a_i, x) < b_i. \end{cases}$$

Тоді проекцію на C можна задати у вигляді

$$Pr_C x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Pr_{C_i} x.$$

Для тестування алгоритмів використовуватимемо наступні оператори, що задаються матрицями розмірності $n \times n$:
 I — одинична матриця;

$$G = (g_{ij}), \quad g_{ij} = \begin{cases} 5, & i = j; \\ \frac{1}{i-j}, & i \neq j. \end{cases}$$

Згідно з критерієм Сільвестра, ці матриці є додатньо-визначеними, що для лінійних операторів еквівалентно монотонності.

Обмежимо сталу Ліпшица для обох операторів згори числом $L = 24$. Тоді, згідно з цим, оберемо значення λ . Нехай надалі $\lambda = \frac{1}{25}$.

Оберемо точність $\varepsilon = 10^{-4}$ (ε з умови зупинки алгоритмів: $\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$).

В якості множин C_i (якщо в конкретному тесті не вказано інше) оберемо множини $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n: 2x_p + x_q \geq 1; p, q = \overline{1, n}\}$.

Обчислення проведено за допомогою програмного пакету Maple 13.

Результати обчислень для зручності подано у вигляді таблиць.

Обчислювальні результати

Для початку, перевіримо, чи збігаються різні модифікації алгоритмів до однієї й тієї ж точки. Для цього покладемо $\varepsilon = 10^{-4}$, $n = 4$.

Алг.	Отриманий вектор
для матриці I	
A_1	(0.30777; 0.30777; 0.30777; 0.30777)
A_2	(0.30775; 0.30775; 0.30775; 0.30775)
A_3	(0.30781; 0.30781; 0.30781; 0.30781)
A_4	(0.30777; 0.30777; 0.30777; 0.30777)
A_5	(0.30775; 0.30775; 0.30775; 0.30775)
A_6	(0.30775; 0.30775; 0.30775; 0.30775)

для матриці G	
A_1	(0.21825; 0.18800; 0.17053; 0.15407)
A_2	(0.21822; 0.18804; 0.17052; 0.15403)
A_3	(0.21830; 0.18803; 0.17053; 0.15404)
A_4	(0.21825; 0.18800; 0.17053; 0.15407)
A_5	(0.21822; 0.18804; 0.17052; 0.15403)
A_6	(0.21818; 0.18803; 0.17054; 0.15407)

Як бачимо, результати різняться незначним чином.

Дослідимо, швидкість роботи алгоритмів в залежності від складності допустимих множин.

Оберемо знову $\varepsilon = 10^{-4}$ та $n = 8$.

В першому випадку розглянемо описану вище сім'ю множин C_i (загальна к-ть півпросторів становить $n^2 = 64$)

У другому випадку доповнимо сім'ю множин C_i множинами вигляду

$$\{x \in \mathbb{R}^n: 4x_p + 2x_q \geq 1; p, q = \overline{1, n}\}$$

(загальна к-ть півпросторів при цьому складатиме $2n^2 = 128$)

В третьому випадку розглянемо сім'ю множин $\{x \in \mathbb{R}^n: 2^\mu x_p + 2^{\mu-1} x_q \geq 1; p, q = \overline{1, n}; \mu = \overline{1, 4}\}$ (сумарна к-ть півпросторів становить $8n^2 = 512$)

Алгоритм	Час роботи, с		
скл. мн. C	64	128	512
для матриці I			
A_1	1.265	2.578	8.640
A_2	1.032	1.907	6.343
A_3	1.891	3.984	13.531
A_4	1.640	3.234	9.531
A_5	1.313	2.547	7.375
A_6	0.969	1.922	6.266
для матриці G			

A_1	1.484	2.625	7.687
A_2	1.203	1.859	2.937
A_3	2.172	4.093	12.406
A_4	1.797	3.156	8.375
A_5	1.671	2.281	3.453
A_6	1.125	1.718	2.922

Швидкість роботи дуже сильно залежить від складності допустимої множини. Алгоритми, що використовують на одному кроці більшу к-ть проєкцій на цю множину, приречені на повільнішу роботу. Помітимо також, що Алгоритм 6 (нова економ. модиф. методу Корпелевич) та Алгоритм 2 (економ. модиф. методу Корпелевич) працюють найшвидше, випереджаючи класичний метод.

Висновки

В роботі розглянуто алгоритми знаходження наближених розв'язків варіаційних нерівностей.

Було розглянуто класичні алгоритми (метод Корпелевич та економ. модиф. методу Корпелевич), а також запропоновано декілька нових їх модифікацій.

Досліджено ефективність роботи цих алгоритмів для варіаційних нерівностей та допустимих множин різного вигляду.

Доведено слабку збіжність найшвидшого з нових запропонованих алгоритмів.

Список використаних джерел

1. G.M. Korpelevich. An Extragradient Method for Finding Saddlepoints and Other Problems. – Economy and Math. Methods. – 1976. – Ch. 12, №4. – P.747-756.
2. S.I. Lyashko, V.V. Semenov, T.A. Voitova. Low-Cost Modification of Korpelevich's Method for Monotone Equilibrium Problems. – Cybernetics and System Analysis, 2001. – №4. – P. 146-154.

Надійшла до редколегії 06.06.12

УДК 621.391 : 519.24

Швець О.Ф., к.ф.-м.н., доц.

**Про деякі задачі оптимізації областей
практичної стійкості та їх використання**

В статті розглядається комплекс питань пов'язаних з аналізом, оцінкою та структурно-параметричною оптимізацією динамічних систем. Підкреслюється зв'язок таких задач з проблемами керування пучками траєкторій.

Ключові слова: динамічна система, аналіз чутливості, параметрична оптимізація.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, вул. Васильківська 90 а, e-mail: olgasv@univ.kiev.ua

O.F. Shvets, Ph.D. in Physics and Mathematics

**About some optimization problem areas
of practical stability and their use**

The complex of questions connected with the analysis, evaluation, and structural-parametric optimization of dynamical systems were considered. Connection of such problems with tasks of control by beams of trajectories is emphasized.

Key words: dynamical system, sensitivity analysis, variable phase space.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Vasilkivska str., 90a e-mail: olgasv@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ

Аналіз задач оптимального проектування різних технічних систем приводить до нових математичних постановок в областях стійкості та оптимізації [1-4]. Наприклад, для розрахунку області захвату частинок в процесі прискорення необхідні числові алгоритми визначення оптимальних областей практичної стійкості (ПС) [3-9]. Оптимальність області розуміється як в заданій структурі (сфера, еліпсоїд, узагальнений еліпсоїд), так і в таких структурах, які є максимальними за об'ємом. Тоді, одна з важливих задач про максимізацію області захвату частинок в режим прискорення є задачею ПС в оптимізаційній постановці.

Постановка задач

Припустимо, що $a \in G_a$ - це r -вимірний вектор всіх можливих технічних та фізичних параметрів, які потрібно вибрати згідно бажаного критерію з множини G_a . x - n -вимірний вектор стану, який задовольняє деякій системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, a), t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

При проектуванні систем прискорення та фокусування актуальними є задачі.

Задача I. Задано початковий розкид частинок $M_0(x_0 = x(t_0) \in M_0)$. Необхідно вектор параметрів a вибрати з умови

$$\min_{a \in G_a} \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, a)) \quad (2)$$

Задача II. Нехай G_0 - множина захвату частинок (може бути й максимальна за об'ємом), $m(G_0) = m(a)$ - її міра. Необхідно максимізувати область захвату

$$\max_{a \in G_a} m(a). \quad (3)$$

Відмітимо, що задачі (2), (3) виникають в багатьох соціально-економічних та інженерних проблемах. Складність розв'язування цих задач полягає в тому, що вони мінімаксні, а також в обчисленні функції $m(a)$. В реальних прикладних задачах типу (3) необхідно обчислювати

оптимальні оцінки, які в подальшому максимізуються за вільними параметрами.

Для розв'язування поставлених задач приведемо результати досліджень по наступних взаємозв'язаних напрямках.

Дослідження задач ПС систем, залежних від параметрів

Розглянемо постановки задач ПС систем вигляду (1) і сформулюємо декілька характерних тверджень, на основі яких можна розв'язувати не тільки задачі про стійкість, а й різні задачі аналізу чутливості, розрахунку допусків на параметри [1,10,11].

Незбурений розв'язок $x(t,0) \equiv 0$ системи (1) називають $\{G_0^*, G_0^*, \Phi, t_0, T\}$ - стійким, якщо $x(t, \alpha, x_0) \in \Phi, t \in [t_0, T]$ для довільних $x_0 \in G_0^*$ та $\alpha \in G_0^* \subset G_a$.

Тут $G_0^* (0 \in G_0^*)$ - множина допустимих значень параметрів α , які використовуються при аналізі ПС.

Зрозуміло, що наведені означення є досить загальними. На їх основі можна отримувати частинні випадки, які використовуватимуться при розв'язуванні важливих практичних задач. Наприклад, якщо в першому означенні G_0^* містить лише одну точку $\bar{x}_0$, то введене поняття $\{G_0^*, G_0^*, \Phi, t_0, T\}$ - стійкості безпосередньо пов'язане з розрахунком допусків на параметри.

Дослідження ПС в смислі введених означень проводять з допомогою функцій Ляпунова $V(x, t, \alpha)$. При формулюванні та доведенні теорем про ПС використовують відомі поняття додатньої (або від'ємної) визначеності за частиною змінних, початкових умов та динамічних обмежень на фазові координати [1,10,11].

Теорема 1. Якщо для системи (1) існують додатньо визначена за x функція і $0 < \varepsilon \leq 1$, які задовольняють співвідношення:

$$\{x: V(x, t, \alpha) \leq 1\} \subset \Phi, t \in [t_0, T], \alpha \in G_0^*, \quad (4)$$

$$\frac{dV(x, t, \alpha)}{dt} \stackrel{(1)}{\leq} 0, x \in \Phi, \setminus \{x: V(x, t, \alpha) < 1 - \varepsilon\}, \quad (5)$$

$$t \in [t_0, T], \alpha \in G_0^*,$$

$$G_0 \subset \{x: V(x(t_0, \alpha), t_0, \alpha) < 1\}, \alpha \in G_0^*, \quad (6)$$

то незбурений розв'язок $x(t,0) \equiv 0$ системи (1) $\{G_0^*, G_0^*, \Phi, t_0, T\}$ - стійкий.

Відмітимо, що наведена теорема допускає обернення у випадку, коли множини G_0^* задаються в структурних формах: сфера, еліпсоїд, узагальнений еліпсоїд і т.ін.

Зауваження. Сформульована теорема

допускає обернення в тому випадку, якщо $G_0^* = \{x, \alpha: W(x) < 1\}$, де $W(x)$ - відома додатньо визначена функція своїх аргументів. Функцію Ляпунова, яка задовольняє умовам теореми 1, можна побудувати використовуючи загальний інтеграл системи (1).

Необхідні та достатні умови сформульованих теорем використовуються для виводу критеріїв, які дають оптимальні оцінки в задачах аналізу ПС.

Твердження 1. Для $\{G_0^*, G_0^*, \Phi, t_0, T\}$ - стійкості системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha + f(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (7)$$

при відомих збуреннях необхідно і достатньо, щоб

$$\{x: W(X(t_0, t)x - G_1(t)\alpha - a(t)) < 1\} \subset \Phi, \quad (8)$$

$$t \in [t_0, T], \alpha \in G_0^*,$$

$$\text{де } G_1(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau) G(\tau) d\tau, a(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

$$G_0^* = \{x: W(x) < 1\}.$$

Твердження 2. Для $\{c, B, c_0, B_0, G_1, t_0, T\}$ - стійкості системи (7) при відомих збуреннях необхідно і достатньо, щоб

$$c^2 \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\alpha \in \{ \alpha : \alpha^T B_{\alpha} \alpha \leq c_{\alpha}^2 \}} \frac{(1 - |I_s^T(t) \chi(a(t) + G_1(t) \chi)|^2)}{I_s^T(t) Q(t) I_s(t)}, \quad (9)$$

По аналогії з твердженням 2 можна записати критерій $\{c, B, c_{\alpha}, B_{\alpha}, \Phi, t_0, T\}$ - стійкості.

При еліпсоїдальних обмеженнях на параметри можна обчислити мінімум по α і співвідношення (9) перепишеться в такому вигляді.

$$|I_s^T(t) \chi(a(t) + G_1(t) \chi)| < 1, \quad t \in [t_0, T], \quad S = \overline{1, N},$$

$$\alpha \in \{ \alpha : \alpha^T B_{\alpha} \alpha \leq c_{\alpha}^2 \}.$$

В (9) матриця $Q(t) = X(t, t_0) B^{-1} X^T(t, t_0)$ задовольняє відомому матричному диференціальному рівнянню Ляпунова [1].

$$c^2 \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\alpha \in \{ \alpha : \alpha^T B_{\alpha} \alpha \leq c_{\alpha}^2 \}} \frac{(1 - |I_s^T(t) \chi(a(t) + G_1(t) B_{\alpha}^{-1} G_1^T(t) I_s(t) \chi)|^2)}{I_s^T(t) Q(t) I_s(t)}$$

при наявності, наприклад, лінійних обмежень на функції чутливості:

$$u(t, \alpha) \in \Gamma_t = \left\{ u(t, \alpha) : \sum_{i=1}^r |I_i^T(t) u^{(i)}(t)| \leq s, s = 1, \dots, N \right\}. \quad (14)$$

З останнього співвідношення видно, що $c = c(c_{\alpha})$. Тому, при розв'язуванні конкретних задач можна вибрати компромісні варіанти.

Розв'язування задач чутливості на основі методів ПС

Розглянемо систему (1), в якій початкові умови залежать від α

$$x(t_0, \alpha) = x^{(0)}(\alpha), \quad t_0 = t_0(\alpha) \quad (10)$$

В припущенні неперервної диференційованості по α функцій (10) і правих частин системи (1) існують неперервні функції чутливості $u^{(i)} = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha_i}, i = 1, 2, \dots, r$, які є розв'язком задач Коші

$$\frac{du^{(i)}}{dt} = \frac{\partial f(\bar{x}, t, \bar{\alpha})}{\partial x} u^{(i)} + \frac{\partial f(\bar{x}, t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_i}, \quad (11)$$

$$u^{(i)}(t_0) = \frac{\partial x^{(0)}(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_i} - f(x^{(0)}(\bar{\alpha}), t_0(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) \frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (12)$$

Тут $\bar{\alpha}, \bar{x}$ - розрахункові вектори параметрів і стану системи (1).

Перш за все розглянемо задачу мінімізації критерію якості при обмеженнях на функції чутливості. Нехай маємо задачу

$$I(\alpha^{(0)}) = \min_{\alpha \in G_{\alpha}} \Phi(x(t, \alpha)) \quad (13)$$

Для мінімізації функціоналу (13) скористаємося ітераційними методами градієнтного спуску [1]

$$a_i^{(k+1)} = P_{G_{\alpha}} \left\{ a_i^{(k)} - \rho_k \text{grad}_i^T \Phi \left(x \left(T, a^{(k)} \right) \right) u^{(i)} \left(T, a^{(k)} \right) \right\}, \quad (15)$$

$$i = \overline{1, r}, k = 0, 1, \dots,$$

де $P(\cdot)$ - операція проектування вектора параметрів α на $G_{\alpha}^{(k)} \subset G_{\alpha}$, ρ_k - крок градієнтного спуску, $u^{(i)}(t, \alpha) = [u^{(i)1}(t, \alpha), u^{(i)2}(t, \alpha), \dots, u^{(i)r}(t, \alpha)]$ - вектор чутливості розмірності $n \cdot r$.

Щоб врахувати обмеження (14) введемо множину

$$G_{\alpha} = \left\{ u(t_0) : \sum_{i=1}^r u^{(i)T}(t_0) B_i u^{(i)}(t_0) < c^2 \right\}. \quad (16)$$

Для того, щоб $u(t, \alpha^{(k)}) \in \Gamma$, параметри на $(k+1)$ -ій ітерації вибираємо з множини

$$G_a^{(i)} = G_a \cdot \left\{ \alpha : \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i} - f(x_0, t_0, \alpha) \right)^T B_i \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_i} - f(x_0, t_0, \alpha) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_i} \right) < c^2 \right\} \quad (17)$$

Причому згідно наведених вище критеріїв величину c вибираємо таким чином

$$c^2 \leq \min_{\substack{t \in [t_0, T] \\ S=1,2,\dots,N}} \frac{\left(1 - \left| \sum_{i=1}^r I_s^{(i)T}(t) a^{(i)}(t) \right| \right)^2}{\sum_{i=1}^r I_s^{(i)T}(t) X(t, t_0) B_i^{-1} X^T(t, t_0) I_s^{(i)}(t)} \quad (18)$$

$$\left| \sum_{i=1}^r I_s^{(i)T}(t) a^{(i)}(t) \right| < 1, \quad S=1,2,\dots,N, t \in [t_0, T].$$

Тут $X(t, t_0)$ - нормована за моментом t_0 фундаментальна матриця, яка відповідає однорідній системі (11) при $\bar{a} = \alpha^{(k)}$,

$$a^{(i)}(t) = \int_{t_0}^T X(t, \tau) \frac{\partial f(\tau, \alpha^{(k)})}{\partial \alpha_i} d\tau.$$

Відмітимо, що описана методика урахування обмежень на функції чутливості (14) виконується лише на номінальних значеннях вектора $\alpha^{(k)}$. Для розв'язування задач гарантованої чутливості можна запропонувати такий конструктивний підхід. Провести лінеаризацію системи (1) в околі будь-якого розрахункового зв'язку. Похибку апроксимації системи оцінити вектором постійно діючих збурень для всіх $\alpha \in G_a$. На $(k+1)$ -ій ітерації вектор α необхідно вибрати з множин (17), в яких значення c вибирається із співвідношень типу (18). Модуль $\left| \sum_{i=1}^r I_s^{(i)T}(t) a^{(i)}(t) \right|$ легко оцінюється для всіх $\alpha \in G_a$ через вектор постійно діючих збурень.

Розвитку цих проблем для різних класів динамічних систем присвячено ряд робіт [1, 10, 11]. Характерною їх особливістю є: з однієї сторони - математичні постановки задач, пов'язані з дослідженням практичної стійкості параметричних систем, з іншої -

конструктивність та числова направленість запропонованих алгоритмів. Це дає змогу проектувати технічні системи з обмеженою чутливістю, домагатись якості гарантованої чутливості на розрахункових значеннях параметрів.

Оптимізація оцінок в задачах ПС

Як відзначалось вище, більшість прикладних задач моделювання, аналізу та оптимізації доцільно розглядати саме в структурованих формах. Це дає можливість не тільки спростити розрахунки оптимальних характеристик, а й конструювати системи в блочно-структурній формі з подальшою оптимізацією параметрів в структурах, які простіше технічно реалізувати [1, 5-11]. На практиці виникають складні задачі оптимального проектування таких технічних систем, структура яких наперед не відома, а самі підсистеми задані з точністю до деяких параметрів. Задача полягає в тому, щоб з заданих підсистем оптимально сконструювати систему, яка б мала бажані вхідні та вихідні характеристики.

В математичному плані такі задачі мало досліджені. Це зв'язано з певними математичними труднощами, які виникають при цьому: об'єкт конструюється з параметрично заданих елементів; послідовність розміщення цих елементів не відома; змінюється розмірність вектора фазового стану; існують розриви вектора фазового стану і т. ін.

Аналізуючи задачі 1, 2 бачимо, що ми маємо справу з недиференційованими критеріями якості. Зокрема, критерієм (3) формулюється задача оптимізації області ПС (області захвату частинок в режим прискорення). Так як $m(\alpha)$ в (31) обчислюється через оцінки типу (9), (18), то ми приходимо до траскторних мінімаксних задач оптимізації. Причому характерними задачами для нашого випадку є дві: мінімізація функції максимуму за початковими умовами і функції максимуму за незалежною змінною

$$\min_{\alpha \in G_a} \max_{x_0 \in M_0} \Phi_1(x(t, x_0, \alpha)), \quad (19)$$

$$\min_{\alpha \in G_0} \max_{t \in [0, T]} \Phi_2(x(t, \alpha)). \quad (20)$$

Практичні задачі складніші ніж (19), (20). В них, як правило, необхідно мінімізувати за $\alpha \in G_0$ функцію максимуму як за початковими умовами так і за незалежною змінною

$$\min_{\alpha \in G_0} J(\alpha) = \max_{x_0 \in M_0} \max_{t \in [0, T]} \Phi(x(t, x_0, \alpha)). \quad (21)$$

Відомо, що функція $J(\alpha)$ диференційована в кожній точці $\alpha \in G_0$ по будь-якому напрямку за умови, що $\Phi(x(t, x_0, \alpha))$ диференційована по компонентах вектора α . Якщо $\alpha^{(opt)}$ розв'язок задачі (21), то необхідні умови оптимальності полягають в тому, що похідна $J(\alpha)$ за будь-якими напрямками обчислена в точці α є невід'ємною [1,6,7]

$$\max_{\alpha \in G_0} \min_{x_0 \in M_0} \min_{t \in M} \int_{t_0}^T \psi^T(t, \tau, x_0, \alpha^{(opt)}, t) \times \\ \times \partial f(x, t, \alpha^{(opt)}) / \partial \alpha (\alpha - \alpha^{(opt)}) dt \geq 0. \quad (22)$$

Тут $\bar{M}_0, M$ - множина точок, в яких досягаються максимуми за x_0 і t в (21), $\partial \Phi(x(t, x_0, \alpha^{(opt)}))$ - множина субдиференціалів в точці x_0, τ , $\psi(t, \tau, x_0, \alpha^{(opt)}, t)$ - розв'язок спряженої задачі

$$\frac{d\psi}{dt} = - \left(\frac{\partial f(x(t, x_0, \alpha^{(opt)}), t, \alpha^{(opt)})}{\partial x} \right)^T \psi, \quad (23) \\ \psi(\tau, \tau, x_0, \alpha^{(opt)}, t) = -I.$$

Для числового розв'язання задачі (21) можна скористатися ітераційним методом

$$\alpha^{(i+1)} = P_{G_0}(\alpha^{(i)} - \rho_i G(\alpha^{(i)})), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

де $\alpha^{(0)} \in G_0$ - початкове наближення, додатні числа ρ_i визначають крок спуску на i -ї ітерації, $G(\alpha^{(i)})$ - напрямок спуску на цій же

ітерації. Якщо функція диференційована і максимуми за початковими умовами та незалежною змінною єдині, то за $G(\alpha^{(i)})$ можна брати градієнт функції цілі на i -ї ітерації. При розв'язуванні конкретних задач керування пучками траєкторій зарекомендував себе метод найшвидшого спуску [1,8,9].

Формування динаміки заряджених пучків з оптимальними вихідними характеристиками на основі методів ПС

Не приводячи громіздких рівнянь руху частинок в електромагнітних полях, розглянемо найпростішу математичну модель в симетричному випадку

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha), \quad (25)$$

$$\frac{dy}{dt} = A(x, t, \alpha)y, \quad t \in [0, T], \quad x(0) \in M_0.$$

Тут $x^T = (x_1, x_2)$, $y^T = (y_1, y_2)$ - вектори повздовжніх та радіальних координат, α - r -вимірний вектор параметрів, який визначає структуру поля і саму прискорюючо-фокусуючу систему, M_0 - розкид частинок за x в момент $t = 0$, T - довжина установки. В найпростішому випадку задаються фазові обмеження

$$y(t) \in \Gamma_r = \{y : |y_i| \leq a_i, t \in [0, T]\}. \quad (26)$$

Задача полягає в розрахунку такого параметра α , який би давав максимальний захват частинок в режим прискорення за радіальними координатами. При цьому структура області захвату в режим прискорення визначається у вигляді $G_0 = \{y : y^T B y \leq c^2\}$ з заданою симетричною додатньо-визначеною матрицею B . Використовуючи (12) оцінку області захвату можна записати таким чином

$$c^2 = \min_{t \in [0, T]} \min_{\alpha \in M} a^2 / q_{11}(t, x_0, \alpha), \quad (27)$$

де $q_{11}(t, x_0, \alpha)$ - елемент матриці $Q(t, x_0, \alpha)$, яка є розв'язком задачі Коші (13), за умови, що $A(t) = A(x(t, x_0, \alpha), t)$ - матриця розмірності 2×2 .

Таким чином, ми прийшли до розв'язування задачі мінімаксної параметричної оптимізації, яку, при $a = const$, можна записати в такому вигляді

$$\min_{\alpha \in G_0} \max_{t \in [t_0, T]} \max_{x_0 \in M_0} q_{11}(t, x_0, \alpha). \quad (28)$$

Висновки

В статті розглядається комплекс питань пов'язаних з аналізом, оцінкою та структурно-параметричною оптимізацією динамічних систем. Підкреслюється зв'язок таких задач з проблемами керування пучками траєкторій

Побудовані алгоритми є досить загальними і можуть бути використані для розв'язування задач аналізу стійкості та чутливості, оптимізації, обчислення допусків на параметри широкого класу динамічних систем, які залежать від параметрів.

Список використаних джерел

1. Bublik B.N., Garashchenko F.G., Kyrychenko M.F. Scrunches-parameters optimization and stability of dynamics of bunches. - K.: Naukova dumka, 1985. - 304 p.
2. Kyrychenko M.F. Introduction to the theory of stabilization of motion. - K., Vyscha school, 1974. -184 p.
3. Murin B.P., Bondarenko B.I., Kushin B.B. and other Linear accelerating of ions. - .I. Problems and theory. -M.: Atomyzdat, 1978. - 64 p.

4. Ovsannikov D.A. Mathematical methods of control by bunches. - L.: LGU, 1980. - 228 p.

5. Garashchenko F.G. Research of tasks of practical stability by numeral methods and optimization of dynamics of bunches. PMM, 1987, T51, №5, p. 717-723.

6. Garashchenko F.G. Undifferentiated tasks of Scrunches-parameters optimization and planning of accelerating and focusing systems. Automation, 1986, №1, p. 50-53.

7. Garashchenko F.G., Bashnaykov A.N. About the optimum control by the bunch of trajectory with the undifferentiated criteria of quality. Problems of control and informatics, 1998, №3, p.6-16.

8. Garashchenko F.G., Sokolov L.S., Chulay A.V. To the task of optimization of kvaziperiodical structures in the linear resonance accelerating of ions. Higher educational establishments, Physical, 1980, № 6, p. 81-85.

9. Garashchenko F.G., Kushin B.B., Plotnikov S.V., Sokolov L.S., Strashnov I.V., Fedotov P.A., Kharchenko I.I., Chulay A.V. Optimal models of acceleration of heavy ions in the linear accelerating with the asymmetric fazochenge focusing. Magazine of technical physics, 1982, T.52, №3, p. 460-469.

10. Garashchenko F.G., Pantalienko L.A. Analysis and estimation of the parameters systems on the basis methods of practical stability. Problems of management and informatics, 1996, №1-2, p. 145-161.

11. Garashchenko F.G., Pantalienko L.A. Research of tasks of theory of sensitiveness by the methods of practical stability. AN USSR, Technical cybernetics, 1989, V.6, p.17-25.

Надійшла до редколегії 11.09.12

УДК 517.929.4

Шкільнюк Д.В.¹, аспірант**Система розпізнавання елементів
дактильної мови**

В роботі розглядається питання розробки системи розпізнавання елементів дактильної мови. Запропоновано методи виділення ознак елементів дактильної мови.

Ключові слова: дактильна мова, розпізнавання

¹Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова
Національної академії наук України, 03187,
м.Київ, проспект Академіка Глушкова, 40,
e-mail: dimonshk@gmail.com

This paper was presented by Fedir Garashchenko, Ph.D., Prof.

Introduction

The issue of the gestures recognition needs to be scrutinized at the current tempo of multimedia technologies development. It is important to develop the methods for dactyl language gesture recognition in scientific terms. The dactyl language represents the letters of the alphabet. Hearing disadvantaged people use dactyl language for representation of proper nouns, names, foreign words, scientific terms, substances etc.

Lately many leading scientific institutions have been conducting the investigations researches in the field of dactyl language recognition. A lot of scientists suggest to use special gloves with different kinds of sensors for gesture recognition [1,2]. Some of the developers do use ones. A hidden Markov model is also widely used in gesture recognition [3,4]. Some authors suggest a model for recognition of gestures performed by one or both hands. These models [3] are based on a dynamic Bayesian network, the structure of which makes it easy for representation of the connections between the indications of the gestures and for a new information insertion in the model.

**Problem formulation and the methods for
identifying the elements of dactyl language
creation.**

The thesis suggests the description of the system for recognition of the dactyl language elements. The peculiarity of a given system is that it does not

D.V. Shkilnjuk¹, post graduate student**The system of dactyl language elements
recognition**

The paper deals with the problem of dactyl language elements recognition system development. The methods of features separation of dactyl language elements are proposed.

Key Words: dactyl language, recognition

¹Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of
Ukraine, 03187, Kyiv, 40, Glushkov ave.
e-mail: dimonshk@gmail.com

require different types of mechanical gloves with additional sensors and besides that the gesture can be performed by a user with any size of a hand and at any focus distance from the camera.

Dactyl language gestures were classified while researching the nature of the dactyl language in the papers [5,6]. The classification was performed on the basis of the analysis of geometrical indications of the image points' domain, related to the hand. This step leads to the fact that, while recognizing, the input gesture will not be compared to the whole library of the templates but only to a small group of them.

The alphabet of the dactyl language elements was divided into two groups: the letters reproduced with the static hand gestures and the letters which are reproduced with the dynamic hand gestures. These two groups are subdivided into smaller groups of gestures. The methods, which are used for recognition of the gestures belonging to two different groups, will be studied in detail.

While recognizing a dynamic gesture the analysis of the motion trajectory of the center of the image points mass, related to the hand, is done and also the analysis of the state of the hand while reproducing a gesture. In order to monitor is performed the object trajectory it is necessary to track the coordinates of the center of the mass. In case when the system registers an alteration of the center of the mass which is bigger than a specially selected threshold, the analysis of the state of the hand at previous five shots is performed. At the Figure 1 shows a step by step reproduction of the letter "D".

For a group of the letters which are reproduced by static gestures, a range of methods was developed are based on the analysis of the image points domain, related to the hand. In particular, for recognition of static gestures there were used the methods of comparison with the template [5], the analysis of angular parameters, and the methods of analysis of connected domains.



Figure 1. A step by step reproduction of the letter "D".

After the analysis of the results of the above mentioned algorithms, there arose the necessity of the analysis of additional indications of a gesture. The analysis of the image outline is carried out in further steps[7].

The outline analysis allows describing, comparing and searching the objects represented in the shape of their outer contours – outlines.

The usage of methods of segmentation for finding the image points domain, related to the hand, is described in this paper [5]. The outline analysis methods are applied to the points domain, related to the hand (see Fig. 2).



Figure 2. The application of outline analysis to recognition of the letter "N". (Blue chart – value of autocorrelation function, red chart – value of descriptors)

Results

It should be mentioned that the application of outline analysis showed satisfactory results at recognition of gestures, reproduced by users with different sizes of hands and at different focus distances.

In the course of the system elaboration, people of different age with different sizes of hands take part in the experiments. In the course of the experiment a person reproduces a gesture for fifty times at different focus distances and the quantity of correct recognitions of a gesture by the system is calculated.

The experiment results are shown at the next table.

Table. The experimental data of recognition of some signs

People, reproducing the gesture. Here T – teenager, M – male, F – female	Percentage of correctly recognized gestures out of 50 times of reproduction (%)		
	Sign N	Sign M	Sign O
T 14 years old	86	88	88
T 16 years old	82	84	84
M 23 years old	84	86	83
F 25 years old	82	82	82
M 32 years old	82	82	81
M 46 years old	80	80	80
M 50 years old	86	86	81
Mean value	83.14	84.00	82.72

Conclusions

The application of outline analysis, angular parameters, the analysis of connected domains, and method of comparison with a template, the trajectory analysis to the task of recognition of the elements of dactyl language are described in the thesis. On the basis of the experiments and the obtained results the algorithms of recognition of dactyl language without any gloves or any accessory marks on hands are being elaborate.

References

1. <http://enabletalk.com/documentation.html>.
2. <http://talk2myshirt.com/blog/archives/5251>.
3. Heung-II Suk. Robust Modelling and Recognition of Hand Gestures with Dynamic Bayesian Network / H.-II Suk, B.-K. Sin, S.-W. Lee // 19th International Conference Pattern Recognition ICPR 2008. – P.1–4.
4. Marcel Sebastien. Hand Gesture Recognition using Input-Output Hidden Markov Models / S. Marcel, O. Bernier, J.-E. Viallet, D. Collobert // IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition - FGR, 2000. – P.456–462.
5. Krak Iu. V. Technology of the sign language elements recognition / Iu.V.Krak, D.V.Shkilnyuk // Artificial intelligence. – 2009. – № 3. – P. 564–572. (in Ukrainian).
6. Krak Iu. V. Analysis of the elements of sign language/ Iu.V.Krak, D.V.Shkilnyuk // Artificial intelligence. – 2010 – №3. – P.322–328.(in Ukrainian).
7. Krak Iu. V. Application of the connected domains analysis to the recognition problem/ Y.V.Krak, D.V.Shkilnyuk// Artificial intelligence. – 2012 – №3. – P.346–352.(in Ukrainian).

Arriving to an editorial board 21.11.12

УДК 004.42:510.69

Шкільняк О.С., к. ф.-м. н.

**Секвенційні числення транзитійних
композиційно-номінативних модальних
логік**

Побудовано секвенційні числення для нових класів програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чистих першопорядкових транзитійних композиційно-номінативних модальних логік еквітонних предикатів. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

Ключові слова: модальна логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: me.oksana@gmail.com

O.S. Shkilniak, PhD.

Sequent calculi of transitional composition-nominative modal logics

We constructed sequent calculi for new classes of program-oriented logical formalisms – pure first-order transitional composition-nominative modal logics of equitone predicates. For the defined calculi the soundness and completeness theorems are proved.

Key words: modal logic, predicate, logical consequence, sequent calculus

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: me.oksana@gmail.com

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Модальні логіки з великим успіхом використовуються для розв'язання широкого кола задач інформатики й програмування (див., напр., [1]). Для опису інформаційних та експертних систем застосовуються епістемічні логіки. Темпоральні логіки є ефективним механізмом моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. Програмно-орієнтованими класами логічних формалізмів модального типу є композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) часткових предикатів, які будуються на базі композиційно-номінативного підходу [2]. Нові класи таких логік запропоновано і досліджено, зокрема, в [3–6]. Важливим класом КНМЛ є транзитійні модальні логіки (ТМЛ), вони відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей. Підкласами ТМЛ є мультимодальні (ММЛ) та темпоральні (ТмМЛ) композиційно-номінативні логіки, в межах ММЛ далі виділено ТМЛ епістемічного типу та загальні ТМЛ (ЗТМЛ). Семантичні властивості ТМЛ досліджено в [6]. В зазначеній роботі описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових ММЛ і ТмМЛ, розглянуто властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул мов цих логік.

Дана стаття є продовженням роботи [6]. Її метою є побудова спеціальних секвенційних числень для чистих першопорядкових ТМЛ еквітон-

них предикатів зазначених класів (ММЛ, ТмМЛ, ЗТМЛ). Особливістю пропонованих числень є використання нових секвенційних форм елімінації модальностей та форм елімінації кванторів під реномінаціями. Для побудованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [2, 5, 6]. Дотримуюсь позначень роботи [6].

1. Базові секвенційні форми

Поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) є основним для КНМЛ.

КНМС – це об'єкт вигляду $M = (Cms, Fm, Jm)$. Тут Cms – композиційна модальна система, Fm – множина формул відповідної мови, Jm – відображення інтерпретації формул на станах світу.

КМС мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$. Тут S – множина станів світу, R – множина відношень на S вигляду $R \subseteq S \times S^*$, Pr – множина предикатів на станах світу, C – множина композицій на Pr , яка визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня (для чистих першопорядкових логік це $\neg, \vee, R^*, \exists x$) та базовими модальними композиціями. S конкретизуємо як множину неокласичних [2] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду $A_\alpha \rightarrow \{T, F\}$.

Транзиційна модальна система (TMC) – це KHMC, у якій R складається з відношень переходу (досяжності) на станах вигляду $R \subseteq S \times S$.

Мультимодальні TMC (MMC) – це TMC, у яких $R = \{>_i | i \in I\}$, а базовими модальними композиціями є K_i , $i \in I$, де кожному $>_i$ зіставлено K_i . Темпоральні TMC (ТмMC) – це TMC, у яких R складається з єдиного бінарного відношення $>$, а базовими модальними композиціями є $\square_t$ і $\square_d$. Загальні TMC (ЗТMC) – це TMC, у яких $R = \{>\}$ та $\square$ – єдина базова модальна композиція.

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станів формул. Такі формули мають вигляд Φ^α , де Φ – формула мови, α – її специфікація (відмітка). Тут $\alpha \in S$, де S – множина імен станів світу.

Δ є логічним наслідком Γ в узгоджений [6] із ними KHMC M (позн. $\Gamma \models_M \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^F A$ із умови $\Phi_\alpha(d_\alpha) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ випливає, що неможливо $\Psi_\beta(d_\beta) = F$ для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$.

Δ є логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma \models \Delta$), якщо $\Gamma \models_M \Delta$ для всіх KHMC M відповідного типу.

Властивості відношення $\models$ розглянуто в [6], вони є семантичною основою побудови секвенційних числень чистих першопорядкових ММЛ, ТмМЛ і ЗТМЛ еквітонних предикатів.

Секвенції ми трактуємо як множини специфікованих станами формул. Такі специфікації мають вигляд $\alpha|-$ чи $\alpha|-$, де α – ім'я стану. Стани іменуємо натуральними числами. Початковий стан позначаємо 0. Секвенції збагачуємо збудованими на даний момент виведення множинами станів та відношень на станах.

Нехай Σ – множина специфікованих формул, $\alpha\{A_\alpha\}$, $\beta\{A_\beta\}$, ... – побудовані на даний момент стани із множинами їх базових даних; M – схема моделі світу, тобто збудоване на цей момент відношення досяжності, записане для імен станів, St – множина імен станів на даний момент. Збагачені секвенції записуємо $\Sigma // \alpha\{A_\alpha\}, \beta\{A_\beta\}, \dots // M$, скорочено як $\Sigma // St // M$.

Наведемо базові секвенційні форми числень чистих першопорядкових ТМЛ еквітонних предикатів. Форми, аналогічні відповідним формам числень логіки еквітонних квазіарних предикатів [2], не змінюють схему моделі світу.

$$\begin{aligned} & \vdash \frac{\alpha |- A, \Sigma // St // M}{\alpha |- \neg A, \Sigma // St // M}; \\ & \neg \vdash \frac{\alpha |- A, \Sigma // St // M}{\alpha |- \neg A, \Sigma // St // M}; \end{aligned}$$

$$\vdash \frac{\alpha |- A, \Sigma // St // M \quad \alpha |- B, \Sigma // St // M}{\alpha |- A \vee B, \Sigma // St // M};$$

$$\neg \vdash \frac{\alpha |- \neg A, \alpha |- B, \Sigma // St // M}{\alpha |- A \vee B, \Sigma // St // M};$$

$$\vdash RT \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M};$$

$$\neg RT \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash \Phi N \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}, \text{ де } y \in \mu(A);$$

$$\neg \Phi N \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}, \text{ де } y \in \mu(A);$$

$$\vdash RR \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} \circ \frac{\alpha}{\beta} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (R_{\alpha}^{\alpha} (A)), \Sigma // St // M};$$

$$\neg RR \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} \circ \frac{\alpha}{\beta} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (R_{\alpha}^{\alpha} (A)), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash R \neg \frac{\alpha |- \neg R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\neg A), \Sigma // St // M};$$

$$\neg R \neg \frac{\alpha |- \neg R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\neg A), \Sigma // St // M};$$

$$\neg R \vee \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A) \vee R_{\alpha}^{\alpha} (B), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A \vee B), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash R \vee \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A) \vee R_{\alpha}^{\alpha} (B), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A \vee B), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash R \exists \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M};$$

$$\neg R \exists \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M};$$

$$\neg R \exists \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash R \exists \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M};$$

$$\neg R \exists \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash \exists R \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M};$$

$$\neg \exists R \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M}{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (\exists x A), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash \exists \frac{\alpha |- R_{\alpha}^{\alpha} (A), \Sigma // St // M}{\alpha |- \exists x A, \Sigma // St // M};$$

$$\vdash \frac{\alpha \vdash \exists x A_{\alpha-1} R_{\alpha}^0(A), \Sigma // St // M}{\alpha \vdash \exists x A, \Sigma // St // M}.$$

Для $\vdash R$ умови: $y \in V_T$, $y \in nm(\Gamma, \Delta, R_{\alpha}^0(\exists x \Phi))$; при цьому до носія A_{α} стану α додається новий елемент y . Для $\vdash \exists$ умови: $y \in V_T$, $y \in nm(\Sigma, A)$; до носія A_{α} додається новий y .

Форми типів RT , FN , $R\exists R$, $R\exists r$ назвемо допоміжними, усі інші форми – основні.

Форми для пронесення реімінації через модальні оператори (тут $\mathcal{M} \in Ms$):

$$\vdash R\mathcal{M} \frac{\alpha \vdash \mathcal{M} R_{\alpha}^0(A), \Sigma // St // M}{\alpha \vdash R_{\alpha}^0(\mathcal{M} A), \Sigma // St // M};$$

$$\vdash R\mathcal{M} \frac{\alpha \vdash \mathcal{M} R_{\alpha}^0(A), \Sigma // St // M}{\alpha \vdash R_{\alpha}^0(\mathcal{M} A), \Sigma // St // M}.$$

Форми елімінації модальних операторів мають відмінності залежно від властивостей відношень переходу. Традиційними є випадки, коли ці відношення можуть бути транзитивними, рефлексивними чи симетричними. Для $TmML$ при умові симетричності $\triangleright$ оператори $\Box$ та $\Diamond$ діють ідентично, при цій умові темпоральні числення $TmML$ ідентичні відповідним численням $3TmML$.

Наведемо для прикладу форми $\vdash K_i$ та $\vdash K_e$ для наступних випадків.

1. Загальний випадок. Якщо на $\triangleright$ не накладені додаткові умови, то маємо:

$$\vdash K_i \frac{\alpha \vdash K_i A_{\alpha-1}, \Sigma // St // M}{\alpha \vdash K_i A, \Sigma // St // M}.$$

Форма $\vdash K_i$ застосовується до $\alpha \vdash K_i A$ для всіх наявних в даний момент (згідно схеми моделі світу M) станів β таких, що $\alpha \triangleright \beta$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β (при цьому $A_{\beta} = A_{\alpha}$) та додаємо $\alpha \triangleright \beta$ до M .

$$\vdash K_i \frac{\alpha \vdash A, \Sigma // St // M \cup \{\alpha \triangleright \beta\}}{\alpha \vdash K_i A, \Sigma // St // M}.$$

Тут β – новий стан, до схеми моделі світу M додаємо $\alpha \triangleright \beta$ та задаємо $A_{\beta} = A_{\alpha}$.

2. $\triangleright$ рефлексивне. Форма $\vdash K_i$ така ж, як для загального випадку, вона застосовується до $\alpha \vdash K_i A$ для всіх наявних в даний момент (згідно схеми моделі світу M) станів β : $\alpha \triangleright \beta$. Згідно рефлексивності $\triangleright$, при першому застосуванні $\vdash K_i$ засновок має вигляд $\alpha \vdash K_i A, \alpha \vdash A, \Sigma // St // M$.

Форма $\vdash K_e$ така ж, як для загального випадку.

2. $\triangleright$ рефлексивне та симетричне. Форма $\vdash K_i$ така ж, як для загального випадку, вона застосовується до $\alpha \vdash K_i A$ для всіх наявних в даний момент

(згідно схеми моделі світу M) станів β таких, що $\alpha \triangleright \beta$ чи $\beta \triangleright \alpha$. Згідно рефлексивності $\triangleright$, при першому застосуванні форми $\vdash K_i$ засновок має вигляд $\alpha \vdash K_i A, \alpha \vdash A, \Sigma // St // M$.

$$\vdash K_i \frac{\alpha \vdash A, \Sigma // St // M \cup \{\alpha \triangleright \beta, \beta \triangleright \alpha\}}{\alpha \vdash K_i A, \Sigma // St // M}.$$

Тут β – новий стан, до M додаємо $\alpha \triangleright \beta$ та $\beta \triangleright \alpha$, задаємо $A_{\beta} = A_{\alpha}$.

4. $\triangleright$, транзитивне, рефлексивне і симетричне. У цьому випадку маємо:

$$\vdash K_i \frac{\alpha \vdash K_i A_{\alpha-1}, \alpha \vdash A_{\alpha-1}, K_i A, \Sigma // St // M}{\alpha \vdash K_i A, \Sigma // St // M}.$$

Форма $\vdash K_i$ застосовується до $\alpha \vdash K_i A$ для всіх наявних в даний момент (згідно схеми M) станів β таких, що $\alpha \triangleright \beta$ чи $\beta \triangleright \alpha$. Специфікована $\vdash K_i A$ тут необхідна через транзитивність $\triangleright$. Згідно рефлексивності $\triangleright$, при першому застосуванні цієї форми засновок має вигляд $\alpha \vdash K_i A, \alpha \vdash A, \Sigma // St // M$.

Форма $\vdash K_e$ така ж, як для випадку 3.

Зауважимо, що запропоновані форми елімінації модальних операторів істотно спрощено порівняно із відповідними формами роботи [3]. Водночас при побудові секвенційного дерева форма типу $\vdash K_i$ застосовується до формули вигляду $\alpha \vdash K_i A$ багаторазово, для всіх наявних станів β : $\alpha \triangleright \beta$.

Враховуючи наведені властивості відношення $\models$, для базових форм маємо:

$$\text{Теорема 1. Нехай } \frac{\vdash \Delta, K // M \quad \vdash X, Z // M}{\vdash \Gamma, \Delta // M}$$

та $\frac{\vdash \Delta, K // M}{\vdash \Gamma, \Delta // M}$ – базові секвенційні форми. Тоді:

1) якщо $\Delta \models K$ та $X \models Z$, то $\Gamma \models \Delta$;

2) якщо $\Delta \models K$, то $\Gamma \models \Delta$.

Наслідок. Для наведених секвенційних форм:

1) із $\Gamma \models \Delta$ випливає $\Delta \models K$ або $X \models Z$;

2) із $\Gamma \models \Delta$ випливає $\Delta \models K$.

2. Теорема коректності та повноти

Процедура побудови секвенційного дерева для числень $TmML$ в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень логік квазіарних предикатів [2]. Розглянемо її особливості на прикладі числень $MMML$.

Поступово побудову дерева для секвенції $\vdash \Gamma, \Delta$ ведемо паралельно із побудовою схеми моделі світу. Схема оновлюється при застосуванні $\vdash K_i$ -форм (в окремих випадках $\vdash K_e$ -форм), які додають нові стани. На початку побудови зафіксуємо нескінченний список TN тотально неістотних імен, які не

зустрічаються в $\perp\Gamma\Delta$. Кожне застосування форми проводимо до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед застосуванням основної форми при потребі застосуємо належну кількість разів форми типів RT, ΦN , R3R, R3p.

На кожному етапі спочатку виконуємо всі $\perp\exists$ -форми та $\perp\exists R$ -форми (беремо нове $u \in TN$ у відповідному стані). Потім виконуємо інші основні форми, окрім елімінації модальностей. Форми $\perp\exists$ -та $\perp\exists R$ застосуємо багаторазово – для усіх імен доступних формул даної секвенції та її наступників. Далі виконуємо $\perp K$ -форми, потім багаторазово, згідно схеми моделі світу, $\neg\perp K$ -форми.

Процедура побудови дерева завершена позитивно, якщо отримано замкнене секвенційне дерево. Якщо маємо скінченне незамкнене дерево або процедура не завершується, то в дереві існує скінченний чи нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеється на ньому і стане доступною.

Теорема 2 (коректності). Нехай секвенція $\perp\Gamma\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Нехай $\perp\Gamma\Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Усі його листи – замкнені секвенції, тому для кожного такого листа $\perp X \perp Z$ маємо $X \models Z$. Рух від листів дерева до його кореня здійснюється за допомогою секвенційних форм. За теоремою 1 при переході від засновків до висновків форм зберігається відношення $\models$. Тому для кожної вершини секвенційного дерева $\perp\Lambda \perp K$ маємо $\Lambda \models K$. Зокрема, для секвенції $\perp\Gamma\Delta$ – кореня дерева – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти секвенційних числень використано метод систем модельних множин. Система модельних множин – це $(\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$, де H_α – модельна множина стану α , M – схема моделей світу, яка задається R . Кожна H_α визначається умовою коректності і умовами переходу.

Умова коректності модельної множини стану:

MC) для кожної примітивної [3] формули Φ лише одна з $\alpha\Phi$ чи $\alpha\neg\Phi$ може належати до H_α

Умови переходу індуковані виконанням відповідних секвенційних форм:

$$M\rightarrow) \alpha\neg\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg\Phi \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\Phi \in H_\alpha;$$

$$M\vee) \alpha\Phi \vee \Psi \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\Phi \in H_\alpha \text{ або } \alpha\Psi \in H_\alpha;$$

$$\alpha\Phi \vee \Psi \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\Phi \in H_\alpha \text{ та } \alpha\Psi \in H_\alpha;$$

$$MT) \alpha R_{i,j}^v(\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha R_{i,j}^v(\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha R_j^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$MN) \alpha R_{i,j}^v(\Phi) \in H_\alpha \text{ та } u \in \mu(\Phi) \Rightarrow \alpha R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_{i,j}^v(\Phi) \in H_\alpha \text{ та } u \in \mu(\Phi) \Rightarrow \alpha\neg R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$MRR) \alpha R_i^v(R_j^v(\Phi)) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_i^v(R_j^v(\Phi)) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$MR\neg) \alpha R_i^v(\neg\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_i^v(\neg\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg\neg R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$MR\vee) \alpha R_i^v(\Phi \vee \Psi) \in H_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha R_i^v(\Phi) \vee R_i^v(\Psi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_i^v(\Phi \vee \Psi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg R_i^v(\Phi) \vee \neg R_i^v(\Psi) \in H_\alpha;$$

$$MR\exists R) \alpha R_{i,j}^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha R_i^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_{i,j}^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg R_i^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha;$$

$$MR\exists p) \alpha R_i^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg\exists x\Phi \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_i^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg\exists x\Phi \in H_\alpha;$$

$$M\exists) \alpha\neg\exists x\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \text{існує } u \in W_\alpha: \alpha\neg R_i^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg\exists x\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg R_i^v(\Phi) \in H_\alpha \text{ для всіх } u \in W_\alpha;$$

$$M\exists R) \alpha\neg R_i^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \text{існує } u \in W_\alpha \text{ таке:}$$

$$\alpha\neg R_{i,j}^v(\Phi) \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_i^v(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg R_{i,j}^v(\Phi) \in H_\alpha \text{ для всіх } u \in W_\alpha.$$

$$MR\exists) \alpha\neg R_i^v(\exists\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg\exists\Phi \in H_\alpha;$$

$$\alpha\neg R_i^v(\exists\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow \alpha\neg\exists\Phi \in H_\alpha \text{ (тут } \exists \in Ms).$$

У випадку ЗТМЛ конкретизуємо $MR\exists$ як $MR\Box$, у випадку ТмМЛ – як $MR\Box$ та $MR\Box$, у випадку ММЛ – як MRK (для всіх $K_i \in Ms$).

Елімінації модальностей індукують відповідні умови. Для ММЛ вони такі:

МК) якщо $\alpha\perp K_i \Phi \in H_\alpha$, то $\beta\Phi \in H_\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha\beta, \beta$ (тут $K_i \in Ms$);

якщо $\alpha\neg K_i \Phi \in H_\alpha$, то $\beta\neg\Phi \in H_\beta$ для деякого $\beta \in S$ такого, що $\alpha\beta, \beta$ (тут $K_i \in Ms$).

Аналогічно записується умова $M\Box$ для ЗТМЛ, для ТмМЛ вона розщеплена на $M\Box$ та $H\Box$.

Теорема 3 (про контрмодель). Нехай ρ – незамкнений шлях в секвенційному дереві, H_α – множина всіх специфікованих $\alpha\perp$ чи $\alpha\neg$ формул секвенцій шляху ρ , M – об'єднання усіх схем моделей світу секвенцій шляху ρ , нехай $H_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$ та $W = nm(H_M)$. Тоді існують ТМС $M = (S, R, A, Jm)$ та $\delta \in {}^A \text{ та } im(\delta) = W$ такі:

$$1) \alpha\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T;$$

$$2) \alpha\neg\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F.$$

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої застосуємо одну з базових форм. Переходи згідно цих форм відповідають пунктам визначення модельної множини стану. Кожна не-примітивна формула на шляху ρ рано чи пізно

буде спрощена чи розкладена згідно відповідної форми. Всі секвенції шляху ρ незамкнені, тому виконується пункт МС. Таким чином, $\mathbf{H}_M$ – система модельних множин.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та ін'єкцію $\delta \in A \rightarrow \text{im}(\delta) = W$. Така δ є бієкцією W на A . Нехай $W_a = \text{pt}(H_a)$, тоді δ_a є бієкцією W_a на A_a . Задамо значення базових предикатів на δ і на іменних множинах вигляду $r_i^v(\delta)$.

Якщо $a, p \in H_a$, то $p_a(\delta) = T$;

якщо $a, p \in H_a$, то $p_a(\delta) = F$.

Якщо $a, r_i^v(p) \in H_a$, то $p_a(r_i^v(\delta)) = T$;

якщо $a, r_i^v(p) \in H_a$, то $p_a(r_i^v(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках значення $p_a(d)$ задаємо довільно, враховуючи еквівалентність і обмеження щодо неістотності імен: для всіх $d, h \in A_a^{H_a}$ таких, що $d \parallel -\mu(p) = h \parallel -\mu(p)$, необхідно $p_a(d) = p_a(h)$. Так задані значення базових предикатів продовжимо за еквівалентністю на відповідні $h \in {}^W A_a$.

Для атомарних формул чи формул вигляду $R_i^v(p)$ твердження теореми випливають із визначення значень базових предикатів. Далі доведення традиційно ведемо (подібне доведення див., напр., [3]) індукцією за складністю формули згідно побудови системи модельних множин.

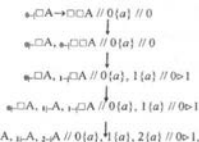
Теорема 4 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma, \Delta$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ (тобто $\Gamma \models_M \Delta$ для кожної узгодженої ТМС M), проте $\Sigma \not\models \Gamma, \Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Звідси $\mathbf{H}_M = (\{H_a \mid a \in S\}, M)$ – система модельних множин. За теоремою 3 існують ТМС $M = (S, R, A, J_m)$ та $\delta \in {}^v A$: $a, \Phi \in H_a \Rightarrow \Phi_a(\delta) = T$ та $a, \Phi \in H_a \Rightarrow \Phi_a(\delta) = F$. Зокрема, це вірно для формул секвенції $\vdash \Gamma, \Delta$. Тому для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_a(\delta) = T$ та для всіх $\Phi \in \Delta$ маємо $\Phi_a(\delta) = F$. Це заперечує $\Gamma \models_M \Delta$, тому $\Gamma \not\models \Delta$. Отримали суперечність. Отже, припущення про невивідність $\vdash \Gamma, \Delta$ невірне, що й доводить теорему.

3. Приклади побудови виведень

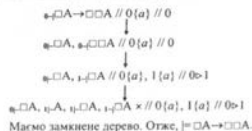
Наведемо приклади побудови виведень в секвенційних численнях ЗТМС. Побудову дерева запишемо зверху-вниз, тоді висновки секвенційних форм – над ризикою, засновки – під ризикою. Замкнену секвенцію відмічаємо символом $\times$. Для перевірки $\vdash \Phi$ у ТМС певного типу будемо дерево для секвенції Φ, Φ у відповідному численні.

Приклад 1. Секвенційне дерево для перевірки $\vdash \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (загальний випадок).

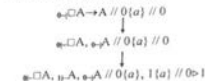


Отримали незамкнене секвенційне дерево, яке дає контрмодель M таку, що $M \not\models \Box A \rightarrow \Box \Box A$. Маємо $\delta = \delta_a = \delta_1 = \delta_2 = [x \rightarrow a]$. Задаємо $A_1(\delta_1) = F$, $A_1(\delta_2) = T$, $A_2(\delta_2) = F$, довільним чином.

Приклад 2. Секвенційне дерево для перевірки $\vdash \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (випадок T-TMC).

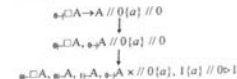


Приклад 3. Секвенційне дерево для перевірки $\vdash \Box A \rightarrow A$ (загальний випадок).



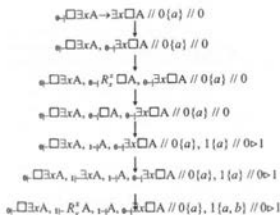
Отримали незамкнене секвенційне дерево, яке дає контрмодель M таку, що $M \not\models \Box A \rightarrow A$. Маємо $\delta = \delta_a = \delta_1 = [\delta \rightarrow a]$. Задаємо $A_1(\delta_1) = T$, $A_2(\delta_2) = F$.

Приклад 4. Секвенційне дерево для перевірки $\vdash \Box A \rightarrow A$ (випадок R-TMC).



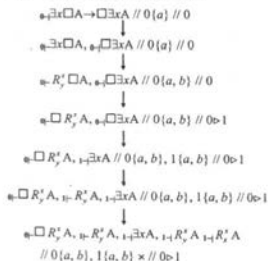
Отримали замкнене дерево. Отже, $\vdash \Box A \rightarrow A$.

Приклад 5. Секвенційне дерево для перевірки $\vdash \Box \exists x \Phi \rightarrow \exists x \Box \Phi$ (загальний випадок).



Отримали незамкнене секвенційне дерево, яке дає контрмодель M таку, що $M \models \Box\exists xA \rightarrow \exists x\Box A$. Маємо $\delta = [x \rightarrow a, y \rightarrow b]$, $\delta_0 = [x \rightarrow a]$, $\delta_1 = [x \rightarrow a, y \rightarrow b]$. Задасмо $A_1(\delta_1) = A_1([x \rightarrow a, y \rightarrow b]) = F$, $A_1(r_j^2(\delta_1)) = A_1([x \rightarrow a, y \rightarrow b]) = T$, $A_4(\delta_0)$ – довільним чином. Усі предметні імена, окрім x та y , неістинні для A .

Приклад 6. Секвенційне дерево для перевірки $\models \exists x\Box\Phi \rightarrow \Box\exists x\Phi$ (загальний випадок).



Отримали замкнене секвенційне дерево. Отже, $\models \exists x\Box\Phi \rightarrow \Box\exists x\Phi$.

Висновки

В роботі досліджено синтаксичні властивості нових класів програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиторних композиційно-номінативних модальних логік. На основі властивостей відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул для чистих першопорядкових мультимодальних та темпоральних композиційно-номінативних логік побудовано секвенційні числення. Їх особливістю є використання нових форм елімінації модальностей та форм елімінації кванторів під реномінаціями. Доведено коректність та повноту цих числень.

Побудовані числення нових класів модальних логік плануються використати в системах автоматизованого доведення Isabelle і SPASS.

Список використаних джерел

1. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford: Clarendon Press, 1994–2000.
2. Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S. Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskiyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
3. Shkilniak O.S. Sequent Calculi of Composition Nominative Modal and Temporal Logics // Nauk. zapysky NaUKMA. Ser.: Comp. Nauky. – 2009. – V. 99. – P. 37–44 (in Ukrainian).
4. Shkilniak O.S. Semantic Properties of Composition Nominative Modal Logics // Problems in Programming. – 2009. – № 4. – P. 11–23 (in Ukrainian).
5. Nikitchenko M.S., Shkilniak O.S., Shkilniak S.S. Construction of Modal Logics of Temporal and Epistemic Type on the Basis of Composition-Nominative Approach // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – № 3. – P. 204–211 (in Ukrainian).
6. Shkilniak O.S. Semantic Aspects of Transitional Composition-Nominative Modal Logics // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – № 3. – P. 281–286 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 06.12.2012

УДК 004.42:510.69

Шкільняк С.С., д. ф.-м. н., доц.

**Секвенційні числення логік часткових та
неоднозначних квазіарних предикатів**

Для різних відношень логічного наслідку в частих першопорядкових композиційно-номінативних логіках часткових і логіках неоднозначних квазіарних предикатів побудовано спеціальні секвенційні числення. При побудові використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних. Для цих числень доведено теореми коректності й повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

S.S.Shkiliak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.),
Ass. Professor.

**Sequent calculi for logics of partial and
multi-valued quasi-ary predicates**

We construct special sequent calculi for various relations of pure first-order composition-nominative logics of partial and of logics of multi-valued quasi-ary predicates. Special variable definedness predicates are used for the construction. For the proposed calculi soundness and completeness theorems are proved.

Key words: logic, predicate, logical consequence, sequent calculus.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012).

Для розв'язання низки задач, що виникають у сучасних інформаційних і програмних системах, необхідний ефективний пошук виведень. Потужним апаратом побудови виведень є числення секвенційного (генценівського) типу. Зазначені числення формалізують фундаментальне поняття логічного слідування. Уточнення цього поняття за допомогою відношень логічного наслідку для програмно-орієнтованих логічних формалізмів – композиційно-номінативних логік (КНЛ) квазіарних предикатів [1, 2] – запропоновано в [3]. Введено "істиннісний" $\models_T$, "хибнісний" $\models_F$, "насичений" $\models_{\text{сн}}$, "неспростовнісний" $\models_{\text{сн}}$, "насичений" $\models_{\text{сн}}$ логічні наслідки. Побудовано (див. [4–6]) низку секвенційних числень для різних класів КНЛ, які формалізують ці відношення, поширені на множини формул. Зокрема, в [6] запропоновано спеціальні секвенційні числення для чистих першопорядкових логік однозначних часткових предикатів. Особливістю цих числень є використання спеціальних предикатів-індикаторів [7] наявності значення для предметних імен (змінних).

Метою даної роботи є побудова секвенційних числень чистих першопорядкових логік часткових та логік неоднозначних квазіарних предикатів. Робота є безпосереднім продовженням статті [6]. При побудові використано предикати-індикатори наявності значення для змінних і секвенційні форми елімінації кванторів під реномінацією.

Поняття, які в роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [1, 2, 6].

Будемо дотримуватись позначень роботи [6]. Нагадаємо визначення відношень логічного наслідку для множин формул

Відношення наслідку при інтерпретації на моделі мови A задаємо так:

$$\Gamma_A \models_{\text{сн}} \Delta, \text{ якщо } \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \emptyset;$$

$$\Gamma_A \models_{\text{сн}} \Delta, \text{ якщо } \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A) = {}^1 A;$$

$$\Gamma_A \models_T \Delta, \text{ якщо } \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A);$$

$$\Gamma_A \models_F \Delta, \text{ якщо } \bigcap_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A);$$

$$\Gamma_A \models_{\text{сн}} \Delta, \text{ якщо } \Gamma_A \models_T \Delta \text{ та } \Gamma_A \models_F \Delta.$$

Відношення логічного наслідку для множин формул $\models_T$, $\models_F$, $\models_{\text{сн}}$ визначимо за схемою:

$$\Gamma \models \Delta, \text{ якщо } \Gamma_A \models \Delta \text{ для кожної моделі мови } A.$$

Для логік однозначних часткових предикатів (неокласична семантика) можна розглядати відношення $\models_{\text{сн}}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{\text{сн}}$.

Для логік неоднозначних тотальних предикатів (дуальна до неокласичної пересичена семантика) можна розглядати $\models_{\text{сн}}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{\text{сн}}$.

Для логік неоднозначних часткових предикатів (загальна семантика) маємо єдине природне змістовне відношення логічного наслідку $\models_{\text{сн}}$.

Якщо інше не зазначено окремо, $\models$ позначає:

- $\models_{TF}$ для загальної семантики;
- одне із $\models_G, \models_T, \models_F, \models_{TF}$ для неокласичної;
- одне із $\models_{cm}, \models_T, \models_F, \models_{TF}$ для пересиченої.

До основних властивостей відношень $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_G, \models_{cm}$ віднесемо такі: $U, \neg\neg\vdash, \neg\neg\vdash, \neg\neg\vdash, \neg\neg\vdash, \neg\neg\vdash$ (наведені в [4, 5]); $RT\vdash, RT\vdash, \Phi N\vdash, \Phi N\vdash, RR\vdash, RR\vdash, R\vdash, R\vdash, RV\vdash, RV\vdash, \neg RT\vdash, \neg RT\vdash, \neg\Phi N\vdash, \neg\Phi N\vdash, \neg RR\vdash, \neg RR\vdash, \neg R\vdash, \neg R\vdash, \neg RV\vdash, \neg RV\vdash$ (наведені в [4]); $RER\vdash, RER\vdash, \neg RER\vdash, \neg RER\vdash$ (наведені в [5]); властивості елімінації кванторів $\exists\vdash, \exists\vdash, \neg\exists\vdash, \exists\vdash, \exists\vdash, \exists\vdash, \neg\exists\vdash, \neg\exists\vdash, \exists\vdash, \exists\vdash, \neg\exists\vdash, \neg\exists\vdash$ (див. [6]), вони використовують символи спеціальних предикатів-індикаторів $\varepsilon\vdash$; властивості C, CL, CR, CLR, UnD (див. [6]), які гарантують наявність відповідного логічного наслідку.

1. Секвенційні форми та умови замкненості

Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих спеціальними символами $\vdash$ та $\vdash$.

Позначасмо секвенції як $\vdash, \vdash, \vdash$, скорочено як Σ .

Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул, їх будемо так: $\vdash, \vdash, \vdash \Leftrightarrow \vdash, \vdash, \vdash$.

Аксиомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість $\vdash, \vdash, \vdash$ означає, що $\vdash, \vdash, \vdash$.

Базова умова замкненості секвенції Σ :

C) існує формула Φ така, що $\vdash, \Phi \in \Sigma$ та $\vdash, \Phi \in \Sigma$.

Додаткова умова в усіх численнях – це *илн*-замкненість. Секвенція $\vdash, \vdash, \vdash$ із множиною *илн*-змінних $Un = \{u \in V \mid u(u) \in \Gamma\}$ *илн*-замкнена, якщо: UnC існують Un -илн-еквівалентні R -формули Φ та Ψ такі, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Psi \in \Delta$.

Наступні додаткові умови замкненості секвенції Σ індукують відповідними властивостями CL, CR, CLR , які істотні для відношень $\models_T, \models_F, \models_{TF}$:

CL) існує формула $\Phi: \vdash, \Phi \in \Sigma$ та $\vdash, \neg\Phi \in \Sigma$;

CR) існує формула $\Phi: \vdash, \Phi \in \Sigma$ та $\vdash, \neg\Phi \in \Sigma$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі:

$\vdash, \Phi \in \Sigma, \vdash, \neg\Phi \in \Sigma, \vdash, \Psi \in \Sigma, \vdash, \neg\Psi \in \Sigma$.

Залежно від відношення логічного наслідку та семантики для чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) отримуємо низку різновидностей секвенційних числень. На відміну від [4, 5], де числення збудовано на базі X - Y -означених відношень логічного наслідку, запропоновані тут числення використовують спеціальні предикати-індикатори наявності значення для предметних імен та секвенційні форми елімінації кванторів під реномінацією.

Числення QSC формалізує:

– відношення $\models_G$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_{cm}$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Замкненість секвенції: умова $C \vee UnC$.

Числення QSL формалізує:

– відношення $\models_T$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_F$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Замкненість секвенції: умова $C \vee CL \vee UnC$.

Числення QSR формалізує:

– відношення $\models_T$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_T$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Замкненість секвенції: умова $C \vee CR \vee UnC$.

Числення $QSLR$ формалізує відношення $\models_{TF}$ для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів та неоднозначних тотальних предикатів (пересичена семантика).

Замкненість секвенції: умова $C \vee CLR \vee UnC$.

Числення QSG формалізує відношення $\models_{TF}$ для загальної семантики ЧКНЛ неоднозначних часткових предикатів.

Замкненість секвенції: умова $C \vee UnC$.

Не будемо тут розглядати числення для логік однозначних еквітонних предикатів та тотальних антитонних предикатів.

Базовими секвенційними формами числень $QSL, QSR, QSLR, QSG$ є наступні:

$$\begin{aligned} \vdash RT & \frac{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}; & \vdash RT & \frac{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}; \\ \vdash \neg RT & \frac{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}; & \vdash \neg RT & \frac{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}; \\ \vdash \Phi N & \frac{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}; & \vdash \Phi N & \frac{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}; \\ \vdash \neg \Phi N & \frac{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}; & \vdash \neg \Phi N & \frac{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(A), \Sigma}. \end{aligned}$$

Для форм типу ΦN та $\neg \Phi N$ умова: $y \in v(A)$.

$$\vdash RER & \frac{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}; & \vdash RER & \frac{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma};$$

$$\vdash \neg RER & \frac{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}; & \vdash \neg RER & \frac{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon, \varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma};$$

$$\vdash R\exists p & \frac{\vdash \exists x A, \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}; & \vdash R\exists p & \frac{\vdash \exists x A, \Sigma}{\vdash R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma};$$

$$\vdash \neg R\exists p & \frac{\vdash \neg \exists x A, \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}; & \vdash \neg R\exists p & \frac{\vdash \neg \exists x A, \Sigma}{\vdash \neg R_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\exists x A), \Sigma}.$$

$$\begin{aligned}
& \vdash \frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma}; \quad \vdash \frac{\neg A, \Sigma}{\vdash \neg \neg A, \Sigma}; \\
& \vdash \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma}; \quad \vdash \frac{\neg A, \Sigma \quad \neg B, \Sigma}{\neg A \vee B, \Sigma}; \\
& \vdash \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash \neg(A \vee B), \Sigma}; \quad \vdash \frac{\neg A, \Sigma \quad \neg B, \Sigma}{\neg \neg(A \vee B), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{RR \quad R_2^{\circ} \circ_f^{\circ}(A), \Sigma}{R_2^{\circ}(R_2^{\circ}(A)), \Sigma}; \quad \vdash \frac{RR \quad \neg R_2^{\circ} \circ_f^{\circ}(A), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(R_2^{\circ}(A)), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{RR \quad \neg R_2^{\circ} \circ_f^{\circ}(A), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(R_2^{\circ}(A)), \Sigma}; \quad \vdash \frac{RR \quad \neg R_2^{\circ} \circ_f^{\circ}(A), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(R_2^{\circ}(A)), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{R \neg \quad \neg R_2^{\circ}(A), \Sigma}{R_2^{\circ}(\neg A), \Sigma}; \quad \vdash \frac{R \neg \quad \neg R_2^{\circ}(A), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(\neg A), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{R \neg \quad R_2^{\circ}(A), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(\neg A), \Sigma}; \quad \vdash \frac{R \neg \quad \neg R_2^{\circ}(A), \Sigma}{\neg \neg R_2^{\circ}(\neg A), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{R \vee \quad R_2^{\circ}(A) \vee R_2^{\circ}(B), \Sigma}{R_2^{\circ}(A \vee B), \Sigma}; \quad \vdash \frac{R \vee \quad \neg R_2^{\circ}(A) \vee \neg R_2^{\circ}(B), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(A \vee B), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{R \vee \quad \neg R_2^{\circ}(A), \neg R_2^{\circ}(B), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(A \vee B), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{R \vee \quad \neg R_2^{\circ}(A), \Sigma \quad \neg R_2^{\circ}(B), \Sigma}{\neg R_2^{\circ}(A \vee B), \Sigma}.
\end{aligned}$$

Форми елімінації кванторів використовують є:

$$\begin{aligned}
& \vdash \frac{R_1^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\exists x A, \Sigma}; \quad \vdash \frac{\neg R_1^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg \exists x A, \Sigma}; \\
& \vdash \frac{R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma}; \quad \vdash \frac{\neg R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{\exists f \quad \neg \exists x A, \neg R_1^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg \exists x A, \Sigma}; \\
& \vdash \frac{\exists f \quad \neg \exists x A, \neg R_1^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg \exists x A, \Sigma}; \\
& \vdash \frac{\exists Rf \quad R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \neg R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{\exists Rf \quad \neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \neg \neg R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma}.
\end{aligned}$$

Для форм $\vdash \exists \varepsilon$, $\vdash \exists \varepsilon$, $\exists f$, $\vdash \exists f$ умова: $z \in V$, $z \in \text{elm}(\Sigma, \exists x A)$. Для $\vdash \exists R \varepsilon$, $\vdash \exists R \varepsilon$, $\exists Rf$, $\vdash \exists Rf$ умова: $z \in V$, $z \in \text{elm}(\Sigma, R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A))$. Для $\exists f$, $\vdash \exists f$, $\exists Rf$, $\vdash \exists Rf$ умова: Σ не містить символів вигляду ε .

$$\vdash \frac{\neg \exists x A, \neg R_{\varepsilon}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg \exists x A, \neg \varepsilon, \Sigma};$$

$$\begin{aligned}
& \vdash \exists \varepsilon \quad \frac{\neg \exists x A, \neg R_{\varepsilon}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg \exists x A, \neg \varepsilon, \Sigma}; \\
& \vdash \exists R \vee \quad \frac{R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \neg R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \neg \varepsilon, \Sigma}; \\
& \vdash \exists R \vee \quad \frac{\neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \neg \neg R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \neg \varepsilon, \Sigma}; \\
& \vdash \exists d \quad \frac{\neg \varepsilon, \neg \exists x A, \Sigma \quad \neg \exists x A, \neg R_2^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg \exists x A, \Sigma}; \\
& \vdash \exists d \quad \frac{\neg \varepsilon, \neg \exists x A, \Sigma \quad \neg \exists x A, \neg R_2^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg \exists x A, \Sigma}.
\end{aligned}$$

Форми $\vdash \exists R d$ та $\vdash \exists R d$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
& \vdash \frac{\neg \varepsilon, \neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma \quad \neg R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma}; \\
& \vdash \frac{\neg \varepsilon, \neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma \quad \neg R_{\varepsilon, x}^{\circ}(A), \neg \varepsilon, \Sigma}{\neg R_{\varepsilon}^{\circ}(\exists x A), \Sigma}.
\end{aligned}$$

Для форм $\exists d$, $\vdash \exists d$, $\exists R d$, $\vdash \exists R d$ умова: є u не входить до Σ та Σ містить символи вигляду ε .

На відміну від роботи [6], тут в назві $\exists$ -форм $\vdash \exists \varepsilon$, $\vdash \exists \varepsilon$, $\exists R \varepsilon$, $\vdash \exists R \varepsilon$ фігурує символ ε .

Базовими секвенційними формами числення QSC є: $\vdash RT$, $\vdash RT$, $\vdash FN$, $\vdash FN$, $\vdash RR$, $\vdash RR$, $\vdash RR$, $\vdash RR$, $\vdash R \neg$, $\vdash R \neg$, $\vdash R \vee$, $\vdash R \vee$, $\vdash \exists \varepsilon$, $\vdash \exists R \varepsilon$, $\exists f$, $\exists Rf$, $\exists \vee$, $\exists R \vee$, $\exists d$, $\exists R d$.

Для $\vdash \varepsilon$ та $\vdash \varepsilon$ можна знімати заперечення, переносити формулу з лівої частини наслідку в праву і навпаки, тому в численні QSC форми для зовнішнього заперечення не потрібні.

Побудова секвенційного дерева. Процедура побудови секвенційного дерева – виведення секвенції, – фактично однакова для різних першопорядкових числень (див. [1, 4–6]). Для числень QSL, QSR, QSLR вона наведена в [6], для числення QSG процедура відрізняється лише тим, що не застосовуємо форми для зовнішнього заперечення та застосовуємо тридцять форм $\vdash \neg$ і $\neg$.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції Σ завершена позитивно, то маємо скінченне замкнене дерево. Якщо вона завершена негативно (маємо скінченне незамкнене дерево) або не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях p , всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеється на p і стане доступною.

2. Теорема коректності та повноти

Для побудованих числень справджуються теореми коректності та повноти.

Теорема 1 (коректності). 1) Секвенція $\vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в QSC-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{CT} \Delta$ в неокласичній семантиці та $\Gamma \models_{CT} \Delta$ в пересиченій;

2) $\vdash_{\Gamma} \Delta$ вивідна в QSL-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{\gamma} \Delta$ в неокласичній семантиці та $\Gamma \models_{\kappa} \Delta$ в пересиченій;

3) Γ_{Δ} вивідна в QSR-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{\Delta}$ в неокласичній семантиці та $\Gamma \models_{\Delta}$ в пересиченій;

4) $|\Gamma, \Delta$ вивідна в QSLR-численні $\Rightarrow \Gamma|_{\text{TF}} \Delta$ в неокласичній семаантиці та в пересиченій;

5) $\Gamma \vdash \Delta$ вивідна в QSG-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{\text{TT}} \Delta$ в загальній семантиці.

Нехай, $\Gamma \models \Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Для кожної його вершини $\langle A, K \rangle$ маємо $\Lambda \models K$. Для листів дерева це випливає з їх замкненості. Збереження формами відповідних відношень логічного наслідку (від засновків до висновків) випливає з одно-їмнісних властивостей відношень. Отже, $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти побудованих числень використуємо метод модельних множин.

Нехай H – множина формул, специфікованих символами $\neg$ та $\vee$. Задамо для H такі множини:

$W = \{y \in \text{nt}(H) \mid \neg \exists x \in H\}; U_H = \{y \in \text{nt}(H) \mid \exists x \in H\}$.
Множина H — G -модельна, якщо для неї виконуються умови:

[illegible]

HCU) не існує примітивних Un -илв-еквівалентних $R_i^v A$ та $R_j^w A$ таких: $\vdash R_i^v A \in H$ та $\vdash R_j^w A \in H$.

Множина H – L -модельна, якщо для неї виконуються зазначені вище умови для G -модельної множини, а також умова коректності HCL:

Множина H — R -модельна, якщо для неї вико-

нуються зазначені вище умови для G -модельної множини, а також умова коректності HCR:

Множина H – LR-модельна, якщо для всі ви-

конуються зазначені вище умови для G -модельної множини, а також коректності HCLR:

такі, що $\vdash \Phi \in H$, $\vdash \neg \Phi \in H$ та $\vdash \Psi \in H$, $\vdash \neg \Psi \in H$.

Звідси HC, HCL, HCU – це умови коректності *L*-модельної можини; HC, HCR, HCU – умови коректності *R*-модельної можини; HC, HCLR, HCU – умови коректності *LR*-модельної можини.

Множина H – S -модельна, якщо для неї виконуються умови коректності HC і HCU та наведені

в [5] умови переходу HRT , $H\Phi N$, $HR\exists R$, $HR\exists p$, HRR , $HR\sim$, $HR\vee$, $H\sim$, $H\vee$, $H\exists$, $H\exists R$.

Незамкнений шлях в секвенційному дереві індукує модельну множину.

Теорема 2. Нехай ρ – незамкнений шлях, H – множина всіх специфікованих формул секвенції цього шляху. Тоді H – модельна множина відповідного типу (G -, L -, R -, LR -, S -модельна).

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовуємо одну з базових секвенційних форм відповідного числення. Переходи за цими формами узгоджені з однойменними пунктами визначення модельної множини відповідного типу із таким уточненням: НЗ і Н—З відповідають процедури побудови дерева і формам елімінації зовнішнього квантора, НЗР і Н—ЗР — процедури побудови дерева і формам елімінації квантора під реномінацією. Застосування форм на шляху p відбувається, поки це можливо, тому кожна формула шляху p , яка не є примітивною чи запереченням примітивної (непримітивна для QSC-числень), рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною формою. Усі секвенції шляху p незамкнені, тому виконані умови коректності H .

Теорема 3. Нехай H – C -модельна множина. Тоді існують моделі мови $A = (A, I)$, $B = (A, I)$ та існують $\delta, \eta \in {}^V A$ такі:

- 1) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ ма $\neg \Phi \in H \Rightarrow \delta \in F(\Phi_A)$;
- 2) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$ ма $\neg \Phi \in H \Rightarrow \eta \in T(\Phi_B)$.

Пари (A, δ) та (B, η) із такими властивостями назовемо *Cl-контромоделью* та *Cm-контромоделью*.

Нехай $W = \{u \in \text{int}(H) \mid \exists u \in H\}$. Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деякі ін'єктивні $\delta, \eta \in {}^A A$ з $\text{asn}(\delta) = W$. Така A дублює множину W .

Задамо значення базових предикатів на δ і η та на іменних множинах (IM) вигляду $\mathcal{I}^{\pm}(\delta)$ і $\mathcal{I}^{\pm}(\eta)$:

- $\neg \exists y \in H \Rightarrow \delta \in T(\varepsilon y_A)$ τα $\eta \notin F(\varepsilon y_A)$;
- $\neg \exists y \in H \Rightarrow \delta \in F(\varepsilon y_A)$ τα $\eta \in T(\varepsilon y_A)$;

- $\vdash p \in H \Rightarrow \delta \in \Pi(p_A)$ τα $\eta \in F(p_A)$;
- $\vdash p \in H \Rightarrow \delta \in \Pi(p_A)$ τα $\eta \in F(p_B)$;
- $\vdash p \in H \Rightarrow \delta \in \Pi(p_A)$ τα $\eta \in \Pi(p_A)$.

$$- \vdash R_2^{\mathcal{H}}(p) \in H \Rightarrow \tau_i^{\mathcal{H}}(\delta) \in T(p_A) \text{ та } \tau_i^{\mathcal{H}}(\eta) \notin F(p_B);$$

В усіх інших випадках значення базових пре-

дикатів задаємо довільно, враховуючи обмеження щодо неістотності імен: $p_A(d) = p_A(h)$ і $p_B(d) = p_B(h)$ для всіх $d, h \in {}^V A$ таких, що $d \Vdash -v(p) = h \Vdash -v(p)$.

Для формул вигляду $R_i^{\pm}(p)$ і атомарних твердження теореми випливає з визначення базових предикатів. Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення H

Теорема 4. Нехай H – модельна множина, яка може бути G -, L -, R -, LR -модельною. Тоді існують моделі мови $A = (A, I)$, $B = (A, I)$ та δ , $\eta \in {}^V A$:

- 1) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$;
- 2) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$.

Пари (A, δ) та (B, η) із такими властивостями називають T -контрмоделью та F -контрмоделью.

Нехай $W = \{y \in \text{pt}(H) \mid \neg y \in H\}$. Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деякі ін'єктивні $\delta, \eta \in {}^V A$ з $\text{asn}(\delta) = W$. Така A дублює множину W .

Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ і η та на ІМ вигляду $r_y^{\delta}(\delta)$ і $r_y^{\eta}(\eta)$

- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\epsilon y_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\epsilon y_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\epsilon y_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\epsilon y_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\rho_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\rho_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\neg \rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\neg \rho_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\neg \rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\neg \rho_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\rho_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\rho_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\neg \rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\neg \rho_A)$;
- $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in T(\neg \rho_A)$ та $\neg \mu y \in H \Rightarrow \delta \in F(\neg \rho_A)$;

Зауважимо, що символи ϵy можуть фігурувати в секвенціях лише в складі μy та $\neg \mu y$, які індукуються формами елімінації кванторів.

В усіх інших випадках значення базових предикатів і їх заперечень задаємо довільно, враховуючи обмеження щодо неістотності: $\rho_A(d) = \rho_A(h)$, $\neg \rho_A(d) = \neg \rho_A(h)$, $\rho_A(d) = \rho_A(h)$, $\neg \rho_A(d) = \neg \rho_A(h)$ для всіх $d, h \in {}^V A$ таких, що $d \Vdash \neg v(p)$.

Для формул вигляду $R_y^{\delta}(p)$ і атомарних, а також їх заперечень, твердження теореми впливає з визначення базових предикатів. Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення модельної множини H (див. [5, 6]).

На основі теорем 3 та 4 маємо теореми повноти.

Теорема 5. 1) $\Gamma \models_{CL} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSC;

2) $\Gamma \models_{CL} \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSC.

Доводимо п.1. Припустимо супротивне: $\Gamma \models_{CL} \Delta$ та $\vdash \Gamma, \Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для $\vdash \Gamma, \Delta$ існує незамкнений шлях. За теоремою 2 множина H усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – C -модельна. При цьому $\vdash \Gamma, \Delta \subseteq H$. За теоремою 3 існує CL -контрмодель (A, δ) : $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \delta \in F(\Phi_A)$. Згідно з $\vdash \Gamma, \Delta \subseteq H$ маємо $\delta \in T(\Gamma_A)$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ та $\delta \in F(\Psi_A)$ для всіх $\Psi \in \Delta$. Звідси $\delta \in T(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A)$.

Отже, $T(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A) \neq \emptyset$. Це заперечує $\Gamma \models_{CL} \Delta$.

Доводимо тепер п.2. Припустимо супротивне: $\Gamma \models_{CL} \Delta$ та $\vdash \Gamma, \Delta$ невивідна. Міркуючи, як в доведенні п.1, маємо C -модельну H таку: $\vdash \Gamma, \Delta \subseteq H$. За теоремою 3 існує CL -контрмодель (B, η) таку: $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \eta \in T(\Phi_B)$. Згідно з $\vdash \Gamma, \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\eta \in F(\Phi_B)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\eta \in T(\Psi_B)$. Звідси $\eta \in F(\Gamma_B) \cap T(\Delta_B)$, тому $F(\Gamma_B) \cap T(\Delta_B) \neq \emptyset$. Це заперечує $\Gamma \models_{CL} \Delta$.

Теорема 6 1) $\Gamma \models_{TL} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSL;

2) $\Gamma \models_{TL} \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSL.

Теорема 7. 1) $\Gamma \models_{TL} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSR;

2) $\Gamma \models_{TL} \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSR.

Теорема 8. $\Gamma \models_{TL} \Delta$ в неокласичній семантиці чи $\Gamma \models_{TL} \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \vdash \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSLR.

Наведемо доведення теореми 8. Теореми 6 та 7 доводяться аналогічно (див. також [5, 6]).

Припустимо супротивне: $\Gamma \models_{TL} \Delta$ та $\vdash \Gamma, \Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для $\vdash \Gamma, \Delta$ існує незамкнений шлях. Множина H усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – LR -модельна, причому $\vdash \Gamma, \Delta \subseteq H$. За теоремою 4 існують T -контрмодель (A, δ) і F -контрмодель (B, η) :

- $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$;
- $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$.

Якщо за умови HCLR невірна HCL (тоді маємо HCR), то для T -контрмоделі маємо неоднозначний предикат, а для F -контрмоделі – нетотальний предикат, тому для логіки однозначних предикатів беремо F -контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – T -контрмодель.

Якщо за умови HCLR невірна HCR (тоді маємо HCL), то для F -контрмоделі маємо неоднозначний предикат, а для T -контрмоделі – нетотальний, тому для логіки неоднозначних предикатів беремо T -контрмодель, для логіки тотальних – F -контрмодель.

Якщо вірні HCL і HCR, то можна брати як T -контрмодель, так і F -контрмодель.

Для T -контрмоделі згідно з $\vdash \Gamma, \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\delta \in T(\Phi_A)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\delta \in T(\Psi_A)$. Звідси $\delta \in T(\Gamma_A)$ та $\delta \in T(\Delta_A)$, тому невірн $T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma \models_{TL} \Delta$ та $\Gamma \models_{TL} \Delta$.

Для F -контрмоделі згідно з $\vdash \Gamma, \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\eta \in F(\Phi_B)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\eta \in F(\Psi_B)$. Звідси $\eta \in F(\Gamma_B)$ та $\eta \in F(\Delta_B)$, тому невірн $F(\Gamma_B) \subseteq F(\Delta_B)$. Це заперечує $\Gamma \models_{TL} \Delta$ та $\Gamma \models_{TL} \Delta$.

Теорема 9. $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в загальній семантиці $\Rightarrow$ Γ, Δ вивідна в численні QSG.

Доведення. Нехай супротивне: $\Gamma \models_{TF} \Delta$ та Γ, Δ невивідна. Тоді в дереві для Γ, Δ існує незамкнений шлях. Множина H усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – G-модельна, причому $\Gamma, \Delta \subseteq H$. За теоремою 4 існують T-контрмодель (A, δ) та F-контрмодель (B, η) такі:

$$\Gamma, \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A) \text{ та } \Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A);$$

$$\Gamma, \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B) \text{ та } \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B).$$

Тут можна брати як T-контрмодель, так і F-контрмодель. Далі доводимо так, як в теоремі 8.

Посидімо теорему коректності та повноти:

Наслідок. 1) $\Gamma \models_{CO} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSC;

2) $\Gamma \models_{CS} \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSC;

3) $\Gamma \models_T \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSL;

4) $\Gamma \models_F \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSL;

5) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSR;

6) $\Gamma \models_T \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSR;

7) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSLR; $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в пересиченій семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSLR;

8) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в загальній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma, \Delta$ вивідна в численні QSG.

Підсумовуючи, наведемо спектр побудованих спеціальних секвенційних числень чистих першопорядкових КНЛ квазіарних предикатів.

Таблиця 1. Спектр секвенційних числень чистих першопорядкових КНЛ.

	$\models_{CO}$	$\models_{CS}$	$\models_T$	$\models_F$	$\models_{TF}$
Нео	QSC	–	QSL	QSR	QSLR
Пер	–	QSC	QSR	QSL	QSLR
Заг	–	–	QSG	QSG	QSG

Тут використано наступні скорочення:

– Нео – неокласична семантика;

– Пер – пересичена семантика;

– Заг – загальна семантика.

Висновки

В роботі досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Для різних відношень логічного наслідку цих логік побудовано секвенційні числення. При цьому використано спеціальні предикати-індикатори наявності значення для змінних. Для пропонованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Побудову подібних числень буде продовжено для логік кванторно-екваційного рівня.

Список використаних джерел

1. Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S. Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
2. Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S. First-Order Composition-Nominative Logics // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – №4. – P. 176–185 (in Ukrainian).
3. Shkilniak S.S. Relations of Logical Consequence in Composition Nominative Logics // Problems in Programming. – 2010. – № 1. – P. 15–38 (in Ukrainian).
4. Shkilniak S.S. Sequent Calculi for First-Order Logics of Single-Valued Quasi-ary Predicates // Problems in Programming. – 2012. – № 1. – P. 33–51 (in Ukrainian).
5. Shkilniak S.S. Sequent Calculi of Composition Nominative Logics of Quasi-ary Predicates // Problems in Programming. – 2012. – № 2–3. – P. 33–43 (in Ukrainian).
6. Shkilniak S.S. Special Sequent Calculi for Logics of Single-Valued Quasi-ary Predicates // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – № 3. – P. 287–292 (in Ukrainian).
7. Nikitchenko M., Tymofieiev V. Satisfiability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 347. – P. 89–110. – Springer, 2012.

Надійшла до редколегії 05.12.2012

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.385.833

Бутарєв К.О.¹, аспірант,
Коваль І.П.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Лень Ю.А.¹, провідний інженер,
Находкін М.Г.¹, д.ф.-м.н., проф., академік
НАН України.

Вплив відпалу на формування та кінетику окислення границі розділу силіцид/Si(001)

В даній роботі проведено експериментальні дослідження процесів, що відбуваються під час окислення поверхні Si(001) вкритою субмонослоємним покриттям Cr методами іонізаційної та Оже спектроскопії. Спираючись на термодинамічні характеристики можливих з'єднань проведено аналіз взаємодії молекулярного кисню з системою (~0,3 нм) Cr на поверхні Si(001) та з дисиліцидною острівцевою плівкою Cr на Si(001), що утворилась після відпалу при 450°C.

Ключові слова: кремній, хром, силіцид, окислення.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Радіофізичний факультет, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: len@mail.univ.kiev.ua

K.O. Butariev¹, PhD student,
I.F. Koval¹, Ph.D., docent,
Yu.A. Len¹, engineer,
M.G. Nakhodkin¹, Dr. Sci., professor,
academician of NAS of Ukraine.

Influence of annealing on the formation and the kinetics of oxidation the interface silicide/Si(001)

In this paper an experimental study of the processes occurring during oxidation of the Si (001) surface covered with submonolayer Cr was performed by methods of ionization and Auger electron spectroscopy. Based on the thermodynamic properties of possible compounds the interaction of molecular oxygen with the system (~0.3 nm) Cr on Si (001) and thin islands film of chromium disilicide on Si (001), which formed after annealing at 450°C was analyzed.

Key words: silicon, chromium, silicide, oxidation.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, Radiophysical faculty, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g, e-mail: len@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Скришевський В.А.

Introduction

Transition metals are used extensively in semiconductor device fabrication particularly for interconnections and gate electrodes in self-aligned thin film transistor (TFT) and metal-oxide-semiconductor (MOS) structures.

The semiconducting silicides grown on silicon with their high thermal stability, homogeneous interface, smooth surface morphology and good compatibility with the conventional silicon technology have gained increased practical interest to be used in novel semiconducting devices. Among semiconducting silicides the CrSi₂ compound has been intensively studied because of its 0.35 eV band gap, which gives perspective for the applications in optoelectronic devices, such as silicon-based photodetector [1–4].

Transition metals are also used as catalysts for some chemical reactions, such as oxidation of Si. Presence of submonolayer Cr coverage on the silicon

surface significantly increases the reactivity of the interface compared to the clean surface of silicon [5]. After annealing this system at 450°C island film consists of chromium disilicide has been formed on surface [6]. This change in stoichiometry and surface morphology significantly affects the rate of oxides growth [7].

The aim of this work is to investigate the mechanism of accelerated oxidation of Si(001) with submonolayer Cr coverage at room temperature and after annealing at 450°C.

Experimental

Experimental conditions were similar to those described in [5].

Submonolayer (~0.3 nm) Cr metal film was deposited on Si(001) substrate using electron beam evaporation technique at RT. Deposition was performed under the UHV conditions at a vacuum of 2x10⁻⁸ Torr. Analysis of the composition and control

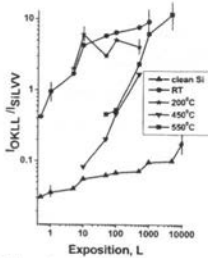


Fig. 1 The dependence of O_{KLL}/Si_{LVV} Auger intensities ratio for clean and covered by ~1ML of Cr Si(001) on the exposure of oxygen at different annealing temperatures.

the number of the deposited chromium was carried out by Auger electron spectroscopy.

The annealing was performed by Joule heating for 5 min, followed by a gradual decrease in temperature.

To prevent an uncontrolled flow of ions and excited atoms of oxygen during exposition in molecular oxygen the filaments of the ionization gauge, the electron gun, the mass spectrometer and etc were switched off.

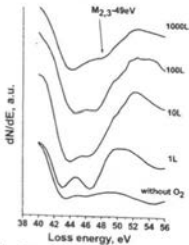


Fig. 2 $M_{2,3}$ chromium ionization line of the system Cr/Si(001) without annealing the sample for various exposures of oxygen

Table 1[8]
Enthalpy of formation of chemical compounds

Chem. formula	$\Delta H_f^{\circ} T_{298,15}$, kJ/mol	Chem. formula	$\Delta H_f^{\circ} T_{298,15}$, kJ/mol
CrO	-413,2	CrSi	-71,1
CrO _{1,98}	-582,4	CrSi ₂	-100,4
CrO ₂	-588,3	Cr ₃ Si	-138
CrO ₃	-590,3	Cr ₅ Si ₃	-326
Cr ₂ O ₃	-1140,6	SiO ₂	-908,5
The binding energy Si-Si 176 kJ/mol			
The dissociation energy of the oxygen molecule is 490 kJ/mol			

Results and discussion

To analyze the kinetics of the oxidation of submonolayer coatings Cr the ratio of intensities of the Auger lines of O to Si for the films annealed at different temperatures depending on the exposure in O₂ was built (Fig. 1). In the previous paper [7], it was determined that the ratio of intensities of Auger lines Cr to Si significantly reduced only at the annealing temperature > 350°C. Indeed at $T = 200^\circ\text{C}$ when $I_{Cr}/I_{Si} \approx I_{Cr}/I_{Si}$ (at room temperature) significant changes in the oxidation is not observed (Fig. 1), indicating, that the electronic structure of the surface in relation to non-annealed sample remains unchanged. However, at higher annealing temperature (450-550°C) the slope of the curve significantly different from both the pure surface

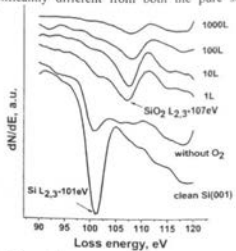


Fig. 3 $L_{2,3}$ silicon ionization line of the system Cr/Si(001) without annealing the sample for various exposures of oxygen

and from the non-annealed system. The investigation of initial stage of oxidation of annealed ($450-550^{\circ}\text{C}$) $\text{Cr/Si}(001)$ system wasn't performed because it is difficult to identify Auger the peak of oxygen on the background of chromium. When exposition $<10\text{L}$ the amount of oxygen was almost the same as in the case of clean surface, but only after 10L oxidation process is accelerated considerably.

To explain this phenomenon, we tried to investigate the processes occurring in the oxidized annealed ($450-550^{\circ}\text{C}$) and non-annealed $\text{Si}(001)$ substrate with submonolayer coating of Cr, based on the known values of enthalpy of various compounds (Table 1).

First, let us consider the case non-annealed sample. According to the data of scanning electron microscope substrates have almost covered by continuous film of chromium. Since for the formation of Si-O bond must be broken Si-Si (176 kJ/mol), so at first it is more energetically favorable the formation of chromium oxide



However, the enthalpy of formation of CrO and CrO_2 differs only at 175.1 kJ/mol . So the energy barrier of formation Si-O is $175.1 + 176 = 351.1\text{ kJ/mol}$, which is significantly less than the dissociation energy of oxygen with the binding energy of Si-Si. Thus one atom of oxygen can move to the silicon substrate.

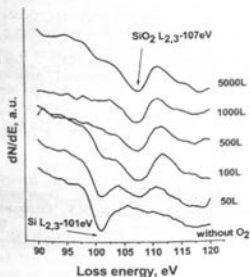


Fig. 4 $L_{2,3}$ silicon ionization line of the system $\text{Cr/Si}(001)$ after annealing at 550°C for various exposures of oxygen



In this process chromium acts as a catalyst which changes the degree of oxidation. From the foregoing calculation followed that chromium and silicon oxides are formed in the initial stages of oxidation. This has been confirmed by ionization spectroscopy (Fig. 2, 3).

The peak, which according to the literature corresponds to the bonding Cr-O, has appeared at 1L already (Fig. 2). With further exposure this peak remains.

Similarly to $M_{2,3}$ line of chrome, Si-O bond formation occurs at the exposition more then 1L (Fig. 3). The whole available for analysis silicon is oxidized gradually with further increasing exposure.

Now let us consider the submonolayer film of chromium on $\text{Si}(001)$ annealed at 450°C . We deal with the islands film, which consists of the islands of chromium silicide [6]. In this case, oxidation can occurs in three ways:

- 1) oxidation of silicon from substrate,
- 2) oxidation of silicon in the silicide islands,
- 3) oxidation of chromium.

In order to oxidize silicon from substrate it is necessary to break bond Si-Si (176 kJ/mol). Formation of chromium oxide needs to destruction of the molecule CrSi_2 , enthalpy of formation of which is 100.4 kJ/mol .

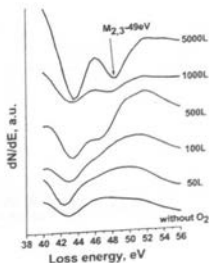


Fig. 5 $M_{2,3}$ chromium ionization line of the system $\text{Cr/Si}(001)$ after annealing at 550°C for various exposures of oxygen

Finally, to oxidize the silicon in islands needs chromium disilicide turned into monosilicide (the difference is the enthalpy of formation $100.4-71.1 = 29.3$ kJ / mol). Given this, the most energetically favorable process is the oxidation of silicon in the islands. The next stage will be the parallel oxidation of chromium and silicon after the destruction of CrSi. After that, the oxidation process will be similar to the case of non-annealed sample.

Indeed, the oxidation of the annealed (450-550°C) sample is slow at exposition less than 10L, almost the same as for pure silicon (Fig. 1). From IL Si $L_{2,3}$ (Fig. 4) it is clear that SiO has been formed already at 1L, whereas that chromium oxide is formed not immediately but only after exposition more than 100L follows from the $M_{2,3}$ lines of chromium (Fig. 5).

At exposition ~ 50L process has accelerated considerably (Fig. 1), which corresponds to the parallel oxidation of chromium and silicon. Finally, at exposition over 1000L the oxidation is similar to the case of non-annealed chromium film on Si(001) substrate.

References

1. Agarwal S., Jain A., Lal C., Ganesan V., Jain I.P. Surface morphology and the phase formation at Cr/Si system // *Applied Surface Science* – 2007. – 253. – N 10. – P. 4721-4726.
2. Bost M.C., Mahan J.E. An investigation of the optical constants and band gap of chromium disilicide // *J. Appl. Phys.* – 1988. – 63. – N 3. – P. 839-844.
3. Simunek A., Wiech G. Si L-emission band of CrSi₂ // *Solid State Commun.* – 1996. – 98. – N 5. – P. 435-437.
4. Heck C., Kusaka M., Hirai M., Iwami M., Yokota Y. Mechanism of low temperature hot corrosion: Burner rig studies // *Thin Solid Films* – 1996. – 64. – N 2. – P. 281-288.
5. Koval I.F., Len Yu.A., Nakhodkin M.G. Initial stages of molecular oxygen interaction with Si (001) surface covered with chromium submonolayers // *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky,*

Conclusion

In this paper, it has been recorded that the oxidation of submonolayer chromium on silicon occurs in two stages: on the first - intermediate oxide of Cr is formed, then Si substrate reduces this oxide.

It was found, that the oxidation of system submonolayer Cr/Si(001) annealed at $T < 300^\circ\text{C}$ occurs in the same way as non-annealed.

According to thermodynamic analysis and the ionization spectroscopy data oxidation of such system annealed at 450°C can be divided into three stages:

- 1) oxidation of Si in the islands and the formation of CrSi,
- 2) the parallel formation of chromium and silicon oxides after the destruction of CrSi,
- 3) oxidation of Si substrate with Cr oxide as a catalyst.

Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2007. – N 4. – P. 255-258. (in Ukrainian).

6. Butarev K.O., Koval I.F., Len Yu.A., Nakhodkin M.G. Transformations in submonolayer coverages of transition metals on the surface of Si(001) // *Physical and chemical basis for the formation and modification of micro- and nanostructures: IVth international conference, October 6-8, 2010, Kharkiv, Ukraine: proceedings.* – 2010. – P. 502-506. (in Russian).
7. Bepalyi E.V., Koval I.F., Len Yu.A., Nakhodkin M.G. Stimulated oxidation of Si(001) surface with the pre-adsorbed submonolayer coverage of chromium // *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka.* – 2009. – N 2. – P. 165-168. (in Ukrainian).
8. Chemical Information Network MSU im. M.V. Lomonosov [Electronic resource] // *Electronic data* – M.: Department of Chemistry MSU im. M.V. Lomonosov. - 1994. – Access mode: <http://www.chem.msu.su/cgi-bin/tkv.pl/>.

Надійшла до редколегії 27.11.2012

Голобородько А.О., к.ф.-м.н., доц.

Вплив стану навколишнього середовища на якість передачі оптичних сигналів

Розглядається можливість застосування оптичної обробки даних до проблеми аналізу екологічного стану ландшафтів. Як кількісний критерій ступеня забруднення запропоновано використовувати деградацію кореляції фотографій рельєфу, що викликана атмосферними спотвореннями.

Ключові слова: екологічний моніторинг, мультиплікативний шум, турбулентна атмосфера.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, пр-т. Ак.Глушкова 4г, Київ, Україна, e-mail: angol@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

A problem of data processing, which is contained in the images, obtained during the research, appears in modern experimental physics. So new test subjects such as tomograms in health surveys, scanning electron or tunnel micrographs of surfaces involves some new methods of image processing to obtain efficient data. This class of problems includes the problem of environmental monitoring [3], in which the main researches are space methods of pollution monitoring and aerophotography. In particular, determining the degree of air pollution, which causes degradation of the image quality by additive and multiplicative noise, seems to be a perspective area of research. So the purpose of the work was to evaluate the impact of noise on the quality of the optical image.

One should note that the noise in photos, due to refractive index inhomogeneities, in several papers [6, 7] is considered as a negative factor. It is proposed to use the noise components to estimate the spatial distribution of the refractive index, and hence the scattering properties of the system at all.

The arising of multiplicative noise is connected with optical wave passing through the environment with heterogeneous distribution of the refractive index. This causes the additional phase factor, which distorts the wavefront, and registered optical image will contain speckle pattern superposed with real image of the object. Investigation of noise in the optical channel requires the creation of model of optical wave interacting with local inhomogeneities of refractive index. It involves building another

Goloborodko A.A., Ph.D., asc.prof.

Effect of environment on the quality of optical signals transmission

The possibility of coherent optical data processing to ecological monitoring of landscape is considered in this paper. Degradation of the relief photos correlation caused by atmosphere dust and atmospheric disturbance can serve as a criterion for environment pollution.

Key words: environmental monitoring, multiplicative noise, turbulent atmosphere.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, 4g Ak. Glushkov str., Kyiv, Ukraine e-mail: angol@univ.kiev.ua

model: model of inhomogeneities of refractive index which are caused by turbulent atmosphere and noises in receiving chain.

The Kolmogorov model is used as model of turbulent environment. This model describes the perturbation of wavefront with the help of structure function [5]:

$$D(r) = 6.88(r/r_0)^{5/3}, \quad (1)$$

where $r_0 = 3.02(2\pi/\lambda)^{4/3}(L C_N^2)^{-1/2}$ is Fried parameter [2] (Fried's coherence length), λ is wavelength, L is the distance of light propagation, C_N^2 is structure coefficient.

According to Ref.2, only the phase perturbations are considered, because amplitude changes lead to a weak flickering and this effect is smaller than phase perturbations. Also only the case of horizontal propagation in the lower layer of the atmosphere is considered. In this case the structural coefficient C_N^2 can be considered as constant along the way of propagation. And random realizations of wave phase, distorted by turbulent atmosphere, on the diaphragm with radius R , are defined as:

$$\varphi(r, \theta) = \sum a_j Z_j(r/R, \theta), \quad (2)$$

where

$$a_j = S^{-1} \oint P(r) (r) Z_j(r/R) dr \quad (3)$$

is random expansion coefficients, which are defined as the orthogonal projections of phase φ on the basis functions; $P(r)$ is transfer function of aperture with radius R and the surface area S ; Z_j is Zernike polynomials.

Simulation adds up to the generation of random a_j coefficients, so that the expected phase

distribution belongs to Kolmogorov statistics. It should be noticed that with j increasing the noise becomes Gaussian. The resolution of any optical system is limited by diffraction limit of the aperture, which results in some averaging of image intensity. So the resolution is defined as: $w=1.22\lambda/D^2$.

The investigation of influence of noise on the image can be done in various ways, but the simplest and most illustrative of them is correlation method [1, 4], which was used for comparison of two images. In this case it consists in determining the dependence of the correlation values of two images with different noise parameters.

The results of simulation, which was made on a test image for different noise levels and optical system resolution limit, are shown on fig. 1. The dependence of the value of correlation response (in relative units) from noise level and resolution limit of the optical system is shown in fig. 2.

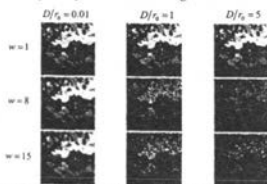


Fig.1. Simulation results of noise at different levels of turbulence and resolution limit of the optical system.

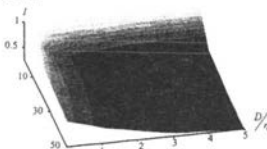


Fig. 2. The dependence of the value of correlation response on the noise level and the resolution of optical system.

Simulations show that in the range of system resolution from 1 to 7λ , noise level changing do not effect on the magnitude of the correlation response, because speckle size is much smaller than the pixel

size. Thus, for such parameters of optical system resolution the noise impact is not noticeable. In the range of $8-15\lambda$ the magnitude of correlation response reduces due to the influence of optical system resolution. From 15λ to 50λ the correlation dependence does not change its shape, because the effect of optical the system becomes larger than the effects of noise.

The proposed method of determining the degree of pollution consists in analyzing the changes in correlation response of images obtained under atmospheric distortion, compared with the undistorted reference image. Strictly speaking, this corresponds to periodic monitoring of potentially dangerous areas of the landscape by aerophotographic images.

The author would like to thank **O.I.Barchuk** for the proposed idea of research.

References

1. Birch Ph. Computer generated complex filter for an all optical and a digital optical hybrid correlator/ Ph.Birch, R.Young, F.Claret-Tournier, D.Budgett, Ch.Chatwin// Optical Engineering. – 2002. – **41** (1) – P. 105–111.
2. Fried D. L. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures / D.L.Fried // JOSA. – 1966. – **56**(10) – P.1372–1379.
3. Hutt D. L. Modeling and measurements of atmospheric optical turbulence over land/ D. L. Hutt// Optical Engineering. – 1999. – **38** (8) – P.1288–1295.
4. Pati G.S. Experimental and simulation studies on the performance of binary and gray-valued joint transform correlators under poor illumination conditions and nonoverlapping background noise/ G.S.Pati, K. Singh// Optical Engineering. – 1997. – **36**(7) – P. 1918–1929.
5. Roddier N. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials/ N.Roddier// Optical Engineering. – 1990. – **29** (10) – P.1174–1180.
6. Saha S. K. High resolution imaging by employing passive and active approaches / K. Singh, V. K. Rastogi ed.// Perspective of Engineering Optics. – 2003. – P. 70–89.
7. Schock M. Performance analysis of polychromatic laser guide stars used for wavefront tilt sensing/ M.Schock, R. Foy, M.Tallon, L. Noethe, J.-P. Pique// Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2002. – **337** – P.910–920.

Надійшла до редакції 26.11.2012

УДК 546.26+539.24

Іванюта О. М., к.ф.-м.н.

Особливості побудови біозв'язків SWCNT - ДНК для біосенсорів.

Унікальна структура і електронні властивості вуглецевих нанотрубок (CNTs), що пов'язані з специфічними властивостями ДНК, можуть зробити супрамолекули CNTs-ДНК біоспрямленими, що дозволить їх використовувати в біодатчиках. CNTs інкапсульовані в ДНК були охарактеризовані структурою атомарних зв'язків та атомно-силовою мікроскопією (AFM).

Ключові слова: дезоксирибонуклеїнова кислота, трансдьюсер, супрамолекула, одношарова вуглецева нанотрубка, скануюча тунельна мікроскопія.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: iva@univ.kiev.au.

O. M. Ivanyuta, Ph.D.

Features SWCNTs - DNA bioconjugates in biosensors.

The unique structure and the outstanding electronic properties of CNTs coupled with the specific recognition properties of DNA would indeed SWCNTs-DNA bioconjugates widely used in biosensors. The CNTs encapsulated DNA have been characterized structure of atomically conjugates and Atomic force microscopy (AFM) techniques in the present investigation.

Key Words: Deoxyribonucleic acid, transducer supramolecules. Single-wall carbon nanotube, Atomic force microscopy.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d e-mail: iva@univ.kiev.au.

Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Скришевський В.А.

Альтернативою до традиційних способів контролю антропогенного середовища є так звані біосенсорні методики аналізу, що використовують біоактивні з'єднання (БАЗ) молекул. Під біосенсором розуміють систему розпізнавання, що має біохімічну природу і використовує реакції індивідуальних біомолекул, або біологічних надмолекулярних структур (супрамолекул). Вони дозволяють мінімізувати масогабарити чутливих пристроїв та вирішити питання біоспрямленості з активними середовищами. Елемент біологічного розпізнавання повинен знаходитися в прямому просторовому контакті з перетворювачем. Для розуміння трансформації в біосистемах живої та неживої природи використовують моделі нанорозмірних (квантоворозмірних) явищ та принципи на яких побудовані методики сучасних досліджень [1].

Переваги методу побудови наноструктур «знизу вгору» мають нескінчену кількість комбінацій поєднань та гнучкість підходів, для реалізації будь-якої речовини, об'єкту, пристрою. Нанопобудови на основі супрамолекул, зокрема систем на основі ДНК, вже набувають поширення при застосуваннях в конструкціях наноелектроніки та являють собою

цілеспрямоване створення просторових конструкцій, де «будівельними блоками» є їх модифіковані молекули, що утворюють біочутливі комплекси. Найбільш важливою задачею в маніпуляції цими блоками є підбір зв'язків до оптимального приспання з можливими БАЗ. Одразу треба розділити два підходи до побудови подібних конструкцій: послідовного та паралельного методів поєднання та виокремити фрактальний (послідовно-паралельний) підхід.

Спосіб послідовного поєднання супрамолекул для методів нанотехнології на даний момент є енергозатратним та має велику собівартість, за виключенням так званої «Самозбірки молекул». Це пов'язано з необхідністю отримання у супрамолекул (ДНК + радикал) слабких зв'язків без запуску процесу денатурації за допомогою низки хімічних реактивів та ферментів для «розрізання» та «зшивання» окремих їх фрагментів та контролю за допомогою сучасної мікроскопії на всіх стадіях побудови [1].

Метод паралельного поєднання зараз в нанотехнології передбачає використання різного роду фрагментів ДНК (Таблиця 1), що в довшийому порядку будуть приспандуватися до

Таблиця 1.

Максимуми поглинання і молярні коефіцієнти поглинання є фрагментів ДНК в спектральних характеристиках при нейтральних значеннях рН, що використовуються при біологічних дослідженнях.

Складові ДНК	λ_{max} , нм	ϵ при λ_{max} ($\times 10^3$)
ДНК - аденозін	258	14,9
ДНК - цитодін	271	9,1
ДНК - гуанозін	252	13,6
ДНК - тимідін	267	9,7
РНК - аденозін	259	9,1
РНК - цитодін	271	9,3
РНК - гуанозін	252	12,7
РНК - тимідін	262	7,4
ДНК - бензол	286	11,1

будь-якої основи кінцівками, де їх зв'язки залишаються несконфесованими, тобто виконуються умови «самозбірки». В переважній більшості випадків одна кінцівка закріплена за основу (класер), що в подальшому можна використати як інтерфейс, а друга – вивільнена для взаємодії з БАЗ, як показано на Рис. 1. Це є основою трансдюсера – фізико-хімічного перетворювача. Наприклад, при конденсації ДНК з воднево-солевих розчинів полімерних гелів її фрагменти утворюють структури порядку 10^6 молекул кожна з лінійними розмірами ~ 100 нм. Така супрамолекула має рідинно-кристалічні властивості, що орієнтують ці фрагменти в шарі з паралельною орієнтацією по відношенню до сусідніх молекул. Самозбірки фрагментів ДНК, більш відомих з літературних джерел як молекули ліпідів, в наноструктури, такі як ліпосоми можна розглядати як класичний приклад побудови функціональних наноматеріалів [1, 2].

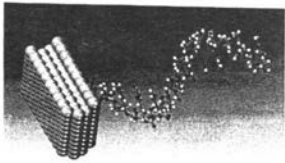


Рис. 1. Закріплена нитка ДНК до поверхні атомів Au.

Внутрішньо молекулярні зв'язки, що характеризують вуглецеві наноматеріали та ДНК можуть мати потенційне застосування в багатьох областях, зокрема для біологічних застосувань. Наявність підвищеної електрохімічної реактивності модифікованих вуглецевих нанотрубок (CNT) у супрамолекулах може бути використано для накопичення та регенерації зарядів в системах супербіомолекули – органічні провідники. Чутливість і динамічний діапазон таких CNTs на поверхні адсорбтів дозволяє використовувати модифіковані CNT в якості нанорозмірних багаторазових датчиків. [1, 2]. На рис. 2 представлена принципова схема дії біосенсора на основі системи CNT+ДНК, що складається з просторово сполучених трансдюсера та іммобілізованого біорозпізнаючого елемента БАЗ. На першому етапі дії такого біосенсора відбувається «впізнання» біоелементів специфічних для нього речовини з багатокомпонентної суміші. На другій стадії відбувається перетворення інформації про протікання біохімічної реакції в форму електрохімічного або іншого сигналу. Ця стадія є ключовою для здійснення роботи біосенсора. Тобто, стадія сполучення біохімічної та електродної (або іншої фізико-хімічної) реакції цілком базується на особливостях побудови біозв'язків системи CNT – ДНК (SWCNT – ДНК). Технологія виготовлення одношарових CNT (SWCNT) вже дозволяє виготовляти лабораторні макети для аналізу складу оточуючого середовища. В таких системах електричний сигнал від трансдюсера може перетворюватися в потрібну для обробки форму сигналу (Рис. 2. а.). Видно, що самозбірки SWCNT – ДНК на поверхні їх кінцівок можуть бути легко досягнуті за рахунок використання біофункціональні хімічного агента, що зниває, окремі ферменти ДНК (цитодін, цистеамін). Хоча цей метод самозбірки є дуже простим і швидким, але при цьому формується моношар супрамолекул на поверхні електродів (див. Рис. 2.). Як правило, ізольовані електроди не можуть забезпечити високу електричну провідність між SWCNT і поверхню інтерфейсу внаслідок утворення ковалентних зв'язків, які не є бажаними при виготовленні електрохімічних датчиків або біосенсорів. Так, в результаті іммобілізації нековалентних зв'язків ДНК на поверхні SWCNT по зв'язку C-C утворюються різного роду зонди з високою стабільністю повторюваних властивостей чутливих електродів, що є бажаним при виготовленні

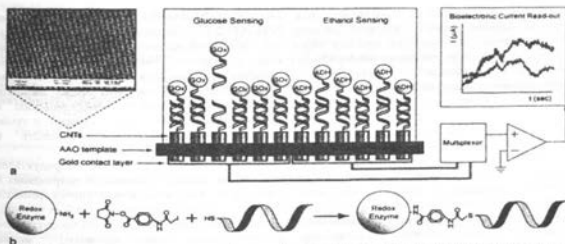


Рис. 2. Принципова схема системи аналізу та візуалізації характеристик активного середовища на основі біодатчиків SWCNT – ДНК. а.) Мультиплексовані окисно-відновні ферменти ДНК, що впорядковані в збірку SWCNT – ДНК яка являє собою біосенсор паралельного типу подсилення зондів (по центру). Індивідуальні електричні контакти зондів SWCNT – ДНК виробляють біоелектрокаталітичний струм (праворуч), що свідчить про концентрацію відповідної БАЗ (наприклад, глюкоза, етанол). Зліва, фото зі скануючого електронного мікроскопу високо впорядкованого масиву SWCNT (масштаб 1 мм = 100 нм). б) Приклад можливого зшивання модифікованої CNT з ферментом ДНК [1].

біосенсорів з задовільною динамічною характеристикою (Рис. 2, б.). Зонд ДНК, що самоорганізовується з SWCNT через Au-поверхню утворює інтерфейс. Використання готових ДНК електрохімічних біосенсорів з додатковими одностанцюжковими РНК дозволяє визначити диференціальні динамічні БАХ з використанням $Ag(Co)$ в якості електрохімічного індикатора. Скориставшись посиленням чутливості трансдюсера модифікованими SWCNT і стабільністю електрохімічних реакцій $Ag(Co)$, в досліджуваному типі біосенсорів вдалося виявити БАЗ (наприклад, глюкоза, етанол) з межею виявлення від 1 А. Цей тип біосенсорів продемонстрував хорошу селективність, стабільність і здатність до регенерації модифікованих ДНК. Підготовлені SWCNT модифіковані фрагментами ДНК продемонстрували можливість ефективного переносу електрону в електроактивних супрамолекулах по поверхні електроду через сильно зв'язані структури діазокаміобензол-ового моношару.

Представлена гібридна конструкція біосенсора виявляє обмеження на взаємодію з наночастинками, які залипають на біоактивних кінцівках SWCNT. Після зв'язування матриці біосенсорів, наночастинки можуть покласти поверхню через структурні жорстко прив'язані

гібридувані дволанцюжкові ДНК шляхом флуоресцентної дії зовнішнім сигналом. З іншого боку, згадані мікро-кантілевери мають механічний резонанс на частоту якого будуть впливати і ДНК, і наночастинки. Нитки SWCNT-ДНК пов'язані з інтерфейсом золотого плівки ковалентними зв'язками необхідно занурити у розчин нейтрального геля. Зростання кількості наночастинок приводить до зрушення резонансної частоти та виявляє за рахунок збільшення ефективної маси мікрокантілевера меншу чутливість до супрамолекул.

Одним з основних завдань у галузі виявлення ДНК є розробка методів, які хімічно не взаємодіють з інтерфейсом та не утворюють ланцюгової реакції на утворення фрактальної структури. Наприклад, нанодотри, що були використані в якості біосенсорів та використовували зміну провідності в модифікованих ДНК при певних значеннях струмів починали взаємодіяти між собою і утворювати фрактальну структуру. А регенерувати початкову структуру не вдалося. Також, вони виявили згадані недоліки при концентрації порядку 1 пікомоль, що складає фактор селективної мутації $1:10^3$ [2, 3].

Зв'язок фрагментів ДНК з напівпровідниковими нанокристалами (квантовими точками) приводить до гібридизації ДНК і вони

біосенсорів. Специфічна взаємодія між комплементарними парами нуклеїнової кислоти утворює агрегати нанокристалів, оскільки через сортування по-різному утворених нанокристалів виникають нерівноважні структури з багатозафазним складом речовини.

Таким чином, елементи біологічного розпізнавання складу активного середовища можна класифікувати за типом зв'язування з БАЗ.

По перше, це так зване продуктивне зв'язування, коли комплекс супрамолекули з БАЗ не є сталою конструкцією, а призводить до утворення тимчасового продукту, що буде спотворювати її електрофізичні характеристики. Селективність розпізнавання модифікованої супрамолекули буде обумовлюватися селективністю біокатализатора. Принципову схему цього зв'язування можна представити як: $E + S \rightleftharpoons ES \rightarrow E + P$, де E - супрамолекула, що здійснює розпізнавання, S - БАЗ, P - продукти реакції. Каталітичні властивості супрамолекул (РНК, ДНК, CNT) - якщо й використовуються в якості біосенсорів, то вкрай рідко. Найчастіше замість виділених ферментів які розпізнають БАЗ можуть використовуватися цілі живі клітини (одноклітинні мікроорганізми). Але ці клітини не можуть забезпечити вибірковість аналізу, оскільки вони містять безліч ферментних систем, кожна з яких може викликати відгук трансдюсера на групу своїх БАЗ. Так, глюкозні біосенсори засновані на каталітичній дії ферменту глюкозооксидази (див. Рис. 2.) [2, 3]. У самозбірки SWCNT+ДНК, використовуються система іонного перемикавання ланцюжків наночастинок більш відома в літературі як "м'який матеріал" [1]. Крім того, ковалентні зв'язки одноланцюжкової ДНК можуть використовуватися в якості молекулярно-біологічних засобів для іммобілізації системи SWCNT+ДНК на твердих підкладках типу Li (Ag) шляхом гібридизації основ ДНК. Ця ДНК спрямовує іммобілізацію та сприяє створенню

інтерфейсу селективної функціоналізації системи SWCNT+ДНК з напівпровідниками або металами. Тобто, необхідною умовою створення біосенсора є успішна іммобілізація ферменту на поверхні трансдюсера. При цьому необхідно вирішити наступні завдання: міцно закріпити фермент, перешкодивши його змиванню в процесі аналізу, стабілізувати фермент, а також забезпечити його високу активність в іммобілізованих станах.

По друге, це так зване непродуктивне зв'язування, коли у відповідь на потраплення в середовище БАЗ починається синтез ферментів для їх нейтралізації. Зв'язування БАЗ, як правило, міцне і селективне. За аналогією з продуктивним розпізнаванням цю взаємодію можна представити у вигляді наступної схеми: $ES \rightleftharpoons ES$. Для системи SWCNT+ДНК такий тип зв'язків знайшов широке застосування при побудові багаторазового біосенсора. Тобто, зв'язування комплементарних ДНК при модифікації ДНК сенсорів - це визначення направлених послідовностей нуклеотидів. В ізолюваному стані рецептори системи SWCNT+ДНК, як правило, недостатньо стабільні, а їх комплекси зі специфічним лігандом недостатньо міцні.

Основною проблемою створення біосенсорів на основі непродуктивного зв'язування є ресстрація цієї взаємодії з БАЗ. В переважній більшості випадків, ДНК сенсори вимагають наявності різного типу міток (ферментативних, флуоресцентних, електрохімічних, радіоактивних та ін) і, як наслідок, не є безреагентними. Лічені трансдюсери чутливі до непродуктивного зв'язування можуть бути засновані для утворення ліпідного бошару, що є моделлю «біологічних мембран». На жаль, компоненти ліпідного бошару нестабільні в розчині, а при перенесенні на тверду поверхню (зонди) вони втрачають властивості мембрани у зв'язку з появою великої кількості дірок.

Список використаних джерел

1. Turner A., Karube I., Wilson G., Biosensors, fundamentals and applications. - Oxford University Press, Oxford, 1987. - 365 c.
2. Scharff P., Tsamis C., Ivanyuta O., DNA, macro/metal nanoparticles, DNA/nanocarbon and macrocyclic metal complex/fullerene molecular building blocks for nanosystems: electronics and sensing //In Book Frontiers of multifunctional integrated nanosystems, Eds: E. Buzaneva and

- P. Scharff, NATO Science Series II, Mathematics, Physics and Chemistry - NAII, V. 152, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, - 2004. - P. 251-276
3. Hansson K., Ranby M., Johansen K. et. al., Surface plasmon resonance (SPR) analysis of coagulation in whole blood with application in prothrombin time assay // Biosensors and Bioelectronics - 1999. - 14. - P. 671-682.

Надійшла до редколегії 30.11.12

УДК 53.082.5; 681.7.012; 681.7.014.3

Котов М.М.¹, пров. інж.,
Поданчук Д.В., с.н.с., к. ф.-м.н.**Вплив спекл-поля на відновлення
оптичного хвильового фронту**

Експериментально досліджено вплив статистичних характеристик спекл-поля, яке виникає при освітленні дифузної поверхні когерентним лазерним випромінюванням, на точність відновлення форми хвильового фронту сенсором Шека-Хартманна.

Ключові слова: сенсор Шека-Хартманна, відновлення хвильового фронту, спекл.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ, Україна, 01601. e-mail: mkot@univ.kiev.ua

M.Kotov¹, adv. engineer,
D.Podanchuk, senior research scientist, PhD.**The influence of a speckle field on the
reconstruction of optical wavefront**

The influence of statistical characteristics of a speckle field, induced by illumination of a diffuse surface by coherent laser beam, on accuracy of the wavefront reconstruction with the Shack-Hartmann sensor is experimentally investigated.

Key Words: Shack-Hartmann sensor, wavefront sensing, speckle.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrska St., Kyiv, Ukraine, 01601 e-mail: mkot@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І. О.

Поява випадкових флуктуацій фази та амплітуди у досліджуваному пучку, які виникають внаслідок розсіювання лазерного випромінювання на випадково-неоднорідному середовищі, значно утруднює проведення вимірювань за допомогою сенсорів хвильового фронту. Така проблема виникає, наприклад, при вимірюванні аберацій людського ока з використанням лазерного освітлення [4], при застосуванні сенсорів для прецизійного моніторингу деформацій шорсткої поверхні [8] тощо. Проведені на реальному людському оці експерименти показали, що спекл-структура, яка виникає при розсіюванні лазерного променя на сітківці, є основним фактором, що обмежує точність відновлення хвильового фронту [5]. При

цьому для усереднення дрібномасштабної структури всередині субапертури використовувався звичайний метод знаходження центра мас.

У даній роботі розглянуто вплив випадкової модуляції фази та амплітуди спекл-поля при визначенні великомасштабних фазових спотворень досліджуваного хвильового фронту за допомогою сенсора Шека-Хартманна. Для підвищення точності визначення центрів сфокусованих точок гартманограми пропонується адаптивний вибір областей, у межах яких розраховується центр мас точок, а при малих рівнях шуму – метод зважених інтенсивностей.



Рис. 1 Руїнування просторової когерентності для системи з багаторазовим розсіюванням: один розсіюючий шар (а), 4 розсіюючих шари (б) та 8 розсіюючих шарів (в).

Розглядаючи картину дифракції, що спостерігається на відстані, більшій за поперечний розмір зондуючого лазерного променя зазначимо, що мікронерівності поверхні спотворюють фазу хвилі і руйнують просторову когерентність пучка. Саме ці спотворення і викликають появу спекл-структури в розсіяній хвилі. На великій відстані від зразка діаметр спеклів в площині спостереження не залежить від структури поверхні дифузного об'єкта, а залежить лише від довжини хвилі λ та кута, під яким видно межі освітленої ділянки зразка з площини спостереження [2]. Проте, від дифузних характеристик зразка залежить контраст спекл-картини. Наприклад, максимальний контраст спекл-структури в площині спостереження можливий у випадку коли дифузний прозорий об'єкт освітлюється лазером [1].

У випадку освітлення дифузного об'єкту випромінюванням когерентним в часі, але з порушеною просторовою когерентністю, контраст спекл-структури зменшується, тобто контраст спекл-структури сильно залежить від шорсткості дифузної поверхні і виникає можливість тестування дифузних об'єктів, використовуючи вимірювання контрасту інтенсивностей.

Якщо зразком є матова шорстка скляна плівка, то контраст спекл-структури практично лінійно залежить від дисперсії рельєфу за висотою. У випадку використання структури з багаторазовим розсіюванням порушення просторової когерентності буде спостерігатись при проходженні світла крізь кожен шар такої структури. Для такої структури вважається, що система складається з багатьох відбиваючих шарів з дифузними границями поділу і різними показниками заломлення [3]. Хвиля, попадаючи на границю поділу шарів, розбивається на дві:

заломлену і відбиту. Такий поділ відбувається на кожній границі, з врахуванням розсіювання на зворотних межах поділу. Таким чином, ступінь просторової когерентності повинна зменшуватись при збільшенні кількості розсіюючих шарів. На рис. 1 показано порушення просторової когерентності і утворення спекл-структури для різної кількості розсіюючих шарів. Видно, що не лише руйнується просторова когерентність розсіяного світла, але й збільшується контраст спекл-структури. Збільшення контрасту свідчить про фазові спотворення розсіяної хвилі, що, в свою чергу, повинно призвести до фізичної неможливості проведення вимірів хвильового фронту розсіяного випромінювання, оскільки такі вимірювання проводяться з усередненням по субапerture мікролінзи.

Експериментальні дослідження проводились на установці, схему якої наведено на рис. 2. Об'єктна сферична хвиля формується за допомогою лінзи $L1$ та рухомого дзеркала $D1$, а пучок, відбитий від дзеркала $D2$ формує плоску хвилю для одержання еталонної гартманограни. Для формування спекл поля у пучок вносилась скляна плівка з дифузною поверхнею $ДП$ та діафрагма A , діаметр якої можна змінювати. Таким чином, у площині матриці мікролінз можна було отримати хвильовий фронт, кривина якого обумовлена зміщенням дзеркала $D1$ з фокальної площини лінзи $L1$, а радіус кореляції спеклів – діаметром діафрагми A . Об'єктна площина (відразу за плівкою $ДП$) переноситься у площину матриці мікролінз, у фокальній площині якої на поверхні $P332$ формується гартманограма, а також на поверхню фотодетектора $P331$, за допомогою якого спостерігається структура спекл-поля.

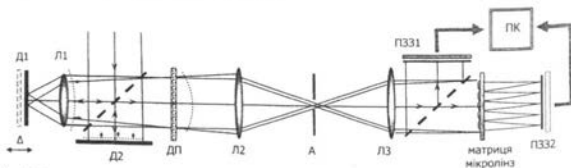


Рис. 2 Оптична схема установки для визначення форми хвильового фронту у присутності спеклів.

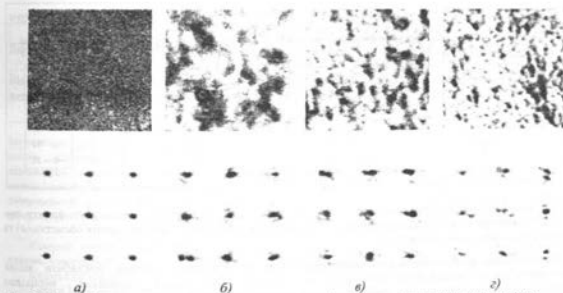


Рис. 3 Спекл-зображення та гартманограми хвильового фронту при різних значеннях радіусу кореляції спекл-поля: а) спекл відсутній; б) $r_{cor} = 60$ мкм; в) $r_{cor} = 40$ мкм; г) $r_{cor} = 25$ мкм.

На рис. 3 наведені спекл-зображення та гартманограми хвильового фронту при різних діаметрах діафрагми та при відсутності спеклів. З рисунку наочно видно, що спекли спотворюють плями гартманограм. Точки гартманограми розщеплюються, коли характеристичний розмір спеклів менше розміру субапертури. Через це значно ускладнюється обробка даних, зменшується вимірювальний діапазон сенсора та збільшується похибка визначення центрів мас точок гартманограм. А отже і похибка визначення кривини досліджуваного хвильового фронту збільшується.

В експерименті змінювалась кривина досліджуваного хвильового фронту і проводилось її визначення за величиною коефіцієнта дефокусування у розкладі відновленого хвильового фронту за поліномами Церіке C_{20} при різних значеннях радіусу кореляції спекл-поля. Одержані результати зображені на рис.4.

Видно, що за наявності спекл-поля отримуються інші значення радіусу кривини хвильового фронту, причому при зменшенні радіусу кореляції спеклів збільшується відмінність даних, отриманих з зашумленої хвилі, від чистої.

Зменшити похибку відновлення хвильового фронту можна шляхом адаптивного підбору положення та розмірів областей, у межах яких розраховується центр мас сфокусованих точок [9, 10]. Була використана така методика: для кожного положення дзеркала ДІ спочатку

визначались положення сфокусованих точок у відсутності спеклів (для цього платівка ДПІ виводилась з пучка), які далі вважались за центри відповідних областей. Результати відновлення для $\Delta = 6.5$ мм наведено на рис. 5а. Похибка знизилась майже у 1.5 рази.

Ще кращі результати дає метод зважених інтенсивностей (рис.5б) [6]. При малих рівнях шуму ($r_{cor} \sim 60$ мкм) він дає майже вдвічі кращі результати, ніж просте знаходження центрів мас, і майже не відрізняється від попереднього методу при збільшенні шуму.

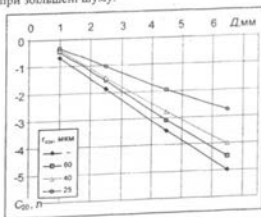


Рис. 4 Залежність дефокусування відновленого хвильового фронту від зміщення Δ при різних значеннях радіусу кореляції спекл-поля. Центри точок у гартманограмах знаходяться як центри мас

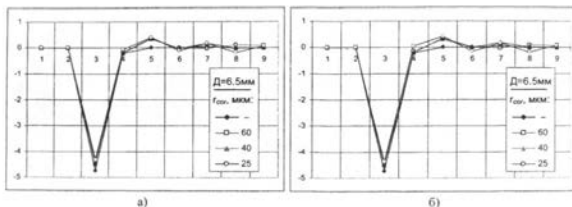


Рис. 5. Значення коефіцієнтів Церіке C_4 1–3 порядків для відновленого хвильового фронту при $\Delta = 6.5$ мм. Центри точок у гартманограмах знаходяться як центри мас у скоригованих областях (а) та методом зважених інтенсивностей (б)

Таким чином, присутність у досліджуваному хвильовому фронті спекл-шума призводить до виникнення похибок при вимірюванні локальних нахилів і, як наслідок, появу у відновленій хвилі паразитних аберацій. При застосуванні вдосконалених алгоритмів обробки результатів вимірювань величина похибок може бути зменшена. На жаль, методи постобробки не

завжди спроможні суттєво послабити вплив спеклів. У таких випадках необхідно використовувати схеми заглушення спеклів, зокрема механічні [5], а також голографічні методи [11, 7].

Автори висловлюють вдячність доценту А.О. Голобородьку за корисне обговорення одержаних результатів.

Список використаних джерел

1. Françon M. Laser Speckle and Application in Optics. – N.Y.: Academic Press, 1979. – 174 p.
2. Françon M. Optics of Speckles. – Moscow: Mir, 1980. – 176 p. (in Russian)
3. Goloborodko A.A., Kurashov V.N. Simulation of depolarisation of multiple scattered coherent radiation // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2003. – №2. – P. 246 – 255. (in Ukrainian)
4. Larichev A.V., Iroshnikov N.G., Nikolaev I.P., Nesterouk K., Kudryashov A.V. Depth-sensitive adaptive deconvolution of retinal images // Proc. SPIE. – 2000. – 4162. – P. 158-169.
5. Larichev A.V., Ivanov P.V., Iroshnikov N.G., Shmal'gauzen V.I. Measurement of eye aberrations in a speckle field // Quantum Electronics. – 2001. – 31(12). – P. 1108-1112.
6. Kovalenko A.V., Kisil A.V., Borkivets O.V. Centroid estimation in Shack-Hartmann sensor // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2005. – №3. – P. 396-402. (in Ukrainian)
7. Podanchuk D. V., Dan'ko V.P., Kotov M. M., Sutyagina N. S. Adaptive wavefront sensor with holographic lenslet array // Proceedings of the International Conference "Electronics And Applied Physics", November, 2005, Kyiv. – 2005. – P.24–25.
8. Podanchuk D.V., Kurashov V.N., Dan'ko V.P., Kotov M.M., Sutyagina N.S. Shack-hartmann wavefront sensor with holographic lenslet array for the aberration measurements in a speckle field // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2008. – 11(1). – P. 29-33.
9. Kotov M. M., Podanchuk D. V., Sutyagina N. S. Influence of speckles on wavefront measurements with Shack-Hartmann sensor // VI International Young Scientist Conference on Applied Physics, 2006, Kyiv. – 2006. – P. 32-33.
10. Podanchuk D.V., Kisil A.V., Kotov M.M. Influence of speckle field on the optical wavefront reconstruction quality // V International scientific and practical conference "Modern problems of ecological and industrial safety of the regions", 2006, Kyiv-Kharkiv-Crimea. – 2006. – P. 92–96. (in Ukrainian)
11. Podanchuk D. V., Dan'ko V.P., Kotov M. M., Sutyagina N. S. Method of wavefront's local tilts measuring // Utility model, Ukraine. – № 37662. (in Ukrainian)

Надійшло до редколегії 21.11.2012

УДК 538.566

Левитський С.М., докт. фіз.-мат. наук, проф.

**Відбивання від іоносфери ксінго
падаючих ЛЧМ-радіоімпульсів**

Показано, що радіоімпульси з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ – імпульси) ксінго падаючи на іоносферу можуть зазнавати при поверненні на Землю оптимальної компресії. Визначені умови оптимальної компресії та місце повернення оптимально стиснутого імпульсу.

Ключові слова: ЛЧМ-імпульс, компресія, плазма, іоносфера

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т.

Глушкова 4г,

e-mail: sml@univ.kiev.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Радіоімпульси з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ- імпульси) знаходять останнім часом все більшого застосування при дослідженнях процесів у іоносфері [1].

У наших попередніх роботах розглядалось поширення ЛЧМ радіоімпульсів у однорідній [2] і неоднорідній [3] плазмі при нормальному падінні на шар плазми.

В даній роботі розглядається більш наближений до реальної ситуації випадок ксінго падіння ЛЧМ – радіоімпульсів на шар неоднорідної іоносферної плазми (який включає в себе і частинний випадок нормального падіння ЛЧМ – імпульсів на іоносферу).

**1. Апроксимація розподілу концентрації
електронів у плазмі іоносфери**

Оскільки мова йдеться про розрахунки поширення радіохвиль у реальній іоносфері, треба було перш за все підібрати найкращу апроксимацію деяким математичним законом справжнього розподілу концентрації заряджених частинок $n_e(x)$ в залежності від висоти.

За основу такого розподілу нами була запозичена модель іоносфери для середніх широт і середньої сонячної активності ополудні [4].

Levitsky S.M., Dr. of Sci., Prof.

**Reflection from ionosphere oblique falling
LFM – radiopulses**

It is shown that a linearly frequency modulated radiopulse (LFM –pulse) falling oblique on the ionosphere can expere by returning on the Earth a optimal compression. Are defined the conditions of optimal compression and the returning point of optimally compressed pulses..

Key Words: LFM-pulse, compression, plasma, ionosphera

Taras Shevchenko National University of Kyiv

03680, Kyiv, Glushkova st. 4g.

e-mail: sml@univ.kiev.ua.

Залежність $n_e(x)$ для цих умов зображена на рис.1 кривою 1.

Вона досягає максимуму $N_m = 1,65 \cdot 10^{12}$ м⁻³ на висоті у 340 км від поверхні Землі і має

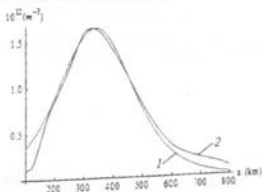


Рис.1. Розподіл концентрації електронів у іоносфері

півширину у 170 км. Після підбору кількох функцій цю залежність вдалось задовільно апроксимувати законом

$$n_e(x) = N_m \text{Sech}^2\left\{\frac{340 - x}{170}\right\}$$

(крива 2 на рис.1).

Саме такий закон і буде застосовуватися у подальших розрахунках. Найважливішим є добре співпадіння апроксимації в області найвищих значень $n_e(x)$, де вплив іоносфери на поширення радіохвиль є найсильнішим. Тому деяке розходження кривих в області малих $n_e(x)$, де показник заломлення мало відмінний від одиниці, є неістотним.

2. Поширення радіохвиль у неоднорідній плазмі.

При падінні електромагнітної хвилі на межу, яка розділяє середовища з показниками заломлення n_0 та n_1 , хвиля, що падає на цю межу під кутом θ , заломлюється на кут θ за законом Снелліуса (рис. 2).

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 \quad (1)$$

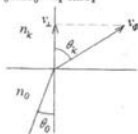


Рис. 2. Заломлення хвиль на межі

Можна легко довести, що при падінні хвилі під кутом θ_0 з області, де $n_0 = 1$, кут заломлення у довільному шарі, де коефіцієнт заломлення дорівнює n , буде просто θ де

$$\sin \theta = \sin \theta_0 / n. \quad (2)$$

незалежно від значень коефіцієнтів заломлення у всіх проміжних шарах і електромагнітна хвиля поширюватиметься там з фазовою швидкістю $v_n = c/n$.

У вертикальному напрямку (вздовж висі x) проекція цієї швидкості

$$v^{\uparrow} = v_n \cos \theta = \frac{c}{n} \cos \theta \quad (3)$$

Коефіцієнт заломлення n у плазмі іоносфери на висоті x , де концентрація електронів $n_e(x)$,

$$n^2 = 1 - b n_e(x), \quad \text{де}$$

$$b = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} = \frac{80.5}{f^2 (\text{Гц})}$$

Отже, радіохвиля, що падає на іоносферу під кутом θ_0 , буде поширюватися в ній залежно від висоти під кутом θ , для якого

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} =$$

$$\frac{1}{n} \sqrt{1 - b n_e(x) - \sin^2 \theta_0} = \frac{1}{n} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - b n_e(x)} \quad (4)$$

Час, за який радіохвиля пройде у вертикальному напрямку елемент шляху

$$d\tau = \frac{dx}{v^{\uparrow}(x)} = \frac{1}{c} \frac{n}{\cos \theta} dx = \frac{1}{c} \frac{1 - b n_e(x)}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 - b n_e(x)}} dx \quad (5)$$

а загальний час поширення від землі до висоти x

$$\tau(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \frac{1 - b n_e(x)}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 - b n_e(x)}} dx \quad (5)$$

Але в дійсності радіохвиля може дійти лише до висоти $x = h$, де $v^{\uparrow} = 0$ та $\theta = 90^\circ$. Там вона буде відбита і почне свій рух у зворотному напрямку до Землі. З ф-ли (4) очевидно, що це відбудеться за умови

$$\cos^2 \theta_0 = b n_e(h) = b N_e \left[\text{Sech} \left(\frac{h - 340}{170} \right) \right]^2.$$

з якої можна видобути значення висоти h .

Так, наприклад, для $\theta_0 = 45^\circ$ та частоти $f = 10^7$ Гц це буде $h = 158$ км.

Пройнтегрувавши в цих межах вираз (5), одержуємо час 0.93 мс, а час повернення на Землю буде вдвічі більшим.

В табл. 1 наводяться значення h – висоти точки відбивання для частоти f та τ – часу повернення відбитого сигналу при куті падіння $\theta_0 = 45^\circ$ для низки частот від 7 до 16 МГц. Як видно, час повернення сигналу зростає з частотою, оскільки хвилі з більшою частотою більше заглиблюються у іоносферу (аж до частоти f_m , починаючи з якої хвилі проходять через іоносферу наскрізь. Для $\theta_0 = 45^\circ$ це буде $f_m = 16.2$ МГц).

3. Компресія ЛЧМ - імпульсів

Імпульс з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ-імпульс) – це радіоімпульс, у якому частота лінійно зростає протягом імпульсу

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t$$

$$U(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \mu \frac{t^2}{2}) \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (6)$$

$$\Delta\omega = \mu T$$

де T – тривалість імпульсу, $\Delta\omega$ – максимальна девіація (відхилення) миттєвої частоти протягом імпульсу від середньої частоти ω_0 .

Особливістю подібних імпульсів є можливість їх компресії, тобто стиснення у часі.

Компресія відбувається при проходженні ЛЧМ-імпульсу через дисперсійне середовище, у якому час проходження τ залежить відповідним чином від частоти ω [5-7].

Нами було показано, що компресію ЛЧМ-імпульсів можна одержати при поширенні цих імпульсів у плазмі за рахунок її природних дисперсійних властивостей [2].

У загальному випадку сигнал на виході будь-якої системи є

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\omega) \exp[i\omega t - i\phi(\omega)] d\omega \quad (7)$$

де $\dot{z}(\omega)$ – спектр початкового ЛЧМ-імпульсу а $\phi(\omega)$ – набір фази сигналу у системі. Для ЛЧМ-імпульсів з базою $B \gg 1$ спектр наближено може бути представлений як [7]

$$\dot{z}(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp[-i \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu}], \quad (8)$$

а закон дисперсії $\phi(\omega)$ у загальному вигляді як

$$\phi(\omega) = \phi(\omega_0) + \phi'(\omega_0)\Omega + \frac{\phi''(\omega_0)}{2}\Omega^2 + \dots$$

$$\text{де } \Omega = \omega - \omega_0.$$

Фізичний зміст цих похідних є $\phi'(\omega_0) = \tau(\omega_0)$ – затримка у часі обвідної імпульсу в околі несучої частоти ω_0 , а $\phi''(\omega_0) = d\tau(\omega_0)/d\omega$ – дисперсія цієї затримки, тобто її залежність від частоти.

Тоді інтеграл (7) набуває вигляду

$$U(t) = \frac{U_m}{4\sqrt{\pi\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega_0 t + i\Omega t - i\frac{\Omega^2}{2\mu} - i\phi(\omega_0) - i\tau(\omega_0)\Omega - i\frac{d\tau(\omega_0)}{d\omega} \frac{\Omega^2}{2}] d\Omega \quad (9)$$

Або

$$U(t) = A \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \exp[i(ax^2 + bx)] dx \quad (9a)$$

$$\text{де } A = \frac{U_m}{4\sqrt{\pi\mu}} \exp[i(\omega_0 t - \phi(\omega_0))]$$

$$a = -[\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2} \frac{d\tau(\omega_0)}{d\omega}],$$

$$b = t - \tau(\omega_0).$$

Оптимальна компресія досягається за умови, коли $a = 0$ і інтеграл (9a) стає просто

$$U(t) = A \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \exp[i(bx)] dx = \frac{U_m}{4\sqrt{\pi\mu}} \Delta\omega \frac{\sin[t - \tau(\omega_0)] \frac{\Delta\omega}{2}}{[t - \tau(\omega_0)] \frac{\Delta\omega}{2}} \quad (10)$$

Це є не що інше, як функція $\text{sinc}(x)$, зсувнута у часі на $\tau(\omega_0)$ – час затримки обвідної імпульсу. Ширина основного пелюстка функції $\text{sinc}(x)$, у момент оптимальної компресії складає $4\pi/\Delta\omega$, яка може бути значно меншою від тривалості початкового імпульсу T . А умовою такої оптимальної компресії є

$$\mu = -\left(\frac{d\tau(\omega_0)}{d\omega}\right)^{-1} \quad (11)$$

4. Поширення і відбивання ЛЧМ-імпульсів у неоднорідній іоносферній плазмі

З ф-ли (11) випливає, що підрахувавши похідну $d\tau(\omega_0)/d\omega$ можна визначити параметри ЛЧМ-імпульсу, які б забезпечили його оптимальну компресію при поверненні на Землю.

Зробивши за даними табл.1. числове диференціювання для $\tau(f)$ одержуємо в графі наближене значення цієї похідної $d\tau/d\omega$ і відповідно μ – девіації частоти у ЛЧМ-імпульсі. Як видно, μ є від'ємною величиною, тобто для оптимальної компресії миттєва частота у імпульсі має зменшуватися у часі.

Для тривалості імпульсу $T=50$ мкс одержуємо зміну частоти на протязі імпульсу $\Delta\omega = \mu T$, яка є, як то і має бути, значно меншою від ω_0 – середньої частоти у імпульсі.

В останній графі таблиці наводяться значення L – відстані по поверхні Землі до точки повернення оптимально стиснутого

ЛЧМ-імпульсу. Відстань $L = \bar{v} \tau$, де $\bar{v}$ – групова швидкість поширення радіохвиль у іоносфері у горизонтальному напрямку $\bar{v} = v_{gr} \sin \theta = c n \sin \theta$. Але враховуючи рівняння (2), одержуємо, що швидкість $\bar{v} = c \sin \theta_0$ і залежить лише від початкового кута θ_0 . Тут для визначення L слід

скористатися саме груповою швидкістю, бо нас, зрештою, цікавить лише саме надходження стиснутої обвідної стиснутої обвідної скомпресованого ЛЧМ - імпульсу, яка за величиною може бути в $\kappa = \Delta \omega T / 4\pi$ разів більшою від амплітуди початкового імпульсу.

Таблиця 1							
f (Mc)	h (km)	τ (ms)	$\Delta\tau/\Delta\omega$	μ	$\Delta\omega$	κ	L (km)
7	87	1,14	$2,70 \cdot 10^{-11}$	$3,70 \cdot 10^{10}$	$-1,85 \cdot 10^6$	7,4	131
8	112	1,33	3,00	-3,3	-1,65	6,6	279
9	136	1,55	3,50	-2,8	-1,4	5,6	325
10	158	1,84	0,00	-2,6	-1,3	5,2	386
11	179	2,04	3,90	-2,6	-1,3	5,3	428
12	200	2,28	3,80	-2,6	-1,3	5,2	480
13	221	2,49	3,30	-3,1	-1,52	6,2	523
14	244	2,73	3,80	-2,6	-1,3	5,2	573
15	269	3,07	5,40	-1,9	-0,95	3,8	645
16	306	3,7	10,00	-1,1	-0,55	2,2	777

Висновки

1. При відбиванні від іоносфери ЛЧМ - радіоімпульс може зазнавати компресію.

2. Для одержання компресії початковий ЛЧМ - радіоімпульс повинен мати негативну деіацію частоти, тобто миттєва частота повинна протягом імпульсу зменшуватися.

3. Підбравши відповідним чином (в залежності від середньої частоти у імпульсі ω_0 і кута падіння на іоносферу θ_0) деіацію частоти μ можна одержати в місці повернення радіоімпульсу на Землю його оптимальну компресію з відповідним скороченням тривалості та збільшенням миттєвої потужності.

Список використаних джерел

1. Strelkov G.M., Naryshkin V.I. Spreading of radiopulses with lineary frequency modulatiyn in isotropic ionospheric plasma. Radiotekhniks and Electronics. – 2008, N 1. – P. 49-57. (in Russian).
2. Levitsky S.M. Kompression of LFM-pulses in ionospheric plasma. Bulletin of Taras Shevchtnko National University of Kyiv. Series

Physics&Mathematics. – 2009, N3. P. 260-263. (in Ukrenian).

3. Levitsky S.M. Kompression and reflectin of LFM-pulses in inhomogenous ionospheric plasma. Bulletin of Taras Shevchtnko National University of Kyiv. Series Physics &Mathematics.–2009, N4. P. 167-169 (in Ukrenian).
4. Gurevich A.V. Shvarzburg A.B. Nonlinear Theory spreding of radiowaves in ionosphere. – M. Nauka.– 1973.– 227p. (in Russian).
5. Kuk Ch., Bernfeld M. Radiolocation Sygnales.– M. Sov.Radio.–1971.– 283 p. (in Russian).
6. Shirman Y.D. Extending and compression of signales. – M. Sov.Radio.–1974.– 112 p. (in Russian).
7. Baskakov S.I. Radiotekhnical Sercits and signales. –M. Vys. Shkola.–1988.– 448 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 23.11.2012.

УДК 620.18:546.28

Находкін М.Г.¹, акад. НАНУ, д. ф.-м. наук,
Куліш М.П.¹, чл.-кор. НАНУ, д. ф.-м. наук,
Литвин П.М.² к. ф.-м. наук, Родіонова¹ Т.В., к.
ф.-м. наук, Сутягіна А.С.¹, студентка.

Стики границь зерен у нанокремнієвих плівках

Методами атомної силової мікроскопії та просвічуючої електронної мікроскопії досліджено стики границь зерен в нелегованих нанокремнієвих плівках. Проаналізовано вплив товщини плівок на формування стиків границь зерен.

Ключові слова: нанокремнієві плівки; структура; стики зерен; атомна силова мікроскопія; просвічуюча електронна мікроскопія

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4 г, e-mail: rodv@univ.kiev.ua

2. Інститут фізики напівпровідників імені
В.С.Лашарьова НАН України 03028, Київ-28,
пр. Науки 41,
e-mail: plyt@isp.kiev.ua

N.G. Nakhodkin¹, acad. of NAS of Ukraine, Dr. Sci., N.P. Kulish¹, Corresp. Member of NAS of Ukraine, Dr. Sci., P.M. Lytvyn², Ph.D., T.V. Rodionova¹, Ph.D., A. Sutygina¹, stud.

Joins of grain boundaries in nanosilicon films

Atomic force microscope and transmission electron microscopy were used for investigation of joints of grain boundaries in undoped nanosilicon films. The effect of film thickness on formation of grain boundaries joints have been analyzed

Key Words: nanosilicon films; structure; joints of grain boundaries; atomic force microscopy; transmission electron microscopy

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: rodv@univ.kiev.ua

² Lashkaryov Institute of Sciences of Ukraine, Prospekt Nauky 41, 03028 Kyiv-28, Ukraine,
e-mail: plyt@isp.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Широке застосування кремнію в сонячній енергетиці викликає необхідність детальних досліджень його структури, оскільки вона визначає електрофізичні характеристики та надійність кремнієвих сонячних елементів [1-3]. Відомо, що дефектність кристалічної структури кремнієвих плівок суттєво впливає на коефіцієнт корисної дії сонячних елементів [1,3], зокрема, характер дефектної структури плівок визначає рівномірність розподілу в них легуючих домішок, що визначає стабільність фотогенераційних властивостей плівок та створення ефективних шляхів транспорту носіїв заряду. Тому, з точки зору підвищення ефективності кремнієвих матеріалів, актуальними є дослідження, що спрямовані на вдосконалення структури плівок.

Характерним елементом структури кремнієвих плівок є границі зерен та стики границі зерен, які являють собою своєрідні лінійні дефекти [4]. Залежно від своєї структури

(загального типу, або спеціальні), стики суттєво впливають на властивості плівок.

Стіжки є найменш дослідженим структурним елементом у полікристалах. Існує лише невелика кількість досліджень, що присвячені аналізу стіжків у ГЦК металах [4]. Для кремнієвих плівок стіжки границь зерен були досліджені тільки для плівок товщиною 500 нм [5], оскільки саме такі плівки застосовуються в мікроелектроніці. Для нанокристалічних плівок які є перспективними для сонячних елементів [1-3], такі дослідження не проводилися.

У даній роботі методами атомної силової мікроскопії (АСМ) та просвічуючої електронної мікроскопії (ПЕМ) досліджено характеристики стиків границь зерен у нанокристалічних плівках кремнію.

Методика

Плівки нанокристалічного кремнію одержували методом хімічного осадження з газової фази в реакторі зниженого тиску. Як

підкладки використовували пластини монокристалічного кремнію із шаром окисла SiO_2 товщиною ~ 100 нм. Температура осадження 630°C . Товщина кремнієвих плівок складала 10-100 нм.

Для дослідження мікрорельєфу поверхні плівок використовували метод атомної силової мікроскопії. Зображення поверхні плівок одержували в скануючому атомному силовому мікроскопі NanoScope IIIa у режимі періодичного контакту (Tapping Mode) з використанням кремнієвих зондів з радіусом вістря 10 нм.

Для дослідження структури методом ПЕМ, плівки стоншували у площині підкладки (шляхом хімічного травлення в суміші $\text{HF}:\text{HNO}_3$ (1:5)).

Результати та обговорення

Зображення нанокристалічних плівок, що отримані за допомогою ПЕМ, як в площині підкладки (рис. 1,а) так і в поперечному перерізі (рис. 1,б), наведені на рис. 1 разом із типовим тривимірним АСМ-зображенням (рис.1,в).

Порівняльний аналіз зображень свідчить, що розміри зерен-горбчків на АСМ-зображеннях відповідають розмірам пучків зерен-волокон в плівках на електронно-мікроскопічному зображенні в поперечному перетині (відстані між стрілками на рис. 1,б). Як було показано в попередніх дослідженнях [6], зерна-волока являють собою двійникові прошарки.

Топографічні зображення поверхні нанокристалічних плівок кремнію в площині підкладки, що отримані за допомогою АСМ, наведені на рис. 2 для плівок різної товщини. Видно, що, по-перше, спостерігаються стики границь між окремими горбчками, по-друге, внутрішня будова горбчків має складний характер. Всередині горбчків також спостерігаються границі та стики границь, що є наслідком різної азимутальної орієнтації двійникових прошарків.

Аналіз АСМ-зображень показав, що, як стосовно стиків границь горбчків, так і

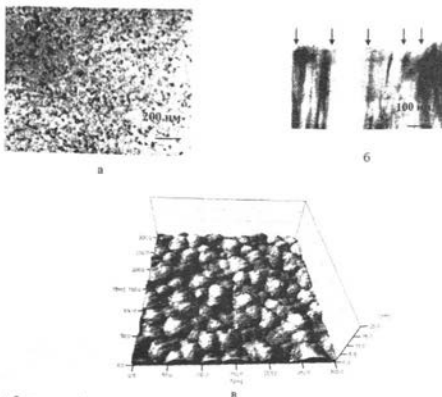


Рис. 1 ПЕМ-зображення мікроструктури (а – в площині підкладки, б – в поперечному перерізі) та АСМ-зображення поверхні нелегованої нанокремнієвої плівки (в)

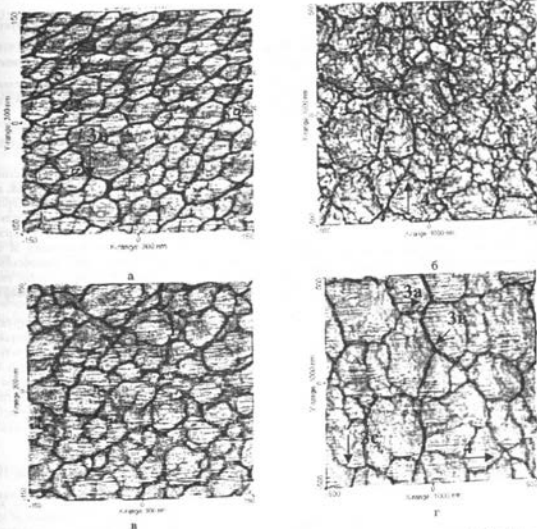


Рис. 2 АСМ-зображення поверхні нанокремнієвих плівок різної товщини: а – 10 нм; б – 75 нм; в – 85 нм; г – 100 нм. Стрілками помічені типові приклади стиків різних типів

внутрішніх границь та стиків, можна спостерігати як потрійні, так і множинні стики. При цьому можна виділити різні конфігурації стиків. Детальний опис типів стиків наведено в роботі [5]). В нанокремнієвих плівках спостерігаються наступні конфігурації стиків (рис. 2):

1- потрійний стик 3а, у якому всі міжзеренні границі це границі загального типу. Кути між ними - довільні, а у рівноважному стані близькі до 120° ;

2-потрійний стик 3б, у якому одна границя спеціальна $\Sigma 3$ (Σ - обернена густина вузлів, що збігаються), а дві інші

– границі загального типу, двограний кут між ними $\sim 180^\circ$;

3- потрійний стик 3с є місцем перетинання трьох границь типу $\Sigma 3$.

Спостерігаються також множинні стики, в яких сходяться 4 границі зерен.

Стики 3с, 4 і 5, що утворені контактом спеціальних границь $\Sigma 3 + \Sigma 3 + \Sigma 3 + \Sigma 3$, особливо цікаві. Такі стики мають упорядковану структуру. Вони мають низьку енергію, малу схильність до адсорбції домішок, низьку дифузійну проникність і погану сприйнятливості до надлишкових дефектів. Для таких стиків характерна підвищена стійкість до міграції, що сприяє стабілізації структури плівок. Стійкість

множинних стиків пов'язана з малою рухливістю когерентних границь $\Sigma 3$ [4].

Аналіз показав, що в усіх плівках, які були досліджені, переважна кількість стиків границь зерен це потрібні стики. Проте, при товщинах ~ 70 нм в плівках спостерігається зменшення кількості потрібних стиків від 83,9% до 76,7% та зростання 4-х стиків границь, відповідно, від 16,1% до 23,3%. Таке зростання кількості множинних стиків корелює зі зміною типу структури плівок від рівноосової до волокнистої [6], з формуванням в плівках текстури [110] [6] та зі зростанням розмірів поверхневих неоднорідностей в плівках [7].

Зростання кількості спеціальних стиків в плівках з волокнистою структурою обумовлено особливостями формування плівок. Взаємодія двійникових границь в процесі множинного двійникування при рості плівок приводить до формування спеціальних стиків границь зерен. Наприклад, відомо [4], що при контакті двох границь $\Sigma 3$, які розташовані в різних площинах {111}, третьою границею стику завжди є границя $\Sigma 9$. При цьому формуються спеціальний потрібний стик типу $\Sigma 3$. Подальша взаємодія границь $\Sigma 9$ з наступною границею $\Sigma 3$, яка не є паралельною першому двом, приводить до створення границі $\Sigma 27$ і так далі. Крім того, велика кількість двійникових границь обумовлює

велику імовірність їх випадкової зустрічі та формування спеціальних стиків.

Висновки

1. Для нанокремнієвих плівок встановлена відповідність між елементами структури, що отримані методами ПЕМ та АСМ.

2. Проаналізовано різновиди типів стиків границь зерен в плівках. Виявлено існування як потрібних, так і множинних стиків.

3. Аналіз залежності характеру стиків від товщини нанокремнієвих плівок показав, що при товщинах ~ 70 нм в плівках спостерігається зменшення кількості потрібних стиків та зростання 4-х стиків границь. Таке зростання кількості множинних стиків корелює зі зміною типу структури плівок від рівноосової до волокнистої, з формуванням в плівках текстури [110] та зі зростанням розмірів поверхневих неоднорідностей в плівках.

4. У плівках з волокнистою структурою (товщиною ≥ 70 нм) спеціальні потрібні та множинні стики формуються в результаті процесів множинного двійникування, що мають місце при утворенні даних плівок. Крім того, наявність великої кількості двійникових границь у даних плівках збільшує імовірність їх випадкової зустрічі та формування спеціальних стиків.

Список використаних джерел

1. Mukhopadhyay S., Chowdhury A. Nanocrystalline silicon: A material for thin film solar cells with better stability // *Thin Solid Films*. – 2008. – 516, Issue 20. – P. 6824-6828.
2. Liu F., Romero M.J., Jones K.M., Norman A.G., Al-Jassim M.M., Inns D. and Aberle A.G. Intragrain defects in polycrystalline silicon thin-film solar cells on glass by aluminum-induced crystallization and subsequent epitaxy // *Thin Solid Films*. – 2008. – 516, Issue 18. – P. 6409-6412.
3. Rath, J.K. Low temperature polycrystalline silicon: a review on deposition, physical properties and solar cell applications // *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*. – 2003. – 76, № 4. – P. 431-487.
4. Kopetsky Ch.V., Orlov A.N., Fionova L.K. Granitsy зерен в chistyykh

materialakh. – Moskva: Nauka, 1987. – 158 p. (in Russian).

5. Nakhodkin N.G., Kulish N.P., Lytyyn P.M., Rodionova T.V. Features of special joints of grain boundaries in polysilicon films of equiaxial and dendritic structures // *Functional Materials*. – 2006. – 13, № 2. – P. 305-309.
6. Nakhodkin N.G., Rodionova T.V. Formation of different types of polysilicon film structures and their grain growth under annealing // *Phys. Status Solidi A*. – 1991. – 123, № 2. – P. 431-439.
7. Nakhodkin N.G., Kulish N.P., Lytyyn P.M., Rodionova T.V. Effect of thickness on structural characteristics of nanosilicon films // *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka*. – 2012. – N 1. – P. 285-288. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 26.11.2012

УДК 621.385.833

Находкін М.Г., д.ф.-м.н., проф.,
Федорченко М.І., к.ф.-м.н., с.н.с.

Формування інтерфейсу Gd/Si(113)

Методами електронної спектроскопії досліджено зміну електронних властивостей поверхні Si(113) при адсорбції на ній атомів Gd. Показано, що адсорбція атомів Gd на атомарно чисту поверхню Si(113)-3x2 при кімнатній температурі приводить до зменшення її роботи виходу від 4.75 eV для $\Theta_{Gd}=0$ МЛШ до ≈ 0.8 eV для $\Theta_{Gd}=4.4$ МЛШ. При подальшому збільшенні покриття робота виходу збільшується до ≈ 1.2 eV для $\Theta_{Gd} \geq 6$ МЛШ, що супроводжується металізацією плівки Gd. Отримані результати пояснюються утворенням силіциду задоленію та особливостями металізації плівки Gd при кімнатній температурі.

Ключові слова: Gd, Si(113), адсорбція, робота виходу, загин зон, силіцид, металізація.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4г, e-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Дослідження інтерфейсів рідкоземельних металів з кремнієм є актуальним як з точки зору накопичення фундаментальних даних про взаємодію рідкоземельних металів з кремнієм, так і тому, що формування на кремнієвих поверхнях тонких плівок силіцидів РЗМ є перспективним для використання в наелектроніці. [1].

Взаємодія гадолінію з кремнієвими поверхнями має величезний інтерес після встановлення гігантського магнітоопору Gd/Si_{1-x} сплаву, можливо пов'язаного з обмінною взаємодією між електронами провідності та локальними магнітними моментами Gd [2].

Відомо, що при субмоношарових покриттях Gd на кремнієвих поверхнях формуються нанодропи [3]. Такі нанодропи викликають значну увагу, пов'язану з їх унікальними фізичними властивостями та їх потенціальним застосуванням в наелектроніці, нанофотоніці,

Nakhodkin M.G., D.Sc., prof.,
Fedorchenko M.I., Ph.D.

Formation of the Gd/Si(113) interface

The electronic properties of the Si(113) surface were investigated during adsorption of Gd atoms on it using electron spectroscopy methods. It is shown, that the adsorption of Gd atoms on atomically clear Si(113)-3x2 surface at room temperature leads to reduction of the surface work function from 4.75 eV for $\Theta_{Gd}=0$ ML to ≈ 0.8 eV for $\Theta_{Gd}=4.4$ ML. The subsequent increase of Θ_{Gd} results in increasing the work function to ≈ 1.2 eV for $\Theta_{Gd} \geq 6$ ML. And simultaneous metallization of the Gd film. The results have been elucidated by the gadolinium silicide formation and peculiarities the Gd films metallization at room temperature.

Keywords: Gd, Si(113), adsorption, work function, band bending, silicide, metallization.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g, e-mail: mif@univ.kiev.ua

молекулярній електроніці та в магнітоелектронних пристроях.

Також відомо, що нанодропи GdB₆ з прямокутним поперечним перерізом з характерним розміром 50 нм та довжиною декілька мікрон мають найнижчу роботу виходу в групі рідкоземельних гексаборидів ≈ 1.5 eV [4].

Для нас Gd був цікавий насамперед своєю досить низькою роботою виходу [5]. При дослідженні адсорбції атомів Sb на поверхнях Ge та Si [6-8] було встановлено досить значну зміну роботи виходу (0.2- 1.0 eV) не тільки за рахунок зміни електронної спорідненості, але й за рахунок зміни загину зон поблизу поверхні. Цікаво було визначити внесок цих складових зміни роботи виходу при значно більшому зменшенні роботи виходу (очікувалось ≈ 1.5 -2.0 eV) при адсорбції атомів Gd.

Для дослідження була вибрана поверхня Si(113). Високоіндексна поверхня Si(113) викликає зростаючий інтерес для використання як підкладника для електронних пристроїв.

© М.Г. Находкін, М.І. Федорченко, 2012

Властива їй структурна анізотропія приводить до зменшення формування антифазних доменів, дислокаційних утворень та поверхневого розупорядкування під час гетероепітаксії, впливає на покращення епітаксійних шарів та електронних властивостей.

Метою цієї роботи було вивчити експериментально адсорбцію атомів Gd на високоіндексній поверхні Si(113), дослідити електронні властивості, такі як робота виходу, загиб зон, структура валентної зони.

Методика експерименту

Дослідження проводились, як і в наших попередніх роботах [6-9], у надвисоковакуумній камері з базовим тиском $\sim 2 \cdot 10^{-10}$ тор, яка була оснащена методиками дифракції повільних електронів (ДПЕ), Оже-електронної спектроскопії (ОЕС) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС) з енергією квантів у діапазоні 7–10,8 eV. В вакуумній камері містилась іонна гармата для очищення досліджуваної поверхні Si іонами Ar та система для контрольованого нанесення шарів Gd заданої товщини in situ. Зразки Si(113) вирізались із кристалу, легованого атомами фосфору ($\rho=10$ Ом·см). Після попередньої хімічної обробки зразки очищались в вакуумній камері за допомогою декількох циклів бомбардування – відпал. Більш детально методика експерименту описана, наприклад, в [9].

Результати експериментів та їх інтерпретація.

На рис.1 показано як змінюються фотоелектронні спектри атомарно чистої поверхні Si(113)-3x2 при напыленні на неї атомів Gd. З рисунка видно, що з ростом Θ_{Gd} енергетична ширина кривих ФЕС зростає, й змінюється їх форма. В ФЕС з'являються низькоенергетичні хвости розподілу електронних станів, які дещо утруднюють точне визначення роботи виходу. Ці хвости розподілу електронних станів можуть бути обумовлені появою плям на поверхні системи Si-Gd, які мають меншу від інших ділянок зразка роботу виходу. Вже при $\Theta_{Gd} = 0.6$ МШ енергетична ширина кривої ФЕС ΔE , яка була оцінена без врахування низькоенергетичного хвоста, становить ≈ 4.3 eV, а робота виходу $\phi = h\nu - \Delta E = 3.4$ eV, відповідно. Якби робота виходу оцінювалась з урахуванням

низькоенергетичного хвоста, то при $\Theta_{Gd} = 0.6$ МШ її можна було б оцінити рівною ≈ 1.4 eV. Природа плям Gd буде вивчена в наших наступних дослідженнях, а поки що ми користуватимемося даними про ширини кривих енергетичного розподілу фотоелектронів, екстраполюючи положення їх низькоенергетичного краю без урахування розтягнутої хвостової частини (вертикальні стрілки на рис.1). При збільшенні Θ_{Gd} криві ФЕС значно розширюються, що обумовлено суттєвим зменшенням роботи виходу за рахунок зменшення ефективної електронної спорідненості.

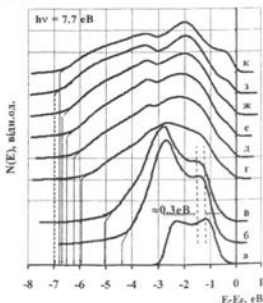


Рис. 1 Фотоелектронні спектри ($h\nu=7.7$ eV) поверхні Si(113) при різному значенні Θ_{Gd} : а – 0 МШ; б – ≈ 0.6 МШ; в – ≈ 1.1 МШ; г – ≈ 2.2 МШ; д – ≈ 2.8 МШ; е – ≈ 3.3 МШ4; ж – ≈ 3.9 МШ; з – ≈ 4.4 МШ; κ – ≈ 5 МШ.

При аналізі поведінки кривих ФЕС а, б та в на рис.1 можна помітити зміну положення найближчого до рівня Фермі піка sp^3 гібридизованих електронів з ≈ 1.2 eV до ≈ 1.5 eV. Цей зсув може бути викликаний як насиченням поверхневих станів найближчих до рівня Фермі, так і загином зон вниз ($eV_F \approx 0.3$ eV). Тобто зменшення роботи виходу може бути частково обумовлено і загином зон вниз принаймні на 0.3 eV. Це питання стане предметом наших додаткових досліджень.

На рис. 2 наведена залежність роботи виходу поверхні Si(113)-3x2 від Θ_{Gd} . Видно, що зі

збільшенням Θ_{Gd} робота виходу поступово зменшується від значення характерного для атомарно чистої поверхні Si(113) – 4.75 eV до значення ≈ 0.8 eV для $\Theta_{Gd} \approx 4.4$ МШ. Потрібно зауважити, що при врахуванні низькоенергетичного хвоста розподілу електронних станів на кривій з (рис. 1) значення роботи виходу для $\Theta_{Gd} \approx 4.4$ МШ є близьким до нульового. При подальшому збільшенні Θ_{Gd} робота виходу зростає до насичення при $\phi = 1.2$ eV для $\Theta_{Gd} \approx 6$ МШ й далі практично не змінюється. Одночасно при збільшенні Θ_{Gd} збільшується ще й густина електронних станів біля самого рівня Фермі. Для $\Theta_{Gd} \geq 6$ МШ (крива к, рис.1) форма піка густини електронних станів є характерною для металевих плівок. Можна вважати, що значення роботи виходу $\phi = 1.2$ eV є характерним для металізованої атомарно чистої плівки Gd.

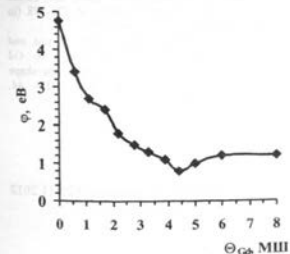


Рис. 2 Залежність роботи виходу поверхні Si(113) від покриття атомами Gd.

На перший погляд викликає подив той факт, що мінімум роботи виходу має місце при покритті $\Theta_{Gd} \approx 4.4$ МШ. Адже до цих пір було відомо, що при адсорбції на поверхні кристалу шару атомів з відносно слабо зв'язаними валентними електронами (Cs, Ba) на поверхні утворюється дипольний шар, який приводить до зменшення роботи виходу. Виявилось, що існує оптимальне покриття підкладки атомами адсорбату, при якому змінюється ϕ поверхні внаслідок утворення диполів, обумовлених перерозподілом зарядів між атомами адсорбату і підкладки, з максимальною. Як правило, це оптимальне покриття є близьким до 0.7 МШ. При більших

ступенях покриття диполі починають скручувати один одного, що приводить до зменшення дипольного моменту атома адсорбату, внаслідок чого при покритті ≈ 2 МШ ϕ вже не залежить від ступеня покриття і дорівнює ϕ матеріалу покриття. На наш погляд таке оптимальне покриття 0.7 МШ існує для систем де не має місця взаємного проникнення атомів адсорбату та адсорбенту. Згідно з отриманими нами за допомогою EOC результатами та літературними даними [10] адсорбція атомів Gd на поверхні Si вже при кімнатній температурі приводить до утворення силіцидів Gd і до дифузії атомів Gd в підкладку Si, а також до дифузії атомів Si в плівку Gd. Поблизу поверхні формується сплав Gd_xSi_{1-x} , який з ростом Θ_{Gd} все більш збагачується атомами Gd. У такому випадку оптимальне покриття, при якому досягається мінімальне значення ϕ , може значно перевищувати величину 0.7 моношару.

Значення $\phi = 0.8$ eV, яке ми можемо пояснити спеціальними формами силіциду Gd, є значно нижчим від існуючих в літературі даних [5]. І тому це питання потребує додаткового дослідження. Можливо існують такі форми збагаченого атомами Gd силіциду Gd, які обумовлюють утворення поверхні з такою малою роботою виходу.

Отримана нами адсорбційна система Si(113):Gd з роботою виходу 0.8 eV може бути цікавою для практичного застосування як ефективний польовий емітер. Для цього потрібні нові дослідження, направлені на подальше пониження роботи виходу системи та досягнення її стабільності при зміні температури та навколишнього середовища. Додаткового вивчення також потребує наявність низькоенергетичних хвостів в ФЕС, які можуть бути обумовленими існуванням на досліджуваній поверхні плям з роботою виходу близькою до нуля. Можливо, ці плями обумовлені домішками з концентраціями, нижчими за чутливість OEC.

Висновки

Адсорбція атомів Gd на поверхні Si(113) приводить до утворення силіциду гадолінію вже при кімнатній температурі. При $\Theta_{Gd} \approx 4.4$ МШ робота виходу досягає мінімального значення ≈ 0.8 eV в основному за рахунок зменшення електронної спорідненості. Доказів значної (>0.3 eV) зміни загину зони поблизу поверхні не знайдено. Формування плівки Gd з металічними

властивостями та з роботою виходу $\phi \approx 1.2$ eV відбувається при $\Theta_{\text{Cd}} \geq 6$ МШ.

Список використаних джерел

1. A.M. Shikin, A.Yu. Grigoriev, G.V. Prudnikova, D. V. Vyalikh S.L. Molodtsov, V.K. Adamchuk The interaction of thin layers of silicon surface (0001) of rare earth metals // Solid State Physics -2000.-42, №5.- P.942-949 (in Russian).
2. F.Hellman, D. R. Queen, R. M. Potok, and B. L. Zink Spin Glass Freezing and RKKY Interactions Near the Metal-Insulator Transition in Amorphous Gd-Si Alloys //Phys. Rev. Lett.-2000.- 84.-P.5411-5414
3. J.L. McChesney, A. Kirakosian, R. Bennewitz, J.N. Crain, J.-L. Lin and F. J Himpel Gd disilicide nanowires attached to Si(111) steps // Nanotechnology-2002-13.- P.545-550
4. Zhang H., Zhang Q, Zhao G, Tang J., Zhou O., Qin L.C. Single-Crystalline Gd₂Si Nanowire Field Emitters // J. Am. Chem. Soc.-2005.-127.-P.13120-1.
5. S.A. Shakirova, E.V. Serova Work function measurements of Gd/W(111) with and without silicon interface layers: field emission study Serova // Surface Science - 1999- 422 - P. 24-32
6. Nakhodkin M.G., Fedorchenko M.I. The Sb/Ge(111) interface formation// Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. - 2006, - N 4, - P. 323-332. (in Ukrainian).
7. Fedorchenko M., Lepiavko B., Nakhodkin M. Formation of the Sb/Ge(100) interface // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. - 2009, - N 3, - P. 323-332.
8. Nakhodkin M.G., Fedorchenko M.I. Adsorption of Sb atoms on the Si (113) surface // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. - 2012, - N 3, - P. 323-332. (in Ukrainian).
9. Nakhodkin M.G., Fedorchenko M.I. The work function dependence of Si(100)-2x1 surface on Bi coverage degree Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. - 2004, - N 4, - P. 373-378. (in Ukrainian).
10. M. Sancrotti, A. Iandelli, G. L. Olcese, and A. Palenzona Si-derived states in Gd silicides via Si L₂₃ VV Auger line-shape spectroscopy // Phys.Rev.B,- 2005- 44, N7.- P.3328-3331

Надійшла до редколегії 29.11.2012

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 519.9

Бардик В.Ю.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Олейнік А.В.², аспірант.**Аномальна температурна залежність
питомого об'єму води поблизу точки
плавлення**

Запропонована якісно проста модель аномальної температурної залежності питомого об'єму води. В основі моделі лежить припущення про те, що температурна залежність питомого об'єму формується: 1) аргоніподібним внеском і 2) внеском водневих зв'язків. Ці обидва внески мають протилежний характер температурної залежності і тому при деякій температурі питомий об'єм води приймає мінімальне значення. Обидва зроблені припущення мають цілком загальний характер і не потребують додаткових припущень про однорідну або неоднорідну структуру води. Зроблені наближення підтверджуються розрахунком густини гексагонального льоду, яка дуже близька до експериментальних даних.

Ключові слова: вода, максимум густини води, водневий зв'язок.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д, e-mail: vital@univ.kiev.ua

² Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2, e-mail: andrei.oleynik@gmail.com

V.Yu. Bardyk¹, Ph.D., Senior Scientific Researcher
A.V. Oleinik², Postgraduate Student

**Anomalous temperature dependence of
water specific volume near the melting point**

A simple model for anomalous temperature dependence of water specific volume is proposed. The model is based on the assumption that the temperature dependence of water specific volume is formed by: 1) the argon-like contribution and 2) the contribution of hydrogen bonds. Both these contributions are of the opposite temperature dependence character, so at certain temperature the specific volume of water is minimal. These assumptions are quite general and do not require any additional suppositions about homogeneity or inhomogeneity of water structure. The approximations are confirmed by numerical calculations for density of hexagonal ice, which results are very close to the experimental data.

Key words: water, water density maximum, hydrogen bond.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: vital@univ.kiev.ua

² Odesa I.I.Mechnikov National University, 65082, Odesa, Dvorjanska st., 2, e-mail: andrei.oleynik@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Максимум густини води при 4°C, або мінімум її питомого об'єму, належить до числа найвідоміших і найважливіших за своїми наслідками аномалій води. За довгі роки дослідження властивостей води було запропоновано багато різних пояснень цього дуже нетривіального факту. Так, на протязі тривалого часу вважалося, що максимум густини виникає внаслідок заповнення пористості квазікристалічної структури води [1]. Проте, обидва припущення відносно існування квазікристалічної структури води і заповнення її пористості виявилися значимими перебільшеннями, які в дійсності не спостерігаються [2-4]. Так само, не витримала критичних зауважень і картина,

пов'язана з викривленням водневих зв'язків [5-6], обумовлених тепловим рухом молекул. В останні роки вирішенню проблеми мінімуму питомого об'єму були присвячені роботи [7-10]. В них мінімум питомого об'єму є результатом конкуренції структур, які пов'язані з формуванням води низької та високої густини. На жаль, проста геометрична інтерпретація тут відсутня.

В представлений роботі розвивається новий підхід до якісного і кількісного пояснення максимуму густини води або мінімуму питомого об'єму. Цей підхід спирається на результати робіт [11-12]. В них показано, що температурні залежності питомих об'ємів води і аргону у змінних, які задаються

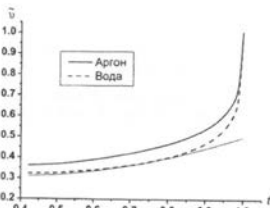


Рис.1. Температурні залежності нормованого питомого об'єму $\tilde{v}(t) = v(t)/v_c$ води і аргону. Значення $v(t)$ для них взяті з [13]. Світла лінія відповідає залежності $0.86 \cdot \tilde{v}_H^{(Ar)}(t)$, де $\tilde{v}_H^{(Ar)}(t)$ описує поведінку регуляризованого питомого об'єму аргону.

принципом відповідних станів, мають подібний характер (див. рис.1). Як бачимо, температурні залежності нормованих питомих об'ємів є, фактично, зсунутими одна від одної. Цей зсув є результатом різного характеру флуктуацій в околі критичної точки: в аргоні флуктуації мають атомарну природу, а в воді – вони обумовлені димерами [14]. Повна подібність у поведінці питомих об'ємів води і аргону проявляється після нормування на регуляризовані значення об'ємів води і аргону в критичній точці

$$\tilde{v}^{(Ar)}(t) = 1.6313 \cdot t^4 - 4.3390 \cdot t^3 + 4.7658 \cdot t^2 - 2.1778 \cdot t + 0.7058 \quad (1)$$

Коефіцієнти екстраполяційного многочлену визначаються таким чином, щоб 1) значення цього многочлену природно примикали до значень $\tilde{v}^{(Ar)}(t)$ у температурному інтервалі $0.556 < t < 0.75$ та 2) акуратно відтворювали екстрапольовані значення похідної $\frac{d\tilde{v}^{(Ar)}(t)}{dt}$.

Поведінка $\frac{d\tilde{v}^{(Ar)}(t)}{dt} \Big|_{cc}$ відповідної екстраполяційної кривої на рис.2 представлена пунктирною лінією.

Відзначимо наступну важливу вимогу, якій повинна задовольняти екстраполяційна крива. На кривій співіснування питомий об'єм є функцією

(цьому питанню присвячується окремий підрозділ статті). У згоді з цими уявленнями, в роботі вважається, що питомий об'єм води є сумою двох принципово різних внесків: аргоноподібного, який зменшується із зниженням температури, та внеску, який формується сильними орієнтаційними кореляціями, які зростають із зниженням температури. Комбінація цих двох внесків при певній температурі має мінімальне значення. Зазначимо, що сильні орієнтаційні кореляції сприяють утворенню локальної тетраедричної структури, яка нагадує структуру гексагонального льоду. З геометричної точки зору таку структуру характеризують, перш за все, кількістю водневих зв'язків $n_H(T)$, утворених однією молекулою. Таким чином, другий із вказаних нами внесків пов'язується з температурною залежністю $n_H(T)$.

Екстраполяція питомого об'єму аргону в область переохолоджених станів

Необхідно відзначити, що температурні інтервали існування рідких станів аргону і води неоднакові: $0.556 < t < 1$ – для аргону і $0.42 < t < 1$ – для води. Тому поведінка $\tilde{v}^{(Ar)}(t)$ у інтервалі $0.42 < t < 0.556$ апроксимується біквадратним поліномом:

тиску і температури: $\tilde{v} = \tilde{v}(p(t), t)$. Похідна питомого об'єму за температурою, таким чином, визначається виразом:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \Big|_{cc} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial p} \Big|_t \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{cc} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \Big|_p$$

Очевидно, що $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial p} \Big|_t = -\nu\beta$, де $\beta = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial p} \Big|_t$ – ізотермічна стисливість системи. У переохолоджених (метастабільних) станах аргону ізотермічна стисливість зростає, оскільки стани системи наближаються до її спінодалі.

Як наслідок, похідна

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right|_{cc} = \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right|_p - \bar{v} \cdot \beta_T \cdot \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{cc}, \quad (2)$$

яка є різницею двох позитивних величин, прямує до нуля при збільшенні занурення у переохолоджену область. Це твердження справедливе як для аргону, так і для води.

Найбільш істотний внесок у температурну залежність $\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right|_{cc}$ вноситься стисливістю рідини.

Її поведінка буде моделюватися виразом

$$\beta_T(t) = \beta_T^{(reg)}(t) + (\beta_T(t_m) - \beta_T^{(reg)}(t_m)) \cdot \left(\frac{t - t_{sp}}{t_m - t_{sp}} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Додатково припустимо, що регулярна складова стисливості практично не залежить від температури. Температурною зміною величин $\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right|_p$, $\bar{v}$ та $\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{cc}$ у переохолодженій області аргону також будемо нехтувати.

$$T_m(Ar) = 83.8 K \text{ або } t_m(Ar) = T_m / T_c = 0.56,$$

$$T_{sp}(Ar) = 56 K \text{ або } t_{sp}(Ar) = T_{sp} / T_c = 0.37,$$

$$\beta_T^{(reg)}(t_m) = 1.35 \cdot 10^{-8} \frac{e}{cm \cdot c^2}, \quad \beta_T^{(sing)}(t_m) = (\beta_T(t_m) - \beta_T^{(reg)}(t_m)) = 0.6 \cdot 10^{-8} \frac{e}{cm \cdot c^2}. \quad (4)$$

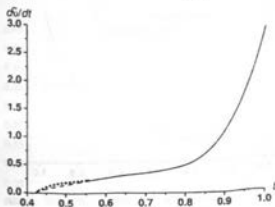


Рис.2. Температурна залежність похідної за температурою нормованого питомого об'єму аргону [13] (неперервна лінія відповідає експериментальним даним [13], пунктирна – екстраполяції (1), точки відповідають похідній, побудованій по стисливості (2)).

$$\beta_T(t) = \beta_T^{(reg)}(t) + \beta_T^{(sing)}(t),$$

$$\text{де } \beta_T^{(sing)}(t) = \beta_T^{(0)} \left(\frac{T - T_{sp}}{T_{sp}} \right)^{-1}.$$

Таким чином, ми припускаємо, що сингулярна складова стисливості має середньо-польовий характер температурної залежності [15]. Остаточно, температурну залежність стисливості можна моделювати виразом:

Для цілком успішного відтворення приведеної на рис.3 кривої $\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right|_{cc}$ за допомогою формул (2) и (3) необхідно припустити:

Цілком можливо, що при $t = 0.42$ похідна $\left. \frac{d\bar{v}^{(Ar)}(t)}{dt} \right|_{cc}$ або перетворюється на нуль, або виявляється дуже близькою до нього величиною. Внесок, який визначається стисливістю аргону, виділений на рис.2 точками.

З порівняння [12,13] температурних залежностей приведених питомих об'ємів води та аргону випливає, що в інтервалі температур $0.42 < t < 0.85$ вони мають один і той самий характер: крива $\bar{v}^{(w)}(t)$ дуже близька до кривої $0.86 \cdot \bar{v}_s^{(Ar)}(t)$.

Екстраполяція питомого об'єму аргону та води в околі критичної точки

Температурні залежності приведених питомих об'ємів аргону і води у інтервалі температур $0.42 < t < 0.85$ мають однаковий характер: крива

$\bar{D}^{(w)}(t)$ дуже близька до кривої $0.86 \cdot \bar{D}_R^{(Ar)}(t)$.

Разом з цим, характер поведінки кривих $\bar{D}^{(w)}(t)$ та $\bar{D}^{(Ar)}(t)$ у флуктуаційній області значно змінюється. Для виключення флуктуаційних ефектів перейдемо до регуляризованих приведених значень питомого об'єму аргону та води, котрі визначаються співвідношеннями

$$\bar{D}_R^{(Ar)}(t) = \frac{\nu^{(Ar)}(t)}{\nu_R^{(Ar)}}, \quad \bar{D}_R^{(w)}(t) = \frac{\nu^{(w)}(t)}{\nu_R^{(w)}}$$

Регуляризоване значення питомого об'єму визначається як граничне значення питомого об'єму при $t \rightarrow 1$. Це значення може бути отримано за допомогою параболічної екстраполяції значень $\bar{D}^{(i)}(t)$, $i = Ar, w$, з інтервалу $0.75 < t < 0.9$ к $t = 1$. Відмітимо, що

$$\bar{D}_R^{(i)}(t) = \bar{D}_R^{(i)} \lim_{t \rightarrow 1} \bar{D}_R^{(i)}(t), \quad (5)$$

де $\bar{D}_R^{(i)}(t)$ – функція, яка описує екстрапольовані значення $\bar{D}^{(i)}(t)$ у критичній області. Можна переконатися, що для води і аргону $\bar{D}_R^{(i)}(t)$ прийматиме значення:

$$\bar{D}_R^{(Ar)}(t) = 1.759 \cdot t^2 - 2.284 \cdot t + 1.164, \quad (6)$$

$$\bar{D}_R^{(w)}(t) = 1.848 \cdot t^2 - 2.487 \cdot t + 1.206. \quad (7)$$

З (5) – (7) випливає, що

$$\nu_R^{(Ar)} = 1.192 \text{ см}^3 / \text{г}, \quad \nu_R^{(w)} = 1.763 \text{ см}^3 / \text{г}. \quad (8)$$

Поведінка значень питомих об'ємів, нормованих на їх регуляризовані значення у критичній точці, представлено на рис.3.

Загальна структура питомого об'єму води

Аргоноподібний характер температурної залежності питомого об'єму води (див. рис.3) представимо у вигляді:

$$\bar{\nu}^{(w)}(t) = \mu \cdot \bar{\nu}^{(Ar)}(t) + \bar{\nu}_H(t), \quad (9)$$

де внесок водневих зв'язків $\bar{\nu}_H(t)$, у згоді з принципом Гільберта [16,17], апроксимується виразом:

$$\bar{\nu}_H(t) \approx \bar{\nu}_H^{(0)} \cdot n_H(t) = 4 \cdot \bar{\nu}_H^{(0)} \cdot (1 - \lambda t). \quad (10)$$

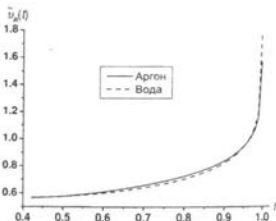


Рис.3. Температурні залежності регуляризованих питомих об'ємів $\bar{\nu}_R(t) = \nu(t)/\nu_R$ води і аргону. Значення $\nu(t)$ для них взяті з [13].

Коефіцієнти розкладу μ , $\bar{\nu}_H^{(0)}$, λ знаходяться методом найменших квадратів і виявляються наступними:

$$\mu = 0.84, \quad \bar{\nu}_H^{(0)} = 0.0079, \quad \lambda = 0.86. \quad (11)$$

Ступінь відтворення кривої $\bar{\nu}^{(w)}(t)$ за допомогою коефіцієнтів (11) і знайденими вище коефіцієнтами представлена на рис.4.

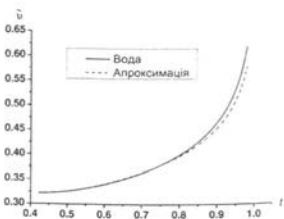


Рис.4. Апроксимація питомого об'єму води $\bar{\nu}^{(w)}(t)$ за допомогою формули (9).

Мінімум температурної залежності питомого об'єму води при 4 °С

Формула (9) дозволяє нам природно описати немонотонний характер температурної

залежності $\bar{v}^{(w)}(t)$, точніше, наявність мінімуму при температурі $T = 4^\circ\text{C}$. Дійсно, складова $\mu\bar{v}^{(w)}(t)$ зменшується із зниженням температури, в той час як внесок $4 \cdot \bar{v}_H^{(0)} \cdot (1 - \lambda t)$ зростає (див. рис.5). Сума цих функцій призводить до мінімуму в деякій точці (рис.6). Неважко бачити, що мінімум $\bar{v}^{(w)}(t)$ спостерігається у точці t_w , обумовлений рівнянням:

$$\mu\bar{v}^{(w)}(t_w) - 4 \cdot \lambda_1 \cdot \bar{v}_H^{(0)} = 0.$$

Підставляючи сюди значення коефіцієнтів (11), знаходимо:

$$\bar{v}^{(w)}(t_w) = \frac{4\lambda_1 \cdot \bar{v}_H^{(0)}}{\mu} \approx 0.032, \quad t_w \approx 0.428.$$

Безпосередньо переконуємося, що при цих значеннях параметрів експериментальні величини питомого об'єму в точці плавлення $\bar{v}^{(w)}(t_w) = 0.322$ и температури $t_w = 0.428$ ($T_w = 4^\circ\text{C}$), при якій спостерігається його мінімум, відтворюються з високою точністю.

З (9) – (11) випливає, що відносна величина внеску водневих зв'язків $v_H = v_H^{(0)} n_H$ у питомий об'єм води $v^{(w)}(t)$ в її нормальному стані не перевищує декількох відсотків: $\frac{v_H(t)}{v^{(w)}(t)} \leq 0.06$.

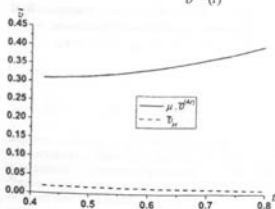


Рис.5. Температурні залежності складових питомого об'єму води.

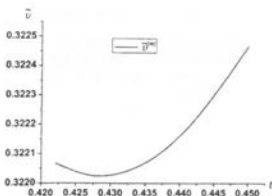


Рис.6. Мінімум питомого об'єму води.

Іншими словами, саме з такою точністю принцип відповідних станів для простих рідин може бути застосований до побудови рівняння стану води на її лінії співіснування рідина-пара.

Обговорення результатів

Таким чином, запропонована якісно проста модель аномальної температурної залежності питомого об'єму води. В основі моделі лежить припущення про те, що температурна залежність питомого об'єму формується: 1) аргонподібним внеском і 2) внеском водневих зв'язків. Ці обидва внески мають протилежний характер температурної залежності і тому при деякій температурі питомий об'єм води приймає мінімальне значення. Обидва зроблені припущення мають цілком загальний характер і не потребують додаткових припущень про однорідну або неоднорідну структуру води. Для перевірки справедливості зроблених наближень у межах нашої моделі ми також розраховували [12] густину гексагонального льоду. У цьому випадку $n_H = 4$ і не змінюється з температурою. Отримана оцінка для густини гексагонального льоду чудово узгоджується з експериментальними даними. У подальшому ми сподіваємося застосувати розвинений нами підхід також для опису ізотермічної стисливості і теплопровідності води при постійному об'ємі.

Список використаних джерел

1. *Samoilov O.Ya.* Structure of aqueous electrolyte solutions and the hydration of ions. – Moscow: Izd. AN SSSR, 1957. – 183 p. (in Russian).
2. *Fisher I.Z. and Andrianova I.S.* The degree of filling of the voids in the quasicrystalline structure of water. // *J. Struct. Chem.*, – 1966. – 7, №3. – P. 337-344.
3. *Andrianova I.S. and Fisher I.Z.* Statistics of neighbors in water. // *J. Struct. Chem.*, – 1968. – 9, №4. – P. 592-598.
4. *Lokotosh T.V., Magazu S., Maisano G., Malomuzh N.P.* Nature of the self-diffusion and viscosity in supercooled liquid water. // *Phys.Rev.E* – 2000, v. 62, N 3, – P 3572-3580.
5. *Pople J.A.* Molecular association in liquids. II. A theory of the structure of water. // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1951, – № 205, – P 163-178.
6. *Svishchev I.M.* The temperature of water density maximum. // *Dokl. Akad. Nauk SSSR* – 1991, – № 320, – P. 140-142. (in Russian).
7. *Truskett T.M., Dill K.A.* Predicting water's phase diagram and liquid-state anomalies. // *J. Chem. Phys.* – 2002, – 117, – P. 5101-5104;
8. *Franzese G., Stanley H.E.* A theory for discriminating the mechanism responsible for the water density anomaly. // *Physica A.* – 2002, – 314, – P. 508-513.
9. *Dias C.L., Ala-Nissila T., Grant M., Karttunen M.* Three-dimensional "Mercedes-Benz" model for water. // *J.Chem.Phys.* – 2009, – 131, – P. 054505(7).
10. *Matsumoto M.M.* Why does water expand when it cools? // *Phys. Rev. Lett.* – 2009, – 103, – №1, – P. 017801(4).
11. *Lokotosh T.V., Malomuzh N.P., Zakharchenko V.L.* Anomalous density and permittivity effects on the structure of water. // *J. Struct. Chem.* – 2003. – 44, №6. – P. 1104-1113.
12. *Fisenko A.I., Malomuzh N.P., Oleynik A.V.* To what extent are thermodynamic properties of water argon-like? // *CPL.* – 2008, – 450, – P. 297-301.
13. Data from NIST Standard Reference Database 69, June 2005 Release: NIST Chemistry WebBook (<http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/>).
14. *Kulinskii V., Malomuzh N.P.* Properties of water near its critical point. // *Soft Matter under Exogenic Impacts, NATO Science Series*, – 2007, 242, – Part IV, – P. 287-304.
15. *Erdey-Gruz T.* Transport phenomena in aqueous solutions. – New York: Wiley, 1974. – 512 p.
16. *Hilbert D.* Theory of algebraic invariants. – Cambridge, England: Cambridge University Press, 1993. – 191 p.
17. *Monin A.S., Yaglom A.M.* Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence, v.2, – Cambridge: MIT Press, 1975. – 886 p.

Надійшла до редколегії 25.11.12

УДК 539

Вовченко Л. Л.¹, к.ф.м.н.
Лазаренко О. А.¹, к.ф.м.н.
Мацуї Л. Ю.¹, д.ф.м.н.
Журавков О. В.¹, пров.інж.
Перець Ю.С.¹, аспірант
Федорещ В.С.¹, студ.

П'єзорезистивні властивості епоксидних композитів із графітовими нанопластинками та нітридом бора

В роботі наведено результати експериментальних досліджень низькотемпературної стабільності механічних властивостей епоксидних матриць та змін електроопору під дією механічного навантаження композитних матеріалів епоксидна смола-графітові нанопластинки. Виявлено, що тип отверджувача і додавання нітриду бора суттєво впливають на механічні та електричні характеристики досліджуваних епоксидних композитів.

Ключові слова: полімерна матриця, графітові нанопластинки, міцність, електроопір

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: alazar@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А

Вступ.

Використання супердисперсних вуглецевих наповнювачів, таких як графітові нанопластинки, вуглецеві нанотрубки, а також графіт з нанесеним на його поверхню нанорозмірним металом, при створенні різних композитів є перспективним з точки зору отримання легких, зносостійких, інертних щодо дії агресивних середовищ електропровідних матеріалів. Використання таких матеріалів як наповнювачів полімерних матриць дозволяє забезпечити необхідні функціональні характеристики створюваних полімерних КМ (такі, як електро- та теплопровідність, механічні властивості та характеристики поглинання електромагнітного випромінювання і т.д.) при досить низькому вмісті електропровідної компоненти і, внаслідок цього, зберегти високі пружнопластичні

L.L.Vovchenko¹, Ph.D.
O.A.Lazarenko¹, Ph.D.
L.Yu.Matzui¹, Dr. Sci.
O.V.Zhuravkov¹, Eng.
Yu.S.Perets¹, PhD stud.
V.S.Fedorets¹, stud.

Piezoresistive properties of epoxy composites with graphite nanoplates and boron nitride

The paper presents the results of experimental investigation of low temperature stability of epoxy matrixes mechanical properties and electro resistivity changes under mechanical pressure of composite materials epoxy resin- graphite nanoplatelets. It was found that type of curing agent and addition of boron nitride (BN) influence considerably on mechanical and electrical properties of investigated epoxy composites.

Key words: polymer matrix, graphite nanoplates, strength, electric resistance

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: alazar@univ.kiev.ua

характеристики КМ, обумовлені полімерною матрицею [1-4]. Фізико-механічні характеристики композитів суттєво залежать від методу їх формування та структурно-морфологічних особливостей компонентів, із яких він складеться, а саме від типу полімерної матриці, її пружних характеристик, та вмісту і типу наповнювачів, пружні характеристики яких можуть суттєво відрізнятися від властивостей полімерної матриці. Крім того, наявність великої кількості міжфазних границь полімерна матриця-наповнювач і рівень міжфазної взаємодії, а також характер просторового розподілу частинок наповнювача в композиті можуть відігравати вирішальну роль у формуванні як механічних, так і електричних та теплових властивостей КМ [5-6]. Під дією зовнішніх чинників таких, як зміни температури, механічне навантаження, дія

всесічного тиску і т.д. у таких композитах відбуваються макроструктурні перетворення (розширення зразків при нагріванні, пластичні та пружні деформації під дією тиску, зміна текстури зразків, наповнених анізотропними анізометричними частинками), які призводять до змін фізичних характеристик композитів, зокрема таких, як електро- та теплопровідність, механічні властивості.

Метою даної роботи було дослідити низькотемпературну стабільність механічних характеристик двох типів епоксидних матриць, а також визначити вплив механічного одновісного навантаження на електроопір композитних матеріалів епоксидна смола-графітові нанопластики.

Методика проведення експерименту та характеристика зразків.

Зразки із епоксидної смоли для дослідження механічних властивостей виготовлялись у вигляді циліндрів діаметром 6,5 мм та довжиною від 14 до 19 мм, для вимірювання електроопору при одновісному стисненні зразки КМ епоксидна смола-графітові нанопластики виготовлялись у вигляді пластинок розмірами 15x3x2 мм. Отвердження зразків проводилось із використанням різних типів отверджувачів (ПЕПА або Л-20) та різних температурних режимів. Механічні властивості отверджених епоксидів та електроопір КМ при стисненні досліджувались за допомогою автоматизованої установки на базі серійного обладнання ІМАШ-20-78, а самі вимірювання електроопору – дво- або чотирьох-зондовим методом.

Експериментальні результати та їх обговорення.

В таблиці 1 наведено результати досліджень пружних та міцнісних характеристик зразків із різних типів епоксидної смоли, а на рис. 1 представлено типові діаграми „навантаження-розвантаження“, із яких визначались такі характеристики, як пружна $E_{\text{пруж}}$ та пластична $E_{\text{пл}}$ деформації та ефективне значення пружного модуля $E_{\text{ef}} = \sigma / \epsilon_{\text{пруж}}$.

На основі проведеного аналізу отриманих результатів встановлено наступне:

- додаткова витримка зразків ЕД20 в процесі отвердження при $T=80^{\circ}\text{C}$ призводить до підвищення міцності зразків майже у 2 рази до 80 МПа але при цьому зменшується ефективний модуль Юнга на 30% - до 1 ГПа;

- на відміну від зразків ЕД20, руйнування зразків із смоли СЕДМ2 є не крихким, а пластичним при навантаженнях 44-47 МПа, а величини модуля Юнга складають близько 1 ГПа;

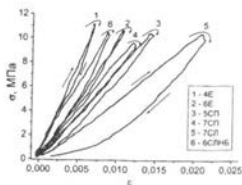


Рис.1. Діаграми навантаження-розвантаження $\sigma(\epsilon)$ для епоксидних матриць ЕД20 та СЕДМ-2 (нумерація зразків відповідає даним таблиці 1).

- виявлено, що використання в якості отверджувача смоли СЕДМ2 замість ПЕПА Л-20 призводить до зменшення порогу міцності зразків СЕДМ2-Л-20 майже у два рази – до 20 МПа, а також і до зменшення модуля Юнга, який складає приблизно 640 МПа;

- показано, що додавання нітриду бору при виготовленні зразків із смоли СЕДМ2+Л-20 не впливає на міцність зразків, але призводить до підвищення пружних характеристик матеріалу: ефективний модуль Юнга зростає майже у два рази і складає близько 1200 МПа; відготтривала витримка досліджуваних зразків при температурі 77 К (протягом 3-17 годин) суттєво не впливала на їх пружні та міцнісні характеристики, з чого зроблено висновок про досить високу низькотемпературну стабільність цих матеріалів.

Було також проведено дослідження електроопору зразків КМ полімер-графітові нанопластики (ГНП) при стисненні. Вміст ГНП склав 5 та 7 ваг.%. Як полімерні матриці використовувались такі смоли: ЕД20 з отверджувачем ПЕПА, СЕДМ2 з отверджувачем Л-20 з нітридом бору (BN) та без нього. Результати дослідження електроопору при стисненні зразків наведені в таблиці 2 та на рис. 2-5. Виявлено, що поведінка кривих відносного електроопору від навантаження залежить як від вмісту наповнювача так і від типу полімеру, та

Таблиця 1

Міцнісні та пружні характеристики епоксидних матриць ЕД20 та СЕДМ-2

Тип зразка	Т полімеризації, °С	Номер циклу	σ_m , МПа	$\epsilon_{0.01}$	$\epsilon_{0.001}$	$E_{0.01}$, МПа	$\sigma_{руй}$, МПа
ЕД20+ПЕПА зразок №1Е	20	1	47,46				47,3 Крихке руйнування
ЕД20+ПЕПА зразок №4Е	20	1→3 охлажд. до 77К 4→5	10 40–42,8	0,0017	0,006	1580	42,8 Крихке руйнування (після витримувannya при T=77 К)
ЕД20+ПЕПА зразок №6Е	20→80	1→3 охлажд. до 77К 4→6	10,5 39–39– 83,12	0,0024	0,011	1020	83,1, В товщі зразка утворилися тріщини (після витримувannya при T=77 К)
СЕДМ2+ПЕПА зразок №5СП	20→80	1→3 4	10 47,7	0,0020	0,009	1073	47,7 Розплюючись
СЕДМ2+ПЕПА зразок №7СП	20→80	1→3, охлажд. до 77К 4	10,4 43,9	0,0009	0,010	1000	43,9 Розплюючись (після витримувannya при T=77 К)
СЕДМ2+Л-20 зразок №7СЛ	20	1→5 6	10,2 21,3	0,0028	0,016	640	21,3 Розплюючись
СЕДМ2+Л-20 зразок 6СЛНБ	20, потім охлажд. до 77К	1→5 6	10,6 21,9	0,0011	0,009	1205	21,9 Розплюючись (після витримувannya при T=77 К)

суттєво відрізняється у випадку наявності у зразку BN. Зокрема, у випадку зразків з 5%ГНП, де як матриця використовувалася СЕДМ2, на відміну від КМ з ЕД20, спостерігається зворотне та незворотне збільшення величини електроопору. Додавання BN зменшує величину електроопору (на два порядки) та призводить до значного незворотного збільшення опору. На рис. 2 наведено зміни електроопору під циклічним навантаженням для КМ 5%ГНП-СЕДМ2-BN. Як видно з рисунку, під час першого циклу при максимальному навантаженні спостерігається зворотне збільшення електроопору (в 20 разів), а після зняття навантаження - незворотне збільшення електроопору (в 5 разів). При наступних циклах після зняття навантаження електроопір продовжує зростати (рис. 4). На рис. 3 наведено

відносну зміну електроопору для третього циклу навантаження КМ з вмістом ГНП 5ваг.% для трьох типів полімерних матриць.

Як видно з рисунку, для КМ з СЕДМ2 без нітриду бору електроопір з навантаженням майже не змінюється, для СЕДМ2 з нітридом бору відбувається збільшення електроопору, а для КМ з ЕД20 - зменшення. Причому, зворотне зменшення електроопору значно більше ніж видно на рисунку, оскільки, величина електроопору (в Ом) перевищує межу допустимих для установки вимірів. Точні значення величини питомого електроопору не наведено.

При збільшенні вмісту ГНП величина електроопору для всіх типів КМ зменшується (див. табл. 2). При такій концентрації наповнювача збільшення електроопору під дією

Електроопір полімерних композитів під дією механічного навантаження

Тип КМ	ρ , %	σ (цикл)	$\epsilon_{\text{пл}}$	$(R/R_0)_0$ при $\sigma_{\text{дек}}$ і після навантаження ($\sigma=0$)
	Ом·м	МПа		
5% ГНП-ЕД20	$>4,7 \cdot 10^5$ *	12,3	0,054	$1,2 \cdot 10^3 \rightarrow >4,4 \cdot 10^3$ *
5% ГНП-СЕДМ2	$1,59 \cdot 10^5$	10,01	0,073	$1,85 \cdot 10^3 \rightarrow 1,75 \cdot 10^3$
5% ГНП-СЕДМ2-BN	$5,3 \cdot 10^5$	10,44	0,071	$7,76 \cdot 10^7 \rightarrow 2,7 \cdot 10^7$
7% ГНП-ЕД20	$1,8 \cdot 10^5$	10,07	0,05	$3,7 \cdot 10^4 \rightarrow 8 \cdot 10^4$
7% ГНП-СЕДМ2	49,4	10,19	0,10	26,3→28,3
7% ГНП-СЕДМ2-BN	10,02	10,52	0,065	2,6→5,12

* - значення R за межами вимірювань установки

стиснення вже не відбувається. Зокрема, на рис. 5 а) та б) зображено залежності зміни електроопору від навантаження для КМ 7% ГНП-СЕДМ2-BN та 7% ГНП-СЕДМ2-BN, відповідно. Видно, що суттєве незворотне зменшення електроопору R_0 відбувається при першому циклі навантаження (~40%), а при другому та третьому циклах, незворотна зміна електроопору значно менша.

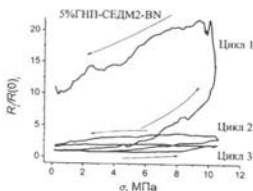


Рис. 2. Відносний електроопір КМ 5%ГНП-СЕДМ2-BN при стисненні

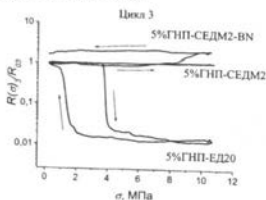
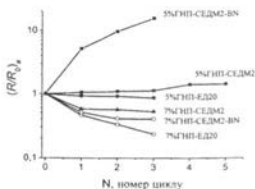


Рис. 3. Відносний електроопір КМ 5%ГНП-полімер при стисненні для третього циклу

Типові залежності було отримано і для КМ, де як полімерна матриця використовувалася смола ЕД20. Композити з епоксидною смолою ЕД20 були детально розглянуті і описані нами в роботі [7].

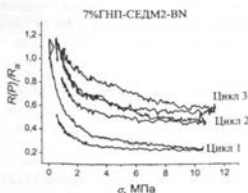
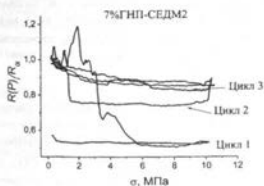
Рис. 4. Незворотна зміна електроопору відносно початкового опору R_0 (до першого циклу навантаження) для кожного циклу

Для опису ефективного електроопору зразка КМ $R_{\text{КМ}}$ в [7] було запропоновано модель, згідно якої електроопір композиту $R_{\text{КМ}}$ це опір $N_{\text{ГР-мат}}$ паралельно з'єднаних електроопорів ланцюжків із частинок графіту з опором $R_{\text{ГР-мат}}$:

$$R_{\text{КМ}} = \frac{R_{\text{ГР-мат}}}{N_{\text{ГР-мат}}} = \frac{\gamma^2 \pi \cdot h \left(\frac{F - \phi_{\text{ср}}}{\phi - \phi_{\text{ср}}} \right)^t \cdot (r_{\text{дек}} + R_s \cdot B(\delta))}{4 \cdot F} \quad (1)$$

де: ϕ - об'ємний вміст наповнювача, $\phi_{\text{ср}}$ - поріг перколяції, t - критичний індекс, F - параметр упаковки, $r_{\text{дек}}$ - електроопір окремої пластинки графіту, h - товщина пластинки, R_s - електроопір одиничного контакту між частинками графіту (безпосередній контакт, товщина полімерного

прошарку $\delta=0 \rightarrow B(\delta)=1$ γ – множник, що змінюється від 1 до 2.



а)

б)

Рис. 5. Відносний електроопір КМ при стисненні: а) – 7%ГНП-СЕДМ2, б) – 7%ГНП-СЕДМ2-BN

Відомо [8], що величина контактної опору залежить від кількості контактів (n), площі контакту (S) та величини тиску на контакт (P):

$$R_c = f(n, S, P^{1/2}) \quad (2)$$

При стисненні компактованих зразків буде збільшуватись тиск на контакт P між частинками наповнювача, а також і площа контакту S , що призведе до зменшення сумарного контактної електроопору. В той же час, за рахунок можливого мікроруйнування досліджуваних зразків при стисненні, може відбуватися також руйнування деяких електричних контактів між частинками ГНП (тобто фактично зменшення кількості контактів n) і збільшення загального контактної електроопору R_c . Оскільки, як показано вище, використання отверджувача Л-20, призводить до зменшення міцності зразків (див.табл 1), для зразків з СЕДМ-2 у якості

полімера, спостерігається збільшення електроопору при стисненні в результаті переважного процесу руйнування контактів між електропровідними частинками. У випадку наявності діелектричних частинок BN в композиті, у вираз (1) потрібно ввести додатковий параметр, оскільки система перетворюється фактично на трикомпонентну. Параметр $N_{r, \text{max}}$ буде змінюватись, тому що з одного боку, частинки нітриду бору призводять до утворення більшої кількості електропровідних ланцюжків, в результаті «ковзання» графітових пластинок (спостерігаємо значне зменшення питомого опору, порівняно з КМ без нітриду бору). З іншого боку, під дією тиску, відбувається зміна просторового розподілу частинок в об'ємі полімерної матриці і більш тверді діелектричні частинки нітриду бору руйнують утворені неперервні ланцюжки з електропровідного наповнювача, як результат – збільшення опору при збільшенні тиску, та незворотне збільшення опору, після зняття навантаження. Але такі ефекти спостерігаються, при концентраціях наповнювача, близьких до перколяційного порогу. При збільшенні концентрації ГНП до 7 wt% кількість неперервних ланцюжків значно збільшується, і переважачим фактором впливу тиску на електроопір стає зменшення контактної опору в результаті збільшення тиску на контакт та збільшення площі контакту та переорієнтація частинок, в результаті чого збільшується кількість прямих контактів між частинками, що зменшує опір електропровідних ланцюжків. Суттєве незворотне зменшення електроопору R_c зразків КМ відбувається при першому циклі навантаження і є результатом досить великої пластичної деформації зразків, а при повторних циклах навантаження зворотні зміни електроопору є результатом зменшення контактної електроопору R_c при стисненні зразків.

Висновки:

- - виявлено, що тип отверджувача і додавання нітриду бора суттєво впливають на механічні характеристики досліджуваних епоксидних матриць, які є досить стабільними в області температур 77-300 К;
- - величина та характер зміни (зменшення чи збільшення) електроопору полімерних КМ з графітовими нанопластинами під дією одновісного стиснення залежить від міцнісних характеристик полімерної матриці, провідності частинок наповнювача та контактної

електроопору між частинками безпосередньо або через полімерний прошарок, а також від кількості утворених в зразку неперервних електропровідних ланцюжків з частинок наповнювача;

- - використання як полімерної матриці смоли СЕДМ2 призводить до зворотного збільшення електроопору під дією навантаження, та до незворотного збільшення опору після зняття навантаження;

- - введення нітриду бору до полімерної матриці зменшує величину електроопору в результаті збільшення кількості утворених електропровідних ланцюжків, проте під дією стиснення частинки нітриду бору руйнують утворені електропровідні ланцюжки (при концентраціях в околі перколяційного переходу), що призводить до значного зростання електроопору при навантаженні, та до значного незворотного збільшення електроопору після зняття навантаження;

- - при концентраціях, значно більших за область перколяційного переходу, при першому циклі навантажень спостерігається незворотне зниження величини електроопору, в результаті значної пластичної деформації, і незначні незворотні зміни електроопору при другому та третьому циклах навантаження.

enhanced flexural properties and lower percolation threshold // *Composites Science and Technology*. – 2007. – V. 67. – P. 2045–2051.

4. S. Bhattacharya, R. P. Tandon, V. K. Sachdev. Electrical conduction of graphite filled high density polyethylene composites; experiment and theory // *J Mater Sci*. – 2009. – V.44. – P.2430–2433.
5. S. Kumar, L. L. Sun, S. Caceres, B. Li, W. Wood, A. Perugini, R. G. Maguire and W. H. Zhong. Dynamic synergy of graphitic nanoplatelets and multi-walled carbon nanotubes in polyetherimide nanocomposites // *Nanotechnology*. – 2010. – V. 21, 105702 (9pp)
6. A. Yu., P. Ramesh, X. Sun, E. Bekyarova, M. E. Itkis, and Robert C Haddon. Enhanced Thermal Conductivity in a Hybrid Graphite Nanoplatelet–Carbon Nanotube Filler for Epoxy Composites. *Adv. Mater.* – 2008. – V.20. – P. 4740–4744
7. L. Vovchenko, A. Lazarenko, L. Matzui, A. Zhuravkov. The effect of mechanical stress on electric resistance of nanographite-epoxy composites // *Physica E*. – 2012. – V. 44. – p. 940–943
8. Meilikhov E.Z. Electrophysical properties of deformed nanocomposites / E. Z. Meilikhov // *Fizika tverdogo tela*. – 2001–V. 43, N. 7. – P. 1181 – 1184 (in Russian).

Список використаних джерел

1. Tsu-Wei Chou, Limin Gao, Erik T. Thostenson, Z. Zhang, J.-H. Byun. An assessment of the science and technology of carbon nanotube-based fibers and composites // *Composites Science and Technology* – 2010.–70 p.1–19.
2. J. O. Aguilar^{1,2}, J. R. Bautista-Quintero¹, F. Avilés. Influence of carbon nanotube clustering on the electrical conductivity of polymer composite films // *eXPRESS Polymer Letters*. – 2010. – V., N.5. – P. 292–299.
3. K. Kalaitzidou, H. Fukushima, L. T. Drzal. A new compounding method for exfoliated graphite-polypropylene nanocomposites with

Надійшла до редколегії 24.11.12

УДК 532

Григор'єв¹ А.М., к.ф.-м.н., доц.,
Королович² В.Ф., к.ф.-м.н.,
Кузовков³ Ю.Г., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Марков³ І.В., пров. інженер,
Мороз³ К.О., к.ф.-м.н., доц.,
Павленко Д.В., студент,

Пружні властивості молекулярних моделейних флюїдів у наближенні жорстко зв'язаних твердих сфер.

Методом Монте-Карло розраховані густина та ізотермічний модуль пружності модельних флюїдів у наближенні жорстко зв'язаних твердих сфер. Форма частинок варіювалася (імітувалися молекули орто-, пара- і метаксилолів), але при цьому об'єм частинки не змінювався. Проаналізовано вплив несферичності молекул на пружні властивості дослідженого флюїду.

Ключові слова: ізотермічний модуль пружності, несферичність молекула.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д, e-mail: agrigoriev@univ.kiev.ua, koroilovichv@gmail.com, yuguzovkov@univ.kiev.ua, imarkov@univ.kiev.ua, morozko@univ.kiev.ua

A.N.Grigoriev, PhD
V.F.Korolovych, PhD
Yu.I.Kuzovkov, PhD, Sen. Sci. Res
I.V.Markov, Eng.
K.O.Moroz, PhD
D.V.Pavlenko, stud.

Elastic properties of model fluids in tight bonded hard sphere approximation.

Density and isothermal modulus of model fluids in tight bonded hard sphere approximation were determined in Monte-Carlo. The shape of the particles was varied imitating ortho-, meta- and paraxylenes, their volume being unchanged. The influence of non-sphericity of particles on elastic properties of the studied fluids was analyzed.

Key Words: isothermal elasticity moduli, molecular nonsphericity.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: agrigoriev@univ.kiev.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

У серії робіт [1-4] досліджувався вплив форми молекули на теплофізичні властивості рідин на прикладі модельних систем твердих гантелеподібних частинок, еліпсоїдів обертання та сфероциліндрів, двохатомних частинок, атоми яких взаємодіють за допомогою потенціалу м'яких сфер та потенціалу прямокутної ями. Було помічено, що за умови однаковості власних об'ємів молекул, баричні залежності пружних характеристик систем практично не залежать від форми молекули. Спільною рисою досліджених моделей була наявність осі обертання. Виникає питання, наскільки загальним є цей результат? Чи є дана особливість характерною рисою систем аксіально-симетричних частинок, чи вона є проявом більш універсальної закономірності? Що буде, якщо „лонізирити“ симетрію молекули? Оскільки пружні властивості реальних молекулярних рідин обумовлені здебільшого силами відштовхування, то досліджувати ефекти „лоніження“ симетрії варто спочатку для модельних систем, частинки яких взаємодіють за допомогою лише сил відштовхування.

Однією з найпростіших моделей, яка імітувала форму багатоатомної молекули, є модель жорстко-зв'язаних твердих сфер. Нами було обрано три типи твердих частинок, різних за формою, але однакових за об'ємом, що нагадують молекули орто-, мета- і параксилолу (Рис.1).

Методом Монте-Карло в ізобарично-ізотермічному ансамблі для систем із 108 молекул були розраховані густина та ізотермічний модуль пружності в інтервалі приведених тисків $P^* = 0.5 - 4.0$ при приведений температурі $T^* = 1.0$. Усі розрахунки виконувалися у відповідних змінних, використовуючи в якості одиниці довжини діаметр жорсткої сфери σ . Оскільки у випадку жорстких частинок густина залежить від тиску і температури через їх комбінацію P/T [6, 7], то визначити відповідну залежність густини можна лише для однієї ізотерми, наприклад $T^* = 1.0$. Тоді приведені густина ρ^* , тиск P^* та ізотермічний модуль пружності K_T^* визначаються як:

© Григор'єв А.М., Королович В.Ф.,
Кузовков Ю.Г., Марков І.В., Мороз К.О.,
Павленко Д.В., 2012

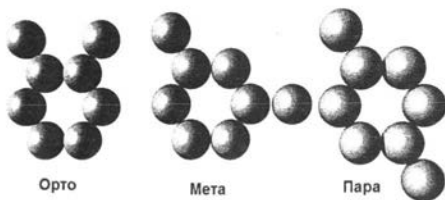


Рис. 1. Форма частинок молекулярних модельних флюїдів.

$$\rho^* = \rho \sigma^3, \quad P^* = P \sigma^3, \quad K_T^* = K_T \sigma^3$$

При моделюванні використовувались три типи генерації нової конфігурації: зміщення молекули як цілого, генерація нової випадкової орієнтації молекули і зміна об'єму основної комірки. Максимальне зміщення, максимальний кут повороту і максимальна зміна об'єму вибирались таким чином, щоб відповідна доля прийнятих конфігурацій дорівнювала 30% [8, 9]. Кількість кроків для встановлення термодинамічної рівноваги дорівнювала 50 000, а кількість кроків для усереднення макроскопічних аналогів досліджуваних теплофізичних величин дорівнювала 500 000 при заданих P^* і T^* .

Орієнтація молекули задавалась за допомогою кватерніону одиничної довжини $\vec{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, де $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ [8-10]. Оскільки компоненти кватерніону пов'язані з кутами Ейлера θ, φ, ψ за допомогою формул

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$q_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$q_2 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$q_3 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2},$$

то матрицю повороту молекули відносно лабораторної системи координат можна записати як [8-10]

$$\begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) & 2(q_0 q_3 - q_1 q_2) \\ 2(q_0 q_3 - q_1 q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

Для того щоб згенерувати пробну орієнтацію нелінійної жорсткої молекули, необхідно здійснити поворот одиничного вектора $\vec{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ у чотирьохвимірному просторі. Зробити це можна аналогічно тому, як здійснюється випадковий поворот одиничного вектора у трьохвимірному просторі при генерації пробної орієнтації лінійної молекули. А саме, за допомогою алгоритму Везелі [10] генеруємо випадковий вектор одиничної довжини у чотирьохвимірному просторі. Потім домножимо його на коефіцієнт γ , який визначає величину пробної зміни орієнтації [8, 10]. Після цього додамо отриманий вектор до вектора, що задає стару орієнтацію, і перенормуємо його на одиницю. В результаті отримаємо кватерніон, що характеризує нову орієнтацію молекули. Значення коефіцієнта γ визначає частку прийнятих пробних конфігурацій.

Пробний об'єм основної комірки генерувався як

$$V_{\text{new}} = V_{\text{old}} + \Delta V_{\text{max}} (2\xi - 1),$$

де V_{old} і V_{new} – об'єм комірки до і після генерації нової конфігурації, ΔV_{max} – максимальне значення

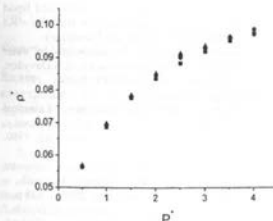


Рис. 2. Залежність приведенної густини модельних флюїдів від приведенного тиску (■ – орто, • – мета, ▲ – пара).

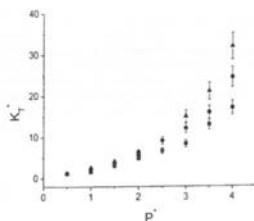


Рис. 3. Залежність приведенного ізотермічного модуля пружності модельних флюїдів від приведенного тиску (■ – орто, • – мета, ▲ – пара).

зміни об'єму, ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі (0, 1). Координати центрів мас молекул нової конфігурації R_{new} визначалися за допомогою перемасштабування координат центрів мас молекул старої конфігурації R_{old}

$$R_{new} = R_{old} \sqrt{\frac{V_{new}}{V_{old}}},$$

Якщо в новій конфігурації молекули „не перекривалися“ (що можливо було при зменшенні об'єму), то вона приймалася із ймовірністю

$$\omega = \min \left(1, \exp \left(P(V_{new} - V_{old}) - NT \ln \frac{V_{new}}{V_{old}} \right) \right).$$

Випадкова величина ξ , рівномірно розподілена в інтервалі (0, 1) генерувалася за допомогою алгоритму Xorshift [11].

Згенерована за допомогою алгоритму Метрополіса послідовність конфігурацій системи використовувалася для знаходження середніх і середнь-квадратичних флуктуацій мікроскопічних аналогів макроскопічних величин. Так, густина та ізотермічний модуль пружності розраховувалися за формулами [8, 9]:

$$\rho = \frac{N}{\langle V \rangle}$$

$$K_T^* = \frac{T \langle V \rangle}{\langle \Delta V^2 \rangle}$$

Для визначення похибки розрахунку ρ^* та K_T^* виконувалися послідовно 10 серій обчислень по 50 000 кроків кожна. Таким чином отримувалося 10 значень густини та ізотермічного модуля пружності, за якими оцінювалися відповідні середні арифметичні значення та середнь-квадратичні похибки. В результаті похибка розрахунку ρ^* та K_T^* дорівнювала відповідно 2% та 20%.

На Рис. 2 зображено графік залежності густини від тиску для трьох модельних флюїдів при $T=1.0$. Як видно з графіків, функція ρ від P є зростаючою і нелінійною, при чому швидкість зростання із збільшенням тиску зменшується. Що стосується ролі геометрії модельних частинок, то густина при переході від „молекул“ однієї форми до іншої в межах похибки не змінюється.

На Рис. 3 зображено графік залежності ізотермічних модулів пружності від тиску. Залежність ізотермічного модуля пружності модельних орто-, пара- та мета-кислотів збігається у межах похибки розрахунку K_T^* . В області високих тисків вплив форми молекули

стає помітним, а саме, значення K_T^* зростає при переході від модельного орто- до пара-кислота.

Отримані результати проведеного комп'ютерного експерименту свідчать про наступне. Барична залежність густини модельних молекулярних флюїдів є малочутливою характеристикою відносно встановлення впливу на густину форми частинок. Що стосується залежностей $K_T^*(P^*)$, то модуль пружності „відчуває” вплив форми, особливо при високих тисках. Однак характер цього впливу є протилежним тому, що спостерігається для реальних кислотів [12]. Причиною цього, на нашу думку, є „твердосферне” наближення потенціалу міжмолекулярної взаємодії в досліджених флюїдах. Звичайно, більш адекватним було б використання потенціалу типу Леннарда-Джонса або Кіхари [13-16], при цьому взаємодія частинок при стисненні системи є більш „м'якою”. Крім того, певну роль можуть відігравати сили притягання між частинками.

Список використаних джерел

1. Adamenko I.I. Molecular shape and elastic properties of liquids. (Hard dumbbells, spherocylinders and ellipsoids of revolution). / I.I.Adamenko, A.M.Grigoriev, Yu.I.Kuzovkov // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Taras Shevchenko Kyiv University. – 2010. – №3. – P.235 – 240. (in Ukrainian).
2. Adamenko I.I. Molecular shape and thermophysical properties of liquids. I. Elastic properties / I.I.Adamenko, A.M.Grigoriev, Yu.I.Kuzovkov, Myronenko O.K. // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Taras Shevchenko Kyiv University. – 2009. – №3. – C.268 – 271. (in Ukrainian).
3. Adamenko I.I. Molecular shape and thermophysical properties of liquids. II. Thermal properties / I.I.Adamenko, A.M.Grigoriev, Yu.I.Kuzovkov, Myronenko O.K. // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Taras Shevchenko Kyiv University. – 2009. – №4. – P.282 – 285. (in Ukrainian).
4. Grigoriev A.N. Thermophysical properties of diatomic particle systems interacting via Kihara potential / A.M.Grigoriev, V.F.Korolovych, Yu.I.Kuzovkov, D.O.Mamatova, K.O.Moroz // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Taras Shevchenko Kyiv University. – 2012. – №2. – P.299 – 303. (in Ukrainian).

5. Adamenko I.I. Physics of liquids and liquid systems. / I.I.Adamenko, L.A.Bulavin. – K.: ASMI, 2006. – 623 p. (in Ukrainian)
6. Antonchenko V.Ya. Fundamentals of water physics. / V.Ya.Antonchenko, A.S.Davydov, V.V.Ilyin – K.: Naukova dumka, 1991. – 667 p. (in Russian).
7. Yukhnovsky I.R. Statistical theory of classical equilibrium systems / I.R.Yukhnovsky, M.F.Holovko. – K.: Naukova dumka, 1980. – 372 p. (in Russian).
8. Frenkel D. Understanding computer simulations. / D. Frenkel, B. Smith – New York, Academic Press, 2002. – 638 p.
9. Allen M.P. Computer simulation of liquids. / M.P. Allen, D.J. Tildesley – Oxford, Clarendon Press, 1986. – 385 c.
10. Leach A.R. Molecular modelling. Principles and applications. / A.R.Leach – 2nd edition. Edinburgh, Pearson Education Ltd, 2001. – 744 p.
11. Marsaglia G. Xorshift RNGs. / G.Marsaglia // Journal of Statistical Software. – 2003. – Vol.8, 14.
12. Vargaftik N.B.. Handbook on thermophysical properties on gases and liquids / N.B.Vargaftik. – 2nd ed., extend. and revised. – M.: Nauka, 1972. – 721 p. (in Russian).
13. Hirschfelder J. O. Molecular theory of gases and liquids / J.O.Hirschfelder, C.F.Curtiss, P.B.Bird. – M.: Izdatelstvo inostrannoy literatury, 1961. – 930 p. (in Russian).
14. Kaplan I.G. Introduction to theory of molecule interaction / I.G.Kaplan. – M.: Nauka, 1982. – 312 p. (in Russian).
15. Smirnova N.A. Molecular theory of solutions. / N.A.Smirnova. – L.: Khimiya, 1987. – 336 p. (in Russian).
16. Hansen J.-P. Theory of simple liquids / J.P.Hansen, I.R.McDonald. – 3rd edition. – Academic Press, 2006. – 428 p.

Надійшла до редакції 29.11.12

УДК 535.37

Єщенко О.А.¹, д.ф.-м.н., доц.O. A. Yeshchenko^{*}, Dr. Sci., Assoc. Prof.**Вплив анізотропії ефективної маси електронів і дірок на фазовий перехід газ – рідина в системі екситонних молекул у напівпровідникових кристалах****Influence of electron and hole effective mass anisotropy on gas – liquid phase transition in the system of excitonic molecules in semiconductor crystals**

Виконано варіаційні розрахунки впливу анізотропії ефективної маси електронів і дірок на величину потенціальної енергії взаємодії між біекситонами в напівпровідникових кристалах. Показано, що збільшення ступеню анізотропії призводить до посилення сил притягання між біекситонами. Виявлено, що при певному значенні параметра анізотропії квантовий параметр де Бюра стає меншим ніж критичне значення $\Lambda_c = 3,5$, що є умовою існування зв'язаної електрон-діркової молекулярної фази – біекситонної рідини. Розрахунки, виконані з використанням параметрів носіїв заряду в кристалі монокліного дифосфіду цинку (β -ZnP₂), дають значення параметра де Бюра $\Lambda = 2,12 < \Lambda_c$, що доводить можливість існування біекситонної рідини у цьому кристалі.

Ключові слова: напівпровідникові кристали, міжбіекситонна взаємодія, біекситонна рідина, анізотропія ефективної маси.

The variational calculations of the influence of anisotropy of the effective mass of electrons and holes on the potential energy of interaction between biexcitons in semiconductor crystals have been performed. It has been shown that increase of the anisotropy degree leads to strengthening of the attractive forces acting between biexcitons. It has been found that at a certain value of anisotropy parameter the quantum de Boer parameter becomes less than critical value $\Lambda_c = 3,5$ that is a condition of existence of bound electron-hole molecular phase – biexcitonic liquid. Calculations using the parameters of charge carriers in monoclinic zinc diphosphide crystal (β -ZnP₂), have given a value of de Boer parameter $\Lambda = 2,12 < \Lambda_c$, that proves the possibility of existence of biexcitonic liquid in this crystal.

Key words: semiconductor crystals, interbiexciton interaction, biexcitonic liquid, effective mass anisotropy.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет, 03680, м. Київ, пр-т Академіка Глушкова, 4а, e-mail: yes@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physics Faculty, 03680, Kyiv, Akademik Glushkov prosp., 4a, e-mail: yes@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ. Проблема існування діелектричної рідини в електрон-діркової системі напівпровідникових кристалів

Загальновідомою є аналогія між екситоном Ваньє-Мотта в напівпровідниках (зв'язана кулонівською взаємодією електрон-діркою пара he) і атомом водню H . Ця аналогія також поширюється на екситонні молекули (ЕМ або біекситони h_2e_2) і молекулу водню H_2 . Керуючись аналогією між екситонними молекулами та молекулами водню, можна припустити також можливість існування біекситонної (молекулярної) бозе-рідини діелектричного типу,

яка складатиметься з електронейтральних ЕМ-бозонів, аналогічно до рідкого молекулярного водню. Можливість існування біекситонної рідини в напівпровідниках вперше була теоретично розглянута в [1].

Але, як виявилось, утворення біекситонної рідини в напівпровідникових кристалах є досить проблематичним. Справа в тому, що Келдиш [2] і пізніше Брінкман і Райс [3] вказали на дві істотні відмінності між молекулами H_2 і ЕМ в типових напівпровідниках. По-перше, оскільки ефективні маси електрона і дірки часто одного порядку, то енергія зв'язку екситонної молекули, виміряна в одиницях енергії зв'язку екситона (атома),

повинна бути істотно меншою ніж 0,35 (випадок молекули водню). По-друге, внесок енергії нульових коливань є значно більшим внаслідок малої маси біекситона, яка є порядку маси вільного електрона. Внаслідок цих двох причин, як показали багато експериментів, в типових напівпровідниках (Si, Ge та ряді інших) відбувається утворення металевої електрон-діркової фермі-рідини, яка складається з окремих електронів і дірок, які є ферміонами. Тому звідси можна зробити висновок про те, що утворення біекситонної бозе-рідини має бути можливим лише в кристалах з дуже великою відмінністю ефективних мас електрона і дірки. Крім цього, маса ЕМ повинна бути досить великою, щоб внесок енергії нульових коливань був досить малий, і стало можливим утворення молекулярної рідини. Ще одним важливим фактором, що має сприяти збільшенню енергії зв'язку біекситонної рідини, є анізотропія ефективних мас носіїв. Дійсно, як відомо, анізотропія призводить до збільшення енергії зв'язку вільних електрон-діркових комплексів, тобто екситонів, біекситонів та їх конденсатів [4-6]. Тому безперечно актуальним є теоретичний аналіз впливу анізотропії ефективних мас електронів і дірок на стійкість (енергію зв'язку) електрон-діркової діелектричної (біекситонної) рідини.

Напівпровідникові кристали моноклінного дифосфіду цинку ($\beta\text{-ZnP}_2$) є зручним матеріалом з цієї точки зору. Дійсно, цей кристал характеризується значною відмінністю ефективних мас електрона і дірки $\sigma = m_e/m_h = 0,06$ [7-10] і досить великим значенням трансляційної маси біекситона $m_{ec} = 3m_0$, де m_0 – маса вільного електрона [11]. Крім цього, кристали $\beta\text{-ZnP}_2$ характеризуються дуже сильною анізотропією ефективних мас носіїв. Так параметр анізотропії $\gamma = \mu_x/\mu_z$ (μ_x і μ_z – значення зведеної екситонної маси в напрямках паралельному і перпендикулярному осі Z(c) кристала) дорівнює 0,19 [12]. Тому екситонна молекула в $\beta\text{-ZnP}_2$ має велику енергію зв'язку $E_{ec}^* = 6,7$ меВ $= 0,15E_g^*$ [7-10]. Найнижчим за енергією екситонним станом в даному кристалі є дипольно заборонений 1S-стан ортоекситона [12-14]. Цей факт дозволяє досить легко створювати при лазерному збудженні значні концентрації екситонів, а отже і біекситонів, що полегшує створення біекситонної рідини в кристалі в умовах реального

експерименту. У роботах [7,8,15,16] отримано вагомі експериментальні свідчення того, що конденсація біекситонів в кристалах $\beta\text{-ZnP}_2$ відбувається за воднеподібним сценарієм, тобто на відміну від типових напівпровідників утворюється рідина молекулярного (діелектричного) типу. У роботах [15,16] було виміряно фазову діаграму біекситонної рідини, і визначено її критичні параметри: $T_c = 4,9$ K і $n_{ec,c} = 4,1 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ($r_{ec,c} \approx 63A = 4,2a_{ex}$, де a_{ex} – екситонний борівський радіус).

Де Бур у роботі [17] ввів квантовий параметр

$$\Lambda = \hbar / (\beta(m\varphi)^{1/2}) \quad (1)$$

як кількісну міру внеску квантових ефектів (енергії нульових коливань) у порівнянні з потенціальною енергією притягання між молекулами. Тут введено такі позначення: m – маса молекули, β та φ – параметри, що входять у вираз для потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії

$$V(R) = 4\varphi \left[\beta/R^{12} - \beta/R^6 \right], \quad (2)$$

де R – міжмолекулярна відстань. Де Бур показав, що при $\Lambda \geq \Lambda_c = 3,5$ зрідження молекулярного газу в молекулярну рідину є неможливим, тобто молекулярної рідини не існує. Брінкман і Райс в [3] оцінили значення Λ для ЕМ в типових напівпровідниках (Si та Ge): $76 > \Lambda_c$. Це дозволило їм зробити висновок про неможливість утворення біекситонної рідини в цих напівпровідниках. Де Бур показав, що при взаємодії двох молекул водню потенціал міжмолекулярної взаємодії є притягальним при відстанях між молекулами більшими, ніж $r \sim 5a_s$ (тут a_s – водневий борівський радіус) і має слабкий мінімум глибиною $\sim 10^{-4} Ry$ між $r \sim 5,5a_s$ та $6a_s$. Цей мінімум відповідає за існування фазового переходу газ – рідина при 22K для молекулярного водню. Для $\beta\text{-ZnP}_2$ $Ry = 41,3$ меВ та екситонний борівський радіус $a_{ex} = 15A$. Тому критична температура рідини має бути $\sim 10^{-4} Ry/k_B = 0,04K$, а параметр де Бура відповідно: $16,4 > \Lambda_c = 3,5$. Чи означає це, що утворення біекситонної рідини у кристалах

β - ZnP_2 є неможливим аналогічно до типових напівпровідників?

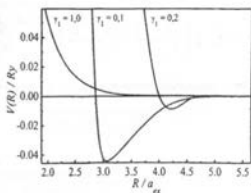


Рис. 1. Залежність потенціальної енергії парної біекситони-біекситонної взаємодії від відстані між біекситонами для різних значень параметра анізотропії γ_1 .

Наступний теоретичний аналіз (варіаційні розрахунки) впливу анізотропії ефективних мас носіїв на потенціал міжмолекулярної (міжбіекситонної) взаємодії дає відповідь на це питання. Нижче показано, що значна анізотропія ефективних мас суттєво поглиблює мінімум потенціальної кривої, що приводить до суттєвого зниження параметра де Бура. Розрахунки виконано нами для відношення ефективних мас носіїв $\sigma = m_e/m_h = 0,06$, що реалізується в кристалі $\beta\text{-ZnP}_2$. Виконані розрахунки показали, що для цього кристалу параметр де Бура має значення, нижче ніж критичне. Цей факт вказує на можливість існування в кристалах $\beta\text{-ZnP}_2$ зв'язаної біекситонної фази – біекситонної рідини, підтверджуючи експериментальні свідчення існування такої рідини в кристалі $\beta\text{-ZnP}_2$, отримані в наших роботах [7,8,15,16].

Вплив анізотропії ефективних мас носіїв на можливість фазового переходу газ – молекулярна рідина в системі екситонних молекул

Нами було виконано варіаційні розрахунки потенціальної енергії взаємодії біекситонів в анізотропному кристалі. Як було зауважено вище, для відношення ефективних мас електронів і дірок було взято значення $\sigma = 0,06$, тобто було

проаналізовано випадок кристалу $\beta\text{-ZnP}_2$. Анізотропію ефективних мас носіїв було враховано через зведену електрон-діркову ефективну масу. Оскільки $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h) = m_e / (1 + \sigma)$, а при малих σ : $\mu \approx m_e$, то анізотропія μ у цьому випадку відображає анізотропію маси електрона. Тому при розрахунках електронну частину хвильової функції молекули було взято анізотропною, а діркову частину – ізотропною. $\beta\text{-ZnP}_2$ – двовісний кристал, але внаслідок того, що $\mu_x \approx \mu_y$, його можна з хорошою точністю вважати одновісним. Оскільки для цього кристалу $\mu_x > \mu_z$, де $\mu_{x,y} = \mu_k$ та $\mu_z = \mu_l$, анізотропію можна характеризувати параметром: $\gamma_1 = \mu_x / \mu_z$. Хвильова функція біекситона була взята у вигляді [18]:

$$\psi_{ab}(1,2) = \frac{f(R_{ab})}{2} \times \left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2} [1 + \beta \ r_{a1} + r_{a2} + 1 - \beta \ r_{a2} + r_{a1}] \right) + \exp\left(-\frac{\alpha}{2} [1 - \beta \ r_{a1} + r_{a2} + 1 + \beta \ r_{a2} + r_{a1}] \right) \right], \quad (3)$$

де $f(R_{ab}) = R_{ab}^{1/2} \exp -\delta R_{ab} / 2$ описує відносний рух дірок в молекулі, ця функція була взята ізотропною. Тут a і b позначають дірки, а 1 і 2 – електрони, за одиницю довжини було вибрано ефективний екситонний борівський радіус $a_0 = \hbar^2 \epsilon / \mu_e e^2$, де ϵ – діелектрична проникність кристалу. Також було введено позначення:

$$r_a = \left[x_a^2 + y_a^2 / \chi_1^2 + z_a^2 / \chi_2^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

Параметри χ_1 і χ_2 описують ступінь просторової деформації електронної ψ -функції внаслідок анізотропії, α , β , γ і δ – параметри, взяті з [18]. Повна хвильова функція двох молекул записується як антисиметрична комбінація функцій типу (3), що описують окрему молекулу. Нехай V – сума потенціальних енергій взаємодії між частинками $(a,b,1,2)$ першої молекули та частинками $(c,d,3,4)$ другої молекули. Тоді $V = V_c + V_{ac}^* + V_{ac}^*$, де V_c – енергія

Кулонівської взаємодії

$$V_c = \frac{8}{N_m^2} \int \sin \theta_a d\theta_a d\varphi_a d^3 R_{ab} d^3 R_{cd} d^3 r_1 d^3 r_2 f^2(R_{ab}) f^2(R_{cd}) \times \\ \times \exp -\alpha [1 + \beta \quad r_{a1} + r_{c3} + 1 - \beta \quad r_{c1} + r_{a3}] \left(\frac{2}{R_{ac}} - \frac{2}{r_{a3}} - \frac{2}{r_{c1}} + \frac{2}{r_{13}} \right), \quad (5)$$

V_{ee}^* - енергія взаємодії, що виникає внаслідок обміну двох електронів (енергія електронної обмінної взаємодії)

$$V_{ee}^* = -\frac{4}{N_m^2} \int \sin \theta_a d\theta_a d\varphi_a d^3 R_{ab} d^3 R_{cd} d^3 r_1 d^3 r_2 f^2(R_{ab}) f^2(R_{cd}) \times \\ \times \exp -2\alpha \quad r_{a1} + r_{c3} + r_{c1} + r_{a3} \left(\frac{2}{R_{ac}} - \frac{2}{r_{a3}} - \frac{2}{r_{c1}} + \frac{2}{r_{13}} \right) \quad (6)$$

та V_{ee}^* - енергія взаємодії, що виникає внаслідок обміну двох дірок (енергія діркової обмінної взаємодії)

$$V_{ee}^* = -\frac{4}{N_m^2} \int \sin \theta_a d\theta_a d\varphi_a d^3 R_{ab} d^3 R_{cd} d^3 r_1 d^3 r_2 f(R_{ab}) f(R_{cd}) f(R_{ad}) f(R_{cd}) \times \\ \times \exp -2\alpha \quad r_{a1} + r_{c3} + r_{c1} + r_{a3} \left(\frac{2}{R_{ac}} - \frac{2}{r_{a3}} - \frac{2}{r_{c1}} + \frac{2}{r_{13}} \right), \quad (7)$$

де N_m - нормуючий інтеграл для молекулярної хвильової функції. Тут одиницею енергії нами вибрано ефективний екситонний рідберг $Ry = \mu_e e^2 / 2\hbar^2 e^2$, тобто вирази для енергій (5) –

(7) нормовані на величину Ry . У цих виразах довільна відносна орієнтація двох молекул при фіксованій міжмолекулярній відстані R усереднюється при інтегруванні по кутах θ_a і φ_a . Інтеграли (5) – (7) обчислювалися чисельно за допомогою методу Монте-Карло з відносною точністю ~3–5%. Отримані результати представлено на рис. 1 – 4. Рис. 1 демонструє залежність потенціальної енергії парної біекситон-біекситонної взаємодії для різних значень параметра анізотропії γ_1 . На рис. 2 та 3 представлено залежності рівноважної міжбіекситонної відстані та глибини мінімуму потенціальної енергії міжбіекситонної взаємодії відповідно від параметра анізотропії γ_1 зведеної ефективної електрон-діркової маси. З рисунків видно, що посилення анізотропії, що має місце при зменшенні параметра γ_1 , має приводити до

зменшення відстані між молекулами та поглиблення мінімуму потенціальної енергії.

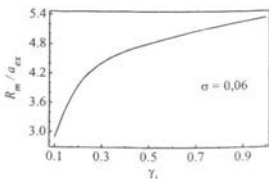


Рис. 2. Залежність рівноважної міжбіекситонної відстані від параметра анізотропії γ_1 . Розрахунки виконано для $\sigma = 0,06$.

Отже посилення анізотропії приводить до потягання сил притягання між біекситонами. Цей висновок підтверджується залежністю параметра де Буря Λ , введеного вище, від параметра анізотропії γ_1 , яку подано на рис. 4.

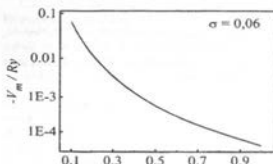


Рис. 3. Залежність глибини мінімуму потенціальної енергії взаємодії двох біекситонів від параметра анізотропії γ_1 . Розрахунки виконано для $\sigma = 0,06$.

З рис. 4(б) видно, що Λ стає меншим ніж критичне значення $\Lambda_c = 3,5$, при якому потенціальна енергія міжмолекулярної взаємодії стає по модулю більшою ніж кінетична енергія нульових коливань, а отже стає можливим існування молекулярної рідини, при досить малих значеннях параметра анізотропії $\gamma_1 \leq 0,29$.

Таким чином, можна зробити висновок, що для існування біекситонної рідини необхідна не тільки значна відмінність ефективних мас електронів і дірок, а й значна анізотропія ефективних мас носіїв. У кристалі $\beta\text{-ZnP}_2$ мають місце такі значення згаданих вище параметрів: $\sigma = 0,06$ і $\gamma_1 = 0,19$. Відповідно, для цього кристалу параметр де Бура виходить рівним $\Lambda = 2,12$, що є суттєво меншим, ніж критичне значення $\Lambda_c = 3,5$. Як видно з рис. 3, для параметрів $\sigma = 0,06$ і $\gamma_1 = 0,19$, які мають місце в $\beta\text{-ZnP}_2$, глибина мінімуму потенціальної ями становить $-V_m = 0,014Ry = 0,58 \text{ meV} = 6,7 \text{ K}$, що добре корелює зі значенням енергії зв'язку біекситонної рідини у кристалі $\beta\text{-ZnP}_2$: $0,42 \text{ meV} = 4,9 \text{ K}$, отриманим експериментально у наших роботах [15,16]. Отримане розрахункове значення енергії зв'язку біекситонної рідини вказує на можливість її існування при температурах $T < 6,7 \text{ K}$, які легко експериментально реалізувати з використанням рідкого гелію.

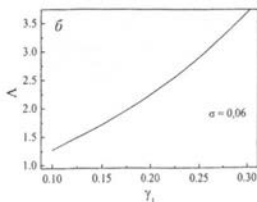
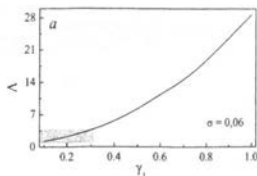


Рис. 4. Залежність параметра де Бура від параметра анізотропії γ_1 . (б) – залежність Λ від γ_1 для області малих γ_1 , показаний на (а). Розрахунки виконано для $\sigma = 0,06$.

Таким чином, виконані теоретичні розрахунки доводять факт можливості існування біекситонної рідини у кристалах моноклінного дифосфіду цинку на відміну від більшості напівпровідників, серед яких класичні напівпровідникові кристали (*Si*, *Ge*, *GaAs* та ін.).

Список використаних джерел

1. Handel P.H. Van der Waals interactions and exciton condensation / P. H. Handel, C. Kittel // Proceedings of the National Academy of Sciences (USA). – 1971. – Vol. 68. – P.3120–3121.
2. Keldysh L. V. The electron-hole liquid in semiconductors? / L. V. Keldysh // Proceedings of the 9th International

Conference on the Physics of Semiconductors (Nauka, Moscow). – 1968. – P.1303–1307.

3. *Brinkman W. F.* Electron-hole liquids in semiconductors / W. F. Brinkman, T. M. Rice // *Phys. Rev. B.* – 1973. – Vol.7. – P.1508–1523.
4. *Silin A. P.* Dielectric electron-hole liquid in semiconductors / A. P. Silin // *Fizika tverdogo tela.* – 1977. – Vol.19. – No.1. – P.134–140. (in Russian).
5. *Bisti A. E.* Electron-hole liquid in thin semiconductor wires / A. E. Bisti, A. P. Silin // *Fizika tverdogo tela.* – 1988. – Vol.30. – No.3. – P.737–742. (in Russian).
6. *Andryushin Ye. A.* Excitons in quantum wells and quantum wires / Ye. A. Andryushin, A. P. Silin // *Fizika tverdogo tela.* – 1993. – Vol.35. – No.7. – P.1947–1951. (in Russian).
7. *Gorban I. S.* Study of excitonic molecules in monoclinic zinc diphosphide crystals / I. S. Gorban, M. M. Biliy, I. M. Dmitruk, O. A. Yeshchenko // *Physica Status Solidi (b).* – 1995. – Vol.191. – P.337–344.
8. *Gorban I. S.* Excitonic molecules, trions and liquid in β -ZnP₂ / I. S. Gorban, M. M. Biliy, I. M. Dmitruk, O. A. Yeshchenko // *Ukrainian Journal of Physics.* – 1994. – Vol.39. – P. 937–940. (in Ukrainian).
9. *Biliy M. M.* Two-electron transitions involving biexciton/ M. M. Biliy, I. S. Gorban, V. O. Gubanov, I. M. Dmitruk // *JETP Letters.* – 1989. – Vol.50. – P. 75–77. (in Russian).
10. *Dmitruk I.* Excited states of excitonic molecules and their inelastic scattering in ZnP₂ crystals / I. Dmitruk, T. Goto, A. Kasuya, Z. Yanchuk // *Physical Review B.* – 2001. – Vol.64. – P.045207-1–045207-6.
11. *Gorban I. S.* Fine structure of exciton states, polariton effects and exciton-phonon interaction in β -ZnP₂ / I. S. Gorban, M. M. Biliy, V. A. Borbat [et al.] // *Dopovidi AN URSR. Series A: physics/mathematics and technical sciences.* – 1988. – No.3. – P.45–49. (in Ukrainian).
12. *Gorban I. S.* Multiserial structure of excitonic energy spectrum in monoclinic ZnP₂ crystal / I. S. Gorban, M. M. Biliy, I. M. Dmitruk, O. A. Yeshchenko // *Physica Status Solidi (b).* – 1998. – Vol.207. – P.171–181.
13. *Engbring J.* Two-photon absorption and magnetoabsorption of P excitons in β -ZnP₂ / J. Engbring, D. Frölich, R. Schepe, S. Spitzer, O. Arimoto, K. Nakamura // *Physica Status Solidi (b).* – 1996. – Vol.196. – P.461–472.
14. *Pevtsov A. B.* Free excitons in crystals of black modification of ZnP₂ / A. B. Pevtsov, S. A. Permogorov, A. V. Selkin, N. N. Syrbu, A. G. Umanets // *Fizika i Tekhnika Poluprovodnikov.* – 1982. – Vol.16. – P.1399–1405. (in Russian).
15. *Gorban I. S.* Excitons in monoclinic zinc diphosphide. Longitudinal exciton and mixed mode / I. S. Gorban, A. P. Krokhmal, Z. Z. Yanchuk // *Fizika Tverdogo Tela.* – 1999. – Vol.41. – P.193–202. (in Russian).
16. *Gorban I. S.* Biexcitonic liquid in monoclinic zinc diphosphide crystals / I. S. Gorban, M. M. Biliy, I. M. Dmitruk, O. A. Yeshchenko // *Solid State Communications.* – 1996. – Vol.98. – No.6. – P.489–493.
17. *Gorban I. S.* Phase diagram of dielectric biexcitonic liquid in β -ZnP₂ crystals / I. S. Gorban, M. M. Biliy, I. M. Dmitruk, O. A. Yeshchenko // *Ukrainian Journal of Physics.* – 1996. – Vol.41. – P. 840–844. (in Ukrainian).
18. *De Boer J.* Progress in Low Temperature Physics / J. De Boer // Amsterdam. – North-Holland. – 1957. – Vol.II. – 123p.
19. *Akimoto O.* Excitonic Molecule. I. Calculation of the Binding Energy / O. Akimoto, E. Hanamura // *Journal of Physical Society of Japan.* – 1972. – Vol.33. – P.1537–1544.

Надійшла до редколегії 29.11.2012

УДК 519.9

Махлайчук П.В.¹, м.н.с.
Мороз К.О.², к.ф.-м.н., доц.

Нова конфігурація димеру води

Наше дослідження показує, що димер молекул води існує в двох основних конфігураціях – А та В. Величина енергії взаємодії в конфігурації В є близькою до такої у стандартній конфігурації А, в той час, як геометрична конфігурація, дипольний момент та мультипольні моменти вищих порядків суттєво відрізняються. Також обговорюється прояв нової конфігурації у мультимерах та ІЧ спектроскопії.

Ключові слова: вода, димер, водневий зв'язок, метастабільні стани

¹ Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2, e-mail: mahlaichuk@gmail.com

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д, e-mail: morozko@univ.kiev.ua

P.V. Makhlaichuk¹, Junior Scientific Researcher
K.O. Moroz², Ph.D., Associate Professor

New configuration of water dimer

Our study shows that a water dimer exists in two main configurations - A and B. The value of the interaction energy in the configuration B is close to that in a standard configuration A, while the geometrical configuration, the dipole moment as well as the higher order multipole moments are quite different. We also discuss the manifestation of the new configuration in multimers and IR spectroscopy.

Key words: water, water dimer, H-bond, metastable states.

¹ Odesa I.I. Mechnikov National University, 65082, Odesa, Dvoryanska st., 2,

e-mail: mahlaichuk@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: morozko@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А

Introduction

Most of the works are devoted to the description of the ground state of water dimers: the determination of the energy, angles that describe the configuration of dimer and its dipole moment. It is supposed that only one appropriate dimer configuration exists.

This question is not self-evident and needs further discussion. Indeed, let us consider the standard dimer configuration (see Fig.1(A)) and put the angle $\theta = 0$. In this case it is evident that there is another configuration (see Fig.1(B)) at $\theta = 0$ which has the same ground state energy. When $\theta \neq 0$ the energy for the configuration B increases (see Fig.2). It is necessary to note, that in both configurations A and B angle θ remains the same. These facts allow us to conclude that configuration B has to be considered along with A.

The present work is devoted to the study of physical properties of dimers in equilibrium and excited states presented by vibrational and rotational contributions. It is clear, that the excited states of dimers are formed in real conditions due to collisions

between them. The repeated collisions lead to increasing of number of the excited states with temperature (see [3]).

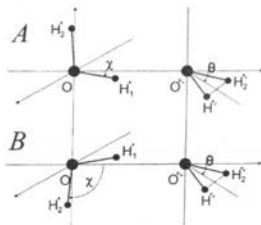


Fig.1. Two types of water dimer configuration

The systematic discussion of the excited states of dimer in configuration A is given in [3-5]. Here they are called "metastable states" of dimer.

Parameters of water dimers in the A and B configurations

	$\tilde{\Phi}^{(A)}$	$r_{00}, \text{\AA}$	$\theta, ^\circ$	$\chi^{(A)}, ^\circ$	$d^{(A)}$	$\tilde{\Phi}^{(B)}$	$\chi^{(B)}, ^\circ$	$d^{(B)}$
SD	-27.59	2.85	33.80	4.01	2.78	-27.79	110.0	3.62
GSD	-13.89	2.96	22.52	12.60	3.16	-12.38	97.8	3.63
SPC	-11.25	2.78	21.29	4.01	2.81	-10.23	99.9	3.60
SPC/E	-11.94	2.76	19.49	3.72	2.81	-10.91	100.2	3.62
TIPS	-11.83	2.75	21.19	3.89	2.81	-10.75	100.0	3.61
TIP3P	-12.06	2.74	21.54	3.88	2.81	-10.94	100.1	3.61
B_M	-8.52	2.95	28.15	0.63	2.84	-4.59	136.9	3.25
BC_M	-9.66	2.88	28.61	0.05	2.81	-5.43	137.5	3.25
SPC_M	-12.47	2.72	27.63	-1.03	2.85	-5.12	127.7	3.38
SPC/E_M	-12.47	2.72	27.63	-1.03	2.85	-5.12	127.7	3.38
$TIPS_M$	-12.64	2.70	27.55	-1.14	2.86	-5.13	127.8	3.38
$TIP3P_M$	-12.89	2.69	27.53	-1.15	2.86	-5.28	128.2	3.38

It is stated that the relatively small lifetime of excited states leads to the significant broadening of rotational and vibrational spectral lines. Because of the broadening spectral lines merge, and form bands that are difficult for interpretation. Therefore,

relatively low temperatures are the most suitable for experimental studying of vibrational and rotational excitations of water dimers. In this paper we want to complete these results by the analysis of excited states for the B-configuration of a dimer.

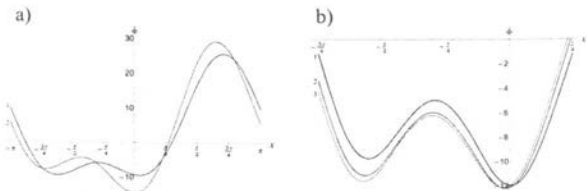


Fig.2. (a) Illustration of the angular dependence (on angle χ) of the dimer energy $\tilde{\Phi}_d$: 1 - zeroth approach ($\theta = 0$), 2 - expected curve for the real dimer. (b) Angular dependence of the dimer energy $\tilde{\Phi}_d$ on χ for different values of angle θ : 1 - SPC (2θ), 2 - SPC (θ), 3 - SPC ($\theta/2$)

Equilibrium properties of dimers in A- and B-configurations

To describe the intermolecular interaction and investigate the dimerization process we will use standard intermolecular potentials SPC [7], TIPS [8], SD (Stillinger-David) [9] and Generalized Stillinger-David potential (GSD) [10], etc. that have similar structure:

$$\Phi = \Phi_R + \Phi_D + \Phi_E, \quad (1)$$

where Φ_R and Φ_D are the repulsive and dispersive contributions and Φ_E is the term responsible for electrostatic interaction. The specific H-bond interaction is small and is ignored by us [11-13].

Furthermore, we will also use the potential with multipole approximation for electrostatic part Φ_E [14]. The parameters of water dimer (ground state energy $\tilde{\Phi} = \Phi/k_B T_m$, k_B - Boltzmann constant, T_m is the melting temperature, the distance r_{00} , the

angles θ and χ and the value of the dipole moment d) for the A and B configurations are gathered in Table 1 (Superscripts ^A and ^B describe the configurations of water dimer. Subscript _M denotes that electrostatic interaction for the corresponding potential is taken in the multipole form). We see, that the intermolecular potentials give values of the main dimer parameters for the A configuration close to those obtained with the quantum-chemistry methods [15-20]. This gives us a reason to expect that the dimer parameters for B configuration take reasonable values.

The total energy of the dimer consists of three terms - the interaction energy, rotational and vibrational parts:

$$E = \Phi + \Phi_{rot} + \Phi_{vib}, \quad (2)$$

where $\Phi_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$, $\Phi_{vib} = \hbar\omega(n+1/2)$, I is the inertia moment and ω is the frequency of small oscillations. The values of the rotational quanta $Q_l = \frac{\hbar^2}{2I_l}$ are placed in Table 3.

Here we have to note that the form of interaction potential for both configurations of water dimer is parabolic i.e. it corresponds to the local minima.

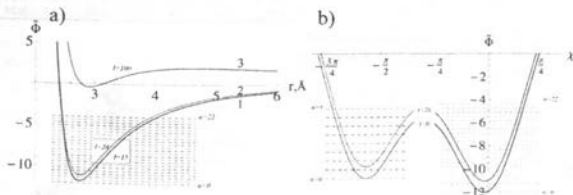


Fig.3. (a) Intermolecular distance dependence of the dimer energy in the configuration SAS according to SPC. Curves 1 - 3 correspond to different rotational states (rotation around X axis). The value of $l = 28$ corresponds to the rotational energy $\sim k_B T_m$. Dashed lines illustrate vibrational states for the $l = 0$.

(b) Angular dependence of the interaction energy of two water molecules for the A and B configurations on angle χ according to SPC. Solid lines present the rotational states, dashed lines correspond to the different vibrational states with the specified n .

The frequencies of the small oscillations - rotations around X, Y, Z axis on the angles θ, α, ϕ respectively and change of the intermolecular distance - are gathered in Table 3. It is supposed that the angle χ remains fixed. The oscillations with the frequencies ω_1 and ω_2 are hybrid, which corresponds to the relation between r_{OO} distance and angle θ .

indicates that the rotation of water dimer is quasi-free at room temperature.

Discussion of the results obtained

The main result of the presented work is the discovery of another configuration for a water dimer, which energy E_B differs from the ground state energy E_A by the $\sim k_B T_m$ (for different intermolecular potentials). A partial exception is the potential with the electrostatic part in form of the multipole series. In this case the difference between

The behavior of the intermolecular potentials as well as the rotational and vibrational levels are presented in Fig.3. The value of the rotational quanta

Table 2

Frequencies of the small oscillations of water dimer in A and B configurations

cm^{-1}	ω_1	ω_2	ω_a	ω_b
SPC ^(A)	63.14	244.63	246.00	307.93
TIPS ^(A)	68.91	212.63	247.64	313.00
GSD ^(A)	205.24	273.81	277.57	433.33
SPC ^(B)	142.06	231.86	239.71	329.73
TIPS ^(B)	127.83	209.77	237.79	309.19

the energies $E_B - E_A \approx (5 + 7)k_B T_m$. That is why the analysis of this configuration with the quantum chemistry methods is very important.

From the condition of chemical equilibrium in the water vapor that is an ensemble of water dimers, the concentration of dimers in the A and B configurations are related by the standard law:

$$c_A / c_B = e^{\frac{E_B - E_A}{k_B T_m}} \quad (3)$$

Here it is necessary to note, that the relative concentration of water dimers in the configuration B is the function of θ (see Fig.2(b)). The effective value of the dipole moment of a water dimer is defined as: $d_{eff}^{(d)} = c_A(\theta)d^{(A)} + c_B(\theta)d^{(B)}$, where $c_B(\theta) = 1 - c_A(\theta)$. Unfortunately, the exact value of dipole moment in configuration A is unknown. Thus, in order to illustrate this statement we will take two values - 2.6D and 2.8D that are apparently the most suitable candidates for the average value and also two other values - 2.15D and 4.24D that give the minimal and the maximal possible values. The corresponding values of the effective dipole moment of a water dimer are presented in Fig.7.

Another manifestation of new configuration of a water dimer can be found in a local structure of liquid and overcooled water. For this purpose, it is enough to consider the structure of a cyclic pentamer [21].

Table 3

Rotational quanta for dimmers in cm^{-1}

D_2O	$Q_x^{(A)}$	$Q_y^{(A)}$	$Q_z^{(A)}$	$Q_x^{(B)}$	$Q_y^{(B)}$	$Q_z^{(B)}$
GSD	0.18	4.32	0.21	0.18	4.24	0.19
SPC	0.20	4.24	0.24	0.18	3.74	0.20
SPC/E	0.20	4.19	0.25	0.18	3.69	0.19
TIPS	0.20	4.71	0.25	0.19	4.33	0.19
TIP3P	0.20	4.72	0.25	0.19	4.34	0.20
SPC _M	0.18	4.79	0.21	0.19	4.08	0.20
H_2O						
GSD	0.21	8.65	0.21	0.21	8.84	0.22
SPC	0.23	8.49	0.22	0.22	8.48	0.23
SPC/E	0.24	8.39	0.22	0.22	7.38	0.23
TIPS	0.24	9.42	0.22	0.23	8.67	0.23
TIP3P	0.24	9.44	0.22	0.23	8.68	0.24
SPC _M	0.21	9.58	0.23	0.23	8.17	0.24

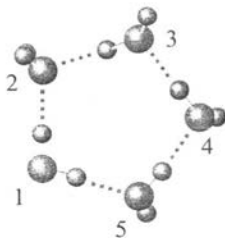


Fig.4. Structure of the cyclic water pentamer.

Usually, the water monomers are used to construct a pentamer. However, it can be considered as an object that consists of dimers. From this point of view, the pentamer shown in Fig.6 is the combination of: dimers 1-2 and 3-4 in the configuration A, dimer 1-5 in the configuration B, rotated on the angle $\delta/2$ and dimers 2-3 and 4-5 in the configuration A rotated on the angle $\alpha = \pi/2$

around H-bond. The same conclusions can be made about structure of water hexagonal rings [1,22].

It is necessary to note that the cyclic clusters of lower order (trimers, tetramers) are constructed only from the dimers in A configuration. We shall add that our conclusions refer only to the isolated cyclic multimers. However, there is the possibility of formation of linear clusters in liquid water. Let us note also that our reference to the construction of clusters from water dimers is not accidental. In vapour state almost all the water molecules are coupled into dimers [3]. That is why the formation of clusters from dimers reflects physical nature of clusterisation process.

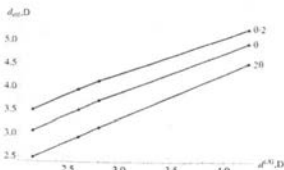


Fig.5. Dependence of the effective dipole moment of the water dimer on the value of the dipole moment in the configuration A for different angles θ .

Unfortunately, the structure of spectra observed in [6] allows no definite conclusions about the configuration of dimer in nitrogen matrix. Let us consider in brief the possible interpretation of the results obtained in [6]. According to [23-25], the spectral line at 1180cm^{-1} corresponds to the bend vibration of the isolated D_2O molecule. It is easy to see that using Generalized Stillinger-David potential for soft water molecules we can obtain the shift of the bend vibrations approximately on 2.6cm^{-1} that is in quite satisfactory agreement with the experimental data. The detailed analysis of this type of vibration for cubic ice [26,27] leads also to the

close value 1181cm^{-1} . The second well defined line at the frequency 1192cm^{-1} should be interpreted as the sum of intramolecular vibrations and the rotation of dimer around the H-bond. This rotation with the $l=1$ leads to the shift of spectral line by the $\approx 9.5\text{cm}^{-1}$ for the A configuration and $\approx 8.5\text{cm}^{-1}$ for the B configuration respectively. Within the accuracy of intermolecular potentials such shift coincides with the experimental data.

The formation of the satellite lines should be connected with the rotation of molecules or the rotation of dimers around the H-bond axis. It is easy to see, that these shifts of frequencies $\sim 9\text{cm}^{-1}$ and $\sim 4\text{cm}^{-1}$ correspond to the monomers and dimers respectively.

Another two satellites of the main line centered at the $1180 + (1,2)\text{cm}^{-1}$ correspond to the sum of intramolecular vibrations and rotations of dimer around the axes that are perpendicular to the H-bond. According to the Table 3 that could happen at $l=2$.

We note in the summary of our discussion that the main differences of the water dimer in the configurations A and B are: 1) dipole moments of dimers differ by approximately 30%; 2) there is a significant dependence of the dimer energy in configuration B on the angle θ (value of the energy E_d changes by $\sim 25\%$. At the same time, with the change of the angle θ the energy E_d changes only by no more than 5%); 3) the hybrid vibrations of the H-bond length and the angle θ have frequencies that differ twice for the configurations A and B.

We ignored in our discussion of the dimer properties in both configurations the contribution of H-bonds, meaning by this the specific interaction that only occurs when the electronic shells of the molecules begin to overlap. Here we essentially relied on the results of our colleague P. Barnes [12].

References

1. D. Eisenberg, W. Kauzmann, The Structure and Properties of Water (Oxford University, New York, 1969).
2. F. Franks (Ed.), Water: A Comprehensive Treatise, Plenum, New York, 1982.
3. S. Yu. Epifanov and A.A. Vigasin, Molecular Physics, Vol.90, No.1, 101-106, (1997)
4. A.A. Vigasin, Infrared Phys. Vol. 32, pp.461-470, (1991)
5. A.A. Vigasin, Chem. Phys. Lett. Volume 117, number 1, (1985)
6. L. Fredin, B. Nelander, and G. Ribbegard, J. Chem. Phys. 66, 4073 (1977)
7. H.J.C. Berendsen, J.P.M. Postma, W.F. van Gunsteren and J. Hermans, In Intermolecular Forces, edited by B. Pullman (Reidel, Dordrecht, 1981), p. 331.
8. W.L. Jorgensen, J. Am. Chem. Soc., 103, 335-340, (1981)
9. F.H. Stillinger, C.W. David, J.Chem.Phys. 69, 1473 (1978).
10. I.V. Zhyganiuk, Ukr. Phys. Zhurn. (Kiev), 56, 225, (2011).
11. H.C. Berendsen, G.A. van der Velde, Molecular Dynamics on 216 Polarizable Water Molecules in Report of Workshop on Molecular Dynamics and Monte Carlo Calculations on Water In CECAM, 19th June - 11th August 1972
12. P. Barnes, J.L. Finney, J.D. Nicholas and J.E. Quinn, Nature Vol.282, 1979
13. R. L. Fulton P. Perhaes, J. Phys. Chem. A, 102, pp. 9001-9020, 1998
14. P. Makhlachuk, M. Malomuzh, I. Zhyganiuk, Ukr. Phys. Zhurn. (Kiev), 2012, Vol. 57, no. 2, pp. 113-117
15. H. Uneyama, K. Morokuma, J. Amer. Chem. Soc. 99, 1316 (1977).
16. M. Schütz, S. Brdarski, P.-O. Widmark, R. Lindh, G. Karlström, J. Chem. Phys. 107, 4597 (1997) O. Matsuoka, E. Clementi, M. Yoshimine, J. Chem. Phys. 64, 1351 (1976)
17. K.B. Lipkowitz and D.B. Boyd, Reviews in Computational Chemistry (Wiley-VCH, New-York, 1999) H. Yu and W.F. Gunsteren, J. Chem. Phys., 121, 9549, (2004)
18. P. L. Silvestrelli, M. Parrinello, J. Chem. Phys. 111, 3572, (1999).
19. S. Yoshioki, J. Mol. Graph. Model. 21 (2003) 487-498
20. V.F. Petrenko and R.W. Whitworth, Physics of ice (Oxford University Press, Oxford, 1999)
21. N. F. Zobov, O. L. Polyansky, C. R. Le Sueur and J. Tennyson, Chem. Phys. Lett. 260 (1996) 381-387.
22. R. Lemus, J. Mol. Spectrosc. 225 (2004) 73-92.
23. A. Janca, K. Tereszchuk, P. F. Bernath, N. F. Zobov, S. V. Shirin, O. L. Polyansky and J. Tennyson, J. Mol. Spectrosc. 219 (2003) 132-135.
24. T.V. Lokotosh, Zhurn. Fiz. Khim. (Moscow) 67 (2) (1993) 210.
25. V.G. Zbrodsky, T.V. Lokotosh, Ukr. Fiz. Zhurn. (Kiev) 38 (11) (1993) 1714.

Надійшла до редколегії 25.11.12

УДК 538.9

Павленко О.Л.¹, к. ф.-м.н., асист.

Розрахунки електронної та коливної структури молекулярного комплексу C_{60} -Sn

Методом Хартрі-Фока здійснено оптимізацію геометрії, розрахунки електронної та коливної структури комплексу фулерену C_{60} -Sn. Показано, що при приспіванні атома олова має місце пониження симетрії молекули C_{60} , що проявляється у розщепленні її вироджених коливних та електронних станів.

Ключові слова: фулерен C_{60} , коливні моди, енергетична щільність

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: pavlenkoelena@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Відкриття надпровідності фулеритів, легованих лужними металами спричинило значний інтерес до легування плівки C_{60} іншими, нелужними металами [1].

Так, для плівок легованих оловом спостерігалося зростання електропровідності, покращення нелінійних властивостей, що має великий потенціал застосування у наноелектроніці [2-3]. Водночас, механізми таких змін властивостей у плівках C_{60} -Sn не встановлені. Для вивчення природи впливу легування оловом на поведінку фулеритів важливим є визначення характеру взаємодії атомів олова з молекулами C_{60} , змін у коливних і електронних спектрах. У даній роботі теоретично досліджено можливість взаємодії атомів Sn з молекулами C_{60} та пропонується механізм взаємодії, що відповідальний за модифікацію вищезгаданих властивостей.

Методика розрахунків

Моделювання взаємодії молекули фулерену з атомом олова, а також розрахунки геометрії розподілу зарядів, дипольних моментів, коливних спектрів, активних при інфрачервоному (ІЧ) поглинанні і комбінаційному розсіянні світла (КРС)

O.L. Pavlenko¹, PhD, assistant

Calculations of electron and vibration structure of C_{60} -Sn molecular complex

Hartree-Fock method was applied to perform geometry optimization and calculate the electron and vibration structure of molecular complex C_{60} -Sn. One additional chemically bonded Sn atom leads to significant lowering of the symmetry of C_{60} molecule, splitting of degenerated vibration and electron states.

Key Words: fullerene C_{60} , vibration modes, band gap

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: pavlenkoelena@mail.univ.kiev.ua

проводилися із застосуванням програмного пакету Gaussian-03 методом Хартрі-Фока RHF з використанням валентно-розщепленого базису 3-21G, що являє собою лінійні комбінації атомних функцій типу Гауса. На першому етапі була здійснена геометрична оптимізація, тобто операція знаходження мінімумів потенціальної енергії. Метод Хартрі-Фока та базис вибиралися виходячи з найкращого узгодження теоретичних та експериментальних значень частот коливних мод молекул фулеренів C_{60} [4].

Результати розрахунків

Квантово-хімічні розрахунки вказують на можливість утворення комплексів молекул C_{60} з атомом олова Sn. Чотиривалентний атом олова може приспівуватися до подвійного зв'язку молекули C_{60} за рахунок перенесення заряду до C_{60} , рис.1.

При цьому атом олова стає позитивно зарядженим. Величина перенесеного заряду становить 0.977 від величини заряду електрона. Приспівання Sn приводить до того, що заряди на різних атомах вуглецю молекули C_{60} розподіляються нерівномірно, але симетрично. В результаті цього у комплексу виникає дипольний момент, що становить 6,1 Д. Енергія комплексу становить $E = -8255.7$ а.о., і є меншою ніж сумарна енергія складових елементів (енергія основного

стану атома олова становить $E_{Sn} = -5999,7$ а.о., $E_{C_{60}} = -2273,5$ а.о.). Це вказує на енергетичну вигідність формування комплексу молекули C_{60} і атома олова при зближенні їх на певну відстань. Експериментально така ситуація може реалізуватися при зануренні атомів олова в октаедричні та тетраедричні пори фулериту C_{60} при легуванні плівки [5]. Енергія зв'язку для C_{60} -Sn(6,6) становить $E_{\text{в}} = 511,4$ кДж/моль.



Рис. 1. Комплекс молекули C_{60} з атомом олова C_{60} -Sn(6,6). Стрілка вказує напрям та величину дипольного моменту. Контраст атомів вуглецю молекули відповідає різним знакам та величинам розподіленого заряду.

Перенесення заряду та перерозподіл електронної густини по молекулі приводить до зміни довжин зв'язків між атомами вуглецю молекули C_{60} . На рис. 2 приведені значення довжин зв'язків комплексу C_{60} -Sn(6,6) по відношенню до довжин зв'язків молекули C_{60} .

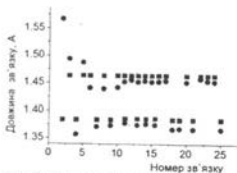


Рис. 2. Довжини одинарних та подвійних зв'язків в молекулі C_{60} (■) та комплексі C_{60} -Sn(6,6) (●). (Початок нумерації – біля зв'язку з атомом олова).

Відомо, що усереднені довжини зв'язків, визначені експериментально та теоретично у молекулі C_{60} , становлять $1,455 \pm 0,005$ Å (для одинарного (5,6)-зв'язку) та $1,391 \pm 0,009$ Å (для подвійного (6,6)-зв'язку) [6]. Розрахунки у програмі Гаусіан для молекули C_{60} дали значення, відповідно, $1,464$ Å та $1,385$ Å. При формуванні комплексу довжини зв'язків на молекулі як подвійних так і одинарних зменшуються. З віддаленням від хімічного зв'язку у комплексі з оловом довжини одинарних та подвійних зв'язків змінюються від $1,498$ до $1,355$ Å. Довжина розірваного подвійного зв'язку біля присланого атома Sn становить $1,57$ Å.

Нерівномірне зменшення довжин зв'язків внаслідок присланого атома Sn до C_{60} приводить до зміни геометрії молекули C_{60} , зникнення її симетрії, що проявляється у коливних спектрах, рис. 3. Відомо, що зі 176 коливних мод молекули C_{60} лише 46 є активними [6]. Висока симетрія молекули приводить до виродження коливних мод, які для коливань типу $(a_g, a_g), (f_{1g}, f_{1g}, t_{2g}, t_{2g}), (g_g, g_g)$ є відповідно, нуль-, три-, чотирикратно виродженими, а коливання типу h_g п'ятикратно вироджене. Тому у спектрі ІЧ-поглинання молекул активними є чотири коливні моди $F_u(1-4)$, рис. 3а, а спектр КРС для плівки C_{60} характеризується 10 активними коливними модами, дві з яких $A_g(1,2)$, та вісім коливань типу H_g , рис. 3б. У випадку пониження симетрії при формуванні комплексу має місце не лише зняття виродження, а також поява раніше мовчазних мод, обертонів, накладання різних мод, у тому числі поява у спектрі КРС коливань, активних в ІЧ-спектрі і, навпаки, виникнення при ІЧ поглинанні мод, властивих КРС спектру, рис. 3г, д.

Як видно з рисунка у спектрах ІЧ-поглинання відбувається розщеплення мод $F_u(1-4)$. У спектрах КРС під'єднання атома приводить до значного розщеплення коливної моди $H_g(4)$, до сильного зростання інтенсивності коливань $H_g(8)$. Водночас, коливні моди $A_g(1)$, $H_g(1-3, 5, 7)$ мають малі значення інтенсивності або відсутні. Мода $A_g(2)$ зсувається у бік менших частот, що типово для полімеризованих лужними металами плівок фулеридів [8].

Суттєва трансформація відбувається у розподілі електронних рівнів комплексу у порівнянні з відповідним розподілом молекули C_{60} , рис. 4. Розрахунки електронної структури молекули C_{60} методом Хартрі-Фока

підтверджують розрахунки іншими методами [9]. Як відомо, молекула фулерену має 180 молекулярних орбіталей (МО) та 60 незайнятих або віртуальних МО [9].

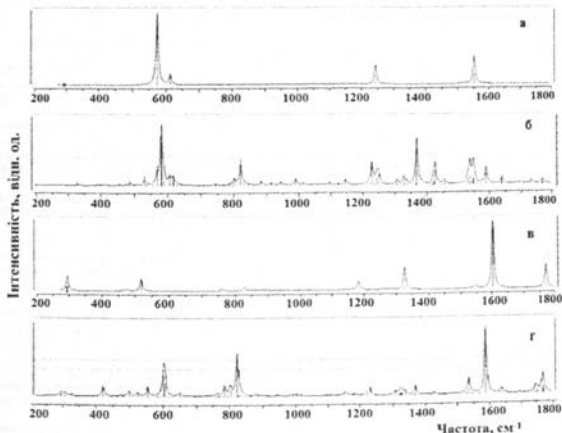


Рис. 3. Спектри ІЧ-поглинання (а, в) та комбінаційного розсіяння світла (б, г) молекули C₆₀ та комплексу C₆₀-Sn(6,6), відповідно.

60 МО (30 зайнятих та 30 віртуальних) можна розглядати як тип π, решта – σ типу, що узгоджується з результатами робіт проведених раніше [9].

На рис. 4. наведено розподіл електронних рівнів за енергіями молекули C₆₀ основному стані, отриманий у результаті квантово-хімічних розрахунків.

Найвища заповнена молекулярна орбіталь (НОМО) є п'ятикратно виродженою, а наступна тобто найнижча незаповнена (LUMO) має кратність виродження рівну трьом. Нижче на 1,69 eV розташована НОМО-1 орбіталь і на

2,05 eV НОМО-2 з симетрією h_g та g_g, відповідно. Аналогічно приблизно на 1,69 eV нижче за LUMO розташована LUMO-1, що складається з двох близьких за енергією рівнів симетрії h_g і g_g, приблизно на такий же відстані вище за LUMO розташована LUMO+1 симетрії t_{1g}, що повністю відповідає результатам інших авторів [9].

Між останньою заповненою і першою незаповненою орбітальною (НОМО- LUMO) існує енергетична щільна, яка, згідно даних розрахунків рівня 7,7 eV. Для твердотільних C₆₀ при кімнатній температурі (ГЦК-фаза), визначена експериментально ширина забороненої зони складає приблизно 1,5-2,5 eV [6].

При присдианні атома металу відбувається розщеплення вироджених електронних рівнів, навіть глибоких остовних рівнів, що енергія яких близько 300 eV. Усі рівні стають невиродженими. Більше того, за рахунок розщеплення електронних станів відбувається зменшення ширини HOMO-LUMO до значення 6,4 eV.

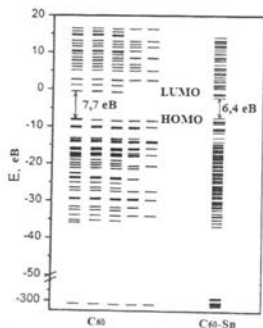


Рис.4. Розподіл енергетичних рівнів молекули C_{60} та комплексу $C_{60}-Sn(6,6)$.

Експериментально це повинно проявлятися у зміні типу провідності плівок фулеридів, легованих оловом у напрямку падіння опору.

Висновки

За допомогою квантово-хімічних розрахунків показано, що молекулі фулерену, біля якої знаходиться атом олова, енергетично вигідно об'єднатися з ним зі встановленням хімічного зв'язку. Таке об'єднання можливе за рахунок розриву подвійного зв'язку на межі двох шестикутників молекули з формуванням комплексу $C_{60}-Sn(6,6)$. Присдиання атома олова приводить до зміни геометрії молекули

фулерену, пониження її симетрії молекули C_{60} , що проявляється у розщепленні її вироджених коликових та електронних станів. Спостерігається зменшення енергетичної щільності, що пояснює експериментальні дані з падіння опору плівок фулеритів C_{60} , легованих оловом.

Список використаних джерел

1. Wagberg T. ^7Li and ^{23}Na MAS solid state NMR studies of Na_4C_{60} and Li_4C_{60} // *J. of Phys. and Chem. of Solids* – 2006. – Vol. 67. – P. 1091-1094.
2. Troshin P.A. Organic chemistry of fullerenes: the major reactions, types of fullerene derivatives and prospects for their practical use // *Rus. Chem. Rev.* – 2008. – V. 77. – P. 305-349.
3. Baran L.V. Struct-phase transitions in tin-fullerite films // *FTT.* – 2006. V. 48. P. 1336-1339. (in Russian).
4. Xie R. H. First-principles calculations of structural, electronic, vibrational, and magnetic properties of C_{60} and $C_{60}N_{12}$: A comparative study // *J. of Chem. Phys.* – 2003. – V. 118. – №19. – P. 8621-8634.
5. Pavlenko O.L., Kulish M.P., Dmytrenko O.P., Chemical interaction and polymerization in $C_{60}-Sn$ films// *Nanosystems, nanomat., nanotech.* – 2011. – V.9. №2. – P. 291-306. (in Ukrainian).
6. Makarova T.L. Электрические и оптические свойства мономерных и полимеризованных фуллеренов // *FTP* – 2001. – V. 35. – P. 257-293. (in Russian).
7. D.S. Bethune, G. Meijer, W.C. Tang Vibrational Raman and infrared spectra of chromatographically separated C_{60} and C_{70} fullerene clusters// *Chem. Phys. Letters* – 1991. – Vol. 179. – P. 181-186.
8. Rodrig R. Raman spectroscopy and X-ray diffraction studies of the single- and double bonded two-dimensional polymers $Na_xLi_{4-x}C_{60}$ // *J. of Phys. and Chem. of Solids* – 2004. – Vol. 65. – P. 355-357.
9. Orlandi G. Electronic states and transitions in C_{60} and C_{70} fullerenes // *Photochem. Photobiol. Sci.* – 2002. – V. 1. – P. 289-308.

Надійшла до редколегії 29.11.12.

Підписано до друку 19.12.2012.
Формат 70х100^{1/16}. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 24,18. Наклад 350 прим.
Зам. № 172.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел./факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail iaa@dstati.kiev.ua

0101010101010101
0101010101010101
0000101010101010
0101010101010101
0101010101010101
0010101010101010
0101010101010101
0000101010101010
0101010101010101
0101010101010101
0000101010101010
0000101010101010
0000101010101010
0000101010101010
0101010101010101
0000101010101010
0000101010101010
0101010101010101
0000101010101010
0000101010101010
0101010101010101
0000101010101010
0000101010101010

