Kyiv National Taras Shevchenko University

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 3

Kyiv National Taras Shevchenko University

Kyiv National Taras Shevchenko University

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №3 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №3, 2012
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.,
заступник головного редактора, відповідальний за видання;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Данилов Вадим Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Левитський Сергій Михайлович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Маципура Володимир Тимофійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-036-4
ISSN 1812-5409

Kyiv National Taras Shevchenko University

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Безушак О.Е., Беляев А.А., Зайцев М.В. Экспоненты тождеств алгебр с присоединенной единицей 7

Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку двох пар уявних спряжених коренів характеристичного рівняння 10

Гнатюк О., Головащук Н. Диференціально градуйовані категорії з додатно визначеною квадратичною формою 15

Городня Д.М. Про єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою 20

Прокоф'єв П.Г. Про плоскі локально нільпотентні диференціювання 22

Проскурін Д.П., Якимів Р.Р. Про інтегровані зображення деформованих CCR 27

Рагуліна О.Ю. Задача вибору оптимального рівня умовної франшизи в класичній моделі ризику 31

Расвська І.Ю., Расвська М.Ю., Сисак Я.П. Локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера-Морено 39

Юшенко Г.Ю. Lp-розв'язки інтегрального рівняння з ядром типу згортки на дійсній осі 47

Ямненко Р.Є. Моделювання згладженого процесу броунівського мосту із просторів Орліча за допомогою вейвлет-розкладів 50

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНИКА

Балога С.І., Король І.І. Дослідження асимптотичної еквівалентності одного класу нелінійних систем диференціальних рівнянь 57

Богданов В.Р. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування просторової задачі із урахуванням процесу розвантаження матеріалу 61

Горошко О.О., Кикоть С.В. Вимушенні коливання гнучкого трубопроводу з потоком рідини та нульовим початковим натягом при силовому збудженні 67

Кревневич А.П. Про розв'язання диференціального рівняння з випадковим збуренням, не розв'язаного відносно похідної 71

Лагода В.А. Існування інваріантних множин нелінійних розширень динамічних систем на некомпактному многовиді 75

Лимарченко В.О. Задача про вимушені нелінійні коливання трубопроводу з швидкісною течією рідини 79

Мейш В.Ф., Мельник В.М. До розрахунку неосесиметричних коливань конічних оболонок змінної товщини при нестаціонарних навантаженнях 83

Паньков А.В. Глобальний атрактор модифікованої 3D системи Бенарда 87

П'ятецька О.В. Вплив розміщення актуаторів на ефективність активного демпфування коливань в'язкопружних пластин 91

Страх О.П. Обмежені розв'язки динамічних систем на часовій шкалі 95

Таран Є.Ю., Каліон В.А., Мельник О.О. Магнітореологія розведених суспензій неброунівських магнітних видовжених частинок 99

Фекета П.В., Перестюк Ю.М. Про інваріантні тори багаточастотних систем у випадку Лаппо-Данилевського 105

Яременко М.І. Дослідження незалежності області визначення локального генератора напівгрупи стиску від фільтруючої множини 111

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ИНФОРМАТИКА

Галкін О.А. Інтервальна оцінка ОВМ 117

Галкін О.В. Формалізація функціональних мов програмування на основі лямбда числення 123

Галкіна О.А. Стохастичне програмування у фінансовому моделюванні 129

Глибовець М.М., Муженко Я. П., Сидоренко М.О. Алгоритм та онлайн-застосування пошуку осередків зацікавленості за обраною предметною областю 133

Голік А.О. Формування векторів ознак: реалізація алгоритмів розпізнавання мовної інформації засобами паралельних обчислень 141

Гончаренко В.Ю., Лимарченко О.С. Динамічна модель сумісного перехідного руху циліндричного резервуару з рідиною 151

Єфіменко А.А. Задача оптимального керування екстенсивним розвитком мережі інформаційно-комунікаційного підприємства 155

Жирицький В.П. Методи оцінювання надійності тестів у системі дистанційного навчання «VITAVA» 159

Івохін Є.В. Про організацію автоматичного тестування баз даних 163

Карнаух Т.О. Метрично-можливісний підхід до задач розпізнавання 167

Клюшин Д.А., Алексеєнко В. В. Статистичні властивості довірчих еліпсів, побудованих за допомогою афінних перетворень прямокутників 173

Королік Р.П., Пічкур В.В. Оцінка множини початкових умов множинної дискретної системи 179

Kyiv National Taras Shevchenko University

Кулага А.А. Алгоритми обчислення білінійного цифрового підпису наосліп 183
Лялецький О.О. Декартові властивості категорії умовно повних векторних решіток 189
Марченко О.О. Алгоритм інтеграції знань з електронних енциклопедій у семантичні онтологічні мережі 193
Мащенко С.О. Задача диз'юнктивного програмування з нечіткою множиною обмежень 199
Мащенко С.О., Бовсунівський О.М. Задача вибору альтернатив з нечіткою множиною чітких цілей 203
Мічута О.Р., Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання впливу багатокомпонентних хімічних розчинів та неізотермічних умов на фільтраційну консолідацію тіла грунтової греблі 209
Нікітченко М. С., Криволап А.В. Семантичні властивості монотонних логік Флойда-Хоара 215
Поляков С.А., Сільвейструк Л.М., Шишацька О.В. Класифікація моделей даних 223
Россада Т.В. Аналіз, моделювання та дослідження синонімії у формальних мовах 227
Семенів О.В., Черемних С.О., Яценко В.О. Прогнозування космічної погоди на основі адаптивної процедури статистичного навчання 233
Скобелєв В.В. Аналіз автоматів на параметризованих многовидах над асоціативним кільцем 239
Соломяюк І.Г. До задачі смугової класифікації цифр та букв алфавіту 245
Терешенко В.М. Побудова мінімального шляху на многогранній поверхні в R^3 249
Терешенко В.М., Трегубенко А.С. Пошук мінімального зв'язаного шляху у простому многокутнику 253
Уманський В. І. Розробка алгоритму локалізації та розпізнавання машинозчитуваної зони подорожніх документів 257
Фісуненко А.Л. Модель мультиагентної системи обробки візуальної інформації для вирішення задач реконструкції 261
Шарапов М.М., Наврузов Ф., Нужна А., Протопоп Ю. Ймовірносні методи і технології Public Relations 265
Швець О.Ф. Особливості числового моделювання рівнянь чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору 269
Шкільняк О.С. Семантичні аспекти транзиційних композиційно-номінативних модальних логік 273
Шкільняк С.С. Спеціальні секвенційні числення логік однозначних квазіарних предикатів 279

РАДІОФІЗИКА

Балінський О.М., Судаков О.О., Платонов М.О. Пошук низькомолекулярних лігандів доменів білок-білкової взаємодії із застосуванням методів геометричного молекулярного моделювання 287
Голобородько А.О. Вплив апертури періодичних структур на ефект Талбота 292
Голобородько Н.С., Ільченко В.В. Про можливість аналізу статистичними методами інтегральних змін вольт-амперних характеристик гетероструктури SnO2-p-Si для різного складу оточуючого газового середовища 296
Григорук В.І., Онисько Ю.Т., Слінченко Ю.А. Удосконалення методики створення пасивних волоконних відгалужувачів X- та Y- типів з багатомодових волоконних світловодів 300
Іванісік А. І., Ісасенко О. Ю., Коротков П. А., Понежа Г. В. Вплив наночастинок благородних металів на ефективність вимушеного комбінаційного розсіювання 304
Іванюта О. М. Електрофізичні властивості модифікованих вуглецевих нанотрубок. 309
Корінь С.А. Одночасна нейромережева обробка пов'язаних даних при експериментальних параметричних вимірюваннях 313
Находкін.М.Г., Федорченко М.І. Адсорбція Sb на поверхні Si(113) 317

СУЧАСНА ФІЗИКА

Боровий М.О., Гололобов Ю.П., Сальнік А.В. Фотоіндуковані зміни параметрів елементарної комірки кристалів пруститу в діапазоні температур 100 – 300 К 325
Гаврюшенко Д.А. Вплив радіаційного опромінення на структуру конденсованих систем 329
Драпіковський М.А., Заболотний М.А., Барабаш Ю.М., Куліш М.П., Дмитренко О.П. Кінетика фотоіндукованих електронних переходів в наноструктурах бактеріальних реакційних центрів 333
Єщенко О.А. Просторова та поляризаційна анізотропія збудження поверхневих плазмонних поляритонів у масивах паралельних металевих нанодротів 343
Лерман Л.Б., Породько Л. В. Лазерний нагрів твердого тіла в умовах кон-вективного теплообміну 353
Прокопець В. М., Кондратенко С. В., Лісова І. О. Методика вимірювань кінетики фотопровідності напівпровідникових гетероструктур 359
Стащук В.С., Стукаленко В.В., Філіпов Я.В., Стащенко А.О., Полянська О.П., Черниха С.О. Оптичні властивості системи: плівка оксиду алюмінію-мідь 363
Якунов А.В., Кузькова Н.В. Флуктуації інтенсивності світла, розсіяного на супрамолекулярних неоднорідностях у рідинах з водневими зв'язками 367

Kyiv National Taras Shevchenko University

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Kyiv National Taras Shevchenko University

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 512.8

О.Е.Безущак, к.ф.-м.н., доцент,
А.А.Беляев, к.ф.-м.н., доцент,
М.В.Зайцев, д.ф.-м.н., професор

Экспоненты тождеств алгебр с присоединенной единицей

Изучаются числовые характеристики, связанные с тождествами неассоциативных алгебр. Основное внимание уделяется вопросу об изменении PI-экспоненты алгебры после присоединения к ней внешней единицы.

Построен новый пример четырехмерной алгебры, у которой указанная процедура увеличивает PI-экспоненту на единицу.

Ключевые слова: неассоциативные алгеры, тождества, коразмерности.

O.O.Bezushchak, Ph.D., Associate Professor,
A.A.Belyaev, Ph.D., Associate Professor,
M.V.Zaicev, Ph.D.

Exponents of identities of algebras with the added unit

Numerical descriptions, related to the identities of nonassociative algebras, are studied. The basic attention is spared of a question on changing PI-exponent of the algebra after tacking to it of external unit.

The new example of four-measuring algebra is built with the procedure of increasing of PI-exponent on unit.

Key words: nonassociative algebras, identities, co-dimensions.

E-mail: bezusch@univ.kiev.ua, al-al-belyaev@mail.ru, zaicevmv@mail.ru
Статью представил доктор физико-математических наук, профессор Кириченко В.В.

В статье исследуются числовые характеристики тождеств конечномерных алгебр. Все необходимые сведения по тождествам в алгебрах и связанным с ними числовым характеристикам можно найти в монографиях [1], [2]. С каждой алгеброй A над полем нулевой характеристики можно связать целочисленную последовательность $\{c_n(A)\}, n = 1, 2, \ldots$, называемую последовательностью коразмерностей тождеств A. Если A конечномерна, $\dim A = d < \infty$, то $\{c_n(A)\} \leqslant d^{n+1}$ (см.[3]), следовательно, последовательность $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}$ является ограниченной и имеет верхний и нижний пределы, называемые верхней и нижней PI-экспонентами A соответственно: $\overline{exp}\ (A) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$, $\underline{exp}\ (A) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$. Если верхний и нижний пределы совпадают, то у последовательности $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}$ есть обычный предел, называемый экспонентой, или PI-экспонентой A: $exp\ (A) = \overline{exp}\ (A) = \underline{exp}\ (A)$.

Одной из основных проблем в теории числовых инвариантов тождеств линейных алгебр является вопрос о существовании и возможных диапазонах значений PI-экспонент. В 80-х годах прошлого века Амицур выдвинул гипотезу о существовании и целочисленности PI-экспоненты *любой* (а не только конечномерной) ассоциативной PI-алгебры. Эта гипотеза была подтверждена в работах [4], [5]. Позднее гипотеза Амицура подтвердилась и для широкого класса других конечномерных алгебр — лиевских [6], йордановых, альтернативных и некоторых других [7]. Тем не менее, уже в классе супералгебр Ли построены примеры конечномерных алгебр с дробной PI-экспонентой [8]. Отметим также, что в общем случае для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, существуют алгебры с $exp\ (A) = \alpha$ [9]. Кроме того, к настоящему времени нет ни одного примера, когда $\overline{exp}\ (A) \neq \underline{exp}\ (A)$. Достаточно новым направлением является исследование взаимосвязи PI-экспонент различных типов тождеств — ассоциативных, лиевских, инволютивных, собственных, а также вопрос об изменении PI-экспоненты при присоединении к алгебре внешней единицы. Первые результаты в данном направлении были получены в [10] и в [11]. Позднее эти результаты были уточнены в [12] для случая групповых колец конечных групп.

В данной заметке основное внимание уделяется алгебрам с единицей, в частности, вопросу об изменении PI-экспоненты при присоединении внешней единицы. Из результатов [4], [5] легко выводится, что в ассоциативном слу-

© О.Е. Безущак, А.А. Беляев, М.В.Зайцев, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

чае при присоединении внешней единицы PI-экспонента либо не изменяется, либо увеличивается на 1. Для неассоциативных алгебр эти вопросы впервые рассматривались в [13] и в [14]. В [13] в, частности, построен единственный к настоящему времени пример конечномерной алгебры A с $exp\,(A) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ и с $exp\,(A^1) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 1$, где A^1 — алгебра, полученная из A присоединением внешней единицы. В связи с этим в [13] был поставлен вопрос: верно ли что присоединение единицы всегда либо не изменяет PI-экспоненту, либо увеличивает ее на 1?

Основная цель представленной работы — анонсировать построение еще одного примера, на этот раз четырехмерной простой алгебры W, для которой $exp\,(W^1) = exp(W) + 1$. Но начнем мы со следующего замечания.

В работе [14] был построен первый пример четырехмерной простой алгебры W, у которой $exp\,(W)$ — дробная величина. Сначала мы покажем, что пример из [14] не подходит для наших целей. Докажем одно несложное промежуточное утверждение.

Лемма 1. *Пусть A — алгебра с единицей, и A^1 получена из A присоединением внешней единицы. Тогда $c_n(A^1) = c_n(A)$ для всех $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Напомним, что коразмерность $c_n(A)$ определяется как максимальное число полилинейных полиномов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ в абсолютно свободной алгебре, линейно независимых по модулю системы тождеств алгебры A.

Очевидно, что $c_n(A) \leqslant c_n(A^1)$ поскольку A — подалгебра в A^1. Докажем обратное неравенство. Пусть $c_n(A^1) = t$ и $f_1, \ldots, f_t$ — система полилинейных полиномов, линейно независимых по модулю тождеств алгебры A^1. Другими словами, ни при каком наборе скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ из основного поля многочлен

$$g = g(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_t f_t$$

не является тождеством в A^1. Для доказательства леммы достаточно показать, что и для A многочлен g не является тождеством.

Для этого обозначим через e единицу алгебры A, а через 1 — внешнюю единицу и зафиксируем некоторый базис B алгебры A. Тогда $B^1 = B \cup \{1\}$ — базис алгебры A^1, и поскольку g не является тождеством A^1, существует подстановка некоторых $b_1, \ldots, b_n \in B^1$ вместо $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, при которой $g(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ в A^1.

Рассмотрим три возможных случая. Если все $b_1, \ldots, b_n$ лежат в A, то g — не тождество для A. Если все $b_1, \ldots, b_n$ равны 1, то $g(b_1, \ldots, b_n) = \alpha \cdot 1$, где α — ненулевой скаляр. При этом $g(e, \ldots, e) = \alpha \cdot e \neq 0$, т.е. снова g не является тождеством A. Наконец, если часть b_i не лежит в B, например, $b_1 = \ldots = b_k = 1$, а $b_{k+1}, \ldots, b_n \in B$, то

$$g(\underbrace{e, \ldots, e}_{t}, b_{k+1}, \ldots, b_n) =$$

$$= g(\underbrace{1, \ldots, 1}_{t}, b_{k+1}, \ldots, b_n) \neq 0,$$

и снова g — не тождество A, и лемма доказана. □

Из доказанной леммы легко вытекают два следствия.

Следствие 1. *Пусть A — алгебра с единицей, а A^1 получена из A присоединением внешней единицы. Тогда*

$$\underline{exp}\,(A)^1 = \underline{exp}\,(A), \quad \overline{exp}\,(A)^1 = \overline{exp}\,(A),$$

и если $exp\,(A)$ существует, то $exp\,(A^1) = exp\,(A)$.

Следствие 2. *Пусть W — конечномерная простая алгебра с единицей. Тогда $exp\,(W^1) = exp\,(W)$.*

Следствие 2 вытекает из следствия 1, поскольку у конечномерной простой алгебры PI-экспонента всегда существует (см. [7]).

Теперь мы перейдем к построению нового четырехмерного примера.

Пусть W — алгебра с базисом $\{e_{-1}, e_0, e_1, e_2\}$, умножение в котором задается следующим образом: $e_i e_j = e_{i+j}$, если $-1 \leqslant i + j \leqslant 2$, $i \leqslant j$, и $e_i e_j = 0$ во всех остальных случаях. Следующие две теоремы мы приведем без доказательств в силу их больших объемов.

Теорема 1. *Алгебра W является простой, а ее PI-экспонента равна максимуму функции*

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{y_1^{y_1} y_2^{y_2} y_3^{y_3} y_4^{y_4}},$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

где максимум берется по области

$$\begin{cases} y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant y_4 & \geqslant & 0\,, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & = & 1\,, \\ y_1 - y_3 & = & 2y_4\,. \end{cases}$$

Аналитическое вычисление $exp\ (W)$ не представляется возможным. Однако похожая численная задача решалась в работе [15] с той лишь разницей, что условие $y_1 - y_3 = 2y_4$ там заменено условием $y_1 - y_3 \geqslant 2y_4$. При этом там было показано, что максимум достигается при равенстве $y_1 - y_3 = 2y_4$ и равен $F_{max} \approx 3.610718614$.

Для алгебры с присоединенной единицей нами получен следующий результат.

Теорема 2. *Алгебра $W^\sharp$ является пятимерной простой алгеброй с единицей. Ее PI-экпонента равна максимуму функции*

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{y_1^{y_1} y_2^{2y_2} y_3^{y_3} y_4^{y_4}}\,,$$

где максимум берется по области

$$\begin{cases} y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant y_4 & \geqslant & 0\,, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 & = & 1\,, \\ y_1 - y_3 & = & 2y_4\,. \end{cases}$$

В частности, $exp\ (W^\sharp) \approx 4.610718613$.

Оценка для $exp\ (W^\sharp)$ также была получена численно, и с большой точностью можно считать, что $exp\ (W^\sharp) \approx exp\ (W) + 1$. Расхождение в последнем знаке может возникать либо за счет разных методов вычислений, либо из-за погрешности вычислений.

Література

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли.- М.: Наука, 1985.

2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs V. 122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

3. A. Giambruno and A. Regev, Wreath products and P.I. algebras, J. Pure Applied Algebra, **35** (1985), 133-149.

4. Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finitely generated associative algebras.- Advances in Mathematics. 1998.V.140.P.145-155.

5. Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate// Adv. Math. 1999. **142**. 221–243.

6. Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли// Изв. РАН. Сер. матем. 2002. **66**, № 3. 23–48.

7. A. Giambruno, I Shestakov and M. Zaicev. Finite dimensional nonassociative algebras and codimension growth.- Adv. Appl. Math., 2011, 47, 125-139.

8. A. Giambruno, M. Zaicev. On codimension growth of finite dimensional Lie superalgebras. J. London Math. Soc., 2012, 95, 534-548.

9. Giambruno A., Mishchenko S. P., Zaicev M. V. Codimensions of Algebras and Growth Functions// Adv. Math. 2008. **217**. 1027–1052.

10. A.Giambruno, M.Zaicev. Lie, Jordan and proper codimensions of associative algebras.- Rend. Circ. Matem. di Palermo. 2008.

11. A.Giambruno, M.Zaicev. Proper identities, Lie identities and exponential codimension growth.- J.Algebra, 2008, 320:5. 1933-1962.

12. О.Е. Безущак, М.В. Зайцев, Экспоненты тождеств групповых колец.- Матем. заметки, 2011, том 89, выпуск 5, .

13. Зайцев М.В. Тождества конечномерных унитарных алгебр.- Алгебра и логика, 2011, 50:5, 563-594.

14. Зайцев М.В., Реповш Д. Четырехмерная простая алгебра с дробной PI-экспонентой.- Мат. Заметки (в печати)

15. Веревкин А.Б., Зайцев М.В., Мищенко С.П. Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр.- Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, 2011, № 2, 36-39.

Надійшла до редколегії 06.03.2012 р.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21

О.Д. Борисенко, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко, к.ф.-м.н., доцент

Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку двох пар уявних спряжених коренів характеристичного рівняння

У роботі вивчається асимптотична поведінка автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними зовнішніми збуреннями типу "білого" та Пауссонівського шумів. Вивчається випадок двох пар уявних спряжених коренів характеристичного рівняння. Розглянуто випадок внутрішнього резонансу.

Ключові слова: метод усереднення, автономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння, внутрішній резонанс.

O.D. Borysenko, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko, Ph.D., Associate Professor

Limit behavior of autonomous fours order oscillating system under the action of random perturbations in the case of two pairs of imaginary adjoined roots of characteristic equation

The asymptotic behavior of autonomous oscillating system describing by differential equation of fours order with small non-linear external perturbations of "white noise" and "Poisson noise" types is studied. It is studied the case of two pairs of imaginary adjoined roots of characteristic equation. The case of inner resonance is considered.

Key Words: averaging method, autonomous oscillating system, stochastic differential equation, inner resonance.

odb@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Застосування методу усереднення у випадку малих випадкових збурень типу "білого шуму" у коливній системі другого порядку розглядалось у роботі [1]. Автономні і неавтономні коливні системи другого та третього порядку під дією малих збурень типу "білого шуму" та "Пуассонівського шуму" вивчалися у роботах [2] – [6]. У роботах [7], [8] вивчалась поведінка при $\varepsilon \to 0$, автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \varepsilon^{k_1} f_1(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + f_\varepsilon(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) \quad (1)$$

з невипадковими початковими умовами $x(0) = x_0^{(1)}$, $x'(0) = x_0^{(2)}$, $x''(0) = x_0^{(3)}$, $x'''(0) = x_0^{(4)}$, де $\varepsilon > 0$ – це малий параметр, $f_\varepsilon(x, x', x'', x''')$ – це випадкова функція, така що

$$\int_0^t f_\varepsilon(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s))\, ds = \varepsilon^{k_2} \int_0^t f_2(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s))\, dw(s) + \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_R f_3(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s), z)\, \tilde{\nu}(ds, dz),$$

$k_i > 0, i = 1, 2, 3$; $f_i, i = 1, 2, 3$ – це невипадкові функції; $w(t)$ – це стандартний вінерів процес; $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\nu(dt, dy)$ – це міра Пуассона незалежна від $w(t)$; $\Pi(A)$ – це скінченна міра на борелевих множинах в R. Було розглянуто випадки:
1) ([7]) $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_1 b_2 > b_3$, $b_1^2 > 4(b_2 - \frac{b_3}{b_1})$, $b_1^2 b_4 = b_3(b_1 b_2 - b_3)$. У цьому випадку характеристичне рівняння має корені

$$\lambda_1 = -\eta_1,\ \lambda_2 = -\eta_2,\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \text{ де}$$
$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2}\left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4\left(b_2 - \frac{b_3}{b_1}\right)}\right),\ \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}.$$

2) ([8]) $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > b_1 b_3/4$, $b_1^2 b_4 = b_3(b_1 b_2 - b_3)$. У цьому випадку характеристичне рівняння має корені

$$\lambda_1 = -\eta + i\nu,\ \lambda_2 = -\eta - i\nu,\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \text{ де}$$
$$\eta = \frac{b_1}{2},\ \nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_1(4b_4 - b_1 b_3)}{b_3}},\ \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}.$$

© О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Допоміжні результати

Із [9], використавши очевидні зміни ми одержимо такі результати

Лема 1. *Нехай для кожного $x \in \mathbb{R}^d$ існує*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)\,dt = \bar{f}(x),$$

функція $\bar{f}(x)$ є обмеженою і неперервною, функція $f(t,x)$ є обмеженою і неперервною по x рівномірно відносно (t,x) у кожній області $t \in [0,\infty), |x| \leqslant K$, випадкові процеси $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$, $\eta(t) \in \mathbb{R}$ є неперервними, тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon}+\eta(s),\xi(s)\right)ds = \int_0^t \bar{f}(\xi(s))\,ds$$

майже напевне для $\forall t \in [0,T]$.

З а у в а ж е н н я. Нехай функція $f(t,x,z)$ обмежена і рівномірно неперервна по x відносно $t \in [0,\infty)$ і $z \in \mathbb{R}$ у кожній компактній множині $|x| \leqslant K, x \in \mathbb{R}^d$. Нехай $\Pi(\cdot)$ – це скінченна міра на σ-алгебрі борелевих множин в $\mathbb{R}$ і нехай $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x,z)\,dt = \bar{f}(x,z)$, для кожного $x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}$, де функція $\bar{f}(x,z)$ обмежена, рівномірно неперервна по x відносно $z \in \mathbb{R}$ у кожній компактній множині $|x| \leqslant K$. Тоді для неперервних випадкових процесів $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$ і $\eta(t) \in \mathbb{R}$ маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} f\left(\tfrac{t}{\varepsilon}+\eta(s),\xi(s),z\right)\Pi(dz)ds = \int_0^t\int_{\mathbb{R}}\bar{f}(\xi(s),z)\,\Pi(dz)ds.$$

Основні результати

Ми будемо досліджувати асимптотичну поведінку коливної системи (1) при $\varepsilon \to 0$ у випадку коли існують стійкі гармонічні коливання у системі при умові $\varepsilon = 0$. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0.$$

У даній роботі ми розглянемо випадок: $b_1 = 0$, $b_3 = 0$, $b_2 > 0$, $b_4 > 0$, $b_2^2 > 4b_4$. Характеристичне рівняння має корені

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1,\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \text{ де}$$
$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_4}\right),$$
$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_4}\right).$$

Рівняння (1) ми будемо розуміти як систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt,\ i = \overline{1,3} \\ dy_4(t) &= [-(b\cdot y(t)) + \varepsilon^{k_1} f_1(y(t))]dt + \\ &\quad +\varepsilon^{k_2} f_2(y(t))dw(t) + \\ &\quad +\varepsilon^{k_3}\int_{\mathbb{R}} f_3(y(t),z)\tilde{\nu}(dt,dz), \end{aligned} \tag{2}$$

$$y(t) = \{y_i(t)\}_{i=\overline{1,4}}, b = (b_4, b_3, b_2, b_1),$$
$$y_i(0) = x_0^{(i)},\ i = \overline{1,4}.$$

Тут і надалі $(b\cdot y)$ означає скалярний добуток векторів y і b.

У випадку, який ми вивчаємо, рівняння (1) при $\varepsilon = 0$ має загальний розв'язок у вигляді $x(t) = A_{11}\cos\omega_1 t + A_{12}\sin\omega_1 t + A_{21}\cos\omega_2 t + A_{22}\sin\omega_2 t$.

Позначимо

$$A(t) = (A_{11}(t), A_{12}(t), A_{21}(t), A_{22}(t)),$$
$$\Phi(t) = (\cos\omega_1 t,\ \sin\omega_1 t,\ \cos\omega_2 t,\ \sin\omega_2 t)$$

Розглянемо таке представлення процесу $y(t)$:

$$y_i(t) = \left(A(t)\cdot\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}\Phi(t)\right),\ i = \overline{1,4}. \tag{3}$$

Розв'язавши цю систему відносно процесу $A(t) = (A_{11}(t), A_{12}(t), A_{21}(t), A_{22}(t))$ і застосувавши формулу Ітo, ми одержимо систему стохастичних диференціальних рівнянь:

$$dA(t) = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\Psi(\omega_1 t, \omega_2 t)\,dH(t), \tag{4}$$

де

$$\Psi(\phi_1,\phi_2) = \left(\frac{\sin\phi_1}{\omega_1}, -\frac{\cos\phi_1}{\omega_1}, -\frac{\sin\phi_2}{\omega_2}, \frac{\cos\phi_2}{\omega_2}\right)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= \varepsilon^{k_1}\tilde{f}_1(\omega_1 t,\omega_2 t,A(t))dt + \\ &\quad +\varepsilon^{k_2}\tilde{f}_2(\omega_1 t,\omega_2 t,A(t))dw(t) + \\ &\quad +\varepsilon^{k_3}\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}_3(\omega_1 t,\omega_2 t,A(t),z)\tilde{\nu}(dt,dz), \end{aligned}$$

де $\tilde{f}_i(\omega_1 t,\omega_2 t,A(t))$, $i = 1,2$ одержано з $f_i(y(t))$, $i = 1,2$ і $\tilde{f}_3(\omega_1 t,\omega_2 t,A(t),z)$ одержано з $f_3(y(t),z)$ підстановкою (3).

Kyiv National Taras Shevchenko University

Теорема 1. *Нехай* $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_1, 2k_2, 2k_3)$. *Припустимо, що функції* $f_i, i = \overline{1,3}$ *обмежені і задовольняють умову Ліпшиця відносно змінних* $y_i, i = \overline{1,4}$. *Якщо наведена нижче матриця* $\bar{\sigma}^2(A)$ *є додатно визначеною, тоді*

1. При $k_1 = 2k_2 = 2k_3$ *випадковий процес* $A_\varepsilon(t) = A(t/\varepsilon^k)$ *слабко збігається при* $\varepsilon \to 0$ *до випадкового процесу* $\bar{A}(t)$, *де* $\bar{A}(t) = (\bar{A}_{11}(t), \bar{A}_{12}(t), \bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{22}(t))$ *– це розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь*

$$d\bar{A}(t) = \bar{a}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \qquad (5)$$
$$\bar{A}(0) = (A_{11}(0), A_{12}(0), A_{21}(0), A_{22}(0)),$$

де у нерезонансному випадку, коли $\omega_1 \neq \frac{p}{q}\omega_2$, p *і* q *взаємно прості цілі числа, ми маємо*

$$\bar{a}(A) = \frac{1}{4\pi^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \times \times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}_1(\phi_1, \phi_2, A)\Psi(\phi_1, \phi_2)d\phi_1\, d\phi_2, \qquad (6)$$

$$\bar{\sigma}^2(A) = \frac{1}{4\pi^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\phi_1, \phi_2, A)\Psi^T(\phi_1, \phi_2)\Psi(\phi_1, \phi_2)d\phi_1\, d\phi_2, \qquad (7)$$

$$\tilde{f}(\phi_1, \phi_2, A) = \tilde{f}_2^2(\phi_1, \phi_2, A) + + \int_R \tilde{f}_3^2(\phi_1, \phi_2, A, z)\,\Pi(dz),$$

$\Psi^T(\phi_1, \phi_2)$ *– це вектор транспонований до вектора* $\Psi(\phi_1, \phi_2)$, $\bar{w}(t) = (w_i(t), i = \overline{1,4})$, $w_i(t), i = \overline{1,4}$ *– це незалежні одновимірні вінерові процеси.*

У резонансному випадку, коли $\omega_1 = \frac{p}{q}\omega_2$, p *і* q *деякі взаємно прості цілі числа, ми маємо*

$$\bar{a}(A) = \frac{1}{4\pi^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \times \times \sum_{np+mq=0} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}_1(\phi_1, \phi_2, A)\Psi(\phi_1, \phi_2)}{\exp\{i(n\phi_1 + m\phi_2)\}} d\phi_1\, d\phi_2, \qquad (8)$$

$$\bar{\sigma}^2(A) = \frac{1}{4\pi^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \times \sum_{np+mq=0} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(\phi_1, \phi_2, A)\Psi^T(\phi_1, \phi_2)\Psi(\phi_1, \phi_2)}{\exp\{i(n\phi_1 + m\phi_2)\}} d\phi_1\, d\phi_2 \qquad (9)$$

2. Якщо $k < k_1$ *тоді в системі (5) потрібно покласти* $\tilde{f}_1 \equiv 0$; *якщо* $k < 2k_2$, *тоді в (5) потрібно покласти* $\tilde{f}_2 \equiv 0$; *якщо* $k < 2k_3$ *тоді в (5) потрібно покласти* $\tilde{f}_3 \equiv 0$.

Доведення. Зробимо заміну $t \to t/\varepsilon^k$ у системі (4) і одержимо для процесу $A_\varepsilon(t) = (A_{11}^\varepsilon(t), A_{12}^\varepsilon(t), A_{21}^\varepsilon(t), A_{22}^\varepsilon(t)) = (A_{11}(t/\varepsilon^k), A_{12}(t/\varepsilon^k), A_{21}(t/\varepsilon^k), A_{22}(t/\varepsilon^k))$ систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dA_\varepsilon(t) = \frac{\Psi(\omega_1 t/\varepsilon^k, \omega_2 t/\varepsilon^k)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\, dH_\varepsilon(t), \qquad (10)$$

де

$$dH_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k_1-k}\tilde{f}_1(\tfrac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \tfrac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}, A_\varepsilon(t))dt + \varepsilon^{k_2-k/2}\tilde{f}_2(\tfrac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \tfrac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}, A_\varepsilon(t))dw_\varepsilon(t) + \varepsilon^{k_3}\int_R \tilde{f}_3(\tfrac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \tfrac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}, A_\varepsilon(t), z)\tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz),$$

де $w_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2}w(t/\varepsilon^k)$, $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A) = \nu(t/\varepsilon^k, A) - \Pi(A)t/\varepsilon^k$, тут A борелева множина у $\mathbb{R}$. При кожному $\varepsilon > 0$ процес $w_\varepsilon(t)$ є вінерів процес, а $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A)$ – центрована міра Пуассона незалежна від $w_\varepsilon(t)$.

Використавши умови на коефіцієнти системи (10) і властивості стохастичних інтегралів одержимо оцінки

$$\mathrm{E}\|A_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant K[1 + t^2\varepsilon^{2(k_1-k)} + t(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})],$$

$$\mathrm{E}\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^2 \leqslant K[|t-s|^2\varepsilon^{2(k_1-k)} + + |t-s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})].$$

Аналогічно для процесу

$$\zeta_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k_2-\frac{k}{2}}\int_0^t \Psi\left(\tfrac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \tfrac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}\right)\tilde{f}_2\left(\tfrac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \tfrac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}, A_\varepsilon(s)\right)dw_\varepsilon(s) + \varepsilon^{k_3}\int_0^t\int_R \Psi\left(\tfrac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \tfrac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}\right)\tilde{f}_3\left(\tfrac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \tfrac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}, A_\varepsilon(s), z\right)\tilde{\nu}_\varepsilon(ds, dz)$$

ми виводимо оцінки

$$\mathrm{E}\|\zeta_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant Kt(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}),$$
$$\mathrm{E}\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^2 \leqslant K|t-s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}).$$

Таким чином для випадкового процесу $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ виконуються умови слабкої компактності [10]

$$\lim_{h\downarrow 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{|t-s|<h} \mathrm{P}\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

для всіх $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{P}\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

а тому для довільної послідовності $\varepsilon_n \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$ існує підпослідовність $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \to 0$, $m = 1, 2, \ldots$, імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, випадкові процеси $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}(t)$ визначені на цьому імовірнісному просторі, такі що $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \to \bar{A}(t), \bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \to \bar{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_m \to 0$, і скінченновимірні розподіли $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t), \bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ співпадають з скінченновимірними розподілами процесів $A_{\varepsilon_m}(t), \zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Оскільки ми цікавимося граничною поведінкою розподілів, то ми можемо розглядати процеси $A_{\varepsilon_m}(t)$ і $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ замість процесів $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t), \bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. Із (10) одержимо стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &A_{\varepsilon_m}(t) = \\ &= A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s))\, ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t), \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned} &\alpha_\varepsilon(t, A) = \\ &= \varepsilon^{k_1-k}\Psi\left(\frac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \frac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}\right) \tilde{f}_1\left(\frac{\omega_1 t}{\varepsilon^k}, \frac{\omega_2 t}{\varepsilon^k}, A\right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що процес $\zeta_\varepsilon(t)$ – це векторнозначний квадратично інтегровний мартингал з матричною характеристикою

$$\begin{aligned} &\langle \zeta_i^\varepsilon, \zeta_j^\varepsilon\rangle(t) = \\ &= \int_0^t \sigma_i^\varepsilon(s, A_\varepsilon(s))\sigma_j^\varepsilon(s, A_\varepsilon(s))\, ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_\varepsilon(s), z)\gamma_j^\varepsilon(s, A_\varepsilon(s), z)\, \Pi(dz)ds, \end{aligned}$$

$i, j = \overline{1,4}$, де

$$\begin{aligned} &\sigma_i^\varepsilon(s, A_\varepsilon(s)) = \\ &= \varepsilon^{k_2-k/2}\Psi_i\left(\frac{\omega_1 s}{\varepsilon^k}, \frac{\omega_2 s}{\varepsilon^k}\right) \tilde{f}_2\left(\frac{\omega_1 s}{\varepsilon^k}, \frac{\omega_2 s}{\varepsilon^k}, A_\varepsilon(s)\right), \\ &\gamma_i^\varepsilon(s, A_\varepsilon(s), z) = \\ &= \varepsilon^{k_3}\Psi_i\left(\frac{\omega_1 s}{\varepsilon^k}, \frac{\omega_2 s}{\varepsilon^k}\right) \tilde{f}_3\left(\frac{\omega_1 s}{\varepsilon^k}, \frac{\omega_2 s}{\varepsilon^k}, A_\varepsilon(s), z\right), \\ &\qquad i = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Тут $\Psi_i(\phi_1, \phi_2), i = \overline{1,4}$ – це компоненти вектор-функції $\Psi(\phi_1, \phi_2)$.

Для процесів $A_\varepsilon(t)$ і $\zeta_\varepsilon(t)$ мають місце такі оцінки

$$\begin{aligned} \mathrm{E}||A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)||^4 \leqslant K[&\varepsilon^{4(k_1-k)}|t-s|^4 + \\ &+ \mathrm{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^4], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^4 \leqslant K[&(\varepsilon^{4k_2-2k} + \\ &+ \varepsilon^{4k_3-2k})|t-s|^2 + \varepsilon^{4k_3-3k/2}|t-s|^{3/2} + \\ &+ \varepsilon^{4k_3-k}|t-s|], \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}||A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)||^8 \leqslant K, \\ &\mathrm{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^8 \leqslant K. \end{aligned} \tag{14}$$

Оскільки $A_{\varepsilon_m}(t) \to \bar{A}(t), \zeta_{\varepsilon_m}(t) \to \bar{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_m \to 0$, то використовуючи (14), одержимо із (12) і (13) оцінки

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}||\bar{A}(t) - \bar{A}(s)||^4 \leqslant K(|t-s|^4 + |t-s|^2), \\ &\mathrm{E}||\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)||^4 \leqslant C|t-s|^2. \end{aligned}$$

Тому процеси $\bar{A}(t)$ і $\bar{\zeta}(t)$ задовольняють умову неперервності Колмогорова [11].

Розглянемо випадок $k_1 = 2k_2 = 2k_3$. При цій умові маємо для $i, j = \overline{1,4}$

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \tfrac{1}{t}\int_0^t \alpha_\varepsilon(s, A)ds = \bar{a}(A), \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \tfrac{1}{t}\int_0^t \Big[\sigma_i^\varepsilon(s, A)\sigma_j^\varepsilon(s, A) + \\ &+ \tfrac{1}{\varepsilon^k}\int_R \gamma_i^\varepsilon(s, A, z)\gamma_j^\varepsilon(s, A, z)\Pi(dz)\Big] ds = \bar{\sigma}_{ij}^2(A), \end{aligned} \tag{15}$$

де $\bar{a}(A) = (\bar{a}_i(A), i = \overline{1,4})$, а $\bar{\sigma}_{ij}^2(A)$, $i, j = \overline{1,4}$ – елементи матриці $\bar{\sigma}^2(A)$. При цьому у нерезонансному випадку коефіцієнти $\bar{a}(A), \bar{\sigma}^2(A)$ задаються формулами (6) і (7), а у резонансному випадку – формулами (8) і (9). Оскільки процеси $\bar{A}(t), \bar{\zeta}(t)$ неперервні, то із леми та співвідношень (11), (15) випливає

$$\bar{A}(t) = A(0) + \int_0^t \bar{a}(\bar{A}(s))ds + \bar{\zeta}(t), \tag{16}$$

де $\bar{\zeta}(t)$ – це неперервний векторно-значний мартингал з матричною характеристикою

$$\langle \bar{\zeta}_i, \bar{\zeta}_j\rangle(t) = \int_0^t \bar{\sigma}_{ij}^2(\bar{A}(s))ds, \quad i, j = \overline{1,4}.$$

Значить [12] існує вінерів процес $\bar{w}(t) = (w_i(t), i = \overline{1,4})$, такий що

$$\bar{\zeta}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{A}(s))\, d\bar{w}(s). \tag{17}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Співвідношення (16), (17) означають, що процес $\bar{A}(t)$ задовольняє рівняння (5). При виконанні умов теореми рівняння (5) має єдиний розв'язок. Таким чином процес $\bar{A}(t)$ не залежить від вибору підпослідовності $\varepsilon_m \to 0$, і скінченновимірні розподіли процесу $A_{\varepsilon_m}(t)$ збігаються до скінченновимірних розподілів процесу $\bar{A}(t)$. Оскільки процеси $A_{\varepsilon_m}(t)$ і $\bar{A}(t)$ є процеси Маркова, то використовуючи умови слабкої збіжності процесів Маркова [11] ми завершуємо доведення твердження 1) теореми.

Розглянемо випадок $k < k_1$. Тоді коефіцієнт $\alpha_\varepsilon(t, A)$, рівняння (7) збігається до нуля, при $\varepsilon \to 0$. Повторивши з очевидними змінами доведення першого твердження теореми ми одержимо доведення твердження 2).

У випадку $k < 2k_2$ в (15) ми маємо $\sigma_i^\varepsilon(t, A)\sigma_j^\varepsilon(t, A) = O(\varepsilon^{2k_2 - k})$, $i, j = \overline{1,4}$. Тому ми можемо завершити доведення теореми як і у попередньому випадку. Аналогічно доводиться твердження 2) у випадку $k < 2k_3$. □

Список використаних джерел

1. *Митропольский Ю.А., Коломиец В.Г.* О воздействии случайных сил на нелинейные колебания системы / Ю.А. Митропольский, В.Г. Коломиец // Мат. физика и нелинейная механика. – 1986. – Вып.5. – С. 23-34.

2. *Борисенко О.В.* Малые случайные возмущения в колебательных системах второго порядка / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – т.44. – №1.

3. *Борисенко О.В.* Поведение неавтономной колебательной системы под воздействием малых случайных возмущений в резонансном случае / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – т.44. – №12.

4. *Борисенко А.Д., Борисенко О.В.* Асимптотическое поведение стохастической динамической системы/ А.Д. Борисенко, О.В. Борисенко// Теория оптимальных решений. – 1999. – С.38-44.

5. *Борисенко А.Д., Борисенко О.В., Малышев И.Г.* Предельное поведение динамической системы под воздействием малых случайных возмущений в перезонансном случае / А.Д. Борисенко, О.В. Борисенко, И.Г. Малышев // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – Вип. 1. – С.70-78.

6. *Borysenko O.D., Borysenko O.V.* Limit behaviour of non-autonomous random oscillating system of third order under random periodic external disturbances in resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – Vol. 14(30). – no. 3-4. – p. 17-26.

7. *Борисенко О.Д., Борисенко О.В.* Метод усереднення для автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичних наук. – 2010. – №4. – С.11-15.

8. *Борисенко О.Д., Борисенко О.В.* Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичних наук. – 2011. – №2. – С.7-11.

9. *Borysenko O.D., Malyshev I.G.* The limit behaviour of integral functional of the solution of stochastic differential equation depending on small parameter / O.D. Borysenko, I.G. Malyshev // Theory of Stochastic Processes. – 2001. – Vol. 7(23). – no. 1-2. – p. 30-36.

10. *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход. – К.: Изд. Киевского университета, 1961. – 216 с.

11. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов, т.1 /И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1971. – 664 с.

12. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы /Ватанабэ С., Икеда Н. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Надійшла до редколегії 18.04.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 512.55

Олена Гнатюк, Наталія Головащук

Диференціально градуйовані категорії з додатно визначеною квадратичною формою

В статті розглядається диференціально градуйовані категорії з відповідними градуйованими графами та асоційованими цілими одиничними квадратичними формами. Метою роботи є звести dgc разом з її квадратичною формою до канонічного вигляду.

Ключові слова: диференціально градуйована категорія, градуйований граф, схема Динкіна

Olena Gnatiuk, Natalia Golovashchuk

Differential graded categories with positive quadratic form

The paper deals with differential graded categories with underlined graded graphs and associated integer unit quadratic forms. The aim of the work is to transform dgc together with it's quadratic form to the canonical form.

Key words: differential graded category, graded graph, Dynkin diagram

E-mail: golovash@gmail.com, olena.gnatyuk@gmail.com

The article is presented by professor Kyrychenko V.V.

1 Preliminary

The reduction algorithm of linear categories and other structures is widely used in the representation theory. This approach allows to study representations inductively, reducing the corresponding categories step by step (see [1], [2]). On the other hand, the important characteristic of represented structure is the induced quadratic form whose roots correspond to the indecomposable representations. The theory of quadratic forms is well known (see [3], [4]). We give the simultaneous reduction algorithm of transformation of the differential graded category ([5]) with special properties and the underlined unit quadratic form to the canonical form.

1.1 Graded graph

Let $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathtt{s}, \mathtt{t})$ be a directed graph with Γ_0 be a set of vertices and Γ_1 be a set of edges (arrows) equipped with two maps $\mathtt{s} : \Gamma_1 \to \Gamma_0$ and $\mathtt{t} : \Gamma_1 \to \Gamma_0$ that return start and end vertex of the edge correspondingly. The graph $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathtt{s}, \mathtt{t})$ is called *graded* (or $\mathbb{Z}$-graded) if there is the map $\deg : \Gamma_1 \to \mathbb{Z}$, such that

$$\Gamma_1^q = \bigsqcup_{\mathtt{i},\mathtt{j}\in\Gamma_0} \Gamma_1^q(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \deg^{-1}(q), \quad \Gamma_1 = \bigsqcup_{q\in\mathbb{Z}} \Gamma_1^q.$$

We denote $|x| = \deg x$ and $\hat{x} = (-1)^{|x|}x$. The graph Γ is called 0-quiver or *quiver* if $\Gamma_1^q(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \varnothing$ whenever $q \neq 0$.

Let $\mathbf{k}$ be an algebraically closed field. Given a graded graph Γ, we define a path of length m to be the formal composition $x = x_1x_2\dots x_k : \mathtt{s}(x_k) \to \mathtt{t}(x_1) := (\mathtt{i}_k \xrightarrow{x_k} \dots \mathtt{i}_1 \xrightarrow{x_1} \mathtt{i}_0)$ with $x_j \in \Gamma_1$ and $\mathtt{i}_j \in \Gamma_0$ such that $\mathtt{i}_k = \mathtt{s}(x_k)$, $\mathtt{i}_0 = \mathtt{s}(x_1)$, and $\mathtt{i}_{t-1} = \mathtt{t}(x_t) = \mathtt{s}(x_{t-1})$ for $t = k, \dots, 1$. For each $\mathtt{i} \in \Gamma_0$, we define the identity $e_\mathtt{i}$ as a trivial path of zero length starting and ending at $\mathtt{i}$. We associate $\Gamma_0 \sim \{e_\mathtt{i}\}_{\mathtt{i}\in\Gamma_0}$ and $(\mathtt{i} \xrightarrow{a} \mathtt{j}) \sim ae_\mathtt{i} = e_\mathtt{j}a$. Denote by $\mathbf{k}\Gamma$ the $\mathbf{k}$-linear path category of the graded graph Γ which is freely generated over $\mathbf{k}$ by all the pathes on Γ. We denote $\mathrm{coeff}_{x_1\dots x_k} x = \kappa$ whenever $x = \kappa x_1 \dots x_k + \dots$ is a basis decomposition. The category $\mathbf{k}\Gamma$ inherits the degree (graduation) from Γ such that $\deg x_1x_2\dots x_k = \sum_{i=1}^{k} \deg x_i$.

The full subgraph Γ_S, $S \subset \Gamma_0$ is called *closed contour* if there is an ordering $S = \{\mathtt{i}_1, \dots, \mathtt{i}_k\}$ such that $|\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1}) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_{j+1}, \mathtt{i}_j)| > 0$, $j = 1, \dots, k-1$, and $|\Gamma_1(\mathtt{i}_1, \mathtt{i}_k) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_k, \mathtt{i}_1)| > 0$. The closed contour Γ_S, $S = \{\mathtt{i}_1, \dots, \mathtt{i}_k\} \subset \Gamma_0$ is called *clear* if $\Gamma_1(\mathtt{i}_s, \mathtt{i}_t) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_t, \mathtt{i}_s) = \varnothing$, $|s-t| > 1 \pmod k$. The contour Γ_S is called *oriented cycle* if $|\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1})| > 0$, $j = 1, \dots, k-1$, and $|\Gamma_1(\mathtt{i}_k, \mathtt{i}_1)| > 0$. The edge $a \in \Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j})$ is called *deep* if there are no other pathes on Γ from $\mathtt{i}$ to $\mathtt{j}$. If Γ has no oriented cycles then there is a deep edge.

We consider the finite graph Γ which has no oriented cycles. In this case $\mathbf{k}\Gamma$ is finitely generated. The graph Γ is called *correctly defined* if it does not have double edges, i.e. $|\Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j}) \cup \Gamma_1(\mathtt{j}, \mathtt{i})| \leqslant 1$ for any $\mathtt{i}, \mathtt{j} \in \Gamma_0$.

© Олена Гнатюк, Наталія Головащук, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

1.2 Quadratic form of graded graph

For a finite correctly defined graded graph Γ, set $n = |\Gamma_0| < \infty$. We associate with Γ the undirected bigraph $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Gamma) = (\Gamma_0, \mathcal{B}_1)$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^0 \sqcup \mathcal{B}_1^1$ having the edges of two types: solid of degree 0 and dotted of degree 1. Denote by $\chi_{\mathcal{B}} = \chi_\Gamma$ the integral unit quadratic form such that $\chi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,

$$\chi(x) = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{a \in \mathcal{B}_1(i,j), i<j} (-1)^{|a|} x_i x_j.$$

We say that χ is *positive* if $\chi(\mathbf{r}) > 0$ for all $\mathbf{r} \neq 0$. An integer vector $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$ is called a *root* if $\chi(\mathbf{r}) = 1$. The canonical base vectors $\mathbf{e}^i$ are called simple roots. The root $\mathbf{r} = \sum_{i \in \Gamma_0} r_i$ is called *positive root* (resp., negative root) if in addition $r_i \in \mathbb{Z}_+$ (resp., $r_i \in \mathbb{Z}_-$) for any $i \in \Gamma_0$ (we assume $0 \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-$). The root $\mathbf{r}$ is called *sincere* if $r_i \neq 0$ for all $i \in \Gamma_0$. Two integral forms $\chi, \chi' : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ are *$\mathbb{Z}$-equivalent* if they describe the same maps up to a change of basis, that is, if there exists a linear $\mathbb{Z}$-invertible transformation $T : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ such that $\chi' = \chi T$.

In [4] for two points $i, j \in \Gamma_0$, such that $\mathcal{B}_1(i,j) = \{a\}$, the function $T_{ij}^\varepsilon : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$, with $\varepsilon = (-1)^{|a|} \in \{+,-\}$, is defined as the linear transformation given by

$$T_{ij}^\varepsilon(\mathbf{e}^t) = \begin{cases} \mathbf{e}^t, & \text{if } t \neq i; \\ \mathbf{e}^i + (-1)^{|a|}\mathbf{e}^j, & \text{if } t = i. \end{cases} \qquad (1)$$

If a degree $|a|$ is even then we call T_{ij}^+ an *inflation* for χ, if $|a|$ is odd, we call T_{ij}^- a *deflation* for χ. The forms χ and χT_{ij}^ε are $\mathbb{Z}$-equivalent, if χ is a unit form, then $\chi' = \chi T_{ij}^\varepsilon$ is a unit form, and χ is positive if and only if χ' is positive. The following result was shown in [3].

The bigraph $\mathcal{B}$ is called a *tree* if any two vertices are connected by exactly one simple path, and it is called 0-tree if additionally, any edge is of degree 0. In other words, any connected graph without *cycles* is a tree. A *forest* is a disjoint union of trees. We say that tree $\mathcal{B}$ is 0-tree (0-forrest) if any edge has degree 0. Any point of tree which is incident with more than two edges is called *branch point*. Assume that Γ_0 contains not more then one branch point. If point x is not branch and $\mathcal{B}|_S$ connected component of $\mathcal{B}|_{\Gamma_0 \setminus \{x\}}$ which does not contain branch point then the full subgraph $\mathcal{B}|_{S \cup \{x\}}$ is called *tail* of x and is denoted by $\overrightarrow{x}$.

Proposition 1. *Let χ be an integral positive unit form, $\mathcal{B}$ its bigraph. Then there is a sequence of deflations of type (1) with composition T such that the bigraph $\mathcal{B}T$ of form χT is a 0-forrest. The diagram $\mathcal{B}T$ is called a Dynkin type of Γ. In this case, it is a disjoint union of some of the following Dynkin diagrams: A_n $(n \geqslant 1)$, D_n $(n \geqslant 4)$, or E_n $(n = 6, 7, 8)$. If $\mathcal{B}$ is connected then $\mathcal{B}T$ is just a 0-tree. The Dynkin type is uniquely defined by χ.*

Each tree bigraph can be transformed to the 0-tree graph by the sequence of deflations and inflations. For a Dynkin diagram with positive form, the number of all roots is finite, and the number of positive roots equals to the number of negative roots. The following proposition was shown in [4].

Proposition 2. *If χ is positive, $a \in \mathcal{B}_1(i,j)$, and T_{ij}^+ is a deflation, then the number of positive roots of the form χT_{ij}^+ is strictly greater than the number of positive roots of the form χ. The form of Dynkin type has the maximal possible number of positive roots.*

We say that a graph Γ is *AD-reduced* if its underlined bigraph $\mathcal{B}(\Gamma)$ is a disjoint union of Dynkin diagrams of type A_n $(n \geqslant 1)$, D_n $(n \geqslant 4)$.

1.3 Differential graded category

The $\Bbbk$-linear category $\mathcal{U}$ is called *graded* if $\mathcal{U}(i,j) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_q(i,j)$ is a sum of finite dimensional vector spaces $\mathcal{U}_q(i,j) = \deg^{-1}(q)$, for any $i, j \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$. The graded $\Bbbk$-category $\mathcal{U}$ is called the *differential graded category* or *dgc* if there is the differential $\mathtt{d} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ which maps $\mathtt{d} : \mathcal{U}_q(i,j) \to \mathcal{U}_{q+1}(i,j)$, $q \in \mathbb{Z}$, $i, j \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$, and the following properties holds: 1) $\mathtt{d}(1_i) = 0$, $i \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$;

2) Leibnitz rule: $\mathtt{d}(x_1 \dots x_{k-1} x_k \dots x_k)$
$= \sum_{i=1}^{k} \hat{x}_1 \dots \hat{x}_{k-1} \mathtt{d}(x_i) x_{i+1} \dots x_k =$
$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{|x_1|} x_1 \dots (-1)^{|x_i|} x_i x_{i+1} \dots x_k$;

3) $\mathtt{d}^2 = 0$.

Given a dgc $\mathcal{U}$ with $|\operatorname{Ob}\mathcal{U}| < \infty$, define the underlined graded graph Γ such that $\Gamma_0 = \operatorname{Ob}\mathcal{U}$, and $\Gamma_1(i,j)$ is a basis of $(\mathcal{U}/\mathcal{U}^{\geqslant 2})(i,j)$, $i, j \in \Gamma_0$ with the induced graduation. The differential $\mathtt{d}$ induces the map $\mathtt{d} : \Gamma_1^q \to \mathcal{U}_{q+1}(i,j)$, $i, j \in \Gamma_0$, $q \in \mathbb{Z}$.

We say that the path $\ell = x_1 \dots x_k : i \to j$ on Γ belongs to $\mathtt{d}(a)$, $a \in \Gamma_1(i,j)$ if $\operatorname{coeff}_\ell \mathtt{d}(a) \neq 0$. In this case we say that x_t, $t = 1 \dots k$ belongs to $\mathtt{d}(a)$

Kyiv National Taras Shevchenko University

as well. If graph Γ has no oriented cycles then the triangularity condition holds. The edge with zero differential is called *minimal*. Any deep edge is of course minimal.

Any edge $a \in \Gamma_1$ is called *regular* if $a \notin Im\mathtt{d}$. The dgc $\mathcal{U}$ is called *regular* if all $a \in \Gamma_1$ are regular. Assume $a, b \in \Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j})$, a is minimal, and a belongs to $\mathtt{d}(b)$, i. e. $\mathtt{d}(b) = a + \mathtt{d}'(b)$. Then we set: $b = 0$, $\mathtt{d}(b) = 0$, $a = 0$ and obtain the new dgc $\mathcal{U}'$ with the graph Γ'. We say that $\mathcal{U}'$ is obtained from $\mathcal{U}$ by regularization of a, b. The quadratic form χ_Γ does not change after regularization operation.

The contour Γ_S, $S = \{\mathtt{i}_1, \dots, \mathtt{i}_k\} \subset \Gamma_0$ is called a *contour of differential type* (with respect to the dgc $\mathcal{U}$) if $\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1}) = \{x_{j,j+1}\}$, $j = 1, \dots, k-1$, and $\Gamma_1(\mathtt{i}_1, \mathtt{i}_k) = \{x_{1k}\}$, and $\mathrm{coeff}_{x_{k-1,k}\dots x_{12}} \mathtt{d}(x_{1k}) \neq 0$.

We consider a dgc $\mathcal{U}$ with the underlined graph $\Gamma_\mathcal{U}$. Denote by $\widehat{\mathcal{U}}$ the dg category, and by Γ the correspondent graph, augmented by the set of loops $\Omega = \{\omega_\mathtt{i} \in \Gamma_1^1(\mathtt{i}, \mathtt{i}) \mid \mathtt{i} \in \Gamma_0\}$ with differential $\partial : \widehat{\mathcal{U}} \to \widehat{\mathcal{U}}$ such that $\partial(\omega_\mathtt{i}) = \omega_\mathtt{i}^2$ and

$$\partial(a) = a\omega_\mathtt{i} + (-1)^{|a|+1}\omega_\mathtt{j} a + \mathtt{d}(a), a \in \Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j}), a \notin \Omega.$$

Then the condition $\partial^2 = 0$ and Leibnitz rule hold. The dgc $\widehat{\mathcal{U}}$ is called *augmented* for $\mathcal{U}$.

2 The transformations

2.1 Turning arrows at point

We assume the graph Γ has no oriented cycles. Denote by Γ_0^+ (resp., Γ_0^-) the subset of vertices $\mathtt{i} \in \Gamma_0$ such that $\Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j}) = \varnothing$ (resp., $\Gamma_1(\mathtt{j}, \mathtt{i}) = \varnothing$) for any $\mathtt{j} \in \Gamma_0$. In this chapter we consider $\mathrm{add}\,\Bbbk\Gamma$ the additive closure of the category $\Bbbk\Gamma$. Let $\mathtt{j} \in \Gamma_0^+$, $\mathtt{i}_k \in \Gamma_0$, and $a_k \in \Gamma_1(\mathtt{i}_k, \mathtt{j})$, $k \in \{1, \dots, p\}$ are all edges ending at a point $\mathtt{j}$. Denote $\Phi_\mathtt{j} : \mathtt{i}_1 \oplus \mathtt{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathtt{i}_p \to \mathtt{j}$, $[\Phi_\mathtt{j}] = (-a_k)_{k=1}^p$. There is the mapping $\Theta_\mathtt{j} : \mathtt{i}_1 \oplus \mathtt{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathtt{i}_p \to \mathtt{i}_1 \oplus \mathtt{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathtt{i}_p$, $[\Theta_\mathtt{j}] = (\theta_{ij})$, $\theta_{ij} \in \Bbbk\Gamma(\mathtt{i}_i, \mathtt{i}_j)$ such that the differentials are defined by:

$$[\Phi_\mathtt{j}\Theta_\mathtt{j}] = [\Phi_\mathtt{j}]\,[\Theta_\mathtt{j}] = [\mathtt{d}(a_i)] = (\mathtt{d}(a_1) \dots \mathtt{d}(a_p)).$$

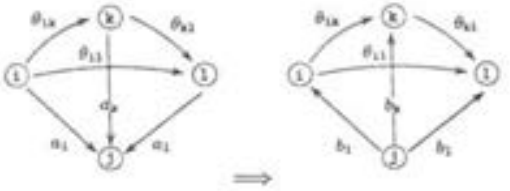
Now we turn the arrows $a_1, \dots, a_p$, obtain the arrows $b_k : \mathtt{j} \to \mathtt{i}_k$ and set $|b_k| = -|a_k|$. Obtained graph does not have oriented cycles.

Lemma 1. *Define the dgc $\mathcal{U}'$ which has the arrows $b_1, \dots, b_p$ instead of $a_1, \dots, a_p$ and differential is given by the formulae:*

$$[\Theta_\mathtt{j}\Psi_\mathtt{j}] = [\Theta_\mathtt{j}]\,[\Psi_\mathtt{j}] = [\mathtt{d}(b_i)] = (\mathtt{d}(a_1) \dots \mathtt{d}(b_p))^\mathtt{t}$$

where $\Psi_\mathtt{j} : \mathtt{j} \to \mathtt{i}_1 \oplus \mathtt{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathtt{i}_p$, $[\Psi_\mathtt{j}]^\mathtt{t} = (b_k)_{k=1}^p$. Then $\mathcal{U}'$ is well defined and any clear contour is a contour of differential type as well as for $\mathcal{U}$.

Proof. By the definition of differential on $\mathcal{U}$, we have: $\mathtt{d}(a_i) = \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} a_k \theta_{ik}$, $\mathtt{d}^2(a_i) = 0$, $i = 1, \dots, p$, where $\theta_{ik} \in \Bbbk\Gamma(\mathtt{i}, \mathtt{k})$ are pathes. Then $\mathtt{d}^2(a_i) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_l (-1)^{|a_k|+|a_l|} \theta_{kl}\theta_{ik} + \sum_{l=1}^p (-1)^{|a_l|+|a_l|+1} a_l \mathtt{d}(\theta_{il})$.



We obtain the condition:

$$\mathtt{d}(\theta_{il}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+|a_l|} \theta_{kl}\theta_{ik}, \quad i, l = 1, \dots, p \quad (2)$$

Besides, the following equalities hold: $|a_i| + 1 = |\theta_{ik}| + |a_k|$.

After turning we have the edges $b_l \in \Gamma_1'(\mathtt{j}, \mathtt{i}_l)$, $l = 1, \dots, p$. We denote the obtained graph by Γ'. $\Psi_\mathtt{j} : \mathtt{j} \to \mathtt{i}_1 \oplus \mathtt{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathtt{i}_p$, $[\Psi_\mathtt{j}]^\mathtt{t} = (b_l)_{l=1}^p$. The differentials are defined by:

$$[\Theta_\mathtt{j}\Psi_\mathtt{j}] = [\Theta_\mathtt{j}]\,[\Psi_\mathtt{j}] = [\mathtt{d}(b_i)] = (\mathtt{d}(a_1) \dots \mathtt{d}(b_p))^\mathtt{t}.$$

Consider the differential $\mathtt{d} : \Gamma'^q_1(\mathtt{j}, \mathtt{i}_l) \to \mathcal{U}'_{q+1}(\mathtt{j}, \mathtt{i}_l)$ such that $\mathtt{d}(b_l) = \sum_i \theta_{il} b_i$. Here $|b_i| = -|a_i| = |\theta_{il}| - |a_i| - 1 = |\theta_{il}| + |b_i| - 1$. Prove that $\mathtt{d}^2(b_l) = 0$, $l = 1, \dots, p$. We have:

$$\mathtt{d}^2(b_l) = \sum_i \mathtt{d}(\theta_{il}) b_i + \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \mathtt{d}(b_k)$$
$$= \sum_i \mathtt{d}(\theta_{il}) b_i + \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \sum_i \theta_{ik} b_i,$$

then $\mathtt{d}^2(b_l) = \sum_i \mathtt{d}(\theta_{il}) b_i + \sum_i \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl}\theta_{ik} b_i$, and we obtain the required condition:

$$\mathtt{d}(\theta_{il}) = \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|+1} \theta_{kl}\theta_{ik}, \quad i, l = 1, \dots, p$$

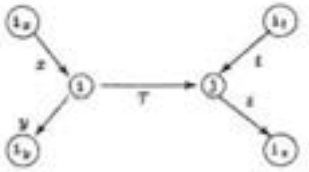
Because $|a_i| + |\theta_{kl}| = |a_k| + 1$, then it is the same condition as (2). □

The case $\mathtt{j} \in \Gamma_0^-$ can be considered similarly.

Kyiv National Taras Shevchenko University

2.2 Reduction algorithm

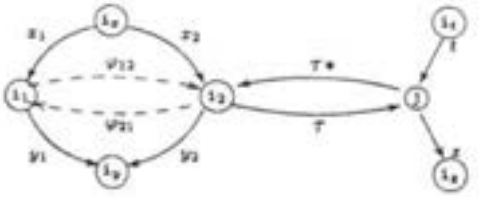
We consider a dgc $\mathcal{U}$ with the underlined graph Γ that has no oriented cycles. Let $\widehat{\mathcal{U}}$ and $\widehat{\Gamma}$ be the augmented ones. Suppose that $\tau \in \Gamma_1(\mathtt{i},\mathtt{j})$ is a deep minimal regular edge with degree $\deg\tau = |\tau|$. We have:



Define the reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}(\mathcal{U})$. We assume that there is $\tau^* : \mathtt{j} \to \mathtt{i}$ such that $\tau\tau^* = 1_{\mathtt{j}}$, and $1_{\mathtt{i}} = 1_{\mathtt{i}_1} + 1_{\mathtt{i}_2} = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$ is a decomposition on the sum of mutually commuting idempotents, in particular, $|\tau^*| = -|\tau|$. Then in $\widehat{\mathcal{U}}$ we obtain $\omega_{\mathtt{i}} \iff \begin{pmatrix} \omega_{\mathtt{i}_1} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \omega_{\mathtt{i}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)\omega_{\mathtt{i}}(1-\tau^*\tau) & (1-\tau^*\tau)\omega_{\mathtt{i}}\tau^*\tau \\ \tau^*\tau\omega_{\mathtt{i}}(1-\tau^*\tau) & \tau^*\tau\omega_{\mathtt{i}}\tau^*\tau \end{pmatrix}$ and $\tau \iff \begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix}$.

Moreover, for any $x : \mathtt{i}_x \to \mathtt{i}$ and $y : \mathtt{i} \to \mathtt{i}_y$, there are the following edges on $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}$:

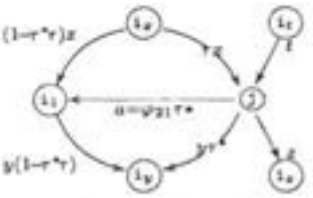
$$x : \mathtt{i}_x \to \mathtt{i} \iff \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix},$$
$$y : \mathtt{i} \to \mathtt{i}_y \iff \begin{pmatrix} y(1-\tau^*\tau) & y\tau^*\tau \end{pmatrix}.$$



Using that $\partial(\tau) = \tau\omega_{\mathtt{i}} + \omega_{\mathtt{j}}\tau$ on $\mathcal{U}$, we have

$$\partial(\tau) \iff \begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{\mathtt{i}_1} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \omega_{\mathtt{i}_2} \end{pmatrix} + \omega_{\mathtt{j}}\begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau\varphi_{12} & \tau\omega_{\mathtt{i}_2} + \omega_{\mathtt{j}}\tau \end{pmatrix}.$$

It follows $\varphi_{12} = 0$, and on $\widehat{\mathcal{U}}$: $\partial(\tau) = \tau\omega_{\mathtt{i}_2} + \omega_{\mathtt{j}}\tau$, $\partial(\tau^*) = \omega_{\mathtt{i}_2}\tau^* + \tau^*\omega_{\mathtt{j}}$, $\partial(\varphi_{21}) = \varphi_{21}\omega_{\mathtt{i}_2} + \omega_{\mathtt{i}_1}\varphi_{21}$. Due to the construction, $1_{\mathtt{j}} = \tau\tau^*$ and $1_{\mathtt{i}_2} = \tau^*\tau$, hence the points $\mathtt{j}$, $\mathtt{i}_2$ are isomorphic. Denote by $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\widehat{\mathcal{U}}$ and $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\Gamma$ the dgc and graph which is obtained from the constructed above by factorization on the point $\mathtt{i}_2$. We denote $a = \varphi_{21}\tau^* : \mathtt{j} \to \mathtt{i}_1$, then $|a| = |\tau^*| + 1 = 1 - |\tau|$, and $\partial(a) = \partial(\varphi_{21}\tau^*) = \partial(\varphi_{21})\tau^* - \varphi_{21}\partial(\tau^*) = (\varphi_{21}\omega_{\mathtt{i}_2} + \omega_{\mathtt{i}_1}\varphi_{21})\tau^* - \varphi_{21}(\omega_{\mathtt{i}_2}\tau^* + \tau^*\omega_{\mathtt{j}}) = \omega_{\mathtt{i}_1}a - a\omega_{\mathtt{j}}$.



For any $x : \mathtt{i}_x \to \mathtt{i}$ we obtain the edges $(1-\tau^*\tau)x : \mathtt{i}_x \to \mathtt{i}_1$, $|(1-\tau^*\tau)x| = |x|$ and $\tau x : \mathtt{i}_x \to \mathtt{j}$, $|\tau x| = |x| + |\tau|$, besides, $\mathrm{d}'((1-\tau^*\tau)x) = a\tau x + (\mathrm{d}(x))'$. For any $y : \mathtt{i} \to \mathtt{i}_y$ there are: $y(1-\tau^*\tau) : \mathtt{i}_1 \to \mathtt{i}_y$, $|y(1-\tau^*\tau)| = |y|$ and $y\tau^* : \mathtt{i}_1 \to \mathtt{j}$, $|y\tau^*| = |y| - |\tau|$, besides, $\mathrm{d}'(y\tau^*) = y(1-\tau^*\tau)a + (\mathrm{d}(y))'$.

The differential on $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}$ is obtained by substitution $1_{\mathtt{i}} = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$. Then any path crossing on the point $\mathtt{i}$ is a combination of two pathes:

$$y_1 \dots y_q\, y x\, x_p \dots x_1 \iff$$
$$y_1 \dots y_q \begin{pmatrix} y(1-\tau^*\tau) & y\tau^*\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix} x_p \dots x_1.$$

Note that $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}$ is not augmented dgc and it has no oriented cycles (as well as $\mathcal{U}$), but it is not necessarily regular. Denote by $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}$ the complete regularization of $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}$. We call the transformation $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ *complete reduction*. The following lemma follows from the condition $\mathrm{d}^2 = 0$ and from the observation that for positive form the sum of degrees around the clear contour can not be even.

Lemma 2. *Let $\tau \in \Gamma_1(\mathtt{i},\mathtt{j})$ be a minimal deep regular edge, and let $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ be a complete reduction. Then Γ' has no oriented cycles and any clear contour is a contour of differential type. The quadratic form χ' is obtained from χ by deflation/inflation from $\mathtt{i}$ to $\mathtt{j}$. In particular, if $\deg(\tau)$ is odd then we have a deflation and the number of positive roots increases.*

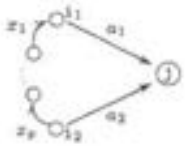
3 The structure theorem

Theorem 1. *Let $\mathcal{U}$ be dgc having a correctly defined underlined graded graph Γ such that Γ has no oriented cycles, is* AD-reduced, *and the quadratic form χ_Γ is positively defined. We assume that any clear contour is a contour of differential type. Then there exists a composition of reductions $\mathcal{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ such that $\Gamma_{\mathcal{U}'}$ is a 0-forrest of Dynkin type.*

Kyiv National Taras Shevchenko University

In fact, we prove that $\Gamma_{\mathcal{U}'}$ is a forrest of Dynkin type (non necessary 0-forrest) using the induction on the integer $|\Gamma_0|$.. We assume the assertion of Theorem holds for any dgc with $< |\Gamma_0|$ objects, and prove it for $\mathcal{U}$, Γ.

Let $\mathtt{j} \in \Gamma_0^+$. By the induction assumption, we can transform $\mathcal{U}|_{\Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}}$ as a sub dgc of $\mathcal{U}$ to dgc with AD-reduced graph. By Lemma 2, we obtained differential category $\mathcal{U}'$ and underlined regular graded graph Γ' such that $\Gamma'|_{\Gamma_0'\backslash\{\mathtt{j}\}} = \Gamma|_{\Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}}$ is a disjoint union of Dynkin diagrams of type A_k, D_k, and any clear contour is a contour of differential type. Note that the sum of degrees around the clear contour can not be even since χ is a positive form. Without loss of generality, we assume that $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$. Consider the contours on Γ of a type



(3)

where $l = x_1 \dots x_p \in \Bbbk\Gamma_1(\mathtt{i}_2, \mathtt{i}_1)$. We denote it by $(a_2; a_1, l)$. By assumption, any clear contour of a type (3) is differential, such that $\mathtt{d}(a_2) = \kappa a_1 l$, $\kappa \in \Bbbk$, and $|a_1| + |l| = |a_2| + 1$. Show that any contour of a type (3) is clear. The minimal counterexample has one diagonal edge $b : \mathtt{i}' \to \mathtt{j}$ and two clear contours $(a_1; b, y_1)$ and $(b; a_0, y_2)$ which are differential. Then, since $\mathcal{U}|_{\Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}}$ is a tree then the condition $\mathtt{d}^2 = 0$ does not hold in contradiction with the assumption. It follows that for any contour of a type (3), a_1 is a minimal, and a_2 is a maximal edges, and this contour is differential.

We assume that $\mathtt{d}$ is a nonzero map, then there is at least one contour of a type (3). Each edge $a : \mathtt{i} \to \mathtt{j}$ is either deep or not minimal, any contour has just one not minimal edge. If $a : \mathtt{i}_1 \to \mathtt{i}_2$ with $\mathtt{i}, \mathtt{j} \in \Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}$ is deep, then we can do the reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{i}_1\mathtt{i}_2}$ in the direction to branch point. For any reduction of this type, there is the composition of such reductions which leads to tree on the set $\Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}'$. We call this transformation the reduction of tail $\overline{x}_i^*$.

Let $\Gamma|_S$, $S \subset \Gamma_0$ be the component of connectivity of $\Gamma|_{\Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}}$. Consider the full subproblem on the set $\Gamma|_{S\cup\{\mathtt{j}\}}$. Let $a_1 : \mathtt{i}_1 \to \mathtt{j}$ be the (regular) minimal edge ending in $\mathtt{j}$, which belongs to some contour (3). Then a_1 is deep. Do the complete reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{i}_1\mathtt{j}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$. The subcategories $\mathcal{U}|_{\Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}}$ and $\mathcal{U}'|_{\Gamma_0\backslash\{\mathtt{j}\}}$ coincides, and $\chi' = \chi T_{\mathtt{i}_1\mathtt{j}}^{\epsilon}$, $\epsilon = (-1)^{|a_1|}$. Otherwise, if a_1 is not deep, then any x_i is deep and we can reduce the tail $\overline{x}_i^*$ in the direction to branch point. Combining such transformations of $\mathcal{U}$, we get a tree on the set $S \cup \{\mathtt{j}\}$ whenever other subproblems do not change.

The uniqueness follows from the correspondent result for the quadratic forms (see [3] and [4]), which finishes the proof of Theorem.

4 Conclusions

In this work it is proven, that each differential graded category with positive quadratic form of Dynkin type A_n, D_n can be transformed to differential graded category with graded graph, which is a positive tree. The algorithms of those step by step transformations are built.

В роботі доведено, що кожна диференціально градуйована категорія з додатньою квадратичною формою типу Динкіна A_n, D_n може бути трансформована в диференціальну категорію, граф, якої є додатнім деревом. Побудований алгоритм таких перетворень.

List of references

1. Y.A. Drozd. *Tame and wild matrix problems.* In: Representations and Quadratic Forms (1979), Kiev, 39–74.

2. Y.A. Drozd. *Reduction algorithm and representations of boxes and algebras.* Comtes Rendue Math. Acad. Sci. Canada, 23 (2001), 97–125.

3. S A. Ovsienko. *Integer weakly positive forms.* In: Shurian Matrix problems and quadratic forms (1978), Kiev, 3–17.

4. M. Barot, J.A.de la Pena. *The Dynkin type of a non-negative unit form.* Expo. Math. **17**, (1999), 339–348.

5. М.М. Клейнер, А.В. Ройтер *Представления дифференциальных градуированных категорий.* Матричные задачи. АН УССР. Институт математики. Киев 1977, 5–70.

Надійшла до редколегії 17.04.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21

Д.М. Городня, аспірант

Про єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою

Доведено єдиність слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, керованого загальною стохастичною мірою, у спеціальному класі узагальнених випадкових процесів.

Ключові слова: стохастична міра, рівняння теплопровідності, задача Коші, слабкий розв'язок.

D.M. Gorodnya, PhD student

On the uniqueness of the solution of Cauchy problem for a heat equation with general stochastic measure

Uniqueness of the weak solution of Cauchy problem for a heat equation driven by the general stochastic measure is proved in a case when this solution belongs to a special class of general stochastic processes.

Key Words: stochastic measure, heat equation, Cauchy problem, weak solution.

E-mail: gorodnyaya-darya@i.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

У роботі [1] доведено існування розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності з випадковим впливом, який описується за допомогою інтеграла за загальною стохастичною мірою. Для випадку d просторових змінних такий розв'язок визначається як деякий спеціальний процес V_t, $t > 0$, такий, що при фіксованому $t > 0$ V_t є узагальненою випадковою функцією, визначеною на просторі Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ швидко спадних основних функцій. Також в [1] доведено єдиність розв'язку у випадку, коли для кожного $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ деякий спеціально побудований за допомогою V_t та φ випадковий процес задовольняє певну додаткову умову.

У даній статті доведено єдиність такого розв'язку у деякому спеціальному класі узагальнених випадкових процесів незалежно від додаткової умови, яка використовується в [1]. Аналогічний результат щодо єдиності розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння із загальною стохастичною мірою отримано в [2]. Про застосування таких рівнянь див. [1] та наведені там посилання.

1 Попередні відомості

Нехай L_0 – набір усіх випадкових величин, які задані на повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P) і розглядаються з точністю до P-еквівалентності. Під збіжністю в L_0 будемо розуміти збіжність за ймовірністю. Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^d$.

Означення 1. *Стохастичною мірою називається σ-адитивне відображення $\mu : \mathbf{B} \to L_0$.*

У роботі [3] визначається $\int_A f d\mu$, де $A \in \mathbf{B}$, f – дійсна вимірна функція. Необхідні у подальшому властивості цього інтеграла, а також його зв'язок з інтегралом Рімана від випадкової функції по вимірній за Жорданом множині містяться в роботах [1,2,3].

Позначимо через $D(\mathbb{R}^d)$ стандартний простір основних функцій з компактним носієм.

Означення 2. *Узагальненою випадковою функцією (у.в.ф.) називається лінійне неперервне відображення $\xi : D(\mathbb{R}^d) \to L_0$.*

Набір усіх у.в.ф. будемо позначати $D'_r(\mathbb{R}^d)$. Зауважимо, що стохастична міра μ визначає у.в.ф. $\dot{\mu}$ за правилом

$$(\dot{\mu}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^d),$$

а також всюди у подальшому неперервність та похідна від випадкового процесу розглядаються у сенсі збіжності за ймовірністю.

2 Основний результат

Оскільки $D(\mathbb{R}^d) \subset S(\mathbb{R}^d)$, то із теореми 1 роботи [1] випливає, що задача Коші для рівняння теплопровідності із стохастичною мірою

© Д.М. Городня, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = a^2\Delta_x V_t + f\dot{\mu},\ t>0, \quad V_t\,|_{t=0+} = \dot{\nu}, \quad (1)$$

відносно відносно невідомого процесу $V_t, t>0$, що набуває значення в $D'_r(\mathbb{R}^d)$, має розв'язок, який визначається рівностями (9,10) із [1] із заміною $S(\mathbb{R}^d)$ на $D(\mathbb{R}^d)$. Цей розв'язок задається формулою (14) із [1] при $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$, а отже, для кожного фіксованого φ він є сумою двох доданків вигляду $\int_{\mathbb{R}^d} r(y,t,\varphi)d\zeta(y)$, де ζ – стохастична міра в $\mathbb{R}^d$ і для кожного фіксованого $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ функція $r(y,t,\varphi)$, належить множині H усіх таких функцій $h(y,t) : \mathbb{R}^d\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$, що для кожного $T>0$ функції h, $\frac{\partial h}{\partial t}$ неперервні і обмежені на $\mathbb{R}^d\times[0,T]$ та $\mathbb{R}^d\times(0,T]$ відповідно. Зокрема, якщо

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{d+1},$$

– фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності, то розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = a^2\Delta_x V_t,\ t>0, \quad V_t\,|_{t=0+} = \dot{\nu},$$

такий: $(V_t,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} d\nu(x)\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{E}(y-x,t)\varphi(y)dy$, $\varphi\in D(\mathbb{R}^d)$. Цей розв'язок продовжується до у.в.ф. із $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$, тобто знайдеться така $V\in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$, що $\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^d)\ \forall\psi\in D(\mathbb{R})$: $(V,\varphi(x)\psi(t)) = \int_0^\infty (V_t,\varphi)\psi(t)dt$. Внаслідок леми 3 із [2] потрібне продовження задається формулою

$$(V,\Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} d\nu(x)\int_0^\infty dt\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{E}(y-x,t)\Phi(y,t)dy,$$
$$\Phi\in D(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Основний результат даної статті містить наступна теорема.

Теорема 1. *Задача Коші*

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = a^2\Delta_x V_t,\ t>0, \quad V_t\,|_{t=0+} = 0, \quad (2)$$

має тільки нульовий розв'язок у класі усіх процесів V_t, $t>0$, які задовольняють такі умови:

1) V_t, $t>0$, продовжується до деякої у.в.ф. із $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ для якої існує згортка з $\mathcal{E}$;

2) V_t, $t>0$, зображується у вигляді

$$(V_t,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} r(y,t,\varphi)d\zeta(y), \quad \varphi\in D(\mathbb{R}^d),$$

де ζ - стохастична міра в $\mathbb{R}^d$ і при кожному фіксованому $\varphi\in D(\mathbb{R}^d)$ функція $r(y,t,\varphi)$ належить H.

Доведення теореми 1 проводиться за допомогою міркувань, аналогічних до використаних при доведенні теореми 1 із [2], якщо врахувати такі твердження.

Лема 1. *Припустимо, що у.в.ф. $V\in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ задовольняє такі умови:*

1) $V=0$ при $t<0$;

2) $\forall\Phi\in D(\mathbb{R}^{d+1})$: $-(V,\frac{\partial\Phi}{\partial t}) = a^2(V,\Delta_x\Phi)$;

3) існує згортка $V*\mathcal{E}$.

Тоді V є нульовою у.в.ф.

Лема 1 є прямим наслідком теореми 3 із роботи [4].

Лема 2. *Нехай V_t, $t>0$, - розв'язок задачі Коші (2), який задовольняє такі умови:*

1) для довільних $T>0$ та $\varphi\in D(\mathbb{R}^d)$ випадкова функція (V_t,φ) інтегровна за Ріманом на $[0,T]$;

2) для довільних $\varphi\in D(\mathbb{R}^d)$ та $\psi\in D(\mathbb{R})$: $\int_0^\infty (V_t,\varphi)\psi'(t)dt = -\int_0^\infty \frac{d(V_t,\varphi)}{dt}\psi(t)dt$;

3) V_t, $t>0$, продовжується до деякої у.в.ф. із $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ для якої існує згортка з $\mathcal{E}$.

Тоді $\int_0^\infty (V_t,\varphi)\psi(t)dt = 0$ для довільних $\varphi\in D(\mathbb{R}^d)$ та $\psi\in D(\mathbb{R})$.

Доведення леми 2 проводиться тим же методом, що й леми 6 із [1].

Література

1. Радченко В. Н. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами //Укр. мат. журнал. – 2008. – 60, №12. – С. 1675–1685.

2. Городня Д. М. Єдиність розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь із загальними стохастичними мірами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2011. – № 4. – С. 11–15.

3. Радченко В. Н. Интегралы по общим случайным мерам// Труды института математики НАН Украины, 1999. – 196 с.

4. Городня Д. М. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. - С. 19–12.

Надійшла до редколегії 10.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21

П.Г. Прокоф'єв, старший викладач

Про плоскі локально нільпотентні диференціювання

Локально нільпотентні диференціювання (позначимо як ЛНД) алгебр поліномів є джерелом численних екзотичних прикладів автоморфізмів афінного простору.

Враховуючи природне $\mathbb{Z}^n$-градуювання на алгебрі поліноміальних диференціальних операторів, виникає питання: якими мають бути однорідні компоненти, щоб їх сума давала ЛНД. Ця задача містить в собі характеризацію поліедрів Ньютона ЛНД.

Метою даної роботи є опис певного підкласу плоских (поліедри Ньютона для яких є трикутниками) ЛНД алгебри поліномів від трьох змінних.

Ключові слова: локально нільпотентні диференціювання, однорідні диференціювання, плоскі диференціювання, поліедри Ньютона.

P.G. Prokofiev

About flat locally nilpotent derivations

Locally nilpotent derivations (denote by LND) of polynomial algebras are the source of numerous exotic examples of automorphisms of affine space.

Taking into consideration natural $\mathbb{Z}^n$-grading on the algebra of polynomial differential operators we can put such question: what kind of homogeneous summands should we take in order to get LND as their sum. This task includes problem of characterization of Newton polygons of LND.

The aim of this work is to describe some subclass of flat (Newton polygon is a triangle) LND of polynomial algebra in three variables.

Key Words: locally nilpotent derivations, homogeneous derivations, flat derivations, Newton polygons.

pashpr@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. В.В.Кириченко

Необхідні означення та використані результати

Поліноміальні диференціювання.

Нехай $A = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ - поліноміальна алгебра над полем нульової характеристики $\mathbb{F}$. Поліноміальні диференціювання алгебри A мають форму лінійних диференціальних операторів

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

$\mathbb{Z}^n$-градування визначається стандартним чином: для мономів $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ і мономіальних диференціювань $D = x^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}$:
$mdeg(x^\alpha) = \alpha$.
$mdeg(x^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}) = \alpha - 1_i$, де $1_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, де 1 стоїть на i-тому місці.

Однорідні диференціювання мають вигляд

$$D_\alpha = x^\alpha\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (2)$$

або є мономіальними.
Дія цих диференціювань на довільний моном x^m дає або моном мультистепеня

$$mdeg(D_\alpha(x^m)) = \alpha + m \qquad (3)$$

або нуль, внаслідок рівності нулю коефіцієнта $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_i$, зокрема для мономіальних диференціювань це можливо лише коли $m_i = 0$.
Будь-яке поліноміальне диференціювання є сумою мономіальних:

$$D = \sum_{\alpha}\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha(i)}x^{\alpha(i)}\frac{\partial}{\partial x_i}, a_{\alpha(i)} \in \mathbb{F} \qquad (4)$$

© П.Г. Прокоф'єв, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Означення 0.1. Диференціювання (1) називається локально нільпотентним, якщо для довільного полінома $f \in A$ існує натуральне число $m = m(f)$, для якого $D^m(f) = 0$.

Поліедри Ньютона.

Розглянемо диференціювання вигляду (4).
$Supp(D)$ (носій диференціювання) складається з множини цілочисельних векторів $\alpha(i) \in \mathbb{Z}^n$, для яких $a_\alpha(i) \neq 0$.

Означення 0.2. Поліедром Ньютона називається опукла оболонка векторів $\alpha(i) - 1_i$ ($\alpha(i) \in \mathbb{Z}^n$) та вектора $(-1, \ldots, -1)$.

Означення 0.3. Будемо називати основними ребрами поліедра Ньютона такі, які не проходять через точку $(-1, \ldots, -1)$.

Означення 0.4. Будемо називати плоскими такі ЛНД, поліедр Ньютона для яких має вигляд трикутника.

Попередні результати.

Наведемо формулювання декількох теорем про ЛНД, які будуть використані.

Теорема 1. *([3],с.1016-1017) $\mathbb{Z}^n$-однорідні диференціювання є ЛНД тоді і лише тоді, коли вони є елементарними, тобто мономіальними.*

Доведення грунтується на тому, що ЛНД не може мати власних поліномів (поліномів Дарбу), тобто таких $D(f) = h \cdot f$, де поліном $h \in \mathbb{F}[x]$.
З цієї теореми випливає, що:

Наслідок 1. *([4],с.17) Вершини поліедра Ньютона для ЛНД лежать в гіперплощинах H_i, таких, що $x_i = -1$.*

Наслідок 2. *([4],с.17) Сума мономіальних диференціювань, мультистепені яких лежать в площині, що містить основне ребро поліедра Ньютона деякого ЛНД і початок координат, є ЛНД.*

Для поліномів від двох змінних певну характеризацію дає наступна теорема:

Теорема 2. *(Rentschler,[1]) Якщо $D-$ локально нільпотентне диференціювання алгебри поліномів $\mathbb{F}[x_1, x_2]$, то існують поліноми $P, Q \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$ такі, що*

1) $KerD = \mathbb{F}[P]$;

2) $\mathbb{F}[P, Q] = \mathbb{F}[x_1, x_2]$;

3) *існує поліном $\alpha = \alpha(t)$ такий, що для довільного $h \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$*

$$D(h) = \alpha(P) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Також використовується наступна лема:

Лема 1. *Якщо існує поліном $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$, такий, що для даного локально нільпотентного диференціювання D елемент $D(f)$ ділиться на f, то $D(f) = 0$.*

Про плоскі локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних.

Будемо розглядати такі плоскі диференціювання, мультистепені однорідних компонент яких лежать на основному ребрі поліедра Ньютона. З наслідку (1) випливає, що в розклад кожного з таких диференціювань на суму однорідних входить рівно два елементарних диференціювання, мультистепені яких лежать на кінцях основного ребра поліедра Ньютона.

Нехай D - таке диференціювання, N - кількість його однорідних компонент. Позначимо його елементарні однорідні компоненти через D_u, D_v, а неелементарні - через $D_{h(i)}$, де $i = 1..N-2$.

Тобто, $D = D_u + D_v + \sum_{i=1}^{N-2} D_{h(i)}$.

Лема 2. *Мультистепені ЛНД D мають бути зв'язані такими лінійними зв'язками з натуральними коефіцієнтами:*

$$a_i \cdot mdeg(D_{h(i)}) = \\ = b_i \cdot mdeg(D_u) + (a_i - b_i) \cdot mdeg(D_v), \quad (6)$$

де $a_i, b_i \in \mathbb{N}, a_i > b_i, i = 1..N-2$; $i \neq j \Rightarrow (a_i \neq a_j$ або $b_i \neq b_j)$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Доведення. Отримується з того, що мультистепені всіх однорідних диференціювань лежать на одному ребрі поліедра Ньютона.
У випадку, коли для різних i, j виконується $a_i = a_j$ і $b_i = b_j$, кількість компонент, які входять в D буде менше N, з цього випливає умова $i \neq j \Rightarrow (a_i \neq a_j$ або $b_i \neq b_j)$.

□

Неелементарні диференціювання $D_{k(i)}$ мають вигляд:

$$D_{k(i)} = \alpha(i)_1 x_1^{k(i)_1+1} x_2^{k(i)_2} x_3^{k(i)_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \\ + \alpha(i)_2 x_1^{k(i)_1} x_2^{k(i)_2+1} x_3^{k(i)_3} \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ + \alpha(i)_3 x_1^{k(i)_1} x_2^{k(i)_2} x_3^{k(i)_3+1} \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \alpha(i)_1, \alpha(i)_2, \alpha(i)_3 \in \mathbb{F} \quad (7)$$

Будемо вважати, що елементарні диференціювання мають вигляд

$$D_u = \beta x_2^{u_2} x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, \; D_v = \gamma x_1^{v_1} x_3^{v_3} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (8)$$

де $\beta, \gamma \in \mathbb{F}$, адже можна зробити перейменування змінних.

Маємо:

$$D(x_3) = \sum_{i=1}^{N-2} \alpha(i)_3 x_1^{k(i)_1} x_2^{k(i)_2} x_3^{k(i)_3+1}$$

Оскільки $D(x_3)$ ділиться на x_3, то за лемою 1 $D(x_3) = 0$, отже для всіх i маємо $\alpha(i)_3 = 0$, тобто:

$$D_{k(i)} = \alpha(i)_1 x_1^{k(i)_1+1} x_2^{k(i)_2} x_3^{k(i)_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \\ + \alpha(i)_2 x_1^{k(i)_1} x_2^{k(i)_2+1} x_3^{k(i)_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (9)$$

Оскільки x_3 належить ядру диференціювання D, то воно буде локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли таким буде диференціювання алгебри поліномів від двох змінних $\overline{D} = \overline{D}_u + \overline{D}_v + \sum_{i=1}^{N-2} \overline{D}_{k(i)}$:

$$\overline{D}_{k(i)} = \alpha(i)_1 x_1^{k(i)_1+1} x_2^{k(i)_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \\ + \alpha(i)_2 x_1^{k(i)_1} x_2^{k(i)_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\overline{D}_u = \beta x_2^{u_2} \frac{\partial}{\partial x_1}, \; \overline{D}_v = \gamma x_1^{v_1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Лема 3. *Диференціювання* $\overline{D} = \overline{D}_u + \overline{D}_v + \sum_{i=1}^{N-2} \overline{D}_{k(i)}$ *є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

$$v_1 = N-2, \gamma = (N-1)p_1^{N-1};$$

$$u_2 = (N-1)m_2 - 1, \beta = -(N-1)m_2 p_2^{N-1};$$

$$k(i)_1 = i-1, k(i)_2 = (N-i-1)m_2 - 1,$$

$$\alpha(i)_1 = \alpha_i(k(i)_2+1), \alpha(i)_2 = -\alpha_i(k(i)_1+1),$$

$$\alpha_i = -C_{N-1}^i p_1^i p_2^{N-1-i}, \; i = 1..N-2;$$

$$p_1, p_2 \in \mathbb{F}, m_2 \in \mathbb{N}, m_2 \geqslant 1$$

Доведення. Для характеризації локально нільпотентних диференціювань такого виду скористаємося теоремою 2. Якщо покласти $h = x_1$, а потім $h = x_2$ у формулі (5), то отримаємо

$$D(x_1) = -\alpha(P)\frac{\partial P}{\partial x_2}; \quad D(x_2) = \alpha(P)\frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Нехай $u(t)$ - первісна до функції $\alpha(t)$, тобто $\frac{du}{dt} = \alpha(t)$, $u(0) = 0$, тоді отримуємо

$$D(x_1) = -\frac{\partial u(P)}{\partial x_2}; \quad D(x_2) = \frac{\partial u(P)}{\partial x_1}.$$

Якщо D є локально нільпотентним, то для нього має існувати вказане зображення, а отже мають існувати функція $u(t)$ та координатний поліном $P = P(x_1, x_2)$ такі, що мають місце рівності

$$-\frac{\partial u(P)}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{N-2} \alpha(i)_1 x_1^{k(i)_1+1} x_2^{k(i)_2} + \beta x_2^{u_2};$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{N-2} \alpha(i)_2 x_1^{k(i)_1} x_2^{k(i)_2+1} + \gamma x_1^{v_1}$$

Легко бачити, що з точністю до константи єдиним розв'язком системи є функція

$$u(P) = \psi(x_1, x_2) = -\sum_{i=1}^{N-2} \alpha_i x_1^{k(i)_1+1} x_2^{k(i)_2+1} + \\ + \frac{\gamma}{v_1+1} x_1^{v_1+1} - \frac{\beta}{u_2+1} x_2^{u_2+1}, \quad (10)$$

де $\alpha_i = \frac{\alpha(i)_1}{k(i)_2+1} = -\frac{\alpha(i)_2}{k(i)_1+1}$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Розглянемо, коли поліном $u(P)$ може мати такий вигляд.

Нехай P є мономом, тоді $u(t)$ має бути сумою N мономів ненульового степеня. В цьому випадку кожен моном $u(P)$ має ділитися на моном P, що очевидно не виконується в правій частині (10). Отже, P є сумою кількох мономів.

Серед цих мономів мають бути

$$p_1x_1^{m_1}, m_1 > 0 \text{ та } p_2x_2^{m_2}, m_2 > 0,$$

оскільки лише з них можна отримати відповідно

$$\frac{\gamma}{v_1+1}x_1^{v_1+1} \text{ та } \frac{\beta}{u_2+1}x_2^{u_2+1}.$$

. Інші мономи в P будуть мати вигляд $p_jx_1^{m(j)_1}x_2^{m(j)_2}, m(j)_1 > 0, m(j)_2 > 0$, оскільки в $u(P)$ є лише по одному моному з нульовим ступенем по x_1 і по x_2. Якщо $u(t) = A_1t^{M_1} + ... + A_st^{M_s}, s > 1, i \neq j \Rightarrow M_i \neq M_j, A_i \in \mathbb{F}$, то в $u(P)$ отримаємо, зокрема, мономи

$$A_ip_1x_1^{M_im_1} \text{ та } A_jp_1x_1^{M_jm_1}, \text{ яким відповідає}$$

єдиний моном $\frac{\gamma}{v_1+1}x_1^{v_1+1}$. Це можливо лише коли $M_i = M_j$, що суперечить умові. Тому $u(t) = At^M$.

Щоб точка $(0,0)$ не була спільним нулем частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}$, необхідно, аби $m_1 = 1$ або $m_2 = 1$.

Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $m_1 = 1$.

Зі співвідношень (6) маємо для всіх $i = 1..N-2$: $a_i \cdot k(i)_1 = -b_i + (a_i - b_i) \cdot v_1$, тобто $v_1 > k(i)_1$. Значить,

$$\frac{\gamma}{v_1+1}x_1^{v_1+1} = Ap_1x_1^M.$$

Оскільки всі $k(i)_1$ мають бути різними і виконується

$$0 \leqslant k(i)_1 < v_1 = M-1, \text{ то } M >= N-1$$

Очевидно, що отримати рівно N доданків в $u(P)$ можна лише коли $M = N-1$, а в P доданків два, тобто

$$P = p_1x_1 + p_2x_2^{m_2}; u(t) = At^{N-1} \quad (11)$$

Маємо

$$p^{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} C_{N-1}^i p_1^i p_2^{N-i-1} x_1^i x_2^{m_2(N-i-1)} \quad (12)$$

Звідси

$$v_1 = N-2, u_2 = (N-1)m_2 - 1, k(i)_1 = i-1,$$
$$k(i)_2 = (N-i-1)m_2 - 1, \text{ для } i = 0..N-2 \quad (13)$$

Для коефіцієнтів маємо

$$\alpha_i = -C_{N-1}^i p_1^i p_2^{N-1-i}, i = 1..N-2;$$
$$\gamma = (N-1)p_1^{N-1}; \ \beta = -(N-1)m_2p_2^{N-1}. \quad (14)$$

Отже,

$$\overline{D}_v = (N-1)p_1^{N-1}x_1^{N-2}\frac{\partial}{\partial x_2}; \quad (15)$$

$$\overline{D}_u = -(N-1)m_2p_2^{N-1}x_2^{u_2}\frac{\partial}{\partial x_1}; \quad (16)$$

$$\overline{D}_{k(i)} = -C_{N-1}^i p_1^i p_2^{N-1-i}(N-i-1)\cdot$$
$$\cdot m_2x_1^i x_2^{(N-i-1)m_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1} +$$
$$+ C_{N-1}^i p_1^i p_2^{N-1-i} i x_1^{i-1} x_2^{(N-i-1)m_2}\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\text{для } i = 1..N-2. \quad (17)$$

Для доведення локальної нільпотентності $\overline{D}$ виконаємо деякі перетворення:

$$\overline{D} = \overline{D}_u + \overline{D}_v + \sum_{i=1}^{N-2}\overline{D}_{k(i)} = -\sum_{i=0}^{N-2} C_{N-1}^i(N-i-1)\cdot$$
$$\cdot m_2p_1^i p_2^{N-1-i}x_1^i x_2^{(N-i-1)m_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N-1} C_{N-1}^i i p_1^i p_2^{N-1-i} x_1^{i-1} x_2^{(N-i-1)m_2}\frac{\partial}{\partial x_2} =$$
$$= (\sum_{i=0}^{N-2} C_{N-1}^i(N-i-1)p_1^i p_2^{N-2-i}x_1^i x_2^{(N-i-2)m_2})\cdot$$
$$\cdot(-m_2p_2x_2^{m_2-1})\frac{\partial}{\partial x_1} + (\sum_{i=0}^{N-2} C_{N-1}^{i+1}(i+1)p_1^i\cdot$$
$$\cdot p_2^{N-2-i}x_1^i x_2^{(N-i-2)m_2})\cdot p_1\frac{\partial}{\partial x_2} =$$
$$= (N-1)\cdot(\sum_{i=0}^{N-2} C_{N-2}^i(p_1x_1)^i(p_2x_2^{m_2})^{N-2-i})\cdot$$
$$\cdot(-m_2p_2x_2^{m_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial x_2}) =$$
$$= (N-1)\cdot(p_1x_1 + p_2x_2^{m_2})^{N-2}\cdot$$
$$\cdot(-m_2p_2x_2^{m_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial x_2}) \quad (18)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Тепер локальна нільпотентність $\overline{D}$ випливає з того, що поліном $p_1x_1 + p_2x_2^{m_2}$ належить ядру трикутного диференціювання $-m_2p_2x_2^{m_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial x_2}$.

□

Цей результат узагальнюється в наступній теоремі:

Теорема 3. *Плоскі локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних, мультистепені однорідних компонент яких лежать на основному ребрі многогранника Ньютона, після відповідного перейменування змінних з точністю до сталого множника мають одну з форм:*

$$(p_1x_1x_3^{n_3} + p_2x_2^{m_2})^{N-2}x_3^{n_3}\cdot\left(-m_2p_2x_2^{m_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1x_3^{m_3}\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad (19)$$

$$(p_1x_1 + p_2x_2^{m_2}x_3^{m_3})^{N-2}x_3^{n_3}\cdot\left(-m_2p_2x_2^{m_2-1}x_3^{m_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad (20)$$

де $m_3, n_3 = 0, 1, \ldots; m_2 = 1, 2, \ldots; p_1, p_2 \in \mathbb{F}$.

Доведення. Маємо $D = D_u + D_v + \sum_{i=1}^{N-2} D_{k(i)}$, де доданки мають вигляд (7),(8), причому співвідношення (6) мають виконуватися для мультистепенів мономів від трьох змінних. З іншого боку з (18), отримуємо вигляд диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних $D = D_u + D_v + \sum_{i=1}^{N-2} D_{k(i)}$:

$$D_v = (N-1)p_1^{N-1}x_1^{N-2}x_3^{v_3}\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$D_{k(i)} = -C_{N-1}^i p_1^i p_2^{N-1-i}(N-i-1)m_2\cdot x_1^i x_2^{(N-i-1)m_2-1}x_3^{k(i)_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + C_{N-1}^i p_1^i p_2^{N-1-i}ix_1^{i-1}x_2^{(N-i-1)m_2}x_3^{k(i)_3}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

де $i = 1..N-2$;

$$D_u = -(N-1)m_2p_2^{N-1}x_2^{u_2}x_3^{u_3}\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

$$D = (p_1x_1x_3^{q_1} + p_2x_2^{m_2}x_3^{q_2})^{N-2}\cdot\left(-m_2p_2x_2^{m_2-1}x_3^{q_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1x_3^{q_4}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

Тут $v_3 = (N-2)q_1 + q_4, u_3 = (N-2)q_2 + q_3, k(i)_3 = iq_1 + (N-i-2)q_2 + q_3 = (i-1)q_1 + (N-i-1)q_2 + q_4, i = 1..N-2$. Звідси $q_1 + q_3 = q_2 + q_4$. Можна побачити, що співвідношення (6) виконуються для $k(i)_3, u_3, v_3$. Якщо $v_3 \geqslant u_3$, то отримуємо $q_1 \geqslant q_2, q_4 \geqslant q_3$,

$$D = \left(p_1x_1x_3^{q_1-q_2} + p_2x_2^{m_2}\right)^{N-2}x_3^{(N-2)q_2+q_3}\cdot\left(-m_2p_2x_2^{m_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1x_3^{q_4-q_3}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

Позначивши $m_3 = q_1 - q_2 = q_4 - q_3$, $n_3 = (N-2)q_2 + q_3$, отримуємо (19).
Якщо $v_3 < u_3$, то отримуємо $q_1 < q_2, q_4 < q_3$,

$$D = \left(p_1x_1 + p_2x_2^{m_2}x_3^{q_2-q_1}\right)^{N-2}x_3^{(N-2)q_1+q_4}\cdot\left(-m_2p_2x_2^{m_2-1}x_3^{q_3-q_4}\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

Позначивши $m_3 = q_2 - q_1 = q_3 - q_4$, $n_3 = (N-2)q_1 + q_4$, отримуємо (20).

□

Список використаних джерел

1. *R. Rentschler*, Operations du groupe additif sur le plan affine, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 267 (1968), 384-387

2. *A. van den Essen*, Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Progress in Mathematics. vol.190,Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin,2000.

3. *Ю.В. Боднарчук, П.Г. Прокоф'єв*, Локально нільпотентні диференціювання та автоморфізми Нагатівського типу алгебри поліномів // Український математичний журнал. - том 61. - 2009. с. 1011-1024.

4. *П.Г. Прокоф'єв*, Локально нільпотентні диференціювання, що є сумами чотирьох Z^3-однорідних диференціювань алгебри поліномів від трьох змінних // Наукові записки НаУКМА. - том 113. - фізико-математичні науки - 2011. с. 16-24.

Надійшла до редколегії 12.04.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 512.647

Данило П. Проскурін[1], д.ф.-м.н., доц.,
Роман Р. Якимів[2], асист.

Про інтегровані зображення деформованих CCR

В роботі описано клас інтегровних зображень деформації віківського аналогу алгебри канонічних комутаційних співвідношень з двома ступенями свободи.

Ключові слова: $*$-алгебра, незвідні зображення, інтегровані зображення, дефор-мації CCR.

Danylo P. Proskurin[1], Ph.D.,, Associate Professor, Roman R. Yakymiv[2], Assistant Professor

On integrable representations of deformed CCR

A class of integrable representations of deformed Wick version of canonical commutation relations algebra with two degrees of freedom is described.

Key Words: $*$-algebra, irreducible representations, integrable representations, deformations of CCR.

E-mail: [1]prosk@univ.kiev.ua, [2]yakymiv@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

В цій статті ми розглянемо алгебру $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$, що є деформацією віківського аналогу алгебри канонічних комутаційних співвідношень з двома ступенями свободи, зображення якої вивчались в роботі [2]. А саме, автори цієї роботи вивчили зображення віківського аналогу CCR, що анулюють максимальні квадратичний та кубічний віківські ідеали. В представленій роботі ми розв'язуємо аналогічні задачі в більш загальній ситуації.

В другій частині ми описуємо алгебру $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$ та вивчаємо її властивості. В третій частині ми формулюємо означення інтегровного зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$ та наводимо повну класифікацію незвідних інтегровних зображень, з точністю до унітарної еквівалентності.

2 Алгебра $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$

Розглянемо $*$-алгебру $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$, породжену елементами a_1, a_2, A, які задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} &a_i^*a_i = 1 + a_ia_i^*, \quad i = 1,2, \quad a_1^*a_2 = \lambda a_2a_1^*, \\ &A = a_2a_1 - \lambda a_1a_2, \\ &Aa_1 = \lambda a_1A, \quad Aa_2 = \overline{\lambda}a_2A, \\ &a_1^*A = \lambda Aa_1^*, \quad a_2^*A = \overline{\lambda}Aa_2^*. \end{aligned} \tag{1}$$

Очевидно, що оператори, які задовольняють співвідношення (1), є необмеженими. Мета цієї роботи надати означення інтегровного зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$ та одержати класифікацію незвідних інтегровних зображень, з точністю до унітарної еквівалентності.

Нижче нам будуть потрібні деякі властивості алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$. Спочатку покажемо, що елемент A є нормальним. Дійсно,

$$\begin{aligned} A^*A &= (a_1^*a_2^* - \overline{\lambda}a_2^*a_1^*)A = \overline{\lambda}a_1^*Aa_2^* - \overline{\lambda}\lambda a_2^*Aa_1^* = \\ &= \overline{\lambda}\lambda Aa_1^*a_2^* - \overline{\lambda}Aa_2^*a_1^* = AA^*. \end{aligned}$$

Крім того A^*A міститься в центрі $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$.

$$a_1^*A^*A = \overline{\lambda}A^*a_1^*A = \overline{\lambda}\lambda A^*Aa_1^* = A^*Aa_1^*$$

Застосувавши спряження одержимо $A^*Aa_1 = a_1AA^*$. Аналогічним чином доводиться, що

$$a_2^*A^*A = A^*Aa_2^*, \quad \text{та} \quad A^*Aa_2 = a_2A^*A.$$

Тепер переоберемо систему твірних алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$. А саме, побудуємо елемент $b_2 \in \mathfrak{A}_{\lambda,3}$

$$b_2 = a_2 - Aa_1^*.$$

Очевидно, що $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$ породжується, як $*$-алгебра елементами a_1, b_2, A.

Вивчимо властивості елемента b_2. Пряма перевірка показує, що має місце наступний результат

Лема 1. *Елемент b_2 задовольняє наступні комутаційні співвідношення*

$$\begin{aligned} &b_2^*b_2 - b_2b_2^* = 1 + A^*A, \\ &a_1^*b_2 = \lambda b_2a_1^*, \quad b_2a_1 = \lambda a_1b_2, \\ &A^*b_2 = \lambda b_2A^*, \quad b_2A = \lambda Ab_2. \end{aligned} \tag{2}$$

© Данило П. Проскурін, Роман Я. Якимів, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Доведення.

1. Доведемо, що $b_2^*b_2 - b_2b_2^* = 1 + AA^*$

$$\begin{aligned} b_2^*b_2 - b_2b_2^* &= (a_2^* - a_1A^*)(a_2 - Aa_1^*) - \\ &-(a_2 - Aa_1^*)(a_2^* - a_1A^*) = \\ &= a_2^*a_2 - a_2a_2^* + (a_1A^*Aa_1^* - Aa_1^*a_1A^*) + \\ &+(a_2a_1A^* - a_1A^*a_2) + (Aa_1^*a_2^* - a_2^*Aa_1^*) = \\ &= 1 + (AA^*a_1a_1^* - a_1^*a_1AA^*) + \\ &+(a_2a_1A^* - \lambda a_1a_2A^*) + (Aa_1^*a_2^* - \overline{\lambda}Aa_2^*a_1^*) = \\ &= 1 - AA^* + AA^* + AA^* = 1 + AA^*. \end{aligned}$$

2. Покажемо, що $a_1^*b_2 = \lambda b_2a_1^*$ та $b_2a_1 = \lambda a_1b_2$. А саме,

$$a_1^*b_2 = a_1^*(a_2 - Aa_1^*) = \lambda a_2a_1^* - \lambda Aa_1^{*2} = \lambda b_2a_1^*,$$

та

$$\begin{aligned} b_2a_1 &= (a_2 - Aa_1^*)a_1 = a_2a_1 - Aa_1^*a_1 = \\ &= A + \lambda a_1a_2 - A(1 + a_1a_1^*) = A + \\ &+\lambda a_1a_2 - A - \lambda a_1Aa_1^* = \\ &= \lambda a_1(a_2 - Aa_1^*) = \lambda a_1b_2. \end{aligned}$$

3. Покажемо, що $A^*b_2 = \lambda b_2A^*$ та $b_2A = \lambda Ab_2$.

Дійсно, домножимо рівність $a_2 = b_2 + Aa_1^*$ на A зліва, одержимо

$$Aa_2 = Ab_2 + A^2a_1^* = Ab_2 + \overline{\lambda}Aa_1^*A,$$

звідки

$$\begin{aligned} Ab_2 &= Aa_2 - \overline{\lambda}Aa_1^*A = \\ &= \overline{\lambda}a_2A - \overline{\lambda}Aa_1^*A = \overline{\lambda}b_2A. \end{aligned}$$

Аналогічно, домножимо рівність $a_2^* = b_2^* + a_1A^*$ на A справа:

$$a_2^*A = b_2^*A + a_1A^*A.$$

Нагадаємо, що $A^*A = AA^*$, та $a_1A = \overline{\lambda}Aa_1$, звідки одержимо

$$\overline{\lambda}Aa_2^* = b_2^*A + \overline{\lambda}Aa_1A^*,$$

або

$$b_2^*A = \overline{\lambda}A(a_2^* - a_1A^*) = \overline{\lambda}Ab_2^*.$$

□

Розглянемо $*$-алгебру $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$, породжену елементами c_1, c_2, C, що задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} c_2^*c_2 - c_2c_2^* &= 1 + C^*C, \quad c_1^*c_1 - c_1c_1^* = 1, \\ C^*C &= CC^*, \\ c_1^*c_2 &= \lambda c_2c_1^*, \quad c_2c_1 = \lambda c_1c_2, \\ c_1^*C &= \lambda Cc_1^*, \quad Cc_1 = \lambda c_1C, \\ C^*c_2 &= \lambda c_2C^*, \quad c_2C = \lambda Cc_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Зауважимо, що зі співвідношень (3) випливає, що елемент C^*C належить центру $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$. Покладемо $d_2 = c_2 + Cc_1^*$. Результат, сформульований нижче, також доводиться за допомогою безпосередньої перевірки.

Лема 2. *Елементи c_1, d_2, C породжують алгебру $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$ та мають місце наступні комутаційні співвідношення*

$$\begin{aligned} d_2^*d_2 - d_2d_2^* &= 1, \\ c_1^*d_2 &= \lambda d_2c_1^*, \quad d_2c_1 - \lambda c_1d_2 = C, \\ d_2^*C &= \overline{\lambda}Cd_2^*, \quad Cd_2 = \overline{\lambda}d_2C. \end{aligned}$$

За допомогою лем, наведених вище, легко показати, що алгебра $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$ є ізоморфною алгебрі $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$:

Твердження 1. *$*$-Алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$ та $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$ є ізоморфними.*

3 Інтегровні зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$

Спочатку ми сформулюємо означення інтегровного зображення $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$ в термінах обмежених операторів.

Означення 3.1. Розглянемо замкнені лінійні оператори C_1, C_2, C, що діють на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Побудуємо ліві полярні розклади $C_i = S_iT_i$, $i = 1, 2$, $C = UT$. Розглянемо також оператори $D_i = S_iT_iS_i^*$, $i = 1, 2$. Будемо казати, що C_1, C_2, C задають інтегровне зображення $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$ якщо

1. Оператори T_1, T_2 та T комутують в сенсі розкладів одиниці;

2. Для довільних обмеженої борелівської дійсної функції $f(\cdot)$ та $i, j = 1, 2$ мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} f(D_1^2)S_1 &= S_1f(1 + D_1^2), \\ f(D_2^2)S_2 &= S_2f(1 + T^2 + D_2^2), \\ f(D_i^2)S_j &= S_jf(D_i^2), \quad f(T)S_j = S_jf(T), \\ f(D_i^2)U &= Uf(D_i^2), \quad f(T)U = Uf(T). \end{aligned}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

3. Ізометрії S_i, $i = 1,2$, та часткова ізометрія U задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$S_1^* S_2 = \lambda S_2 S_1^*, \quad S_2 S_1 = \lambda S_1 S_2,$$
$$S_1^* U = \lambda U S_1^*, \quad U S_1 = \lambda S_1 U,$$
$$S_2^* U = \overline{\lambda} U S_2^*, \quad U S_2 = \overline{\lambda} S_2 U.$$

Зрозуміло також, що це означення можна дати в термінах спектральних проекторів операторів D_i^2 та T.

Дамо тепер означення незвідного інтегрового зображення та унітарно еквівалентних інтегрових зображень алгебри $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$. Позначимо через $E_j(\cdot)$ розбиття одиниці операторів D_j^2, $j = 1,2$, та через $E(\cdot)$ розбиття одиниці оператора T^2.

Означення 3.2. Будемо називати інтегровне зображення алгебри $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$ незвідним, якщо наступна сім'я обмежених операторів $\mathcal{F} = \{S_i,\ S_i^*,\ U,\ U^*,\ E_j(\delta_j),\ E(\delta) \mid \delta, \delta_j \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+),\ j = 1,2\}$ є незвідною.

Означення 3.3. Два інтегровних зображення, яким відповідають сім'ї $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$, назвемо унітарно еквівалентними, якщо $\mathcal{F}_j$, $j = 1,2$, є унітарно еквівалентними.

Теорема 1. *В довільному незвідному інтегровному зображенні $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$ має місце рівність $T = \rho\mathbf{1}$. Кожне незвідне інтегровне зображення алгебри $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$ є унітарно еквівалентним наведеному нижче при деяких фіксованих значеннях параметрів $\rho \geq 0$ та $\phi \in [0, 2\pi)$. Зображення, що відповідають різним парам параметрів не є унітарно еквівалентними.*

1. *Якщо $\rho = 0$, то простір зображення $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ та*

$$T = 0, \quad U = 0$$
$$D_1 = D \otimes \mathbf{1}, \quad D_2 = \mathbf{1} \otimes D,$$
$$S_1 = S \otimes \mathbf{1}, \quad S_2 = d(\lambda) \otimes S.$$

2. *Якщо $\rho > 0$, то простір зображення $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ та*

$$T = \rho \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad D_1 = D \otimes \mathbf{1},$$
$$D_2 = \sqrt{1+\rho^2} \cdot (\mathbf{1} \otimes D),$$
$$U = e^{i\phi} \cdot d(\lambda) \otimes d(\overline{\lambda}), \quad S_1 = S \otimes \mathbf{1},$$
$$S_2 = d(\lambda) \otimes \mathbf{1},$$

де, $\phi \in [0, 2\pi)$ та як і раніше, $D, S, d(\lambda)\colon l_2(\mathbb{Z}_+) \to l_2(\mathbb{Z}_+)$

$$Se_n = e_{n+1}, \quad De_n = \sqrt{n} e_n,$$
$$d(\lambda) e_n = \lambda^n e_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доведення. З Означення 3.1 випливає, що спектральні проектори оператора T комутують зі спектральними проекторами $E_j(\delta_j)$, $\delta_j \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, операторами S_j, S_j^*, $j = 1,2$, та операторами U, U^*. Тоді з леми Шура випливає, що для кожного $\delta \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ проектор $E(\delta)$ є скалярним оператором, тобто або є нульовим, або дорівнює одиничному оператору. Це означає, що знайдеться $\rho \geq 0$ для якого $T = \rho\mathbf{1}$.

Розглянемо випадок $\rho \neq 0$. Тоді оператор U є унітарним, а оператори S_i, S_i^*, $i = 1,2$, D_1, $(1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}} D_2$ задають інтегровне зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$. Зокрема, ізометрії S_1, S_2 є чистими та спектральні розклади D_1, D_2 мають вигляд

$$D_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (S_1^n S_1^{*n} - S_1^{n+1} S_1^{*n+1}),$$
$$D_2 = (1+\rho^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (S_2^n S_2^{*n} - S_2^{n+1} S_2^{*n+1}).$$

Таким чином зображення буде незвідним тоді й лише тоді, коли незвідним буде набір операторів $\mathcal{S} = \{S_i, S_i^*, U, U^*,\ i = 1,2\}$. Аналогічно, інтегровні зображення, що відповідають наборам $\mathcal{S}_i$, $i = 1,2$, будуть унітарно еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\mathcal{S}_1$ та $\mathcal{S}_2$ є унітарно еквівалентними.

Отже нам залишилось одержати класифікацію незвідних зображень сімей опеаторів $\mathcal{S} = \{S_i, S_i^*, U,\ i = 1,2\}$, які задовольняють співвідношеним

$$S_i^* S_i = \mathbf{1}, \quad S_1^* S_2 = \lambda S_2 S_1^*, \quad i = 1,2,$$
$$S_1^* U = \lambda U S_1^*, \quad U S_1 = \lambda S_1 U,$$
$$S_2^* U = \overline{\lambda} U S_2^*, \quad U S_2 = \overline{\lambda} S_2 U,$$

де U–унітарний оператор, а S_1, S_2 є чистими ізометріями. А саме, з результатів роботи [3] випливає, що кожен такий набір, з точністю до унітарної еквівалентності, діє на просторі $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ наступним чином

$$S_1 = S \otimes \mathbf{1}, \quad S_2 = d(\lambda) \otimes S, \quad U = e^{i\phi} \cdot d(\lambda) \otimes d(\overline{\lambda}),$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

де $\phi \in [0, 2\pi)$ фіксований параметр.

Остаточно, за допомогою спектральних розкладів операторів D_1, D_2 одержимо

$$D_1 = D \otimes \mathbf{1}, \quad D_2 = (1+\rho^2)^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} \otimes D.$$

Очевидно, що при різних парах (ρ, ϕ), $\rho > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$, зображення не є унітарно еквівалентними.

Якщо $\rho = 0$ матимемо $T = 0$, $U = 0$. Решта міркувань абсолютно аналогічні застосованим нами для випадку $\rho \neq 0$. □

Повернемось тепер до опису зображень алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$. Наступне означення інтегровного зображення аналогічне означенню інтегровного зображення алгебри $\mathfrak{A}_{2,y}$, породженої твірними a_1, a_2, які задовольняють наступним комутаційним співвідношенням, див. [2],

$$a_i^* a_i = 1 + a_i a_i^*, \quad i = 1, 2 \tag{4}$$
$$a_1^* a_2 = a_2 a_1^*, \quad a_2 a_1 - a_1 a_2 = y.$$

Означення 3.4. Будемо казати, що оператори A_1, A_2, A задають інтегровне зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$, якщо оператори A_1, $B_2 = A_2 - A A_1^*$, A задають інтегровне зображення алгебри $\mathfrak{B}_{\lambda,2}$.

За допомогою Теореми 1 одержимо наступний результат

Теорема 2. *Нехай оператори A_1, A_2, A задають незвідне інтегровне зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,3}$. Тоді, з точністю до унітарної еквівалентності, простір зображення $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ та*

$$A_1 = a \otimes \mathbf{1},$$
$$A_2 = \sqrt{1+\rho^2} \cdot d(\lambda) \otimes a + \rho e^{i\phi} \cdot d(\lambda) a^* \otimes d(\overline{\lambda}), \tag{5}$$
$$A = \rho e^{i\phi} \cdot d(\lambda) \otimes d(\overline{\lambda}).$$

Зображення, що відповідають парам $(\rho_1, \phi_1) \neq (\rho_2, \phi_2)$, де параметр $\rho_1 > 0$, не є еквівалентними. Зображення, що відповідають парам $(0, \phi)$, еквівалентні при всіх $\phi \in [0, 2\pi)$.

Література

1. Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. Том 3. Алгебраическая квантовая теория / Г. А. Сарданашвили – Москва: Либроком, 2011. –234 с.

2. V. Ostrovskyi, D. Proskurin, L. Turowska and Yu. Savchuk, On the structure of homogeneous Wick ideals in Wick *-algebras with braided coefficients, *Rev. Math. Phys.*, **vol. 24**, no.4 (2012), P. 1250007 -utochnit nomera toma, nomera i stranicy.

3. Proskurin D. Stability of a special class of q_{ij}-CCR and extensions of higher-dimensional noncommutative tori /D. Proskurin// Lett. Math. Phys. –2000. –Vol. **52** no. 2. –P. 165-175.

4. Woronowicz S. L. Unbounded elements affiliated with C^*-algebras and noncompact quantum groups / S. L. Woronowicz// Comm. Math. Phys. –1991. –Vol. **136** no. 2. –P. 399-432.

Надійшла до редколегії 01.03.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21

О. Ю. Рагуліна, аспірант

Задача вибору оптимального рівня умовної франшизи в класичній моделі ризику

Розглядається задача вибору оптимального рівня умовної франшизи в динамічній постановці в класичній моделі ризику з точки зору максимізації ймовірності небанкрутства на нескінченному проміжку часу. Виводиться рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для ймовірності небанкрутства у припущенні, що вона є диференційовною, і доводиться існування розв'язку цього рівняння, який задовольняє певні умови. За допомогою перевірочної теореми встановлюється зв'язок цього розв'язку з імовірністю небанкрутства за умови використання оптимальної стратегії.

Ключові слова: ймовірність небанкрутства, класична модель ризику, умовна франшиза, рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана.

E. Yu. Ragulina, Postgraduate Student

A problem of optimal conditional deductible choice in the classical risk model

A problem of optimal conditional deductible choice is considered in a dynamic statement in the classical risk model from viewpoint of ultimate survival probability maximization. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the survival probability is deduced under the assumption that it is differentiable, and existence of the solution of this equation with certain conditions is proved. By the instrumentality of the verification theorem the relation between this solution and the survival probability under the optimal strategy is established.

Key Words: survival probability, classical risk model, conditional deductible, Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

E-mail: lena_ragulina@mail.ru
Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Вступ

Одним з основних показників, що використовуються для оцінки платоспроможності страхової компанії, є її ймовірність небанкрутства. Відсутність банкрутства означає принаймні можливість повного відшкодовування збитків, тому значення цього показника враховується під час розрахунку премій і резервів. Класична модель ризику [1–6] є найпростішою динамічною моделлю, що описує основну діяльність страхової компанії.

У літературі з теорії ризику неодноразово підкреслювалося, що страхова компанія може поліпшувати свою платоспроможність, використовуючи ті чи інші додаткові можливості, особливо перестрахування та інвестування. Наприклад, у роботах [7–9] розв'язувалися задачі оптимального перестрахування в динамічній постановці в класичній моделі ризику, у роботах [10–15] — задачі оптимального інвестування в класичній моделі ризику і деяких її узагальненнях, а в статті [16] — задача оптимального перестрахування й інвестування одночасно.

У цій роботі розглядається можливість встановлення страховою компанією умовної франшизи. Коли страхова компанія використовує умовну франшизу, то вона позбувається відповідальності за збиток, якщо його розмір не перевищує рівень франшизи. Якщо ж розмір збитку перевищує рівень франшизи, то страхова компанія відшкодовує збиток повністю.

Нехай усі об'єкти, що використовуються далі, визначені на стохастичному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$. У класичній моделі ризику припускається, що страхова компанія має деякий невід'ємний початковий капітал x і отримує премії від клієнтів зі сталою інтенсивністю $c > 0$, а кількість вимог, що надійшли від клієнтів на проміжку часу $[0, t]$, є однорідним пуассонівським процесом $N_{cl}(t)$ з параметром $\lambda_{cl} > 0$ ($N_{cl}(0) = 0$). Розміри цих вимог утворюють послідовність невід'ємних випадкових величин $\left\{Y_i^{cl}\right\}_{i=1}^{\infty}$, незалежних й однаково розподілених з функцією розподілу $F_{cl}(y)$. Вважається, що $\mathbf{M}Y_i^{cl} = \mu_{cl} < \infty \quad (i = \overline{1,\infty})$, а процес

© О. Ю. Рагуліна, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$N_{cl}(t)$ не залежить від послідовності $\{Y_i^{cl}\}_{i=1}^{\infty}$. Якщо виконується умова додатності прибутку $c > \lambda_{cl}\mu_{cl}$, то відносна страхова надбавка визначається як $\theta = c/\lambda_{cl}\mu_{cl} - 1$ $(\theta > 0)$.

Будемо додатково припускати, що страхова компанія має можливість у кожний момент часу $t \geqslant 0$ встановлювати умовну франшизу на рівні d_t на основі інформації, що доступна до моменту t, тобто кожна допустима стратегія (d_t) вибору умовної франшизи є передбачуваним процесом відносно природної фільтрації, породженої процесом $N_{cl}(t)$ і послідовністю $\{Y_i^{cl}\}_{i=1}^{N_{cl}(t)}$. Окрім того, припускатимемо, що $0 \leqslant d_t \leqslant d_{max}$, де d_{max} — її максимально допустимий рівень, причому $0 < F_{cl}(d_{max}) < 1$ (зокрема, якщо $d_t = 0$, то франшиза в момент часу t не встановлюється). Тоді премії надходитимуть зі змінною інтенсивністю

$$c(d_t) = \lambda_{cl}(1+\theta)\int\limits_{d_t}^{+\infty} y\, dF_{cl}(y)$$

(страхова надбавка залишається незмінною).

Позначимо τ_i^{cl} $(i = \overline{1,\infty})$ — момент надходження i-ої вимоги, а $X_x^{(d_t)}(t)$ — капітал страхової компанії в момент часу t, якщо її початковий капітал дорівнює x і вона використовує стратегію (d_t), тоді

$$X_x^{(d_t)}(t) = x + \int\limits_0^t c(d_s)\, ds - \sum_{i=1}^{N_{cl}(t)} Y_i^{cl} I\left\{Y_i^{cl} > d_{\tau_i^{cl}}\right\},$$

де $I\{\cdot\}$ — індикатор події.

Момент банкрутства при використанні допустимої стратегії (d_t) визначається як

$$\tau_x^{(d_t)} = \inf\left\{t \geqslant 0 :\ X_x^{(d_t)}(t) < 0\right\},$$

а відповідна ймовірність небанкрутства на нескінченному інтервалі часу як функція початкового капіталу x —

$$\varphi^{(d_t)}(x) = \mathbf{P}\left\{\tau_x^{(d_t)} = \infty\right\}.$$

Наша задача — максимізувати ймовірність небанкрутства страхової компанії, обираючи ті чи інші допустимі стратегії (d_t), тобто знайти

$$\varphi^*(x) = \sup_{(d_t)} \varphi^{(d_t)}(x),$$

і показати, що існує оптимальна стратегія (d_t^*) така, що $\varphi^*(x) = \varphi^{(d_t^*)}(x)$ для всіх $x \geqslant 0$. Далі буде показано, що оптимальна стратегія є функцією тільки поточного капіталу.

Для розв'язання цієї задачі будемо використовувати підхід, що розглядався в роботах [7, 8, 10, 11, 14], а також деякі ідеї доведень результатів з цих робіт. Спочатку встановимо рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для функції $\varphi^*(x)$ у припущенні, що вона є диференційовною, і покажемо, що це рівняння має розв'язок, який задовольняє певні умови. Після цього за допомогою перевірочної теореми встановимо зв'язок між функцією $\varphi^*(x)$ і розв'язком рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана, існування якого вже доведено. Наприкінці розглянемо випадок показниково розподілених розмірів страхових вимог і покажемо, що стратегія, коли умовна франшиза взагалі не використовується, не є оптимальною.

1 Рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для ймовірності небанкрутства

Візьмемо довільне $h > 0$ і розглянемо таку стратегію (d_t), що рівень умовної франшизи в момент часу t дорівнює

$$d_t = d \quad (\text{якщо } 0 \leqslant t \leqslant h \wedge \tau_1^{cl}),$$
$$d_t = \tilde{d}_{t-(h\wedge\tau_1^{cl})}\left(X_x^{(d)}(h\wedge\tau_1^{cl})\right)$$
$$(\text{якщо } t > h\wedge\tau_1^{cl} \text{ і } h\wedge\tau_1^{cl} < \tau_x^{(d)}),$$

де (d) — довільна допустима стала стратегія, а $\left(\tilde{d}_t(x)\right)$ — така допустима стратегія, що $\varphi^{(\tilde{d}_t)}(x) > \varphi^*(x) - \varepsilon$ (тут $\varepsilon > 0$ — деяке довільне фіксоване число). Для цієї стратегії (d_t) за формулою повної ймовірності маємо

$$\begin{aligned}\varphi^*(x) \geqslant \varphi^{(d_t)}(x) &= e^{-\lambda_{cl}h}\varphi^{(d_t)}\big(x + c(d)h\big) + \\ &+ \int\limits_0^h \lambda_{cl}e^{-\lambda_{cl}s}\Bigg(F_{cl}(d)\varphi^{(d_t)}\big(x + c(d)s\big) + \\ &+ \int\limits_d^{d\vee(x+c(d)s)} \varphi^{(d_t)}\big(x + c(d)s - y\big)\, dF_{cl}(y)\Bigg) ds \geqslant \\ &\geqslant e^{-\lambda_{cl}h}\varphi^*\big(x + c(d)h\big) + \\ &+ \int\limits_0^h \lambda_{cl}e^{-\lambda_{cl}s}\Bigg(F_{cl}(d)\varphi^*\big(x + c(d)s\big) + \\ &+ \int\limits_d^{d\vee(x+c(d)s)} \varphi^*\big(x + c(d)s - y\big)\, dF_{cl}(y)\Bigg) ds - \varepsilon.\end{aligned} \tag{1}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Спрямувавши в (1) ϵ до нуля і зробивши елементарні перетворення, отримаємо

$$\frac{\varphi^*(x+c(d)h)-\varphi^*(x)}{h}e^{-\lambda_{cl}h}-\frac{1-e^{-\lambda_{cl}h}}{h}\varphi^*(x)+ \\ +\frac{1}{h}\int\limits_0^h \lambda_{cl}e^{-\lambda_{cl}s}\left(F_{cl}(d)\varphi^*(x+c(d)s)+ \right. \\ \left. +\int\limits_d^{d\vee(x+c(d)s)}\varphi^*(x+c(d)s-y)\,dF_{cl}(y)\right)ds\leqslant 0. \tag{2}$$

Зробимо додаткове припущення, що функція $\varphi^*(x)$ є диференційовною на $[0,\infty)$. Тоді при $h\to 0$ у (2) отримаємо

$$(1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\cdot\left(\varphi^*(x)\right)'+ \\ +\left(F_{cl}(d)-1\right)\varphi^*(x)+\int\limits_d^{d\vee x}\varphi^*(x-y)\,dF_{cl}(y)\leqslant 0. \tag{3}$$

Нерівність (3) виконується для всіх $d\in[0,d_{max}]$, при цьому рівність досягається при значенні d, що відповідає оптимальному керуванню в початковий момент. Отже, маємо рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для $\varphi^*(x)$

$$\sup_{d\in[0,d_{max}]}\left((1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\cdot\left(\varphi^*(x)\right)'+ \right. \\ \left. +\left(F_{cl}(d)-1\right)\varphi^*(x)+\int\limits_d^{d\vee x}\varphi^*(x-y)\,dF_{cl}(y)\right)=0. \tag{4}$$

Відзначимо, що рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\sup_{d\in[0,d_{max}]}\left(A^d\varphi^*(x)\right)=0,$$

де A^d — інфінітезимальний оператор процесу $X_x^{\{d_t\}}(t)$ при $d_t\equiv d$.

Запишемо рівняння (4) у вигляді, більш зручному для подальшої роботи. Оскільки $0<F_{cl}(d_{max})<1$, то виразивши з (3) $\left(\varphi^*(x)\right)'$, отримаємо рівняння для функції $\varphi^*(x)$

$$\left(\varphi^*(x)\right)'=\inf_{d\in[0,d_{max}]}\left(\left(\left(1-F_{cl}(d)\right)\varphi^*(x)- \right. \right. \\ \left. \left. -\int\limits_d^{d\vee x}\varphi^*(x-y)\,dF_{cl}(y)\right)\Big/\left((1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\right)\right). \tag{5}$$

Твердження 1. *Якщо функція $\varphi^*(x)$ є диференційовною на $[0,+\infty)$, то вона задовольняє рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана* (4) і (5).

Зауваження 1. Відзначимо, що якщо рівняння (5) (або (4)) має один розв'язок, то воно має нескінченно багато розв'язків, які відрізняються один від одного сталим множником.

2 Теорема існування розв'язку рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана

Теорема 1. *Якщо випадкові величини Y_i^{cl} ($i=\overline{1,\infty}$) мають щільність розподілу $f_{cl}(y)$, то існує розв'язок $V(x)$ рівняння* (5), *який є неспадною неперервно диференційовною на $[0,+\infty)$ функцією, $V(0)=\theta/(1+\theta)$ і $\theta/(1+\theta)\leqslant\lim\limits_{x\to+\infty}V(x)\leqslant 1$.*

Доведення. Визначимо послідовність функцій $V_n(x)$ ($n=\overline{0,\infty}$) на $[0,+\infty)$ таким чином. Нехай $V_0(x)=\varphi^{(0)}(x)$, де $\varphi^{(0)}(x)$ — імовірність небанкрутства за умови вибору стратегії $d_t\equiv 0$ (тобто за відсутності умовної франшизи), а

$$V_n'(x)=\inf_{d\in[0,d_{max}]}\left(\left(\left(1-F_{cl}(d)\right)V_{n-1}(x)- \right. \right. \\ \left. \left. -\int\limits_d^{d\vee x}V_{n-1}(x-y)\,dF_{cl}(y)\right)\Big/\left((1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\right)\right) \tag{6}$$
$$\left(V_n(0)=\theta/(1+\theta),\quad n=\overline{1,\infty}\right),$$

звідки

$$V_n(x)=\frac{\theta}{1+\theta}+\int\limits_0^x V_n'(u)\,du. \tag{7}$$

Якщо випадкові величини Y_i^{cl} ($i=\overline{1,\infty}$) мають щільність розподілу $f_{cl}(y)$ [17, с. 85, 89], то функція $V_0(x)$ є неперервно диференційовною на $[0,+\infty)$ і задовольняє рівняння

$$V_0'(x)=\frac{V_0(x)-\int\limits_0^x V_0(x-y)f_{cl}(y)\,dy}{(1+\theta)\int\limits_0^{+\infty} y f_{cl}(y)\,dy} \tag{8}$$
$$\left(V_0(0)=\theta/(1+\theta)\right),$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

яке за умови додатності прибутку має єдиний розв'язок, який є неспадною функцією, при цьому $\lim\limits_{x\to+\infty} V_0(x) = 1$ [1–6]. З огляду на (6)

$$V_1'(x) = \inf_{d\in[0,d_{max}]}\left(\left((1-F_{cl}(d))V_0(x) - \int_d^{d\vee x} V_0(x-y)f_{cl}(y)\,dy\right)\Big/\left((1+\theta)\int_d^{+\infty} yf_{cl}(y)\,dy\right)\right) \tag{9}$$
$$(V_1(0) = \theta/(1+\theta)).$$

З (8) і (9) маємо, що $V_1'(x) \leqslant V_0'(x)$ для всіх $x \geqslant 0$, тому з (7) $V_1(x) \leqslant V_0(x)$. Окрім того, з (9) і властивостей $V_0(x)$ випливає, що функція $V_1'(x)$ є невід'ємною і неперервною на $[0,+\infty)$.

Припустимо, що $V_n'(x) \leqslant V_{n-1}'(x)$ для всіх $x \geqslant 0$ (а звідси і $V_n(x) \leqslant V_{n-1}(x)$) і функція $V_n'(x)$ є невід'ємною і неперервною на $[0,+\infty)$. Тоді для всіх $d \in [0, d_{max}]$ і $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\left(1-F_{cl}(d)\right)V_{n-1}(x) - \int_d^{d\vee x} V_{n-1}(x-y)f_{cl}(y)\,dy = \\
&= \int_{d\vee x}^{+\infty} V_{n-1}(x)f_{cl}(y)dy + \int_d^{d\vee x}\left(\int_{x-y}^{x} V_{n-1}'(u)du\right)f_{cl}(y)dy \geqslant \\
&\geqslant \int_{d\vee x}^{+\infty} V_n(x)f_{cl}(y)\,dy + \int_d^{d\vee x}\left(\int_{x-y}^{x} V_n'(u)\,du\right)f_{cl}(y)\,dy = \\
&= \left(1-F_{cl}(d)\right)V_n(x) - \int_d^{d\vee x} V_n(x-y)f_{cl}(y)\,dy,
\end{aligned}$$

а звідси і з (6) випливає, що $V_{n+1}'(x) \leqslant V_n'(x)$ для всіх $x \geqslant 0$ (тому і $V_{n+1}(x) \leqslant V_n(x)$) і функція $V_{n+1}'(x)$ є невід'ємною і неперервною на $[0,+\infty)$.

Отже, ми за індукцією довели, що $\{V_n'(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — незростаюча послідовність невід'ємних і неперервних на $[0,+\infty)$ функцій. Звідси випливає, що існує поточкова границя цих функцій, яку позначимо через $v(x)$.

З (7) видно, що $\{V_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — незростаюча послідовність неспадних функцій, причому ця послідовність обмежена знизу значенням цих функцій у нулі, тобто $\theta/(1+\theta)$. Отже, існує поточкова границя цих функцій, тому за критерієм Коші при кожному фіксованому $X \geqslant 0$ числова послідовність $\{V_n(X)\}_{n=0}^{\infty}$ є фундаментальною.

Покажемо, використовуючи критерій Коші, що послідовність функцій $\{V_n'(x)\}_{n=0}^{\infty}$ збігається рівномірно на кожному відрізку $[0,X]$, де $0 < X < \infty$. Для всіх $m \geqslant 1$ і $n \geqslant 1$ маємо

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,X]} |V_m'(x) - V_n'(x)| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\substack{x\in[0,X],\\ d\in[0,d_{max}]}} \left| \frac{\left(1-F_{cl}(d)\right)\left(V_{m-1}(x) - V_{n-1}(x)\right)}{(1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} yf_{cl}(y)\,dy} - \right. \\
&\left. - \frac{\int\limits_d^{d\vee x}\left(V_{m-1}(x-y) - V_{n-1}(x-y)\right)f_{cl}(y)\,dy}{(1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} yf_{cl}(y)\,dy} \right| \leqslant \qquad (10) \\
&\leqslant \sup_{d\in[0,d_{max}]}\left(\frac{1-F_{cl}(d)}{(1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} yf_{cl}(y)\,dy}\right) \times \\
&\times \sup_{x\in[0,X]} |V_{m-1}(x) - V_{n-1}(x)| = \\
&= \frac{|V_{m-1}(X) - V_{n-1}(X)|}{(1+\theta)\mu_{cl}},
\end{aligned}$$

оскільки

$$\sup_{d\in[0,d_{max}]}\left(\left(1-F_{cl}(d)\right)\Big/\left((1+\theta)\int_d^{+\infty} yf_{cl}(y)\,dy\right)\right)$$

досягається при $d = 0$, а

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,X]} |V_{m-1}(x) - V_{n-1}(x)| = \\
&= \sup_{x\in[0,X]}\left|\int_0^x \left(V_{m-1}'(u) - V_{n-1}'(u)\right)du\right| = \\
&= \left|\int_0^X \left(V_{m-1}'(u) - V_{n-1}'(u)\right)du\right| = \\
&= |V_{m-1}(X) - V_{n-1}(X)|.
\end{aligned}$$

З (10) випливає рівномірна збіжність послідовності $\{V_n'(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на кожному відрізку $[0,X]$. Тому $v(x)$ є неперервною на кожному такому відрізку, а отже, і на $[0,+\infty)$. Позначимо

$$V(x) = \frac{\theta}{1+\theta} + \int_0^x v(u)\,du. \tag{11}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

З (11) видно, що функція $V(x)$ є неперервно диференційовною на $[0,+\infty)$ і $V'(x)=v(x)$. Окрім того, з (11) і того, що послідовність $\{V_n'(x)\}_{n=0}^{\infty}$ є незростаючою, випливає, що $\theta/(1+\theta)\leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} V(x)\leqslant 1$. Оскільки

$$\left|\inf_{d\in[0,d_{max}]}\left(\left((1-F_{cl}(d))V_{n-1}(x)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\int_d^{d\vee x} V_{n-1}(x-y)\,dF_{cl}(y)\right)\Big/\left((1+\theta)\int_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\right)\right)-$$
$$-\inf_{d\in[0,d_{max}]}\left(\left((1-F_{cl}(d))V(x)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_d^{d\vee x} V(x-y)\,dF_{cl}(y)\right)\Big/\left((1+\theta)\int_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\right)\right)\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant \sup_{d\in[0,d_{max}]}\left|\frac{(1-F_{cl}(d))\left(V_{n-1}(x)-V(x)\right)}{(1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\int\limits_d^{d\vee x}\left(V_{n-1}(x-y)-V(x-y)\right)dF_{cl}(y)}{(1+\theta)\int\limits_d^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(1+\theta)\mu_{cl}}\int_0^x\left|V_{n-1}'(u)-V'(u)\right|du\leqslant$$
$$\leqslant \frac{x}{(1+\theta)\mu_{cl}}\sup_{u\in[0,x]}\left|V_{n-1}'(u)-V'(u)\right|$$

і $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{u\in[0,x]}\left|V_{n-1}'(u)-V'(u)\right|=0$, то, переходячи до границі в (6), отримаємо, що $V(x)$ є розв'язком рівняння (5). Теорема доведена.

Залишилося показати, що $\varphi^*(x)$ дійсно збігається з $V(x)/\left(\lim\limits_{x\to+\infty} V(x)\right)$.

3 Перевірочна теорема

Теорема 2. *Нехай $V(x)$ — розв'язок рівняння (5), що задовольняє умови теореми 1. Тоді для будь-якого $x\geqslant 0$ і довільної допустимої стратегії (d_t)*

$$\varphi^{(d_t)}(x)\leqslant V(x)/\left(\lim_{x\to+\infty} V(x)\right), \qquad (12)$$

при цьому рівність в (12) досягається при використанні стратегії $(d_t^*)=\left(d_t^*\left(X_x^{(d_t^*)}(t-0)\right)\right)$, де $\left(d_t^*(x)\right)$ мінімізує праву частину (5), тобто

$$\varphi^*(x)=\varphi^{(d_t^*)}(x)\leqslant V(x)/\left(\lim_{x\to+\infty} V(x)\right).$$

Доведення. Нехай $V(x)$ — розв'язок рівняння (5), що задовольняє умови теореми 1, $(d_t^*)=\left(d_t^*(x)\right)$ — відповідна йому стратегія, (d_t) — довільна допустима стратегія. Покладемо $V(x)=0$ для всіх $x<0$, а під $V'(x)$ в точці $x=0$ будемо розуміти правобічну похідну $V(x)$ у цій точці.

Використовуючи формулу Динкіна [18, с. 11], отримаємо

$$\mathbf{M}V\left(X_x^{(d_t^*)}\left(t\wedge\tau_x^{(d_t^*)}\right)\right)=V(x)+$$
$$+\mathbf{M}\left(\int_0^{t\wedge\tau_x^{(d_t^*)}}\left((1+\theta)\int_{d_s^*}^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\cdot V'\left(X_x^{(d_t^*)}(s)\right)\right)ds+\right.$$
$$+\int_0^{t\wedge\tau_x^{(d_t^*)}}\left(\left(F_{cl}(d_s^*)-1\right)V\left(X_x^{(d_t^*)}\right)+\right. \qquad (13)$$
$$\left.\left.+\int_{d_s^*}^{d_s^*\vee X_s^{(d_t^*)}} V\left(X_x^{(d_t^*)}-y\right)dF_{cl}(y)\right)ds\right),$$

$$\mathbf{M}V\left(X_x^{(d_t)}\left(t\wedge\tau_x^{(d_t)}\right)\right)=V(x)+$$
$$+\mathbf{M}\left(\int_0^{t\wedge\tau_x^{(d_t)}}\left((1+\theta)\int_{d_s}^{+\infty} y\,dF_{cl}(y)\cdot V'\left(X_x^{(d_t)}(s)\right)\right)ds+\right.$$
$$+\int_0^{t\wedge\tau_x^{(d_t)}}\left(\left(F_{cl}(d_s)-1\right)V\left(X_x^{(d_t)}\right)+\right. \qquad (14)$$
$$\left.\left.+\int_{d_s}^{d_s\vee X_s^{(d_t)}} V\left(X_x^{(d_t)}-y\right)dF_{cl}(y)\right)ds\right).$$

Оскільки функція $V(x)$ є розв'язком рівняння (5) (а також і (4)), то з рівностей (13) і (14) випливає, що для всіх $x\geqslant 0$ і $t\geqslant 0$

$$\mathbf{M}V\left(X_x^{(d_t)}\left(t\wedge\tau_x^{(d_t)}\right)\right)\leqslant V(x)=$$
$$=\mathbf{M}V\left(X_x^{(d_t^*)}\left(t\wedge\tau_x^{(d_t^*)}\right)\right). \qquad (15)$$

Покажемо тепер, що для довільної допустимої стратегії (d_t) процес $X_x^{(d_t)}(t)$ є необмеженим

Kyiv National Taras Shevchenko University

з імовірністю 1, якщо банкрутство не відбувається, тобто для всіх $X > 0$

$$\mathbf{P}\left\{X_x^{(d_t)}(t) \leqslant X \ \ \forall t \geqslant 0,\ \tau_x^{(d_t)} = \infty\right\} = 0. \quad (16)$$

Імовірність того, що на будь-якому одиничному проміжку часу надійде більш ніж $(X+c)/d_{max}$ вимог, розміри яких перевищують d_{max}, є додатною, а процес надходження вимог є стаціонарним з незалежними приростами, тому з огляду на лему Бореля-Кантеллі з імовірністю 1 знайдеться ціле $T > 0$ таке, що на проміжку часу $[T, T+1]$ надійде більш ніж $(X+c)/d_{max}$ таких вимог. У цьому разі якщо $X_x^{(d_t)}(t) \leqslant X$ для всіх $t \in [0, T]$, то

$$X_x^{(d_t)}(T+1) < X + c - d_{max}(X+c)/d_{max} = 0,$$

тобто $\tau_x^{(d_t)} < \infty$. Звідси випливає (16).

Візьмемо довільні допустиму стратегію (d_t) і досить мале $\varepsilon > 0$. Оберемо досить велике $X > x$ таке, що $1 - \varphi^{(0)}(X) < \varepsilon$, і позначимо

$$T_X = \inf\left\{t > 0 :\ X_x^{(d_t)}(t) = X\right\},$$

при цьому з огляду на (16) $T_X < \infty$ з імовірністю 1, якщо $\tau_x^{(d_t)} = \infty$. Визначимо стратегію $\left(d_t^{T_X}\right)$ таким чином

$$d_t^{T_X} = \begin{cases} d_t, & \text{якщо } t \leqslant T_X, \\ 0, & \text{якщо } t > T_X. \end{cases}$$

Тоді

$$\mathbf{P}\left\{\tau_x^{(d_t)} = \infty,\ \tau_x^{\left(d_t^{T_X}\right)} < \infty\right\} \leqslant 1 - \varphi^{(0)}(X) < \varepsilon, \quad (17)$$

а з огляду на те, що $\mathbf{P}\{T_X < \infty\} = 1$ і $\mathbf{P}\left\{\lim\limits_{t\to+\infty} X_x^{(0)}(t) = +\infty,\ \tau_x^{(0)} = \infty\right\} = 1$, випливає $\mathbf{P}\left\{\lim\limits_{t\to+\infty} X_x^{\left(d_t^{T_X}\right)}(t) = +\infty,\ \tau_x^{\left(d_t^{T_X}\right)} = \infty\right\} = 1$.

Окрім того, для стратегії $\left(d_t^{T_X}\right)$ (15) запишеться у вигляді

$$\mathbf{M}V\left(X_x^{\left(d_t^{T_X}\right)}\left(t \wedge \tau_x^{\left(d_t^{T_X}\right)}\right)\right) \leqslant V(x) = \mathbf{M}V\left(X_x^{(d_t^*)}\left(t \wedge \tau_x^{(d_t^*)}\right)\right). \quad (18)$$

Оскільки $V\left(X_x^{\left(d_t^{T_X}\right)}\left(\tau_x^{\left(d_t^{T_X}\right)}\right)\right) = 0$ і $V\left(X_x^{(d_t^*)}\left(\tau_x^{(d_t^*)}\right)\right) = 0$, то, поклавши $t \to \infty$ в (18) і враховуючи (17), отримаємо

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\tau_x^{(d_t)} = \infty\right\} - \varepsilon \leqslant \\ &\leqslant \mathbf{P}\left\{\tau_x^{(d_t)} = \infty,\ \tau_x^{\left(d_t^{T_X}\right)} = \infty\right\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{V(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} V(x)} \leqslant \mathbf{P}\left\{\tau_x^{(d_t^*)} = \infty\right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

де $\theta/(1+\theta) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} V(x) \leqslant 1$. Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то з (19) отримаємо твердження теореми.

Зауваження 2. При доведенні теореми 2 брався будь-який розв'язок рівняння (5), що задовольняє умови теореми 1. З твердження теореми 2 випливає єдиність такого розв'язку, при цьому відповідна стратегія (d_t^*) визначається, взагалі кажучи, неоднозначно.

4 Випадок показниково розподілених вимог

Твердження 2. *Якщо розміри страхових вимог мають показниковий розподіл із середнім* μ_{cl} *і* $d_{max} = \mu_{cl}$, *то стратегія* $d_t(x) \equiv 0$ *не є оптимальною.*

Доведення. Якщо стратегія $d_t(x) \equiv 0$ є оптимальною, то функція $\varphi^{(0)}(x)$ є розв'язком рівняння (5), що задовольняє умови теореми 1, тобто $V_1'(x) = V_0'(x)$ для всіх $x \geqslant 0$. Покажемо, що це не так. У цьому разі

$$V_0(x) = \varphi^{(0)}(x) = 1 - \frac{1}{1+\theta}\, e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}},$$

$$V_1'(x) = \inf_{d\in[0,\mu_{cl}]}\left(\frac{e^{-\frac{d}{\mu_{cl}}}\left(1 - \frac{1}{1+\theta}\, e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}\right)}{(1+\theta)(d+\mu_{cl})\, e^{-\frac{d}{\mu_{cl}}}} - \frac{\int\limits_d^{d\vee x}\left(1 - \frac{1}{1+\theta}\, e^{-\frac{\theta(x-y)}{(1+\theta)\mu_{cl}}}\right)\frac{1}{\mu_{cl}}\, e^{-\frac{y}{\mu_{cl}}}\, dy}{(1+\theta)(d+\mu_{cl})\, e^{-\frac{d}{\mu_{cl}}}}\right).$$

Нехай $x \geqslant 0$ — довільне фіксоване число. Розглянемо два випадки.

1) Якщо $d \geqslant x$ (тут, окрім того, $x \in [0, \mu_{cl}]$), то

$$\inf_{d\in[x,\mu_{cl}]}\left(\frac{1+\theta-e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}}{(1+\theta)^2(d+\mu_{cl})}\right) = \frac{1+\theta-e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}}{2\mu_{cl}(1+\theta)^2}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

при $d = \mu_{cl}$.

2) Якщо $d < x$, то

$$\inf_{d\in[0,\mu_{cl}\wedge x]}\left(\frac{e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}\left(e^{\frac{\theta d}{(1+\theta)\mu_{cl}}}-\frac{1}{1+\theta}\right)}{(1+\theta)(d+\mu_{cl})}\right)=$$
$$=\frac{\theta}{\mu_{cl}(1+\theta)^2}\,e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}$$

при $d = 0$, оскільки для всіх $d > 0$

$$\left(\left(e^{\frac{\theta d}{(1+\theta)\mu_{cl}}}-\frac{1}{1+\theta}\right)\Big/(d+\mu_{cl})\right)'_d=$$
$$=\left(\left(\frac{\theta d}{\mu_{cl}}-1\right)e^{\frac{\theta d}{(1+\theta)\mu_{cl}}}+1\right)\Big/\left((1+\theta)(d+\mu_{cl})^2\right)>0.$$

Оскільки

$$\frac{1+\theta-e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}}{2\mu_{cl}(1+\theta)^2}\leqslant\frac{\theta}{\mu_{cl}(1+\theta)^2}\,e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}$$

при $x \leqslant x_0$, де $x_0=\dfrac{(1+\theta)\mu_{cl}}{\theta}\ln\left(1+\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)$, і

$$x_0=\frac{(1+\theta)\mu_{cl}}{\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k\right)<\mu_{cl}$$

(тут $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k<0$, тому що це лейбніцівський ряд), то

$$V_1'(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\theta-e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}}{2\mu_{cl}(1+\theta)^2}, & x\in[0,x_0],\\[2ex] \dfrac{\theta}{\mu_{cl}(1+\theta)^2}e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu_{cl}}}, & x\in(x_0,+\infty),\end{cases}$$

звідки видно, що $V_1'(x) \neq V_0'(x)$ при $x \in [0, x_0]$.

Підставивши конкретні значення параметрів μ_{cl} і θ, можна приблизно знайти $\varphi^*(x)$ і відповідну оптимальну стратегію.

Приклад 1. Якщо розміри страхових вимог мають показниковий розподіл із середнім $\mu_{cl} = 10$, $d_{max} = \mu_{cl}$ і $\theta = 0{,}1$, то результати обчислень показують, що

$$\varphi^{(0)}(x)\approx 1-0{,}9090909\,e^{-x/110}\quad(x\geqslant 0),$$
$$\varphi^*(x)\approx\begin{cases}0{,}111048767\,e^{x/22}, & x\leqslant 8{,}93258,\\ 1-0{,}90382792\,e^{x/110}, & x>8{,}93258,\end{cases}$$

при цьому

$$d_t^*(x)=\begin{cases}10, & x\leqslant 8{,}93258,\\ 0, & x>8{,}93258.\end{cases}$$

Використання цієї оптимальної стратегії $\left(d_t^*(x)\right)$ дозволяє збільшити ймовірність небанкрутства, наприклад, на 22,15% при $x = 0$, на 10,32% при $x = 3$, на 2,83% при $x = 10$, на 1,81% при $x = 20$ тощо, і є особливо корисним при невеликих значеннях початкового капіталу.

Висновки

У роботі розв'язана задача вибору оптимального рівня умовної франшизи в динамічній постановці в класичній моделі ризику, при цьому критерієм оптимальності є максимізація ймовірності небанкрутства страхової компанії на нескінченному проміжку часу. Доведено існування розв'язку рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для ймовірності небанкрутства, який задовольняє певні умови. Встановлено зв'язок цього розв'язку з імовірністю небанкрутства, коли використовується оптимальна стратегія. Розглянуто випадок, коли розміри страхових вимог мають показниковий розподіл, і показано, що стратегія, яка полягає в тому, щоб ніколи не використовувати умовну франшизу, не є оптимальною. Отже, використовуючи оптимальну стратегію вибору рівня умовної франшизи, страхова компанія може поліпшувати свою платоспроможність.

Список використаних джерел

1. *Asmussen S.* Ruin probabilities / Søren Asmussen. — Singapore: World Scientific, 2000. — 385 p.

2. *Мельников А. В.* Математика финансовых обязательств: [науч. изд.] / А. В. Мельников, С. Н. Волков, М. Л. Нечаев. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 260 с.

3. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці: [навч. посіб. для студ. економ. та мат. спеціальностей ун-тів] / М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. — К.: Інформтехніка, 1995. — 380 с.

Kyiv National Taras Shevchenko University

4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: [в 2-х т.] / Вильям Феллер; [пер. с англ. Ю. В. Прохоров]. — М.: Мир, 1967. — Т. 2. — 1967. — 752 с.

5. *Калашников В.В.* Вероятность разорения / В. В. Калашников, Д. Константинидис // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, №. 4. — С. 1055–1100.

6. *Эмбрехтс П.* Некоторые аспекты страховой математики / П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг // Теория вероятностей и ее применения. — 1993. — Т. 38, вып. 2. — С. 374–416.

7. *Schmidli H.* Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting / Hanspeter Schmidli // Scandinavian Actuarial Journal. — 2001. — No. 1. — P. 55–68.

8. *Hipp C.* Optimal dynamic XL reinsurance / Christian Hipp, Michael Vogt // Astin Bulletin. — 2003. — Vol. 33, No. 2. — P. 193–207.

9. *Taksar M. I.* Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios / Michael I. Taksar, Charlotte Markussen // Finance and Stochastics. — 2003. — Vol. 7, Issue 1. — P. 97–121.

10. *Hipp C.* Optimal investment for insurers / Christian Hipp, Michael Plum // Insurance: Mathematics and Economics. — 2000. — Vol. 27, Issue 2. — P. 215–228.

11. *Hipp C.* Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers / Christian Hipp, Michael Plum // Finance and Stochastics. — 2003. — Vol. 7, Issue 3. — P. 299–321.

12. *Liu Chi S.* Optimal investment for an insurer to minimize its probability of ruin / Chi Sang Liu, Hailiang Yang // North American Actuarial Journal. — 2004. — Vol. 8, No. 2. — P. 11–31.

13. *Androshchuk M.* Optimal investment for an insurance company into risky and non-risky assets in the model with variable premium income process / Maryna Androshchuk, Yuliya Mishura // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2008. — Vol. 1 (96). — P. 11–27.

14. *Белкина Т. А.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования. I: Инвестиционные стратегии и вероятность разорения / Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, А. О. Куркина // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16, вып. 6. — С. 961–981.

15. *Белкина Т. А.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования. II: Модель Крамера-Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований / Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, А. О. Куркина // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2010. — Т. 17, вып. 1. — С. 3–24.

16. *Schmidli H.* On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance / Hanspeter Schmidli // The Annals of Applied Probability. — 2002. — Vol. 12, No. 3. — P. 890–907.

17. *Рагуліна О. Ю.* Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою / О. Ю. Рагуліна // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1-2. — С. 82–116.

18. *Øksendal B.* Applied stochastic control of jump diffusions / Bernt Øksendal, Agnès Sulem. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 2005. — 208 p.

Надійшла до редколегії 10.02.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics

УДК 512.6

І. Ю. Раєвська, молодший науковий співробітник М. Ю. Раєвська, молодший науковий співробітник, Я. П. Сисак, провідний науковий співробітник

Локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера-Морено

Доведено, що довільна неметациклічна p-група Міллера-Морено порядку $p^n > 8$ є адитивною групою деякого локального майже-кільця, причому мультиплікативна група кожного такого майже-кільця має порядок $p^{n-1}(p-1)$.

Ключові слова: майже-кільце, локальне майже-кільце, група Міллера-Морено.

I. Iu. Raievska, fellow researcher, M. Iu. Raievska, fellow researcher, Ya. P. Sysak, leading researcher

Local nearrings on non-metacyclic Miller-Moreno groups

It is proved that every non-metacyclic Miller-Moreno p-group of order $p^n > 8$ is the additive group of a local nearring and the multiplicative group of such a nearring is the group of order $p^{n-1}(p-1)$.

Key Words: nearring, local nearring, Miller-Moreno group.

E-mail: raemarina@rambler.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.В.Кириченко

Вступ

Майже-кільця — це множини з двома бінарними операціями, додаванням та множенням, що задовольняють усім аксіомам асоціативного кільця, за винятком комутативності додавання та одного (у нашому випадку, правого) дистрибутивного закону. Майже-кільце з одиницею називається локальним, якщо множина всіх його необоротних елементів утворює підгрупу в адитивній групі цього майже-кільця. Роль локальних майже-кілець в теорії майже-кілець подібна ролі локальних кілець в теорії асоціативних кілець. Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном в роботі [11]. Основні результати, що стосуються локальних майже-кілець та пов'язаних з ними груп можна знайти в огляді [17].

Локальні майже-кільця із скінченною абелевою адитивною p-групою вивчались в роботі [13], де встановлено, зокрема, що кожна абелева p-група, яка не є циклічною групою та не є групою порядку 4, є адитивною групою локального майже-кільця, яке не є кільцем. В [12] описані всі неізоморфні нуль-симетричні локальні майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку p^2, які не є майже-полями. З іншого боку, добре відомо, що узагальнені групи кватерніонів [7] та група діедра порядку 8 [14] не можуть бути адитивними групами ніякого локального майже-кільця. Крім того, в [8] показано, що для кожного простого числа p та цілого $n > p$ існує група порядку p^n, яка не є адитивною групою локального майже-кільця. Зазначимо також, що кожна скінченна p-група може бути вкладена в адитивну групу деякого скінченного майже-кільця, як встановлено в [10]. В даній роботі вивчаються майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера-Морено. Метациклічні адитивні групи Міллера-Морено локальних майже-кілець повністю описані першим та третім авторами в роботі [15].

1 Локальні майже-кільця: означення та основні властивості

Нагадаємо означення (лівого) майже-кільця.

Означення 1. Множина R з двома бінарними операціями " $+$ " та " $\cdot$ " називається (лівим) майже-кільцем, якщо

1) $(R, +)$ — група з нейтральним елементом 0,
2) $(R, \cdot)$ — напівгрупа,
3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ для всіх $x, y, z \in R$.

© І. Ю. Раєвська, М. Ю. Раєвська, Я. П. Сисак, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Група $(R,+)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кільця R. Як випливає з аксіоми 3 означення, для кожного $r \in R$ відображення $x \mapsto r\cdot x$ з $x \in R$ є ендоморфізмом групи R^+, а тому для кожної підгрупи M цієї групи множина $xM = \{x \cdot y | y \in M\}$ є підгрупою в адитивній групі R^+. Зокрема, $x \cdot 0 = 0$ та $x\cdot(-y) = -x\cdot y$ для всіх $x, y \in R$. Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0 \cdot x = 0$, та *майже-кільцем з одиницею* i, якщо напівгрупа $(R,\cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i. Група всіх оборотних елементів моноїда $(R,\cdot)$ називається *мультиплікативною групою* майже-кільця R та позначається через R^*.

Як звичайно, для довільних елементів $r, s \in R$ запис rs означає добуток $r \cdot s$. Далі, для кожного цілого числа n елемент rn визначається як

$$rn = \begin{cases} \underbrace{r + \cdots + r}_{n \text{ раз}} & \text{якщо } n > 0, \\ 0 & \text{якщо } n = 0, \\ \underbrace{(-r) + \cdots + (-r)}_{-n \text{ раз}} & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$$

Очевидно, тоді $r(m+n) = rm + rn$ та $r(sn) = (rs)n$ для довільних цілих чисел m та n, а тому для кожного $r \in R$ відображення $n \mapsto rn$ з $n \in \mathbb{Z}$ є гомоморфізмом адитивної групи $\mathbb{Z}$ в групу R^+.

Якщо S та T — непорожні підмножини майже-кільця R, то через ST позначаємо його підмножину $\{st | s \in S, t \in T\}$.

Означення 2. Підгрупа M адитивної групи R^+ майже-кільці R називається R^*-інваріантною, правою R-підгрупою, лівою R-підгрупою та (R,R)-підгрупою, якщо, відповідно, $R^*M \subseteq M$, $MR \subseteq M$, $RM \subseteq M$ та M одночасно є правою і лівою R-підгрупами в R^+.

Як і для кілець, гомоморфізми майже-кілець — це гомоморфізми їх адитивних груп та мультиплікативних напівгруп одночасно. Зокрема, якщо α — гомоморфізм майже-кільця R, то його ядро $\operatorname{Ker}\alpha$ — нормальна підгрупа в R^+, яка називається *ідеалом* майже кільця R.

Нагадаємо, що експонентою групи є найменше спільне кратне порядків її елементів. Зокрема, експонентою скінченної p-групи є максимальний порядок її елементів. Наступні два твердження елементарні та добре відомі (див., наприклад, [15], лема 5 та [4], лема 1).

Лема 1. *Експонента адитивної групи скінченного майже-кільця R з одиницею i дорівнює адитивному порядку елемента i, який співпадає з адитивним порядком кожного елемента із R^*.*

Лема 2. *Нехай R — майже-кільце з одиницею i. Тоді в групі автоморфізмів $\operatorname{Aut} R^+$ існує підгрупа A, яка ізоморфна мультиплікативній групі R^* та задовольняє умові $i^A = \{i^a \mid a \in A\} = R^*$.*

Підгрупу A, визначену в лемі 2, будемо називати *групою автоморфізмів групи R^+, асоційованою з групою R^**

Означення 3. Майже-кільце R з одиницею називається *локальним*, якщо множина $L = R\backslash R^*$ всіх необоротних елементів із $(R,\cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+, та *майже-полем*, коли $L = 0$.

Як відомо [18], адитивна група скінченного майже-поля елементарна абелева. Очевидно також, що якщо підгрупа L є ідеалом локального майже-кільця R, то R/L є майже-полем. Наступна лема, яка випливає з [6] (леми 3.2, 3.5, 3.9 та наслідок 3.8), характеризує основні властивості скінченних локальних майже-кілець.

Лема 3. *Нехай R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — підгрупа в R^+ всіх необоротних елементів із R. Тоді R^+ — p-група для деякого простого p, експонента якої збігається з порядком елемента i в R^+, та виконуються наступні твердження:*

1) *L — ідеал в R та (R,R)-підгрупа в R^+;*
2) *кожна власна R^*-інваріантна підгрупа із R^+ міститься в L;*
3) *множина $i+L$ утворює нормальну силовську p-підгрупу мультиплікативної групи R^*;*
4) *фактор-група R^+/L є елементарною абелевою p-групою;*
5) *фактор-група $R^*/i+L$ ізоморфна мультиплікативній групі майже-поля R/L.*

Випадок, коли підгрупа L циклічна, розглянутий в [3].

Kyiv National Taras Shevchenko University

Лема 4. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n з $n > 2$, підгрупа L якого циклічна та $L \neq 0$. Тоді R^+ — циклічна група та L її підгрупа порядку p^{n-1}.*

2 Про групи Міллера-Морено

Нагадаємо, що скінченна група називається мінімальною неабелевою групою або групою Міллера-Морено, якщо вона неабелева, а всі її власні підгрупи є абелевими. Будова таких груп добре відома і повністю описується наступною теоремою (див. [16]).

Теорема 1. *Скінченні групи Міллера-Морено вичерпуються групами наступних типів:*

1) *група кватерніонів Q_8;*

2) *група $G = <a> \leftthreetimes <b>$ порядку p^{m+n} (p — просте число) з $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{m-1}}$, де $m \geqslant 2$, $n \geqslant 1$;*

3) *група $G = (<a> \times <c>) \leftthreetimes <b>$ порядку p^{m+n+1} (p — просте число) з $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $|c| = p$, $b^{-1}ab = ac$, $b^{-1}cb = c$, де $m \geqslant n \geqslant 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$;*

4) *група $G = P \leftthreetimes <b>$ порядку $p^r q^s$ з елементарною абелевою підгрупою P порядку p^r, на якій елемент b індукує незвідний автоморфізм простого порядку q, причому $b^{q^s} = 1$ та $<b^q> b = Z(G)$, де p, q — різні прості та r, s — натуральні числа.*

Надалі, для кожного простого числа p та натуральних чисел m, n з $m \geqslant n \geqslant 1$ та $m > 1$ при $p = 2$ позначимо через $G(p^m, p^n, p)$ напівпрямий добуток $(<a> \times <c>) \leftthreetimes <b>$, де $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $|c| = p$, $b^{-1}ab = ac$ та $b^{-1}cb = c$. Як видно з теореми 1, кожна неметациклічна p-група Міллера-Морено ізоморфна групі $G(p^m, p^n, p)$.

Лема 5. *Експонента групи $G(p^m, p^n, p)$ дорівнює p^m. Крім того, якщо x — елемент порядку p^m та $m > 1$, то твірний елемент a цієї групи можна вибрати так, щоб він співпадав з x.*

Доведення. Дійсно, для кожного $x \in G(p^m, p^n, p)$ існують цілі числа α, β та γ такі, що $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Тому $x^{p^m} = (a^\alpha b^\beta c^\gamma)^{p^m} = (a^\alpha b^\beta)^{p^m} c^{\gamma p^m} = a^{\alpha p^m} b^{\beta p^m} c^{-\alpha\beta\binom{p^m}{2}} = a^{p^m \alpha} b^{p^m \beta} c^{-\alpha\beta \frac{p^m(p^m-1)}{2}} = 1$. Оскільки $|a| = p^m$ та $m \geqslant n \geqslant 1$ з $m > 1$ при $p = 2$, то p^m — експонента групи G.

Якщо ж $|x| = p^m$, то за тією ж формулою

$$x^{p^{m-1}} = a^{p^{m-1}\alpha} b^{p^{m-1}\beta} \neq 1,$$

звідки або $(\alpha, p) = 1$, або $m = n$ та $(\beta, p) = 1$. Враховуючи, що в останньому випадку твірні a та b можна поміняти місцями, без обмеження загальності можна вважати, що $(\alpha, p) = 1$. Тоді

$$<x, b> = <a^\alpha b^\beta c^\gamma, b> = <a^\alpha, b> = <a, b> = G$$

та

$$b^{-1}xb = (ac)^\alpha b^\beta c^\gamma = (a^\alpha b^\beta c^\gamma) c^\alpha = x c^\alpha.$$

Отже, замінивши c елементом c^α, для твірних x та b групи $G(p^m, p^n, p)$ отримуємо ті ж самі співвідношення, що і для твірних a та b, тобто a можна замінити на x. Лему доведено.

Наступні дві леми стосуються груп автоморфізмів груп Міллера-Морено. Перша з них безпосередньо випливає з наслідку теореми 1 роботи В. Нагребецького [1].

Лема 6. *Нехай $G = G(p^m, p^n, p)$ для деякого простого p та $m > n$. Тоді порядок групи автоморфізмів $Aut\,G$ є числом виду $p^l(p-1)^2$ для деякого $l \geqslant 2$.*

Лема 7. *Нехай $G = G(p^m, p^m, p)$ та A — підгрупа порядку $p^{2m-1}(p^2-1)$ групи $Aut\,G$, де $m > 1$ при непарному p та $m > 2$ при $p = 2$. Якщо $g \in G$ — елемент порядку p^m та A має нормальну силовську p-підгрупу, то $G \neq g^A \cup Z(G)$.*

Доведення. Припустимо, що, навпаки, $G = g^A \cup Z(G)$. За означенням $G = (<a> \times <c>) \leftthreetimes <b>$ з твірними a, b порядку p^m та центральним комутатором $c = [a, b]$ порядку p. Звідси $Z(G) = <a^p> \times <c> \times <b^p>$, а отже всі елементи порядку p^m містяться в g^A. Зокрема, $a = g^u$ для деякого $u \in A$, звідки $g^A = a^A$, тобто $G = a^A \cup Z(G)$. Оскільки $|G| = p^{2m+1}$ та $|Z(G)| = p^{2m-1}$, то $|a^A| = |G| - |Z(G)| = p^{2m-1}(p^2-1)$ і тому $C_A(a) = 1$. Покладемо $q = p^{m-1}$ та $G^q = <g^q | g \in G>$. Прості обчислення, аналогічні зробленим в доведенні леми 5, показують, що $G^q = <a^q> \times <b^q>$, а отже $|G^q| = p^2$. Крім того, $Z(G)^q = 1$, і тому з рівності $G = a^A \cup Z(G)$ випливає $G^q = (a^q)^A \cup \{1\}$. Отже $|(a^q)^A| = p^2 - 1$,

Kyiv National Taras Shevchenko University

звідки $|C_A(a^q)| = p^{2m-1}$ і, таким чином, $C_A(a^q)$ — нормальна силовська p-підгрупа групи A. Тоді $C_A(a^q) = C_A(a^q)^A = C_A((a^q)^A)$ і з рівності $G^q = (a^q)^A \cup \{1\}$ отримуємо $C_A(a^q) = C_A(G^q)$. Ясно також, що $C_A(a^q)$ централізує підгрупу $< c >$, оскільки остання є характеристичною підгрупою порядку p групи G. Тому, враховуючи рівність $Z(G) = G^q \times < c >$, маємо $C_A(a^q) = C_A(Z(G))$.

Очевидно, що для кожного $u \in C_A(a^q)$ існують цілі числа α, β та γ такі, що $a^u = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Тоді $a^q = (a^q)^u = (a^u)^q = a^{q\alpha} b^{q\beta}$, звідки $q\alpha \equiv q\,(\mod p^m)$ та $q\beta \equiv 0\,(\mod p^m)$, а отже $\alpha \equiv 1\,(\mod p)$ та $\beta \equiv 0\,(\mod p)$. Визначимо відображення $\phi : C_A(a^q) \to Z(G)$ за правилом $u^\phi = [a, u]$ для кожного $u \in C_A(a^q)$. Враховуючи, що $[a, u] = a^{-1}a^u = a^{\alpha-1}b^\beta \in Z(G)$ та $[a, uv] = [a, v][a, u]^v$ для довільних $u, v \in C_A(a^q)$, маємо $[a, uv] = [a, u][a, v]$, тобто ϕ — гомоморфізм групи $C_A(a^q)$ в $Z(G)$. Більш того, оскільки $C_A(a) = 1$, то ϕ — ізоморфізм, а тому $Z(G) = [a, C_A(a^q)]$. З того, що $b = a^v$ для деякого $v \in A$ та $C_A(a^q)$ — нормальна підгрупа в A, маємо $[b, C_A(a^q)] = [a^v, C_A(a^q)] = [a, C_A(a^q)]^v = Z(G)^v = Z(G)$, звідки $[G, C_A(a^q)] = Z(G)$.

Нехай тепер $1 \neq u \in C_A(a^q)$. З рівності $C_A(a^q) = C_A(Z(G))$, доведеної вище, випливає, що централізатор $C_G(u)$ містить центр $Z(G)$ і, зокрема, є нормальною підгрупою в G. Отже, порядок фактор-групи $G/C_G(u)$ не перевищує p^2, звідки в силу ізоморфізму $G/C_G(u) \cong [G, u]$ маємо $|[G, u]| \leqslant p^2$. Це означає, що існують елементи $x, y \in G \setminus Z(G)$, для яких $[x, u] = [y, u]$ та $xy^{-1} \notin Z(G)$. Звідси, відповідно, отримуємо $[xy^{-1}, u] = 1$ та $xy^{-1} = a^v$ для деякого $v \in A$. Отже, $[a^v, u] = 1$, звідки $[a, vuv^{-1}] = 1$. Але тоді $vuv^{-1} \in C_A(a) = 1$, тобто $u = 1$, що суперечить вибору елемента u. Лема доведена.

3 Майже-кільця з одиницею на групах Міллера-Морено

Зауважимо спочатку, що з теореми 1 та леми 1, випливає наступне твердження.

Лема 8. *Якщо R — майже-кільце з одиницею, адитивна група R^+ якого є групою Міллера-Морено, то R^+ є p-групою для деякого простого числа p.*

Доведення. Дійсно, в протилежному разі R^+ є групою порядку $p^r q^s$, що задовольняє умові 4) теореми 1. Оскільки остання є групою експоненти pq^s, в якій не існує елементів порядку pq^s,то отримали протиріччя з лемою 1. Лема доведена.

Нагадаємо, що майже-кільця з одиницею на метациклічних p-групах Міллера-Морено були охарактеризовані в роботі [15]. Тому далі в цьому розділі R — майже-кільце з одиницею i, адитивна група R^+ якого є неметациклічною p-групою Міллера-Морено, тобто ізоморфною групі $G(p^m, p^n, p)$ для деяких натуральних чисел m та n. Це означає, що $R^+ = < a > + < b > + < c >$ з твірними елементами a, b та їх комутатором $c = -a - b + a + b$ такими, що $ap^m = bp^n = cp = 0$ та $-a + c + a = -b + c + b = c$. Зокрема, кожний елемент $x \in R$ однозначно записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 \in R$ з коефіцієнтами $0 \leqslant x_1 < p^m$, $0 \leqslant x_2 < p^n$ і $0 \leqslant x_3 < p$.

Лема 9. *Твірний елемент a з групи R^+ можна вибрати як одиничний елемент майже-кільця R, тобто вважати, що $i = a$.*

Доведення. Оскільки за лемою 1 одиниця i є елементом максимального порядку в групі R^+, то за лемою 5 твірний елемент a цієї групи можна вибрати так, щоб він співпадав з i. Лему доведено.

В силу леми 9, надалі покладаємо $ax = xa$ для всіх $x \in R$. Крім того, кожному x однозначно відповідають класи лишків $\alpha(x) \bmod p^m$, $\beta(x) \bmod p^n$ та $\gamma(x) \bmod p$, що визначають відображення $\alpha : R \to \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta : R \to \mathbb{Z}_{p^n}$ та $\gamma : R \to \mathbb{Z}_p$, для яких

$$(*) \qquad xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x).$$

Лема 10. *Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$, $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in R$, то*

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) +$$
$$+c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} - \alpha(x)\beta(x)\binom{y_2}{2} - x_2\alpha(x)y_1y_2 +$$
$$+x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_3 - x_2\alpha(x)y_3),$$

причому відображення $\alpha : R \to \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta : R \to \mathbb{Z}_{p^n}$ та $\gamma : R \to \mathbb{Z}_p$ задовольняють наступним співвідношенням:

1) $\alpha(xy) \equiv x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y)\ (\mod p^m)$,

2) $\beta(xy) \equiv x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y)\ (\mod p^n)$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

3) $\gamma(xy) \equiv -x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\binom{\beta(y)}{2} -$

$$-x_2\alpha(x)\alpha(y)\beta(y) + x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) +$$

$$+x_1\beta(x)\gamma(y) - x_2\alpha(x)\gamma(y) \ (\mod p).$$

Доведення. З рівності $c = -a - b + a + b$ та закону лівої дистрибутивності випливає

$$xc = -xa - xb + xa + xb = -x - xb + x + xb$$

Враховуючи рівність (*) та співвідношення між елементами a, b, c в групі R^+, звідси виводимо

$$xc = c(x_1\beta(x) - x_2\alpha(x)).$$

Отже,

$$xy = (ax_1 + bx_2 + cx_3)y_1 + (a\alpha(x) + b\beta(x) +$$

$$+c\gamma(x))y_2 + (cx_1\beta(x) - x_2\alpha(x))y_3.$$

Далі маємо

$$(ax_1 + bx_2)y_1 = ax_1y_1 + bx_2y_1 - cx_1x_2\binom{y_1}{2},$$

$$(a\alpha(x) + b\beta(x))y_2 =$$

$$= a\alpha(x)y_2 + b\beta(x)y_2 - c\alpha(x)\beta(x)\binom{y_2}{2}$$

та

$$bx_2y_1 + a\alpha(x)y_2 = a\alpha(x)y_2 + bx_2y_1 - cx_2\alpha(x)y_1y_2.$$

Звідси отримуємо:

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) +$$

$$+c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} - \alpha(x)\beta(x)\binom{y_2}{2} - x_2\alpha(x)y_1y_2 +$$

$$+x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_3 - x_2\alpha(x)y_3).$$

З закону асоціативності випливає, що $x(yb) = (xy)b$ та $x(yc) = (xy)c$ для всіх $x, y \in R$. Застосовуючи ліву дистрибутивність та (*) до обох частин цих рівностей і прирівнюючи коефіцієнти при елементах a, b, c, отримаємо співвідношення 1)–3) цієї леми. Лема доведена.

Як наслідок леми 10, маємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Майже-кільце з одиницею R нуль-симетричне тоді і тільки тоді, коли* $\alpha(0) \equiv 0 \ (\mod p^m)$, $\beta(0) \equiv 0 \ (\mod p^n)$, $\gamma(0) \equiv 0 \ (\mod p)$.

4 Локальні майже-кільця на неметациклічній p-групі Міллера-Морено

Нехай тепер R — локальне майже-кільце, адитивна група R^+ якого ізоморфна групі $G(p^m, p^n, p)$, та L — підгрупа в R^+ всіх необоротних елементів із R, а отже $R = R^* \cup L$. Тоді $R^+ = <a> + <b> + <c>$ з елементами a, b, c, що задовольняють співвідношенням, заданим вище в попередньому розділі. Зокрема, a — одиничний елемент в R та $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$ для кожного $x \in R$.

Лема 11. *Якщо $m = n = 1$, то L — підгрупа індексу p в R^+ .*

Доведення. Дійсно, оскільки $|R| = p^3$, то при $|R^+ : L| > p$ підгрупа L була б циклічною, а отже за лемою 4 такою була б і група R^+. Протиріччя. Лема доведена.

Доведення наступної лема ґрунтується на обчисленнях, виконаних з використанням системи комп'ютерної алгебри GAP, версія 4.5.6, та її пакету "SONATA" (див. [9] та [5]).

Лема 12. *Якщо порядок майже-кільця R не перевищує 32, то L — підгрупа індексу 2 в R^+.*

Теорема 2. *Нехай R — локальне майже-кільце з неметациклічною адитивною p-групою Міллера-Морено та $L = R \setminus R^*$. Тоді:*

1) L — підгрупа індексу p в R^+, зокрема $L = <ap> + <b> + <c>$;

2) $R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 \mid x_1 \not\equiv 0 \ (\mod p)\}$.

Доведення. За твердженням 2) леми 3 підгрупа L необоротних елементів майже-кільця R містить центр Z групи R^+. Оскільки

$$Z = <ap> + <bp> + <c>$$

є підгрупою індексу p^2 в R^+, то індекс підгрупи L в R^+ ділить p^2.

Припустимо, що $|R^+ : L| = p^2$, тобто $L = Z$, та нехай A — підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}\, R^+$, асоційована з групою R^*. Тоді за лемою 2 підгрупа A ізоморфна мультиплікативній групі R^* майже-кільця R та задовольняє умові $a^A = \{a^u \mid u \in A\} = R^*$. Отже, $R = R^* \cup L = a^A \cup Z$. Крім того, оскільки $L = R \setminus R^*$, то

$$|R^*| = |R| - |L| = p^{m+n+1} - p^{m+n-1} =$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$= p^{m+n-1}(p^2-1).$$

Тому за твердженням 3) леми 3 група R^*, а отже і A, є групою порядку $p^{m+n-1}(p^2-1)$ з нормальною силовською p-підгрупою. З іншого боку, як випливає з леми 7, у випадку $m=n$ маємо $R \neq aA \cup Z$ при $m>1$ для непарного p та при $m>2$ для $p=2$. Отже, якщо $m=n$, то або $p>2$ та $m=n=1$, або $p=2$ та $m=n=2$. Однак, перший випадок неможливий за лемою 11, а другий — за лемою 12. Якщо ж $m>n$, то за лемою 6 порядок підгрупи A, тобто $p^{m+n-1}(p^2-1)$, повинен ділити число виду $p^l(p-1)^2$, що теж неможливо. Отримане протиріччя означає, що наше припущення хибне, а тому $|R^* : L| = p$. Враховуючи, що $Z \subset L$, $a \notin L$ та $ap \in L$ за твердженням 4) леми 3, звідси отримуємо $L = <ap> + <b> + <c>$. Нарешті, з того, що $R^* = R \setminus L$, випливає

$$R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 \mid x_1 \not\equiv 0 \pmod p\}.$$

Теорема доведена.

Застосовуючи твердження 1) теореми 2 до формули множення з леми 10, згідно з яким $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) \in L$ для всіх $x \in R$, отримуємо наступну формулу множення елементів $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ в локальному майже-кільці R з адитивною групою, що ізоморфна групі $G(p^m, p^n, p)$.

Наслідок 2. *Якщо $x, y \in R$, то*

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) +$$
$$+c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_1),$$

де для функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ виконуються співвідношення 1) та 2) леми 10, причому

$$x_1 \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow \beta(x) \not\equiv 0 \pmod p$$

та $\alpha(x) \equiv 0 \pmod p$, а функція $\gamma(x)$ задовольняє співвідношенню

$$\gamma(xy) \equiv \gamma(x)\beta(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) -$$
$$-x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2} \pmod p.$$

5 Неметациклічні p-групи Міллера-Морено як адитивні групи локальних майже-кілець

Всюди до кінця цього розділу $G \in$ групою $G(p^m, p^n, p)$, записаною адитивно, тобто $G = <a> + <b> + <c>$ з елементами a, b, c, що задовольняють співвідношенням $ap^m = bp^n = cp = 0$, $-b+a+b = a+c$ та $-a+c+a = -b+c+b = c$. Зокрема, кожний елемент $x \in R$ єдиним чином записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ з коефіцієнтами $0 < x_1 < p^m$, $0 < x_2 < p^n$ та $0 < x_3 < p$.

Лема 13. *Якщо $x, y \in G$ з $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ та*

$$x \cdot y = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) +$$
$$+c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_1),$$

де для функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ виконуються співвідношення 1) та 2) леми 10, причому

$$x_1 \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow \beta(x) \not\equiv 0 \pmod p$$

та $\alpha(x) \equiv 0 \pmod p$, а функція $\gamma(x)$ задовольняє співвідношенню

$$\gamma(xy) \equiv \gamma(x)\beta(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) -$$
$$-x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2} \pmod p,$$

то $R = (G, +, \cdot)$ — локальне майже-кільце.

Доведення. Легко бачити, що елемент a є мультиплікативною одиницею для $(G, \cdot)$ та $x \cdot b = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$ для кожного $x \in G$.

Отже, щоб показати, що система $R = (G, +, \cdot)$ є майже-кільцем з одиничним елементом a відносно операцій "$+$" та "$\cdot$", достатньо перевірити, що для довільних елементів $y, z \in G$ виконуються рівності $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ та $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot \epsilon$, тобто ліво-дистрибутивний та асоціативний закони. Оскільки задана в лемі формула множення $x \cdot y$ елементів $x, y \in G$ повторює формулу множення з леми 10, яка була виведена з використанням цих законів, то така перевірка є рутинним повторенням аналогічних міркувань і ми її опускаємо.

Покажемо далі, що $R \in$ локальним майже-кільцем, підгрупа $L = <ap> + <b> + <c>$ якого складається з усіх необоротних елементів з R. Очевидно, достатньо довести, що елемент

Kyiv National Taras Shevchenko University

$x = ax_1 + bx_2 + cx_3$, тоді і тільки тоді є оборотним справа, коли $x_1 \not\equiv 0 \pmod p$, оскільки в цьому випадку множина $R \backslash L$ збігається з мультиплікативною групою R^*.

Дійсно, якщо x — оборотний справа, то існує елемент $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ такий, що $x \cdot y = a$. За нашим означенням для $x \cdot y$ випливає, що

$$x_1y_1 + \alpha(x)y_2 \equiv 1 \pmod{p^m}.$$

Але тоді $x_1y_1 \equiv 1 \pmod p$, бо $\alpha(x) \equiv 0 \pmod p$ за умовою наслідку 2, звідки $x_1 \not\equiv 0 \pmod p$.

Навпаки, якщо має місце останнє, то $\beta(x) \equiv 1 \pmod p$ за умовою наслідку 2, а отже існують натуральні числа y_1, y_2, y_3 такі, що

$$x_1y_1 + \alpha(x)y_2 \equiv 1 \pmod{p^m},$$

$$x_2y_1 + \beta(x)y_2 \equiv 0 \pmod{p^n}$$

та $-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_3 \equiv 0 \pmod p$. Поклавши $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ та

$$z_1 = 1 + \alpha(x)y_2,$$

маємо $x \cdot y = az_1$. Оскільки $\alpha(x) \equiv 0 \pmod p$, існує таке натуральне число s, що $z_1s \equiv 1 \pmod{p^m}$, звідки

$$x \cdot (ys) = (x \cdot y)s = (az_1)s = a.$$

Таким чином, елемент x є оборотним справа, а тому майже-кільце R є локальним. Лему доведено.

Покладемо тепер $\alpha(x) \equiv p^kx_2 \pmod{p^m}$, $\beta(x) \equiv x_1 \pmod{p^n}$ та $\gamma(x) \equiv 0 \pmod p$, де $m - n \leqslant k \leqslant m$. Тоді має місце наступна теорема.

Теорема 3. *В групі $G = G(p^m, p^n, p)$ операція "$\bullet$", задана як*

$$x \bullet y = a(x_1y_1 + p^kx_2y_2) + b(x_2y_1 + x_1y_2) +$$

$$+c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + x_1^2y_3),$$

є асоціативною та ліво-дистрибутивною по відношенню до операції "+" групи G та визначає деяке нуль-симетричне локальне майже-кільце $(G, +, \bullet)$.

Доведення. Покажемо, що відображення $\alpha(x) \equiv p^kx_2 \pmod{p^m}$, $\beta(x) \equiv x_1 \pmod{p^n}$ та $\gamma(x) \equiv 0 \pmod p$, де $m - n \leqslant k \leqslant m$ задовольняють умови леми 13. Дійсно,

$$x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) = x_1p^ky_2 + p^kx_2y_1 =$$

$$= p^k(x_2y_1 + x_1y_2) = p^k(x_2y_1 + \beta(x)y_2) = \alpha(x \bullet y)$$

та

$$x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) = x_2p^ky_2 + x_1y_1 =$$

$$= x_1y_1 + p^kx_2y_2 = x_1y_1 + \alpha(x)y_2 = \beta(x \bullet y).$$

Очевидно також, що виконуються наступні умови:

$$x_1 \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow \beta(x) \not\equiv 0 \pmod p,$$

$$\gamma(xy) \equiv \gamma(x)\beta(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) -$$

$$-x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2} \pmod p.$$

Теорему доведено.

6 Про локальні майже-кільця порядку 32

Повну інформацію про всі локальні майже-кільця, порядок яких не вище 31, можна отримати з пакету "SONATA" [5] системи комп'ютерної алгебри GAP 4.5.6 [9]. Використовуючи мову програмування системи GAP, нами побудовані загальні алгоритми, які дозволяють також класифікувати всі локальні майже-кільця порядку 32. Зокрема, існують дві неметациклічні групи Міллера-Морено такого порядку, а саме — групи $G(4, 4, 2)$ та $G(8, 2, 2)$. З використанням суперкомп'ютера Інституту кібернетики НАН України, побудовані всі локальні майже кільця з такими адитивними групами, серед яких існує 1396 неізоморфних майже-кілець на групі $G(4, 4, 2)$ та 1944 — на групі $G(8, 2, 2)$. Бібліотека цих майже-кілець міститься на 12 архівних файлах об'ємом не вище 100 Kbit і може бути реалізована на будь-якому персональному комп'ютері з Windows чи Linux, на яких інстальована система GAP 4.5.6 з пакетом "SONATA".

Kyiv National Taras Shevchenko University

Список використаних джерел

1. *Нагребецкий В. Т.* Группы автоморфизмов конечных групп Миллера-Морено / В. Т. Нагребецкий // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1980. — №5. — С. 75–77.

2. *Раєвська І. Ю.* Локальні майже-кільця на неметациклічній p-групі Міллера-Морено / І. Ю. Раєвська // Вісн. Київ. Ун-ту. Математика, Механіка. — 2011. — 25. — С. 43–45.

3. *Раєвська М. Ю.* Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера-Морено / М. Ю. Раєвська // Вісн. Київ. Ун-ту. Математика, Механіка. - 2011. - 25 - С. 45 - 48.

4. *Раєвська М. Ю.* Про локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера-Морено / М. Ю. Раєвська, Я. П. Сисак // Укр. мат. журн. — 2012. — Т.64, №6. — С. 811–818.

5. *Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P. and Noebauer C.* SONATA – System of Nearrings and their Applications, Version 2.5. Johannes Kepler Universitaet Linz, 2011 (http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Sonata/).

6. *Amberg B.* Local near-rings with dihedral multiplicative group / B. Amberg, P. Hubert, Ya. Sysak // Journal of Algebra. — 2004. — 273. — P. 700–717.

7. *Clay J. R.* The near-rings with identities on generalized quaternion groups / J. R. Clay, C. J. Maxson // 1st Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. — 1970. — A 104. — P. 525–530.

8. *Feigelstock S.* Additive Groups of Local Near-Rings / S. Feigelstock // Communications in Algebra. —2006. —34.— P. 743 – 747.

9. The GAP Group, Aechen, St Andrews. GAP – Groups, Algoritms, and Programming, Version 4.5.6, 2012 (http://www.gap.dcs.st-and.ac.uk/ gap).

10. *Hubert P.* Local nearrings and triply factorized groups / P. Hubert // Communications in Algebra. —2004.— 32. —P. 1229—1235.

11. *Mazon C. J.* On local near-rings / C. J. Maxon // Math. Z. — 1968. — 106. — P. 197–205.

12. *Mazson C. J.* Local near-rings of cardinality p^2 / C. J. Maxson // Canad. Math. Bull. — 1968. — vol. 11, no. 4.

13. *Mazson C. J.* On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian p-groups / C. J. Maxson // Quart. J. Math. Oxford (2). — 1970. — 21. — P. 449–457.

14. *Mazson C. J.* On the construction of ?nite local near-rings (I): on non-abelian p-groups / C. J. Maxson // Quart. J. Math. Oxford (2). —1971. —22. —P. 65–72.

15. *Raievska I. Yu.* Finite local nearrings on metacyclic Miller-Moreno p-groups / I. Yu. Raievska, Ya. P. Sysak // Algebra and Discrete Mathematics. — 2012. — V. 13, №. 1. — P. 111–127.

16. *Redei L.* Das "schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören / L. Redei // Comment. Math. Helv. — 1947. — 20. — P. 225—264.

17. *Sysak Ya. P.* Products of groups and local nearrings / Ya. P. Sysak // Note Mat. — 2008. — 28, no. 2. — P. 177 - 211.

18. *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper / H. Zassenhaus // Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg. — 1935/36. — 11. — P. 187–220.

Надійшла до редколегії 22.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 517.98

Ющенко Г.Ю., *аспірант*

L_p-розв'язки інтегрального рівняння з ядром типу згортки на дійсній осі

Отримано критерій обмеженості або інтегровності зі степенем p розв'язків лінійного інтегрального рівняння на дійсній осі з ядром типу згортки в банаховому просторі.

Ключові слова: інтегровна зі степенем p функція, лінійні інтегральні рівняння, згортка, перетворення Фур'є.

Yushchenko G.Y., *PhD student*

L_p-solutions of integral convolution equation on the whole line

We obtain a criterion for solutions of a linear integral convolution equation in Banach space on the whole line to be bounded or pth power integrable.

Key Words: integrable with pth power function, linear integral equations, convolution, Fourier transform.

E-mail: anna.ell99@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

1 Вступ

Нехай X – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\bar{0}$; $\mathcal{L}(X)$ – простір лінійних неперервних операторів, що діють з X в X, I та O – відповідно одиничний та нульовий оператор з $\mathcal{L}(X)$. Будемо позначати через $L_p(\mathbb{R}, X)$ простір усіх сильно вимірних функцій $x : \mathbb{R} \to X$, для яких $\|x\|_p := (\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p dt)^{1/p} < \infty$ при $p \in [1; +\infty)$ і $\|x\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| < \infty$ при $p = \infty$.

У подальшому $K * x(t) = \int_{\mathbb{R}} K(s)x(t-s)ds$ – конволюція функцій $K : \mathbb{R} \to L(X)$ і $x : \mathbb{R} \to X$, $\widehat{K}(s) = \int_{\mathbb{R}} K(t)e^{-ist}dt$ – перетворення Фур'є функції K. Нехай $K \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. Розглянемо рівняння

$$x(t) + \int_{\mathbb{R}} K(s)x(t-s)ds = y(t),\ t \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

де $y \in L_p(\mathbb{R}, X)$. У даній статті встановленно критерій існування та єдиності розв'язку рівняння (1) в просторі $L_p(\mathbb{R}, X)$.

У скінченновимірному випадку відповідні рівняння розглядались в монографії [1]. Дискретному аналогу рівняння (4) присвячені статті [2, 3].

2 Допоміжні твердження

Сформулюємо деякі допоміжні твердження, які суттєво використовуються при доведенні основної теореми.

Наступна лема є наслідком теореми Бохнера-Філіпса (див. [4]).

Лема 1. *Нехай $K \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. Якщо для довільного $s \in \mathbb{R}$ оператор $G(s) = I + \widehat{K}(s)$ неперервно оборотний, то існує така функція $K_1 \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$, що $G^{-1}(s) = I + \widehat{K}_1(s)$, $s \in \mathbb{R}$.*

У подальшому використовується

Лема 2. *Нехай $A \in L(X)$ необоротний оператор і для довільного $\sigma > 0$ існує оборотний оператор $B_\sigma \in L(X)$ такий, що $\|A - B_\sigma\| < \sigma$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $x \in X$ такий, що $\|Ax\| < \varepsilon$, $\|x\| = 1$.*

Доведення леми 2 див. [5].

Нехай $K \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. Покладемо $M := \{s \in \mathbb{R} : (I + \widehat{K}(s))$ - необоротний$\}$ і позначимо через ∂M границю множини M.

Наслідок 1. *Нехай $s_0 \in \partial M$. Тоді існує така послідовність $\{x_n\} \subset X$, що $\|x_n\| = 1$ для кожного $n \geq 1$ і $(I + \widehat{K}(s_0))x_n \to 0$, $n \to \infty$.*

Позначатимемо через $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ простір сильно вимірних функцій $x(t) : \mathbb{R} \to X$, таких, що для довільного $T > 0$ виконується $\int_{-T}^{T} \|x(t)\|dt < \infty$. Нехай $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$.

Означення 1. *Функція $R \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$, що задовольняє такі рівняння*

$$R(t) + K(t) + K * R(t) = O,\ t \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

$$R(t) + K(t) + R * K(t) = O,\ t \in \mathbb{R}, \qquad (3)$$

називається резольвентою ядра K.

© Ющенко Г.Ю., 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Нескладно переконатись, що коли розв'язок рівнянь (2), (3) існує, то він єдиний.

Лема 3. *Нехай існує резольвента $R \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ ядра K. Тоді для кожного $y \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ існує єдиний розв'язок рівняння*

$$x(t) + K * x(t) = y(t), \ t \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

у просторі $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$. Цей розв'язок має вигляд

$$x(t) = y(t) + R * y(t), \ t \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Доведення. Нехай функція x визначається рівністю (5). Тоді $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, і враховуючи рівності (2) і (3), отримаємо $x + K * x = x + K * (y + R * y) = x + (K + K * R) * y = x - R * y = y$. Отже, x задовольняє рівняння (4).

Нехай функція $x \in$ довільним розв'язком рівняння (4) в просторі $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$. Тоді $x = y - K * x = y + (R + R * K) * x = y + R * (x + K * x) = y + R * y$. Отже, x задається рівністю (5). □

3 Інтегральне рівняння на $\mathbb{R}$

Теорема 1. *Нехай $K \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1) для деякого фіксованого $p \in [1; \infty]$ рівняння (4) має для довільного $y \in L_p(\mathbb{R}, X)$ єдиний розв'язок x у просторі $L_p(\mathbb{R}, X)$;

2) пункт 1) виконується для всіх $p \in [1, +\infty]$;

3) для кожного $s \in \mathbb{R}$, оператор $G(s) = I + \widehat{K}(s)$ неперервно оборотний;

4) резольвента R ядра K належить простору $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$.

Причому, якщо виконується одна з вище наведених умов, то розв'язок рівняння (4) для довільного $y \in L_p(\mathbb{R}, X)$ має вигляд $x(t) = y(t) + R * y(t), \ t \in \mathbb{R}$, R - резольвента ядра K.

Доведення 2) $=>$ 3). Визначимо оператор $W : L_p(\mathbb{R}, X) \to L_p(\mathbb{R}, X)$, що діє за правилом $(Wx)(t) = x(t) + K * x(t), \ t \in \mathbb{R}$. Коректність визначення та обмеженість оператора W випливає з нерівності Юнга (твердження 1.3.2 з [6]). За теоремою Банаха про обернений оператор єдність розв'язку рівняння (4) еквівалентна неперервній оборотності оператора W.

При виконанні пункту 2) теореми, рівняння (4) має, зокрема, для кожного $y \in L_\infty(\mathbb{R}, X)$ єдиний розв'язок у просторі $L_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Доводимо від супротивного. Припустимо, що умова 3) не виконується, тобто існує таке $s_0 \in \mathbb{R}$, що оператор $(I + \widehat{K}(s_0))$ необоротний. Тоді, згідно з наслідком 1, існує така послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$, що $\|x_n\| = 1$ для кожного $n \geq 1$ і

$$(I + \widehat{K}(s_0))x_n \to 0, \ n \to \infty. \qquad (6)$$

Покладемо для $t \in \mathbb{R}, \ n \geq 1$:

$$y_n(t) := e^{is_0 t} x_n + \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) e^{is_0(t-s)} x_n ds. \qquad (7)$$

З нерівності Юнга випливає, що $y_n \in L_\infty(\mathbb{R}, X)$ для кожного $n \geq 1$. Розв'язок рівняння

$$x(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)x(s)ds = y_n(t), \ t \in \mathbb{R},$$

має вигляд $x_n(t) = e^{is_0 t} x_n, \ t \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $x_n \in L_\infty(\mathbb{R}, X)$ для кожного $n \geq 1$.

Оцінимо норми функцій x_n і y_n. Дістанемо

$$\|x_n\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|e^{is_0 t} x_n\| = 1, n \geq 1,$$

$$\|y_n\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|e^{is_0 t} x_n + \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) e^{is_0(t-s)} x_n ds\| =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|(I + \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) e^{is_0(-s)} ds) e^{is_0 t} x_n\| =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|(I + \widehat{K}(s_0))x_n\| = \|(I + \widehat{K}(s_0))x_n\|, \ n \geq 1.$$

Тому, врахувавши (6), отримуємо, що $\|y_n\|_\infty = \|Wx_n\|_\infty \to 0, \ n \to \infty$, тоді як $\|x_n\|_\infty = 1, \ n \geq 1$. Це суперечить оборотності оператора W.

3)$=>$4). При виконанні пункту 3) з леми 1 випливає, що існує така функція $K_1 \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$, що $(G(s))^{-1} = I + \widehat{K}_1(s), \ s \in \mathbb{R}$. Очевидно, що для кожного $s \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $G(s)(G(s))^{-1} = (I + \widehat{K}(s))(I + \widehat{K}_1(s)) = I + \widehat{K}(s) + \widehat{K}_1(s) + \widehat{K}(s)\widehat{K}_1(s) = I + \widehat{K}(s) + \widehat{K}_1(s) + \widehat{K * K_1}(s) = I$. З останньої рівності та теореми про єдність перетворення Фур'є, випливає, що $K_1(t) + K(t) + K * K_1(t) = O$ майже скрізь на $\mathbb{R}$. Так само отримуємо $K_1(t) + K(t) + K_1 * K(t) = O$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Отже, резольвента R ядра K співпадає з K_1 і $R \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

4)=>2). Якщо існує резольвента R, то розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$x(t) = y(t) + R * y(t), t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Якщо функція R додатково інтегровна за Бохнером на $\mathbb{R}$, то за нерівністю Юнга функція x, задана рівнянням (8), належить простору $L_p(\mathbb{R}, X)$, якщо $y \in L_p(\mathbb{R}, X)$.

1)=>4). Нескладно переконатись, що простір $L_p(\mathbb{R}, X)$ може бути представлений як простір $l_p(L_p([0;1], X))$. Справді, функції $x \in L_p(\mathbb{R}, X)$ відповідає послідовність функцій $\{..., x_{(-1)}, x_{(0)}, x_{(1)}, ...\}$, де $x_{(n)}(t) = x(n+t)$, $t \in [0;1]$, $n \in \mathbb{Z}$. Також

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_{(n)}\|^p_{L_p([0;1],X)} = \|x\|^p_p, \quad \text{при } p \in [1;+\infty),$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_{(n)}\|_{L_\infty([0;1],X)} = \|x\|_\infty, \quad \text{при } p = \infty.$$

Введемо набір операторів $K_n : L_p([0;1), X) \to L_p([0;1], X)$, $n \in \mathbb{Z}$, що діють за правилом $K_n x_{(k)}(t) = \int_0^1 K(n+t-s)x_{(k)}(s)ds$, $t \in [0;1]$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді конволюцію функцій $K * x$ в просторі $l_p(L_p([0;1], X))$ можно зобразити наступним чином

$$(K * x)_{(n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_{n-k} x_{(k)}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

З урахуванням цих позначень, рівняння (4) в просторі $l_p(L_p([0;1], X))$ матиме вигляд

$$x_{(n)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty} K_{n-k} x_{(k)} = y_{(n)}, \ n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Нескладно переконатись, що $\|K_n\| \le \int_{-1}^{1} \|K(n+t)\|dt$. Тому $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|K_n\| \le 2 \int_{t\in\mathbb{Z}} \|K(t)\|dt < \infty$. Отже, до рівняння (9) можна застосувати лему 3 з [2]. Згідно з цією лемою воно має єдиний розв'язок в просторі $l_\infty(L_p([0;1), X))$ для кожного $\{y_{(n)} : n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty(L_p([0;1), X))$.

Далі міркування аналогічні доведенню 2)=>3). Припустимо, що існує таке $s_0 \in \mathbb{R}$, що оператор $(I + \widehat{K}(s_0))$ необоротний. Тоді існує послідовність $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$ така, що $(I + \widehat{K}(s_0))x_n \to 0$, $n \to \infty$. Функція $x_n(t) := e^{is_0 t}x_n$, $t \in \mathbb{R}$ належить простору $l_\infty(L_p([0;1), X))$, причому

$$\|x_n\|_{l_\infty(L_p([0;1),X))} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_k^{k+1} \|e^{is_0 t}x_n\|^p dt \Big)^{1/p} = 1.$$

Покладемо

$$y_n(t) := x_n(t) + \int_{s\in\mathbb{R}} K(t-s)x_n(s)ds, \ t \in \mathbb{R},$$

Оцінимо норму y_n в просторі $l_\infty(L_p([0;1), X))$.

$$\|y_n\|_{l_\infty(L_p([0;1),X))} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_k^{k+1} \|(I +$$

$$+\widehat{K}(s_0))x_n\|^p dt \Big)^{1/p} = \|(I + \widehat{K}(s_0)x_n\|.$$

Отже, $\|x_n\|_{l_\infty(L_p([0;1),X))} = 1$, $n \ge 1$, тоді як $\|y_n\|_{l_\infty(L_p([0;1),X))} \to 0$, $n \to \infty$. Отримали суперечність. Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. *Gripenberg, G.* Volterra integral and functional equations / G. Gripenberg, S.O. Londen, O. Staffans. — Cambridge Univ. Press, 1990. — 701 pp.

2. *Городній, М.Ф.* Про lp-розв'язки різницевого рівняння з операторними коефіцієнтами / М.Ф. Городній, Г.Ю. Ющенко // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 8. — С. 14–16.

3. *Городній, М.Ф.* Стаціонарні у широкому сенсі розв'язки різницевих рівнянь у банаховому просторі / М.Ф. Городній // Теорія ймовірностей та матем. статистика. — 2006. — Т. 74. — С. 27–33.

4. *Bochner, S.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings / S. Bochner, R.S. Phillips // Annals of mathematics. — 1942.— Vol. 43, no. 3.— Pp. 409–418.

5. *Ющенко, Г.Ю.* lp-розв'язки інтегрального рівняння Вольтерра в банаховому просторі / Г.Ю. Ющенко // Нелінійні коливання. — 2012. — Т. 15, № 3.— С. 427-432.

6. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander.— Springer: Basel, 2011.— 539 pp.

Надійшла до редколегії 10.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21

Р.Є. Ямненко, *к.ф.-м.н., доцент*

Моделювання згладженого процесу броунівського мосту із просторів Орліча за допомогою вейвлет-розкладів

У роботі досліджується швидкість збіжності вейвлет-розкладів узагальненого випадкового процесу, який має таку саму коваріаційну функцію, як і згладжений броунівський міст.

Ключові слова: згладжений броунівський міст, швидкість збіжності, вейвлет-розклад.

R.E. Yamnenko, *PhD, Associate Professor*

Modeling of a smoothed Brownian bridge from Orlicz spaces via wavelet expansions

The paper investigates the rate of convergence of wavelet expansion of a generalized stochastic processes that have the same covariance function as an smoothed Brownian bridge with trajectories that are from the space $L_2(\Omega)$.

Key Words: smoothed Brownian bridge, rate of convergence, wavelet expansion.

E-mails: yamnenko@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

У даній роботі продовжується дослідження швидкості збіжності вейвлет-розкладів узагальнених випадкових процесів, траєкторії яких належать різним просторам Орліча, наприклад, простору $L_2(\Omega)$ (див. [3, 4]). Використовуючи апарат теорії випадкових процесів з просторів Соболєва-Орліча, в [3] показано, що швидкість збіжності вейвлет-розкладів $X_n(t)$ має порядок $o(\frac{1}{2^n})$ чи $O(\frac{1}{2^n})$ при $n \to \infty$ за деяких додаткових умов на вейвлет-базиси.

Додаткові відомості з теорії просторів Орліча можна отримати, наприклад, з робіт [6, 7, 8]. Для більш детального ознайомлення з теорією вейвлетів та вейвлет-розкладів випадкових процесів пропонуємо роботи [2, 5, 9, 10].

У даній роботі буде побудовано модель згладженого процесу броунівського мосту, тобто процесу вигляду $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \beta(s)ds$, де $\beta(s)$ – звичайний броунівський міст. Модель згладженого процесу більш зручна для моделювання броунівського мосту, і завдяки існуванню похідної має вищу швидкість збіжності вейвлет-розкладів.

2 Узагальнена похідна випадкового процесу

Нагадаємо спочатку визначення узагальненої або, що еквівалентно, слабкої похідної для функції.

Означення 2.1. [10] Функція $f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається слабко диференційовною, якщо існує така функція $g = \{g(x), x \in \mathbb{R}\}$, що є інтегровною на будь-якому обмеженому інтервалі та для всіх $a \leqslant b$ має місце зображення:

$$f(a) - f(b) = \int_a^b g(u)du. \qquad (1)$$

Функція g називається слабкою (узагальненою) похідною функції f. Будемо позначати слабку похідну $f^{(1)}$.

Слабко диференційовні функції неперервні на $\mathbb{R}$. Функція g визначається з точністю до еквівалентності.

Означення 2.2. [2] Функція $f \in N$ раз слабко диференційовною, якщо вона має N слабко диференційовних похідних.

Зауваження 1. *[2] Функція f та похідні $f^{(k)}$, $k = 1, 2, .., N-1$ є неперервними функціями, а похідні $f^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., N-1$ є звичайними похідними.*

Означення 2.3.. Будемо говорити, що для процесу $X = \{X(t), t \in \mathrm{T}\}$ існує узагальнена (слабка) похідна з ймовірністю одиниця, якщо існує локально інтегровний за Лебегом з ймовірністю одиниця випадковий процес $X^{(1)}(t)$, такий, що для всіх $a, b \in \mathrm{T}$ $\int_a^b X^{(1)}(t)dt = X(b) - X(a)$ з ймовірністю одиниця. При цьому випадковий процес $X^{(1)}(t)$ називається узагальненою (слабкою) похідною процесу X.

© Р.Є. Ямненко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Нехай $(T, \mathcal{B}(T), \mu)$ – вимірний простір, $T \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(T)$ – σ-алгебра борелівських множин на T, μ – міра Лебега.

Означення 2.4. [8] Простором Соболєва N-того порядку $W_q^N(T)$ називається множина класів еквівалентності функцій з функціонального простору $L_q(T)$, що задається таким чином: $W_q^N(T) = \{f: T \to \mathbb{R}, f$ – вимірні, $f^{(k)}(t) \in L_q(T), 0 \leqslant k \leqslant N\}$, де $f^{(k)}(t)$ – узагальнена похідна функції f порядку k.

3 Вейвлет-розклади випадкових процесів

Наведемо основні відомості з теорії вейвлетів.

Розглянемо деяку комплекснозначну функцію $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ з простору $L_2(\mathbb{R})$. Позначимо $\varphi_{0k}(x) = \{\varphi(x-k), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$. Накладемо на φ умови.

Умова 1. [10] Система $\varphi_{0k}(x)$ є ортонормованою системою, тобто

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{0k}(x)\overline{\varphi_{0j}(x)}dx = \delta_{kj},$$

де δ_{kj} – символ Кронекера. Позначимо V_0 – це простір функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$ таких, що

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_{0k}(x), \qquad (2)$$

де ряд (2) збігається в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$, тобто $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$. Тоді система $\{\varphi_{0k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$ буде ортонормованим базисом у V_0.

Визначимо простір $V_j = \{h(x): h(x) = f(2^j x); f \in V_0\}$, $j \geqslant 0$. Система функцій $\{\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом у V_j.

Умова 2. [10] Простори V_j мають властивість: для кожного $j \geqslant 0$ $V_j \in V_{j+1}$.

Умова 3. [10] Множина $V = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ щільна в $L_2(\mathbb{R})$, тобто

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}).$$

У книгах [2, 10] наведені необхідні та достатні умови виконання *умов 1, 2*, а також достатні умови, за яких виконується *умова 3*.

Означення 3.1. [10] Якщо для функції $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ виконуються *умови 1-3*, то послідовність $\{V_j\}_{j\geqslant 0}$, що породжується цією функцією, називають багаторівневим аналізом в $L_2(\mathbb{R})$. При цьому функцію φ називають f-вейвлетом.

Нехай послідовність $\{V_j\}_{j\geqslant 0}$ є багаторівневим аналізом в $L_2(\mathbb{R})$. Позначимо $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$, тоді $V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_0 \oplus \oplus_{i=0}^{j} W_i$. Отже, в цьому випадку $L_2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \oplus_{j=0}^{\infty} W_j$.

Для будь-якого f-вейвлета φ існує функція ψ, така, що система функцій $\{\psi_{jk} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом в W_j, а система

$$\begin{cases} \varphi_{0k}(x) = \varphi(x-k), \\ \psi_{jk} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \end{cases} \qquad j \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}$$

є ортонормованим базисом в $L_2(\mathbb{R})$. Тоді кожну функцію з $L_2(\mathbb{R})$ можна зобразити у вигляді

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\psi_{jk}(x), \qquad (3)$$

де ряд (3) збігається в $L_2(\mathbb{R})$. Розклад (3) називають вейвлет-розкладом функції f.

Відомо, що f-вейвлет φ допускає зображення $\hat{\varphi}(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right)$, де $m_0(y)$ – це 2π-періодична функція з простору $L_2(0, 2\pi)$, $\hat{\varphi}(y)$ — перетворення Фур'є функції φ. Тоді функцію $\psi = \{\psi(x), x \in \mathbb{R}\} \in L_2(\mathbb{R})$ з (3) можна знайти як обернене перетворення Фур'є до функції

$$\hat{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\}\hat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right). \qquad (4)$$

Приклади вейвлет функцій можна знайти в усіх книгах з вейвлет аналізу.

Означення 3.2. Нехай φ – f-вейвлет. Для φ виконується *умова S*, якщо існує монотонна незростаюча функція $\Phi(x)$, $x \geqslant 0$, така, що

$$|\varphi(x)| \leqslant \Phi(|x|) \quad \text{та} \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|)dx < \infty.$$

Означення 3.3. Для функції φ виконується *умова S(N)*, де $N \geqslant 0$ – деяке ціле число, якщо для φ виконується *умова S* та $\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|)|x|^N dx < \infty$.

Наведемо два комплекси умов, яким можуть задовольняти f-вейвлети.

K_1) Для φ виконується *умова S(N)*, φ належить простору Соболєва $W_q^N(\mathbb{R})$, $N \geqslant 0$, $q > 1$;

Kyiv National Taras Shevchenko University

K_2) Для φ виконується умова $S(N)$ та одне з чотирьох припущень:

a_1) $\varphi \in W_q^{N-1}(\mathbb{R})$, $N \geqslant 1$, $q > 1$;

a_2) $|m_0(y)| = 1 + o(|y|^{2(N-1)})$ при $y \to 0$, де $|m_0(y)|$ - функція, що визначена в (4), $N \geqslant 1$;

a_3) $\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x)dx = 0$, $n = 0, 1, ..., N-1$, $N \geqslant 1$, де ψ – відповідний φ вейвлет.

a_4) $\hat{\varphi}(y - 2k\pi) = o(|y|^{N-1})$ при $y \to 0$, $k \neq 0$, $N \geqslant 1$.

В книзі [10] наведено приклади систем вейвлетів, для яких виконуються комплекси умов K_1, K_2. Це, зокрема, вейвлети Добеші, симплети.

Для центрованого випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, який належить простору $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю одиниця, та для будь-якої системи вейвлетів має місце розклад

$$X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\psi_{jk}(t), \quad (5)$$

де ξ_{0k} та η_{jk} – випадкові величини, такі, що

$$\xi_{0k} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}dt,\ \eta_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}dt.$$

Ряд (5) збігається в $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю одиниця. Розглянемо наближення випадкового процесу X частинною сумою ряду (5):

$$X_n(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\psi_{jk}(t).$$

Зрозуміло, що $X_n(t)$ збігається до $X(t)$ при $n \to \infty$ в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю одиниця, тобто з ймовірністю одиниця

$$\|X(t) - X_n(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

У роботі [3] було досліджено швидкість цієї збіжності в випадку, коли випадковий процес X належить простору $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 2$.

Теорема 3.1. *[3] Розглянемо числа p і q, такі, що $2 \leqslant p \leqslant q$. Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ є центрованим, сепарабельним, вимірним, має N слабких похідних з ймовірністю одиниця та виконуються наступні умови:*

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $b - a \leqslant 1$ та $\forall k = \overline{0, N}$

$$\sup_{t\in[a,b]} \left\|X^{[k]}(t)\right\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{t\in[a,b]} \left(E\left|X^{[k]}(t)\right|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{(\max\{|a|,|b|\})^\tau},$$

де $\tau > \frac{1}{1-\gamma}\left(1 + \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{q}\right)$ і $0 < \gamma < 1$ – деякі фіксовані числа;

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $b - a \leqslant 1$

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b]}} \left(E|X^{[N]}(t) - X^{[N]}(s)|^p\right)^{1/p} \leqslant C_{a,b}h^\alpha,$$

де $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді:

b_1) якщо для f-вейвлету φ виконується комплекс умов K_1), то з ймовірністю одиниця $2^{Nn}\|X_n(t) - X(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0$ при $n \to \infty$;

b_2) якщо для f-вейвлету φ виконується комплекс умов K_2), то з ймовірністю одиниця $\|X_n(t) - X(t)\|_{L_q(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{2^{Nn}}\right)$ при $n \to \infty$.

4 Швидкість збіжності вейвлет-розкладів зглажденого процесу броунівського мосту

Означення 4.1. Випадковий процес $\beta = \{\beta(t),\ t \in [0,1]\}$ називатимемо узагальненим броунівським мостом з простору $L_2(\Omega)$, якщо сім'я $\{\beta(t),\ t \in [0,1]\}$ належить простору $L_2(\Omega)$ та коваріаційною функцією для процесу $\beta \in$

$$B_\beta(t,s) = \min\{t,s\}(1 - \max\{t,s\}). \quad (6)$$

Приклад. Нехай $\beta = \{\beta(t), t \in [0,1]\}$ - броунівський міст. Тоді β можна подати у вигляді ряду, що збігається рівномірно в середньому квадратичному: $\beta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\xi_n\psi_n(t)$, де ξ_n - послідовність незалежних нормально розподілених випадкових величин, $E\xi_n = 0$ та $E\xi_n^2 = 1$, λ_n^2 - власні значення, а ψ_n – відповідні власні функції наступного інтегрального рівняння $\psi(s) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 B_\beta(t,s)\psi(t)\,dt$. Нехай тепер ζ_n - послідовність незалежних випадкових величин з простору $L_2(\bar{\Omega})$ таких, що $E\zeta_n = 0$, $E\zeta_n^2 = 1$. Тоді процес $\tilde{\beta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\zeta_n\psi_n(t)$ є центрованим випадковим процесом з коваріаційною функцією (6), який належить простору $L_2(\Omega)$.

Визначимо для деякого достатньо малого $\delta > 0$ згладжений процес броунівського мосту

$$\alpha(t;\delta) = \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} \beta(s)ds, \quad t \in [0, 1-\delta]. \quad (7)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

де $\beta(s)$ – узагальнений процес броунівського мосту з простору $L_2(\Omega)$. Використовуючи теорему Фубіні, легко отримати коваріаційну функцію процесу $\alpha(t)$. Коли $t < s$,

$$B_\alpha(t,s;\delta) = \mathsf{E}\alpha(t;\delta)\alpha(s;\delta)$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\int_t^{t+\delta}\int_s^{s+\delta}\mathsf{E}\beta(u)\beta(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \left(t+\frac{\delta}{2}\right)\left(1-s-\frac{\delta}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{(s-t)^3}{6\delta^2}-\frac{(s-t)^2}{2\delta}+\frac{s-t}{2}-\frac{\delta}{6}\right)\chi_{\{s-t<\delta\}}.$$

Нехай $\tilde\alpha(t;\delta) = g(t)\alpha(t;\delta)$ – добуток процесу $\alpha(t;\delta)$ на деяку неперервну вагову функцію $g(t)$, монотонно незростальну при $t \geqslant 0$. Аналогічно, як у (5), розглянемо наближення випадкового процесу $\tilde\alpha(t;\delta)$ частинною сумою ряду

$$\tilde\alpha_n(t;\delta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_{0k}\varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}\psi_{jk}(t), \quad (8)$$

де ξ_{0k} та η_{jk} – випадкові величини, такі, що

$$\xi_{0k} = \int_0^1 \tilde\alpha(t;\delta)\overline{\varphi_{0k}(t)}\,\mathrm{d}t, \eta_{jk} = \int_0^1 \tilde\alpha(t;\delta)\overline{\psi_{jk}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

З теореми 3.1 випливає наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай $\alpha(t;\delta)$, $t \in [0,1]$ – згладжений броунівський міст з простору $L_2(\Omega)$, $g(t) = \frac{A}{(t+1)^\tau}$, де $A = \max\{2; \frac{2}{\tau\sqrt{4-\delta}}\}$, $\tau > \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{3}{2}-\frac{\gamma}{q}\right)$, $0<\gamma<1$ – деяке фіксоване число. Тоді для $q \geqslant 2$ виконуються такі твердження:*

1) *якщо для f-вейвлету φ виконується комплекс умов K_1), то з ймовірністю одиниця $2^n\|\tilde\alpha_n(t;\delta)g^{-1}(t) - \alpha(t;\delta)\|_{L_q(\mathbb{R})} \to 0$ при $n \to \infty$;*

2) *якщо для f-вейвлету φ виконується комплекс умов K_2), то з ймовірністю одиниця $\|\tilde\alpha_n(t;\delta)g^{-1}(t) - \alpha(t;\delta)\|_{L_q(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ при $n \to \infty$.*

Доведення. Процес $\beta(t)$ є узагальненою похідною для процесу $\alpha(t;\delta)$ в силу рівності (7). Перевіримо послідовно умови теореми 3.1 для $p = 2$ на кожному півінтервалі $[a,b)$: $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $b - a \leqslant 1$ для випадкового процесу $\tilde\alpha(t;\delta) = g(t)\alpha(t;\delta)$ при $N = 1$.

1) $k = 0$:

$$\sup_{t\in[a,b)}\left\|\tilde\alpha^{(0)}(t;\delta)\right\|_{L_2(\Omega)} = \sup_{t\in[a,b)}\left(\mathsf{E}\left|\tilde\alpha(t;\delta)\right|^2\right)^{\frac12} =$$
$$= \sup_{t\in[a,b)} g(t)\left(\left(t+\frac{\delta}{2}\right)\left(1-t-\frac{\delta}{2}\right)-\frac{\delta}{6}\right)^{\frac12} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in[a,b)}\frac{A}{(b+1)^\tau}\left(\frac14-\frac{\delta}{6}\right)^{\frac12} \leqslant \frac{1}{b^\tau};$$

$$k = 1: \quad \sup_{t\in[a,b)}\left\|\tilde\alpha^{(1)}(t;\delta)\right\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sup_{t\in[a,b)}\left(\mathsf{E}\left|g'(t)\alpha(t;\delta)+g(t)\beta(t)\right|^2\right)^{\frac12} =$$
$$= \sup_{t\in[a,b)}\left((g'(t))^2 B_\alpha(t,t;\delta) + g^2(t)B_\beta(t,t)+\right.$$
$$\left.+2g(t)g'(t)\mathsf{E}\alpha(t;\delta)\beta(t)\right)^{\frac12} =$$
$$\sup_{t\in[a,b)}\left((g'(t))^2\left(\left(t+\frac{\delta}{2}\right)\left(1-t-\frac{\delta}{2}\right)-\frac{\delta}{6}\right)+\right.$$
$$\left.+g^2(t)t(1-t)+\frac{2g(t)g'(t)}{\delta}\int_t^{t+\delta}B_\beta(u,u)\,\mathrm{d}u\right)^{\frac12} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in[a,b)}\left(\frac{(g'(t))^2}{4}+\frac{g^2(t)}{4}+2g(t)g'(t)\left(1-t-\frac{\delta}{2}\right)\right)^{\frac12}$$
$$\leqslant \sup_{t\in[a,b)}\left(\frac{A^2\tau^2}{4(t+1)^{2\tau+2}}+\frac{A^2\tau^2}{4(t+1)^{2\tau}}+\frac{(2-\delta)A^2\tau^2}{(t+1)^{2\tau+1}}\right)^{\frac12}$$
$$\leqslant \frac{A\tau(4-\delta)^{\frac12}}{2(b+1)^\tau} \leqslant \frac{1}{b^\tau}.$$

Перевіримо умову 2) теореми 3.1. Маємо

$$\|\tilde\alpha^{(1)}(t;\delta) - \tilde\alpha^{(1)}(s;\delta)\|$$
$$= \|g'(t)\alpha(t;\delta)+g(t)\beta(t)-g'(s)\alpha(s;\delta)-g(s)\beta(s)\|$$
$$\leqslant |g'(t)-g'(s)|\|\alpha(t;\delta)\|+|g'(s)|\|\alpha(t;\delta)-\alpha(s;\delta)\|+$$
$$+|g(t)-g(s)|\|\beta(t)\|+|g(s)|\|\beta(t)-\eta(s)\|.$$

Розглянемо окремо кожен доданок у правій частині попередньої нерівності, використовуючи теорему Ойлера[1] про середнє значення:

$$(i): \quad \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}}|g'(t)-g'(s)|\|\alpha(t;\delta)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}}\left|\frac{A\tau}{(t+1)^{\tau+1}}-\frac{A\tau}{(s+1)^{\tau+1}}\right|\left(\frac14-\frac{\delta}{6}\right)^{\frac12}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\leqslant \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \frac{A\tau}{(a+1)^{\tau+2}}|t-s|\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{A\tau}{(a+1)^{\tau+2}}\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{6}\right)^{\frac{1}{2}}h;$$

(ii) :
$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} |g'(s)|\|\alpha(t;\delta)-\alpha(s;\delta)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \frac{A\tau}{(t+1)^{\tau+1}}\left((t+\frac{\delta}{2})(1-t+\frac{\delta}{2})-\frac{\delta}{3}+\right.$$

$$\left.(s+\frac{\delta}{2})(1-s-\frac{\delta}{2})-\left(\frac{|s-t|^3}{3\delta^2}-\frac{|s-t|^2}{\delta}+|s-t|\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \frac{A\tau}{(t+1)^{\tau+1}}\frac{(1-\delta)^{\frac{1}{2}}|s-t|}{\delta^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqslant \frac{A\tau}{(a+1)^{\tau+1}}\frac{(1-\delta)^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{1}{2}}}h;$$

(iii) :
$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} |g(t)-g(s)|\|\beta(t)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \frac{A\tau}{(a+1)^{\tau+1}}|t-s|t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \frac{A\tau}{2(a+1)^{\tau+1}}|t-s| = \frac{A\tau}{2(a+1)^{\tau+1}}h;$$

(iv) :
$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} |g(s)|\|\beta(t)-\beta(s)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \frac{A}{(s+1)^{\tau}}(t-t^2+s-s^2-2\min\{t,s\}+2ts)$$

$$= \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \frac{A}{(s+1)^{\tau}}(|s-t|-|s-t|^2)\leqslant \frac{A}{(a+1)^{\tau}}h.$$

Отже,

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[a,b)}} \|\tilde{\alpha}^{(1)}(t;\delta)-\tilde{\alpha}^{(1)}(s;\delta)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_{a,b}h,$$

де

$$C_{a,b}=\frac{A\tau}{(a+1)^{\tau}}\left(\frac{(3-2\delta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}(a+1)^2}+\frac{(1-\delta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\delta}(a+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(a+1)}+\frac{1}{\tau}\right),$$

тобто всі умови умови теореми 3.1 виконані. □

5 Висновки

Досліджено швидкість збіжності вейвлет-розкладів згладжених процесів броунівського мосту з простору $L_2(\Omega)$. Далі результати планується поширити на інші класи випадкових процесів з різних функціональних просторів.

Список використаних джерел

1. Дороговцев А.Я. *Математический анализ.* – К.: "Факт", 2004. – 560 с.
2. Козаченко Ю.В. *Лекції з вейвлет аналізу.* – К.: ТВіМС, 2004. – 147 с.
3. Козаченко Ю.В., Яковенко Т.О. Випадкові процеси у просторах Соболєва-Орлича // Український математичний журнал – 2006. – том. 58, №. 10. – С. 1340–1356.
4. Яковенко Т., Ямненко Р. *Швидкість збіжності вейвлет-розкладів узагальненого накопичувального процесу Орнштейна-Уленбека* // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки, №4 – 2009. – С.26-30.
5. Chui C. K. An Introduction to Wavelets. – New York: Academic Press, 1992. – 266 p.; (Чуи Ч. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.)
6. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. *Metric characterization of random variables and random processes.* – AMS, Providence RI, 2000.
7. Козаченко Ю.В., Василик О.І., Ямненко Р.Є. *φ-субгауссові випадкові процеси.* – К.: ВПЦ "Київ. університет", 2008. – 231 с.
8. *Rao M.M. and Ren Z.D.* Theory of Orlicz spaces. – New York – Basel – Hong Kong: Marsel Dekker, Ink., 1991. – 445 p.
9. Daubechies I., Ten Lecture on Wavelets. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. – 324 p.
10. Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. *Wavelets, Approximation and Statistical Applications.* – New York: Springer, 1998. – 265 p.

Надійшла до редколегії 02.04.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Kyiv National Taras Shevchenko University

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки **2012, 3** *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 517.9

Балога С.І.[1], к.ф.-м.н., доцент
Король І. І. , д.ф.-м.н., доцент

Дослідження асимптотичної еквівалентності одного класу нелінійних систем диференціальних рівнянь

У даній роботі розглядаються диференціальні рівняння, що є розширеннями динамічної системи на торі. Встановлено умови асимптотичної еквівалентності одного класу нелінійних систем диференціальних рівнянь.

Ключові слова: m -вимірний тор, асимптотика розв'язків, асимптотична еквівалентність, нелінійна система.

S. I. Baloga[1], *Ph.D.* (Physics & Mathematics), Associate Professor
I. I. Korol[2], Doctor of Sciences (Physics & Mathematics), Associate Professor

Investigation of asymptotic equivalence of one type of nonlinear systems of differential equations

In this paper the differential equations, which are the extensions of the dynamic system on torus are under the consideration. The conditions of asymptotic equivalence of one type of nonlinear systems of differential equations are established.

Key words: m -dimensional torus, asymptotic behavior of the solutions, asymptotical equivalence, nonlinear system.

E-mails: [1]*Baloga_Switlana@e-mail.ua*, [2]*korol.ihor@gmail.com*

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

Вступ

Дана робота тісно пов'язана з теорією багаточастотних коливань. Фундаментальні дослідження цього напрямку проведено в роботах [1] і [2]. Даку статтю присвячено дослідженню якісної поведінки нелінійних розширень динамічної системи на m-вимірному торі. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язків одного класу розширень динамічної системи на торі та встановлено достатні умови асимптотичної еквівалентності лінійних та нелінійних систем диференціальних рівнянь, визначених в прямому добутку m-вимірного тору T^m та n-вимірного евклідового простору E^n.

Дослідженню проблеми асимптотичної еквівалентності диференціальних рівнянь присвячено ряд робіт. У [3], [4] встановлено достатні умови асимптотичної еквівалентності систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботі [5] висвітлено питання асимптотичної еквівалентності одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі та відповідної збуреної системи диференціальних рівнянь.

1. Постановка задачі

Розглянемо два розширення динамічної системи на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x \tag{1}$$

і

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = A(\varphi)y + F(\varphi, y), \tag{2}$$

Тут $\varphi \in T^m$, $x, y \in R^n$, $a(\varphi)$ і $A(\varphi)$ – 2π - періодичні по φ_ν, $\nu = 1,2,...,m$, m - вимірна векторна функція та $(n \times n)$-вимірна матрична функція відповідно, $F(\varphi, y)$ – неперервна за сукупністю змінних векторна функція. Крім того, припустимо, що для функції $F(\varphi, y)$ виконується оцінка

$$\|F(\varphi, y)\| \le \lambda(\varphi)\|y\|, \quad \|y\| < \infty,$$

де $\lambda(\varphi)$ додатня і обмежена при всіх $\varphi \in T^m$ функція.

Означення. Кажуть [3], що системи (1) і (2) асимптотично еквівалентні, якщо кожному розв'язку $y(t, \varphi)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t, \varphi)$ системи (1), такий що

© С.І. Балога, І.І. Король, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\lim_{t\to\infty}(x(t,\varphi)-y(t,\varphi))=0,\ \varphi\in\mathrm{T}^m.$$

Припустимо, що в системах (1) і (2) матриця $A(\varphi)$ така, що існує границя

$$\lim_{t\to\infty}A(\varphi_t(\varphi))=A$$

для всіх $\varphi\in\mathrm{T}^m$, де $\varphi_t(\varphi)$ - розв'язок першого з рівнянь системи (1), такий що $\varphi_0(\varphi)=\varphi$.

2. Асимптотична еквівалентність

Сформулюємо теорему, яка є узагальненням теореми Левінсона [3] на нелінійні системи диференціальних рівнянь, визначені в прямому добутку m-вимірного тору T^m та n-вимірного евклідового простору E^n.

Теорема. Нехай розв'язки системи рівнянь

$$\dot{x}=Ax \qquad (3)$$

обмежені при $t\ge 0$. Якщо функції $A(\varphi)-A$ і $\lambda(\varphi)$ вздовж кожної з траєкторій системи

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\quad \varphi\in\mathrm{T}^m,$$

задовольняють умови

$$\int_0^\infty\|A(\varphi_t(\varphi))-A\|dt<\infty,\quad \int_0^\infty\lambda(\varphi_t(\varphi))dt<\infty,$$

то система (2) асимптотично еквівалентна системі (1).

Доведення. Для доведення сформульованого твердження, як і в [5], використаємо ідею Брауера доведення теореми Левінсона [3, с.159].

Без обмеження загальності можна вважати, що $A=diag(A_0,A_-)$, де матриця A_0 має власні числа з нульовою дійсною частиною, а дійсні частини всіх власних чисел матриці A_- від'ємні.

Позначимо через $X(t)=diag(e^{A_0t},e^{A_-t})$ матрицант системи рівнянь (3) і покладемо $X(t)=X_0(t)+X_-(t)$, де $X_0(t)=diag(e^{A_0t},0)$, $X_-(t)=diag(0,e^{A_-t})$.

Тоді матрицю Коші

$$K(t,\tau)=X(t)X^{-1}(\tau)=X(t-\tau)$$

можна подати у вигляді

$$K(t,\tau)=X_0(t-\tau)+X_-(t-\tau),$$

причому існують такі додатні числа α, K_0 і K_-, що

$$\|X_0(t)\|=\|e^{A_0t}\|\le K_0,\ t\in R, \qquad (4)$$

$$\|X_-(t)\|=\|e^{A_-t}\|\le K_-e^{-\alpha t},\ t\ge 0. \qquad (5)$$

Отже, існує додатна стала K, що для всіх $t\ge 0$ виконується нерівність $\|X(t)\|\le K$.

Переконаємося тепер, що при виконанні умов теореми системи рівнянь (1) і (2) асимптотично еквівалентні. Для цього при кожному фіксованому $\varphi\in\mathrm{T}^m$ (1) запишемо у вигляді

$$\dot{x}=Ax+P(\varphi_t(\varphi))x, \qquad (6)$$

де $P(\varphi)=A(\varphi)-A$, а систему (2) у вигляді

$$\dot{y}=Ay+P(\varphi_t(\varphi))y+F(\varphi_t(\varphi),y). \qquad (7)$$

Для кожного розв'язку $x(t,\varphi)$, $x(t_0,\varphi)=x_0$ справедливе інтегральне представлення

$$x(t,\varphi)=X(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau. \qquad (8)$$

В силу абсолютної інтегровності на $[0,\infty)$ матриці $P(\varphi_t(\varphi))$ для кожного $\varphi\in T^m$ робимо висновок, що кожний розв'язок $x(t,\varphi)$ с обмеженим при $t\in[0,\infty)$, а, отже, невласний інтеграл

$$\int_{t_0}^{\infty}X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau$$

збігається, що дає можливість інтегральне представлення (8) подати у вигляді

$$x(t,\varphi)=X(t-t_0)[x_0+$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau]+$$

$$+\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau-$$

$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau. \qquad (9)$$

Запишемо інтегральне представлення розв'язку $y(t,\varphi)$ системи (2) з початковою умовою $y(t_0,\varphi)=y_0$:

$$y(t,\varphi)=X(t-t_0)y_0+\int_{t_0}^{t} X(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+$$
$$+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]dt. \qquad (10)$$

Покажемо обмеженість $y(t,\varphi)$:

$$\|y(t,\varphi)\|\le K\|y_0\|+K\int_{t_0}^{t}\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|\,\|y(\tau,\varphi)\|d\tau+$$
$$+K\int_{t_0}^{t}\lambda(\varphi_\tau(\varphi))\,\|y(\tau,\varphi)\|d\tau.$$

Враховуючи неперервність розв'язку $y(t,\varphi)$, оцінки (4), (5), умови теореми і застосовуючи лему Гронуолла-Беллмана переконуємося в існуванні сталої $C(t_0,y_0)\ge 0$ такої, що

$$\|y(t,\varphi)\|\le C(t_0,y_0),\ t\ge t_0.$$

Перепишемо інтегральне рівняння (10) у вигляді

$$y(t,\varphi)=X(t-t_0)[y_0+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)\cdot$$
$$\cdot[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau]+$$
$$+\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau-$$
$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau \qquad (11)$$

З умов теореми та обмеженості розв'язку $y(t,\varphi)$ випливає збіжність всіх невласних інтегралів з останньої рівності.

Між множиною розв'язків $x(t,\varphi)$, $x(t_0,\varphi)=x_0$ системи (6) і множиною розв'язків $y(t,\varphi)$, $y(t_0,\varphi)=y_0$ системи (7) встановимо відповідність формулою

$$x_0+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau=y_0+$$
$$+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau. \qquad (12)$$

Оцінимо різницю розв'язків $x(t,\varphi)$ і $y(t,\varphi)$ з початковими умовами, що задовольняють рівності (12). Скориставшись інтегральними представленнями (9) і (11) з урахуванням (12), маємо

$$y(t,\varphi)-x(t,\varphi)=$$
$$=\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))\cdot[y(\tau,\varphi)-x(\tau,\varphi)]d\tau-$$
$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))[y(\tau,\varphi)-x(\tau,\varphi)]d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))d\tau-$$
$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))d\tau \qquad (13)$$

Оскільки кожен з розв'язків $x(t,\varphi)$ і $y(t,\varphi)$ обмежений при $t\in[0,\infty)$, то покладаючи

$$\sup_{t\ge t_0}\|y(t,\varphi)-x(t,\varphi)\|=m,$$

для всіх $\varphi\in T^m$, з (13) одержимо

$$\|y(t,\varphi)-x(t,\varphi)\|\le\int_{t_0}^{t} K_-e^{-\alpha(t-\tau)}\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|md\tau+$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$+\int_{t_0}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)}\lambda(\varphi_\tau(\varphi))\|y(\tau,\varphi)\|d\tau +$$

$$+\int_{t}^{\infty} K_0\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|m\,d\tau + \int_{t}^{\infty} K_0\,\lambda(\varphi_\tau(\varphi))\|y(\tau,\varphi)\|d\tau. \qquad (14)$$

В силу умов теореми та обмеженості розв'язку $y(t,\varphi)$ останні два доданки правої частини цієї нерівності прямують до нуля, коли $t\to\infty$. Переконаємося, що перші два доданки правої частини нерівності (14) мають таку ж властивість. Справді, для $t\ge 2t_0$

$$\int_{t_0}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)}\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|m d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{\frac{t}{2}} K_- e^{-\alpha(t-\tau)}\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|m d\tau +$$

$$+\int_{\frac{t}{2}}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)}\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|m d\tau \le$$

$$\le e^{-\frac{\alpha t}{2}}\int_{0}^{\infty} K_-\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|d\tau\, m +$$

$$+\int_{\frac{t}{2}}^{t} K_-\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|d\tau\, m \to 0,$$

коли $t\to\infty$. Аналогічно

$$\int_{t_0}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)}\lambda(\varphi_\tau(\varphi))\|y(\tau,\varphi)\|d\tau \le$$

$$\le K_- C(t_0,y_0)\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\lambda(\varphi_\tau(\varphi))d\tau \le$$

$$\le K_- C(t_0,y_0)\left(e^{-\frac{\alpha t}{2}}\int_{0}^{\infty}\lambda(\varphi_\tau(\varphi))d\tau +\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{t}{2}}^{\infty}\lambda(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right)\to 0,$$

коли $t\to\infty$.

Отже, з нерівності (14) робимо висновок, що для всіх $\varphi\in T^m$

$$\lim_{t\to\infty}(x(t,\varphi)-y(t,\varphi))=0,$$

тобто системи рівнянь (6) і (7), або ж, що те саме, системи (1) і (2) асимптотично еквівалентні.

3. Висновки. В даній роботі виділено клас нелінійних диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тору T^m і n-вимірного евклідового простору E^n та узагальнено результати, викладені в статті [5]. Отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності розглядуваного класу нелінійних диференціальних рівнянь відповідному лінійному диференціальному рівнянню.

Список використаних джерел

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* – Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1969.
4. *Brauer.* Nonlinear differential equations with forcing terms, Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – 15, №5. – P. 758–765.
5. *Балога С.І.* Асимптотична еквівалентність систем диференціальних рівнянь // Вісник Київського ун-ту. Серія: математика та механіка. – 2008. – Вип. 19 – 20. – С. 61–63.

Надійшла до редколегії 24.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки **2012, 3** *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 620.179

Богданов В.Р., к.ф.-м.н., с.н.с.

Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування просторової задачі із урахуванням процесу розвантаження матеріалу

Розроблено аналітико-числову методику розв'язування просторових задач у пружно-пластичній динамічній математичній постановці із урахуванням процесу розвантаження матеріалу. Числовий розв'язок було отримано для бруска з поперечним перерізом у формі прямокутника з пропилом-тріщиною посередині (компактний зразок) при триточковому згині з використанням методу скінченних різниць. Тріщина підростає відповідно до умови узагальненого локального критерія крихкого руйнування.

Ключові слова: компактний зразок, пластична деформація, ріст тріщини, тривимірна задача

V.R. Bogdanov, PhD

Modeling of a growing crack on the basis of numerical solution of a three-dimensional problem, considering the process of material unloading

The solution of the three-dimensional problem and the method of the solution in a dynamic elastic-plastic mathematical model has been developed. The numerical solution has been calculated for a three point band of material with a transversal profile in the shape of a rectangle with a notch-crack in the middle (compact profile) by method of finite differences. The crack's growth was simulated taking into account the process of unloading of the material. The crack was growing by the generalized local criterion of an embritled destruction.

Key Words: compact specimen, plastic deformation, growing of crack, three dimension problem.

E-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., Маципура В.Т.

1. Вступ. У публікаціях [15–18] розвинено підхід до вивчення динамічного розвитку тріщини у експериментальних зразках, що базується на методі Релея, який полягає в апроксимації перебігу динамічних процесів у балці за допомогою систем одиничного ступеня вільності. Це створює можливість замінити динамічну модель на квазістатичну. У [15–17] рух балки описується як суперпозиція вібраційних мод. Для досягнення більшої точності моделі враховується також кривина ударника і опор. За такою методикою визначається динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень (ДКІН). У [18] запропонована експериментально-розрахункова методика для визначення ДКІН K_1. Експериментально визначалися навантаження і час руйнування коротких компактних зразків. Одиничний сигнал-відповідь обчислювався окремо методом скінчених елементів. ДКІН визначався згідно лінійної теорії як згортка навантаження і одиничного сигналу-відповіді, при цьому критичне значення ДКІН відповідало моментові часу руйнування. Увесь проміжок часу, на якому досліджувався процес руйнування, дорівнював 40 мс. Дослідження по динаміці жорстко-пластичних конструкцій охоплюють широке коло питань, так як імпульсне навантаження використовується при штампуванні виробів, то добре досліджено статичні і динамічні задачі для прямокутних, колових, кільцевих пластин і мембран із різною формою імпульсу навантаження [3]. У праці [7] розв'язується тривимірна квазістатична задача триточкового згину компактного зразку у пружнопластичній постановці, при цьому показано, що напруження значно відрізняються від напружень отриманих в аналогічній задачі у динамічній пружнопластичній постановці. Просторовий пружнопластичний напружено-деформований стан тіла з надрізом визначається в роботі [8]. У публікації [9] розв'язується задача плоского деформованого стану за триточкового згину компактного зразка з центральною крайовою тріщиною. У роботі [10] розв'язується аналогічна задача плоского напруженого стану за критеріальної умови про початок збільшення тріщини у момент переміщення розрахованого максимуму напружень від місця безпосереднього продовження вістря тріщини на певну відстань від нього з тим, щоб забезпечити існування максимуму безпосередньо на продовженні вістря тріщини. В публікаціях [11] і [19] розв'язуються плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого станів з тріщиною, підростання якої контролюється узагальненим локальним σ_*-критерієм крихкого руйнування.

© В.Р. Богданов, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

У публікаціях [12] і [20] в'язкість руйнування матеріалу визначалася відповідно на основі дослідження розв'язків плоского деформованого стану і просторової задач у припущенні, що тріщина нерухома. Запропоновані моделі дали можливість значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. У роботі [14] розглянуто плоску задачу взаємодії абсолютно твердого ударника і пружного ізотропного однорідного півпростору на надзвуковому етапі у рамках теорії пружності в умовах жорсткого зчеплення контактуючих поверхонь. Зона контакту може бути багатозв'язною областю. Задача динаміки взаємодії ударника з півпростором зведена до початкової задачі Коші для системи квазілінійних диференціальних рівнянь. У роботі [24] показано, що кількісні характеристики необхідних умов утворення холодних (крихких) тріщин при зварюванні низьколегованих високоміцних сталей проявляються достатньо чітко при використанні імовірнісної моделі крихкого руйнування з функцією розподілу Вейбула, параметри якого в загальному випадку залежать від мікроструктури матеріалу і процентну дифузного водню, що міститься у металі. При цьому нічого не говоритися про математичну модель і задачу з якої визначені напруження, що використовуються у співвідношеннях розподілу Вейбула. Це свідчить, що імовірнісний підхід достатньо універсальний, однак якщо використовувати більш точну динамічну пружно-пластичну постановку, то отриманий результат буде більш точним. У роботах [21, 22] досліджується процес підростання просторової тріщини за умови зсуву максимальних напружень від вістря тріщини і локального критерія крихкого руйнування відповідно.

На відміну від [8–12, 20–22] у цьому дослідженні розв'язується просторова задача з підростаючою тріщиною у динамічній пружнопластичній постановці із врахуванням процесу розвантаження ма-теріалу. Тріщина підростає відповідно до умови узагальненого локального σ_{zz}-критерія крихкого руйнування.

2. Математичне формулювання задачі.

Розглядається деформування ізотропного брусу $\{|x|\le L/2,\ 0<y\le B,\ 0\le z\le H\}$, що має у площині поперечного перерізу форму прямокутника $\Sigma=L\times B\times H$ довжини L, ширини B, товщини H з пропилом-тріщиною завдовжки l вздовж прямокутника (рис. 1) $\{x=0,\ 0\le y\le l,\ 0\le z\le H\}$ посередині (компактний зразок). Брус контактує із двома нерухомими опорами по області $\{L\le x\le L+a,\ y=0,\ 0\le z\le H\}$. Зверху на брус падає абсолютно твердий ударник, що контактує із брусом у області $\{|x|\le A,\ y=B,\ 0\le z\le H\}$ на протязі короткого проміжку часу. Його дію замінимо рівномірно розподіленим у зоні контакту нормальним навантаженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція ($P=p_{01}+p_{02}t$). Будемо вважати, що область контакту увесь час залишається незмінної. Оскільки процес деформування є симетричним відносно площини $x=0$, далі розглядатиметься тільки права частина поперечного перерізу (рис. 1).

Унаслідок високоінтенсивного ударного навантаження вважаємо, що процес деформування є пружно-пластичним із зміцненням, причому розрахунки полів напружень, деформацій і їхніх приростів, зокрема приросту інтенсивності пластичних деформацій, а також параметра Одквіста будемо нижче здійснювати на основі числового розв'язку відповідної динамічної пружнопластичної задачі.

Крайові й початкові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, однак виходять із припущення про незмінність області прикладання реакції опор, запишуться так:

$$
\begin{aligned}
&x=0,0<y<l,0<z<H:\sigma_{xx}=0,\sigma_{xy}=0,\sigma_{xz}=0;\\
&x=0,l<y<B,0<z<H:u_x=0,\sigma_{xy}=0,\sigma_{xz}=0;\\
&x=L/2,0<y<B,0<z<H:\sigma_{xx}=0,\sigma_{xy}=0,\sigma_{xz}=0;\\
&y=0,0<x<L,0<z<H:\sigma_{yy}=0,\sigma_{xy}=0,\sigma_{yz}=0; \qquad (1)\\
&y=0;L<x<L+a;0<z<H:u_y=\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=0;\\
&y=0;L+a<x<L/2;0<z<H:\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=0;\\
&y=B;0<x<A;0<z<H:\sigma_{yy}=-P;\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=0;\\
&y=B;A<x<L/2;0<z<H:\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=0;\\
&z=0;0<x<L/2;0<y<B:\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0;\\
&z=H;0<x<L/2;0<y<B:\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0;\\
&t=0:u_x=0;u_y=0;u_z=0;\dot{u}_x=0;\dot{u}_y=0;\dot{u}_z=0;t=l_1.
\end{aligned}
$$

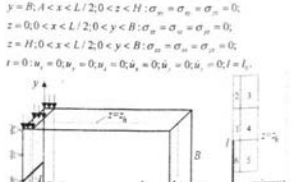


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

Крапка над символом позначає похідну за часом. Розглядаються рівняння просторової динамічної теорії, для якої компоненти вектора

Kyiv National Taras Shevchenko University

зміщень $\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$ пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння руху середовища мають вигляд $\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$.

За фізичну модель прийнята модель, заснована на теорії неізотермічного пластичного течіння для середовища із зміцненням і умовою текучості Губера - Мізеса разом із гіпотезою короткочасної повзучості [5]. Таким чином рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями матимуть вигляд [1]:

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^e+\varepsilon_{ij}^c,\ \varepsilon_{ij}^e=\frac{1}{2G}s_{ij}+K\sigma,\ d\varepsilon_{ij}^p=s_{ij}d\lambda, \qquad (2)$$

де $s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma$ – компоненти девіатора тензора напружень; δ_{ij} - символ Кронекера; G – модуль зсуву; $K=3K_1$, $K_1=(1-2\nu)/(3E)$ – модуль об'ємного стиску, що зв'язує об'ємне розширення 3ε, середнє напруження $\sigma=(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})/3$ у співвідношенні $\varepsilon=K\sigma$; ν – коефіцієнт Пуасона; E – модуль пружності (Юнга); $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається формою поверхні навантаження і квадратично залежить від девіатора напружень s_{ij} [5], причому:

$$d\lambda=\left\{0\ (f=\sigma_i^2-\sigma_s^2(T)<0),\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}\ (f=0,\ df=0)\right\},\ \sigma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{xx}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+6\left(\sigma_{xy}^2+\sigma_{xz}^2+\sigma_{yz}^2\right)\Big)^{1/2}, \qquad (3)$$

$$d\varepsilon_i^p=\frac{\sqrt{2}}{3}\Big(\left(d\varepsilon_{xx}^p-d\varepsilon_{yy}^p\right)^2+\left(d\varepsilon_{xx}^p-d\varepsilon_{zz}^p\right)^2+\left(d\varepsilon_{yy}^p-d\varepsilon_{zz}^p\right)^2+6\left(\left(d\varepsilon_{xy}^p\right)^2+\left(d\varepsilon_{xz}^p\right)^2+\left(d\varepsilon_{yz}^p\right)^2\right)\Big)^{1/2},$$

де σ_i, ε_i^p, $d\varepsilon_i^p$ – інтенсивності напружень, пластичних деформацій та прирости останніх.

Припускаємо, що в результаті пластичної деформації відбувається зміцнення матеріалу за таким температурним співвідношенням [2]:

$$\sigma_s(T)=\sigma_{s0}(T_0)\left(1+\kappa(T)/\varepsilon_0\right)^{\eta_0},\ \varepsilon_0=\sigma_{s0}(T_0)/E,$$

де T – температура; $\kappa=\int d\varepsilon_i^p$ – параметр Одквіста; $T_0=20^\circ C$; η_0 – коефіцієнт зміцнення; $\sigma_s(T)$ - межа текучості після зміцнення матеріалу при температурі T.

3. Схема розв'язування задачі. Нехай нестаціонарна взаємодія відбувається в інтервалі часу $[0,t_*]$. Тоді для кожного моменту часу t з цього інтервалу:

$$\varepsilon_{ij}^e=\frac{\sigma_{ij}}{2G}+\delta_{ij}\left(K-\frac{1}{2G}\right)\sigma,\ \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt}=\left(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right)\frac{d\lambda}{dt}, \qquad (4)$$

$(i,j=x,y,z)$.

Для числового інтегрування за часом використовувалася квадратурна формула Грегорі [6] порядку $m_1=3$ з коефіцієнтами D_n. Після рівномірної дискретизації за часом з вузлами $t_k=k\Delta t\in[0,t_*]$ $(k=\overline{0,K})$ для кожного значення k запишемо відповідні вузлові значення приростів деформацій:

$$\Delta\varepsilon_{xx,k}=B_1\sigma_{xx,k}+B_2(\sigma_{yy,k}+\sigma_{zz,k})-b_{xx},\ \Delta\varepsilon_{xy,k}=B_3\sigma_{xy,k}-b_{xy},$$
$$\Delta\varepsilon_{yy,k}=B_1\sigma_{yy,k}+B_2(\sigma_{xx,k}+\sigma_{zz,k})-b_{yy},\ \Delta\varepsilon_{xz,k}=B_3\sigma_{xz,k}-b_{xz},$$
$$\Delta\varepsilon_{zz,k}=B_1\sigma_{zz,k}+B_2(\sigma_{xx,k}+\sigma_{yy,k})-b_{zz},\ \Delta\varepsilon_{yz,k}=B_3\sigma_{yz,k}-b_{yz},$$
$$B_1=\frac{1}{3}\left(K+\frac{1}{G}+2D_0\Delta\lambda_k\right),\ B_2=\frac{1}{3}\left(K-\frac{1}{2G}-D_0\Delta\lambda_k\right),$$
$$B_3=\frac{1}{2G}+D_0\Delta\lambda_k,\ b_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma_{ij,k-1}+\delta_{ij}\left(K-\frac{1}{2G}\right)\sigma_{k-1}-\sum_{n=1}^{k}D_n\left(\sigma_{ij,k-n}-\delta_{ij}\sigma_{k-n}\right)\Delta\lambda_{k-n}. \qquad (5)$$

Функція $\psi=1/(2G)+\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda$ – різницевий відповідник диференціалу $d\lambda$), що характеризує умову текучості, з урахуванням (2), (3) дорівнює:

$$\psi=\left\{\frac{1}{2G}\ (f<0),\ \frac{1}{2G}+\frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}\ (f=0,df=0)\right\}, \qquad (6)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}=\Delta\varepsilon_{ij}^p+\Delta\varepsilon_{ij}^e,\ \Delta\varepsilon_{ij}^e=\sigma_{ij}/(2G)+\delta_{ij}\left(K-1/(2G)\right)\sigma,\ (i,j=x;y;z),$$

$$\Delta\varepsilon_i^p=\frac{\sqrt{2}}{3}\Big(\left(\Delta\varepsilon_{xx}^p-\Delta\varepsilon_{yy}^p\right)^2+\left(\Delta\varepsilon_{xx}^p-\Delta\varepsilon_{zz}^p\right)^2+\left(\Delta\varepsilon_{yy}^p-\Delta\varepsilon_{zz}^p\right)^2+6\left(\left(\Delta\varepsilon_{xy}^p\right)^2+\left(\Delta\varepsilon_{xz}^p\right)^2+\left(\Delta\varepsilon_{yz}^p\right)^2\right)\Big)^{1/2}. \qquad (6)$$

Для урахування фізичної нелінійності, що міститься в залежностях (8), застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [2, 7 – 13, 19, 20]:

$$\psi^{(n+1)}=\left\{\psi^{(n)}p+\frac{1-p}{2G}\ (\sigma_{ii}<-Q);\ \psi^{(n)}\ (|\sigma_{ii}|<Q);\ \psi^{(n)}\frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(T)}\ (\sigma_{ii}>Q)\right\},\ \sigma_{ii}=\sigma_i^{(n)}-\sigma_s(T), \qquad (7)$$

де Q – величина найбільше відхилення інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ на кроці n від зміцненої межі текучості; n – номер наближення.

Розв'язок системи (5) дає вирази для компонент тензора напружень на кожному кроці k:

$$\sigma_{xx,k}=A_1\Delta\varepsilon_{xx,k}+A_2\Delta\varepsilon_{yy,k}+A_2\Delta\varepsilon_{zz,k}+Y_{xx},\ Y_{xx}=A_1b_{xx},$$
$$\sigma_{yy,k}=A_2\Delta\varepsilon_{xx,k}+A_1\Delta\varepsilon_{yy,k}+A_2\Delta\varepsilon_{zz,k}+Y_{yy},\ Y_{yy}=A_1b_{yy},$$
$$\sigma_{zz,k}=A_2\Delta\varepsilon_{xx,k}+A_2\Delta\varepsilon_{yy,k}+A_1\Delta\varepsilon_{zz,k}+Y_{zz},\ Y_{zz}=A_1b_{zz},$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\sigma_{xx,k} = A_k\Delta\varepsilon_{xx,k} + Y_{xx}, \quad Y_{xx} = A_k b_{xx} + A_k b_{yy} + A_k b_{zz},$$
$$\sigma_{yy,k} = A_k\Delta\varepsilon_{yy,k} + Y_{yy}, \quad Y_{yy} = A_k b_{xx} + A_k b_{yy} + A_k b_{zz},$$
$$\sigma_{zz,k} = A_k\Delta\varepsilon_{zz,k} + Y_{zz}, \quad Y_{zz} = A_k b_{xx} + A_k b_{yy} + A_k b_{zz},$$
$$A_k = \frac{B_k + B_{k+1}}{(B_k - B_k)(B_k + 2B_k)}, A_k = -\frac{B_k}{(B_k - B_k)(B_k + 2B_k)}, \quad A_k = \frac{1}{B_k}. \tag{8}$$

Оскільки в механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиностійкість) переважно отримують у квазістатичних експериментах та зіставляють її із граничним значенням коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_{1c}, отриманим із квазістатичного (як правило пружного) розв'язку, то для опису зміни окремих характеристик в ролі незалежного параметра (змінної) будемо вважати наближене значення КІН K_1 (нижче називатимемо його пружним КІН). Для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною наближено вважають [4]:

$$K_1 = 12F\frac{\sqrt{l}}{BH}\left(1{,}93 - 3{,}07\frac{l}{B} + 14{,}53\left(\frac{l}{B}\right)^2 - 25{,}11\left(\frac{l}{B}\right)^3 + 25{,}8\left(\frac{l}{B}\right)^4\right), \tag{9}$$

в котрій $F = 2APH$ – контактна сила, $4B$ – відстань між опорами.

Для визначення актуальної довжини l тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовувався локальний критерій крихкого руйнування. Якщо в будь-якій комірці рядка 1, головне напруження σ_1 досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування $S_c(\kappa) = [C_1 + C_2\exp(-J_1\kappa)]^{-1/2}$ за умови, що ефективне напруження $\sigma_{ef} = \sigma_1 - \sigma_{id}$ при $\sigma_{id}(T) = a - c(T + 273) + b\exp(-h(T + 273))$ не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується. Коли такій умові крихкого руйнування відповідають комірки рядка 1 по товщині, що складають разом не менш 65 відсотків від товщини зразка H, тоді тріщина просувалася на один рядок комірок вгору. Рядок комірок 2 ставав рядком комірок 1, змінювалася сітка розбиття, перенумерація комірок і всі напруження перераховувалися для збільшеної тріщини. Так робилося до тих пір, поки згадані найбільші напруження не фіксувалися у всьому рядку комірки 1. Процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом. Якщо в будь-якій комірці абсолютне значення напруження ставало меншим нєж максимальне значення, тоді пластичні деформації зупиняють збільшуватися і зміцнення матеріалу припиняється. Знов пластичні деформації починають збільшуватися і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальних значень.

4. Числова реалізація. Чисельні дослідження проводилися для брусків із компактним профілем з сталі 15Х2НМФА. Для розрахунків використовувався метод скінченних різниць [6] із змінним кроком розбиття. Використання цього методу обґрунтовується в [23], причому забезпечується точність розрахунків з похибкою не більше ніж $O\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta t)^2\right)$. На рис. 2, 3 відображено результати розрахунків компактних зразків довжиною 60 мм, шириною 10 мм, товщиною 50 мм і глибиною пропила у центрі 3 мм, з коефіцієнтом зміцнення матеріалу $\eta^* = 0{,}05$. Відстань між опорними точками дорівнювала 40 мм. Обчислення здійснені за таких значень параметрів: $\Delta t = 5\cdot10^{-4}$ с, A=2,5 мм, $p_{0.2} = 8$ МПа, $p_{0.2} = 10$ МПа, M=22, N=22, K=21, температура T=50° С.

У [18] при проведенні експериментів компактні зразки руйнувалися за 21 – 23 мс. Процес руйнування компактних зразків з матеріалу, розміром і з контактним навантаженням як у [18] було змодельовано у динамічній пружно-пластичній постановці з урахуванням розвантаження матеріалу і підростання тріщини за локального критерія крихкого руйнування. Зразки руйнувалися за 23 мс. Це підтверджує коректність і адекватність розробленої постановки і моделі.

На рис. 2, 3 приведено відповідно графіки напружень і значень параметру Одквіста κ від КІН в площині z=41,3 мм у коміркі продовження тріщини (комірка 1 на схемі рис.1b) тривимірної моделі компактного зразку (рис. 2). Суцільна, суцільна з трикутником, суцільна з кружечком, пунктирна і суцільна з хрестиком лінії стосуються відповідно напружень σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, інтенсивності напружень σ_i і напруження текучості $\sigma_{0.2}$.

Рис. 2. Напруження у зоні вістря тріщини

Розрахунки свідчать, що тріщина починає рости, коли КІН набуває значення $K_1 = K_{1c} = 60{,}1$

Kyiv National Taras Shevchenko University

МПа$\sqrt{м}$ і її довжина змінюється так же, як у випадку без урахування розвантаження матеріалу. Після досягнення пружним КІН значення $K_1 = K_{pr} = 114{,}8$ МПа$\sqrt{м}$ напруження σ_{zz}, σ_{rr} і $\sigma_{\theta\theta}$ різко зменшуються, а напруження σ_{rr} стають стискаючими (від'ємними), довжина тріщини різко збільшується і сягає значення $l = 7{,}9$ мм.

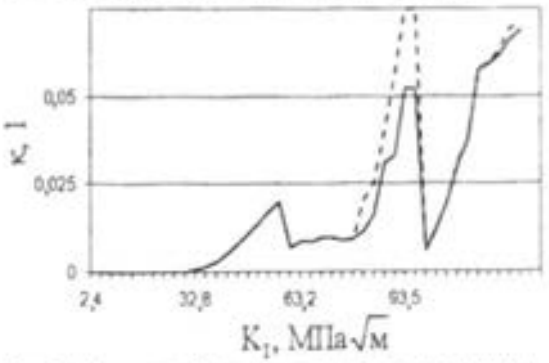


Рис. 3. Параметр Одквіста у зоні вістря тріщини

Пунктирна лінія на рис. 3 стосується результатів розрахунків задачі без врахування розвантаження матеріалу. Коли КІН сягає значення $K_1 = 78{,}3$ МПа$\sqrt{м}$ параметр Одквіста починає відрізнятися від випадку, коли зміцнення матеріалу не враховується.

Розв'язування тривимірної задачі про напружено-деформований стан для матеріалу з поперечним перерізом у формі компактного зразку при триточковому згині у динамічній пружнопластичній постановці із врахуванням процесу розвантаження дає можливість більш точно визначати поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язку аналогічної задачі без врахування процесу розвантаження матеріалу, коли починається коливання головних розриваючих напружень.

Висновок. Розв'язування тривимірної задачі про напружено-деформований стан для матеріалу з поперечним перерізом у формі прямокутника з пропилом-тріщиною посередині для визначення в'язкості руйнування при триточковому згині у динамічній пружнопластичній постановці із урахуванням процесу розвантаження дає можливість більш точно визначати поля пластичних деформацій і напружень. Запропонована методика дає можливість покращити запропоновані в [7–13, 19–22] розрахункові методики.

Список використаних джерел

1. *Аркулис Г.Э.* Теория пластичности / Г.Э. Аркулис, В.Г. Дорогобид – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
2. *Махненко В.И.* Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций / В.И. Махненко. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
3. *Немировский Ю.В.* Динамическое сопротивление плоских пластических преград / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // Новосибирск: Академическое изд-во «Гео». – 2009. – 311 с.
4. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов. [в 4-х томах] / Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. – Киев: Наукова думка, 1988. – 620 с.
5. Сборник: Теория пластичности [пер. с англ.]. – М.: ИЛ, 1948. – 460 с.
6. *Хемминг Р.В.* Численные методы / Р.В. Хемминг. – М.: Наука, 1972. – 399 с.
7. *Богданов В.Р.* О пространственной деформации упругопластического материала с профилем формы компактного образца / В.Р. Богданов // Теор. и прикл. мех., Донецк. – 2011. – Вып. 3 (49). – С. 51–58.
8. *Богданов В.Р.* Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини. / В.Р. Богданов // Вісник Київського нац. Ун-ту. Сер. "Фіз.-мат. науки" – 2009. – Вип. 2. – С. 51-56.
9. *Богданов В. Р.* О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упруго-пластических деформаций при динамическом нагружении / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулым // Теор. и прикл. мех., Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66.
10. *Богданов В.Р.* Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружнопластичною моделлю плоского напруженого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
11. *Богданов В.Р.* Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Вісник Львівського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.

Kyiv National Taras Shevchenko University

12. *Богданов В. Р.* Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Физ.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24.
13. *Махненко В.И.* Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации / В.И. Махненко // Автоматическая сварка. – 2003. – № 10–11. – С. 112–121.
14. *Медведский А. Л.* Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскостью. на сверхзвуковом участке внедрения / А.Л. Медведский, Д.В. Тарлаковский // Вестник МАИ. – 2011. – Т. 18. – № 6. – С. 125–132.
15. *Rokach I.V.* On the numerical evaluation of the anvil force for accurate dynamic stress intensity factor determination / I.V. Rokach // Engineering Fracture Mechanics. – 70. – 2003. – P. 2059–2074.
16. *Rokach I.V.* Modal approach for processing one- and three-point bend test data for dsif–time diagram determination. Part 1 – theory / I.V. Rokach // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 21. – 1998. – P. 1007–1014.
17. *Rokach I.V.* Influence of contact compliance on dynamic stress intensity factor variation during an impact test / I.V. Rokach // International Journal of Fracture. – 126. – 2004. – P. 41–46.
18. *Weisbrod G.* A method for dynamic fracture toughness determination using short beams / G. Weisbrod, D. Rittel // International Journal of Fracture. – 104. – 2000. – P. 89–103.
19. *Богданов В.Р.* Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулым // Збірник наукових праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій», Дніпропетровськ . – 2011. – № 15. – С. 33–44.
20. *Богданов В.Р.* Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Международный научно-технический сборник «Надежность и долговечность машин и сооружений». – 2010. – № 33. – С. 153–166.
21. *Богданов В.Р.* Просторове моделювання процесу підростання тріщини на основі числового розв'язування / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Збірник наукових праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій», Дніпропетровськ. – 2012. – № 19. – С. 10–19.
22. *Богданов В.Р.* Моделювання руху тріщини у компактному зразку на основі числового розв'язування просторової задачі / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Збірник наукових праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла», Дніпропетровськ . – 2012. – № 13. – С. 60–68.
23. *Зюкина Е.Л.* Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения / Е.Л. Зюкина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань, – т.26. – 2004 – С. 151–160.
24. *Махненко В.И.* Риск образования холодных трещин при сварке конструкционных высокопрочных сталей / В.И. Махненко, В.Д. Позняков, Е.А. Великоиваненко, Г.Ф. Розынка, Н.И. Пивторак // Збірник наукових праць «Обробка матеріалів у машинобудуванні», Національний університет кораблебудування, Миколаїв. – 2009. – № 3. – С. 5 – 12.

Надійшла до редколегії 14.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 539.3

Горошко О.О., д.ф.-м.н. проф.,
Кикоть*С.В., к.ф.-м.н.

Вимушені коливання гнучкого трубопроводу з потоком рідини та нульовим початковим натягом при силовому збудженні

У статті досліджуються вимушені коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною з нульовим початковим натягом. Для постановки задачі та побудови розв'язку нелінійних рівнянь використовується гіпотеза Кірхгофа та прямі методи математичної фізики. Результати чисельно-аналітичного дослідження представлені графічно, побудовано резонансну криву вимушених коливань гнучкого трубопроводу з потоком рідини та нульовим початковим натягом. Встановлена особливість початку скелетної кривої.

Ключові слова: гнучкий трубопровід, двохвильовий коливний процес, резонанс.

O.O.Goroshko, Dr.Sc., Professor,
S.V. Kykot'*, Ph.D.,

Forced oscillations of a flexible conduit with fluid flow at zero starting tension under force excitation

The paper is devoted to investigations of the forced oscillations of a flexible conduit with fluid flow at zero starting tension. The Kirchhoff hypothesis and direct methods of mathematical physics are used for the problem formulation and construction of the nonlinear equations solutions. Results of analytically-numerical investigations are presented graphically by construction of the resonance curve of the forced oscillations of a flexible conduit with fluid flow at zero starting tension. The skeletal curve peculiarity at the beginning is obtained.

Key words: flexible conduit, double wave oscillation process, resonance.

*E-mail: s.v.kykot@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

Вступ. Конкретні прикладні задачі динаміки трубопроводів у різних галузях промисловості та машинобудуванні: трубопроводів, закріплених на вібруючих об'єктах, при роботі компресорів в процесі перекачки газорідинних продуктів, у морській справі, наприклад, плаваючого трубопроводу, зумовлюють розглядати нові задачі коливань гнучких шлангів з врахуванням зовнішніх силових збуджень та впливу гіроскопічного характеру сил інерції внутрішнього потоку рідини.

В роботі розглядається ускладнена задача про вимушені коливання трубопроводу з рухомою рідиною та нульовим натягом при наявності коріолісових та центробіжних сил інерції протікаючої рідини.

Для розв'язання поставленої задачі запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який базується на двохвильовому представленні розв'язку та використанні прямих методів математичної фізики.

Особливості динамічних процесів в гнучких системах з рухомим розподіленим інерційним навантаженням розглянуті в працях [3,4].

Постановка і розв'язання задачі.

Диференціальне рівняння вимушених коливань гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною нелінійне і записується у вигляді [1]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(T(u')-\rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=q(x)\cos pt\,, \quad (1)$$

де $\rho=\rho_1+\rho_2$ – погонна маса шланга і потоку рідини, $u=u(x,t)$ – поперечний прогин під дією рухомої рідини з врахуванням сил інерції, v – швидкість потоку рідини, $T(u')$ - натяг, що виникає внаслідок видовження трубопроводу при відхиленні від початкового нульового положення, q – амплітуда розподіленої за законом $q(x)=q=const$ зовнішньої сили збудження, p – частота зовнішнього збудження.

Розв'язок рівняння (1) представимо у вигляді [3,4]

$$u(x,t)=B\sin\lambda x\cos\psi(x,t), \quad (2)$$

де $\lambda=\frac{\pi}{l}$, $\psi=\psi(x,t)=pt+\gamma x$ – фазова функція,

© О.О. Горошко, С.В. Кикоть, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

γ – ексцес, який характеризує зміну форм вимушених коливань під дією рухомого навантаження.

У відповідності з гіпотезою Кірхгофа [1] при обчисленні $T(u')$ за допомогою виразу $T(u')=\frac{EF}{2l}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ та представлення розв'язку у формі (2), отримаємо

$$T(u')=\frac{EFB^2}{4}\left[\lambda^2\cos^2\psi+\gamma^2\sin^2\psi\right]. \quad (3)$$

Підставляючи в рівняння руху (1) прогин $u(x,t)$ та натяг $T(u')$, представлені в формі (2) та (3) отримаємо

$$B\left[-\rho p^2-2\rho_2 vp\gamma+\left(T(u')-\rho_2 v^2\right)(\lambda^2+\gamma^2)\right]\sin\lambda x\cos\psi+B\left[-2\rho_2 vp\lambda+2\lambda\gamma\left(T(u')-\rho_2 v^2\right)\right]\cos\lambda x\sin\psi=$$
$$=q\cos\gamma x\cos\psi+q\sin\gamma x\sin\psi. \quad (4)$$

Множники $\sin\lambda x\cos\psi$ та $\cos\lambda x\sin\psi$ ні при яких значеннях фазового кута одночасно не набувають нульових значень. Виконання умови (4) можливе лише при умовах:

$$B\left[-\rho p^2-2\rho_2 vp\gamma+\left(T(u')-\rho_2 v^2\right)(\lambda^2+\gamma^2)\right]\sin\lambda x\cos\psi=q\cos\gamma x\cos\psi$$
$$B\left[-2\rho_2 vp\lambda+2\lambda\gamma\left(T(u')-\rho_2 v^2\right)\right]\cos\lambda x\sin\psi=q\sin\gamma x\sin\psi, \quad (5)$$

накладених на фазову функцію $\psi(x,t)$.

Застосуємо для побудови розв'язку нелінійних рівнянь (5) метод Б. Г. Гальоркіна [2]. Домножуючи перше рівняння на $\sin\lambda x\cos\psi dxd\psi$, друге на $\cos\lambda x\sin\psi dxd\psi$ та інтегруючи в межах $0<x<l$, $0<\psi<2\pi$, отримаємо два рівняння для визначення амплітуди вимушених коливань B та ексцесу γ.

$$B\left[-\rho p^2-2\rho_2 vp\gamma+\left(\frac{EFB^2}{16}\left(3\lambda^2+\gamma^2\right)-\rho_2 v^2\right)(\lambda^2+\gamma^2)\right]=-q\frac{4\pi\cos^2\frac{\gamma l}{2}}{(\gamma l)^2-\pi^2},$$
$$B\left[-\rho_2 vp+\left(\frac{EFB^2}{16}\left(\lambda^2+3\gamma^2\right)-\rho_2 v^2\right)\gamma\right]=q\frac{2\gamma l^2\cos^2\frac{\gamma l}{2}}{(\gamma l)^2-\pi^2} \quad (6)$$

В безрозмірних параметрах:

$$\theta=\gamma\frac{l}{\pi}=\frac{\gamma}{\lambda},\quad h=\frac{B}{l},\quad k_2=\frac{\rho_2}{\rho},\quad v_0^2=\frac{\rho_2 v^2}{EF\pi^2},$$
$$Q=\frac{ql}{EF\pi^3},\quad p_0^2=\frac{\rho l^2 p^2}{EF\pi^4}=\left(\frac{p}{\pi\Omega}\right)^2,$$

Тут $\Omega=\pi\sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}}$ – частота поздовжніх коливань струни закріпленої на кінцях.

система рівнянь (6) набуває вигляду

$$h\left[-16p_0^2-32p_0v_0\sqrt{k_2}\theta+\left[h^2\left(3+\theta^2\right)-16v_0^2\right]\left(1+\theta^2\right)\right]=-32Q\frac{1+\cos\pi\theta}{\theta^2-1},$$
$$h\left[-16p_0v_0\sqrt{k_2}+\left[h^2\left(1+3\theta^2\right)-16v_0^2\right]\theta\right]=16Q\frac{\theta\left(1+\cos\pi\theta\right)}{\theta^2-1}. \quad (7)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Для визначення дійсних значень безрозмірних параметрів ексцесу θ та амплітуди вимушених коливань h, при заданих параметрах швидкості руху рідини v_0 та частоти зовнішнього збудження p_0, систему рівнянь (7) перепишемо у вигляд

$$\cos^2\frac{\pi}{2}\theta=\frac{2\left(\theta^2-1\right)}{Q}\sqrt{\frac{\theta p_0^{\,2}+2p_0v_0\sqrt{k_2}\left(\theta^2+1\right)+v_0^{\,2}\theta\left(\theta^2+3\right)}{\theta^3\left(\theta^4+10\theta^2+5\right)^3}}\times$$

$$\times\left[2\left(\theta^4-1\right)\theta v_0^{\,2}+\left(2\theta^4-3\theta^2-3\right)p_0\sqrt{k_2}v_0+\left(1+3\theta^2\right)p_0^{\,2}\theta\right],$$

$$h^2=16\frac{\theta p_0^{\,2}+2p_0v_0\sqrt{k_2}\left(\theta^2+1\right)+v_0^{\,2}\theta\left(\theta^2+3\right)}{\theta\left(\theta^4+10\theta^2+5\right)}. \qquad (8)$$

Друге рівняння системи (8) описує форму резонансної кривої.

Для чисельного аналізу системи рівнянь (8) при умові $0\le\theta\le1$, як приклад, значення вихідних даних брались наступні: $EF=2\cdot10^4H$, $\rho_2=2\rho_1$, $l=10м$, $q=100H/м$.

На рис. 1 зображено графіки залежностей безрозмірних параметрів ексцесу форм коливань θ від параметра частоти зовнішнього збудження p_0, при фіксованих значеннях безрозмірного параметра швидкості v (1 – $v_0=0$; 2 – $v_0=0{,}01$; 3 – $v_0=0{,}02$; 4 – $v_0=0{,}03$).

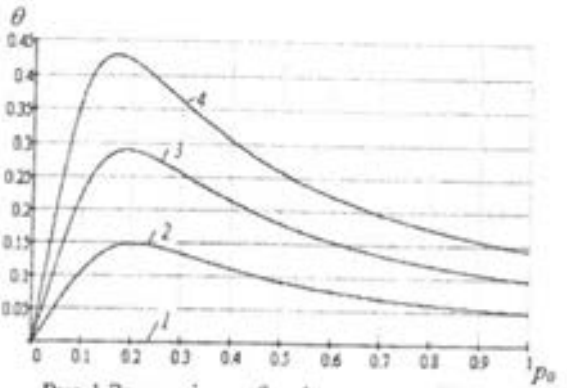


Рис.1.Залежність θ від p_0 при фіксованих значеннях v.

Для побудови резонансної кривої перше рівняння системи рівнянь (7) перепишемо у вигляді

$$p_0^{\,2}=\left[\frac{5\theta^2+3}{16}h^2-v_0^{\,2}\right]\left(1-\theta^2\right)+2\frac{Q}{h}\frac{\theta^2+1}{\theta^2-1}\left(1+\cos\pi\theta\right). \qquad (9)$$

У відповідності з класичним графічним методом побудови резонансної кривої [2] будуємо в системі координат $\left(p_0^{\,2},h\right)$ дві криві:

параболу $p_0^{\,2}=\left[\frac{5\theta^2+3}{16}h^2-v_0^{\,2}\right]\left(1-\theta^2\right)$,

та гіперболу $p_0^{\,2}=2\frac{Q}{h}\frac{\theta^2+1}{\theta^2-1}\left(1+\cos\pi\theta\right)$.

Після алгебраїчного додавання абсцис, що відповідають одному й тому ж значенні параметру амплітуди h одержимо графік резонансної кривої.

Початкове значення відхилення шланга при якому розвивається резонанс визначається розв'язком кубічного рівняння:

$$\frac{5\theta^2+3}{16}h^3-v_0^{\,2}h-2Q\frac{\theta^2+1}{\left(1-\theta^2\right)^2}\left(1+\cos\pi\theta\right)=0 \qquad (10)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

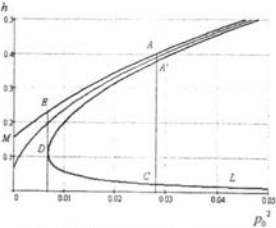


Рис. 2. Резонансна крива для вимушених коливань у випадку жорсткої характеристики.

З рис. 2 видно, що скелетна крива бере початок із значення $p_0^2 = 0$, що вказує на відсутність резонансної частоти при $p_0 < 0$, а амплітуда вимушених коливань зростає із зростанням частоти при значеннях частоти вимушеної сили $p_0 > 0$. При зростаннях частоти вимушеної сили високоамплітудний режим коливань *MA* стає не стійким і стрибком зменшується до низькоамплітудних коливань, ділянка резонансної кривої *CL*.

При зменшенні частоти вимушеної сили p_0, амплітуда вимушених коливань на ділянці *LCD* зростає і в точці *D* стрибком переходить на верхню резонансну криву *MA* в точку *E*. Подальша зміна амплітуди буде відбуватися вздовж ділянки *EM* вліво.

Момент переходу з високочастотних коливань на низькочастотні коливання визначається рівнем дисипації енергії в даному досліджені не розглядався.

Таким чином коливання з частотами, що відповідають амплітуді вимушених коливань *DA'* не стійкі і на практиці не реалізовуються [1,2].

Висновки. Отримані результати аналітично-чисельного дослідження вимушених коливань гнучкого трубопроводу з нульовим початковим натягом дають можливість сформулювати такі висновки:

1. Зсув скелетної кривої в околі нульових частот обумовлений стабілізуючим фактором сил інерції рухомої рідини і дає можливість визначити початкове значення відхилення шланга при якому розвивається резонанс.

2. Амплітуди низькочастотних вимушених коливань визначаються верхньою кривою *MA*, цей факт представляє практичний інтерес при дослідженні вимушених коливань плаваючого трубопроводу.

3. Амплітуди високочастотних вимушених коливань визначаються нижньою кривою *LCD* графіка, цей факт представляє практичний інтерес при дослідженні вимушених коливань трубопроводів закріплених на вібруючих об'єктах.

Список використаних джерел

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика: [перевод с немецкого Я. Г. Пановко] / Г. Каудерер – М. : Изд. иностранной литературы, 1961. – 778с.
2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний / Бабаков И. М. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
3. *Горошко О. О.* Одночастотні динамічні процеси в системах з рухомим інерційним навантаженням /О. О. Горошко, С. В. Кикоть // Комплексний аналіз і течії з вільними границями. К.: Ін-т математики, 2010. – Т. 7, № 2. – С. 347–356. – (Праці / Ін-т математики НАН України).
4. *Горошко О.О.* Нелінійні коливання гнучкого трубопроводу з потоком рідини з нульовим початковим натягом / Горошко О.О., Кикоть С.В. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – № 1. – С. 65 – 68.

Надійшла до редколегії 27.06. 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 517.9

А.П. Кревенич, *к.ф.-м.н., доцент*

Про розв'язання диференціального рівняння з випадковим збуренням, не розв'язаного відносно похідної

Для системи диференціальних рівнянь вигляду $d(x - g(t,x)) = f(t,x)dt + d\xi(t)$ *доведено теорему існування і єдиності розв'язку.*

Ключові слова: нелінійна система; система, не розв'язана відносно похідної; теорема існування і єдиності; випадкове збурення.

A.P. Krenevych, *PhD, Associate Professor*

On solving the differential equation with random perturbation not solved relative to the derivative

We provide the uniqueness and existence theorem for the nonlinear differential system with random perturbation in form $d(x - g(t,x)) = f(t,x)dt + d\xi(t)$.

Key Words: nonlinear system; system not solved relative to the derivative; random perturbation; the uniqueness and existence theorem.

E-mails: krenevich@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

1 Вступ

Дослідження властивостей розв'язку будь-якої задачі завжди починається з вирішення питання, чи ці розв'язки існують, і якщо так то, скільки розв'язків має задача. У цій роботі це питання вивчається для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, що збурюються деяким випадковим процесом.

Слід зауважити, що питанням існування і єдиності розв'язків як детермінованих, так і стохастичних рівнянь присвячено безліч робіт, і досить детально вони описані в монографіях та підручниках [1, 2, 3, 4, 5]. Також є роботи із дослідження питань існування розв'язків для диференціальних рівнянь не розв'язаних відносно похідної. Так, наприклад, у роботі [8] наведено теорему існування і єдиності для детермінованої диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної. У працях [9, 10] питання існування і єдиності розв'язків досліджувалося для стохастичних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної в гільбертовому просторі. Проте, слід зауважити, що у згаданих роботах теорему існування і єдиності отримано за дуже сильних умов на коефіцієнти і на досить малому часовому проміжку. Тому ці результати не можуть використовуватися при дослідженні асимптотичних властивостей розв'язків, наприклад, для дослідження стійкості. Отже, питання існування і єдиності розв'язків для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, все ще залишається відкрите.

У цій роботі отримано теорему існування і єдиності розв'язку на додатній півосі для системи диференціальних рівнянь із випадковим збуренням, не розв'язаної відносно похідної.

2 Основні результати

Розглядається система диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

$$d(x - g(t,x)) = f(t,x)dt + d\xi(t), \tag{1}$$

де $t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^{\mathbf{d}}$, з початковою умовою

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Тут f, g – неперервні за сукупністю змінних d-вимірні функції, такі, що існують додатні сталі L_g, L_f, K, що для всіх $t \geqslant 0, x, y \in R^d$ виконуються нерівності

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leqslant L_g|x - y|, \tag{3}$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L_f|x - y|, \tag{4}$$

$$|f(t,x)| + |g(t,x)| \leqslant K(1 + |x|). \tag{5}$$

$\xi(t)$ – деякий неперервний випадковий процес, що визначений на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, такий, що для всіх $t \geqslant 0$

$$E|\xi(t)|^2 < \infty.$$

Якщо функція $g(t,x)$ є неперервно диференційованою за сукупністю змінних, причому її похідна по змінній x у жодній із пар точок (t,x) не дорівнює 1 і процес $\xi(t)$ є неперервно

© А.П. Кревенич, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

диференційованим, то рівняння (1) легко зводиться до звичайного диференціального рівняння з випадковим збуренням

$$x' = \frac{f(t,y) + g_t(t,x) + \xi'(t)}{1 - g_x(t,x)}, \qquad (6)$$

для дослідження питання існування і єдиності розв'язків якого можна використати теореми з теорії звичайних диференціальних рівнянь, що збурені випадковим процесом.

Проте, якщо функція $g(t,x) \in$ довільною неперервною функцією, то постає питання безпосереднього дослідження вихідного рівняння (1).

Доведемо допоміжну лему, що буде відігравати ключову роль у доведенні теореми існування і єдиності розв'язку рівняння (1). Розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$d(x - g(t,x)) = f(t)dt + d\xi(t). \qquad (7)$$

Лема 1. *Нехай для системи (7) виконуються умови (3) і (5), причому стала $L_g < 1$. Тоді система (7) має єдиний розв'язок $x(t)$ для довільної початкової умови (2), причому виконуються умови*

1) $x(t)$ з ймовірністю 1 неперервний випадковий процес;

2) для будь-якого $T > 0$ має місце оцінка

$$E \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|^2 < \infty.$$

Доведення. Перепишемо рівняння (7) у такому інтегральному вигляді

$$x(t) = x_0 - g(0,x_0) - \xi(0) + g(t,x(t)) + \int_0^t f(s)ds + \xi(t). \qquad (8)$$

Розглянемо довільне $T > 0$ і розглянемо рівняння (8) на відрізку $t \in [0,T]$. Введемо множину B_T стохастично неперервних по t на відрізку $[0,T]$ випадкових процесів. Уведенням норми

$$\|\eta\|_{B_T} = \{E \sup_{t\in[0,T]} |\eta(t)|^2\}^{1/2} < \infty$$

множина B_T перетворюється у банаховий простір.

У B_T розглянемо оператор Φ, що діє за правилом

$$\Phi(x)(t) = x_0 - g(0,x_0) - \xi(0) + g(t,x(t)) + \int_0^t f(s)ds + \xi(t). \qquad (9)$$

Оскільки g, f і $\xi \in$ неперервними функціями, то очевидно, що значення оператора Φ будуть неперервними функціями. Також, враховуючи умови теореми, легко показати, що існує додатна стала C_1, що

$$\|\Phi(x)\|^2_{B_T} = E \sup_{t\in[0,T]} |\Phi(x)(t)|^2 \leqslant C_1.$$

Покажемо, що оператор $\Phi \in$ оператором стиску. Дійсно, з нерівності

$$|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)| =$$

$$= |g(t,x(t)) - g(t,y(t))| \leqslant L_g|x(t) - y(t)|$$

випливає оцінка

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|_{B_T} \leqslant L_g\|x(t) - y(t)\|_{B_T}.$$

Оскільки за умовою теореми $L_g < 1$, то оператор $\Phi \in$ оператором стиску і має єдину нерухому точку, а тому рівняння

$$x(t) = \Phi(x)(t)$$

має єдиний розв'язок. Лему доведено.

Сформулюємо тепер теорему існування і єдиності розв'язку для задачі (1), (2).

Теорема 2.1. *Нехай для системи (1) виконуються умови (3)-(5), причому стала $L_g^2 < 1/2$. Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $x(t)$ для довільної початкової умови (2), причому виконуються умови*

1) $x(t)$ з ймовірністю 1 неперервний випадковий процес;

2) для будь-якого $T > 0$ має місце оцінка

$$E \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|^2 < \infty.$$

Доведення. Перепишемо рівняння (1) в інтегральному вигляді

$$x(t) = x_0 - g(0,x_0) - \xi(0) + g(t,x(t)) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \xi(t) \qquad (10)$$

і розглянемо таку ітераційну схему

$$x_0(t) = x_0,$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$x_{n+1}(t) = x_0 - g(0, x_0) - \xi(0) + \\ + g(t, x_{n+1}(t)) + \int_0^t f(s, x_n(s))ds + \xi(t). \quad (11)$$

Із попередньої леми випливає, що ітераційна схема коректна, оскільки рівняння (11) має єдиний розв'язок $x_{n+1}(t)$. Покажемо збіжність цієї ітераційної схеми. Виберемо довільне $T > 0$ та оцінимо різницю між сусідніми членами послідовності $\{x_n : n \geqslant 0\}$

$$E \sup_{t\in[0,T]} |x_1(t) - x_0(t)|^2 = \\ E \sup_{t\in[0,T]} \Big| - g(0, x_0) - \xi(0) + g(t, x_1(t)) + \\ + \int_0^t f(s, x_0(s))ds + \xi(t)\Big|^2 \leqslant \\ \leqslant 5[g(0, x_0)|^2 + 5E|\xi(0)|^2 + \\ + 5E \sup_{t\in[0,T]} |g(t, x_1(t))|^2 + \\ + 5E \sup_{t\in[0,T]} \Big|\int_0^t f(s, x_0(s))ds\Big|^2 + \\ + 5E \sup_{t\in[0,T]} |\xi(t)|^2 \leqslant \\ \leqslant 5[g(0, x_0)|^2 + 5E|\xi(0)|^2 + \\ + 5K(1 + E \sup_{t\in[0,T]} |x_1(t)|^2) + \\ + 5KT^2(1 + |x_0|^2) + 5E \sup_{t\in[0,T]} |\xi(t)|^2 = C_T^2,$$

де C_T – деяка додатна стала, що залежить лише від T.

Далі виберемо деяке $t > 0$ та оцінимо різницю

$$E \sup_{s\in[0,t]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 = \\ = E \sup_{s\in[0,t]} \Big|g(s, x_{n+1}(s)) - g(s, x_n(s)) + \\ + \int_0^s f(\tau, x_n(\tau))d\tau - \int_0^s f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau\Big|^2 \leqslant \\ \leqslant 2E \sup_{s\in[0,t]} |g(s, x_{n+1}(s)) - g(s, x_n(s))|^2 + \\ + 2E \sup_{s\in[0,t]} \Big|\int_0^s \big(f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau)d\tau\big)\Big|^2 \leqslant \\ \leqslant 2L_g^2 E \sup_{s\in[0,t]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 + \\ + 2E \sup_{s\in[0,t]} \Big|\int_0^s \big(f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau\big)\Big|^2 \leqslant \\ \leqslant 2L_g^2 E \sup_{s\in[0,t]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 + \\ + 2TE \sup_{s\in[0,t]} \int_0^s |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))|^2 d\tau \leqslant \\ \leqslant 2L_g^2 E \sup_{s\in[0,t]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 + \\ + 2TL_f^2 \int_0^t E|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)|^2 d\tau \leqslant \\ \leqslant 2L_g^2 E \sup_{s\in[0,t]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 + \\ + 2TL_f^2 \int_0^t E \sup_{s\in[0,\tau]} |x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 d\tau.$$

З останньої нерівності отримаємо оцінку

$$E \sup_{s\in[0,t]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 \leqslant \\ \leqslant C_2 \int_0^t E \sup_{s\in[0,\tau]} |x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 d\tau,$$

де

$$C_2 = \frac{2TL_f^2}{1 - 2L^2}.$$

Інтегруючи останню нерівність, отримаємо

$$E \sup_{s\in[0,t]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 \leqslant C_T^2 \frac{(TC_2)^n}{n!}.$$

Таким чином, зі збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \sup_{s\in[0,T]} |x_{n+1}(s) - x_n(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} C_T^2 \frac{C_2^n T^n}{n!}$$

випливає рівномірна на $[0, T]$ збіжність послідовності $\{x_n(t) : n \geqslant 0\}$ до деякого $x(t)$. Перейшовши до границі при $n \to \infty$ в рівності (11), переконуємося, що $x(t)$ є розв'язком задачі (1),(2).

Доведемо єдиність розв'язку. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – два розв'язки задачі (1),(2). Оцінимо різницю між ними. Очевидно, що кожен із них задовольняє інтегральне рівняння (10). Тоді,

Kyiv National Taras Shevchenko University

проводячи викладки, аналогічні до наведених вище, отримаємо оцінку

$$E \sup_{s\in[\alpha,t]} |x(s) - y(s)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_{\alpha}^{t} E \sup_{s\in[\alpha,\tau]} |x(s) - y_i(s)|^2 d\tau.$$

Остання виконується тільки тоді, коли

$$E \sup_{s\in[\alpha,t]} |x(s) - y(s)|^2 = 0.$$

Теорему доведено.

3 Висновки

У роботі розглянуто клас нелінійних диференціальних рівнянь, збурених випадковим процесом, не розв'язаних відносно похідної. Для таких рівнянь доведено теорему існування і єдиності їхніх розв'язків на додатній півосі. Ці результати стануть у нагоді при дослідженні якісної поведінки розв'язків вищезгаданих рівнянь, при дослідженні стійкості чи асимптотичної поведінки, а також можуть практично застосовуватися для конкретних задач, що виникають при моделюванні різних фізичних, біологічних чи економічних процесів.

Список використаних джерел

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. -368 с.

2. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник. - К.:Либідь, 2003. - 600 с.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - К.: Наукова думка, 1968. -354 с.

4. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - К.: Наука, 1969. - 368 с.

5. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения функционально дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1989. -421с.

6. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. - М., 1965.

7. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. - К.: Вища школа, 1992. -319 с.

8. Креневич А.П., Богоніс А.Р. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки – 2009. – №1. – С. 55–59.

9. Креневич А.П. Про існування і єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь в гільбертовому просторі не розв'язаних відносно "похідної"// Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Вип. 349. Математика. - Чернівці: Рута, 2007. - С. 46 - 49.

10. Креневич А.П. Про стохастичні рівняння не розв'язані відносно "похідної"в гільбертовому просторі // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки -2007.- №2.- С.70-72.

Надійшла до редколегії 05.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Scevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics

УДК 517.9

Лагода В. А., асистент

Існування інваріантних множин нелінійних розширень динамічних систем на некомпактному многовиді

Встановлено достатні умови існування інваріантного перерізу нелінійного розширення динамічної системи на некомпактному многовиді M у випадку, коли таке розширення має властивість монотонності відносно деякої гладкої сім'ї індефінітних квадратичних форм, параметризованої точками з M.

Ключові слова: інваріантний переріз, динамічна система, некомпактний многовид.

V. A. Lagoda, assistant

The existence of invariant set for a nonlinear extension of dynamical system on noncompact manifold

We establish the existence of invariant section for a nonlinear extension of dynamical system on noncompact manifold M in the case where such an extension has a monotonicity property with respect to a family of quadratic forms parametrized by points of M.

Key words: invariant section, dynamical system, noncompact manifold.

E-mail: lagoda_v@ukr.net

Статтю представив доктор ф.-м. н., професор, академік НАН України Перестюк М. О.

Вступ

Питання існування інваріантних множин нелінійних розширень динамічних систем на некомпактних многовидах є на даний час мало вивченим. Головні результати, пов'язані з цією задачею, отримано в роботі [1] у випадку, коли фазовий простір системи – декартів добуток скінченновимірних банахових просторів. Основним апаратом дослідження був узагальнений оператор Гріна-Самойленка, який мав властивість c-неперервності.

Метою даної роботи є встановлення нових достатніх умов існування інваріантних множин скінченновимірних нелінійних розширень динамічних систем на некомпактному многовиді M, за допомогою методу V-W-пари. Такий підхід було вперше розглянуто в [2], [3]. Враховуючи еквівалентність дихотомії та існування функції Ляпунова для лінійних систем в $\mathbb{R}^n$ ([4]), окремий інтерес представляє порівняльний аналіз отриманих умов з обмеженнями, які накладаються в [1].

Основний результат

Розглянемо систему:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x + g(\varphi, x), \qquad (1)$$

де $a : M \mapsto TM$ – неперервне векторне поле на диференційовному m-вимірному многовиді M, яке визначає топологічний потік $\{\phi_t(\varphi)\}_{t\in\mathbb{R}}$; $A : M \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $g : M \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – неперервні відображення.

Інваріантну множину системи (1), задану у фазовому просторі рівнянням $x = u(\varphi), \varphi \in M$, де $u : M \mapsto TM$ – неперервне обмежене відображення, назвемо обмеженим інваріантним перерізом.

Позначимо через $C^r(M; \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n), a)$ — простір, утворений неперервними функціями $F(\varphi)$, для яких функція $F(\phi_t(\varphi))$ неперервно диференційовна по t при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in M$. Позначимо

$$\dot{F}(\varphi) = \frac{dF(\phi_t(\varphi))}{dt}\Big|_{t=0}, \quad \varphi \in M.$$

Вимагатимемо виконання наступних умов:

(A): $\sup\limits_{\varphi\in M} \|A(\varphi)\| =: A_0 < +\infty$;

(B): існує симетричний оператор $S(\cdot) \in C^r(M; \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n), a)$, такий, що

$$\sup_{\varphi\in M} \|S(\varphi)\| =: S_0 < +\infty,$$

$$\inf_{\varphi\in M} \det|S(\varphi)| > 0$$

і для деякої сталої $\mu > 0$ справедлива нерівність

$$\langle (\dot{S}(\varphi) + 2S(\varphi)A(\varphi))x, x\rangle \geqslant \mu\|x\|^2$$
$$\forall(\varphi, x) \in M \times \mathbb{R}^n;$$

© В. А. Лагода 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

(C): існують сталі $k > 0$ та $K_0 > 0$, такі, що:

$$\sup_{\varphi\in M} \|g(\varphi, x)\| \leqslant k\|x\| + K_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

Покладемо $d := \frac{\mu}{2} - S_0 k, m := A_0 + k$ та визначимо

$$F(r) := \begin{cases} \frac{d}{m}r^2 + 2\left(\frac{S_0}{m} + \frac{d}{m^2}\right)\left(\frac{1}{m}\ln(mr+1) - r\right) & \text{якщо} \quad r \geqslant \frac{S_0}{d}, \\ F\left(\frac{S_0}{d}\right) & \text{якщо} \quad 0 \leqslant r < \frac{S_0}{d}. \end{cases}$$

Припускатимемо, що виконана умова

(D):

$$\sup_{\varphi\in M} \|g(\varphi, x) - g(\varphi, y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

$$\forall (x, y) \in B_R(0) \times B_R(0),$$

де $R = r_* K_0$, а r_* – корінь рівняння

$$F(r) = F\left(\frac{S_0}{d}\right) + \frac{S_0^2}{2d^2}\left[S^* - S_*\right],$$

тут

$$S^* := \sup_{\varphi\in M} \max_{\|x\|=1} \langle S(\varphi)x, x\rangle,$$

$$S_* = \inf_{\varphi\in M} \max_{\|x\|=1} \langle S(\varphi)x, x\rangle.$$

Справедлива наступна теорема:

Теорема 1. *Нехай система* (1) *задовольняє умови* (A)-(D) *та*

$$2S_0 k < \mu. \tag{2}$$

Тоді система (1) *має інваріантну множину*

$$M_u = \{(\varphi, x) \in M \times \mathbb{R}^n : x = u(\varphi), \varphi \in M\}$$

з властивістю

$$\sup_{\varphi\in M} \|u(\varphi)\| \leqslant R.$$

Доведення. Підставимо розв'язок $\phi = \phi_t(\varphi_0)$ у друге рівняння (1) і позначимо

$$\tilde{A}(t; \varphi_0) := A(\phi_t(\varphi_0)),\ \tilde{g}(t, x; \varphi_0) := g(\phi_t(\varphi_0), x).$$

Покажемо, що система

$$\dot{x} = \tilde{A}(t; \varphi_0)x + \tilde{g}(t, x; \varphi_0) \tag{3}$$

при виконанні умов $(A) - (C)$, а також нерівності (2) для кожного $\varphi_0 \in M$ має єдиний розв'язок $x_*(t; \varphi_0)$ в кулі $B_R(0)$. Для цього ми використаємо Теорему 3 (Див. п. Допоміжні результати), попередньо поклавши

$$C(t) := \frac{S(\phi_t(\varphi_0))}{\mu}, \quad c := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|C(t)\| = \frac{S_0}{\mu},$$

$$\psi(t) := K_0,\ l := 0.$$

Дійсно, виконання умов $(A) - (C)$ забезпечує виконання умов $(i_1) - (i_2)$, а з нерівності $2S_0 k < \mu$ випливає нерівність $ck < 1/2$.

Отже, для кожного $\varphi_0 \in \mathbb{R}^m$ система (3) має розв'язок $x_*(t, \varphi_0)$, такий, що

$$\|x_*(t, \varphi_0)\| \leqslant R \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Обґрунтування єдиності цього розв'язку повторює доведення єдиності в Теоремі 3.

Покладемо $u(\varphi) = x_*(0, \varphi)$ і відмітимо, що

$$M_u := \{(\varphi, x) \in M \times \mathbb{R}^n : x = u(\varphi), \varphi \in M\}$$

є інваріантною множиною системи (1). Справді в силу автономності цієї системи для кожного $\varphi_0 \in \mathbb{R}^m$ матимемо

$$u(\phi_t(\varphi_0)) = x_*(0, \phi_t(\varphi_0)) = x_*(t, \varphi_0).$$

□

Аналіз отриманих умов

Сформулюємо теорему, яка випливає з низки теорем, наведених в [1], і дає умови існування інваріантної множини у системи (1).

Теорема 2. *Нехай* $a : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – *неперервні відображення і виконуються умови*

(a): для кожного $\varphi_0 \in \mathbb{R}^m$ *розв'язок* $\phi = \phi_t(\varphi_0)$, *який задовольняє умову* $\phi_0(\varphi_0) = \varphi_0$, *має властивість єдиності і визначений на всій осі часу* $t \in \mathbb{R}$;

(b): виконана умова (A);

(c): для кожної обмеженої множини $G \subset \mathbb{R}^n$ *виконується:* $\sup_{(\varphi,x)\in\mathbb{R}^m\times G} \|g(\varphi, x)\| < +\infty$;

Kyiv National Taras Shevchenko University

(d): існують підпростори $X_+(\tau,\varphi)$, $X_-(\tau,\varphi) \subset \mathbb{R}^n$, $(\tau,\varphi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ *та додатні сталі* K, N, ν *для яких:*

1) для кожних $(\tau,\varphi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ *простір* $\mathbb{R}^n$ *є прямою сумою підпросторів* $X_+(\tau,\varphi)$ *і* $X_-(\tau,\varphi)$, *до того ж проектори* $P_+(\tau,\varphi)$, $P_-(\tau,\varphi)$, *породжені цією сумою, рівномірно обмежені, тобто*

$$\sup_{(\tau,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m}\left\{\|P_+(\tau,\varphi)\|, \|P_-(\tau,\varphi)\|\right\} \leqslant K;$$

2) для всіх $t,\tau \in \mathbb{R}$ $(t \geqslant \tau)$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$ *і* $x_0 \in X_-(\tau,\varphi)$ *виконується нерівність:*

$$\|\Omega_\tau^t(\varphi)x_0\| \leqslant Ne^{-\nu(t-\tau)}\|x_0\|;$$

3) для всіх $t,\tau \in \mathbb{R}$ $(t \leqslant \tau)$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$ *і* $x_0 \in X_+(\tau,\varphi)$ *виконується нерівність:*

$$\|\Omega_\tau^t(\varphi)x_0\| \leqslant Ne^{-\nu(\tau-t)}\|x_0\|;$$

тут $\Omega_\tau^t(\varphi)$ *— операторний розв'язок задачі*

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\phi_t(\varphi))X(t), \quad X(\tau) = I;$$

(e): існує стала $L > 0$, *така, що для всіх* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *справедлива нерівність:*

$$\sup_{\varphi\in\mathbb{R}^m}\|g(\varphi,x_1) - g(\varphi,x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|;$$

та $2NL < \nu$.

Тоді система (1) *має інваріантну множину*

$$M_u = \{(\varphi,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : x = u(\varphi)\},$$

таку, що $u \in C^0(\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n)$.

Здійснимо тепер порівняльний аналіз умов обох теорем. З умов (c), (e) випливають умови (C), (D) і слід відзначити, що в Теоремі 1 вимагається лише локальна лішицевість функції g. Аналіз питань еквівалентності умов (d) і (B) міститься у роботах [4]- [8] . Для порівняння умови $2ck < \mu$ з умовою $2LN < \nu$, використаємо результати отримані в [4] для лінійних неоднорідних систем. Згідно з Теоремою 1.1 [4] коефіцієнти дихотомії можна визначити рівностями

$$N = \left(\frac{2A_0S_0}{\mu}\right)^{1/2}, \quad \nu = \frac{\mu}{2S_0}.$$

Підставляючи ці вирази у нерівність $2LN < \nu$ та враховуючи, що $L = k$ отримаємо

$$k < \frac{1}{4\sqrt{2A_0}}\left(\frac{\mu^3}{S_0^3}\right)^{1/2}.$$

Тоді матимемо дві нерівності

$$k < \frac{1}{2}\beta, \quad k < \frac{1}{2\sqrt{2A_0}}\beta^{3/2},$$

де $\beta = \frac{\mu}{S_0}$.

Відмітимо, що ми можемо вважати $A_0 = 1$. Цього ми можемо добитися після заміни $t \to \frac{t}{A_0}$ у вихідній системі та відповідних перепозначень.

З іншого боку, для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожного $x \in \mathbb{R}$, такого, що $\|x\| = 1$, знайдеться $\tilde{\varphi} \in M$ таке, що $\langle \dot{S}(\tilde{\varphi})x, x\rangle < \varepsilon$. Інакше

$$\langle \dot{S}(\phi_t(\tilde{\varphi}))x, x\rangle \to \infty, t \to \infty,$$

що суперечить скінченності S_0. Але тоді

$$\mu \leqslant S_0A_0 + \varepsilon = S_0 + \varepsilon$$

звідки $\beta \leqslant 1$, а тому умова $k < \frac{1}{2\sqrt{2}}\beta^{3/2}$ є більш жорсткою ніж $k < \frac{1}{2}\beta$.

Таким чином, умова $2LN < \nu$ не дає можливості покращити умову $2ck < \mu$.

Допоміжні результати

Розглянемо квазілінійну систему

$$\dot{x} = A(t)x + g(t,x) \tag{4}$$

і припустимо, що справджуються такі умови:

(i_1): відображення $A(\cdot) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ обмежене, а саме, $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\| =: a < \infty$, і лінійна система $\dot{x} = A(t)x$ експоненціально дихотомічна на $\mathbb{R}$, а значить існує ідемпотентний симетричний оператор $C(\cdot) \in C^1(\mathbb{R} \mapsto \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n))$ (див.[4],[8]) такий, що

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|C(t)\| =: c < \infty,$$

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}|\det C(t)| > 0,$$

$$\left\langle (2C(t)A(t) + \dot{C}(t))x, x\right\rangle \geqslant \|x\|^2$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n;$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

(i_2): існують $k > 0$ та $\psi(\cdot) \in C^1(\mathbb{R} \mapsto (0,\infty))$ такі, що $\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} =: l < \infty$ і відображення $g(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ задовольняє нерівність

$$\|g(t,x)\| \leqslant k\|x\| + \psi(t) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

Покладемо $d := \frac{1}{2} - c(k+l)$, $m := a + k + l$,

$$H(z) := \frac{d}{m} z^2 + 2\left(\frac{c}{m} + \frac{d}{m^2}\right)\left(\frac{\ln(mz+1)}{m} - z\right),$$

$$G(\tau) := \begin{cases} H(\tau) & \text{якщо} \quad \tau \geqslant \frac{c}{d}, \\ H\left(\frac{c}{d}\right) & \text{якщо} \quad 0 \leqslant \tau < \frac{c}{d}; \end{cases}$$

$$\lambda_C^+(t) := \max_{\|x\|=1} \langle C(t)x, x\rangle,$$

$$\lambda_C^-(t) := \min_{\|x\|=1} \langle C(t)x, x\rangle.$$

Згідно результатів, викладених в [2], справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* $(i_1),(i_1)$ *і нехай числа* c, k, l *задовольняють нерівність* $c(k+l) < \frac{1}{2}$. *Тоді системи* (4) *має розв'язок* $x_*(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *такий, що* $\|x_*(t)\| \leqslant R_*\psi(t)$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$, *де* R_* – *корінь рівняння*

$$G(r) = G\left(\frac{c}{d}\right) + \frac{c^2}{2d^2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[\sup_{s\geqslant t} \lambda_C^+(s) - \inf_{s\leqslant t} \lambda_C^-(s)\right].$$

Якщо, крім того, $\|g(t,x) - g(t,y)\| \leqslant k\|x - y\|$ *при всіх* $(t,x,y) \in \mathbb{R}^{1+2n}$, *то* $x_*(t)$ *є єдиним розв'язком системи* (4), *для якого відношення* $\frac{\|x\|}{\psi(t)}$ *обмежене на* $\mathbb{R}$.

Висновки

В даній роботі доведено теорему про існування обмеженого інваріантного перерізу нелінійного розширення динамічної системи на многовиді M. Показано, що результати є певним покращенням умов, які можна отримати з [1], якщо у ролі фазового простору системи вибрати $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Отже метод V-W-пари поряд з апаратом узагальненого оператора Гріна-Самойленка є ефективним засобом дослідження існування інваріантних многовиди нелінійних систем, заданих на некомпактних многовидах.

Список використаних джерел

1. *Перестюк М.О., Слюсарчук В.Ю.* Оператор Гріна-Самойленка в теорії інваріантних многовиди нелінійних диференціальних рівнянь//Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №7 – с. 948-957.

2. *Lagoda V., Parasyuk I.* Existence of V-bounded solutions for nonautonomous nonlinear systems via the Ważewski topological principle// Мат. вісник Наукового товариства ім. Шевченка. – 2010, т.7. – с. 382-422.

3. *Самойленко А.М., Парасюк І.О., Лагода В.А.* Ліпшицеві інваріантні тори індефінітно монотонних систем//Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, №3 – с. 363-383.

4. *Митропольский Ю.А, Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 271 с.

5. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – 34, №6. – С. 1219–1240.

6. *Samoilenko A.M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 332 p.

7. *Samoilenko A.M.* Perturbation theory of smooth invariant tori of dynamical systems// Nonlinear Analysis. – 1997. – **30**, No. 5. – P. 3121–3133.

8. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ //Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, №3. – с. 356–371.

Надійшла до редколегії 30.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 539.595

Лимарченко В.О., аспірант

Задача про вимушені нелінійні коливання трубопроводу з швидкісною течією рідини

Досліджується задача коливань трубопроводу з рідиною на вібруючій основі. Система складається з труби кругового перетину, що консольно закріплена на рухомій основі. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі при гармонічному збудженні системи за рахунок вібрації основи в поперечному напрямку відносно трубопроводу.

Ключові слова: трубопровід, швидкісна течія рідини, рухома основа, диск ритца модель системи, сили взаємодії.

V.O. Limarchenko, postgraduate student

The problem of forced nonlinear oscillations of pipeline with high speed liquid flow

The problem of oscillations of pipeline with flowing liquid on vibrating foundation is under consideration. The system consists of tube of circular cross-section, attached as cantilever to a moving foundation. Behavior of the system is considered by means of nonlinear model for harmonic excitation of the system by vibration of the foundation in the transverse direction relative to the pipeline.

Keywords: pipeline, high-speed liquid flow, moving foundation, discrete model of the system, forces of interaction.

*E-mail: viadimir_limarchenko@yahoo.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор М.О. Перестюк

Вступ

Розглядається задача динаміки трубопроводу з рідиною на рухомій основі, яка може здійснювати різні типи рухів. Система складається з трьох частин: рухомої основи маси $M_{осн}$; трубопроводу, який описується за моделлю балки зі згинною жорсткістю EJ, площею поперечного перерізу F та масою $M_д = \mu l$, де μ — лінійна густина, а l — довжина трубопроводу, й ідеальної, однорідної, нестисливої рідини, яка має масу $M_р = \rho l$ (ρ— лінійна густина рідини), та рухається в трубопроводі з заданою швидкістю $V(t)$. Вважаємо що рух сис теми відбувається в одні площині. Схематично така система зображена на Рис.1.

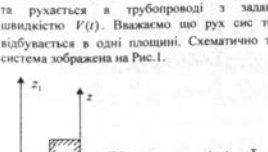


Рис.1 Система трубопровід – рідина на рухомій основі

В більшості попередніх робіт [1–3] основа трубопроводу вважається нерухомою. Метою роботи є аналіз впливу вібрацій рухомої основи на коливання такої системи. Для цього на основі підходів робіт [1, 4, 5], було побудовано модель коливань системи з урахуванням впливу вібрації основи на рух трубопроводу з рідиною. Використовувався мішаний (ейлерово-лагранжевий) опис руху складових системи, що дозволило отримати дискретну модель руху системи на основі методу модальної декомпозиції.

Основні етапи побудови моделі

Побудова моделі полягає в отриманні функції Лагранжа для подальшого складання рівнянь руху на основі рівнянь Лагранжа 2-го роду.

Для обчислення кінетичної енергії рідини $T_{РІД}$ треба знайти швидкість рідини в абсолютній системі відліку $O_1x_1z_1$. Зауважимо, що рідина одночасно приймає участь в трьох рухах: поступальному русі по трубі з заданою швидкістю $V(t)$, в русі, який зумовлено пружними коливаннями трубопроводу та в русі, який зумовлено вібрацією основи. Швидкість рідини буде виражатись наступним чином:

$v^2 = v_x^2 + v_z^2$, де

$v_x = V\cos\theta + V_{o_x}^{тр}$; $v_z = V\sin\theta + \frac{du}{dt} + V_{o_z}^{тр}$.

© В.О. Лимарченко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Щоб отримати нормальні відносно траєкторії руху рідини компоненти швидкості труби, спроектуємо швидкість $V_n = \dot{\vec{e}} \cdot \vec{n}$ на осі Ox, Oz. Одержимо

$$V_{n_x}^{TP} = \frac{1}{1+u^2}\left(\dot{\varepsilon}_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \dot{\varepsilon}_x \frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$V_{n_z}^{TP} = \frac{1}{1+u^2}\left(-\dot{\varepsilon}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dot{\varepsilon}_z\right)$$

Розпишемо du/dt як суму частинної та конвективної похідних і врахуємо, що $\partial u/\partial z = 0$. Після виконання підстановок функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L = T_{РІД} + T_Б + T_{ОСИ} - \Pi_{РІД} - \Pi_{ЗГ} - \Pi_{СТ} - \Pi_{ОСИ} =$$
$$= \frac{1}{2} M_{обм}\left(\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2\right) - F_x\varepsilon_x - F_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\rho\int_0^l\left[V^2 + \dot{\varepsilon}_z^2\right]\times$$
$$\times 2\frac{\partial u}{\partial t}\dot{\varepsilon}_z + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[\frac{7}{2}V^2 - 2V\dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_z^2 - \frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_x^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x}\left[2V\dot{\varepsilon}_x - 2\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right] + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\left[4V - 2\dot{\varepsilon}_z\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\left[-4V\dot{\varepsilon}_z + 5\dot{\varepsilon}_z\dot{\varepsilon}_x\right] + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[-3\dot{\varepsilon}_x\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\left[-\frac{13}{8}V^2 + 4V\dot{\varepsilon}_z - \frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_z^2 + \frac{27}{8}\dot{\varepsilon}_x^2\right] +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\left[3\dot{\varepsilon}_x\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big]dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\rho\int_0^l\left[\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + 2\frac{\partial u}{\partial t}\dot{\varepsilon}_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2\right]\times\right.$$
$$\times\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\dot{\varepsilon}_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 -$$
$$- \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\left[\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2\right]dx - \frac{1}{2}EJ\int_0^l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx -$$
$$- \frac{1}{4}EJ\int_0^l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx - \frac{1}{2}EF\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 u\,dx -$$
$$- \frac{1}{2}PF\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

Якщо прирівняти $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_z$ до нуля, ця функція повністю співпадає з результата тами роботи [5].

Для побудови дискретної моделі системи Виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича. Подамо зміщення точок трубопроводу у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} A_i(x)c_i(t).$$

Тут N — кількість форм коливань трубопроводу.

Оскільки трубопровід розглядаємо у наближенні балки, то за $A_i(x)$ беремо форми коливань труби як балки з рідиною.

В результаті дискретизації функції Лагранжа рівняння Лагранжа 2го роду $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_k}{\partial \dot{c}_r}\right) - \frac{\partial L_k}{\partial c_r} = 0$ набудуть вигляду:

$$\ddot{c}_r = -\frac{EJ}{\rho+\mu}\kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\,\beta_{ir}^2 +$$
$$+ \frac{2\rho V}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\left(\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1\right) - \frac{PF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_i c_i\beta_{ir}^2 -$$
$$- \frac{2\rho V}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ij} c_i\beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r}\sum_{ijk}\ddot{c}_i c_j c_k\ d_{ijkr}^2 -$$
$$- \sum_{ijk}\dot{c}_i\dot{c}_j c_k\left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2}d_{kirj}^2\right) - \frac{EJ}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 -$$
$$- \frac{2EF}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^3 - \frac{13}{4}\frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r}\sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^1 +$$
$$+ \frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\psi_r^1\left[V\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right] +$$
$$+ \frac{1}{N_r(\rho+\mu}\sum_{i,j=1}^{N} c_i\beta_{ij}^2\Big[-2\rho V\dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_z^2\left(\rho+\frac{1}{2}\mu\right) + \dot{\varepsilon}_x^2\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{5}{2}\rho\right)\Big] -$$
$$- \frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N} c_i\left(\beta_{ij}^1 - \beta_{ji}^1\right)\dot{\varepsilon}_x +$$
$$+ \frac{3\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j\,\psi_{ijr}^2\left[-2V\dot{\varepsilon}_z + \frac{5}{2}\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z\right] +$$
$$+ \frac{\mu-3\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j\left(\beta_{ij}^2 - \psi_{jir}^2\right)\dot{\varepsilon}_x +$$
$$+ \frac{9\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N} c_i c_j c_k\left(d_{ijkr}^2 - d_{kjir}^2\right)\dot{\varepsilon}_x +$$
$$+ \frac{2}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j\,\psi_{ijr}^1\Big[-4\rho V\dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_z^2\left(-\frac{5}{2}\rho - \frac{1}{8}\mu\right) +$$
$$+ \dot{\varepsilon}_x^2\left(\frac{27}{8}\rho - \frac{1}{8}\mu\right)\Big] - \frac{1}{N_r}\psi_r^{-2}\ddot{\varepsilon}_x +$$
$$+ \frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N} c_i\beta_{ij}^2\ddot{\varepsilon}_x + \frac{\rho}{N_r(\rho+\mu)}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i\beta_{ir}^2\dot{\varepsilon}_z -$$
$$- \frac{\mu-3\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j\beta_{ij}^2\ddot{\varepsilon}_z - \frac{3\rho}{2N_r(\rho+\mu)}\sum_{i,j,k=1}^{N} c_i c_j c_k d_{ijkr}^3\ddot{\varepsilon}_x$$

Введені величини ψ_i^0, ψ_i^1, N_i, β_{ij}^1, β_{ij}^2, κ_i^4, ψ_{ijk}^2, φ_{ijk}^1, d_{ijkl}^2, d_{ijkl}^3, d_{ijkl}^4, d_{ijkl}^6 є квадратурами від відомих форм коливань $A_i(x)$ по відомій області та визначаються чисельно.

Після проведення такої процедури систему рівнянь руху шляхом зниження порядку можна легко звести до форми Коші, що сприяє можливості проведення якісного та чисельного аналізу. В цілому система рівнянь руху є

Kyiv National Taras Shevchenko University

нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів деформації трубопроводу.

Аналіз руху при поперечному збуренні

Було чисельно промодельовано та проаналізовано поведінку системи трубопровід – рідина для випадку руху основи в перпендикулярному напрямку O_1z_1 відносно труби (Рис.1). Труба довжиною 1 м, виготовлена з алюмінію. Початкового відхилення від положення рівноваги трубопровід не має. Швидкість руху рідини вздовж трубопроводу вважається постійною.

Зауважимо, що критична швидкість течії рідини $V_{кр} = 20{,}94\ м/с$, а власна частота першої форми коливань балки $\omega_1 = 40{,}27$. Відлік часу проводиться в періодах першої форми коливань $T_1 = 0{,}1567c$.

Надамо системі збурення за рахунок вібрації основи в напрямку O_1z_1: $\varepsilon_z = A\sin(\omega t)$

Для різних параметрів збурення A, ω та різних швидкостей рідини в трубі V знайдено графіки руху вільного кінця балки по осі Oz.

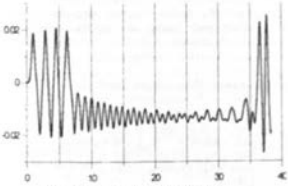


Рис.2 V =15; A =0,002; ω =20

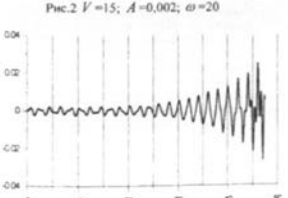


Рис. 3 V =5; A =0,002; ω =20

Бачимо, що на Рис. 2 система прагне перейти до альтернативного положення рівноваги, яке відповідає динамічному положенню рівноваги при критичній швидкості течії, коли сили пружності і відцентрові сили врівноважуються. Балка викривляється і певний час здійснює коливання відносно викривленого положення.

Варто зауважити, що таке явище не буде спостерігатись при меншій швидкості потоку. Для V =5м/с матимемо вже звичайну картину коливань відносно початкового положення рівноваги (Рис. 3).

Якщо ж при тій самій швидкості перейти до частоти близької до власної частоти ω_1, побачимо що має місце явище помітної модуляції коливань (Рис. 4).

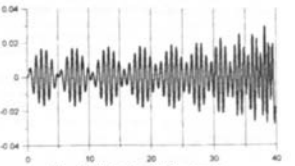


Рис. 4 V =5; A =0,002; ω =40

Якщо при тій самій резонансній частоті збудження збільшити швидкість потоку, модуляції вже не буде, але амплітуда коливань буде стрімко зростати (Рис. 5).

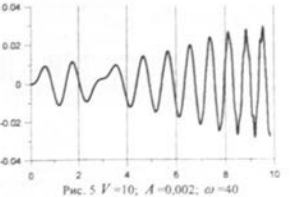


Рис. 5 V =10; A =0,002; ω =40

При значному збільшенні частоти коливань та при високій швидкості потоку спостерігається явище відносно довготривалого гасіння коливань за рахунок дії на систему збурення з великою частотою (Рис. 6).

Kyiv National Taras Shevchenko University

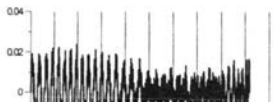


Рис. 6 $V=15$; $A=0{,}002$; $\omega=200$

У всіх розглянутих випадках коливання мають чітку тенденцію до зростання амплітуди, що обумовлено надходженням енергії за рахунок неперервної подачі рідини по трубі. Збільшення амплітуди початкового збурення призводить лише до пришвидшення цього процесу.

Також даний метод дозволяє отримати графіки згинного моменту і перерізуючої сили в точці защемлення труби, що, в свою чергу, дозволяє робити висновки про міцність трубопроводу.

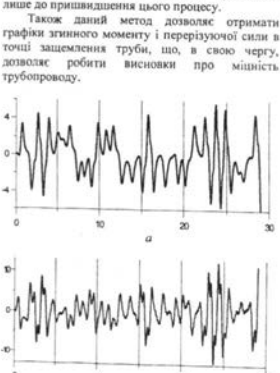


Рис. 7 Графіки згинного моменту (*а*) та перерізуючої сили (*б*) в точці закріплення відповідно при $V=15$; $A=0{,}002$; $\omega=40$

Висновки

В роботі розглядалась задача динаміки трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Розроблена модель руху такої системи та проаналізовано поведінку системи при збудженні руху за рахунок поперечної вібрації основи трубопроводу. Поведінка системи суттєво залежить від значень частот збудження та швидкостей потоку рідини. Так, при частотах нижчих за власну частоту першої форми коливань спостерігався вихід на альтернативне положення рівноваги, а при вищих частотах спостерігалося явище модуляції коливань. Також для вищих частотах збудження спостерігається збільшення вплив вищих форм коливань на рух системи.

Список використаних джерел

1. *Бондарь, Н.Г.* Нелинейные автономные задачи механики упругих систем / *Н.Г. Бондарь.* — Киев: Будивельник, 1971. — 140 с.
2. *Kuiper, G. L.* Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid / *G.L. Kuiper, V.A. Metrikine* // Journal of Fluids and Structures, 2008. — № 24. — P. 541-558.
3. *Paidoussis, M.P.* A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram / *M.P. Paidoussis, A. Sarkar, C. Semler* // Journal of Sound and Vibration, 2005. — № 280. — P. 141-157.
4. *Бабаков, И.М.* Теория колебаний / *И.М. Бабаков.* — Москва: Наука, 1968. — 560 с.
5. *Василевский, Ю.Е.* Нелинейная модель динамики трубопровода при скоростном течении жидкости / *Ю.Е. Василевский, О.С. Лимарченко* // Збірник праць Інституту математики НАН України, 2006. — № 4. — С. 322-334.
6. *Лимарченко, В.О.* Динаміка трубопроводу з рідиною на вібруючій основі / *В.О Лимарченко* // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології 2012. — №15. — С. 40-48

Надійшла до редколегії 24.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 539.3

В. Ф. Мейш, д.ф.-м.н., проф., В.М. Мельник

До розрахунку неосесиметричних коливань конічних оболонок змінної товщини при нестаціонарних навантаженнях

Розглянуто постановку задач про динамічну поведінку конічної оболонки змінної товщини. Прийнято уточнену модель теорії оболонок типу Тимошенка. Чисельний метод розв'язання динамічних задач базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевих схем. Досліджено задачу динамічної поведінки конічної оболонки змінної товщини при різних геометричних параметрах при нестаціонарному навантаженні.

Ключові слова: конічні оболонки, змінна товщина, теорія оболонок типу Тимошенка

V. F. Meish, PhD, Prof., V.M. Melnik

To calculate of non-axially symmetric vibrations of variable thickness conical shells under non-stationary loads

A statements of problems on dynamical behavior of the variable thickness conical shells is considered. The refined model of the theory of shells of Timoshenko type is assumed. A numerical method of solving the dynamical equations is based on application of integro – interpolation method of constructing the finite – difference schemes. The problem of dynamical behavior of the variable thickness conical shell for different geometrical parameters is studied for the non – stationary load.

Key Words: conical shells, variable thickness, theory of shells of Timoshenko type

*E-mail: vfmeish@gmail.com.ua

Статтю представив член редколегії академік НАН України М.О. Перестюк.

1. Вступ

Огляд робіт по статичним задачам теорії оболонок змінної товщини представлено в роботах [1, 2]. Вільні коливання неоднорідних по товщині конічних оболонок розглядалися в [7, 8]. Вимушені коливання конічних оболонок змінної товщини (осесиметричний випадок) при нестаціонарних навантаженнях розглянуто в [5, 6].

В даній статті приведено рівняння неосесиметричних коливань конічних оболонок змінної товщини. В основу покладена теорія оболонок типу Тимошенка. Чисельний метод розв'язування динамічних рівнянь базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевих схем по просторовим координатам і явній скінчено – різницевій апроксимації по часовій координаті [3, 4]. Як числовий приклад, розглянута задача динамічного деформування конічної оболонки змінної товщини при різних кутах конусності при дії розподіленого внутрішнього тиску.

2. Постановка задачі

Розглянемо зрізану конічну оболонку змінної товщини, у якої геометрія серединної поверхні задається співвідношеннями

$$x = (R_0 + s_1 \sin\theta)\cos\alpha_2,$$
$$y = (R_0 + s_1 \sin\theta)\sin\alpha_2, \qquad (1)$$
$$z = s_1 \cos\theta,$$

де R_0 – радіус меншої основи конуса; s_1, α_2 – криволінійні ортогональні координати на серединній поверхні; θ – кут конусності.

Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні в даній системі координат мають вигляд

$$A_1 = 1;\ A_2 = R_s;\ k_1 = 0;\ k_2 = \cos\theta / R_s,$$
$$R_s = R_0 + s_1 \sin\theta. \qquad (2)$$

При побудові математичної моделі процесу динамічного деформування конічної оболонки змінної товщини використовується геометрично та фізично лінійний варіант теорії оболонок типу Тимошенка [3, 4]. Припускається, що товщина оболонки змінюється вздовж координати s_1, тобто $h = h(s_1)$.

Рівняння коливань конічної оболонки змінної товщини записуються у вигляді:

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 T_{11}) - \frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}T_{22} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \qquad (3)$$
$$= \rho h(s_1)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

©В.Ф. Мейш, В.М. Мельник, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 S)+\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}S+\frac{\partial T_{22}}{\partial s_2}+k_2 T_{23}=$$
$$=\rho h(s_1)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$
$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 T_{13})+\frac{\partial T_{23}}{\partial s_2}-k_2 T_{22}+P_3=$$
$$=\rho h(s_1)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$
$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 M_{11})-\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}M_{22}+\frac{\partial H}{\partial s_2}-T_{13}=$$
$$=\frac{\rho h^3(s_1)}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$
$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 H)+\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}H+\frac{\partial M_{22}}{\partial s_2}-T_{23}=$$
$$=\frac{\rho h^3(s_1)}{12}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.$$

Зв'язок величин зусилля – моменти з відповідними величинами деформацій у випадку ортотропного матеріалу оболонки мають вигляд [3, 4]

$$T_{11}=B_{11}(s_1)\varepsilon_{11}+B_{12}(s_1)\varepsilon_{22}, \quad (4)$$
$$T_{22}=B_{21}(s_1)\varepsilon_{11}+B_{22}(s_1)\varepsilon_{22},$$
$$S=B_3(s_1)\varepsilon_{12}, \quad T_{13}=B_{13}(s_1)\varepsilon_{13},$$
$$T_{23}=B_{23}(s_1)\varepsilon_{23},$$
$$M_{11}=D_{11}(s_1)\kappa_{11}+D_{12}(s_1)\kappa_{12},$$
$$M_{22}=D_{21}(s_1)\kappa_{11}+D_{22}(s_1)\kappa_{22},$$
$$H=D_3(s_1)\kappa_{12},$$

де

$$B_{11}(s_1)=\frac{E_1 h(s_1)}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{12}(s_1)=\frac{E_1 h(s_1)\nu_2}{1-\nu_1\nu_2},$$
$$B_{22}(s_1)=\frac{E_2 h(s_1)}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{21}(s_1)=\frac{E_2 h(s_1)\nu_1}{1-\nu_1\nu_2},$$
$$B_3(s_1)=G_{12}h(s_1),$$
$$B_{13}(s_1)=G_{13}h(s_1), \quad B_{13}(s_1)=G_{23}h(s_1).$$
$$D_{11}(s_1)=\frac{E_1 h^3(s_1)}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_{12}(s_1)=\frac{E_1 h^3(s_1)\nu_2}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$
$$D_{22}(s_1)=\frac{E_2 h^3(s_1)}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_{21}(s_1)=\frac{E_2 h^3(s_1)\nu_1}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$
$$D_3(s_1)=G_{12}\frac{h^3(s_1)}{12}.$$

Деформаційні співвідношення для конічної оболонки мають вигляд:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial s_2}+\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}u_1+k_2 u_3, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial s_2}+\frac{\partial u_2}{\partial s_1}-\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}u_2,$$
$$\varepsilon_{13}=\varphi_1+\frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{23}=\varphi_2+\frac{\partial u_1}{\partial s_2}-k_2 u_2,$$
$$\kappa_{11}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}+\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}\varphi_1,$$
$$\kappa_{12}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}-\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}\varphi_2.$$

Рівняння коливань неоднорідної по товщині конічної оболонки (2) - (5) доповнюються відповідними граничними умовами по координаті s_1 при s_{10} та s_N. Початкові умови при $t=0$ покладаються нульовими.

3. Метод розв'язування задачі

Для розв'язування поставленої задачі використовується метод скінченних різниць, який базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам s_1, s_2 та явній апроксимації по часовій координаті t [3, 4].

4. Результати розрахунків

Як числовий приклад, розглядалася задача динамічної поведінки конічної панелі змінної товщини при дії нормального розподіленого навантаження $P_3(s_1,s_2,t)$. Припускається, що краї панелі жорстко защемлені, тобто на границях області

$$D=\{s_{10}\le s_1\le s_{1N};\ s_{20}\le s_2\le s_{2M}\}$$

компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні панелі

$$\overline{U}=(u_1,u_2,u_3,\varphi_1,\varphi_2)=0.$$

Початкові умови нульові. Нестаціонарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді

$$P_3(s_1,s_2,t)=A\cdot\sin\frac{\pi t}{T}[\eta(t)-\eta(t-T)].$$

Зміна товщина в панелі визначається як лінійна функція координати s_1:

$$h(s_1)=h(s_{10})+[h(s_{1N})-h(s_{10})]\frac{s_1}{L}, \text{ де}$$
$$s_{1N}-s_{10}=L, \quad s_{10}\le s_1\le s_{1N}.$$

Вихідна задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико – механічних параметрах:

$\theta_1=\pi/12;\ \theta_2=\pi/6;\ \theta_3=\pi/4;\ R_0=0{,}3$ м;
$L=0{,}4$ м; $\alpha_2\in[-\pi/6;\pi/6]$; $h(s_{10})=0.5\cdot10^{-2}$ м;
$h(s_{1N})=1.5\cdot10^{-2}$ м; $E=7\cdot10^{10}$ Па; $\nu=0{,}3$;

Kyiv National Taras Shevchenko University

$\rho = 2.7$ кг/м^3; $E / A = 7 \cdot 10^4$; $T = 0{,}625\, L / c$;

$$c^2 = E/[\,\rho(1-\nu^2)\,]\,.$$

Також були проведені розрахунки динамічної поведінки конічної панелі постійної товщини, маса якої співпадає з масою вихідної конічної панелі змінної товщини при вищевказаних параметрах.

Враховуючи, що вихідна задача є багато-параметричною (в різні моменти часу t кінематичні та силові параметри приймають різні значення по координатам s_1 та s_2), в подальшому будемо розглядати залежності шуканих величин в моменти часу досягнення ними максимальних значень по модулю. На рис. 1 представлені залежності переміщення u_3 по просторовій координаті s_1 в перерізі $s_2 = 0$ при різних кутах конусності вихідної оболонки. Крива з індексом 1 відповідає випадку $\theta_1 = \pi/12$ в момент часу $t_1 = 16{,}7T$; крива 2 - $\theta_2 = \pi/6$ в момент часу $t_2 = 18{,}3T$; крива 3 - $\theta_3 = \pi/4$ в момент часу $t_3 = 16{,}5T$.

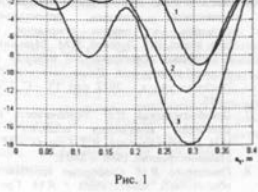


Рис. 1

На рис. 2 приведені залежності величини ε_{22} при вказаних кутах конусності у відповідні моменти часу (часи досягнення вихідними величинами максималь-них значень по модулю) - $t_1 = 3{,}1T$, $t_2 = 1{,}3T$, $t_3 = 1{,}6T$.

На рис. 3 наведені залежності величини σ_{22} по координаті s_1 в часи $t_1 = 3{,}1T$, $t_2 = 1{,}3T$, $t_3 = 1{,}4T$.

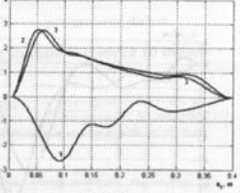


Рис. 2

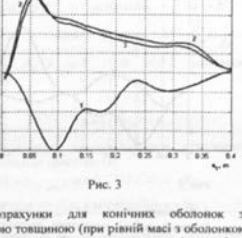


Рис. 3

Розрахунки для конічних оболонок зі змінною товщиною (при рівній масі з оболонкою змінної товщини) показують аналогічну якісну картину. Зокрема, на рис. 4 наведені залежності величини u_3 в перерізі $s_2 = 0$ для оболонки змінної товщини (крива 1) та оболонки постійної товщини (крива 2) в моменти досягнення ними максимальних значень $t_1 = 16{,}7T$, $t_2 = 13{,}1T$. Наведені криві відповідають випадку $\theta_1 = \pi/12$. Різниця по максимальним значенням величин досягає ≈25%. На рис. 5 для вказаного випадку приведені відповідні залежності величин ε_{22} в перерізі $s_2 = 0$ по координаті s_1. Крива 1 відповідає часу $t_1 = 3{,}1T$, крива 2 - $t_2 = 15{,}4T$. Спостерігається принципова різниця по кількісним та якісним значенням величини ε_{22}. Для оболонок постійної товщини більше проявляється залежність шуканих величин від кута конусності.

Kyiv National Taras Shevchenko University

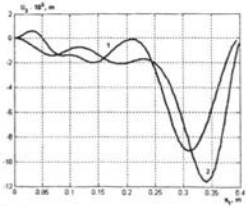


Рис. 4

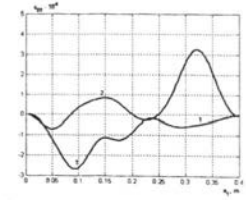


Рис. 5

5. Висновки

В даній роботі приведено постановку та розв'язки задач про вимушені неосесиметричні коливання конічних оболонок змінної товщини при дії нестаціонарних навантажень. Для опису динамічної поведінки неоднорідної по товщині конічної оболонки приймається модель оболонок типу Тимошенка. Задачу розв'язано із застосуванням методу скінченних різниць по просторовим і часовій координатам. На основі чисельного моделювання досліджено вплив геометричних та фізико – механічних параметрів на напружено - деформований стан конічної оболонки змінної товщини при нестаціонарних навантаженнях.

Список використаних джерел

1. *Григоренко Я.М.* Теория оболочек переменной жесткости / Методы расчета оболочек / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко – Киев: Наук. думка, 1982. – Т. 4. - 544 с.
2. *Григоренко Я.М.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко – М.: Наука, 1992. - 336 с.
3. *Головко К.Г.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш; под ред. акад НАН Украины А.Н. Гузя. - К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун–т», 2012. – 541 с.
4. *Луговой П.З.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф.Мейш, Э.А.Штанцель – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун–т», 2005. – 537 с.
5. *Мейш В.Ф.* Осесимметричные колебания конических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки / В.Ф. Мейш, В.М. Мельник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій // Дніпропетровський Національ. ун – т. - 2012, вип. 18. – С. 132 – 139.
6. *Мейш В.Ф.* О динимическом поведении конической оболочки переменной толщины на упругом основании / В.Ф. Мейш, П.З. Луговой, В.М. Мельник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : Дніпропетровський Національ. ун – т. - 2012, вип. 19. – С. 219 – 225.
7. *Преображенский И.Н.* Устойчивость и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Гришак – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.
8. *Григоренко Я.М.* Свободные колебания оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь – Киев; Наук. думка, 1986. – 172 с.

Надійшла до редколегії 06.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 517.9

Паньков А.В., аспірант

Глобальний атрактор модифікованої 3D системи Бенарда.

В роботі досліджено існування та властивості глобального атрактору в сильній топології фазового простору для модифікованої 3D системи Бенарда.

Ключові слова: глобальний атрактор, м-напівпотік, 3D система Бенарда

*E-mail: Andriy_pankov@iitzo.gov.ua
Статтю представив д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

A.V. Pankov, post-graduate student

Global attractor of modified 3D Benard system.

In the paper we investigate existence and properties of global attractor for modified 3D Benard system in strong topology of phase space.

Keywords: global attractor, m-semiflof, 3D Benard system

Вступ

3D система Бенарда описує швидкість, тиск та температуру в'язкої нестислої рідини в тривимірній області [1,2]. На сьогодні відкрите питання про існування в неї глобального атрактору по обом компонентам фазового вектору. В слабкій топології це питання досліджено в [3], в сильній топології по другій компоненті фазового вектору – в [4]. В роботі [5] в якості апроксимації 3D системи Нав'є-Стокса була запропонована глобально модифікована система та встановлено властивості її глобального атрактору. В даній роботі ми розглядаємо систему, що складається з глобально модифікованої системи Нав'є-Стокса та рівняння конвекції-дифузії. Для такої системи не вдається довести однозначну розв'язність задачі Коші [6], тому за динаміку розв'язків відповідає многозначна ДС – м-напівпотік [3,7]. В роботі доведено існування глобального атрактору такого м-напівпотоку та досліджено його властивості.

Постановка задачі.

В обмеженій області $\Omega \subset R^3$ з гладкою межею розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + F_N([u])((u\nabla)u) + \xi\omega = f - \nabla p, \\ div\, u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega + (u\nabla)\omega = g \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

де $\nu > 0, \xi \in R^1$ - константи, $f : \Omega \to R^3$, $g : \Omega \to R$ - задані функції, $u\nabla = \sum_{i=1}^{3} u_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, функція $F_N : R_+ \to R_+$ для $N \geq 1$ задається рівністю

$$F_N(r) = \begin{cases} 1, r = 0 \\ \min\{1, \dfrac{N}{r}\}, r > 0. \end{cases}$$

Ми будемо використовувати стандартні функціональні простори [1]

$$H = cl_{(L^2(\Omega))^3}\{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 | div u = 0\}$$

$$V = cl_{(H_0^1(\Omega))^3}\{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 | div u = 0\}$$

з нормами $|\cdot|, \|\cdot\|$ та скалярними добутками $(\cdot,\cdot), ((\cdot,\cdot))$. Так само будемо позначати норми і скалярні добутки в просторах $L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)$.

Означимо трилінійні форми

$$b(u,v,z) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j dx, \; c(u,\omega,\eta) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \eta dx$$

та форму

$$b_N(u,v,z) = F_N([u])b(u,v,z).$$

Означення 1. Розв'язком (1), (2) на $(0,+\infty)$ будемо називати $\varphi = (u,\omega)$ таку, що $\forall T > 0$

$$\varphi \in W_T = (L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)) \times (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))$$

та для всіх $v \in V, \eta \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b_N(u,u,v) + (\xi\omega, v) = (f,v) \quad (3)$$

© А.В. Паньков, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\frac{d}{dt}(\omega,\eta)+((\omega,\eta))+c(u,\omega,\eta)=(g,\eta) \qquad (4)$$

в сенсі скалярних розподілів на $(0,T)$.

Аналогічно [3,5] легко показати, що для $f\in H$, $g\in L^2(\Omega)$ та для будь-яких початкових даних $\varphi_0=\{u_0,\omega_0\}\in X=H\times L^2(\Omega)$ існує принаймні один розв'язок (1), (2) з $\varphi(0)=\varphi_0$. Єдиність такого розв'язку не гарантується.

Нехай $K=K_{\chi}$ - деяка множина розв'язків (1), (2), що має наступні властивості:

(K1) $\forall\varphi_0\in X\ \ \exists\varphi\in K$ таке, що $\varphi(0)=\varphi_0$;

(K2) $\forall\varphi\in K\ \ \forall s\geq 0\ \ \varphi_s(\cdot)=\varphi(\cdot+s)\in K$.

Тоді відображення $G=G_K:R_+\times X\to 2^X$

$$G(t,\varphi_0)=\{\varphi(t)|\varphi\in K,\ \varphi(0)=\varphi_0\}$$

породжує м-напівпотік [3], тобто задовольняє властивості:

$$G(0,x)=x\ \forall x\in X$$

$$G(t+s,x)\subseteq G(t,(G(s,x)))\ \forall x\in X,\ \forall t,s\geq 0$$

Означення 2. Компактна множина $\Theta=\Theta_K\in$ глобальним атрактором м-напівпотоку G, якщо $\Theta\subseteq G(t,\Theta)\ \forall t\geq 0$ та для будь-якої обмеженої $B\subset X$ $dist(G(t,B),\Theta)\to 0$, $t\to\infty$.

Основний результат роботи полягає в доведенні того, що за додаткової умови $g\in L^4(\Omega)$ розв'язки (1), (2) породжують м-напівпотік, для якого в фазовому просторі X існує інваріантний глобальний атрактор Θ_K, що при $N\to\infty$ збігається до множини повних обмежених траєкторій не модифікованої системи Бенарда.

Основні результати.

Позначимо $A_1:V\to V^*$, $A_2:H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ - лінійні оператори, породжені формами $<A_1u,v>=((u,v))$, $<A_2\omega,\eta>=((\omega,\eta))$, $\lambda_1>0$ - мінімальне серед власних чисел операторів A_1, A_2.

Теорема 1. Нехай $f\in H$, $g\in L^4(\Omega)$. Тоді $\forall\varphi_0=\{u_0,\omega_0\}\in X$ існує принаймні один розв'язок $\varphi=\{u,\omega\}$ задачі (1), (2) з $\varphi(0)=\varphi_0$ такий, що $\forall T>0$

$$u\in C([0,T];H),\ \omega\in C((0,T];L^2(\Omega)),$$

$\forall t\geq s\geq 0$ виконані нерівності

$$V_f(u,\omega)(t)=\frac{1}{2}|u(t)|^2+\nu\int_0^t\|u(p)\|^2dp+$$
$$\int_0^t(\xi\omega,u)dp-\int_0^t(f,u)dp\leq V_f(u,\omega)(s) \qquad (6)$$

$$\psi(u,\omega)(t)=\left(|u(t)|^2-\frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2\right)e^{\nu\lambda_1 t}-$$
$$\frac{2|\xi|}{\nu\lambda_1}\int_0^t|\omega(p)|^2e^{\nu\lambda_1 p}dp\leq\psi(u,\omega)(s) \qquad (7)$$

$$V_g(\omega)(t)=\frac{1}{2}|\omega(t)|^2+\int_0^t\|\omega(p)\|^2dp-$$
$$\int_0^t(g,\omega)dp\leq V_g(\omega)(s) \qquad (8)$$

$$F(\omega)(t)=\left(|\omega(t)|^2-\frac{|g|^2}{\lambda_1^2}\right)e^{\lambda_1 t}\leq F(\omega)(s) \qquad (9)$$

$\forall t\geq s$, для м.в. $s>0$

$$\|\omega(t)\|_4^4\leq\|\omega(s)\|_4^4e^{3\lambda_1(t-s)}+\frac{1}{3}|g|_4^4(e^{3\lambda_1(t-s)}-1) \qquad (10)$$

При цьому в класі $L^8(0,T;(L^4(\Omega))^3)$ існує не більше одного розв'язку (1), (2), що відповідає початковим даним $\varphi_0\in X$.

Означимо клас K наступним чином:

$\varphi\in K\Leftrightarrow\varphi=\{u,\omega\}$ - розв'язок (1), (2), що $\forall t\geq s\geq 0$ задовольняє (6)-(9), $\forall t\geq s$ для м.в. $s>0$ задовольняє (10). (11)

З теореми 1 $K\neq\varnothing$, задовольняє (K1), (K2). Отже, формула (5) визначає м-напівпотік G.

Теорема 2. М-напівпотік G, породжений розв'язками (1), (2) із класу (11), має в фазовому просторі X зв'язний інваріантний глобальний атрактор $\Theta=\Theta_K$, що є обмеженою множиною в $V\times L^4(\Omega)$.

Доведення.

З оцінок (7), (9) маємо, що для $|\omega_0|^2\leq R^2$, $|u_0|^2\leq\frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}(|\xi|^2R^2+|f|^2)=:\alpha^2(R)$ для всіх $t\geq 0$ справедливі нерівності $|\omega(t)|\leq R$, $|u(t)|\leq\alpha(R)$.

З (9) $\exists s=s(R)\ \ \forall t\geq s\ \ |\omega(t)|^2\leq 1+\frac{|g|^2}{\lambda_1^2}=:R_1^2$.

Тоді з (7) $\exists T\geq s\qquad\forall t\geq T$

$$|u(t)|^2\leq 1+\frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2+\frac{2|\xi|^2}{\nu^2\lambda_1^2}\left(1+\frac{|g|^2}{\lambda_1^2}\right)=:R_2^2$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Отже, множина $B_0 = \{\{u,\omega\} \in X \,|\, \|u\| \le R_2, \|\omega\| \le R_1\}$ є поглинаючою для м-напівпотоку G, тобто для будь-якої обмеженої $B \subset X$ існує $T = T(B)$ таке, що

$$\forall t \ge T \;\; G(t,B) \subset B_0 \qquad (12)$$

Тепер нехай $\varphi_0^n = \{u_0^n, \omega_0^n\} \to \varphi_0 = \{u_0, \omega_0\}$ слабо в X, $\{\varphi^n\} \subset K$, $\varphi^n(0) = \varphi_0^n$. В силу (6)-(9) $\{\varphi^n\}$ - обмежена в W_T. Оскільки

$$\left\|h_\lambda(u,v,z)\right\| \le N \cdot C \cdot \|u\| \cdot \|z\| \qquad (13)$$

то $\{\frac{d\varphi^n}{dt}\}$ - обмежена в $L^2(0,T;V^*) \times L^3(0,T;H_0^1(\Omega))$ і з леми про компактність [1] по підпослідовності $\forall T > 0$

$$\varphi^n \to \varphi \text{ слабо в } L^2(0,T;V \times H_0^1(\Omega)) \qquad (14)$$

$$\varphi^n \to \varphi \text{ в } L^2(0,T;X)$$

$\varphi^n \to \varphi$ в X для м.в. $t \in (0,T)$ і слабо $\forall t \in [0,T]$ де $\varphi = \{u,\omega\}$ - розв'язок (1), (2), $\varphi(0) = \varphi_0$. З (14) маємо, що φ задовольняє (6)-(9) $\forall t \ge s$, для м.в. $s > 0$, а якщо $\varphi_0^n \to \varphi_0$ сильно в X, то і для $s = 0$. Оскільки $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V^*)$, то $u \in C([0,T];H)$ і (6), (7) виконані $\forall t \ge s > 0$. Зафіксуємо мале $\varepsilon > 0$. З (8) існує константа $K > 0$, що не залежить від параметрів $\varepsilon > 0$, $n \ge 1$, така, що

$$\int_0^t \|\omega^n(t)\|^2 dt \le K$$

Тоді $\exists \Theta_\varepsilon^n \in (0,\varepsilon): \|\omega^n(\Theta_\varepsilon^n)\|^2 \le \frac{K}{\varepsilon}$ і з неперервності вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ і нерівності (10) маємо:

$$\exists c(\varepsilon) > 0 \;\forall t \in [\varepsilon,T] \; \|\omega^n(t)\|_{L^4}^4 \le c(\varepsilon) e^{Kt}$$

Отже послідовність $\{\omega^n\}$ обмежена в $L^\infty(\varepsilon,T;L^4(\Omega))$ і використовуючи лему про компактність для трійки просторів

$$L^2(\varepsilon,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(\varepsilon,T;L^4(\Omega)) \subset L^2(\varepsilon,T;H^{-1}(\Omega))$$

маємо, що по підпослідовності $\omega^n(t) \to \omega(t)$ в $L^4(\Omega)$ для м.в. $t \in (\varepsilon,T)$ і слабо $\forall t \in [\varepsilon,T]$. Тоді, переходячи до границі в (10) при $n \to \infty$, одержимо виконання (10) для функції $\omega(\cdot)$ $\forall t \ge s$, для м.в. $s > 0$. З нерівності Гельдера

$$\left|c(u,\omega,\eta)\right| \le d\|u\| \cdot \|\omega\|_{L^4} \cdot \|\eta\| \qquad (15)$$

Звідки $\frac{d\omega}{dt} \in L^2(\varepsilon,T;H^{-1}(\Omega))$ і в силу довільності $\varepsilon > 0$ $\omega \in C((0,T];L^2(\Omega))$. Тоді (8), (9) виконані $\forall t \ge s > 0$. Доведемо, що $\varphi^n(t) \to \varphi(t)$ в X $\forall t > 0$.

В силу (6) $\forall t \ge s \ge \varepsilon > 0$

$$J_n^{(1)}(t) := \frac{1}{2}\|u^n(t)\|^2 + \int_0^t (\xi\omega^n, u^n)d\rho - \int_0^t (f,u^n) \le J_n^{(1)}(s)$$

$$J^{(1)}(t) := \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \int_0^t (\xi\omega,u) - \int_0^t (f,u) \le J_n^{(1)}(s)$$

$J_n^{(1)}(\cdot)$, $J^{(1)}(\cdot)$ неперервні на $[\varepsilon,T]$ і $J_n^{(1)}(t) \to J^{(1)}(t)$ м.с. Тоді $J_n^{(1)}(t) \to J^{(1)}(t)$ $\forall t \in (\varepsilon,T)$ і оскільки $\varphi^n \to \varphi$ в $L^2(0,T;X)$, то $\forall t \in (\varepsilon,T)$

$$\frac{1}{2}\lim_n \|u^n(t)\|^2 + \int_0^t (\xi\omega,u)d\rho - \int_0^t (f,u) \le \lim_n J_n(t) = J(t)$$

Отже $\lim_n \|u^n(t)\| \le \|u(t)\|$, і оскільки $u^n(t) \to u(t)$ слабо в X, то $u^n(t) \to u(t)$ в X.

Розглядаючи аналогічним чином функціонал

$$J^{(2)}(t) = \frac{1}{2}|\omega(t)| - \int_0^t (g,\omega)d\rho,$$

в силу (8) маємо $\omega^n(t) \to \omega(t)$ в X $\forall t > 0$.

З наведених міркувань одержуємо наступні властивості для м-напівпотоку G:

якщо $\xi_n \in G(i,\eta_n)$, $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$, то $\xi \in G(t,\eta)$

якщо $\xi_n \in G(t_n,B)$, B - обмежена в X, то $\forall t > 0$ для достатньо великих n. $\xi_n \in G(t,G(t_n - t,B)) \subset G(t,B_0)$. Отже, $\xi_n \in \varphi_n(t)$, $\varphi_n(0) \in B_0$ і по підпослідовності $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ в X, тобто $\{\xi_n\}$ - предкомпактна.

Ці властивості разом з (12) гарантують [7,8] існування глобального атрактору $\Theta = \Theta_\psi \subset B_0$.

Доведемо, що Θ є обмеженою множиною в $V \times L^4(\Omega)$. З вкладення

$$\Theta \subset G(1,\Theta) \subset G(1,B_0) \qquad (16)$$

маємо, що для $\xi \in \Theta$ $\exists \varphi = \{\varphi,\omega\} \in K$ таке, що $\xi = \varphi(1)$, $\varphi(0) \in B_0$. Тоді з (8)

$$\int_0^1 |\omega(\rho)|^2 d\rho \le \frac{1}{2\lambda_1}|g|^2 + 1 + \frac{|g|^2}{\lambda_1}$$

Отже з (10)

Kyiv National Taras Shevchenko University

$\|\omega(1)\|_{L^4}^4 \le C^2(\frac{1}{\lambda_1}|g|^2+1+\frac{2|g|^2}{\lambda_1})^2 e^3 + \frac{1}{3}\|g\|_{L^4}^4 e^3$, (17)

де $C>0$ - з нерівності $\|\omega\|_{L^4} \le C\|\omega\|$.

Далі з оцінки (9) $\forall t \ge 0$

$|\omega(t)|^2 \le |\omega(0)|^2 + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2}$. При фіксованому $\omega(\cdot)$

задача (1) має єдиний розв'язок, що відповідає початковому даному $u_0 \in H$ [6], отже з [5] $\exists C_N > 0$ така, що

$$\|u(1)\|^2 \le |\frac{4}{\nu}(|u_0|^2 + \frac{2(|f|^2+|g|^2\cdot(|\omega_0|^2+\frac{|g|^2}{\lambda_1^2}))}{\nu\lambda_1}\cdot (\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu\lambda_1})+\frac{2}{\nu}(|f|^2+|g|^2\cdot(|\omega_0|^2+\frac{|g|^2}{\lambda_1^2}))| \cdot C_N \quad (18)$$

З (17), (18) маємо, що $\exists r_N > 0$:

$\Theta \subset G(1,\Theta) \subset B_1 = \{\{u,\omega\} \| \|u\| \le r_N, \|\omega\|_{L^4} \le r_N\}$

Доведемо інваріантність Θ, тобто формулу

$$\Theta = G(t,\Theta) \ \forall t \ge 0 \quad (19)$$

Нехай $\varphi = \{u,\omega\} \in K$, $\varphi(0) = \{u_0,\omega_0\} \in V \times L^4(\Omega)$. При фіксованому ω задача (1) з початковими даними u_0 має єдиний розв'язок $u \in C([0,T];V)$. При фіксованому u задача (2) з початковими даними ω_0 також має єдиний розв'язок ω, причому за допомогою гальоркінських апроксимацій, збіжних при $t=0$ до ω_0 в $L^4(\Omega)$ можна показати [4], що ω задовольняє (10) і для $s=0$. Отже $\varphi \in L^\infty(0,T;(L^4(\Omega))^4)$ і оскільки з теореми 1 в цьому класі розв'язок єдиний, то G є однозначною напівгрупою на Θ. Це, зокрема, означає зв'язність Θ. Оскільки з (15) $\omega \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C([0,T];L^4_w(\Omega))$, то $\forall t \ge 0$ $G(t,\Theta) \subset V \times L^4(\Omega)$. Тоді з вкладення $\Theta \subset G(t,\Theta)$ $\forall t \ge 0$ маємо:

$\forall p \ge 0$ $G(p,\Theta) \subset G(p,G(t,\Theta)) = G(p+t,\Theta)$ (20)

З (20) при $t \to \infty$ одержуємо $G(p,\Theta) \subset \Theta$ $\forall p \ge 0$, тобто (19). Теорему доведено.

Теорема 3. 3D система Бенарда має обмежені визначені на R слабкі розв'язки.

Доведення.

Оскільки $\forall N \ge 1$ $\Theta_N \subset B_0$, то для будь-якої повної траєкторії φ^N потоку G_N з $\varphi^N(0) \in \Theta_N$ в силу леми про компактність існує підпослідовність така, що $\varphi^N \to \varphi$ в сенсі (14) $\forall T > 0$, де φ – розв'язок 3D системи Бенарда, $\varphi(0) = \varphi_0$, причому $\varphi(t) \in B_0$ $\forall t \ge 0$.

Розглядаючи траєкторії φ^N на $[-k;+\infty)$ для $k \ge 1$, при граничному переході (14) одержуємо φ_k - розв'язок 3D системи Бенарда на $(-k;+\infty)$, причому $\forall t \ge -k$ $\varphi_k(t) \subset B_0$ і $\varphi_k(t) = \varphi_{k-1}(t)$ $\forall t \ge -k+1$. Тоді формула $\bar{\varphi}(t) = \varphi_k(t)$, $t \ge -k$, $k \ge 0$ визначає шукану обмежену повну траєкторію. Теорему доведено.

Висновки

В роботі доведено існування інваріантного глобального атрактору для модифікованої 3D системи Бенарда та досліджено його зв'язок з існуванням обмежених повних траєкторій не модифікованої системи.

Список використаних джерел

1. *Ж.-Л. Лионс* «Некоторые методы решения нелинейных краевых задач». М: Мир, 1972. – 450с.
2. *R. Temam* "Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics". N.Y.: Springer, 1988. – 645 p.
3. *Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J. A* weak attractors and properties of solutions for the three-dimensional Bernard problem // DCDS, 2007. – vol.18. – P.449-481.
4. *Kapustyan O.V., Pankov A.V., Valero J.* On global attractors of multivalued semiflows generated by the 3D Benard system // Set-Valued and Variational Analysis, 2012, 2012, vol. 20, № 3, p. 445-465.
5. *Caraballo T., Kloeden P.E., Real J.* Unique strong solution and V-attractor of a three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equation // Advanced Nonlinear Studies, 2006. – vol.6. – P.411-436.
6. *Romito M.* "The uniquiness of weak solutions of the globally modified Navier-Stokes equations" Advanced Nonlinear Studies. 2009, vol. 9, p. 425-427.
7. *Мельник В.С.* Многозначительная динамика нелинейных бесконечномерных систем. Киев, препринт Института кибернетики НАНУ № 94-17, 1994, 60с.
8. *Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.* Global attractors of multivalued dynamical systems and systems and evolution equations without uniqueness. – Kyiv: Naukova Dumka, 2008.

Надійшла до редколегії 14.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 539.9

П'ятецька О.В., к.ф.-м.н., с.н.с.

Вплив розміщення актуаторів на ефективність активного демпфування коливань в'язкопружних пластин

Досліджено вплив розміщення прямокутних актуаторів на прямокутних в'язкопружних пластинах на різницю потенціалів, яку необхідно підвести до них для компенсації механічного навантаження. Представлені прості формули, які дають можливість розрахувати координати центра прямокутного п'єзовключення з умови мінімальності підведеної до п'єзоактуатора різниці потенціалів.

Ключові слова: п'єзоактуатори, демпфування, різниця потенціалів.

O.V.Pyatetska, Ph.D (Phys.-Math.)

Influence of the location of actuators on efficiency of active damping of the vibrations viscoelastic plates

Influence of the location of rectangular actuators on the rectangular viscoelastic plates on potential difference to compensate the mechanical loading is investigated. The simple formulas to calculate the coordinates of centre of the rectangular piezoinclusion upon the condition of minimal potential difference to bring up to the piezoactuator is given.

Key Words: piezoactuators, damping, potential difference.

*E-mail: pyatetska@univ.kiev.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Перестюк М.О.

Вступ

В даній роботі розглянуто демпфірування усталених коливань прямокутної пластини за допомогою введення в її структуру в'язкопружних шарів (пасивне демпфірування) та п'єзоелектричних актуаторів прямокутної форми (активне демпфірування). Розглядається випадок багатошарової пластини, що складається із середнього пасивного пакету шарів симетричної структури, серед яких є і в'язкопружні шари з високими гістерезисними втратами, і двох поляризованих у протилежному напрямку п'єзоактивних шарів однакової товщини з однаковими електромеханічними властивостями. Механічна поведінка середнього пакету описується моделлю ортотропного матеріалу з усередненими по товщині жорсткісними характеристиками, отриманими з використанням гіпотез Кірхгофа-Лява. Для розрахунку необхідної для компенсації зовнішнього механічного навантаження різниці потенціалів використовується класичний варіаційний підхід.

Варіаційне формулювання задачі

Розглянемо ортотропну в'язкопружну пластину, яка знаходиться під дією динамічного поверхневого стаціонарного навантаження. Пластина складається з довільного числа пакетів металевих, полімерних або композитних пасивних (без п'єзоефекту) шарів. На верхній і нижній поверхнях пасивної пластини розміщено в'язкопружні п'єзоелектричні шари довільної в плані конфігурації, які виконують функції актуатора. Кількість п'єзошарів в плані та їх геометрична конфігурація вибираються з міркувань найефективнішого демпфірування коливань пасивного пакету. Демпфірування досягається за рахунок вибору тієї або іншої конфігурації електродів та підведення до них різниці потенціалів необхідної фази та амплітуди. Необхідно мати на увазі, що наведені нижче рівняння описують не пластину в цілому, а кожен її пластинчатий елемент скінченних розмірів (включення, пляма) окремо. Визначальні рівняння для зусиль і моментів отримуються у вигляді суми складових, які породжуються пасивним пакетом і п'єзоелектричними актуаторами. Пластина віднесена до декартової системи координат. Головні осі анізотропії співпадають з осями координат. Використовуємо лінійні кінематичні співвідношення. Вважаємо, що деформації малі. До пластини прикладено поперечне навантаження, що змінюється по гармонічному закону з частотою, близькою до резонансної. Структура пластини по товщині така, що в ній при дії поперечного навантаження виникають лише деформації згину. Кінематичні співвідношення теорії пластин, рівняння руху, граничні

© О.В. П'ятецька, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

умови є універсальними співвідношеннями і мають однаковий вигляд незалежно від властивостей матеріалу. Для геометрично лінійного випадку вони подані, наприклад, в [1,3].

Компоненти переміщень та деформацій мають вигляд:

$$u_x = u(x,y) + z\theta_x(x,y),\ u_y = v(x,y) + z\theta_y(x,y),$$
$$u_z = w(x,y),\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 + z\kappa_1,$$
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_2 + z\kappa_2,\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12} + z\kappa_{12}, \quad (1)$$

де $u(x,y), v(x,y), w(x,y)$ – переміщення координатної поверхні у напрямках x, y, z відповідно; $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ - кути повороту.

У співвідношеннях (1) введені такі позначення для компонент тензора деформацій та згину:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \kappa_1 = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, 2\kappa_{12} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$

$(1 \leftrightarrow 2, u \leftrightarrow v, x \leftrightarrow y)$.

Визначальні рівняння для складових зусиль та моментів, які вносяться у вирази для повних зусиль і моментів пасивними ортотропними в'язкопружними шарами, при моногармонічному деформуванні мають вигляд:

$$\overset{0}{M}_1 = \overset{0}{D}_{11}\kappa_1 + \overset{0}{D}_{12}\kappa_2, \overset{0}{M}_2 = \overset{0}{D}_{12}\kappa_1 + \overset{0}{D}_{22}\kappa_2, \overset{0}{H} = \overset{0}{D}_{66}\kappa_{12}.$$

Тут всі величини комплексні.

Для п'єзоактивних в'язкопружних шарів, при наявності електродів на них, комплексні визначальні рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\Lambda}{M}_1 &= \overset{\Lambda}{D}_{11}\kappa_1 + \overset{\Lambda}{D}_{12}\kappa_2 + \overset{\Lambda}{M}_0, \\ \overset{\Lambda}{M}_2 &= \overset{\Lambda}{D}_{12}\kappa_1 + \overset{\Lambda}{D}_{22}\kappa_2 + \overset{\Lambda}{M}_0, \\ \overset{\Lambda}{H} &= \overset{\Lambda}{D}_{66}\kappa_{12}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вирази для жорсткісних характеристик $\overset{\Lambda}{M}_0$ подані в [3].

Загальні моменти дорівнюють сумі моментів, які вносяться пасивними і п'єзоактивними шарами:

$$M_1 = \overset{0}{M}_1 + \overset{1}{M}_1 + \overset{2}{M}_1, \ldots \quad (3)$$

Враховуючи отримані вище співвідношення, знайдемо вирази для загальних зусиль і моментів у пластині:

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + M_0, \\ M_2 &= D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + M_0, \\ H &= D_{66}\kappa_{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $D_{11} = \overset{0}{D}_{11} + \overset{1}{D}_{11} + \overset{2}{D}_{11}, \ldots, M_0 = \overset{1}{M}_0 + \overset{2}{M}_0$.

Підставляючи вирази (4) у відомі рівняння руху

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \rho\omega^2 w - q(x,y) = 0, \quad (5)$$

отримаємо лінійне диференціальне рівняння з комплексними коефіцієнтами відносно поперечного прогину структурно неоднорідної як по товщині, так і по поверхні пластини:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} -$$
$$- \tilde{\rho}\omega^2 w - \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} + q(x,y) = 0, \quad (6)$$

з відповідними граничними умовами.

Як відомо, форма резонансних коливань мало чутлива до таких факторів, як дисипація, різного типу неоднорідності, фізична та геометрична нелінійності. Як свідчить багатий досвід дослідження вимушених і вільних коливань тонкостінних елементів [1,2], для розв'язку цих задач дуже ефективними є класичні варіаційні методи, коли для зміщення задається пружна форма коливань з невідомою амплітудою, яка знаходиться з використанням методів типу Бубнова-Гальоркіна та інших варіаційних методів. Доцільність варіаційного підходу пояснюється ще й тим, що різниця потенціалів, яка підводиться до актуатора для компенсації механічного навантаження, є не локальною, а інтегральною характеристикою, подібною до частоти вільних коливань чи до амплітуди вимушених резонансних коливань.

Для розв'язку задачі подамо її варіаційне формулювання:

$$\delta\,\overline{\Im}(x,y,z) = 0, \quad (7)$$

де

$$\overline{\Im} = \frac{1}{2}\iint_F \left\{ D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \tilde{\rho}s^2 w - 2p_0 w - \right.$$
$$\left. 2M_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right\} dx\,dy. \quad (8)$$

Оскільки при активному демпфіруванні коливань вимагається, щоб приєднання п'єзоактивних включень істотно не змінювало динамічних характеристик пасивної пластини, надалі при використанні п'єзовключень, які покривають

Kyiv National Taras Shevchenko University

лише частину поверхні пластини, будемо вважати, що п'єзошари істотно не впливають на ці характеристики.

Розв'язок задачі про демпфірування коливань прямокутної пластини з шарнірним закріпленням торців

Розглянемо найпростіший випадок граничних умов, що відповідають шарнірному закріпленню торців пластини:

$$w=0,\quad D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=M_0,\quad (x=0;\,x=a);$$

$$w=0,\quad D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=M_0,\quad (y=0;\,y=b) \qquad (9)$$

при нульових початкових умовах.

Вважаємо, що пластина має симетричну по товщині структуру і навантажена відомим стаціонарним поверхневим навантаженням. Для демпфірування коливань пластини будемо використовувати прямокутні в плані п'єзоелектричні актуатори. Необхідно вибрати найефективніше розміщення актуаторів (електродів) та їх розміри $(c\times d)$. Для випадку п'єзошарів, які мають однакові електромеханічні властивості та протилежні напрямки поляризації, вирази для жорсткісних характеристик залежать від присутності чи відсутності електродів між пасивним і п'єзоактивними шарами. Розв'язок задачі (6) – (9) шукається у вигляді:

$$w=w_{mn}(t)\sin k_m x\sin p_n y,\ k_m=\frac{m\pi}{a},\ p_n=\frac{n\pi}{b}. \qquad (10)$$

Для прямокутного в плані включення, яке має розміри c,d та координати центра ξ,η, вираз для викликаного актуатором моменту представимо у формі:

$$M_0=\overset{0}{M}_{mn}(t)\sin k_m x\sin p_n y, \qquad (11)$$

де

$$\overset{0}{M}_{mn}(t)=\frac{16\overset{0}{M}(t)}{abk_m p_n}\sin k_m\xi\sin p_n\eta\sin\frac{k_m c}{2}\sin\frac{p_n d}{2},$$

а $\overset{0}{M}(t)$ пропорційне підведеній до актуатора різниці потенціалів. Поверхневе навантаження представляється у такій же формі:

$$q(x,y,t)=q_{mn}(t)\sin k_m x\sin p_n y. \qquad (12)$$

Підставляючи (10) - (12) у (7), після використання традиційної варіаційної техніки одержимо диференціальне рівняння за часом:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt}+\Delta_{mn}\cdot w_{mn}+p_{mn}(t)-M_{mn}(t)=0 \qquad (13)$$

з нульовими початковими умовами. Тут

$$\Delta_{mn}=\left(D_{11}k_m^4+2(D_{12}+D_{66})k_m^2 p_n^2+D_{22}p_n^4\right)/\bar{\rho},$$

$$M_{mn}=\overset{0}{M}_{mn}/\bar{\rho},\quad p_{mn}=q_{mn}/\bar{\rho}.$$

Для шарнірного закріплення резонансна частота визначається формулою (по пружній складовій):

$$\bar{\rho}\,\omega_{mn}^2=\Delta'_{mn}. \qquad (14)$$

Нехай до актуатора підведена різниця потенціалів, яка змінюється за гармонічним законом із частотою поверхневої сили. Тоді на резонансі маємо:

$$w_{mn}=i\left[\overset{0}{p}_{mn}-\left(k_m^2+p_n^2\right)\overset{0}{m}_{mn}\right]\Big/\Delta'_{mn}\,tg\delta. \qquad (15)$$

На кожному актуаторі різниця потенціалів постійна. Тому можемо вибрати у виразі (15) довільно тільки одне значення різниці потенціалів на кожному актуаторі. Як правило, найбільш енергоємною є перша мода коливань, що відповідає індексам $m=n=1$. При необхідності компенсації декількох мод коливань, потрібно збільшити кількість актуаторів. Для компенсації любої з гармонік необхідно різницю потенціалів вибирати з умови рівності нулеві чисельника виразу (15), тобто покласти:

$$\overset{0}{p}_{mn}-\left(k_m^2+p_n^2\right)\overset{0}{m}_{mn}=0. \qquad (16)$$

Вплив розміщення актуаторів на ефективність демпфування

Різниця потенціалів розраховується за формулами (11), (16), з яких маємо

$$\frac{\overset{0}{M}}{\overset{0}{m}}=\frac{1}{\sin k_m\xi\sin p_n\eta\sin\frac{k_m c}{2}\sin\frac{p_n d}{2}}, \qquad (17)$$

$\overset{0}{m}=\frac{ab}{16}\frac{\overset{0}{p}_{mn}k_m p_n}{k_m^2+p_n^2}$. Величина $\overset{0}{M}$ пропорційна підведеній до актуатора різниці потенціалів V_a. Центр актуатора та його розміри вибираються з умови мінімальності цієї різниці, тобто з умови мінімальності $\overset{0}{M}$. З (17) видно, що це буде мати місце, якщо виконуються рівності:

$$\sin k_m\xi=1,\ \sin p_n\eta=1,$$
$$\sin(k_m c/2)=1,\ \sin(p_n d/2)=1. \qquad (18)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Розглянемо моди коливань, які відповідають $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{13}, \omega_{22}$. Для моди ω_{11} центр актуатора повинен вибиратися з умови $\sin k_1 \xi = 1$, $\sin p_2 \eta = 1$, так що його координати рівні: $\xi = a/2$ $\eta = b/2$, тобто центр актуатора співпадає з центром пластини. При другому виборі центра актуатора маємо поверхню:

$$\frac{\overset{0}{M}}{\overset{0}{m}} = \frac{1}{\sin k_1 \xi \sin p_1 \eta}, \qquad (19)$$

де $\overset{0}{m}$ - константа. На рис. 1 представлена поверхня, яка зображає залежність величини $\overset{0}{M}/\overset{0}{m}$, пропорційної різниці потенціалів, від координат центра актуатора. Тут $\psi = \xi/a$, $\eta = \eta/b$. Як видно з рисунка і (18), якщо координати центра актуатора наближаються до торців пластини, підведена до нього різниця потенціалів прямує до нескінченності. В околі точки $(a/2, b/2)$ є досить велика область, в якій потенціал мало відрізняється від свого мінімального значення. Тому центр актуатора також можна розмістити в цій області. Для моди ω_{21} з умови (18) при $m = 2$, $n = 1$ мінімальна різниця потенціалів досягається при розміщенні центра актуатора в точках: $(a/4, b/2)$, $(3a/4, b/2)$. При цьому різниця потенціалів в залежності від координат центра актуатора визначається з виразу:

$$\frac{\overset{0}{M}}{\overset{0}{m}} = \frac{1}{\sin k_1 \xi \sin p_1 \eta}. \qquad (20)$$

Поверхня, яка зображає величину (20) в залежності від координат центра актуатора має такий же вигляд, як і поверхня на рис.1 з тією різницею, що вона розміщена над прямокутником $(0 \le x \le a/2, 0 \le y \le b)$. Для моди ω_{13} центр актуатора необхідно розмістити в точках: $(a/2, b/6)$, $(a/2, b/2)$, $(a/2, 5b/6)$. При цьому пластина розбивається на три полоси шириною $b/3$ і довжиною a. Над кожною з цих полос поверхня має вигляд, аналогічний до розглянутих вище мод коливань. Різниця потенціалів буде прямувати до нескінченності при підході до країв цих полос. Для моди ω_{22} центр актуатора, який відповідає мінімальній різниці потенціалів, розміщається в точках: $(a/4, b/4)$, $(a/4, 3b/4)$, $(3a/4, b/4)$, $(3a/4, 3b/4)$. Тому пластина розбивається на чотири рівних прямокутники з координатами центра у цих точках. Над кожним з цих прямокутників поверхня, яка зображає різницю потенціалів у залежності від координат центра актуатора, має аналогічний до Рис.1 вигляд. Потенціал прямує до безмежності при наближенні центра актуатора до їх країв. Таким чином, при невдалому виборі координат центрів актуаторів для вказаних вище мод потенціал може досягнути критичних значень, при яких має місце електричний чи тепловий пробій.

Рис.1

Висновок

Досліджено вплив розміщення прямокутних актуаторів на прямокутних в'язкопружних пластинах на різницю потенціалів, яку необхідно підвести до них для компенсації механічного навантаження. Представлені прості формули, які дають можливість розрахувати координати центра п'єзовключення та його розміри з умови мінімальності підведеної до п'єзоактуатора різниці потенціалів. Показано, що розміщення центра актуатора суттєво впливає на величину потенціалу, який необхідно подати на актуатор для зменшення амплітуди коливань пластини.

Список використаних джерел

1. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек.– Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Бабаков И.М.* Теория колебаний.– Москва: Наука, 1968. – 560 с.
3. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наукова думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти томах; Т.4) .
4. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* О резонансных колебаниях шарнирно опертой вязкоупругой прямоугольной пластины. – Прикладная механика. – 2009. - Т. 45, № 7. – С. 88-99.

Надійшла до редколегії 27.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics

УДК 517.938

О.П. Страх

Обмежені розв'язки динамічних систем на часовій шкалі

Розглядається задача про існування обмежених на всій часовій шкалі розв'язків динамічних систем. Використовуючи теорію нетерових крайових задач із застосуванням методу псевдо-обернених матриць, знайдені необхідні й достатні умови існування таких розв'язків.

Ключові слова: динамічна система на часовій шкалі, нетерова крайова задача.

O.P. Strakh

Solutions of dynamic systems bounded on the entire time scale

Problem about existence of solutions bounded on the entire time scale is considered. Using the theory of Fredholm boundary-value problem with application a method of pseudo-inverse matrizes the necessary and sufficient conditions of such solutions existence are found.

Key Words: dynamic system on time scale, Fredholm boundary-value problem.

E-mail: strah_o@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

Нехай $BC_{rd}(J)$ — банаховий простір rd-неперервних [1, с. 22] векторнозначних функцій, обмежених на $J \quad x\colon J \to \mathbb{R}^n$ з нормою $\|x\| = \sup_{t\in J} |x(t)|$, де $|x(t)| := \|x\|_{\mathbb{R}^n}$, а J — деяка часова шкала, для якої $\sup J = +\infty$, $\inf J = -\infty$.

Розглянемо лінійну однорідну систему динамічних рівнянь:

$$x^{\Delta} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

де x^{Δ} — дельта похідна, визначена в [1, с. 5], $\mathbb{T}$ — часова шкала, $A(t)$ — регресивна [1, с. 190] $n\times n$-вимірна матриця, елементи якої дійсні, rd-неперервні й обмежені на всій шкалі $\mathbb{T}$ функції $A(\cdot) \in BR(\mathbb{T})$.

Означення 1. Система (1) називається експоненціально дихотомічною (е-дихотомічною) на півосях $[t_0;+\infty)_{\mathbb{T}}$ та $(-\infty;t_0]_{\mathbb{T}}$, якщо існують проектори P ($P^2 = P$) та Q ($Q^2 = Q$), залежні від t_0, і константи $K_{1,2} > 0, 0 < \alpha_{1,2} < 1$, які задовольняють наступні нерівності:

$$\begin{cases} \|e_A(t)Pe_A^{-1}(s)\| \le K_1 e_{-\alpha_1}(t,s) & \text{при } t \ge s, \\ \|e_A(t)(I-P)e_A^{-1}(s)\| \le K_1 e_{-\alpha_1}(s,t) & \text{при } s \ge t, \\ \forall t, s \in [t_0;+\infty)_{\mathbb{T}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|e_A(t)Qe_A^{-1}(s)\| \le K_2 e_{-\alpha_2}(t,s) & \text{при } t \ge s, \\ \|e_A(t)(Q)e_A^{-1}(s)\| \le K_2 e_{-\alpha_2}(s,t) & \text{при } s \ge t, \\ \forall t, s \in (-\infty;t_0]_{\mathbb{T}}, \end{cases}$$

де $e_A(t) := e_A(t,t_0)$ — фундаментальна матриця системи (1), нормована в точці t_0, $e_\alpha(t,s)$ — експоненціальна функція [1, с. 59].

Розглядаємо задачу про існування та структуру розв'язків $x\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, $x(\cdot) \in BC^1_{rd}(\mathbb{T})$ неоднорідної системи

$$x^{\Delta} = A(t)x + f(t), f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n, \qquad f(\cdot) \in BC_{rd}(\mathbb{T}) \tag{2}$$

для випадку, коли відповідна однорідна система (1) є е-дихотомічною та має нетривіальні обмежені на $\mathbb{T}$ розв'язки. Виявляється, що ця задача є нетеровою і, використовуючи теорію псевдо-обернених матриць, можна сформулювати наступну лему.

Лема 1. *Припустимо, що лінійний оператор*

$$(Lx)(t) = x^{\Delta} - A(t)x\colon BC^1_{rd}(\mathbb{T}) \to BC_{rd}(\mathbb{T})$$

є е-дихотомічним на півосях $J_1 = [t_0;+\infty)_{\mathbb{T}}$ та $J_2 = (-\infty;t_0]_{\mathbb{T}}$ з проекторами P та Q відповідно. Тоді справедливі наступні твердження:

1) *система* (1) *має r-параметричну $r = \operatorname{rank}\left(PP_{N(D)}\right) = \operatorname{rank}\left((I-Q)P_{N(D)}\right)$ сім'ю обмежених на $\mathbb{T}$ розв'язків $\left[e_A(t)\right]_r c_r$, $\forall c_r \in \mathbb{R}^r$, де $P_{N(D)}\colon \mathbb{R}^n \to N(D)$ — проектор на ядро $n\times n$-вимірної матриці $D = P - (I-Q)$, тобто матриця*

$$\left[e_A(t)\right]_r = e_A(t)\left[PP_{N(D)}\right]_r =$$

© О.П. Страх, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

є $n\times r$-вимірною матрицею, стовпці якої утворюють повну систему з r ЛНЗ розв'язків системи (1), обмежених на $\mathbb{T}$;

2) система

$$x^{\Delta} = \ominus A^*(t)x \tag{3}$$

є спряженою для системи (1) і має d-параметричну $d = \operatorname{rank}\left(P_{N(D^*)}(I-P)\right) = \operatorname{rank}\left(P_{N(D^*)}Q\right)$ сім'ю обмежених на $\mathbb{T}$ розв'язків $H_d(t)c_d$, $\forall c_d \in \mathbb{R}^d$, де $P_{N(D^*)}\colon \mathbb{R}^n \to N(D^*)$ – проектор на ядро матриці D,

$$H_d(t) = (e_{A^*}(t))^{-1}\cdot[Q^*P_{N(D^*)}]_d =$$

$$= (e_{A^*}(t))^{-1}\cdot[(I-P^*)P_{N(D^*)}]_d$$

є $n\times d$-вимірною матрицею, стовпці якої утворюють повну систему з d ЛНЗ розв'язків системи (3), обмежених на $\mathbb{T}$, $\ominus$ – операція, що визначається співвідношенням

$$(\ominus W)(t) = -[I+\mu(t)W(t)]^{-1}W(t)\ [1, \text{с.}191];$$

3) оператор L є нетеровим оператором, індекс якого визначається за формулою:

$$\operatorname{ind}L = \operatorname{rank}[PP_{N(D)}] - \operatorname{rank}[P_{N(D^*)}(I-P)] =$$

$$= \operatorname{rank}[(I-Q)P_{N(D)}] - \operatorname{rank}[P_{N(D^*)}Q] = r-d$$

більш того, $f\in \operatorname{Im}L$ тоді й тільки тоді, коли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_d^*(\sigma(s))\,\Delta s = 0, \tag{4}$$

де $H_d^*(t) = \left[\left(e_{A^*}^*(t)\right)\times\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d\right]^{-1}$ є $d\times n$-вимірною матрицею, рядки якої утворюють повну систему з d ЛНЗ розв'язків системи (3), обмежених на $\mathbb{T}$;

4) якщо умова (4) виконується, то неоднорідна система (2) має r-параметричну сім'ю розв'язків, обмежених на $\mathbb{T}$:

$$x(t,c_r) = \left[e_A(t)\right]_r c_r + (G[f])(t), \forall c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{5}$$

де $(G[f])(t) = e_A(t)\times$

$$\times\begin{cases}\int\limits_{t_0}^{t} Pe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \\ -\int\limits_{t}^{+\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \\ +PD^+\left\{\int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \right. \\ \left. +\int\limits_{t_0}^{+\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\right\}, \\ \forall t\geq t_0; \\ \int\limits_{-\infty}^{t} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \\ -\int\limits_{t}^{+\infty}(I-Q)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \\ +PD^+\left\{\int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \right. \\ \left. +\int\limits_{t_0}^{+\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\right\}, \\ \forall t\leq t_0\end{cases} \tag{6}$$

є узагальненим оператором Гріна задачі про обмежені на цілій $\mathbb{T}$ розв'язки неоднорідної системи (2), D^+ – псевдо-обернена матриця для D. Зазначений оператор має наступні властивості: $\left(LG[f]\right)(t) = f(t)$, $\forall t\in\mathbb{T}$,

$$(G[f])(t_0+0) - (G[f])(t_0-0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\sigma(s))\,\Delta s,$$

де $H^*(t) = \left[\left(e_{A^*}^*(t)\right)^{-1}Q^*P_{N(D^*)}\right]^* = \left[\left(e_{A^*}^*(t)\right)^{-1}(I-P^*)P_{N(D^*)}\right]^* = P_{N(D^*)}Qe_A^{-1}(t) = P_{N(D^*)}(I-P)e_A^{-1}(t)$.

Доведення. Загальний розв'язок задачі (2), обмежений на півосях $J_1 = [t_0;+\infty)_{\mathbb{T}}$ і $J_2 = (-\infty;t_0]_{\mathbb{T}}$, має вигляд:

$$x(t,\xi) = \begin{cases} e_A(t)P\xi + \\ +\int\limits_{t_0}^{t} e_A(t)Pe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \\ -\int\limits_{t}^{+\infty} e_A(t)(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s, \\ \forall t\geq t_0; \\ e_A(t)(I-Q)\xi + \\ +\int\limits_{-\infty}^{t} e_A(t)Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \\ -\int\limits_{t}^{t_0} e_A(t)(I-Q)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s, \\ \forall t\leq t_0. \end{cases} \tag{7}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Дійсно, безпосередньо підстановкою з урахуванням особливостей Δ-диференціювання [1, с. 189] легко переконатися, що (7) є розв'язком системи (2). Для випадку $t \geq t_0$ маємо:

$$e_A^{\Delta}(t)\Big(P\xi + \int\limits_{t_0}^{t} Pe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \int\limits_{t}^{+\infty}(I - P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\Big) + e_A^{\sigma}(t)\Big(Pe_A^{-1}(\sigma(t))f(t) + (I-P)e_A^{-1}(\sigma(t))f(t)\Big) = A(t)e_A(t)\Big(P\xi + \int\limits_{t_0}^{t} Pe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \int\limits_{t}^{+\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))\times f(s)\,\Delta s\Big) + f(t);$$

аналогічно отримується рівність для випадку $t \leq t_0$.

Доведемо, що він є обмеженим на $\mathbb{T}$. Нам потрібно перевірити обмеженість трьох доданків. Для $J_1 = [t_0; +\infty)$ маємо:

$$\|e_A(t)P\xi\| \leq k_1;$$

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t} e_A(t)Pe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\Big\| \leq \int\limits_{t_0}^{t}\|e_A(t)P\times e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\| \leq K_1\int\limits_{t_0}^{t} e_{\alpha_1}(t,\sigma(s))\times \|f(s)\|\,\Delta s \leq k_2;$$

$$\Big\|\int\limits_{t}^{+\infty} e_A(t)(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\Big\| \leq \int\limits_{t}^{+\infty}\|e_A(t)\times(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\| \leq K_1\int\limits_{t}^{+\infty} e_{\alpha_1}(t,\sigma(s))\times \|f(s)\|\,\Delta s \leq k_3.$$

Аналогічно доводиться обмеженість для $J_2 = (-\infty; t_0]_{\mathbb{T}}$.

За додатковою умовою $x(t_0+,\xi) = x(t_0-,\xi)$ знаходимо розв'язки задачі (2), обмежені на всій часовій шкалі $\mathbb{T}$. Це означає, що розв'язок (7) є обмеженим на $\mathbb{T}$ тоді й тільки тоді, коли вектор константа $\xi \in \mathbb{R}^n$ задовольняє умову

$$P\xi - \int\limits_{t_0}^{\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s = (I-Q)\xi + \int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s.$$

Таким чином, константу $\xi \in \mathbb{R}^n$ знаходимо з алгебраїчної системи

$$\Big[P - (I-Q)\Big]\xi = \int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \int\limits_{t_0}^{\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s. \quad (8)$$

Система (2) має обмежені на $\mathbb{T}$ розв'язки тоді й тільки тоді, коли алгебраїчна система (8) є розв'язною відносно $\xi \in \mathbb{R}^n$. Для цього необхідно й достатньо щоб вільний член системи (8) належав ортогональному доповненню $N^{\perp}(D^*) = R(D)$ підпростору $N(D^*)$. Таким чином, отримуємо умову:

$$P_{N(D^*)}\Big\{\int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \int\limits_{t_0}^{\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\Big\} = 0. \quad (9)$$

В цьому випадку, загальний розв'язок системи (2), обмежений на $\mathbb{T}$, набуває вигляду (7), де константа $\xi \in \mathbb{R}^n$ отримується з системи (8):

$$\xi = D^{+}\Big\{\int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \int\limits_{t_0}^{\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\Big\} + P_{N(D)}c, \forall c \in \mathbb{R}^n.$$

Іншими словами, $f \in \mathrm{Im}L$ тоді й тільки тоді, коли виконується умова (9), і загальний розв'язок системи (2), обмежений на всій шкалі $\mathbb{T}$, має вигляд:

$$x(t,\xi) = \begin{cases} PP_{N(D)}c + \int\limits_{t_0}^{t} Pe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \\ -\int\limits_{t}^{+\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \\ +PD^{+}\Big\{\int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \\ +\int\limits_{t_0}^{+\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\Big\}, \\ \forall t \geq t_0; \\ (I-Q)P_{N(D)}c + \\ +\int\limits_{-\infty}^{t} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \\ -\int\limits_{t}^{t_0}(I-Q)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \\ +PD^{+}\Big\{\int\limits_{-\infty}^{t_0} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \\ +\int\limits_{t_0}^{+\infty}(I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s\Big\}, \\ \forall t \leq t_0. \end{cases} = e_A(t)$$

З того, що $DP_{N(D)} = 0$, ми маємо $PP_{N(D)} = (I-Q)P_{N(D)}$. Нехай $\mathrm{rank}\Big[PP_{N(D)}\Big] =$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$= \operatorname{rank}\left[(I-Q)P_{N(D)}\right]$. Тоді ми маємо $\dim N(L) = r$ і навпаки. Нехай $\left[PP_{N(D)}\right] = \left[(I-Q)P_{N(D)}\right] - n\times r$-вимірна матриця, стовпці якої утворюють повну систему з r ЛНЗ стовпців матриці $PP_{N(D)}$ чи матриці $(I-Q)P_{N(D)}$. Тоді

$$\left[e_A(t)\right]_r = e_A(t)\left[PP_{N(D)}\right]_r = e_A(t)\left[(I-Q)P_{N(D)}\right]_r$$

— $n\times r$-вимірна матриця, стовпці якої утворюють повну систему з r ЛНЗ розв'язків системи (1), обмежених на $\mathbb{T}$. Тому, загальний розв'язок системи (2), обмежений на $\mathbb{T}$, може бути представлений у вигляді (5), де узагальнений оператор Гріна $\{G[f]\}(t)$ задачі про обмежені на всій часовій шкалі $\mathbb{T}$ розв'язки системи (2) має вигляд (6) і задовольняє вищевказані умови, які досить легко перевіряються обчисленням.

Оскільки $P_{N(D^*)}D = 0$, то $P_{N(D^*)}Q = P_{N(D^*)}(I-P)$. Тоді умова (9) є еквівалентною одній з наступних умов:

$$P_{N(D^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} Qe_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s = 0,$$

$$P_{N(D^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} (I-P)e_A^{-1}(\sigma(s))f(s)\,\Delta s = 0. \quad (10)$$

Нехай $d = \operatorname{rank}\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right] = \operatorname{rank}\left[P_{N(D^*)}Q\right]$. Тоді кожна з умов (10) складається з d ЛНЗ умов. Дійсно, нехай $\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d - n\times d$-вимірна матриця, стовпці якої є ЛНЗ стовпцями матриці $Q^*P_{N(D^*)}$. Враховуючи те, що $\left(e_{A^*}^*(t)\right)^{-1}$ є фундаментальною матрицею системи (3), яка є e-дихотомічною на інтервалах $[t_0;+\infty)_{\mathbb{T}}$ з проектором $I-P^*$ та $(-\infty;t_0]_{\mathbb{T}}$ з проектором $I-Q^*$, ми отримуємо $n\times d$-вимірну матрицю

$$H_d(t) = \left(e_{A^*}(t)\right)^{-1}\cdot\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d =$$

$$= \left(e_{A^*}(t)\right)^{-1}\cdot\left[(I-P^*)P_{N(D^*)}\right]_d,$$

стовпці якої утворюють повну систему з d ЛНЗ обмежених на $\mathbb{T}$ розв'язків системи (3), спряженої до системи (1), і $d\times n$-вимірну матрицю $H_d^*(t) = \left[\left(e_{A^*}^*(t)\right)\times\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d\right]^{-1}$, рядки якої утворюють систему з $d = \operatorname{rank}\left[P_{N(D^*)}Q\right]$ ЛНЗ розв'язків системи (3), обмежених на $\mathbb{T}$. Таким чином, ми досягаємо умови (4), яка і завершує доведення леми. □

Наслідок 1. *Нехай $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Тоді розглядемо $BC(J)$ — банаховий простір неперервних векторнозначних функцій, обмежених на J $x\colon J\to\mathbb{R}^n$ з нормою $\|x\| = \sup_{t\in J}|x(t)|$, де $|x(t)| := \|x\|_{\mathbb{R}^n}$.*

В цьому випадку маємо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t\in\mathbb{R}, \qquad (11)$$

де $A(t)$ — $n\times n$-вимірна матриця, елементи якої дійсні й обмежені на $\mathbb{R}$ функції $A(\cdot)\in BC(\mathbb{R})$. За означенням 1, система (11) є e-дихотомічною на півосях $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty)$ та $\mathbb{R}_- = (-\infty;0]$, якщо існують проектори P ($P^2=P$) та Q ($Q^2=Q$) і константи $K_{1,2}>0$, $0<\alpha_{1,2}<1$, які задовольняють наступні нерівності:

$$\begin{cases}\|X(t)PX^{-1}(s)\| \le K_1e^{-\alpha_1(t-s)} & \text{при } t\ge s,\\ \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \le K_1e^{-\alpha_1(s-t)} & \text{при } s\ge t,\\ \forall t,s\in[0;+\infty),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\|X(t)QX^{-1}(s)\| \le K_2e^{-\alpha_2(t-s)} & \text{при } t\ge s,\\ \|X(t)(I-Q)X^{-1}(s)\| \le K_2e^{-\alpha_2(s-t)} & \text{при } s\ge t,\\ \forall t,s\in(-\infty;0],\end{cases}$$

де $X(t)$ — нормальна фундаментальна матриця системи (11).

Таким чином, розглядається задача про існування та структуру розв'язків $x\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $x(\cdot)\in BC^1(\mathbb{R})$ неоднорідної системи

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n,$$
$$f(\cdot),A(\cdot)\in BC(\mathbb{R}), \quad (12)$$

для якої відповідна однорідна система (11) є e-дихотомічною та має нетривіальні обмежені на всій осі розв'язки. Отже, з леми 1 випливає відомий результат [2, с. 265] для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. M. Bohner and A. Peterson, Dynamic equations on time scales (Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2001), An introduction with applications.
2. A. A. Boichuk and A. M. Samoilenko, Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (VSP, Utrecht, 2004).

Надійшла до редколегії 01.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки 2012, 3 *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 532.135+544.032.53:532.543.5

Таран*Є.Ю., д.ф.-м.н., проф., Каліон*В.А., к.ф.-м.н., доц., Мельник О.О., к.ф.-м.н.

E.Yu. Taran*, Doc. Sci., prof., V.A. Kalion*, PhD, ass.prof., O.O. Melnyk, PhD

E.Yu. Taran*, Doc. Sci., prof., V.A. Kalion*, PhD, ass.prof., O.O. Melnyk, PhD

Магнітореологія розведених суспензій неброунівських магнітних видовжених частинок

У рамках структурно-феноменологічного підходу отримано реологічне рівняння розведеної суспензії еліпсоїдальних магнітних мікрочастинок, нечутливих до впливу броунівського руху. Досліджено вплив зовнішнього магнітного поля на реологічні властивості такої суспензії.

Ключові слова: реологічне рівняння, розведена суспензія, магнітні зважені частинки.

Magnetorheology of dilute suspensions of non-Brownian magnetic elongated particles

Rheological equation for a dilute suspension of ellipsoidal magnetic microparticles non-sensitive to the Brownian motion is obtained within the framework of structure-phenomenological approach. The effect of external magnetic field on rheological characteristics of such a suspension is investigated.

Key Words: rheological equation, dilute suspension, magnetic suspended particles.

*E-mail: taran@univ.kiev.ua ; vitaliy.kalion@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, докт. фіз.-мат. н., проф. М.О.Перестюк

У даній роботі виведено магнітореологічне рівняння для напруження, яке виникає у градієнтних течіях розведених суспензій видовжених магнітних мікрочастинок при наявності зовнішнього магнітного поля. Такі суспензії можуть формуватися зокрема у магнітних рідинах, виготовлення і використання яких часто супроводжується агрегуванням магнітних наночастинок їх дисперсної фази [1, 2]. Агрегування у магнітних рідинах змінює їх фізичні і реологічні властивості. Так анізометричні мікроагрегати, які при цьому утворюються, здатні орієнтуватися у зовнішньому магнітному полі [3], а магнітна рідина при цьому стає анізотропною.

У роботі вивчаються розведені суспензії неброунівських магнітних мікрочастинок, тобто частинок, які є нечутливими до впливу броунівського руху на їх обертальну динаміку у градієнтних течіях суспензій [4]. Як гідродинамічна і реологічна моделі зважених магнітних мікрочастинок і несучої рідини суспензії використовуються еліпсоїд обертання і ньютонівська рідина. Для вивчення таких суспензій у роботі застосовується структурно-феноменологічний метод [5,6].

Загальне реологічне рівняння розведеної суспензії еліпсоїдальних частинок.

У роботі вивчається суспензія, яка задовольняє умову $l << d << \bar{l}$, де l - характерний розмір молекул ньютонівської несучої рідини суспензії; d - характерний розмір зважених мікрочастинок; $\bar{l}$ - характерний розмір області макротечії суспензії. Нерівність $l << d$, а також припущення, що на поверхні зважених частинок виконується умова прилипання, дозволяють розглядати взаємодію ньютонівської несучої рідини суспензії зі зваженими частинками як з гідродинамічними тілами. Як гідродинамічна модель недеформівних зважених мікрочастинок у роботі використовується еліпсоїд обертання з головною віссю $2a$ і екваторіальним діаметром $2b$ $(a > b)$. Припускається, що зважені частинки, а також їх гідродинамічна модель мають сталий магнітний момент $p_i = qn_i$, де q - величина сталого магнітного моменту частинок; n_i - одиничний вектор, напрямлений уздовж осі $2a$ еліпсоїдальної моделі частинок, який характеризує їх орієнтацію. Суспензія, яка вивчається, припускається розведеною, тому взаємодією між магнітними полями зважених частинок, як і гідродинамічною взаємодією між ними, нехтується.

Згідно з структурно-феноменологічною теорією напруженого стану у градієнтних течіях таких суспензій [5,6] нерівність $d << \bar{l}$ дозволяє моделювати розведену суспензію еліпсоїдальних частинок структурним континуумом з двома внутрішніми мікропараметрами, а саме, вектором

© Є.Ю. Таран, В.А. Каліон. О.О. Мельник, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

орієнтації n_i зважених еліпсоїдальних частинок і вектором $N_i = \dot{n}_i - \omega_{ik} n_k$, який характеризує їх кутову швидкість відносно несучої рідини суспензії. Тут точка над n_i означає локальне диференціювання за часом t, а ω_{ik} - тензор вихору швидкості, $\omega_{ik} = (1/2)(v_{i,k} - v_{k,i})$, де $v_{i,k}$ - тензор градієнта швидкості.

У рамках структурно-феноменологічного методу [5,6] реологічне рівняння для напруження T_{ij} у градієнтних течіях розведеної суспензії, яка моделюється структурним континуумом, постулюється. феноменологічно як функціональна залежність тензора T_{ij} від тензора швидкостей деформації d_{ij}, $d_{ij} = (1/2)(v_{i,j} + v_{j,i})$, і внутрішніх мікропараметрів n_i і N_i структурного континууму. Згідно з [6] найбільш загальне феноменологічне рівняння для напруження T_{ij} матиме вигляд

$$T_{ij} = \left(a_0 + a_1 d_{km}\langle n_k n_m\rangle\right)\delta_{ij} + a_2\langle n_i n_j\rangle + a_3 d_{km}\langle n_k n_m n_i n_j\rangle + a_4 d_{ij} + \\ + a_5 d_{ik}\langle n_k n_j\rangle + a_6 d_{jk}\langle n_k n_i\rangle + a_7\langle n_i N_j\rangle + a_8\langle n_j N_i\rangle, \qquad (1)$$

де δ_{ij} - символ Кронекера; $a_i, i = \overline{0,8}$ - феноменологічні сталі.

Перехід від мікрохарактеристик n_i і N_i окремих зважених частинок до макрохарактеристик суспензії відбувається при виконанні осереднення у вигляді (1), який визначає тензор напруження T_{ij}, у фазовому просторі координат вектора орієнтації n_i зважених еліпсоїдальних частинок. Кутові дужки $\langle\ \rangle$ у (1) означають таке осереднення за допомогою функції розподілу F кутових положень вектора n_i, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_i}\left(F\dot{n}_i\right) = 0. \qquad (2)$$

При структурно-феноменологічному вивченні розведених суспензій еліпсоїдальних частинок феноменологічні сталі $a_i\left(i = \overline{0,8}\right)$ реологічного рівняння (1) можна знайти, як у роботі [5], теоретично з використанням енергетичного методу Ейнштейна [7]. Але результати роботи [6] показують, що використання при такому вивченні динамічного методу Ландау [8] і результатів структурної теорії Джеффрі [9] в'язкості розведених суспензій неброунівських еліпсоїдальних частинок дає переваги, оскільки дозволяє знаходити феноменологічні сталі $a_i\left(i = \overline{0,8}\right)$ реологічного рівняння (1) для напруження у розведеній суспензії еліпсоїдальних частинок ще до вивчення їх динаміки, яка є різною в залежності від розмірів частинок і їх фізичних характеристик, а також в залежності від системи сил, які визначають динаміку таких частинок у несучій рідині суспензії. І хоча у даній роботі еліпсоїдальні зважені частинки суспензії є магнітними, а в роботі [6] вони магнітно нейтральні, застосування методики структурно-феноменологічного підходу при знаходженні феноменологічних коефіцієнтів $a_i\left(i = \overline{0,8}\right)$ реологічного рівняння (1) для розведеної суспензії магнітних еліпсоїдальних частинок з використанням динамічного методу Ландау [8] приводить до однакових з [6] результатів. Феноменологічні сталі $a_i\left(i = \overline{0,8}\right)$ визначального рівняння (1), як і в [6], отримуються у вигляді

$$a_0 = -p,\quad a_1 = \frac{2\mu V\left(\beta_0'' - \alpha_0''\right)}{3ab^4\beta_0''\alpha_0'},\quad a_2 = 0,$$

$$a_3 = \frac{2\mu V}{ab^2}\left[\frac{\alpha_0'' + \beta_0''}{b^2\alpha_0'\beta_0''} - \frac{2\left(\alpha_0 + \beta_0\right)}{\beta_0''\left(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0\right)}\right],$$

$$a_4 = 2\mu\left(1 + \frac{V}{ab^4\alpha_0'}\right),$$

$$a_5 = \frac{4\mu V}{ab^2}\left(\frac{\beta_0}{\beta_0''\left(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0\right)} - \frac{1}{2b^2\alpha_0'}\right),$$

$$a_6 = \frac{4\mu V}{ab^2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0''\left(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0\right)} - \frac{1}{2b^2\alpha_0'}\right),$$

$$a_7 = \frac{4b^2\mu V}{ab^2\left(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0\right)},$$

$$a_8 = -\frac{4a^2\mu V}{ab^2\left(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0\right)}. \qquad (3)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

де p - тиск; μ - динамічний коефіцієнт в'язкості несучої рідини суспензії; V - об'ємна концентрація зважених частинок; α_0, β_0, α_0', β_0', α_0'', β_0'' - функції, які визначені у [9] і обраховані у [6]

$$ab^2\alpha_0 = 2-2A, \quad ab^2\beta_0 = A,$$
$$ab^4\alpha_0' = \frac{2p_0-3A}{4\left(p_0^2-1\right)}, \quad ab^4\beta_0' = \frac{3A-2}{p_0^2-1},$$
$$ab^2\alpha_0'' = \frac{\left(4p_0^2-1\right)A-2p_0^2}{4\left(p_0^2-1\right)}, \qquad (4)$$
$$ab^2\beta_0'' = \frac{2p_0^2-\left(2p_0^2+1\right)A}{p_0^2-1},$$

де $p_0 = a/b$ і

$$A = \frac{p_0^2}{p_0^2-1} - \frac{p_0\ln\left(p_0+\sqrt{p_0^2-1}\right)}{\left(p_0^2-1\right)^{3/2}}$$

для $p_0 > 1$.

Формули (3) і (4) показують, що феноменологічні сталі a_1, a_3, ..., a_8 рівняння (1) залежать тільки від динамічного коефіцієнта в'язкості μ несучої рідини суспензії, об'ємної концентрації V зважених частинок і від осьового відношення p_0 еліпсоїда обертання, який моделює зважені магнітні частинки суспензії.

У рамках структурно-феноменологічного методу, який використовується у даній роботі, визначальне рівняння для внутрішніх мікропараметрів n_i і N_i структурного континууму, що моделює реальну розведену суспензію, одержується із рівняння обертальної динаміки зважених еліпсоїдальних частинок у градієнтних течіях суспензії.

Реологічне рівняння розведеної суспензії неброунівських магнітних еліпсоїдальних мікрочастинок.

У роботі надалі вивчаються розведені суспензії неброунівських еліпсоїдальних магнітних мікрочастинок, тобто частинок, які є нечутливими до впливу броунівського руху на їх обертальну динаміку у градієнтних течіях суспензій. Ефективний радіус $r = \sqrt[3]{ab^2}$ таких частинок згідно з [4] задовольняє умову $r > 4\cdot10^{-6}$ м, а згідно з нерівністю $d << \bar{l}$ - також умову $r << \bar{l}$. Цитовані тут дані про розміри еліпсоїдальних частинок стосуються суспензій, для яких несучою рідиною є вода [4].

Визначальне рівняння для внутрішніх параметрів n_i і N_i структурного континууму, який моделює розведену суспензію таких неброунівських еліпсоїдальних частинок, знаходиться при векторному множенні на вектор n_i рівняння обертального руху зважених неброунівських еліпсоїдальних магнітних частинок у градієнтних течіях суспензії при наявності зовнішнього магнітного поля H_i, яке має вигляд

$$M_i^{(hf)} + M_i^{(mf)} = 0 \qquad (5)$$

без врахування моменту інерції зважених частинок, що є звичайним для реології суспензій. У (5) $M_i^{(hf)}$ і $M_i^{(mf)}$ - кутові моменти гідродинамічних сил і сил, які діють з боку зовнішнього магнітного поля на зважені частинки. Враховуючи, що

$$M_i^{(mf)} = q\varepsilon_{ikm}n_k H_m, \qquad (6)$$

а також те, що згідно з [6]

$$\left[M_i^{(hf)}\times n_i\right] = W\left(\lambda\left(d_{ik}n_k - d_{km}n_k n_m n_i\right) - N_i\right), \qquad (7)$$

шукане визначальне рівняння для n_i і N_i отримується у вигляді

$$N_i = \lambda\left(d_{ik}n_k - d_{km}n_k n_m n_i\right) + \frac{q}{W}\left(H_i - n_k H_k n_i\right). \qquad (8)$$

У (6) - (8) ε_{ikm} - тензор Леві-Чівіта; $\lambda = \left(p_0^2-1\right)/\left(p_0^2+1\right)$; W - коефіцієнт обертального тертя еліпсоїдальної частинки у ньютонівській несучій рідині, який визначається співвідношеннями [10]

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$W = 4\upsilon\mu\left(p_0^4 - 1\right)\left[p_0^2\left(\frac{2p_0^2-1}{2p_0\sqrt{p_0^2-1}}\ln\frac{p_0+\sqrt{p_0^2-1}}{p_0-\sqrt{p_0^2-1}} - 1\right)\right]^{-1},$$

якщо $p_0 > 1$; тут υ - об'єм еліпсоїдальної частинки, $\upsilon = 4\pi ab^2/3$.

Підстановка N_i, яке визначається рівнянням (8), у рівняння (1) з урахуванням (3) дозволяє отримати реологічне рівняння розведеної суспензії неброунівських еліпсоїдальних магнітних мікрочастинок, яка тече при наявності магнітного поля H_i, у вигляді

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(1 + \frac{V}{ab^4\alpha_0'}\right)d_{ij} + 2\mu\frac{V}{ab^2}\left(\frac{\alpha_0''}{b^2\alpha_0'\beta_0''} + \frac{1}{b^2\alpha_0'} - \frac{4}{\beta_0'\left(a^2+b^2\right)}\right)d_{km}\left\langle n_k n_m n_i n_j\right\rangle +$$
$$+ 2\mu\frac{V}{ab^2}\left(\frac{2}{\beta_0'\left(a^2+b^2\right)} - \frac{1}{b^2\alpha_0'}\right)\left(d_{jk}\left\langle n_k n_i\right\rangle + d_{ik}\left\langle n_k n_j\right\rangle\right) + \qquad (9)$$
$$+ \frac{V}{\upsilon}\frac{q}{p_0^2+1}\left(H_j\left\langle n_i\right\rangle - p_0^2 H_i\left\langle n_j\right\rangle\right) + \frac{V}{\upsilon}\lambda q H_m\left\langle n_m n_i n_j\right\rangle.$$

Осереднення у (9) здійснюються за допомогою функції розподілу F, яка згідно з (2) і (8) визначається рівнянням

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_i}\left(F\left(\omega_{ik}n_k + \lambda\left(d_{ik}n_k - d_{km}n_k n_m n_i\right) + \frac{q}{W}\left(H_i - n_k H_k n_i\right)\right)\right) = 0.$$

Магнітореологічна поведінка розведених суспензій неброунівських еліпсоїдальних магнітних частинок.

Вивчення обертального руху неброунівських еліпсоїдальних магнітних частинок у простій зсувній течії $v_x = 0, v_y = Kx, v_z = 0 (K - const)$ суспензії при наявності зовнішнього магнітного поля $H_x = H, H_y = H_z = 0 (H - const)$ за допомогою рівняння (8) показує, що такі частинки під дією гідродинамічних сил і сил, які діють з боку магнітного поля, обертаються з кутовою швидкістю $\omega_i = \{\dot{\phi}, \dot{\theta}\}$

$$\dot{\phi} = \frac{K}{2}\left(1 + \lambda\cos 2\varphi\right) - \frac{qH}{W}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}, \qquad (10)$$

$$\dot{\theta} = \frac{K}{4}\lambda\sin 2\varphi\sin 2\theta + \frac{qW}{H}\cos\varphi\cos\theta, \qquad (11)$$

де φ і θ - кути сферичної системи координат, в якій $n_x = \cos\varphi\sin\theta, n_y = \sin\varphi\sin\theta, n_z = \cos\theta$; тут φ - кут між площиною xOz і площиною, яка проходить через координатну вісь Oz і одиничний вектор n_i; θ - кут між віссю Oz і одиничним вектором n_i. Розв'язання рівнянь (10), (11) і аналіз їх розв'язків показує, що зважені неброунівські еліпсоїдальні частинки можуть зависати стаціонарно під дією гідродинамічних сил і сил зовнішнього магнітного поля у площині зсуву Oxy під кутом φ відносно осі Ox, який визначається рівнянням

$$\alpha\left(\lambda\cos 2\varphi + 1\right) - 2\sin\varphi = 0, \qquad (12)$$

де $\alpha = KW/qH$.

Визначальне рівняння (9) дозволяє обчислити реологічні характеристики такої анізотропної суспензії - характеристичну в'язкість ν,

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\nu \equiv \frac{\mu_a - \mu}{\mu V} = \frac{1}{ab^2}\frac{1}{\beta_0(a^2+b^2)} + \frac{2}{ab^2}\left(\frac{\alpha_0''}{b^2\alpha_0'\beta_0''} + \frac{1}{b^2\alpha_0'} - \frac{4}{\beta_0(a^2+b^2)}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \\ + \frac{2}{\alpha}\frac{a^2-b^2}{ab^2\left(a^2\alpha_0+b^2\beta_0\right)}\cos 2\varphi\sin\varphi, \tag{13}$$

а також різниці нормальних напружень $\sigma_1 \equiv T_{yy} - T_{zz} = K\mu V f_1$ і $\sigma_2 \equiv T_{xx} - T_{zz} = K\mu V f_2$; тут μ_a - ефективна в'язкість суспензії, $\mu_a = \left(T_{xy} + T_{yx}\right)/2K$, а функції f_1 і f_2 мають вигляд :

$$f_1 = \frac{1}{ab^2}\left(\frac{\alpha_0''}{b^2\alpha_0'\beta_0''} + \frac{1}{b^2\alpha_0'} - \frac{4}{\beta_0(a^2+b^2)}\right)\sin 2\varphi\sin^2\varphi + \frac{1}{ab^2}\left(\frac{2}{\beta_0(a^2+b^2)} - \frac{1}{b^2\alpha_0'}\right)\sin 2\varphi + \\ + \frac{2}{\alpha}\frac{a^2-b^2}{ab^2\left(a^2\alpha_0+b^2\beta_0\right)}\sin 2\varphi\sin\varphi, \tag{14}$$

$$f_2 = \frac{1}{ab^2}\left(\frac{\alpha_0''}{b^2\alpha_0'\beta_0''} + \frac{1}{b^2\alpha_0'} - \frac{4}{\beta_0(a^2+b^2)}\right)\sin 2\varphi\cos^2\varphi + \frac{1}{ab^2}\left(\frac{2}{\beta_0(a^2+b^2)} - \frac{1}{b^2\alpha_0'}\right)\sin 2\varphi - \\ - \frac{2}{\alpha}\frac{a^2-b^2}{ab^2\left(a^2\alpha_0+b^2\beta_0\right)}\sin 2\varphi\sin\varphi. \tag{15}$$

Згідно з (13) - (15) ν, f_1 і f_2 є явними функціями від p_0, φ і α. З (12) - (15) випливає, що кожному значенню $\alpha = KW/qH$ відповідає певний кут φ зависання частинок і, як наслідок, - певні значення функцій ν, f_1 і f_2, які при цьому залежать тільки від p_0 (Рис.1).

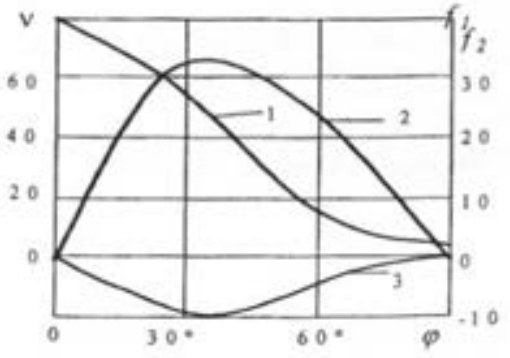


Рис.1 Залежності ν, f_1 і f_2 від φ у випадку, коли неброунівські еліпсоїдальні частинки зависають; $p_0 = 10$; криві 1, 2, 3 відповідають ν, f_1 і f_2.

Одержані результати.

1. Структурно-феноменологічний метод, який було використано у роботі для реологічного моделювання розведеної суспензії магнітних видовжених частинок з неньютонівською несучою рідиною, дозволив зв'язати між собою таку макрохарактеристику, як напруження T_{ij} у градієнтних течіях суспензії, з мікрохарактеристиками суспензії – об'ємною концентрацією V зважених мікрочастинок і осьовим відношенням p_0 видовженого еліпсоїда обертання, що моделює зважені магнітні мікрочастинки суспензії. Сучасною мовою таку теорію характеризують терміном "мікро-макро".

2. Суспензія, що розглядається у роботі, моделюється структурним мікроконтинуумом, у якому є такі звичні для континуального описання рідких середовищ характеристики, як швидкість течії v_i, тензор швидкостей деформації d_{ij}, тензор вихору швидкості ω_{ij}, так і внутрішні мікропараметри – вектор орієнтації n_i зважених частинок та вектор $N_i = \dot{n}_i - \omega_{ik} n_k$, що характеризує їх кутову швидкість відносно несучої рідини суспензії. Побудова реологічної моделі суспензії завершується осередненням виразу, який визначає напруження у суспензії, у

Kyiv National Taras Shevchenko University

тривимірному просторі та у фазовому просторі можливих орієнтацій зважених частинок.

3. Виведення в роботі магнітореологічних рівнянь розведених суспензій неброунівських магнітних еліпсоїдальних мікрочастинок з використанням структурно-феноменологічного методу [6] забезпечує можливість теоретичного вивчення поведінки таких суспензій у довільних градієнтних течіях при наявності зовнішнього магнітного поля.

4. Отримання виразів (3), (4), що визначають феноменологічні сталі $\alpha_i \left(i = \overline{0,8}\right)$ реологічного рівняння (1) для напруження T_{ij}, яке виникає у градієнтних течіях розведених суспензій еліпсоїдальних магнітних мікрочастинок, показує, що система визначальних рівнянь (1), (2) та виразів (3), (4) є універсальною. Вона є однаковою не залежно від того, якими є зважені мікрочастинки суспензії – броунівськими, чи ні, магнітними, чи магнітонейтральними.

5. Застосування визначальних рівнянь (1), (2) та виразів (3), (4) до теоретичного вивчення розведених суспензій еліпсоїдальних неброунівських магнітних частинок забезпечується виведенням визначального рівняння (8) для внутрішніх мікропараметрів n_i та N_i структурного континууму, що моделює реальну розведену суспензію.

6. Явна залежність ефективної в'язкості μ_a цих суспензій, а також першої і другої різниць нормальних напружень σ_1 і σ_2 у простій зсувній течії при наявності поперечного магнітного поля від геометричних характеристик зважених еліпсоїдальних частинок і їх магнітного моменту дозволяє пропонувати одержані в роботі результати як теоретичну модель магнітореологічного експериментального методу знаходження вказаних параметрів зважених неброунівських магнітних частинок суспензій при порівнянні обрахованих і експериментально знайдених значень магнітореологічних характеристик суспензій. Цей метод може бути рекомендований, наприклад, для знаходження параметрів неброунівських агрегатів наночастинок дисперсної фази магнітних рідин.

Список використаних джерел

1. *Krueger D.A.* Review of agglomeration in ferrofluids / D.A.Krueger // IEEE Trans. Magn. – 1980. – **Mag. 16.** – P.251 – 253.
2. *Scholten P.S.* The magnetical and rheological behaviour of aggregating magnetic suspensions / P.S. Scholten, J.A.P. Felius. // J. Magn.: Magn. Mater. – 1990. – **85.** – P. 107 – 113.
3. *Sholten P.S.* The origin of magnetic birefringence and dichroism in magnetic fluids / P.S. Sholten. // IEEE. Trans. Magn. – 1980. -- **Mag-16.** – P.221 – 225.
4. *Peterlin A.* Über die Viskosität von verdünnten Lösungen und Suspensionen in Abhängigkeit von der Teilchenform / A. Peterlin // Z. Physik. -- 1938. – **111.** – S. 232 – 263.
5. *Шмаков Ю.И.* Структурно-континуальный подход в реологии полимерных материалов / Ю.И. Шмаков, Е.Ю. Таран // Инж.-физ. журн. – 1970. -- **18.** – С. 1019 – 1024.
6. *Придатченко Ю.В.* Реологические уравнения состояния слабых растворов полимеров с жесткими эллипсоидальными макромолекулами / Ю.В. Придатченко, Ю.И. Шмаков // ПМТФ. – 1972. – №2. – С.125 – 129.
7. Einstein A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen / A. Einstein // Ann. Physik. – 1906. – **19.** -- S.289 – 306.
8. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10т. Т. VI. Гидромеханика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – Москва: Наука, 1986. – 736с.
9. *Jeffery G.* B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid / G. Jeffery // Proc. Roy. Soc. -- 1922. – **A102.** – P.161 – 169.
10. *Цветков В.Н.* Структура макромолекул в растворах. / В.Н. Цветков, В.Е. Эскин, С.Я. Френкель -- Москва: Наука, 1964. – 720с.

Надійшла до редколегії 15.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 517.9

Фекета П. В., к.ф.-м.н.
Перестюк Ю. М., аспірант

P. V. Feketa, Ph.D.
Yu. M. Perestyuk, Ph.D. student

Про інваріанті тори багаточастотних систем у випадку Лаппо–Данилевського

Встановлено достатні умови існування асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду лінійного розширення динамічної системи на торі у випадку, коли матриця, що входить у систему, комутує зі своїм інтегралом. Запропонований підхід застосовано до дослідження інваріантних множин одного класу розривних динамічних систем.

Ключові слова: функція Гріна–Самойленка, інваріантний тор, лінійне розширення динамічної системи, умова Лаппо–Данилевського.

On invariant tori of multi-frequency systems in Lappo–Danilevskii case

Sufficient conditions for the existence of asymptotically stable invariant toroidal manifold of linear extensions of dynamical system on torus in the case when the matrix of the system commutes with its integral are obtained. The proposed approach applied to the investigation of invariant sets of a certain class of discontinuous dynamical systems.

Keywords: Green–Samoilenko function, invariant torus, linear extension of dynamical system, Lappo–Danilevskii condition

*E-mail: petro.feketa@gmail.com

Статтю представив член редколегії проф. Перестюк М. О.

1 Вступ

Одним з важливих питань теорії багаточастотних коливань є питання існування та стійкості інваріантних тороїдальних многовидів систем диференціальних рівнянь, визначених в прямому добутку тора та евклідового простору. Основи цієї теорії систематично викладені в монографіях [5, 7, 10]. В даній роботі встановлено достатні умови існування асимптотично стійкого інваріантного тору одного класу систем диференціальних рівнянь у випадку Лаппо–Данилевського. При доведенні основної теореми суттєвим чином використані властивості квазіперіодичних функцій [1] та властивості траєкторій динамічної системи на скінченновимірному торі [3, 8].

2 Об'єкт дослідження та основні положення

Основним об'єктом дослідження є система диференціальних рівнянь, визначена в прямому добутку тора $\mathcal{T}_m$ та евклідового простору $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \qquad (1)$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^T \in \mathcal{T}_m$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $P(\varphi)$, $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $C(\mathcal{T}_m)$ — простір неперервних 2π-періодичних по кожній компоненті φ_ν, $\nu = 1, \ldots, m$ функцій, визначених на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$. Функція $a(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ та задовольняє умову Ліпшиця

$$\left\| a(\varphi'') - a(\varphi') \right\| \le L \left\| \varphi'' - \varphi' \right\| \qquad (2)$$

для будь-яких $\varphi', \varphi'' \in \mathcal{T}^m$ та деякої сталої $L > 0$.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого рівняння з (1), який задовольняє початкову умову $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Умова Ліпшиця (2) гарантує існування та єдність такого розв'язку.

Поряд із системою рівнянь (1) розглянемо лінійну систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)), \qquad (3)$$

яка залежить від $\varphi \in \mathcal{T}^m$ як від параметра. Систему рівнянь (3) одержано шляхом заміни φ на $\varphi_t(\varphi)$ в другому рівнянні системи (1). Під інваріантним многовидом $\mathcal{M}$ системи рівнянь (1) ми розуміємо множину, яка визначається функцією $u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ такою, що функція $x(t, \varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь (3) для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}^m$.

Основний підхід до дослідження інваріантних тороїдальних многовидів системи рівнянь (1) базується на понятті функції Гріна–Самойленка задачі про інваріантні тори [6].

©П. В. Фекета, Ю. М. Перестюк, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \tag{4}$$

яка залежить від $\varphi \in \mathbb{T}^m$ як від параметра. Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ матрицант системи (4), який перетворюється в одиничну матрицю при $t = \tau$, тобто $\Omega_\tau^\tau(\varphi) \equiv E$.

Нехай $C(\varphi)$ — матриця з простору $C(\mathcal{T}_m)$. Покладемо

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi)(E - C(\varphi_\tau(\varphi))), & \tau > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Означення 1. *[7] Функція $G_0(\tau,\varphi)$ називається функцією Гріна–Самойленка системи рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x,$$

якщо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G_0(\tau,\varphi)\|\, d\tau$ рівномірно обмежений по φ, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G_0(\tau,\varphi)\|\, d\tau \le K < \infty. \tag{6}$$

Тоді інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь (1) може бути представлений у вигляді

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \quad \varphi \in \mathbb{T}_m.$$

Умова (6) забезпечує збіжність інтеграла, а існування функції Гріна–Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$ є достатньою умовою існування інваріантного тороїдального многовиду системи рівнянь (1).

3 Основні результати

Розглянемо систему рівнянь (1) у випадку, коли матриця $P(\varphi_t(\varphi))$ комутує зі своїм інтегралом (випадок Лаппо–Данилевського [2, гл. II, §13])

$$P(\varphi_t(\varphi)) \int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 = \int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 \cdot P(\varphi_t(\varphi)) \tag{7}$$

для $t \ge \tau$. Тоді

$$\Omega_\tau^t(\varphi) = e^{\int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1} \tag{8}$$

представляє собою матрицант однорідної системи рівнянь (4), залежної від $\varphi \in \mathcal{T}_m$ як від параметра. Дійсно, враховуючи, що

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 = P(\varphi_t(\varphi)), \tag{9}$$

маємо

$$\frac{d}{dt}\Omega_\tau^t(\varphi) = e^{\int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1} P(\varphi_t(\varphi)) =$$

$$= P(\varphi_t(\varphi))e^{\int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1} = P(\varphi_t(\varphi))\Omega_\tau^t(\varphi). \tag{10}$$

Крім того, $\Omega_\tau^\tau(\varphi) = E$.

Зауважимо [4], що (2×2)-матриця вигляду

$$P(\varphi_t(\varphi)) = \begin{bmatrix} p(\varphi_t(\varphi)) & q(\varphi_t(\varphi)) \\ q(\varphi_t(\varphi)) & p(\varphi_t(\varphi)) \end{bmatrix} \tag{11}$$

задовольняє умову Лаппо–Данилевського (7). Дійсно

$$\begin{bmatrix} p_t & q_t \\ q_t & p_t \end{bmatrix} \cdot \int\limits_\tau^t \begin{bmatrix} p_{t_1} & q_{t_1} \\ q_{t_1} & p_{t_1} \end{bmatrix} dt_1 =$$

$$= \int\limits_\tau^t \begin{bmatrix} p_t p_{t_1} + q_t q_{t_1} & p_t q_{t_1} + q_t p_{t_1} \\ q_t p_{t_1} + p_t q_{t_1} & q_t q_{t_1} + p_t p_{t_1} \end{bmatrix} dt_1 = \tag{12}$$

$$= \int\limits_\tau^t \begin{bmatrix} p_{t_1} & q_{t_1} \\ q_{t_1} & p_{t_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_t & q_t \\ q_t & p_t \end{bmatrix} dt_1,$$

де $p_t = p(\varphi_t(\varphi))$, $q_t = q(\varphi_t(\varphi))$, $p_{t_1} = p(\varphi_{t_1}(\varphi))$, $q_{t_1} = q(\varphi_{t_1}(\varphi))$.

Теорема 1. *Нехай для будь-яких $t \ge \tau \ge 0$ виконується умова Лаппо–Данилевського (7). Тоді, якщо всі власні значення матриці*

$$A = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 \tag{13}$$

розташовані у лівій півплощині, тобто

$$Re\lambda_j(A) < 0, \quad j = 1,\dots,n, \tag{14}$$

то система рівнянь (1) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид для будь-якої неоднорідності $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Доведення. З умови (7) при $t \geq s \geq 0$ маємо

$$P(\varphi_t(\varphi)) \int_s^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 = \\ = \int_s^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 \cdot P(\varphi_t(\varphi)). \tag{15}$$

Продиференціювавши рівність (15) по s, одержимо $P(\varphi_t(\varphi))P(\varphi_s(\varphi)) = P(\varphi_s(\varphi))P(\varphi_t(\varphi))$. Звідки знаходимо

$$\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 \cdot \frac{1}{s}\int_\tau^s P(\varphi_{t_2}(\varphi))dt_2 = \\ = \frac{1}{s}\int_\tau^t \int_\tau^s P(\varphi_{t_1}(\varphi))P(\varphi_{t_2}(\varphi))dt_2dt_1 = \\ \frac{1}{s}\int_\tau^t \int_\tau^s P(\varphi_{t_2}(\varphi))P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_2dt_1 = \\ = \frac{1}{s}\int_\tau^s P(\varphi_{t_2}(\varphi))dt_2 \cdot \int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1.$$

Переходячи в останній рівності до границі при $s \to \infty$, матимемо

$$\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 \cdot A = A \cdot \int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1. \tag{16}$$

Таким чином, гранична матриця A комутує з інтегралом $\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1$.

Покладемо

$$\frac{1}{t}\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 = A + B(\varphi_t(\varphi)),$$

де $B(\varphi_t(\varphi)) \to 0$ при $t \to \infty$ для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Доведемо, що матриці A і $B(\varphi_t(\varphi))$ комутують. Дійсно, враховуючи співвідношення (16), маємо

$$A \cdot B(\varphi_t(\varphi)) = A \cdot \left[\frac{1}{t}\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 - A\right] = \\ = \frac{1}{t}\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 \cdot A - A^2 = B(\varphi_t(\varphi))A.$$

Матрицант однорідної системи рівнянь (4) матиме вигляд

$$\Omega_\tau^t(\varphi) = e^{\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1} = e^{tA+tB(\varphi_t(\varphi))} = e^{tA}e^{tB(\varphi_t(\varphi))}.$$

Нехай

$$\max_{j=1,\dots,n} Re\lambda_j(A) = \gamma < 0$$

і $\varepsilon > 0$ таке, що $\gamma + 2\varepsilon < 0$.

Доведемо, що існує момент часу $T > 0$, не залежний від $\varphi \in \mathcal{T}_m$, такий, що

$$\|B(\varphi_t(\varphi))\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq T > 0. \tag{17}$$

Позначимо

$$\Omega = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \Omega_\varphi,$$

Ω_φ — ω-гранична множина додатної півтраєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $t \in [0, +\infty)$; $U_\delta(\Omega)$ — δ-окіл множини Ω.

Для довільного початкового значення $\varphi \in \mathcal{T}_m$ розглянемо додатну півтраєкторію $\varphi_t(\varphi)$, $t \in [0, +\infty)$. Так як, починаючи з моменту часу $t = 0$, півтраєкторія $\varphi_t(\varphi)$ знаходиться скінченний час поза фіксованим околом ω-граничної множини Ω_φ, то існує момент $T(\varphi) < +\infty$ такий, що для будь-якого $t \geq T(\varphi)$ півтраєкторія $\varphi_t(\varphi) \in U_\delta(\Omega)$.

Позначимо через T множину всіх моментів часу $T(\varphi)$:

$$\mathrm{T} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{T}^m} T(\varphi)$$

та розглянемо довільну послідовність точок $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ на торі $\mathcal{T}_m$. Кожну з них можна інтерпретувати як початкову для розв'язку $\varphi_t(\varphi_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Для кожної з цих точок існує скінченний момент часу $T(\varphi_i)$. Впорядкуймо послідовність Φ так, щоб $T(\varphi_i) \leq T(\varphi_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots$. Оскільки тор — компактна множина, то з послідовності Φ можна вибрати збіжну підпослідовність

$$\{\varphi_{i_k}\} \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi^* \in \mathcal{T}^m.$$

Тоді існує границя

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_{i_k}) = T(\varphi^*) < \infty.$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Ми показали, що з довільної послідовності точок множини $\overline{\Gamma}$ можна вибрати збіжну підпослідовність. Це означає, що множина $\overline{\Gamma}$ є компактною. А тому існує $\sup \overline{\Gamma} = T < +\infty$. Так як матриця $B(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ і $a(\varphi) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, то для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від φ такий, що $\|B(\varphi_t(\varphi))\| \leq \varepsilon$ для будь-якого $t \geq T$.

Враховуючи (17), одержимо оцінку матрицанта

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| = \|\Omega_0^T(\varphi)\| \cdot \|\Omega_T^t(\varphi)\| \leq$$
$$\leq K \cdot e^{(\gamma+\varepsilon)t} \cdot e^{\varepsilon\|B(\varphi_t(\varphi))\|} \leq Ke^{(\gamma+2\varepsilon)t} \text{ при } t \geq 0, \tag{18}$$

де стала $K = \|\Omega_0^T(\varphi)\| \cdot e^{-(\gamma+2\varepsilon)T} \geq 1$.

З справедливості (18) слідує, що функція

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0 \end{cases} \tag{19}$$

задовольняє оцінку $\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq K_0 e^{-\gamma_0|\tau|}$, $\tau \in \mathbb{R}$ і є функцією Гріна–Самойленка задачі про інваріантні тори. Отже, система рівнянь (1) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид [7, §5], який визначається співвідношенням

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{20}$$

□

Приклад 1. *Нехай задано систему рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$
$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} f_1(\varphi) \\ f_2(\varphi) \end{pmatrix} \tag{21}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_1$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, $f(\varphi) = (f_1(\varphi), f_2(\varphi)) \in C(\mathcal{T}_1)$.

З (12) слідує, що матриця $P(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ задовольняє умову Лаппо-Данилевського (7).

Для динамічної системи $\frac{d\varphi}{dt} = -\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ на торі $\mathcal{T}_1$, ω-гранична множина Ω складається з однієї точки $\varphi = 0$: точка $\varphi = 0$ є нерухомою, а всі інші траєкторії прямують до 0, при $t \to +\infty$. Тому

$$\lim_{t\to\infty} P(\varphi_t(\varphi)) =$$
$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} -\cos(\varphi_t(\varphi)) & \sin(\varphi_t(\varphi)) \\ \sin(\varphi_t(\varphi)) & -\cos(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$A = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$Re\lambda_j A = Re\lambda_j \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0, \quad j = 1, 2,$$

система рівнянь (21) задовольняє умовам теореми 1 та має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.

□

4 Багаточастотні системи з імпульсними збуреннями

Розглянемо застосування вищенаведеного підходу до одного класу диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями [9, 11]. Нехай задано систему диференціальних рівнянь, визначену в $\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$, яка зазнає імпульсних збурень в моменти потрапляння зображуючої точки в задану підмножину фазового простору

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \notin \Gamma, \tag{22}$$
$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi),$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^T \in \mathcal{T}_m$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $P(\varphi), B(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $f(\varphi), g(\varphi) \in C_\Gamma(\mathcal{T}_m)$; $C_\Gamma(\mathcal{T}_m)$ — простір кусково-неперервних 2π-періодичних по кожній компоненті φ_v, $v = 1, \ldots, m$ функцій, визначених на m-мірному торі $\mathcal{T}_m$.

Вважатимемо множину Γ гладким підмноговидом тору $\mathcal{T}_m$ розмірності $m-1$, який визначається рівнянням $\Phi(\varphi) = 0$, де $\Phi(\varphi)$ — неперервна скалярна 2π-періодична по кожній компоненті φ_v, $v = 1, \ldots, m$ функція.

Позначимо через $t_i(\varphi)$, $i \in \mathbb{Z}$ розв'язки рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$, які є моментами імпульсних збурень в системі (22). Вважатимемо, що розв'язки $t = t_i(\varphi)$ існують і

$$\lim_{i\to\pm\infty} t_i(\varphi) = \pm\infty,$$
$$\lim_{T\to\pm\infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p < \infty \tag{23}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

рівномірно по $t \in \mathbb{R}$, де $i(a,b)$ — кількість точок $t_i(\varphi)$ на інтервалі (a,b).

Поряд із системою рівнянь (22) розглянемо лінійну систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)), \quad t \neq t_i(\varphi), \\ \Delta x|_{t=t_i(\varphi)} &= B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x + g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)), \end{aligned} \tag{24}$$

що залежить від $\varphi \in \mathcal{T}_m$ як від параметра. Ми одержали систему (24) замінюючи φ на $\varphi_t(\varphi)$ в другому та третьому рівняннях системи (22). Під інваріантною тороїдальною множиною системи рівнянь (22) ми розуміємо множину, визначену кусково-неперервною функцією $u(\varphi) \in C_\Gamma(\mathcal{T}_m)$ такою, що функція $x(t,\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь (24) для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}^m$.

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(\varphi_t(\varphi))x, \quad t \neq t_i(\varphi), \\ \Delta x|_{t=t_i(\varphi)} &= B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x, \end{aligned} \tag{25}$$

яка залежить від $\varphi \in \mathcal{T}^m$ як від параметра. Позначимо через $X_\tau^t(\varphi)$ матрицант системи (25), який перетворюється в одиничну матрицю при $t = \tau$, тобто $X_\tau^\tau(\varphi) \equiv E$.

Нехай $C(\varphi)$ — матриця, що належить простору $C_\Gamma(\mathcal{T}_m)$. Покладемо

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} X_0^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0, \\ -X_0^0(\varphi)(E - C(\varphi_\tau(\varphi))), & \tau > 0. \end{cases}$$

Означення 2. *Функція $G_0(\tau,\varphi)$ називається функцією Гріна–Самойленка системи рівнянь*

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(\varphi)x, \quad \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi\in\Gamma} &= B(\varphi)x \end{aligned}$$

якщо

$$\|X_\tau^t(\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \quad t,\tau \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

для деяких $K \geq 1$, $\gamma > 0$.

Тоді інваріанта тороїдальна множина системи рівнянь (22) може бути представлена у вигляді

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \sum_{-\infty<t_i(\varphi)<\infty} G_0(t_i(\varphi)+0,\varphi)g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)), \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Умови (23), (26) забезпечують збіжність інтеграла та суми, а існування функції Гріна–Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$ є достатньою умовою для існування інваріантної тороїдальної множини системи рівнянь (22).

Теорема 2. *Нехай в системі рівнянь (22) матриця $P(\varphi)$ задовольняє умову Лаппо-Данилевського (7) для будь-яких $t \geq \tau \geq 0$ і рівномірно по $t \in \mathbb{R}$ існує скінченна границя (23). Тоді, якщо*

$$\gamma + p\ln\alpha < 0, \tag{27}$$

де

$$\gamma = \max_{j=1,\dots,n} Re\lambda_j(A), \quad A = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi))dt_1,$$

$$\alpha^2 = \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\max_{j=1,\dots,n}\lambda_j((E+B(\varphi))^T(E+B(\varphi))),$$

то система рівнянь (22) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину.

Доведення. Матрицант системи рівнянь з імпульсними збуреннями (25) може бути представлений у вигляді [11]

$$X_0^t(\varphi) = \Omega_{t_i(\varphi)}^t \times \prod_{0<t_j(\varphi)<t_i(\varphi)} (E + B(\varphi_{t_j(\varphi)}(\varphi)))\Omega_{t_{j-1}(\varphi)}^{t_j(\varphi)}, \tag{28}$$

де $t_0(\varphi) = 0$, $t_i(\varphi) < t \leq t_{i+1}(\varphi)$. В силу виконання умови Лаппо-Данилевського (7), для матрицанту $\Omega_\tau^t(\varphi)$ системи без імпульсних збурень справедлива оцінка

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq Ke^{(\gamma+2\varepsilon)t} \quad \text{при} \quad t \geq 0,$$

для деякого $K \geq 1$. Тоді

$$\|X_0^t(\varphi)\| \leq Ke^{(\gamma+2\varepsilon)t}\alpha^{i(0,t)} \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

З існування скінченної границі (23) випливає, що для будь-якого $\varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $K_2 = K_2(\varepsilon_2) \geq 1$, при якому $\alpha^{i(0,t)} \leq K_2e^{(\varepsilon_2+p\ln\alpha)t}$. Звідки одержимо оцінку матрицанта

$$\|X_0^t(\varphi)\| \leq K \cdot K_2e^{(2\varepsilon+\varepsilon_2+\gamma+p\ln\alpha)t} \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Враховуючи (27) та вибираючи ε та ε_2 настільки малими, щоб $2\varepsilon+\varepsilon_2+\gamma+p\ln\alpha<0$, одержимо

$$\|X^t_\tau(\varphi)\| \le K_1 e^{-\gamma_1 t} \tag{29}$$

для будь-якого $t\ge 0$ та деяких $K_1\ge 1$, $\gamma_1>0$. З справедливості (29) слідує, що функція

$$G_0(\tau,\varphi)=\begin{cases} X^0_\tau(\varphi), & \tau\le 0,\\ 0, & \tau>0\end{cases} \tag{30}$$

є функцією Гріна–Самойленка задачі про інваріантні тори. Отже, система рівнянь (22) має асимптотично стійкий інваріантний тороідальний многовид, який визначається співвідношеннями

$$x=u(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0} X^0_\tau(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau+$$
$$+\sum_{-\infty<t_i(\varphi)<0} X^0_{t_i(\varphi)+0}(\varphi)g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)),\varphi\in\mathcal{T}_m.$$

□

Зауважимо, що умови теореми 2 можна послабити, вимагаючи виконання нерівності (27) лише на ω-граничній множині Ω, а не на всьому торі $\mathcal{T}_m$. Тобто, обмежуючися тим, що

$$\alpha^2=\sup_{\varphi\in\Omega}\max_{j=\overline{1,n}}\lambda_j((E+B(\varphi))^T(E+B(\varphi))).$$

5 Висновки

В роботі доведено аналог теореми про існування асимптотично стійкого розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь у випадку Лаппо-Данилевського. Запропонований в [2, гл. II, §13]) підхід застосовано до задачі про інваріантні тори багаточастотних систем. Враховуючи те, що для квазіперіодичної функції $F(t)$ завжди існує середнє значення, формулювання аналогу теореми стало ще більш простим.

Список використаних джерел

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольський Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — К.: Наукова думка, 1969.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — Наука, 1967.
3. *Дудзяний С. І., Перестюк М. О.* Про стійкість тривіального інваріантного тора одного класу систем з імпульсними збуреннями // Укр. мат. журн. — 1998. — т. 50, № 3. — с. 338-349.
4. *Еругин Н. П.* Приводимые системы. — Труды Матем. ин-та АН СССР, 1946. — XIII.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. — К.: Наукова думка, 1992. — 272 с.
6. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. — Т. I: Аналитические методы. — К.: ИМ АН УССР, 1970.
7. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987.
8. *Perestyuk M., Feketa P.* Invariant sets of impulsive differential equations with particularities in ω-limit set // Abstract and Applied Analysis. — 2011. — vol. 2011, Article ID 970469. — 14 pages.
9. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. — Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
10. *Samoilenko A. M.* Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
11. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive Differential Equations. — Singapore: World Scientific, 1995.

Надійшла до редколегії 28.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки 2012, 3 *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 517.9

Яременко М.І., к.ф.-м.н.

N.I.Yaremenko, Ph.D

Дослідження незалежності області визначення локального генератора напівгрупи стиску від фільтруючої множини

Exploration independence the of infinitesimal generator semi-group of contraction from filter of set

Доведено теорему про незалежність області визначення локального генератора напівгрупи стиску від фільтруючої множини.

The theorem about independence the domain of the of infinitesimal generator generator semi-group of contraction from filter of set is proved.

Ключові слова: напівгрупа стиску, локальний генератор,фільтр.

Key Words: semi-group of contraction, infinitesimal generator, filter .

*E-mail: math.kiev@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., М. О. Перестюк

1. Вступ. У даній статті розглядається проблема побудови напівгрупи нелінійних операторів стиску в просторах $L^p(R^1,d^1x)$, $p>2$. Подібна задача була досліджена в гільбертовому просторі Комурою.

В даній роботі зроблено перший крок до побудови нелінійної напівгрупи стиску в просторах $L^p(R^1,d^1x)$, $p>2$, а саме, доведено теорему про незалежність області визначення локального генератора напівгрупи стиску від фільтруючої множини.

2. Попередні відомості. Розглянемо наступну конструкцію. Позначимо через $C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$ простір усіх $L^p(R^1,d^1x)$- значних сильно неперервних функцій на інтервалі $[0,t]$, тобто якщо $u(\cdot)\in C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$, то $u:[0,t]\to L^p(R^1,d^1x)$ і $\lim_{t\to s_0}\|u(s)-u(s_0)\|_{L^p(R^1,d^1x)}=0$, $s_0\in[0,t]$; а через $L=L_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$ – простір усіх $L^p(R^1,d^1x)$- значних, сильно інтегрованих функцій на інтервалі $[0,t]$, тобто якщо $u(\cdot)\in L_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$, то $u:[0,t]\to L^p(R^1,d^1x)$ і $\|u\|_L=\int_0^t\|u(s)\|\,ds<\infty$.

Оператор A визначає відображення $A:L^p(R^1,d^1x)\to L^p(R^1,d^1x)$ [6, 7], яке можна розглядати як (багатозначне) відображення з $C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$ в $L_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$, тобто $C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]\ni u\to\{v\in L_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]: v(s)\in Au(s)$ майже скрізь $\{s\}\}$.

Означення 1. *Відображення* $\tilde{A}$ *називається розширенням відображення* A, *якщо*

$\tilde{A}:C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]\ni u\to$

$\{v\in L_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]:\exists u_n\in D(A)\subset C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t], n\in N,$

$v_n\in Au_n,\ \lim_{n\to\infty}u_n=u,\ \sigma-\lim_{n\to\infty}v_n=v\},$

де $\sigma=\sigma(L_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t], C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t])$ – σ *-слабка топологія в* $L_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$ *відносно* $C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t]$.

Означення 2. *Елемент 1 називається слабким розв'язком узагальненого рівняння*

$$\frac{d}{dt}u(t)\in Au(t),\ u(t)\in L^p(R^1,d^1x),\ t\in[0,t_0],\quad (1)$$

якщо існує послідовність абсолютно неперервних розв'язків $u_n, n\in N$, *таких, що* $\frac{d}{dt}u_n(t)\in Au_n(t), n\in N$, *майже при всіх* $t\in[0,t_0]$ *і* $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ *в* $C_{L^p(R^1,d^1x)}[0,t_0]$.

Нелінійні напівгрупи і локальні генератори. Всюди далі будемо розглядати

© М.І.Яременко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

простір $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ як банаховий із нормою

$$\|f\| = \left(\int_{R^l} |f(x)|^p d^l x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p\left(R^l, d^l x\right).$$

Означення 3. *Одно-параметрична сукупність нелінійних операторів* $\mathrm{T}_t, t \geq 0$, *називається неперервною одно-параметричною напівгрупою стиску, якщо виконуються наступні умови:*

1) для будь-якого фіксованого $t \geq 0$ *оператор* T_t *є неперервним нелінійним оператором, який діє з* $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ *в* $L^p\left(R^l, d^l x\right)$;

2) для будь-якого фіксованого $f \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$ *сімейство елементів* $\mathrm{T}_t f$ *є сильно неперервною за* t.

3) має місце властивість групи: $\mathrm{T}_{t+s} = \mathrm{T}_t \mathrm{T}_s$ *для* $t, s \geq 0$, *причому* $\mathrm{T}_0 = 1$, *де* 1 – *тотожне відображення;*

4) має місце властивість стиску, тобто для всіх $f, g \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$

$$\|\mathrm{T}_t f - \mathrm{T}_t g\|_{L^p\left(R^l, d^l x\right)} \leq \|f - g\|_{L^p\left(R^l, d^l x\right)}.$$

У подальшому таку сім'ю нелінійних операторів $\mathrm{T}_t, t \geq 0$, будемо називати нелінійною напівгрупою стиску в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Тут і надалі, крім випадків відзначених особливо, під нормою розуміємо норму в просторі $L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

Означення 4. *Відображення* $\mathrm{A}: L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$, *взагалі кажучи, багатозначне, називається дисипативним, якщо*

$$\left\langle f - g^*, (f-g)|f-g|^{p-2} \right\rangle \leq 0$$

$$\forall f \in Af, g^* \in Ag, \qquad (2)$$

де Af, Ag – *множина значень відображення* A *елементів* f і g *відповідно.*

Якщо A – однозначний оператор, то умова (2) набуває вигляду

$$\left\langle Af - Ag, (f-g)|f-g|^{p-2} \right\rangle \leq 0$$

$\forall f, g \in \mathbf{1}\ L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

Оскільки ми розглядаємо нелінійні напівгрупи, то, взагалі кажучи, включення $\mathrm{A}_0 \mathrm{T}_t \supset \mathrm{T}_t \mathrm{A}_0$ не виконується. Тут під відображенням $\mathrm{A}_0 : L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$ ми розуміємо наступне відображення:

$$\mathrm{A}_0 f = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h}, \quad f \in L^p\left(R^l, d^l x\right), \qquad (3)$$

яке називається строго інфінітезимальним генератором. Границя в (3) розуміється в сенсі топології, що породжена нормою простору $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Звідси випливає, що не завжди має місце властивість $\mathrm{T}_t f \in D(\mathrm{A}_0)\ \forall f \in D(\mathrm{A}_0)$.

3. Твердження . Якщо оператор A є дисипативним, то розширення $\tilde{A}$ оператора A:

$$\tilde{A} f = \{\tilde{f} : \exists f_n \in D(A) \subset L^p\left(R^l, d^l x\right), f_n \to f$$

сильно і $\exists \tilde{f}_n \in A f_n, \tilde{f}_n \to \tilde{f}$ слабко$\}$, є також дисипативним оператором. Якщо оператор A є максимальним дисипативним, то $\tilde{A} = A$.

Доведення. Якщо $\tilde{f} \in \tilde{A} f$ і $\tilde{g} \in \tilde{A} g$, то, очевидно, маємо

$$\left\langle \tilde{f} - \tilde{g}, (f-g)|f-g|^{p-2} \right\rangle =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\langle \tilde{f}_n - \tilde{g}_n, (f_n - g_n)|f_n - g_n|^{p-2} \right\rangle \leq 0,$$

тобто $\tilde{A}$ є дисипативним оператором.

Доведення рівності $\tilde{A} = A$ очевидно.

Означення 3. Відображення $\mathrm{A}_\phi : L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$, де

$$\mathrm{A}_\phi f = w - \lim_{h \in \phi \to 0} \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h}, \quad f \in L^p\left(R^l, d^l x\right), \qquad (4)$$

називається ϕ-локальним генератором нелінійної напівгрупи $\mathrm{T}_t, t \geq 0$, якщо $\phi = \{\varphi\}$ – максимальний фільтр множин $\varphi \subset (0, \infty)$, що збігається до нуля, за умови, що границя в (4) існує в просторі $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. В (4) "$w - \lim$" розуміємо як границю в сенсі слабкої топології.

4. Теорема (про незалежність області $D(A_\phi)$ від фільтра ϕ).

Область визначення $D(\mathrm{A}_\phi)$ ϕ-*локального генератора* A_ϕ *нелінійної напівгрупи стиску* T_t *не залежить від вибору фільтра* ϕ.

При цьому для будь-якого $f \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$ *виконуються такі властивості:*

$$f \in D(\mathrm{A}_\phi), \qquad (5)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\mathrm{T}_t f \in D(\mathrm{A}_\phi) \quad \forall t \geq 0 \,. \qquad (6)$$

Остання властивість означає, що $\mathrm{T}_t f \in D(\mathrm{A}_\phi)$ *майже для всіх* $t \geq 0$ *і*

$$\mathrm{T}_t f = f + \int_0^t \mathrm{A}_\phi \mathrm{T}_s f ds \,.$$

Доведення. Спочатку доведемо сильну абсолютну неперервність за t відображення $\mathrm{T}_t f$ при будь-якому фіксованому $f \in D(\mathrm{A}_\phi)$, тобто

$$\sup\left\{\sum_{i=0}^{m-1} \| \mathrm{T}_{t_{i+1}} f - \mathrm{T}_{t_i} f \| \,\middle|\, t_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t_0\right\} \leq$$

$$\leq (t_0 - t_a) \lim_{\phi} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| \qquad (7)$$

для будь-якого інтервалу $[t_a, t_b] \subset (0, \infty)$.

Для доведення (7) ми спочатку зафіксуємо довільне розбиття $t_a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t_b$, де $[t_a, t_b]$ – довільний інтервал, що належить $(0, \infty)$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$, внаслідок неперервності $\mathrm{T}_t f$ за t, існує таке δ, що із нерівності $|t - t_j| < \delta$ слідує $\| \mathrm{T}_t f - \mathrm{T}_{t_j} f \| < \varepsilon$.

Виберемо $h_\varepsilon \in \varphi \in \phi$ так, щоб виконувалася умова

$$0 < h_\varepsilon < \delta, \left\| \frac{\mathrm{T}_{h_\varepsilon} f - f}{h_\varepsilon} \right\| \leq \lim_{\phi} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| + \varepsilon \,.$$

Оскільки $h_\varepsilon \in (0, \delta)$, то існує $|n_j h_\varepsilon - t_j| < \delta$. Одержуємо

$$\sum_{j=1}^{m} \| \mathrm{T}_{t_j} f - \mathrm{T}_{t_{j-1}} f \| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\| \mathrm{T}_{t_j} f - \mathrm{T}_{n_j h_\varepsilon} f \| + \| \mathrm{T}_{n_j h_\varepsilon} f - \mathrm{T}_{n_{j-1} h_\varepsilon} f \| + \right.$$

$$\left. + \| \mathrm{T}_{n_{j-1} h_\varepsilon} f - \mathrm{T}_{t_{j-1}} f \| \right) \leq$$

$$\leq 2\varepsilon m + \sum_{j=1}^{m} \| \mathrm{T}_{n_j h_\varepsilon} f - \mathrm{T}_{n_{j-1} h_\varepsilon} f \|$$

$$\leq 2\varepsilon m + \sum_{n=1}^{\left[\frac{t_b - t_a}{h_\varepsilon}\right]+1} \| \mathrm{T}_{nh_\varepsilon} f - \mathrm{T}_{(n-1)h_\varepsilon} f \| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon m + \sum_{n=1}^{\left[\frac{t_b - t_a}{h_\varepsilon}\right]+1} \| \mathrm{T}_{h_\varepsilon} f - f \| \leq$$

$$2\varepsilon m + \sum_{n=1}^{\left[\frac{t_b - t_a}{h_\varepsilon}\right]+1} h_\varepsilon \left(\lim_{\phi} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| + \varepsilon \right) \leq$$

$$\leq 2\varepsilon m + (t_b - t_a + \delta) \left(\lim_{\phi} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| + \varepsilon \right).$$

Оскільки, ε – довільне, а δ можна вибирати як завгодно малим, то (7) доведено.

З (7) випливає, що якщо $f \in D(\mathrm{A}_\phi)$, то виконується співвідношення

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| < \infty \,.$$

І навпаки, із існування скінченної границі

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| < \infty \,,$$

випливає обмеженість в $L_2\left(R^l, d^l x\right)$ множини

$$D(\mathrm{A}_\phi) = \left\{ f : \overline{\lim_{h \to 0}} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| < \infty \right\},$$

що означає компактність цієї множини в слабкій топології.

Враховуючи очевидну нерівність

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left\| \frac{\mathrm{T}_{t+h} f - \mathrm{T}_t f}{h} \right\| \leq \overline{\lim_{h \to 0}} \left\| \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h} \right\| ,$$

одержуємо твердження (5).

Перейдемо до доведення (6). Простір $L^2\left(R^l, d^l x\right)$ – банаховий сепарабельний простір. Із сильної абсолютної неперервності $\mathrm{T}_t f$ за t при довільному фіксованому f випливає сильна обмеженість варіації функції $\mathrm{T}_t f$ як функції t, тобто

$$\operatorname{var} \mathrm{T}_t f < \infty \,. \qquad (8)$$

Введемо поняття лівої похідної $\mathrm{T}_t^- f$ і правої похідної $\mathrm{T}_t^+ f$ за допомогою формул

$$\mathrm{T}_t^- f = \overline{\lim_{h \to 0}} \left\| \frac{\mathrm{T}_{t+h} f - \mathrm{T}_t f}{h} \right\| ,$$

$$\mathrm{T}_t^+ f = \overline{\lim_{h \to 0}} \left\| \frac{\mathrm{T}_{t+h} f - \mathrm{T}_t f}{h} \right\| ,$$

відповідно.

Покажемо, що $\mathrm{T}_t^- f$ і $\mathrm{T}_t^+ f$ майже скрізь скінченні. Скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що $c := \mu(\{t : \mathrm{T}_t^+ f = \infty\}) > 0$, де μ – міра Лебега. Нехай $[0, t_b]$ – довільний інтервал дійсної осі. Побудуємо послідовність вкладених множин, що розширюються,

Kyiv National Taras Shevchenko University

вигляду

$$B_n = \left\{ t : \sup_{h \le \frac{1}{n}} \left(\left\| \frac{T_{t+h} f - T_t f}{h} \right\|_{L^p} \right) \ge \frac{2}{c} var\, T_t f \right\}, \; n \in N.$$

Очевидно, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset \{ t : T_t' f \ge \infty \}$. Тоді існує таке n_0, що $\mu(B_{n_0}) > \frac{c}{2}$. Покладемо:

$$h_i = \sup \left\{ h : \| T_{t+h} f - T_t f \| \ge \frac{2}{c} var\, T_t f \right\},$$

$i \in N$,

де $t_{i+1} = inf \{ t : t \in B_{n_0} \cap \{ t \ge t_i + h_i \} \}$,

$t_1 = inf \{ t : t \in B_{n_0} \}$.

Очевидно, що $\bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, t_i + h_i] \supset B_{n_0}$. Отже

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| T_{t_i+h_i} f - T_{t_i} f \| \ge \frac{2}{c} var\, T_t f \sum_{i=1}^{\infty} h_i \ge$$

$$\ge \frac{2}{c} var\, T_t f \; \mu(B_{n_0}) > var\, T_t f,$$

тобто ми одержали протиріччя з (8), що і доводить рівність

$$\mu(\{ t : T_t' f = \infty \}) = 0. \qquad (9)$$

Аналогічно доводиться рівність

$$\mu(\{ t : T_t' f = -\infty \}) = 0. \qquad (10)$$

З (9) і (10) випливає існування такої множини $K \subset [0, t_0]$, що $\mu(K) = t_0$ і для будь-якого $t \in K$ виконується нерівність

$$\frac{\| T_{t+h} f - T_t f \|}{h} < \infty \text{ для } h > 0,$$

звідки випливає існування сильної похідної $\frac{d}{dt} T_t f$ майже для всіх t.

За визначенням оператора A_θ маємо:

$$\frac{d}{dt} T_t f = A_\theta T_t f.$$

Тоді

$$T_t f - f = \int_0^t \frac{d}{ds} T_s f ds = \int_0^t A_\theta T_s f ds,$$

звідки слідує рівність

$$T_t f = f + \int_0^t A_\theta T_s f ds.$$

Теорему доведено.

5. Висновки. Введені означення для опису розширення нелінійного оператора $A : L^p(R^l, d^l x) \to L^p(R^l, d^l x)$ який є генератором деякої напівгрупи в просторі $L^p(R^l, d^l x)$ та доведено теорему про незалежність області визначення локального генератора напівгрупи стиску від фільтруючої множини.

Список використаних джерел

1. *Дубинский Ю.А.* Нелинейные параболические и эллиптические уравнения / Ю.А. Дубинский // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5 – 130.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
3. *Komura Y.* Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493 – 507.
4. *Kato T.* Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.
5. *Minty G.* Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / G. Minty // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341 – 346.
6. *Yaremenko M.I.* Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi-groups of contraction in L^p / M.I.Yaremenko // Матеріали конференції «Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 15-17 травня 2008 року, Київ». – Київ, 2008. – С. 473.
7. *Yaremenko M.I.* Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi- groups of contraction in L^p / M.I.Yaremenko // Матеріали конференції «International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008). May 12-17, 2008.» – 2008. – С.43.

Надійшла до редколегії 29.05.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Kyiv National Taras Shevchenko University

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 519.7

О.А. Галкін, аспірант

Інтервальна оцінка ОВМ

Досліджена методологія отримання обмежень та оцінок помилки процедури пропуску, що є об'єктивною оцінкою помилки узагальнення. Випадок нероздільності та застосування обмежень на здатність узагальнення ОВМ. Точна оцінка процедури пропуску.

Ключові слова: інтервал, опорний вектор, нероздільність даних,процедура пропуску.

Oleksandr A. Galkin, postgraduate (PhD)

Span estimate of SVM

Methodology is investigated for obtaining bounds and estimates of the error of the leave-one-out procedure that is an objective estimate of generalization error. Non-separable case and the use of bounds on the ability of SVM generalization. Accurate estimation of the leave-one-out procedure.

Key words: span, support vector, non-separable data, leave-one-out procedure.

E-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

Стаття представив: чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

В ідеалі, значення параметрів ядра повинно мінімізувати ризик істинного класифікатора ОВМ. На жаль, оскільки це значення є недоступним, для нього необхідно будувати оцінки або обмеження.

Інтервал множини опорних векторів

Розглянемо спочатку випадок роздільних даних. Припустимо, що:

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

є множиною опорних векторів, а $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0)$ є вектором множників Лагранжа для оптимальної гіперплощини.

Для будь-якого фіксованого опорного вектора x_p, визначимо множину Λ_p, як обмежену лінійну комбінацію точок $\{x_i\}_{i \neq p}$:

$$\Lambda_p = \{ \sum_{i=1, i \neq p}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1, i \neq p}^{n} \lambda_i = 1, \forall i \neq p, \alpha_i^0 + y_i y_p \alpha_p^0 \lambda_i \geq 0 \}.$$

Необхідно зауважити, що λ_i може бути менше 0.

Ми також визначаємо величину S_p, яка називається *інтервалом* [3] опорного вектора x_p та визначає відстань між x_p та наступною множиною (рис. 1):

$$S_p^2 = d^2(x_p, \Lambda_p) = \min_{x \in \Lambda_p} (x_p - x)^2. \qquad (1)$$

Як показано на рисунку 2, може виникнути ситуація, коли $x_p \in \Lambda_p$, звідки випливає:

$$S_p = d(x_p, \Lambda_p) = 0.$$

У цьому випадку, точка x_p є лінійною комбінацією інших опорних векторів, а розширення розділової гіперплощини може не включати цієї точки. Крім того, функція рішення буде незмінною після видалення цієї точки.

Рисунок 1: *Три опорних вектори з* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 / 2$. *Множина* Λ_1 *є напіввідкритою пунктирною лінією:*

$$\Lambda_1 = \{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_2 \geq -1, \lambda_3 \leq 2\}.$$

© О.А. Галкін, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Інтуїтивно зрозуміло, що для невеликих $S_p = d(x_p, \Lambda_p)$, процедура пропуску має менше шансів зробити помилку на векторі x_p. Крім цього, ми доведемо (див. лема 2), що якщо $S_p < 1/(D\alpha_p^0)$ (D - діаметр найменшої сфери, що містить навчальні точки), тоді процедура пропуску класифікує x_p правильно.

Встановлюючи $\lambda_p = -1$, ми можемо записати S_p у вигляді:

$$S_p^2 = \min\{(\sum_{i=1}^{n^*} \lambda_i x_i)^2 : \lambda_p = -1, \sum_{i=1}^{n^*} \lambda_i = 0, \alpha_i^0 + y_i y_p \alpha_p^0 \lambda_i \geq 0\}. \quad (2)$$

Максимальне значення S_p називається *S-інтервалом*:

$$S = \max\{d(x_1, \Lambda_1), ..., d(x_n, \Lambda_n)\} = \max_p S_p.$$

Ми доведемо (див. лема 1), що $S_p \leq D_{SV}$, де D_{SV} є діаметром найменшої сфери, що містить всі опорні вектори. Отже:

$$S \leq D_{SV}. \quad (3)$$

Однак, в залежності від взаємного розташування опорних векторів та $\alpha^0 = (\alpha_1^0, ..., \alpha_n^0)$, значення інтервалу S може бути значно меншим, ніж діаметр D_{SV} опорних векторів. Дійсно, на прикладі рисунку 2, $d(x_1, \Lambda_1) = 0$, а враховуючи симетрію, $d(x_i, \Lambda_i) = 0$, для всіх i. Таким чином, у цьому прикладі $S = 0$.

Випадок нероздільності

Тепер ми узагальнимо поняття інтервалу для випадку нероздільних даних. У цьому випадку, ми будемо розрізняти дві категорії опорних векторів: опорні вектори, для яких:

$$0 < \alpha_i < C, i = 1, ..., n^*$$

та опорні вектори, для яких:

$$\alpha_j = C, j = n^* + 1, ..., n_{sv}$$

Ми визначаємо інтервал опорних векторів, використовуючи опорні вектори першої категорії. Це означає, що розглядається значення $S_p = d(x_p, \Lambda_p)$, де

$$\Lambda_p = \{\sum_{i=1, i \neq p}^{n^*} \lambda_i x_i : \sum_{i=1, i \neq p}^{n^*} \lambda_i = 1, \forall i \neq p, 0 \leq \alpha_i^0 + y_i y_p \alpha_p^0 \lambda_i \leq C\}. \quad (4)$$

Відмінність у визначенні інтервалу для випадків роздільності та нероздільності в тому, що у випадку нероздільності ми ігноруємо опорні вектори другої категорії та додаємо верхню границю C в обмеженнях на λ_i.

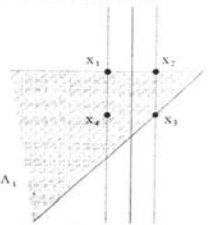


Рисунок 2: $x_1 \in \Lambda_1$, *тому* $d(x_1, \Lambda_1) = 0$. *Множина* Λ_1 *обчислюється, використовуючи* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Отже, у випадку нероздільності [2], значення інтервалу опорних векторів залежить від значення C. Однак, не є очевидним те, що множина Λ_p є не порожньою. Це доведено в наступній лемі.

Лема 1. *Як у випадку роздільності, так і у випадку нероздільності, множина* Λ_p *є не порожньою. Більш того,* $S_p = d(x_p, \Lambda_p) \leq D_{SV}$ *є діаметром найменшої сфери, що містить опорні вектори першої категорії.*

Обмеження

У цьому розділі представлені нові обмеження на здатність узагальнення ОВМ. Ідея полягає в тому, що обмеження будуть залежати від інтервалу опорних векторів, які дають більш жорсткі обмеження в залежності від діаметру навчальних точок [4].

Kyiv National Taras Shevchenko University

Перш за все, введемо наш фундаментальний результат:

Лема 2. *Якщо в процедурі пропуску, опорний вектор x_p, що відповідає $0 < \alpha_p < C$, розпізнається неправильно, тоді нерівність*

$$\alpha_p^0 S_p \max(D, 1/\sqrt{C}) \geq 1$$

є справедливою.

Попередня лема приводить до наступної теореми для випадку роздільності:

Теорема 1. *Припустимо, що ОВМ розділяє навчальні дані розміру n без помилок. Тоді, число помилок, допущених в процедурі пропуску, обмежено наступним чином:*

$$\frac{SD}{M^2}.$$

Доведення. Припустимо, що по процедурі пропуску проведена неправильна класифікація опорного вектора x_p. Тоді лема 2 дає $\alpha_p^0 S_p D \geq 1$ (тут ми розглядаємо випадок роздільності та $C = \infty$) та нерівність

$$\alpha_p^0 SD \geq 1$$

є справедливою. Тепер підсумуємо ліву та праву частини цієї нерівності по всіх опорних векторах, де процедура пропуску робить помилку

$$\ell(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \leq SD \sum_{\bullet} \alpha_i^0 \leq SD \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0.$$

$\sum_{\bullet}$ вказує, що сума береться тільки по опорних векторах, де процедура пропуску робить помилку.

Дійсно, з умов Куна – Такера $(\alpha_i^0 [y_i (w_0 \cdot x_i + b_0) - 1] = 0)$ та рівнянь:

$$\frac{\partial L(w,b,\alpha)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i = 0$$

$$\frac{\partial L(w,b,\alpha)}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i x_i = 0,$$

ми маємо:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 [y_i (w_0 \cdot x_i + b_0) - 1] = w_0^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0. \quad (5)$$

Оскільки поле $M = 1/\|w_0\|$, ми отримуємо:

$$\ell(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \leq \frac{SD}{M^2}. \quad \square$$

Для випадку нероздільності, справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. *Кількість помилок, допущених процедурою пропуску, обмежена*

$$S \max(D, 1/\sqrt{C}) \sum_{i=1}^{\hat{}} \alpha_i^0 + m,$$

де сума береться тільки по таких α_i, що відповідають опорним векторам першої категорії (для яких $0 < \alpha_i < C$), а m є кількістю опорних векторів другої категорії (для яких $\alpha_i = C$).

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 1. Ми розглядаємо всі опорні вектори другої категорії ($\alpha_i = C$) як помилку. Для першої категорії опорних векторів, ми оцінюємо число $\ell^*(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ помилок в процедурі пропуску, використовуючи лему 2, як і в доведенні теореми 1.

Ми отримуємо:

$$\ell(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \leq \ell^*(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) + m$$

$$\leq S \max(D, 1/\sqrt{C}) \sum_{\bullet} \alpha_i + m.$$

Необхідно зауважити, що у випадку, коли $m = 0$ (випадок роздільності), рівність (5) є справедливою. У цьому випадку (за умови, що C є досить великим), обмеження, отримані в цих двох теоремах, збігаються.

Значення інтервалу S може бути набагато меншим, ніж діаметр. Крім цього, в теоремах 1 і 2, використовуючи нерівність (3), можна обмежити значення інтервалу S по діаметру найменшої сфери, що містить опорні вектори D_{SV}. Однак, відповідно до результатів експерименту, це може призвести до послаблення обмежень, оскільки інтервал може бути набагато меншим, ніж діаметр.

Точна оцінка процедури пропуску

Відповідно до доведення леми 2, діаметр навчальних точок D можна замінити на інтервал опорних векторів *після* процедури пропуску. Однак, оскільки множина опорних векторів після процедури пропуску є невідомою, ми обмежили цей невідомий інтервал по D. Тим не менш, це зауваження стало мотивацією проаналізувати випадок, коли множина опорних векторів

Kyiv National Taras Shevchenko University

залишається незмінною протягом процедури пропуску.

У цій ситуації ми маємо право замінити D на S в лемі 2, а також справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо множини опорних векторів першої та другої категорій залишаться незмінними протягом процедури пропуску, тоді для будь-якого опорного вектора x_p, має місце наступна рівність:*

$$y_p(f^0(x_p) - f^p(x_p)) = \alpha_p^0 S_p^2 \qquad (6)$$

де f^0 та f^p є функціями рішення, заданими ОВМ під час тестування на всій навчальній множині та після того, як точка x_p була видалена.

Зауважимо, що при такому припущенні, вираз множини Λ_p (4), який визначає значення $S_p = d(x_p, \Lambda_p)$, може бути спрощений до

$$\Lambda_p = \{ \sum_{i \neq p, 0 < \alpha_i^0 < C} \lambda_i \Phi(x_i), \sum_{i \neq p} \lambda_i = 1 \}. \qquad (7)$$

Теорема 3 призводить до кількох зауважень.

1. Припущення про те, що множина опорних векторів не змінюється під час процедури пропуску, може бути неправильним. Тим не менш, пропорція точок, які порушують це припущення, як правило, є малою в порівнянні з кількістю опорних векторів. У цьому випадку, теорема 3 забезпечує відповідне наближення результату процедури пропуску.

2. Теорема 3 є більш потужною, ніж лема 2 з трьох причин: термін $S_p \max(D, 1/\sqrt{C})$ стає S_p^2, нерівність виявляється рівністю, а результат є справедливим для будь-якого опорного вектора.

3. З доведення теореми 3 випливає, що якщо розглядати розширення $x^* = \sum \lambda_i x_i \in \Lambda_p$ точки мінімізації відстані між x_p та Λ_p, тоді оптимальний розв'язок після видалення x_p стає $\alpha_i^p = \alpha_i^0 + y_i y_p \alpha_i^0 \lambda_i$. Це дає нову інтуїтивну інтерпретацію коефіцієнтів λ_i для визначення інтервалу: вони вимірюють зміни в α після видалення точки x_p з навчальної множини.

Нарешті, попередня теорема дозволяє обчислити число помилок, допущених процедурою пропуску:

Наслідок 1. Використовуючи припущення теореми 3, передбачення тестової помилки в процедурі пропуску визначається наступним чином:

$$t_n = \frac{1}{n} \ell(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) = \frac{1}{n} Card\{p : \alpha_p^0 S_p^2 \geq y_p f^0(x_p)\}. \qquad (8)$$

Практичне обчислення інтервальної оцінки

Як буде показано в експериментах, інтервальна оцінка (8) дає дуже точну оцінку помилки пропуску. Однак, при стандартному виконанні, обчислення інтервалу S_p включає в себе мінімізацію та виконує $O(n^3)$ операцій. Крім того, загальна складність є $O(n^4)$, яка є такою ж, як складність явного виконання процедури пропуску.

Тим не менш, ще однією перевагою робити припущення, що множина опорних векторів є незмінною, є те, що обмеження нерівності, що входять у визначення (4) Λ_p, більше не потрібні для отримання спрощеного виразу (7). Як наслідок, можна обчислити інтервальну оцінку (8), використовуючи $O(n^3)$ операцій.

Як і раніше, ми припускаємо, що навчальні точки впорядковані таким чином, що $0 < alpha_i^0 < C$ для $i = 1, ..., n^*$, $\alpha_i^0 = C$ для $i = n^* + 1, ..., n_m$ та $\alpha_i^0 = 0$ для $i = n_m + 1, ..., n$.

Інтервал опорного вектора x_p визначається як відстань між точкою $\Phi(x_p)$ та множиною Λ_p, що визначається по (7). Тоді значення інтервалу можна записати у вигляді:

$$S_p^2 = \min_{\lambda} \max_{\mu} (\Phi(x_p) - \sum_{i \neq p}^{n^*} \lambda_i \Phi(x_i))^2 + 2\mu(\sum_{i \neq p}^{n^*} \lambda_i - 1).$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Ми ввели множник Лагранжа μ для забезпечення дотримання обмежень $\sum \lambda_i = 1$.

Нехай K^* є $n^* \times n^*$ матрицею скалярних добутків між опорними векторами першої категорії та $\tilde{K}_{SV}$ розширеною матрицею

$$\tilde{K}_{SV} = \begin{pmatrix} K & * & 1 \\ 1^T & & 0 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, нехай $\tilde{\lambda}$ буде розширеним вектором $(\lambda^T \mu)^T$.

Визначимо особливість характеру x_p:

Опорний вектор першої категорії

$$(0 < \alpha_p^0 < C, p \le n^*)$$

Значення інтервалу можна записати у вигляді:

$$S_p^2 = \min_{\lambda} \max_{\mu} (K(x_p, x_p) - 2v_p^T \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^T \mathrm{H}_p \tilde{\lambda}),$$

де H_p є підматрицею $\tilde{K}_{SV}$ з видаленим рядком та стовпцем p, а v_p є p-м стовпцем $\tilde{K}_{SV}$.

Оскільки оптимальне значення $\tilde{\lambda}$ є $\mathrm{H}_p^{-1} v_p$, ми маємо:

$$S_p^2 = K(x_p, x_p) - v_p^T \mathrm{H}^{-1} v_p \qquad (9)$$

$$= 1/(\tilde{K}_{SV}^{-1})_{pp}. \qquad (10)$$

Остання рівність випливає з наступного перетворення:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A^T \\ A & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & B^T \\ B & B_2 \end{pmatrix},$$

де $B_1 = (A_1 - AA_1^{-1}A^T)^{-1}$.

Опорний вектор другої категорії

$$(\alpha_p^0 = C, n^* < p \le n_m)$$

Аналогічне одержання призводить до модифікованої версії рівняння (10),

$$S_p^2 = K(x_p, x_p) - v_p^T \tilde{K}_{SV}^{-1} v_p,$$

де v_p є вектор розмірності $n^* + 1$, де i-й елемент є $K(x_p, x_i)$, а останній елемент дорівнюватиме 1.

Відсутність опорного вектора

$$(\alpha_p^0 = 0, p > n_m)$$

У цьому випадку, відомо, що $f^p(x_p) = f^0(x_p)$. Це також є прямим наслідком теореми 3, оскільки $\alpha_p^0 = 0$. Обчислення інтервалу цієї точки не є обов'язковим, оскільки процедура пропуску не робитиме помилку на цій точці.

Замкнута форма, яку ми отримуємо, є особливо привабливою, оскільки ми можемо обчислити значення інтервалу для кожного опорного вектора тільки шляхом інвертування матриці $\tilde{K}_{SV}$.

Результати експерименту

Попередні обмеження на здатність узагальнення опорних векторів включали діаметр найменшої сфери, що містить навчальні точки [4]. Ми показали (див. нерівність (3)), що інтервал S є завжди меншим, ніж цей діаметр, однак для отримання підтверджених, були проведені декілька експериментів. Спочатку, ми порівнювали діаметр найменшої сфери, що містить навчальні точки, діаметр найменшої сфери, що містить опорні вектори, а також інтервал опорних векторів з використанням множини даних.

Ця множина даних складається з 7291 цифр розміром 16x16 з тестовою множиною на 2007 прикладів. Ми розділили навчальну множину на 23 підмножини, що містять 317 навчальних прикладів. Наша задача полягала в тому, щоб розділити цифри 0-4 від 5-9. Помилкові бар'єри на рисунку 3 є стандартними відхиленнями в 23 дослідженнях. Діаметри та інтервал на рисунку 3, побудовані для різних значень σ, а ширина використовуваного нами радіального ядра:

$$K(x, y) = e^{\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2}}.$$

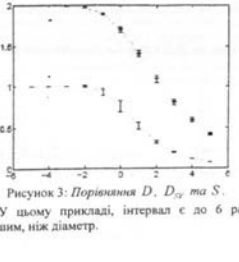


Рисунок 3: *Порівняння D, D_{SV} та S.*

У цьому прикладі, інтервал є до 6 разів меншим, ніж діаметр.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Тепер ми використовуємо інтервал для точного прогнозування тестової помилки. Це дозволить нам проводити вибір ефективної моделі, тобто вибирати оптимальні значення параметрів ОВМ. Важливо зауважити, що інтервал S визначається як максимум $S = \max_p S_p$, тому урахування різних значень S_p повинно забезпечити більш точну оцінку помилки узагальнення, ніж лише інтервал S. Таким чином, ми використали правило інтервалу (8) для передбачення тестової помилки.

В наших експериментах були задіяні дві бази даних: база даних з роздільними даними, що була описана вище та база даних з наявністю шумів. Остання була поділена випадковим чином 100 разів в навчальну множину, що містить 200 прикладів та тестову множину, що містить 77 прикладів. Рисунок 4а порівнює тестову помилку та її передбачення, що задається правилом інтервалу (8) для різних значень ширини радіального ядра σ. Рисунок 4б виводить ті ж функції для різних значень C з множини зашумлених даних. Для цього випадку, використовувалось радіальне ядро з $\sigma^2 = d = 9$.

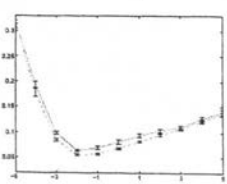


Рисунок 4а: *Вибір σ в базі з роздільними даними*

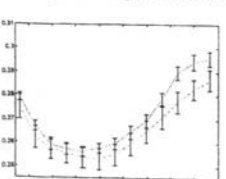


Рисунок 4б: *Вибір C в базі з шумами*

Відповідно до результатів, прогнозування є дуже точним, а криві майже ідентичними.

Наостанок зауважимо, що складність обчислення інтервальної оцінки є $O(N_{SV}^3)$ (N_{SV} є числом опорних векторів, що має таку ж складність, як і стандартне навчання ОВМ.

Висновки

У даній статті досліджена методологія отримання обмежень та оцінок помилки процедури пропуску, що є об'єктивною оцінкою помилки узагальнення. Зокрема, детально проаналізована інтервальна оцінка для мінімізації ризику класифікатора ОВМ та узагальнено поняття інтервалу для випадку нероздільних даних. Крім цього, проаналізована точна оцінка процедури пропуску, де використана можливість заміни діаметра навчальних точок на інтервал опорних векторів після процедури пропуску.

Також у статті представлені результати практичного обчислення інтервальної оцінки. Провівши експерименти із використанням діаметру найменшої сфери, що містить навчальні точки, діаметру найменшої сфери, що містить опорні вектори, а також інтервалу опорних векторів з використанням множини даних, ми отримали можливість проводити вибір ефективної моделі, тобто вибирати оптимальні значення параметрів ОВМ.

Беручи за основу базу даних з роздільними даними та базу даних з зашумленими даними, а також використовуючи правило інтервалу для передбачення тестової помилки, було встановлено, що прогнозування є дуже точним, а криві майже ідентичними.

Список використаних джерел

1. *Bousquet O., and Elissee A.* Stability and generalization. Journal of Machine Learning Research, 2:499-526, 2002.
2. *Guyon I., Canu S., and Boucheron S.* Noise injection: , Theoretical prospects. Neural Computation, 1997.
3. *Vapnik V., and Chapelle O.* Bounds on error expectation for support vector machines. Neural Computation, 12(9), 2000.
4. *Vapnik V.* The Nature of Statistical Learning Theory. Springer, New York, 1995.

Надійшла до редколегії 17.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012,3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 519.6

Галкін О.В., к. ф.-м. н., доц.

Формалізація функціональних мов програмування на основі лямбда числення

У статті розглядається лямбда числення на прикладі мов F# й FP і використання функціональних мов у паралельних обчисленнях.

Ключові слова: функціональне програмування, лямбда числення, мова FP, мова F#.

O.V.Galkin, Ph.D

Formalization of the functional programming languages based on lambda calculus

In this paper we consider the lambda calculus in languages F# and FP and using functional programming languages for the parallel calculations.

Key Words: functional programming, lambda calculus, programming language F#, programming language FP.

E-mail: galkin@unicyb.kiev.ua,

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ

Теорія, покладена в основу функціонального підходу, народилася у 20 -х - 30-х р.р. того ж століття. Розробниками математичних основ функціонального програмування можна назвати Мозеса Шенфінкеля і Хаскелл Каррі, що розробили комбінаторну логіку, а також Алонзо Черча, який описав формальну систему, названу лямбда-численням. Ця система була насправді мовою програмування для уявної машини [1].

Функціональне програмування - це практична реалізація ідей Алонзо Черча [9]. Функціональне програмування, перш за все, має справу з обчисленнями, і використовує функції для виконання обчислень. Перевагами функціонального програмування є:

1. Кожен символ в функціональному програмуванні є константою, отже, ніяка функція не може породжувати побічні ефекти. Неможливо міняти об'єкти ні всередині області видимості, ні зовні. Це означає, що єдиним ефектом від обчислення функції є результат, якій повертає функція, і єдина річ, яка впливає на результат - це значення аргументів.

2. Програма, яка написана на функціональної мові програмування вже готова для виконання в паралельному режимі без додаткових модифікацій. Немає необхідності турбуватися про взаємоблокування і боротьбу за ресурси, тому що просто не буде потрібно використовувати примітиви синхроніза ції.

3. Програма, написана на функціональній мові дозволяє робити гарячу заміну коду, так як у функціональній програмі весь стан зберігається в стеку в аргументах, переданих функціям.

4. Функціональні мови піддаються математичному аналізу. Оскільки функціональна мова - це просто реалізація формальної системи, всі математичні операції, які могли б бути зроблені на папері, також застосовуються до програм, написаним на такої мові.

На сьогоднішній день існує цілий набір функціональних мов (наприклад, KRC [2], SASL [3] та ін), але кожна з функціональних мов програмування має свої особливости. У даній статті розглядаються основи лямбда-числення, а також функціональні мови програмування FP і F #, остання була створена компанією Microsoft для реалізації паралельних обчислень.

Правила лямбда- числення

Лямбда-числення - це числення анонімних (безіменних) функцій. Воно дає, по-перше, метод представлення функцій і, по-друге, множину правил виводу для синтаксичного перетворення функцій [8]. Наприклад, для представлена функції

© О.В. Галкін, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

func x = 2 * x у нотації лямбда-числення, необхідно опустити ім'я функції "func", роблячи її анонімною. Тоді така функція буде мати вигляд: λx .* 2 x. Лямбда - вирази такої форми називаються лямбда-абстракціями. Символ x після λ називається зв'язаною змінною абстракції і відповідає поняттю формального параметра в традиційної процедури або функції. Вираз праворуч від точки називається тілом абстракції, і подібно коду традиційної процедури або функції, воно описує, що треба зробити за параметром, що надійшов на вхід функції.

До функцій в лямбда - нотації можна застосовувати каррінг, тому всі вони мають лише один аргумент. Строго кажучи, це означає, що застосування функцій повинні міститися в дужках, наприклад:

(... (((λx1. λx2. .... λxn.E) x1) x2)... xn).

Однак існує угода, за якою функція застосовується завжди до самого лівому аргументу, і тому дужки навколо кожного вкладеного застосування можна опустити без зміни сенсу виразу:

(λx1. λx2. .... λxn.E) x1 x2. . . xn.

Для обчислень лямбда виразів необхідні правила виведення. Найпростіший тип лямбда-вираза - це константа. Константи є самовизначенням, тобто їх неможливо перетворити в більш прості вирази.

δ - правило. Застосування константної функції, однак, може бути перетворено за наявності достатньої кількості аргументів з використанням вбудованих правил, що і становить суть даного правила. Розглянемо приклад. Нехай є константне вираз:

+ 1 3

Даний вираз може бути перетворено (тобто піддано δ редукції) з урахуванням вбудованого правила: + 1 3 -> 4.

β - правило. Дане правило описує застосування лямбда абстракції. Розглянемо наступне застосування: (λx. x x) 2.

Ситуація аналогічна виклику процедури або функції мови високого рівня з фактичним параметром, який замінює її формальний параметр. У лямбда-численні така заміна є чисто текстової і, таким чином, фізично замінюється всі входження пов'язаної змінної x у тілі застосовуваної лямбда-абстракції на вираження аргументу 2, отримуючи в результаті змінену форму тіла. Отже:

(λx. x x) 2 -> 2 .

Процес називається редукцією в тому сенсі, що в даному випадку спрощується вираз, з нього забирається символ λ і в результаті виходить змінена форма тіла лямбда-абстракції. Редукція абстракції, застосованої до деякого аргументу, може дати в результаті іншу абстракцію, і в цьому випадку процес може бути продовжений.

Редуціруемий вираз називається редексом, і тому можна зробити висновок, що процес редукції лямбда-виразу складається з редукцій, що застосовуються до редексів до тих пір, поки вираз містить хоча б один редекс.

α - правило. Заміна одного імені змінної на інше і становить суть даного правила. Розглянемо приклад:

(λx. (λx. x) (1 x)) 1.

Ясно, що x в тілі внутрішньої абстракції (λx.x) і x у виразі аргументу (1 x) - це різні змінні, що мають однакове ім'я. Якщо застосувати цей вислів до аргументу, скажімо 1, то наступне виконання β-редукції буде помилкою:

(λx. (λx.x) (1 x)) 1
-> (λx.1) (+ 1 1)
-> 1.

Таким чином, тут необхідно α - перетворення:

(λx. (λx.x) (1 x)) 1
-> (λx. (λy.y) (1 x)) 1
-> (λy.y) (+ 1 1)
-> (λy.y) 2
-> 2.

η - правило. Дане правило говорить про те, що два вирази:

(λx.Ex) та E еквівалентні за умови, що x не є вільною змінної в E. тому що (λx.Ex) A -> E A для будь-якого виразу A. Таким чином η - перетворення записується (λx.Ex) -> E.

Кажуть, що лямбда-вираз перебуває в нормальній формі, якщо до нього не можна застосувати ніяке правило редукції. Іншими словами, лямбда-вираз - в нормальній формі, якщо він не містить редексів. Нормальна форма, таким чином, відповідає поняттю кінця обчислень у традиційному програмуванні.

У контексті функціональних мов і λ-числення існують два важливих порядку редукцій. Апплікативний порядок редукцій (АПР), який пропонує спочатку перетворювати самий лівий із самих внутрішніх редексов. Нормальний порядок редукцій (НПР), який пропонує спочатку

Kyiv National Taras Shevchenko University

перетворювати самий лівий із самих зовнішніх редексов.

НПР ефективно відкладає обчислення будь-яких редексов всередині виразу аргументу до тих пір, поки це можливо, з розрахунку на те, що таке обчислення може виявитися непотрібним. Стратегія вибору самого лівого із самих зовнішніх редексов наказує тому виконувати підстановку для x у λy.y до будь-якого перетворення виразу аргументу. В результаті за один крок виходить нормальна форма λy.y. АПР, з іншого боку, обчислює вираз аргументу в першу чергу, що в даному випадку приводить до зациклення. Таким чином, НПР та АПР відповідають ледачому і енергійному обчисленню.

Для представлення рекурсії зручно використовувати погляд на рекурсію, при якому рекурсивну функцію можна представляти як функцію, що має саму себе як аргумент. У цьому випадку функція може виявитися пов'язаної з однією з її власних змінних і буде, таким чином, утримувати в своєму тілі посилання на саму себе.

Розглянемо приклад. Нехай є рекурсивна функція в мові Haskell[7]:

```
sum:: Int -> Int
sum n = if n == 0 then 0 else n sum1 (n-1).
```

Це вираз може бути представлено у вигляді λ-абстракції, що має додатковий параметр, який при застосуванні цієї абстракції зв'язується з самою функцією:

SUM = λs.λn.COND (= n 0) 0 (n (s (- n 1))).

Тепер необхідно пов'язати змінну s зі значенням функції SUM. Це можна зробити, використавши спеціальну функцію, яка має назву Y-комбінатор та задовольняє наступному рівнянню: Yf = f (Y f). У також відомий як комбінатор фіксованої точки. Фіксована точка функції f - це вираз, який не змінюється при застосуванні до нього функції f (функція може мати декілька фіксованих точок, наприклад, функція λx.x, має нескінченну множину таких точок). Вираз Yf дає найменшу фіксовану точку функції f.

У загальному випадку рекурсивна функція f з тілом, що задається виразом E, записується в λ-численні в вигляді Y (λf.E) Визначення Y комбінатора має вигляд:

λh. (λx.h (x x)) (λx.h (x x)).

Для того, щоб переконатися в коректності даного представлення розглянемо вираз:

Yf = (λh. (λx.h (x x)) (λx.h (x x))) f

-> (λx.f (x x)) (λx.f (x x))
-> f ((λx.f (x x)) (λx.f (x x)))
= f (Yf).

Концепція функціонального програмування

Функціональне програмування - розділ дискретної математики і парадигма програмування, в якій процес обчислення трактується як обчислення значень функцій в математичному розумінні останніх (на відміну від функцій як підпрограм в процедурному програмуванні) та протиставляється парадигмі імперативного програмування, яка описує процес обчислень як послідовну зміну станів (у значенні, подібному такому в теорії автоматів). При необхідності, у функціональному програмуванні вся сукупність послідовних станів обчислювального процесу представляється явно, наприклад як список.

Функціональне програмування дає можливість обходитися обчисленням результатів функцій, які залежать від вихідних даних і результатів інших функцій, і не передбачають явного зберігання стану програми. Відповідно, не передбачається і зміність цього стану (на відміну від імперативного, де однією з базових концепцій є зміна, що зберігає своє значення і дозволяє змінювати його в міру виконання алгоритму).

На практиці відміну математичної функції від поняття "функції" в імперативному програмуванні полягає в тому, що імперативні функції можуть спиратися не тільки на аргументи, а й на стан зовнішніх по відношенню до функції змінних, а також мати побічні ефекти і змінювати стан зовнішніх змінних. Таким чином, в імперативному програмуванні при виклику однієї і тієї ж функції з однаковими параметрами, але на різних етапах виконання алгоритму, можна отримати різні дані на виході із за впливу на функцію стану змінних. А у функціональному програмуванні при виконанні функції з одними і тими ж аргументами ми завжди отримаємо однаковий результат: вихідні дані залежать тільки від вхідних. Це дозволяє середах виконання програм на функціональних мовах кешувати результати функцій і викликати їх в порядку, який визначається алгоритмом

λ-числення є основою для функціонального програмування, таким чином функціональні

Kyiv National Taras Shevchenko University

мови можна розглядати як "надбудову" над ним.

Як правило, інтерес до функціональних мов програмування, особливо чисто функціональним, був скоріше науковий, ніж комерційний. Однак, такі примітні мови як Erlang, OCaml, Haskell, Scheme (після 1986) а також специфічні R (статистика), Mathematica (символьна математика), J і K (фінансовий аналіз), XSLT (XML) та F# знаходили застосування в індустрії комерційного програмування. Такі широко розповсюджені декларативні мови як SQL і Lex / Yacc містять деякі елементи функціонального програмування, наприклад, вони остерігаються використовувати змінні. Мови роботи з електронними таблицями також можна розглядати як функціональні, тому що в осередках електронних таблиць задається масив функцій, як правило залежать лише від інших осередків, а при бажанні змоделювати змінні доводиться вдаватися до можливостей імперативного мови макросів.

Основні компоненти мови FP

Як вже було сказано у вступі однією з найбільш сильних сторін функціональних мов є те, що вони піддаються формальним перетворенням. Однією з їхніх форм є перетворення програми, що використовує властивість прозорості посилань функціональних програм, щоб «замінити подібне подібним», поліпшивши при цьому характеристики програми під час виконання. Формальні перетворення часто легше висловити, якщо посилання на об'єкти можуть бути видалені з початкової програми, в результаті чого кожна функція редукується до форми, вільної від об'єктів (або вільною від змінних). Тобто концепція мови FP подібна до концепції чистого лямбда числення. У мові FP кожна функція виражається саме таким чином.

FP-система складається з трьох компонентів: об'єктів, примітивів і комбінуючих форм:

а)Об'єкти. Хоча об'єкти є частиною кожної FP-системи, не існує механізму, який дозволяв би функції користувача посилатися на об'єкт безпосередньо; об'єкти з'являються тільки на етапі виконання в якості аргументів і повертаються як результат виклику функції. У FP-системі існують три типи об'єктів, а саме $\perp$, атоми і послідовності. Об'єкт $\perp$ є невизначеним об'єктом і являє собою помилковий стан. Атомом в FP є будь-яка константа базового типу. Набір базових типів, підтримуваних FP-системою, довільний, але зазвичай він включає множину цілих чисел, символи, булеві константи T (true) і F (false), дійсні числа, рядки символів. Послідовність в FP - це симетричний список, що не має типу. Він симетричний в тому сенсі, що для кожної операції, що працює з початком (головою) послідовності, існує симетрична операція, яка працює з кінцем (хвостом) послідовності.

б) Примітиви. Примітивами є заздалегідь визначені функції, які підтримуються безпосередньо реалізацією, а не визначаються явно програмістом. Набір примітивів, підтримуваних FP-системою, довільний.

У FP застосуванця функції f до аргументу x позначається за допомогою символу "двокрапка" f: x. Якщо функція має більше одного аргументу, ці аргументи передаються у формі послідовності. Так, якщо f - це функція від декількох аргументів, то застосування f до аргументів x1, x2, ..., xk записується у вигляді f: <x1 x2, ..., xk>.

в) Комбінуючі форми. Комбінуюча форма (яка має назву також функціональна форма або операція формування програми) - це просто програмна конструкція, тобто будівельний блок, за допомогою якого конструюються нові функції.

У FP існує шість комбінуючих форм: константа, умовний вираз, композиція, конструкція, «застосувати до всіх» і вставка. Варто зауважити, що функції користувача вводяться в FP за допомогою зарезервованого слова def. Наприклад:

def f = ...

визначає функцію f; тіло f виражається за допомогою комбінуючих форм.

1.Константа. Константа в FP - це просто функція, яка при застосуванні до будь-якого визначеного об'єкта завжди дає один і той самий результат. Наприклад,

k: x = k, якщо k не дорівнює $\perp$
= $\perp$, якщо k дорівнює $\perp$.

2.Умовні вирази. Конструкція умовного виразу в FP має наступний синтаксис:

p-> q; p тут p, q і r є функціями. Розглянемо приклад,

(p-> q; r): x = q: x, якщо p: x = T (true)
= r: x, якщо p: x = F (false)

Kyiv National Taras Shevchenko University

=_|_, в іншому випадку.

3.Композіція. У FP композиція двох функцій f і g записується у вигляді f ° g що означає (f ° g): x = f: (g: x).

4.Конструкція. За допомогою конструкцій у FP будуються послідовності. Конструкція з n функцій записується у вигляді [f1, f2, ..., fn] . Результатом застосування такої конструкції до об'єкта x є n-елементна послідовність

[f1, f2, .., fn]: x = <f1:x,f2:x,..,fn:x> .

На завершення, наведемо приклад програми на FP: обчислення n!

def fac = eq0-> 1; * ° [id, fac ° (- ° [id, 1])],

тут id - тотожне перетворення, *-множення.

Варто відзначити, що на сьогоднішній день мова FP активно доповнюється.

Мова F # та паралельне програмування

F # - це функціональна мова програмування загального призначення. Розроблено Доном Саймa в Microsoft Research в Кембриджі. Розповсюджується разом з. NET Framework і Visual Studio як частина Visual Studio 2010.

Синтаксис F # побудований на математичній нотації, а програмування чимось схоже на алгебру, що робить F # схожим на Haskell. Наприклад, коли визначається новий тип, то можете вказати, що змінними цього типу будуть «цілі або рядок». Це виглядає наступним чином:

type myType = IntVal of int | StringVal of string

Мова F # також підтримує конструкції функціонального програмування, наприклад обробку функцій як значень, використання у виразах неіменованим функцій, об'єднання функцій для утворення нових функцій, каррірованние функції і неявне визначення функцій за допомогою часткового застосування аргументів функції, лямбда-вирази.

Функції визначаються за допомогою ключового слова let або, якщо функція рекурсивна, комбінації ключових слів let rec. Наступна конструкція let f x = x + 1 еквівалентна f (x) = x + 1 в алгебрі. У цьому прикладі ім'я функції = f, аргумент = x і належить до типу int, тіло функції = x + 1, значення, що повертається має тип int.

У мові F # всі функції вважаються значеннями(функціональні значення). Приклад функції, яка приймає як аргумент функціональне значення:

let apply1 (transform: int -> int) y = transform y

Тип функціонального значення можна задати за допомогою токена ->. У лівій частині токена знаходиться тип аргументу, а в правій частині – значення, що повертається. У прикладі apply1 є функцією, що приймає функцію transform як аргумент, де transform є функцією, яка приймає ціле число і повертає інше ціле число. Наступний код показує, як використовувати функцію apply1.

let increment x = x + 1

let result1 = apply1 increment 100 / / result1 дорівнює 101

Кілька аргументів розділяються токеном ->, як показано в наступному прикладі.

let apply2 (f: int -> int -> int) x y = f x y

let mul x y = x * y

let result2 = apply2 mul 10 20 / / result2 дорівнює 200.

У попередніх прикладах замість визначення іменованих функцій increment і mul можна було б використовувати лямбда-вирази, як показано нижче.

let result3 = apply1 (fun x -> x + 1) 100 / / result3 дорівнює 101

let result4 = apply2 (fun xy -> x * y) 10 20 / / result4 дорівнює 200 .

Лямбда-вирази визначаються за допомогою ключового слова fun. Лямбда-вираз нагадує визначення функції, за винятком того, що замість токена = для відділення списку аргументів від тіла функції використовується токен ->. Як і в звичайному визначенні функції, типи аргументів можуть виводитися або бути задані явно.

Конвеєризація дозволяє об'єднати виклики функцій на ланцюжок послідовних операцій. Конвеєризація працює таким чином.

let result6 = 100 |> function1 |> function2 / / result6 дорівнює 202 .

Крім того, бібліотека F# підтримує асинхронні робочі процеси для забезпечення паралельних обчислень і механізми для зв'язку між паралельними робочими процесами. Особливості мови F# забезпечують можливість виконання асинхронних обчислень, тобто без блокування інших операцій.

Функція Parallel створює асинхронне обчислення, яке виконує всі задані асинхронні обчислення, спочатку ставлячи кожне з них в чергу в якості робочого елементу і використовуючи шаблон розгалужень і

Kyiv National Taras Shevchenko University

з'єднань. Приклад паралельного обчислення сум:

```
let task1 = async (return 10 +10)
let task2 = async (return 20 +20)
Async.Run (Async.Parallel [task1; task2]) .
```

Існує декілька способів асинхронного програмування, і клас Async надає методи, що підтримують кілька сценаріїв. Загальний підхід полягає в створенні об'єктів Async, що представляють обчислення, які потрібно виконувати асинхронно, з наступним запуском цих обчислень за допомогою однієї з запускаючих функцій. Різні запускаючи функції забезпечують різні способи виконання асинхронних обчислень, і вибір залежить від того, чи потрібно використовувати потік, фоновий потік або об'єкт завдання платформи. NET Framework, а також від того, чи є наступні функції, які повинні виконуватись після завершення поточного обчислення.

Висновки.

Перед сучасним програмування виникла низка складних проблем, насамперед це:

1.Складність навколишнього світу впливає на складність програмних систем.

2.Паралелізм - потреба писати паралельний код, якій різко збільшує складність.

3.Складна система - більша кількість помилок, різко зростає вартість якісного коду. Більш того, актуальність цих проблем швидко зростає з часом.

Функціональне програмування дозволяє ефективно розв'язувати ці проблеми. По-перше, як було зауважено у вступі функціональне програмування має дуже чітку математичну основу. По-друге, відсутність у програмі написаної на функціональної мові оператора присвоєння та циклів робіть таку програму готовою для виконання в паралельному режимі без додаткових модифікацій. По–третє, навіть досить складний код, якій написаний на функціональної мові виглядає досить просто і відлагодження програм досить легке, в силу відсутності побічних ефектів при обчисленні функцій, так як єдина річ, яка впливає на результат - значення аргументів.

В даній статті проаналізовано дві функціональних мов програмування, перша з них мова FP. Дана мова є дуже лаконічною, та дозволяє працювати з об'єктом як з функцією.

Мова F#, була створена на основі мови Haskell, але головна відмінність цієї мови програмування полягає в тому, що вона дуже зручна для паралельного програмування.

Список використаних джерел

1. C Hankin An Introduction to Lambda Calculi for Computer Scientists. College Publications, 2004
2. Turner, D A, 'Recursion equations as a programming language'. In J. Darlington, P. Henderson & D. Turner (eds.), Functional programming and its applications ,1-28, Cambridge University Press,1982
3. Turner, D.A,. The SASL language manual. University of St Andrews, 1976
4. Chris Smith. Programming F #. O'Reilly Media, 2010
5. http://www.intuit.ru/department/pl/funcprog/
6. http://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/dd233154.aspx
7. http://www.haskell.org
8. Баренд регт Х. Лямбда-исчисление. Его семантика. М.:Мир 1985,с.607
9. А.Черч Введение в математическую логику. М.: Из-во иностранной литературы 1960 с.410.

Надійшла до редколегії 17.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 519.8

О.А. Галкіна, аспірантка

Стохастичне програмування у фінансовому моделюванні

У даній роботі представлено стохастичну динамічну проблему фінансового моделювання та, використовуючи метод генерації дерев сценаріїв, проводиться перевірка оптимальності значень заданої математичної моделі, обчислюються втрати та доходи інвестора, виконується перевірка кількісного співвідношення активів на кожному часовому етапі, а також обчислюється значення портфелю для кожного сценарію на відповідному періоді.

Ключові слова: портфель, актив, кореляція, коваріація

Olga A. Galkina, postgraduate (PhD)

Stochastic programming in financial modeling

This paper presents a stochastic dynamic problem of financial modeling and, using the method of scenarios tree generation, the optimal values of the given mathematical model are investigated, losses and gains of the investor are estimated, the proportion of assets at each time period is checked, and the value of the portfolio is calculated for each scenario relevant period.

Key words: portfolio, asset, correlation, covariance

E-mail: o.a.galkina@yandex.ru

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Стохастичне програмування вивчає методи розв'язання задач управління і планування в умовах ризику та невизначеності. Плануючі організації не завжди володіють всією необхідною інформацією для планування господарства або управління виробництвом. Таким чином, в моделях математичного програмування окремі параметри показника якості та обмежень можуть виявитися невизначеними або випадковими. В одних випадках досвід, статистика та використання процесів, що визначають зміни вихідних даних, дозволяють встановлювати ті чи інші ймовірнісні характеристики параметрів задачі. Дані ситуації називаються стохастичними ситуаціями. Якщо ж немає підстав визначити стохастичні закономірності явищ, здатних змінити передбачувані значення параметрів задачі, то такі ситуації називаються невизначеними.

Стохастичне програмування дуже часто використовується у фінансовому моделюванні. Зокрема, існують різні методи вирішення даних моделей. У даній роботі багатоступенева динамічна задача оптимізації вирішується за допомогою методу генерації дерев сценаріїв. Проводиться перевірка оптимальності значень, обчислюються втрати, а також визначається кількісне співвідношення активів на кожному часовому періоді.

Постановка задачі

Розглянемо наступну динамічну стохастичну проблему оптимізації портфеля:

$$\min_{x,z,w,\alpha,y} \alpha + \frac{1}{1-\beta} E(w)$$

$$s.t: w^{(s)} \geq \sum_{i=1}^{I} \left[\sum_{t=1}^{T-1} u_{i,t}^{(s)} + k \left(\sum_{t=1}^{I} z_{i,t}^{(s)} \right) \right] - \alpha, s = 1,...,S$$

$$w^{(s)} \geq 0, s = 1,...,S$$

$$x_{i,t+1}^{(s)} = (1 + \overline{r}_{i,t+1})(x_{i,t}^{(s)} + u_{i,t}^{(s)}) + \xi_{i,t+1}^{(s)}$$

$$i = 1,...I, t = 1,...T, s = 1,...,S$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{I} y_{i,t} \right] \leq lp, t = 1,...T$$

$$y_{i,t}^{(s)} \geq x_{i,t}^{(s)} - x_{i,t}^{sav}, i = 1,...I, t = 1,...,T, s = 1,...,S$$

$$y_{i,t}^{(s)} \geq x_{i}^{sav} - x_{i,t}^{(s)}, i = 1,...,I, t = 1,...,T, s = 1,...,S$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{I} x_{i,t} \right] = \sum_{i=1}^{I} x_{i}^{sav}, i = 1,...,I, t = 1,...T$$

$$z_{i,t}^{(s)} \geq u_{i,t}^{(s)}, i = 1,...,I, t = 1,...T, s = 1,...,S$$

$$z_{i,t}^{(s)} \geq -u_{i,t}^{(s)}, i = 1,...,I, t = 1,...T, s = 1,...,S \quad (1)$$

© О.А. Галкіна, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

, де $E(w) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} w^{(s)}$.

Таблиця 1.

Обмеження моделі (1) на період часу $t = 1,\ldots,T+1$

$t=1$	$t=2$	$t=3$	...	$t=T$	$t=T+1$
$x_{i1}^{(s)} = x_i^{sup}$ $i = 1,\ldots,I$ $s = 1,\ldots,S$	$x_{i2}^{(1)} = \ldots = x_{i2}^{(s/2)}$, $x_{i2}^{(s/2+1)} = \ldots = x_{i2}^{(s)}$ $i = 1,\ldots,I$ $s = 1,\ldots,S$	$x_{i3}^{(1)} = \ldots = x_{i3}^{(s/4)}$ $x_{i3}^{(s/4+1)} = \ldots = x_{in}^{(s/2)}$ $x_{i3}^{(s/2+1)} = \ldots = x_{in}^{(3s/4)}$ $x_{i3}^{(3s/4+1)} = \ldots = x_{in}^{(s)}$ $i = 1,\ldots,I$ $s = 1,\ldots,S$		$x_{iT}^{(1)} = x_{iT}^{(2)}$ $x_{iT}^{(3)} = x_{iT}^{(4)}$ ... $x_{iT}^{(s-1)} = x_{iT}^{(s)}$ $i = 1,\ldots,I$	Вільна

Таблиця 2.

Значення цільової функції для п'яти часових періодів з різною кількістю сценаріїв для двох дерев

T	S	*Рівень розгалуження*	*Кількість дерев*	*Оптимальне значення*
1	2	2	2	-1.9781e-016
2	4	2	2	-148.1969
3	8	2	2	-375.1602
4	16	2	2	-515.0420
5	32	2	2	-789.3312

Таблиця 3.

Значення цільової функції для трьох часових періодів з різною кількістю сценаріїв для трьох дерев

T	S	*Рівень розгалуження*	*Кількість дерев*	*Оптимальне значення*
1	3	3	3	-7.1624e-031
2	9	3	3	-198.3766
3	27	3	3	-368.5640

Kyiv National Taras Shevchenko University

В даній математичній моделі використовуються наступні позначення: $x_{i,t}$ - ємкість активу i за період часу t; $r_{i,t}$ - дохід з активу i за період часу t; $u_{i,t}$ - кількість активу i купленого/проданого за період часу t; x^{tar} - цільовий портфель; $\bar{r} = \bar{E}(r_t)$ - середнє значення доходу; p - параметр відхилення; k - плата за проведення транзакції.

У вигляді нормального розподілу задана опора випадкової змінної ξ :

$$\Xi := \times_{t=1}^{T} \left[\xi_t \in R^1 : (\bar{r} - k\delta) \le \xi_t \le (\bar{r} + k\delta) \right] \quad (2)$$

Втрати можуть бути визначені як:

$$Втрати = \sum_{t=1}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^{I} u_{i,t} + k \left\| u_t \right\|_1 \right] \quad (3)$$

, де $k \in (0,1]$ - плата за проведення транзакції.

Оптимальність

Використовуючи метод генерації дерев сценаріїв, модель (1) розв'язана для п'яти та трьох часових періодів з різною кількістю сценаріїв. Таблиця 2 містить інформацію, отриману при роз'язанні багатоступеневої динамічної задачі оптимізації портфеля для п'яти часових періодів, двох дерев з показником розгалуження: 2.

Таблиця 3 містить інформацію оптимальних значень, що були отримані на трьох часових періодах з трьома деревами та показником розгалуження: 3.

Значення портфелю

На Рис.1 представлено пропорційне співвідношення трьох активів заданого портфелю моделі (1) на різних часових періодах. Так, для кожного активу знаходяться середні значення x_aver серед сценаріїв та обчислюється їх пропорція за наступними формулами:

1. *Для першого активу:*

$$\frac{x_aver_{1o}}{x_aver_{1o} + x_aver_{2o} + x_aver_{3o}}$$

2. *Для другого активу:*

$$\frac{x_aver_{2o}}{x_aver_{1o} + x_aver_{2o} + x_aver_{3o}}$$

3. *Для третього активу:*

$$\frac{x_aver_{3o}}{x_aver_{1o} + x_aver_{2o} + x_aver_{3o}}$$

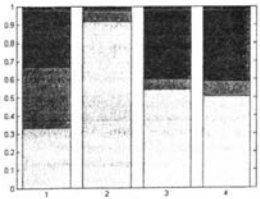


Рис.1 Пропорційне співвідношення активів

На Рис. 2 представлені значення портфелю моделі (1). Вони обчислюються як сумма усіх активів для кожного сценарію на кожному періоді.

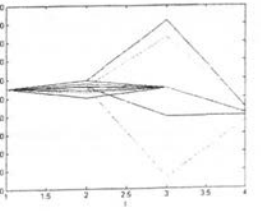


Рис. 2 Значення портфелю

Kyiv National Taras Shevchenko University

Втрати

Як уже було зазначено, втрати можуть бути визначені наступним чином:

$$Втрати_s = \sum_{i=1}^{T-1}\left[\sum_{i=1}^{J} u_{it} + k\left(\sum_{i=1}^{J} z_{it}\right)\right]_s$$

Таким чином, дохід може бути визначено:

$$дохід_s = -втрати_s, \quad s = 1,2,...S$$

На різних часових періодах для п'яти активів та двох дерев обчислюються мінімальні втрати:

Таблиця 4.

Втрати

T	*Втрати_мін*
1	0
2	-434.3700
3	-920.8278

На Рис. 3 представлено залежність рівня доходу від кожного часового періоду. Можна зробити висновок, що рівень доходу збільшується зі зростанням кількості часових періодів.

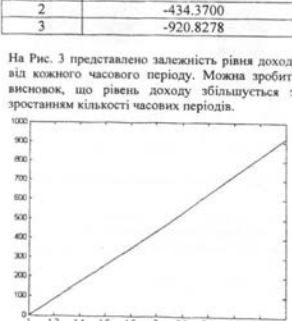


Рис. 3 Дохід

Висновки

Однією важливою галуззю застосування стохастичного програмування є фінансове моделювання. Існують різні методи вирішення даних моделей. У даній роботі, використовуючи метод генерації дерев сценаріїв, проводиться перевірка оптимальності значень заданої математичної моделі, обчислюються втрати та доходи інвестора, проводиться перевірка кількісного співвідношення активів на кожному часовому періоді, а також обчислюється значення портфелю для кожного сценарію на відповідному періоді.

Список використаних джерел

1. B. Defourny, D.Ernst, and L. Wehenkel. Multistage stochastic programming: a scenario tree based approach to planning under uncertainty.
2. F. J. Fabozzi. Robust portfolio optimization and management, (2007), pp.17-111.
3. A. Georghiou, W. Wiesemann, and D.Kuhn. Generalized decision rule approximation for stochastic programming via lifting, (2010).
4. A. Georghio, D. Kuhn, W. Wiesemann. Decision rule approximations for a dynamic portfolio optimization, (2009).
5. D. Huang, Shu-S. Zhu, and F. J. Fabozzi, M. Fukushima. Portfolio selection with uncertain exit time: a robust CVaR approach, (2007), pp.1-36.
6. M. Kaut. Scenario generation for stochastic programming. Presentation, (2006).
7. H.M. Markowitz. Portfolio selection, J. Finance 7, (1952), pp. 77–91.
8. J. Palmquist S. Uryasev and P. Krokhmal. Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk objective and Constraints. Dept.of Industrial and Systems Engineering, (2001).
9. S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications. Financial engineering news, (2000).
10. S. Uryasev R.T. Rockafellar. Optimization of conditional value-at-risk. The Journal of Risk, 2(3):21, 2000.
11. L.-Y. YU, X.-D. JI, and S.-Y. WANG. Stochastic Programming models in finance optimization: a survey. AMO – Advanced modeling and optimization, Volume 5, Number 1, (2003).
12. M.K. Zanjani, M. Nourelfath, and D. Ait-Kadi. Multi-stage stochastic programming approach for production planning with uncertainty in the quality of raw materials and demand, (2009).

Надійшла до редколегії 17.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 049.1

Глибовець М.М., д. ф.-м. н., проф.,
Муженко Я. П., магістр,
Сидоренко М.О, асп.

Алгоритм та онлайн-застосування пошуку осередків зацікавленості за обраною предметною областю

У статті запропоновано рішення задачі пошуку осередків зацікавленості на соціальних веб-сайтів, алгоритм визначення показника рівня зацікавленості користувачів соціального веб-ресурсу з використанням формату представлення даних CDF. Описано створене онлайн-застосування для пошуку осередків зацікавленості в мережі Інтернет.

Ключові слова: пошук осередків зацікавленості, формат обчислювальних даних CDF, соціальний інформаційний пошук.

Mykola M. Glybovets, Doctor (Physics & Mathematics), Professor,
Jana P. Muzhenko, master,
Maryna O. Sydorenko, post-graduate student

Algorithm and online implementation of search of intrest's centers in the chosen subject area

The paper proposes a solution to the problem of finding interest's centers on social websites, algorithm for determination of the level of user's interest's of social web-sites using the format of data presentation CDF. Was described an online application for finding centers of interest in the Internet that was created.

Key words: search of interest's centers, computable document format CDF, social information retrieval.

E-mail: *tinuriel@gmail.com*
Статтю представив чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

Вступ

Традиційні пошукові системи дозволяють знаходити текстову інформацію, зображення, відео та аудіо вміст. Однак вони не надають можливості знаходити саме осередки цільової аудиторії по заданій предметній області. Для вирішення такого завдання необхідно працювати лише із сайтами соціального спрямування. Більше того, окрім пошуку веб-ресурсів, які можна вважати місцем зібрання цільової аудиторії, важливо правильно опрацювати отриману інформацію та представити її у зручному вигляді [1].

Соціальні веб-сайти, можна визначити як такі сайти, що надають можливість людям формувати онлайн-спільноти та ділитись створеним вмістом (user-created contents (UCCs)). Люди можуть бути користувачами інтернету або належати до певних організацій (наприклад, корпорацій, університетів, професійних об'єднань і т.п.). Спільнотою може бути об'єднання «офлайн» друзів (чия дружба поширюється і на інтернет), онлайн знайомих, одної або кількох груп інтересів (на основі хобі, інтересів, національності, статі, віку і т.д.). Вмістом можуть бути фотографії, відео, закладки веб-сторінок, профілі користувачів, оновлення активності користувачів, текст (блог, мікроблог та коментарі) і т. д. Обмін контентом включає, як мінімум, розміщення, перегляд і коментування, а також може включати голосування, зберігання та повторну передачу [2]. До них можна віднести такі відомі сайти як Wikipedia, YouTube, Facebook, Вконтакте.

Нажаль не має загально прийнятої систематики за якою різні соціальні медійні ресурси можна поділити на категорії. Один з підходів до класифікації запропоновано у [3].

Розглянемо задачу пошуку осередків зацікавленості в мережі Інтернет за заданою ключовою інформацією та аналізу представлення отриманої інформації у форматі Computable Document Format (CDF).

Осередки зацікавленості – зібрання людей на сайтах соціального характеру, яких об'єднує інтерес із заданої теми. В якості цільової аудиторії розглянемо осередок зацікавленості друкованого видання.

Уточнимо реалізацію застосування. Необхідно розробити алгоритм пошуку та програмне застосування, користувач якого

© М.М. Глибовець, Я.П. Муженко, М.О. Сидоренко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

зможе внести перелік ключових фраз, що характеризують задане друковане видання, і в результаті отримає перелік сторінок соціальних веб-сайтів які найбільш точно відображають цільову аудиторії для даного продукту в мережі Інтернет. До того ж, користувач має отримувати інформацію про тип кожного веб-ресурсу, ступінь зацікавленості аудиторії і якщо це можливо, то інформацію про відвідуваність сайту та про необхідність реєстрації для потреби залишити повідомлення.

Ступінь зацікавленості – це деякий числовий показник, який характеризуватиме веб-сторінку з точки зору того, наскільки інтереси аудиторії відповідають поставленому запиту. Саме за цим показником відбуватиметься сортування результатів.

Соціальний інформаційний пошук

Інформаційний пошук має справу з представленням, збереженням, організацією і доступом інформації. Представлення та організація інформації має забезпечувати користувача легким доступом до необхідної йому інформації.

Сенс терміну «інформаційний пошук» є дуже широким. Як наукова дисципліна інформаційний пошук може визначатись так. Інформаційний пошук – це процес пошуку у великій колекції (що зберігається, як правило, в пам'яті комп'ютера) деякого неструктурованого матеріалу (зазвичай – документу), який задовольняє зазначені інформаційні потреби [4].

Під «неструктурованим матеріалом» розуміють дані, що не мають ясної, семантично очевидної і легко реалізованої на комп'ютері структури. Проте в реальності, цілком неструктурованих даних практично не існує. Наприклад, звичайні текстові дані мають приховану структуру, характерну для природної мови.

Центральна задача інформаційного пошуку – допомогти користувачеві задовольнити його інформаційну потребу. Опис інформаційної потреби користувача формулюються як деякий запит, що традиційно представляє деякий набір ключових слів, який характеризує те, що шукає користувач.

Класична задача інформаційного пошуку, з якої почався розвиток цієї галузі - це пошук документів, що задовольняють запиту, в рамках деякої статичної колекції документів. Але список завдань інформаційного пошуку постійно розширюється і тепер включає питання моделювання, класифікацію і фільтрацію документів, кластеризація документів, проектування архітектур пошукових систем і користувальницьких інтерфейсів, видобування інформації, зокрема анотування та реферування документів тощо [5].

Існує ряд особливостей, що відрізняють інформаційний пошук в інтернеті від традиційного інформаційного пошуку [6]. Ці відмінності породжені в основному особливостями задання даних у вебі та поведінки користувачів вебу. Веб сторінки використовуються у найрізноманітніший спосіб, чим і ускладнюють інформаційний пошук.

Інший аспект, що відрізняє інформаційний пошук у вебі від традиційного полягає у розумінні потреб користувачів [4]. У традиційному інформаційному пошуку користувачі зазвичай звертались до пошуку в межах професійної діяльності, мали деякий досвід створення запитів до ретельно організованих колекцій, стиль та структуру яких вони чітко розуміли. На противагу цьому користувачі пошукових систем не знають, і часто не хочуть знати, про неоднорідність складу вебу, синтаксис мов запитів та мистецтво створення запитів.

Суттєвим внеском в опис потреб користувачів вебу стала таксономія Бродера [7], вперше презентована на пленарному засіданні TREC-2000 і пізніше опублікована на форумі SIGIR.

За цією таксономією звичайні запити на пошук у вебі можна розділити на три категорії: 1) інформаційні, 2) навігаційні і 3) транзакційні. Цілком очевидно, що одні запити потрапляють більш ніж в одну категорію, а інші не потрапляють в жодну.

Розпізнати до якої з категорій відноситься той чи інший запит інколи буває складно. Категорія запиту може впливати не тільки на результати алгоритмічного пошуку, але і на придатність запиту для показу рекламних оголошень, так як запит може виявити намір здійснити покупку[4].

Навіть за умови, що пошукова система поверне результати, які максимізують корисність для користувачів, певна кількість людей все ж може отримати неправильний результат.

Персоналізація пошуку є спробою забезпечити результати пошуку спеціально для конкретного користувача. Пошукова система може відслідковувати взаємодію користувача через кукі браузерів, пошукові логи і може

Kyiv National Taras Shevchenko University

використовувати ці дані для боротьби із двозначностями і розширювати запити на основі інтересів користувача. Це вже є ознаками соціальних пошукових систем.

Інформаційний пошук у вебі можна розглядати як одиничний пошук інформації однією особою через веб-браузер. Проте, досить часто пошук інформації тісно пов'язаний із соціальною взаємодією.

Дослідники і фахівці використовують термін соціальний пошук, щоб описати пошукові системи, які займаються соціальними взаємодіями або використовують інформацію із соціальних джерел[8]. Розглянемо його більш детально.

Сучасні соціальні пошукові системи можна розділити на два великі класи – системи соціальних відповідей та соціального зворотного зв'язку[9].

Системи відповідей дозволяють людям, що мають досвід у зазначеній галузі або власні думки з зазначеного питання, відповідати на конкретні питання інших користувачів. Відповіді можуть надходити із різних рівнів соціальної близькості, від близьких друзів і співробітників до незнайомців. Деякі системи використовують соціальні мережі для пошуку друзів, та друзів цих друзів, щоб дати відповіді. Користувачі відвідують дискусійні форуми, чати, соціальні мережі, щоб задати питання, відповіді на які складно знайти використовуючи традиційний пошук.

Ефективність систем соціальних відповідей залежить від їх ефективності при використанні пошуку і алгоритмів рекомендування для повернення найбільш релевантних попередніх відповідей.

Системи зворотного зв'язку використовують дані «соціальної уваги», щоб ранжувати результати пошуку. Вони отримують дані «соціальної уваги» та відгуки від користувачів явно або неявно. Такі системи як Wikia Search та Google's SearchWiki дозволяють користувачам голосувати за результати пошуку, впливаючи безпосередньо на ранжування. Алгоритм PageRank від Google можна вважати неявною системою голосування, бо вона фактично вважає посилання на веб-сайт як голос за нього. В системах соціальних закладок, користувачі здійснюють пошук веб-сайтів, що відповідають певним популярним тегам. Проставляння тегів веб-адресам це своєрідний голос за вказаний веб-ресурс.

Використання соціальних пошукових систем потенційно може вирішити проблему захисту користувачів від не релевантної інформації.

Формат обчислюваних даних CDF

Computable Document Format (CDF) – новий електронний формат документів, розроблений компаніюWolframGroup [10]. Формат з'явився влітку 2011 року. За словами розробників мета його появи – полегшення створення динамічно генерованого інтерактивного вмісту. Формат CDF є відкритим форматом.

Ключовою перевагою формату є те, що не тільки математики та програмісти зможуть створювати інтерактивні документи, а й абсолютно всі, кому це цікаво, незалежно від технічної підготовки.

В текст документу у форматі CDF можуть включатись інтерактивні елементи: графіки, схеми, діаграми тощо. Керувати інтерактивними елементами може сам читач. Наприклад можна перебудувати графік, якщо внести нові дані. Сфери застосування документів у форматі CDF: консалтингові звіти, інвестиційні звіти, презентації, автоматичні звіти, інфографіка і блоги, підручники, журнальні статті, інформаційні застосування, застосування по обробці даних.

Формат дозволяє самостійно вивчати можливі сценарії і аналізувати результати за допомогою інтерактивних діаграм на базі обчислень у реальному часі. Є можливість створювати звіти або кошториси інтерактивними за допомогою обчислень що проводяться у реальному часі, дозволяючи користувачам тестувати багатомірні сценарії «а що буде, якщо…».

CDF дозволяє більш якісно обґрунтовувати рішення за допомогою інтерактивних візуалізацій. Останні можливі завдяки обчисленням, що проходять у реальному часі. Можна створити платформу на базі обчислень для генерування звітів, що містять реальні інтерактивні елементи і сучасні дані. Просто реалізується перетворення інфографіки у інформаційні застосування використовуючи нові дані та інтерактивну графіку. Важливою є і можливість публікації результатів досліджень з використанням легких для сприйняття інтерактивних діаграм.

Користувач може створювати та публікувати інтерактивний контент, що працює на обчисленнях, для ілюстрації концепції та ідей. Швидко створюються інтенсивні бізнес-

Kyiv National Taras Shevchenko University

аналітичні застосування, які вимагають значної кількості обчислень, та зручні у використанні і мають високу гнучкість.

Документи у форматі CDF можна створювати за допомогою системи Mathematica 8. В майбутньому розробники обіцяють додаткові методи створення CDF документів: від Wolfram|Alpha і до онлайн-сервісів, які надаватимуть доступ за вимогою до Mathematica.

Збереження файлів у форматі CDF є вбудованою функцією в Mathematica 8. Все, що обчислюється в цій системі, може бути перетворено в інтерактивний об'єкт. Файли обчислюваного формату можуть створюватись як з нуля так і з вже існуючих блокнотів.

Більшість функцій, що доступні в системі Mathematica, можуть використовуватись для побудови CDFзастосувань.

Весь інтерактивний вміст генерується командою Manipulate і може використовувати лише елементи, що керуються мишкою: Слайдер(*Slider*), Локатор(*Locator*), Випадаюче меню(*PopupMenu*) тощо. Всі дані, що використовуються потрібно вставити в інтерактивні елементи файлу, за допомогою команд Initialization або SaveDefinitions, що є параметрами Manipulate.

Документи CDF можна розгортати як цілі веб-сторінки, або їх частини, як настільні застосування чи окремі документи.

Файли у форматі CDFможна включати у веб-сторінки або переглядати безпосередньо в браузері як повно-екранні документи. Вкладення CDF-об'єктів можна виконати двома способами: вставкою згенерованого системою Mathematica коду при збереженні файлу, або внесенням об'єкту в HTML файл в елемент <embed>.

Наприклад:

<embed src="VoronoiDiagram.cdf" width="588" height="380">

Проте, для кращої гнучкості, рекомендовано використовувати скрипт вкладення Wolfram CDF. Він реалізується безкоштовною javascript бібліотекою із відкритим кодом. Скрипт не використовує жодних інших бібліотек та гарантує сумісність з усіма браузерами, надає засоби для перевірки факту наявності CDF плагіну, відображає логотип CDF-плеєра і посилання на нього, якщо плагін відсутній, а також надає можливість показувати статичні зображення замість інтерактивного вмісту.

Окрім можливості вкладення, CDF файли можна також переглядати в браузері в повноекранному режимі, шляхом відкриття посилання.

Отримати необхідний код, для вставки у веб-сторінку можна за допомогою меню File > Deploy > Embed in HTML. Система Mathematica виведе модуль оперативної допомоги, що крок за кроком допоможе налаштувати документ та згенерує необхідний для веб-сторінки код.

CDF документи можна використовувати в якості настільних застосувань на системах Windows, Mac і Linux. Створене застосування автоматично працює на всіх комп'ютерних системах.

Застосування можуть завантажувати із серверів компанії Wolfram дані, використовувати обчислювальні потужності системи Mathematica, містити інтерактивні елементи керування, що автоматично відображаються в рідному стилі використовуваної системи. Настільні застосування найкраще підходять для використання на навчальних заняттях, в лабораторіях тощо.

Застосування, що частково вирішують поставлену задачу

Ми знайшли деякі застосування, що частково вирішують поставлену задачу.

Медіапланер – інструмент для пошуку цільової аудиторії на рекламних майданчиках «Рунету» [11]. За словами розробників програми вона дозволяє шукати аудиторію за наступними характеристиками: стать, вік, освіта, рівень доходу, географія аудиторії. На основі цієї вибірки підбираються рекламні місця, що найбільш характерні для заданої аудиторії.

Даний інструмент може частково вирішити поставлену задачу, але він не забезпечить вибірку аудиторії за показником зацікавленості в тематиці, а також не дозволяє здійснювати пошук сайтів соціального характеру.

Sendex – пошук цільової аудиторії через Skype [12]. Інструмент дозволяє знаходити користувачів Skype за заданими параметрами і зберігати їх в окремий список контактів, групувати сортувати у цільові групи. Також система дозволяє автоматично надсилати повідомлення для всього обраного списку.

Message Magic – ще одне застосування для пошуку цільової аудиторії через Skype, а також через MSN, Yahoo Messanger [13].

Kyiv National Taras Shevchenko University

Згадані вище системи можуть виявитись неефективними тому, що вони націлені лише на користувачів одної з великої кількості засобів спілкування в мережі Інтернет. Більше того, результат значно залежить від повноти заповнення особистої інформації користувача в профілі Skype.

Загалом, серед користувачів Skype представлено близько половини інтернет-спільноти України. За даними досліджень медіаагенства Universal McCann близько 10 млн осіб регулярно користуються соціальними мережами [14] Тоді як лише 5 млн унікальних користувачів щомісяця використовують Skype [15].

Система AdWords від Google [16] дозволяє рекламодавцям розміщувати оголошення не лише в результатах пошуку або на тематичних сайтах, а і налаштовувати показ оголошень конкретним групам людей.

Такий спосіб націлювання діє двома способами. По-перше, оголошення можна показувати людям, які вже відвідували ваш сайт за допомогою «кампаній ремаркетингу».

По-друге, система дозволяє відшукати людей, які можуть бути зацікавлені в продуктах та послугах, за допомогою набору категорій інтересів. Інтереси користувачів визначаються наступним чином. Коли особа відвідує партнерський сайт системи, аналізується вміст сторінки та сайту й відображаються релевантні за контекстом оголошення. На основі тем цих сторінок і даних, що надаються сторонніми компаніями, система пов'язує інтереси з ідентифікатором анонімного файлу cookie відвідувача, враховуючи, окрім інших факторів, і статистику відвідування сайтів, які належать до цих категорій.

Загалом така система може дійсно ефективно знаходити цільову аудиторію за певними характеристиками, проте відповідно до поставленої задачі нас цікавлять користувачі які дійсно є зацікавленими в необхідній предметній області, а не просто згадують тематику в своїх профілях. Зазначимо і те, що прив'язка до файлів cookie не є стабільною.

Алгоритм пошуку осередків зацікавленості за обраною предметною областю

1. Для кожної ключової фрази із зазначеного користувачем семантичного ядра визначається список веб-сайтів які можна вважати релевантними до заданої фрази. Семантичне ядро користувач складає сам. Для того, щоб можна було оцінити рівень зацікавленості аудиторії в заданій предметній області користувачу пропонується надати ключовим фразам показник пріоритетності від 0 до 1. Якщо, пріоритетність не зазначається, то для всіх фраз автоматично призначається рівень пріоритетності 1.

2. Для кожної веб-сторінки визначається її належність до соціального вебу, та визначається тип сторінки.

3. Для кожної сторінки визначається показник рівня зацікавленості.

4. Для кожної фрази, що зустрічається на сторінці, яка розглядається, підраховується кількість входжень яка множиться на пріоритет цієї ключової фрази.

5. Визначається показник рівня зацікавленості користувачів веб-сторінки. Ця величина складається двох показників: рівня зацікавленості за ключовими фразами та рівня зацікавленості за транзакційними фразами.

- Рівень зацікавленості за ключовими фразами (I_k), розраховується наступним чином:

$$I_k = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i \quad (3.1),$$

де p - пріоритет i-тої фрази;n – кількість входжень i-тої фрази на сторінці; m – загальна кількість ключових фраз в семантичному ядрі.

- Рівень зацікавленості за транзакційними фразами(I_t), розраховується аналогічно, з тою різницею, що до уваги береться не семантичне ядро вказане при пошуку сайтів, а ключові фрази які вважаються такими, що спонукають до дій. Це такі фрази як «порадьте», «допоможіть знайти», «терміново потрібно», «шукаю» тощо.

$$I_t = \sum_{j=1}^{l} k_j \quad (3.2),$$

де k – кількість входжень j-тої фрази на сторінці; l – загальна кількість ключових фраз в переліку транзакційних.

- Загальний показник рівня зацікавленості розраховується наступним чином:

$$I = I_k + I_t = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i + \sum_{j=1}^{l} k_j \quad (3.3).$$

6. Якщо можливо встановити інформацію щодо відвідуваності веб-ресурсу, або його закритості/відкритості для незареєстрованих користувачів, то відповідно інформація також заноситься в базу даних для кожної сторінки.

Kyiv National Taras Shevchenko University

7. Вся отримана інформація вноситься в базу даних до таблички виду:

url	title	metadata	type	interest_level	users	open

Де: url - адреса сторінки, title - заголовок сторінки, metadata - мета дані сторінки (description, keywords), type - тип сайту, interest_level- рівень зацікавленості, users - відвідуваність, open - закритий/відкритий ресурс.

Для реалізації першої частини програмного застосування та інтерфейсу користувача було обрано мову програмування php.

Вибір мови програмування php було зумовлено тим, що дана мова є доступною, зрозумілою для використання та забезпечує швидкість розробки. Зручність мови зумовлена тим, що код скриптів php знаходиться безпосередньо в середині гіпертекстового файлу, а відповідний модуль на сервері. Останній, перед тим як передати дані на клієнтську машину, виконує інструкції, замінюючи їх тегами HTML.

Програмне застосування було створено за допомогою середовища розробки NetBeans IDE 7.0.1 [17]

Застосування налаштовувалось та перевірялось за допомогою набору дистрибутивів та програмної оболонки Denwer [18].

Для обробки та представлення результатів, отриманих за допомогою алгоритму було обрано формат даних CDF. Результати роботи алгоритму представляються у вигляді як статичного так і динамічного вмісту.

Формат CDF підтримує весь спектр розміток, каскадні таблиці стилів, миттєве оновлення стилів для динамічного і статичного контенту. Формат CDF є оптимізованим для інтерактивного використання і може застосовуватись як у мережевих так і у друкованих виданнях. У розпорядженні авторів є більше тисячі опцій для форматування і стилістичного оформлення.

Будь-який елемент CDF документу можна швидко перетворити у інтерактивний, при чому дійсно інтерактивний, а не попередньо згенерований та запрограмований. За допомогою обчислювальної потужності технологій на базі системи Mathematica, динамічні елементи CDF документів можуть змінюватись у відповідності з обчисленнями, що проводяться у реальному часі, або можуть використовуватись для запуску обчислень, для знаходження нових результатів, що призводить до глибокого занурення читача у матеріал.

Для створення інтерактивного контенту у форматі CDF використовується команда *Manipulate*. Вона дозволяє створювати інтерактивний об'єкт, що містить елементи керування (кнопки, слайдери, чек бокси тощо), які можна використовувати для зміни значень одного або кількох параметрів. В результаті отримуємо представлення схоже на аплет або віджет: користувач бачить не просто статичний результат, а діюче застосування з яким він може взаємодіяти.

У файлах формату .cdf інтерактивний та статичний вміст можна використовувати одночасно. Наприклад, для виведення користувачу результатів пошуку соціальних веб-сайтів згрупованих за типом, у вигляді кругової діаграми (Рисунок 1).

Деталізацію інформації про рівень зацікавленості аудиторії для кожної веб-сторінки можна зробити, використовуючи стовпчикові діаграми. В цьому випадку користувач може керувати представленням даних: обирати спосіб відображення діаграми, колір стовпчиків, відображати чи ні легенду тощо.

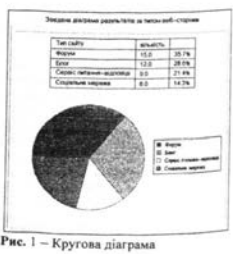


Рис. 1 – Кругова діаграма

Об'єднання програмної реалізації та CDF-документу у вигляді онлайн-застосування

Завдяки тому, що формат CDF зручно та легко інтегрується у веб-сторінки, було прийнято рішення запропонувати користувачам

Kyiv National Taras Shevchenko University

онлайн-застосування для пошуку осередків зацікавленості.

Результат роботи програми на php знаходиться в базу даних mysql. Система Mathematica має вбудований інтерфейс високого рівня, що підтримує всі стандартні бази даних SQL, і, тим самим, дозволяє швидкий пошук, зчитування, запис довільних даних і виразів, а також забезпечує підтримку загальних особливостей SQL [19].

```
In[4]:= Needs["DatabaseLink`"];
        JDBCDrivers["MySQL(Connector/J)"]

Out[4]= JDBCDriver[Name → MySQL(Connector/J),
          Driver → com.mysql.jdbc.Driver, Protocol → jdbc:mysql:///,
          Version → 2., Description → MySQL using Connector/J - Version
            5.1.13 - This supports all known MySQL server versions.,
          Location → C:\Program Files\Wolfram
             Research\Mathematica\8.0\SystemFiles\Links\DatabaseLink\
             DatabaseResources\mysql.m]

In[5]:= OpenSQLConnection[JDBC["MySQL(Connector/J)", "localhost\[Placeholder]
          "Username" → "root", "Password" → ""]

Out[5]= SQLConnection[1, Open, Catalog → scrapper,
          TransactionIsolationLevel → RepeatableRead]
```

Рисунок 2. З'єднання з базою даних mysql у системі Mathematica

Для того, щоб отримати результати користувачу необхідно виконати мінімум дій: ввести перелік ключових фраз та їх пріоритетів (Рисунок 3).

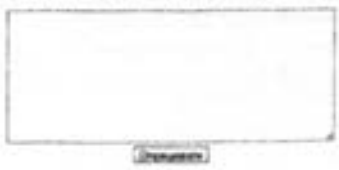


Рис. 3. Поля для внесення семантичного ядра

Програма виводить цей перелік у порядку спадання пріоритетності, а за ним сам результат роботи.

Спочатку йде загальна, зведена таблиця результатів з повним переліком всіх знайдених соціальних веб-сторінок. Записи відсортовані за рівнем зацікавленості аудиторії. Після неї виводиться цей список, але згрупований за типом веб-сторінок (рисунок 4).

Рис. 4.а. Результат роботи, перша частина

Рис.4.б. Результат роботи, друга частина

Висновки

У цій статті запропоновано рішення задачі пошуку осередків зацікавленості на соціальних веб-сайтів, алгоритм визначення показника рівня зацікавленості користувачів соціального веб-ресурсу.

Для опрацювання та представлення результатів використано новітні технології, формат представлення даних CDF. Формат є відносно новим форматом даних, проте вже зарекомендував себе як зручний та ефективний спосіб взаємодії із користувачами.

Створено онлайн-застосування для пошуку осередків зацікавленості в мережі Інтернет в заданій предметній області серед користувачів сайтів соціального спрямування.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Список використаних джерел

1. *Глибовец Н.Н., Глибовец А.Н., Шабинский* А.С. Применение онтологий и методов текстового анализа при создании интеллектуальных поисковых систем / Н.Н. Глибовец, А.Н. Глибовец, А.С. Шабинский //Проблемы управления и информатики.- №6.-2011.-С.95-103.
2. *Won Kim, Ok-Ran Jeong, Sang-Won Lee:* On social Web sites/ Won Kim, Ok-Ran Jeong, Sang-Won Lee// Information Systems 35.- 2010.- 215–236 p.
3. *Kaplan, Andreas M., Michael Haenlein.*Users of the world, unite! The challenges and opportunities of Social Media/ Kaplan, Andreas M., Michael Haenlein// Business Horizons.- 2010,- 59-68 p.
4. *Manning C., Raghavan P., Schütze H.* Introduction to Information Retrieval/ Manning C., Raghavan P., Schütze H. — Cambridge University Press,- 2008.-544 p.
5. *Глибовець А.М., Шабінський А.С.* Один підхід до побудови інтелектуальної пошукової системи/ Глибовець А.М., Шабінський А.С.// Наукові записки НАУКМА. Комп'ютерні науки. — том 112. — 2010. - с. 26-30.
6. *Craswell N., Hawking D.* Information Retrieval: Searching in the 21st Century/ Craswell N., Hawking D. //Web Information Retrieval.- 2009.-85–101p.
7. *Broder A.* A taxonomy of web search/ A. Broder// ACM SIGIR Forum.- vol 36.-2002.- 3 – 10p.
8. *B. Evans, E.H. Chi.* Towards a Model of Understand-ing Social Search/ B. Evans, E.H. Chi. // Proc. Computer Supported Cooperative . Work (CSCW 08), ACM Press,- 2008.- 485-494p.
9. *Ed H. Chi.* Information Seeking Can Be Social/ Ed H. Chi // Computer, vol. 42.- #3.-2009.- 42-46p.
10. *Wolfram* [Електронний ресурс] / Електронна адреса: www.wolfram.com/**cdf**/
11. *Медіапланер* [Електронний ресурс]/ Електронна адреса: http://mp.openstat.ru
12. *Sendex* [Електронний ресурс] / Електронна адреса: http://sendex.biz/
13. *Message-magic* [Електронний ресурс] / Електронна адреса: http://message-magic.ru.gg/
14. ТОП-10 зависимостей украинцев [Електронний ресурс] / Електронна адреса статті: http://life.comments.ua/way/2011/06/06/262432/top10-zavisimostey-ukraintsev.html
15. Skype используют 5 млн украинцев [Електронний ресурс] / Електронна адреса статті: http://ain.ua/2012/04/18/81107
16. *Google Adwords* [Електронний ресурс] / Електронна адреса https://adwords.google.com.ua
17. *Netbeans* [Електронний ресурс] / Електронна адреса: http://netbeans.org/
18. *Denwer* [Електронний ресурс] / Електронна адреса: http://www.denwer.ru/

Надійшла до редколегії 09.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics

УДК 004.934

Голік А.О., аспірант

Формування векторів ознак: реалізація алгоритмів розпізнавання мовної інформації засобами паралельних обчислень

Запропоновані різні підходи до формування векторів ознак та встановлення відстаней відповідності. Наведений варіант згладжування матриці спектрограми з використанням SVD – розкладу. Розглянута можливість та доцільність використання технології паралельних обчислень CUDA у задачі розпізнавання мовної інформації. Наведені тестові результати роботи розробленої програми розпізнавання мови.

Ключові слова: розпізнавання мови, вектори ознак, кластеризація , відстані відповідності, спектрограма, форманта, CUDA, паралельні обчислення, SVD - розклад

A.O. Golik, post-graduate student

Designing the feature vectors: implementation of speech recognition algorithms using parallel computing capabilities

Different approaches to formation of feature vectors and establishment of compliance distances were suggested. Variant of smoothing a matrix of spectrogram using SVD – decomposition is given. Possibility and feasibility of usage of CUDA technology in speech recognition applications is considered. Test results of developed speech recognition application are given.

Key Words: speech recognition, feature vectors, clustering, compliance distances, spectrogram, formant, CUDA, parallel computing, SVD - decomposition

E-mail: analytical@ukr.net

Стаття представив: д.т.н. проф. В.В.Акіменко

Одним з основних способів ідентифікації слова може бути локалізація в спектрограмі мовного запису формант, вивчення їх структури та частотної приналежності. В пропонованій статті досліджується алгоритм формування векторів ознак на основі формантного складу мовного сигналу, представленого спектрограмою. Крім того, з метою відкинути шуми встановлюється нижній рівень амплітуди, що дозволяє приймати до розгляду тільки ті «піки»-форманти, які мають інформаційну цінність. Такий підхід дозволяє, по-перше, візуалізувати форманті лінії на зображенні спектрограми, по-друге, сформувати вектори ознак на базі інформації про локальні максимуми.

Зауважимо однак, що, форманти можна ефективно виділити лише у голосних літерах та словах, які побудовані без участі «не формантних» літер. Складності виникають при аналізі шиплячих звуків, коли через особливості мовного тракту людини при вимові, наприклад, букв «з» та «ш» формантний склад слова втрачає чіткість своєї структури.

Пропонована в статті конструкція вектора ознак на базі форматних характеристик застосовна для розпізнавання як слів із переважним представленням голосних звуків, що мають яскраво помітні формантні частоти, так і тих, де форманти у великій мірі втрачають свою ефективність.

Запропоновані алгоритми розпізнавання, які використовують як стандартні уявлення про відстані відповідності, так і так звані «еліпсоїдальні відстані». Еліпсоїдальні відстані будуються на основі певного «мінімального еліпсу», що «накриває» навчальну вибірку того чи іншого класу.

Крім того, в статті пропонується розгляд матриць, як «природніх» векторів ознак: представників об'єкта, що піддається аналізу. Такий підхід є природнім, коли аналізуються , зокрема, мовні сигнали, які, як відомо, вичерпно представляються спектрограмою.

Також розглянута можливість згладжування матриці спектрограми з використанням її сингулярного розкладу.

Для підвищення швидкодії системи пропонується застосувати технологію

© Голік А.О., 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

паралельних обчислень CUDA (Compute Unified Device Architecture), яка дозволяє використовувати для підрахунків можливості графічних процесорів. Розглянута доцільність застосування CUDA для підрахунки псевдо оберненої матриці та сингулярного розкладу.

У статті пропонуються різні варіанти візуалізації матриці спектрограми, зокрема, у вигляді двовимірного зображення та тривимірної поверхні, та стандартизації похідних від неї матриць. Вказані ті етапи візуалізації, на яких можна та доцільно використати паралельні обчислення.

Наведений алгоритм розпізнавання «порівняння з еталоном». Крім того, розглянута можливість використання конкретного методу кластеризації: методу к-середніх - для підвищення швидкості роботи запропонованого алгоритму.

Наведені результати роботи реалізованої у середовищі Java та CUDA програми розпізнавання для тестового набору слів, що обгрунтовують введення відповідних підходів, і, зокрема, векторів ознак на базі кількості локальних максимумів.

Результати свідчать про ефективність запропонованих векторів ознак та перспективність подальшої роботи над їх вдосконаленням.

Спектрограма як «представник» мовного сигналу в математичній моделі сигналу

Мовний сигнал проходить досить складний шлях від мікрофона до того вигляду, в якому він може бути оброблений та проаналізований. В кінці цього процесу отримується wav – файл, який на ряду з заголовками та різною технічною інформацією містить в собі інформативну частину сигналу, яка представлена у вигляді одновимірного масиву чисел. Використовуючи гармонічний аналіз, а саме швидке перетворення Фур'є (ШПФ), можна перейти від масиву чисел до матриці, яка називається матрицею спектрограми.

Спектрограма – це зображення набору енергетичних спектрів частин мовного сигналу, які визначаються набором віконець фіксованої довжини. Обчислення кожного із енергетичних спектрів у відповідному віконці, здійснюється на основі побудови перетворення Фур'є (ПФ) для відповідної частини сигналу. Таке застосування ПФ зазвичай здійснюється у цифровій формі швидкого перетворення Фур'є. Зауважимо, що згадані вище послідовні віконця загалом, мають спільну частину: перекриваються із певним кроком. Такий набір віконець формується певним рухомим вікном, а набір енергетичних спектрів для кожного з віконець формує матрицю, яку можна називати спектрограмою, як і її зображення, про яке мова піде далі.

Нехай на виході ШПФ отримано матрицю. В подальшому матриця спектрограми: це матриця енергетичних спектрів сигналу у рухомому вікні за часом. Позначатиметься через $S = (a_{ij})_{n,m}, n, m \in R$

де a_{ij} - комплексні числа, а, отже, мають вигляд $a_{ij} = c_{ij} + ib_{ij}$, де i – комплексна одиниця. Таким чином, елементами матриці перетворення Фур'є тих чи інших ділянок є комплексні числа.

Ця «комплексна» матриця однозначним чином задається матрицею модулів її елементів і матрицею фаз відповідних комплексних чисел. Як показує досвід використання гармонійного аналізу у розпізнаванні мови фазові характеристики мовного сигналу не є принциповими для розпізнавання слів, хоча і є принциповими в задачах розпізнавання емоцій.

Отже, в подальшому, маючи справу із задачею розпізнавання мови, використовуватимемо модулі елементів матриці перетворень Фур'є, тобто матрицю енергетичних спектрів. Ця матриця, а точніше її зображення, - і називається матрицею енергетичних спектрів чи спектрограмою.

Для побудови зображення цієї матриці пропонується по елементне перетворення

$$a'_{ij} = \sqrt{b_{ij}^2 + c_{ij}^2}$$

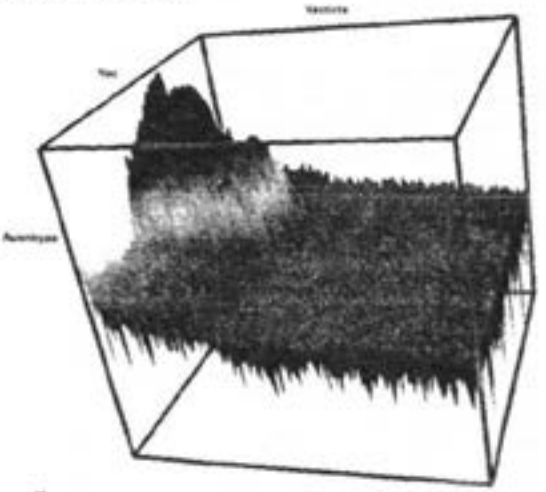
в результаті якого отримується матриця дійсних чисел

$$S' = (a'_{ij})_{n,m}, n, m \in R$$

Елементи a'_{ij} відображають значення амплітуди сигналу у інтервал часу j на частоті i. Такий підхід дозволяє сформувати тривимірну поверхню осями якої є час, частота та амплітуда. Крім того, можливим є представлення спектрограми у вигляді двовимірного зображення. У цьому випадку значення амплітуди впливає на колір відповідного пікселя на зображенні. Малим значенням амплітуди відповідають сині

Kyiv National Taras Shevchenko University

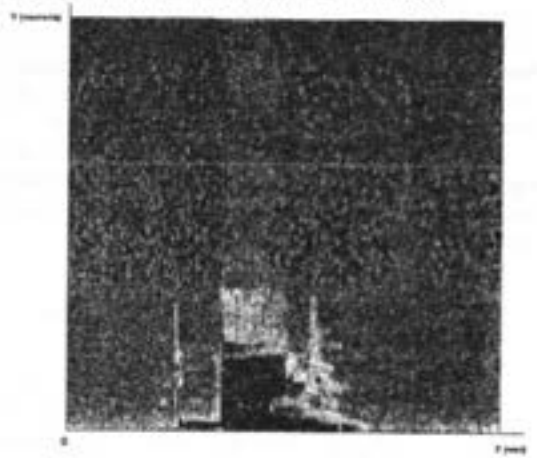
області (холодні кольори), а великим – червоні (теплі кольори).



Якщо мова йде про чорно – біле зображення, то величина амплітуди прямо пропорційна насиченості сірого кольору на зображенні, іншими словами, області з більш високою амплітудою є темними, з низькою – світлими.

Наявна матриця спектрограми, яка описує сигнал є точністю до фазових характеристик, власне, є природнім представником аудіо сигналу в математичному описі такого сигналу. Тому питання про побудову ефективних алгоритмів розпізнавання аудіо сигналів є питанням про те, яким чином її доцільно використати для ідентифікації слів.

На цьому етапі розгляду задач, пов'язаних із розпізнаванням мовних сигналів, надзвичайно важливим є поняття форманти. Форманта — термін фонетики, що позначає акустичну характеристику звуків мови (перш за все голосних), пов'язану з рівнем частоти голосового тону і формуючу тембр звуку. Введений в практику наукових досліджень німецьким фізіологом Ludimar Hermann в 1894 році. Він припускав, що кожен повітряний поштовх, що створюється голосовими зв'язками, порушує коливання ротового резонатора з властивою йому частотою, і потім ці коливання швидко затухають, поки не будуть знов збуджені наступним повітряним поштовхом. Термін форманта застосовується зазвичай не як позначення певного тону, характерного для даної голосної, а як певна область резонансу, в якій посилюється ряд гармонік звуку, вироблюваного голосовими зв'язками, тобто в спектрі звуку форманта є достатньо помітною областю посилених частот, що виразно виділяється, і визначається за усередненою частотною величиною.



Якщо на малюнку звернути увагу на області з високою амплітудою, то можна інтуїтивно відокремити формантні лінії, три з яких яскраво помітні.

Кількість формант може бути зіставлена з кількістю резонансних порожнин в мовному тракті. Кожна з формант визначається всіма ділянками мовного тракту, хоча ступінь впливу у кожному конкретному випадку неоднаковий. В більшості випадків для розрізнення голосних звуків досить перших двох формант, проте практично завжди кількість формант в спектрі звуку більше двох, що вказує на складніші зв'язки між артикуляцією і акустичними характеристиками звуку, ніж за умови розгляду тільки двох перших формант.

Формування векторів ознак на основі формантних характеристик

Оскільки форманти є важливими характеристиками мовного сигналу, їх можна використовувати у побудові векторів ознак з метою подальшого розв'язання задачі розпізнавання таких сигналів і, зокрема, слів. Саме такий підхід реалізований в подальшому у наведеній роботі.

Отже, важливим етапом запропонованого підходу є пошук формантних ліній та їх аналіз.

Одним з можливих підходів до виділення формант може бути пошук локальних максимумів по стовпчиках матриці спектрограми. Елемент матриці вважається локальним максимумом, якщо попереднє та

Kyiv National Taras Shevchenko University

наступне значення у відповідному стовпчику матриці є меншим ніж даний елемент. Крім того, доцільно використати нижній поріг рівня амплітуди з метою відсіювання шумів та не значущих максимумів. В результаті застосування такого порогу, до розгляду прийматимуться лише ті елементи матриці спектрограми, які відповідають формантам.

З метою виділення частотної приналежності формант пропонуються наступні варіанти формування векторів ознак на базі матриці спектрограми.

$$x^{(energy)} = (b_1 \ldots b_n)^T, \text{де } b_i = \sum_{\substack{j=1, \\ a_{ij} - форманта}}^{m} a_{ij};$$

Даний вектор ознак представляє собою набір чисел, довжина якого дорівнює кількості рядків у матриці спектрограми (кількості відліків частоти). Кожен елемент з цього набору являє собою не що інше як суму амплітуд локальних максимумів, які потрапили у відповідний рядок матриці. Визначений таким чином вектор ознак будемо називати «сумарним спектром по частотам» (на малюнку ліворуч).

Інша варіація даного вектору ознак відкидає значення амплітуди, враховуючи лише кількість локальних максимумів (на малюнку праворуч).

$$G(S) = S_{count} = (s_{ij}),$$

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, якщо\ a_{ij} - форманта \\ 0, інакше \end{cases}$$

Для отриманої бінарної матриці спектрограми S_{count} вектор ознак має наступний вигляд:

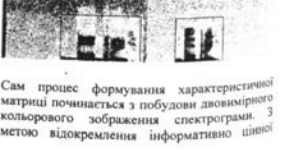
$$x^{(local)} = (c_1 \ldots c_n)^T, \text{де } c_i = \sum_{j=1}^{m} s_{ij}$$

Обидва запропоновані варіанти векторів ознак відображають структуру мовної інформації у зв'язку із формантними характеристиками. Слід зазначити, що структура векторів ознак для одного й того ж слова досить схожа. Яскраво помітні піки значень на однакових частотах. Різниця лише в висоті цих піків. Як виключення, можна зазначити найнижчі частоти, де кількість локальних максимумів найбільша, але їх сумарний спектр не такий великий.

«Характеристичні» матриці

На відміну від векторів ознак, де була виконана проекція кількості локальних максимумів чи їх сумарного спектру на вісь частот, положення таких елементів може бути проаналізоване і безпосередньо у матричній формі (матриця спектрограми). Проте, актуальною є проблема стандартизації розмірності такої матриці, зокрема по вісі часу. Одним з можливих варіантів вирішення цієї проблема є побудова характеристичної матриці: захоплення зображення (двовимірного, кольорового) матриці спектрограми та його подальше стискання чи розтягнення до встановленого стандартного розміру з подальшою конвертацією у матричну форму за певними правилами.

Тому, альтернативним варіантом є застосування підходу, який можна назвати методом «характеристичних матриць», тобто аналізу сигналу на основі матиць, побудованих певним чином за спектрограмою як зображенням з використанням форматів перетворення зображень. До згаданих перетворень зображень відноситься, зокрема масштабування.



Сам процес формування характеристичної матриці починається з побудови двовимірного кольорового зображення спектрограми. З метою відокремлення інформативно цінної

Kyiv National Taras Shevchenko University

складової на зображенні виділяється прямокутник, який охоплює частину зображення, що відповідає сказаному слову. Такий підхід дозволяє відкинути все до сказаного слова та після нього, а також залишити лише ті частоти, на яких є сенс проводити аналіз. Частина зображення, що потрапляє в прямокутник зберігається та направляється на подальшу обробку. На даному етапі слід зазначити, що розмір розглянутих прямокутників для одного й того ж слова промовленого різними дикторами, на різній швидкості, з різною інтонацією буде відрізнятися. Тому має місце задача стандартизації, яка може бути вирішена масштабуванням зображення. Іншими словами, розміри збереженого зображення приводяться до певних стандартних величин по висоті та ширині. Доцільним також може бути застосування згладжування та інших операцій над зображеннями. На наступному кроці пропонується зробити зворотній перехід від зображення до матриці. У зв'язку з цим нагадаймо, що RGB – формат представлення кольору, як комбінації червоного, зеленого та синього. Експериментальним шляхом встановлюються допустимі значення RGB, які дозволяють прийняти рішення: чи слід розглядати піксель на зображенні як значущий чи ні. Саме перетворення зображення полягає у заміні пікселів, які задовольняють встановлені допустимі значення RGB одиницями і нулями всіх інших. В результаті отримується матриця з нулів та одиниць, яку називатимемо характеристичною. Її зображення можна відтворити у чорно-білому вигляді, що характерно для бінарних матриць.

Перетворення спектрограм як матриць через використання перетворень за форматами зображень має свої переваги. Зокрема, такий підхід дозволяє розв'язати проблему стандартизації спектрограми за довжиною мовного сигналу і отримати придатні до аналізу об'єкти.

Відстані відповідності: евклідова відстань

Після формування векторів ознак для мовного сигналу на етапі кластеризації виникає необхідність у їх порівнянні, встановленні так званої відстані відповідності між двома векторами. У пропонованій статті розглянута можливість застосування евклідової та еліпсоїдальної відстаней.

Евклідова відстань визначається стандартним чином:

$$x_1 = (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})^T;$$

$$x_2 = (a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})^T;$$

x_1, x_2 – вектори ознак

Сама ж відстань знаходиться за формулою

$$dist = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)} - a_i^{(2)})^2};$$

Відстані відповідності: еліпсоїдальна відстань

Іншим варіантом відстані відповідності є еліпсоїдальна відстань. Її основною відмінністю є можливість навчання системи шляхом роботи не з одним еталонним записом, а з набором (записи зроблені однією особою в різних умовах або різними особами).

В роботі запропоновано використовувати специфічну відстань відповідності для кожного з класів. Загалом, вона будується засобами псевдо обернення для тих чи інших варіантів лінійних операторів. Така відстань спирається на концепцію «мінімальні еліпси групування». Власне, це ті еліпси які «накривають» кожну із навчальних вибірок «мінімальним» і «оптимальним» чином. Еліпсоїдальні відстані будуються для матриць як матриць лінійних операторів між матричними евклідовими просторами засобами псевдо обернення для згаданих просторів. Вони реалізуються, як і у випадку векторних евклідових просторів, через так звані «групуючи операторів» теорії псевдо обернення. Такі оператори визначаються за матрицею оператора A оператора між векторними евклідовими просторами і визначаються співвідношенням:

$$R(A) = A^+ A^{+T}, R(A^T) = (A^T)^+ (A)^{T+T} = A^{+T} A^+$$

Th). $\forall (a_k, k = \overline{1,n})\ a_k \in R^m$

$A = (a_1, \ldots, a_n)$,

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$a_k^T R(A^T) a \le r_{\max}^2 < r$$

$$r_{\max}^2 = \max_{k=\overline{1,n}} a_k^T R(A^T) a_k$$

$$\forall (a_k, k = \overline{1,n})$$

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum a_k$$

$$\tilde{A} = (\tilde{a}, ..., \tilde{a}_n)$$

$$(a_i - \bar{a})^T R(\tilde{A}^T)(a_k - \bar{a}) \le r_{\max}^2 \le r$$

$$r_{\max}^2 = \max_{k=\overline{1,n}} \tilde{a}_k^T R(\tilde{A}^T) \tilde{a}_k$$

В якості набору векторів використовуються, як правило, навчальні вибірки тих чи інших класів. У відповідності до такого підходу побудови відстаней відповідності для кожного з класів, кожна така відстань будується за навчальною вибіркою класу у відповідності до наступної процедури.

Візьмемо дві навчальні вибірки різної довжини, що відповідають різним словам зі словника.

$$a_i^{(1)},\ i = \overline{1, n_1},\quad n_1 \in R$$

$$a_i^{(2)},\ i = \overline{1, n_2},\quad n_2 \in R$$

В кожній з цих вибірок перейдемо до нових змінних та знайдемо значення $R(\tilde{A}_1^T)$, $R(\tilde{A}_2^T)$

$$a_i^{(1)} \to \tilde{a}_i^{(1)} = a_i^{(1)} - \bar{a}_i^{(1)}$$

$$a_i^{(2)} \to \tilde{a}_i^{(1)} = a_i^{(2)} - \bar{a}_i^{(2)}$$

$$\tilde{A}_1 = (\tilde{a}_1^{(1)} ... \tilde{a}_{n1}^{(1)})$$

$$\tilde{A}_2 = (\tilde{a}_1^{(2)} ... \tilde{a}_{n2}^{(2)})$$

$$R(\tilde{A}_1^T) = \tilde{A}_1^{*T} \tilde{A}_1^*$$

$$R(\tilde{A}_2^T) = \tilde{A}_2^{*T} \tilde{A}_2^*$$

Тоді мають місце наступні твердження

$$\max_i (a_i^{(1)} - \bar{a}^{(1)})^T R(\tilde{A}_1^T) a_i^{(1)} - \bar{a}^{(1)})$$

$$\le r_1 = rank\tilde{A}_1 = rankL\ (\tilde{a}_1^{(1)} ... \tilde{a}_{n1}^{(1)});$$

$$\max_i (a_i^{(2)} - \bar{a}^{(2)})^T R(\tilde{A}_2^T) a_i^{(2)} - \bar{a}^{(2)})$$

$$\le r_2 = rank\tilde{A}_2 = rankL\ (\tilde{a}_1^{(2)} ... \tilde{a}_{n2}^{(2)});$$

$$r_{1\max}^2 \le r_1$$

$$r_{2\max}^2 \le r_2$$

В кінцевому рахунку еліпсоїдальна відстань тестового вектору до кожної з навчальних вибірок визначається за формулами

$$(x - \bar{a}_1)^T \frac{R(\tilde{A}_1^T)}{r_{1\max}^2} (x - \bar{a}_1)$$

$$(x - \bar{a}_2)^T \frac{R(\tilde{A}_2^T)}{r_{2\max}^2} (x - \bar{a}_2)$$

Кращою вважається найменша величина.

Для характеристичних матриць еліпсоїдальна відстань може бути побудована аналогічним чином.

Алгоритм розпізнавання

В статті пропонується алгоритм розпізнавання «порівняння з еталоном». Після того як диктор надиктував набір слів, які складатимуть словник, для кожного з цих слів формується та зберігається вектор ознак або характеристична матриця. Коли диктор промовляє у гарнітуру те чи інше слово зі словника, в результаті процесу кластеризації він отримує результат розпізнавання. Порівняння на близькість запису до одного з еталонів здійснюється з використанням відстаней, про які вже йшла мова.

Крім того, пропонується спосіб підвищення швидкості роботи системи розпізнавання, який полягає у використанні методу к-середніх. Всі слова розділяють на дві рівні групи O_1, O_2. Кожній групі відповідає свій набір векторів ознак

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ... x_{count1}^1;$$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ... x_{count2}^2;$$

$$count1 = count2$$

На наступному кроці знаходиться середньо арифметичне по кожній компоненті векторів ознак з групи. Для простоти розглядуватимемо групу O_1

$$x_i^{(1)} = (a_i^{(1)} ... a_n^{(1)})^T;$$

$$x_{ave}^{(1)} = (a_{1ave}^{(1)} ... a_{nave}^{(1)})^T;$$

В результаті отримаємо середній вектор ознак для групи

$$a_{iave}^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^{count1} a_i^{(j)}}{count1};$$

Тепер здійснюється процедура просіювання, яка полягає в тому, що всі слова зі словника перевіряються на близькість до середніх векторів першої та другої групи. Якщо відстань до першої групи менша, то

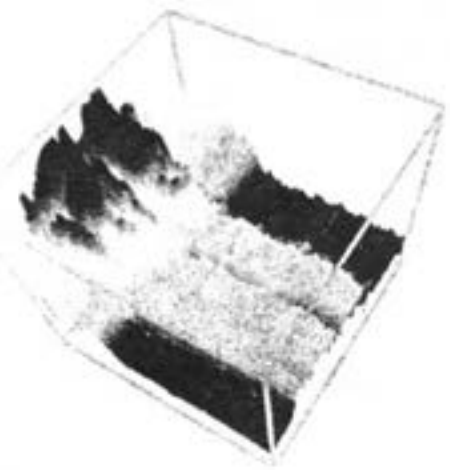
Kyiv National Taras Shevchenko University

відповідне слово класифікують до цієї групи і навпаки. Таким чином, утворюється деревовидна структура даних. Після просіювання отримуємо дві множини. Далі процедура повторюється рекурсивно. Тобто, кожна з цих підмножин ділиться на дві випадковим чином, знаходять середні значення, знову застосовують просіювання і т.д. доки словник повністю не буде конвертований у дерево. Потім при розпізнаванні мовного сигналу порівняння з еталонами буде проводитися через структуру дерева, що дозволяє обійти повний перебір слів і тим самим на порядок підвищує швидкість роботи системи.

Застосування SVD-розкладу для згладжування спектрограми

З метою покращення ефективності застосування якісних та кількісних методів аналізу спектрограми пропонується наступний варіант її згладжування. Перше, що кидається в очі при погляді на зображення спектрограми (особливо 3-вимірного варіанту) – це те, що вона має скачкоподібний характер, тобто після пікового значення може мати місце дуже різкий спад з подальшим різким підйомом (голки). Тому постає питання: як згладити спектрограму? Пропонується побудувати сингулярний розклад (далі SVD) матриці спектрограми та замінити дуже маленькі значення власних чисел матриці (так звані шуми) нулями.

Після цього відтворити згладжену матрицю



з SVD – розкладу.

Нижче описано алгоритм знаходження сингулярного розкладу матриці спектрограми.

У загальному випадку SVD матриці A $m \times n$ - це наступний розклад

$$A = U\Sigma V^T$$

де U - ортогональна матриця розмірності $m \times m$, V - ортогональна матриця розмірності $n \times n$, Σ - діагональна матриця розмірності $m \times n$ з елементами $S_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$ та $S_{ii} \geq 0$ у спадаючому порядку уздовж діагоналі.

Існують різні методи побудови сингулярного розкладу. Нижче наведений один з алгоритмів: Голуба – Райнша, який є принциповим з точки зору паралельних обчислень:

1. $B \leftarrow Q^T AP$ (бідіагоналізація вхідної матриці A, використовуючи перетворення Хаусхолдера)
2. $\Sigma \leftarrow X^T BY$ (діагоналізація матриці B)
3. $U = QX$, $V^T = (PY)^T$

Перші два етапи потребують більш детального розгляду.

При бідіагоналізації матриці знаходяться у наступному вигляді:

$$Q^T = \prod_{i=1}^{n} H_i, \; P = \prod_{i=1}^{n-2} G_i, \text{ а}$$

де $H_i = I - \delta_{1,i} u^i (u^i)^t$, $G_i = I - \delta_{2,i} v^i (v^i)^t$

В загальному випадку для вектора $y = [y_1, \ldots, y_l]$ довжини l вибір вектору Хаусхолдера r та скалярів α та δ визначається наступним чином:

$$\alpha = -sign(y_1)\|y\|$$

$$\alpha = sign(y_1)\|y\|$$

$$\delta = \frac{y_1 = a}{a}$$

$$r = \frac{y + [a.0, \ldots, 0]}{y_1 + a}$$

такі, що $(I - \delta r r^T) y = [a, 0, \ldots, 0]^T$

Процес діагоналізації виглядає наступним чином: нехай $d(i)$ – діагональні, а $e(i)$ - над діагональні елементи матриці B. Тоді на кожному кроці значення $e(i)$ стає менше їх попереднього значення і таким чином алгоритм працює доти, поки $e(i)$ не стануть нулями.

Щоб досягти цього алгоритм на кожній ітерації знаходить індекси k_1 та k_2, такі що

Kyiv National Taras Shevchenko University

$k_1 < k_2$ і $e(k_1)$ менше порогового значення, яке залежить від машинної точності. Якщо різниця k_1 та k_2 дорівнює 1 або 2, то k_2 збільшується. Якщо ні, то серія ротацій Гівена змінює $d(i)$ та $e(i)$ в границях від k_1 та k_2, $e(i)$ зменшується.

Алгоритм зупиняється, коли всі власні числа знайдені.

Отримавши сингулярний розклад матриці спектрограми, можна замінити її маленькі власні значення нулями та знову згорнути у матрицю.

Застосування технології паралельних обчислень

Розпізнавання мови пов'язано з реалізацією дуже ресурсо - та часозатратних ал горитмів. Це, наприклад, алгоритм знаходження псевдо оберненої матриці та алгоритм знаходження сингулярного розкладу, який потребує $O(M^2N)$ операцій, де N та M – розмірності матриці. Тому доцільно реалізувати ці алгоритми, використовуючи технологію паралельних обчислень CUDA, що дозволяє реалізовувати на спрощеній мові програмування С програмний код, який буде виконуватися на графічних процесорах прискорювачів GeForce восьмого покоління і старше. Із всіх відомих алгоритмів побудови сингулярного розкладу матриці вибраний той, до якого найкраще пристосована CUDA та її бібліотека матричних операцій CUBLAS. В результаті отримано пришвидшення виконання алгоритму в десятки разів.

Крім вище згаданих алгоритмів, технологія паралельних обчислень CUDA може бути застосована при побудові матриці спектрограми. На сьогоднішній день більшість систем розпізнавання мови працюють зі спектрограмою, тому задача підвищення швидкості її обрахунку була і залишається актуальною.

Процес побудови спектрограми включає в себе 3 основних етапи:

- Виділення множини під масивів вхідного масиву
- Виконання процедури windowing для виділених під масивів.
- Застосування швидкого перетворення Фур'є

Пропонується програма, яка включає в себе реалізацію всіх вищевказаних етапів з використанням засобів паралельних обчислень CUDA. Для процедури windowing реалізовані наступні вікна:

Ханна (Hann)

$$w(n) = 0.5(1 - \cos(\frac{2\pi n}{N-1}))$$

$$w_0(n) = 0.5(1 + \cos(\frac{2\pi n}{N-1}))$$

Хеммінга (Hamming)

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos(\frac{2\pi n}{N-1})$$

$$w_0(n) \overset{def}{=} w(n + \frac{N-1}{2}) = 0.54 + 0.46(\frac{2\pi n}{N-1})$$

Прямокутне (Rectangular)

$$w(n) = \begin{cases} 1, n \in [0, N-1] \\ 0, n \notin [0, N-1] \end{cases}$$

Бартлета-Ханна (Bartlett–Hann)

$$w(n) = a_0 - a_1\left|\frac{n}{N-1} - \frac{1}{2}\right| - a_2\cos(\frac{2\pi n}{N-1})$$

$$a_0 = \frac{1-\alpha}{2};\ a_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

За замовченням використовується вікно Ханна. Воно було обране експериментальним шляхом, як таке, що давало максимально

Kyiv National Taras Shevchenko University

адекватне (з суб'єктивної точки зору) зображення спектрограми мовного сигналу.

На етапі застосування швидкого перетворення Фур'є використовується Java бібліотека JCufft. Вона реалізує інтерфейс, який дозволяє застосовувати одно- та двовимірне перетворення Фур'є до вхідних даних різного типу.

Тестування та результати

Для тестування довільним чином була відібрана множина із 32 – ох слів (діалог). На базі цієї множини були проведені експериментальні дослідження.

Спеціально розроблений модуль навчання сформував базу еталонів для кожного з розглянутих векторів ознак та характеристичних матриць. В залежності від конфігурації системи, використовувалась евклідова чи еліпсоїдальна відстань. Крім того, тестувався метод к-середніх.

Для реалізації програмної частини було обране середовище Java. Це об'єктно-орієнтована мова програмування, яка охоплює багатий набір інструментарію для розробки програмного забезпечення різних напрямків. Крім того, Java підтримує роботу з CUDA-технологіями та має ряд бібліотек, зокрема JCublas, JCufft, в яких реалізовані основні математичні операції із застосуванням паралельних обчислень.

В результаті проведення замірів швидкодії було встановлено, що побудова спектрограми та знаходження сингулярного розкладу матриці спектрограми засобами CUDA виявилося в 40 разів швидшим, ніж аналогічний варіант на центральному процесорі. Слід зазначити, що підвищення швидкодії має залежність від розмірностей матриць та графічного прискорювача встановленого на комп'ютері користувача, його моделі та кількості наявної пам'яті.

Найкращі результати отримані при застосуванні «частотних» векторів ознак: векторів ознак на основі формантних характеристик, локальних максимумів спектрограми по частотам, та з застосуванням евклідової відстані. Загалом, розроблена у середовищах Java та CUDA система розпізнавання мови на обмеженому словнику дає понад 90%-ву точність розпізнавання. Вектор ознак побудований на базі сумарного спектру показав аналогічні результати у якості розпізнавання. Цікавим є той факт, що ефективність векторів ознак відрізнялась в залежності від тестового слова. Тобто, для різних слів кращий результат дає то один, то інший вектор ознак, що може свідчити про перспективність їх застосування у комплексі. Еліпсоїдальна відстань та метод к-середніх заслуговують на подальше дослідження і в перспективі можуть дати позитивні результати для тих чи інших векторів ознак. Ефективність застосування характеристичних матриць – 80%. Їх недолік полягає у чутливості до вибору RGB параметрів. Тому при правильній конфігурації та ряду додаткових етапів обробки можна достягти значного покращення. Крім того, в роботі з зображеннями не слід забувати про швидкодію системи, що на значному обсягу словника може бути важливим фактором. В свою чергу вектори ознак побудовані на базі кількості локальних максимумів не мають такої проблеми, адже для них будується проекція кількості локальних максимумів на вісь частот з подальшою нормалізацією, що вигідно у роботу з числами.

На етапі згладжування матриці спектрограми досить ефективним виявилося застосування сингулярного розкладу. Однією з основних переваг цього підходу є можливість задавати порогові значення і тим самим контролювати рівень згладжування. Згладжування та фільтрація дає можливість боротися з такими проблемами при розпізнаванні мовних сигналів, як зміна гучності вимови, різні приміщення, різна якість записуючого обладнання. В свою чергу застосування векторів ознак на базі локальних максимумів зменшує чутливість програми до зміни інтонації голосу та швидкості вимови слів. Перспективним рішенням може бути проектування локальних максимумів матриці спектрограми не лише на вісь частот, а й на вісь часу з подальшим виділенням двох векторів ознак для кожного слова. У матричному варіанті покращення може бути досягнуто з застосуванням інших відстаней відповідності, нечіткості. Серед інших перспективних напрямків можна виділити ланцюги Фрімена, нейронні мережі та вейвлети.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Список використаних джерел

1. *Донченко В.С., Голік А.О.*
Реалізація алгоритмів розпізнавання мовної інформації засобами паралельних обчислень // XVI International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU - 2010),– October 4-8, 2010.–Yalta, Ukraine

2. *Донченко В.С., Голік А.О.*
Застосування технології паралельних обчислень у задачі розпізнавання мовної інформації // XVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU -2011),– May 23-27, 2011.–Skhidnytsia, Ukraine

3. *Владимир Донченко* Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструктивные методы описания базовых структур и их использование.// International Journal "Information technologies & Knowledge"- 2011.- Vol. 5.- Number 3.-P.203-216.

4. *Донченко В., Кривонос Ю., Омарибирова В.* Базовые структуры евклидовых пространств: конструктивные методы описания и использования/ Information Models of Knowledge.- Editors: Krassimir Markov, Vitalii Velichko, Oleksy Voloshin - ITHEA.- Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria. Number 16.– P. 155-169.- ISBN 978-954-16-0048-1

5. *Кириченко Н.Ф., Донченко В.С.* Псевдообернення в задачах групування інформації // Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «Системний аналіз та інформаційні технології».– 20-24 травня 2008 р. Київ. – С.86.

6. *Кириченко Н.Ф. Донченко В.С.* Лінійні структури в задачах кластеризації та псевдообернення// Abstracts: International Conference 'Problems of Decision making under uncertainties (PDMU-2008)'.– May, 13-17, 2008. – Kyiv-Rivne, Ukraine. – 2008. – P.72-75.

7. *Ф. Кириченко, Донченко В.С.* Кластеризація за необмеженими множинами та псевдообернення // Abstracts: International Workshop "Problems of Decision making under uncertainties (PDMU-2007)". September , 17-22, 2007. – Kyiv-Novy Svit, Ukraine. – 2007. – P.70-71.

8. *Ф. Кириченко, Донченко В.С.* Гіперплощинна кластеризація та псевдообернення Abstracts: International Conference 'Problems of Decision making under uncertainties (PDMU-2007)'.– May, 21-25, 2007. – Chernivtsi, Ukraine.– 2007.– P.143 -144.

9. *Кириченко Н.Ф., Донченко В.С.* Псевдообращение в задачах кластеризации //Кибернетика и системный анализ. – 2007 – №4.– С.73-92.

10. *Кириченко Н.Ф.* Аналитическое представление псевдообратных матриц //Киб. и СА.- №2. –1997.– С.98-122.

11. *Кириченко М.Ф. Донченко В.С.* Псевдообернення та лінійні структури в задачах прогнозу та кластеризації // Abstracts/ International Conference "Problems of Decision Macing under Uncertainties"(PDMU -2009),- April 27-30, 2009.–Skhidnyysia, Ukraine.– p.114.

12. *Кириченко Н.Ф., Донченко. В.С.* Псевдообращение в задачах кластеризации.// Киб. и СА.- №4, 2007– С.98-122.

13. *Bondiugula, V., Govindaraju, N. and Manocha, D.* 2006. Fast Singular Value Decomposition on Graphics Processors. Technical report. University of North Carolina

14. *Kruger, J. and Westermann, R.* 2003. Linear Algebra Operators for GPU implementation of Numerical Algorithms. Barrachina, S., Castillo, M., Igual, F. and Mayo, R. 2008.

15. *Фролов А.В., Фролов Г.В.* Синтез и распознавание речи. Современные решения. — М.: 2003.

16. *Moore E.H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix.//Bull. Amer. Math. Soc. – 26, 1920. – p. 394-395.

17. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices.// Proc. Cambr. Philosophical Soc.- 51, 1955.– p.406-413.

18. *Фролов В.* Введение в технологию CUDA. Компьютерная графика и мультимедиа. Выпуск №6(1)/2008.

19. *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery.* 26 Singular Value Decomposition // Numerical Recipes in C. — 2nd edition. — Cambridge: Cambridge University Press.

20. *Golub, G. and Kahan, W.* 1965. Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix. SIAM J. Num. Anal.

Надійшла до редколегії 16.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 539.595

Гончаренко В.Ю., аспірантка,
Лимарченко О.С., д.т.н., проф.

Динамічна модель сумісного перехідного руху циліндричного резервуару з рідиною

Досліджується задача про сумісний рух системи «резервуар–рідина» під дією різних силових імпульсів. Оскільки вихідна система описується сукупністю різнорідних математичних об'єктів, на основі методу модальної декомпозиції виконане зведення системи до однорідного математичного об'єкту. Проаналізовано поведінку системи в режимі розгін/гальмування для різних силових імпульсів.

Ключові слова: резервуар з рідиною, сумісний рух, неоднорідний математичний об'єкт, розгін/гальмування резервуару.

V.Yu. Goncharenko, postgraduate student,
O.S. Limarchenko, doctor of engineering, professor

Dynamical model combined transient motion of the cylindrical reservoir with liquid

The problem of combined motion the system "container–liquid" under different force impulses is investigated. Since the initial system is described by an aggregate of mathematical objects of different nature, we reduce the system to homogeneous mathematical structure on the basis of the method of modal decomposition. Behavior of the system in the mode of acceleration/deceleration was analyzed for different force impulses.

Keywords: container with liquid, combined motion, inhomogeneous mathematical object, acceleration/deceleration of container.

E-mail: olelim2010@yahoo.com, victoriagonc@gmail.com

Статтю представив д.т.н., с.н.с Кудін В.І.

Вступ

Розглядається задача про сумісний рух циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною рідиною з вільною поверхнею. Рух резервуару відбувається в горизонтальній площині (Рис. 1) від дією сил, прикладених до стінки резервуара за умови наявності початкових збурень швидкості резервуара. Такі задачі є невід'ємним компонентом багатьох задач техніки і є одним з традиційних об'єктів керування. Проте складність задачі змушує для її дослідження застосовувати наближені алгоритми для побудови як математичних моделей, так і засобів керування.

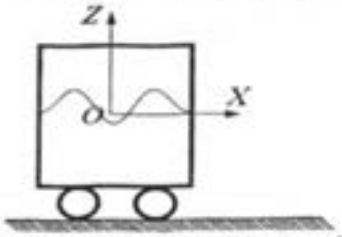


Рис.1 Система рухомий резервуар – рідина

Метою роботи є створення зручного для реалізації математичної моделі динаміки сумісного руху системи «резервуар–рідина» і дослідження процесу розгону і гальмування руху системи з точки зору доцільності використання різних типів законів керівних дій.

Математичне формулювання задачі

В математичному плані така задача описується складним об'єктом неоднорідної математичної природи: сукупністю нелінійної крайової задачі для диференціальних рівнянь в частинних похідних для опису динаміки рідини з вільною поверхнею, системою звичайних диференціальних рівнянь для опису поступального руху резервуара, які до того ж пов'язані між собою силою взаємодії рідини і резервуара, яка виражається інтегральним членом [1].

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ на } S, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g\xi + \vec{r}\cdot\vec{\varepsilon} = 0, \tag{4}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{M_p + M_w}(\vec{F} + \vec{R}) - \vec{g}, \tag{5}$$

причому зв'язок між резервуаром і рідиною визначається головним вектором сил тиску рідини на стінки резервуара $\vec{R}$

$$\vec{R} = -\rho\int_{S_0}\left[\frac{d^2\xi}{dt^2}\vec{r} + \frac{d\xi}{dt}\vec{\nabla}\varphi\right]_S dS.$$

Тут прийнято такі позначення: τ – область, яку займає рідина з густиною ρ, Σ – поверхня кон-

© В.Ю. Гончаренко, О.С. Лимарченко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

такту рідини із стінками бака, S – вільна поверхня рідини, r,θ,z – циліндричні координати, причому вісь Oz направлена протилежно вектору прискорення вільного падіння $\vec{g}$, $g=|\vec{g}|$; φ – потенціал швидкостей рідини, $z=\xi$ – рівняння вільної поверхні рідини; $\vec{\varepsilon}$ – вектор переміщення резервуара; $\vec{F}$ – главный вектор зовнішніх сил, що діють на резервуар, M_p і M_∞ – маси резервуара і рідини.

Можливості аналітичного розв'язання такої задачі практично відсутні переважно через нелінійність, наявність вільної поверхні, складний зв'язок між рухомими компонентами і, що є головним, різнорідностю сладових математичного об'єкту. Тому для формулювання динамічної моделі, зручної для дослідження, використовується метод модальної декомпозиції. Для цього будемо задавати крайову задачу (1)–(5) у вигляді варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського з функцією Лагранжа

$$L=\frac{1}{2}\rho\int_\tau(\nabla\varphi+\dot{\vec{\varepsilon}})^2d\tau+\frac{1}{2}M_p(\dot{\vec{\varepsilon}})^2-(M_p+$$

$$+M_\infty)g\varepsilon_z-\frac{1}{2}\rho g\int_S(\xi^2-H^2)dS+\vec{F}\cdot\vec{\varepsilon}.$$

Шукані змінні представимо у вигляді

$$\xi=\sum_i a_i(t)\psi_i(r,\theta),\ \varphi=\sum_i b_i(t)\varphi_i(r,\theta,z),$$

де $\varphi_i=\psi_i\dfrac{\cosh\kappa_i(z+H)}{\kappa_i\sinh\kappa_i H}$, а ψ_i є формами коливань вільної поверхні, які для циліндричного резервуару визначаються аналітично [1]. В комплексі такий підхід є варіантом методу Канторовича [2, 3], який дозволяє від континуальних змінних φ і ζ перейти до дискретних змінних a_i і b_i. В роботі [1] запропоновано також алгоритм, який дозволяє до розв'язання задачі динаміки визначити залежності між a_i і b_i. В підсумку одержимо таку систему розв'язучих рівнянь відносно амплітудних параметрів руху вільної поверхні рідини і параметрів поступального руху резервуара.

$$\sum_i\ddot{a}_i\left(\beta^q_{ri}+\sum_j a_j\gamma^q_{rij}+\sum_{i,j}a_ia_j\delta^q_{rijk}\right)+$$

$$+\ddot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left(\vec{B}^r_r+\sum_i a_i\vec{B}^r_{ri}+\sum_{i,j}a_ia_j\vec{B}^r_{rij}+\sum_{i,j,k}a_ia_ja_k\vec{B}^r_{rijk}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j(\gamma^q_{ijr}-2\gamma^q_{rij})+ \tag{6}$$

$$+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_ja_k(\delta^q_{ijkr}-2\delta^q_{rijk})-\frac{1}{2}g\alpha^r_r-gN_ra_r+$$

$$+\ddot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\vec{B}^r_r+\sum_i a_i(\vec{B}^r_{ir}-\vec{B}^r_{ri})+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j}\dot{a}_ia_j2(\vec{B}^r_{ijr}-\vec{B}^r_{rij})+\sum_{i,j,k}\dot{a}_ia_ja_k3(\vec{B}^r_{ijkr}-\vec{B}^r_{rijk})\right\}$$

$$\frac{\rho}{(M_\infty+M_p)}\left\{\sum_i\ddot{a}_i\left[\vec{B}^1_i+\sum_j a_j\vec{B}^2_{ij}+\sum_{j,k}a_ja_k\vec{B}^3_{ijk}\right]\right\}+$$

$$+\ddot{\vec{\varepsilon}}=\frac{\vec{F}}{(M_\infty+M_p)}-g\vec{k}- \tag{7}$$

$$-\frac{\rho}{(M_\infty+M_p)}\left\{\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j\vec{B}^2_{ij}+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_ja_k2\vec{B}^3_{ijk}\right\}$$

Тепер система рівнянь (6), (7) являє собою однорідний математичний об'єкт – систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно амплітудних параметрів руху вільної поверхні рідини і параметрів руху резервуара як твердого тіла. Як зазначено в [1], ця система має мінімальну розмірність: число незалежних змінних дорівнює числу ступенів вільності системи. Кількість дискретних параметрів, якими визначається рух рідини, обирається в залежності від типу задачі. Для перехідних процесів в більшості випадків береться до розгляду 10–15 форм коливань рідини. Лінійність системи рівнянь відносно других похідних невідомих створює підстави для нескладного перетворення рівнянь до форми Коші з можливістю застосування стандартних процедур чисельного інтегрування рівнянь по часу. При цьому матриця породжуючої системи рівнянь є одиничною, періоди коливань за кожною формою власних коливань відомі, що дозволяє просто визначити крок інтегрування і сприяє стійкості програмної реалізації.

Моделювання процесу розгону/гальмування руху резервуара з рідиною

Розглянемо задачу розгону/гальмування руху резервуара з рідиною під дією різних типів імпульсів (керуючих дій). При цьому для випадку розгону вважалося що у вихідному стані система резервуар–рідина перебувала в стані спокою.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Розглядалася дія на систему восьми різних типів імпульсів різного виду, які надавали системі однакову кількість руху за однаковий час. Для розрахунків приймалася тривалість імпульсів 1 *с*, всі імпульси надавали системі кількість руху $0{,}75(M_p + M_ж)Nc$. Форма імпульсів задавалася так: 1 – прямокутний імпульс; 2 – імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним переднім фронтом; 3 – імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним заднім фронтом; 4 – імпульс у вигляді півперіода синусоїди; 5 – імпульс у вигляді $sin\pi/2$ (чверть періоду синусоїди з вертикальним заднім фронтом); 6 – імпульс у вигляді $sin\pi(1-t)/2$ (чверть періоду синусоїди з вертикальним переднім фронтом); 7 – імпульс у вигляді $1-sin\pi/2$ (перевернута чверть періоду синусоїди з вертикальним переднім фронтом) ; 8 – імпульс у вигляді $1-sin\pi(1-t)/2$ (перевернута чверть періоду синусоїди з вертикальним заднім фронтом) (Рис. 2 *а, б*).

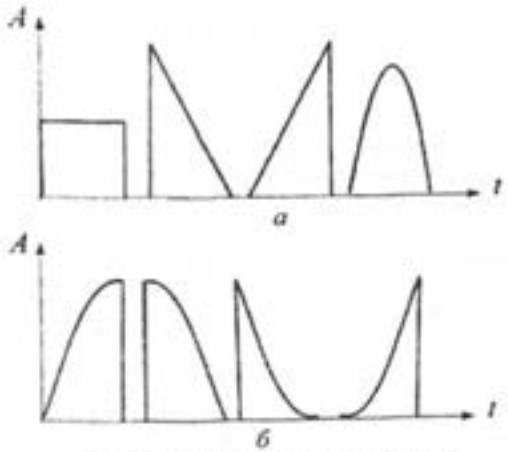


Рис. 2 Форми силових імпульсів

Моделювання поведінки системи при розгоні здійснювалося на чисельного інтегрування основі системи рівнянь (6)–(7). Результати цих розрахунків наведені в Таблицях 1, 2. В таблицях приведені такі дані: ξ_{max} – максимальне значення збурення вільної поверхні рідини, яке відбувається в момент часу $t(\xi_{max})$; V_{max} – максимальне значення швидкості резервуару; $S(5c)$ – шлях, який проходить резервуар за 5 *с* (за час тривалості силового імпульсу, збільшеного в п'ять разів); R_{max} – максимальне значення сили взаємодії резервуара з рідиною.

Моделювання поведінки системи при гальмуванні наведені в Таблицях 3, 4. При цьому вважалося, що в початковий момент часу резервуар з рідиною рухається квазітвердим чином з початковою швидкістю 1 *м/с*, збурення вільної поверхні відсутні. Силові імпульси обиралися як і у випадку розгону, але протилежної дії (перевернуті по амплітуді). В таблицях приведені такі данні: ξ_{max} – максимальне значення збурення вільної поверхні рідини, яке відбувається в момент часу $t(\xi_{max})$; V_{min} – мінімальне значення швидкості резервуару; $S(2c)$ – шлях, який проходить резервуар за 2 *с* (за час тривалості силового імпульсу, збільшеного в два рази); R_{max} – максимальне значення сили взаємодії резервуара з рідиною. Числові данні одержані на основі інтегрування рівнянь моделі системи (6)–(7).

Таблиця 1.

Розгін	1	2	3	4
ξ_{max}	0,1241	0,1821	0, 1489	0,1731
$t(\xi_{max})$	0,60	0,56	1,02	0,76
V_{max}	0,6848	0,5855	0,7712	0,6476
$S(5c)$	3,3656	3,4815	3,2512	3,3562
R_{max}	0,5328	0,7929	0,6535	0,7527

Таблиця 2.

Розгін	5	6	7	8
ξ_{max}	0,1728	0,1409	0,2133	0, 1950
$t(\xi_{max})$	0,56	0,94	1,02	0,76
V_{max}	0,5773	0,7350	0,6669	0,8463
$S(5c)$	3,4595	3,2701	3,5213	3,2022
R_{max}	0,7501	0,6121	0,9362	0,8642

Таблиця 3.

Гальм.	1	2	3	4
ξ_{max}	0,1242	0,1808	0,1495	0, 1729
$t(\xi_{max})$	0,62	0,54	0,76	1,02
V_{min}	0,3199	0,4095	0,2280	0,3463
$S(2c)$	0,8608	0,7309	0,9904	0,8410
R_{max}	0,5258	0,7575	0,6521	0,8410

Таблиця 4.

Гальм.	1	2	3	4
ξ_{max}	0,1416	0,1718	0,2105	0, 1944
$t(\xi_{max})$	0,94	0,56	0,50	1,08
V_{min}	0,2634	0,4143	0,3357	0,1547
$S(2c)$	0,9626	0,7506	0,6781	1,0580
R_{max}	0,6152	0,7233	0,8813	0,8442

Kyiv National Taras Shevchenko University

Аналіз результатів моделювання

Аналіз результатів розрахунків показує, що у випадку розгону серед імпульсів рівної тривалості і площі найбільші значення збурень вільної поверхні (а значить і впливу руху рідинного наповнення на рух резервуару) здійснюють імпульси 2, 3, 7, 8, тобто ті, що відповідають найбільшим значенням амплітуди. Відповідно випадки 1, 4 відповідають найменшим значенням збурень вільної поверхні рідини. Наявність переднього вертикального фронту імпульсу сприяє більш ранньому зростанню збурень на вільній поверхні до своїх максимальних значень. Максимальні значення силової взаємодії резервуара з рідиною також прямо пов'язані із величинами максимальних значень силових імпульсів. Тобто при розгоні найкращі результати з точки зору обмеження коливань рідини дають випадки 1, 4. Пройдений за п'ять інтервалів тривалості імпульсів шлях в значній мірі вирівнюється. Зауважимо, що якщо порівнювати пари подібних імпульсів 2–3, 5–6, 7–8, то у всіх випадках вертикальність переднього фронту сприяє як збільшенню збурень на вільній поверхні рідини, так і зростанню значень силової взаємодії резервуара з рідиною. До того ж імпульси з вертикальним передніми фронтом не призводять до максимальних швидкостей розгону. Тобто, їхнє використання не є доцільним.

У випадку гальмування руху системи серед імпульсів рівної тривалості і площі найбільші значення збурень вільної поверхні (а значить і впливу руху рідинного наповнення на рух резервуару) здійснюють імпульси 2, 4, 6, 7, 8, тобто ті, що відповідають найбільшим значенням амплітуди. Проте випадки 1, 3, 5 відповідають найменшим значенням збурень вільної поверхні рідини, що зумовлене плавними законами зміни сили на початковому етапі гальмування. Знову наявність переднього вертикального фронту імпульсу сприяє більш ранньому зростанню збурень на вільній поверхні до своїх максимальних значень. Максимальні значення силової взаємодії резервуара з рідиною також прямо пов'язані із величинами максимальних значень силових імпульсів. Тобто при гальмуванні найкращі результати з точки зору обмеження коливань рідини дають випадки 1, 3, 5. Пройдений за два інтервали тривалості імпульсів шлях суттєво відрізняється. Найкращі показники гальмування за результатами забезпечення максимального перепаду швидкості руху резервуару дають випадки 3 і особливо 8, для яких набір максимальних значень здійснюється повільно. Тобто знову для випадку гальмування використання імпульсів з вертикальними передніми фронтами недоцільне. Аналіз силової взаємодії для імпульсів з вертикальними задніми фронтами вказує, що силова взаємодія знову виявляється пропорційною максимальній амплітуді силового імпульсу. Порівняння пар подібних імпульсів 2–3, 5–6, 7–8 показує, що у всіх випадках вертикальність переднього фронту сприяє як збільшенню збурень на вільній поверхні рідини, так і зростанню значень силової взаємодії резервуара з рідиною. До того ж імпульси з вертикальним переднім фронтом не призводять до максимальних швидкостей розгону. Тобто, їхнє використання знову не є доцільним.

Висновки

В роботі розглянуто задачу динаміки резервуара з рідиною з вільною поверхнею. Математичну модель руху такої системи, яка описується сукупністю різнорідних математичних об'єктів, на основі методу модальної декомпозиції перетворено до вигляду математичного об'єкту однорідної структури. На основі розвиненої моделі досліджено задачу про розгін/гальмування резервуара з рідиною силовими імпульсами різної форми (8 варіантів). Аналіз числових даних показує, в задачах розгону та гальмування використання силових імпульсів з вертикальним переднім фронтом є недоцільним як з точки зору збудження рухомості рідини (амплітуди хвиль на вільні поверхні і силова взаємодія), так і з точки зору забезпечення зростання швидкості при розгоні і падіння швидкості при гальмуванні. Частина з одержаних результатів для випадку розгону руху резервуара (випадки 1–3) порівнювалися для раніше одержаних результатів по розгону резервуара прямокутної форми. Одержані результати дали задовільну якісну узгодженість. Результати досліджень можуть бути використані для вибору оптимальних законів керування рухомими об'єктами з рідиною.

Список використаних джерел

1. *Лимарченко О.С.* Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / *О.С Лимарченко, Дж. Матараццо, В.В. Ясинский.* – Киев: "Гнозис", 2002. – 304с.
2. *Миклин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / *С.Г. Миклин.* – Мос-ква: Наука, 1970. – 512 с.

Надійшла до редколегії 20.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки **2012, 3** *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 519.7

Андрій А. Єфіменко, аспірант

Задача оптимального керування екстенсивним розвитком мережі інформаційно-комунікаційного підприємства

В роботі побудовано чисельний алгоритм розв'язання задачі оптимального керування екстенсивним розвитком мережі інформаційно-комунікаційного підприємства в умовах обмеженого фінансування.

Ключові слова: інформаційно-комунікаційна мережа, інформаційно-комунікаційні послуги, фонди підприємства, конкуренція, граф мережі, оптимальне керування.

Andrii A. Yefimenko, postgraduate (PhD)

The optimal control problem of extensive enlargement of network for information-communication's company

The article presents a result of development of optimal control numerical algorithm for extensive enlargement of information-communication's company network in the conditions of limited finance support.

Key words: information and communication networks, information and communication services, capital (founds of enterprise), competition, network graph, optimal control..

E-mail: *yefim1976@gmail.com*

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Ефективне функціонування сучасного підприємства сфери інформаційно-комунікаційних технологій неможливе без постійного розширення, удосконалення та розвитку його технічної та технологічної бази, зокрема апаратних та програмних складових його інформаційно-комунікаційної мережі. Діяльність такого підприємства на сьогоднішньому етапі розвитку технологій відбувається у жорстких умовах конкурентної боротьби між підприємствами за споживача інформаційно-комунікаційних послуг. Тому виникає проблема постійного підвищення рівня конкурентоспроможності підприємства. Ця проблема вирішується за рахунок оптимального керування підприємством, зокрема, внутрішніми інвестиціями у власні фонди і конкурентоспроможність.

Модель активної організаційної системи підприємства, яке реалізує інформаційні послуги на ринку через розподілену інформаційно-комунікаційну мережу може бути представлена за допомогою дворівневої ієрархічної моделі (організаційної структури) [1], [2]. На рівні аналізу основних видів діяльності підприємства розглядаються різні види керування, що призводить до цільової декомпозиції загальної моделі функціонування системи (рис. 1).

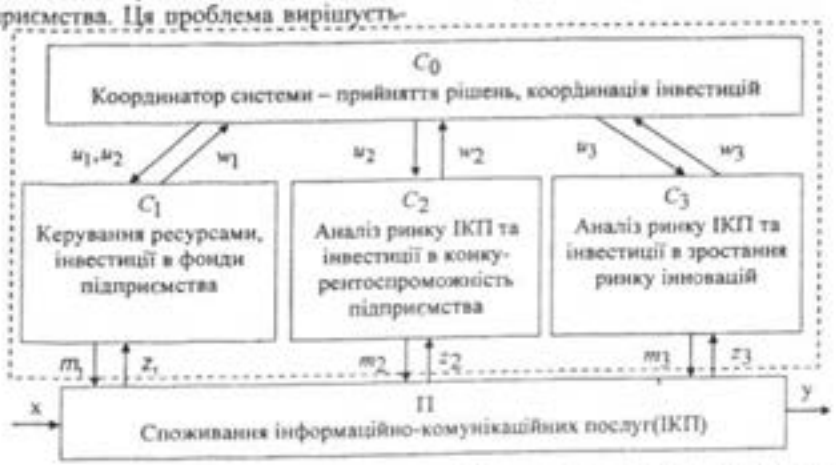


Рис. 1. Ієрархічна система оптимального керування інформаційно-комунікаційним підприємством

© А. А. Єфіменко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Центр системи C_0 відповідає за прийняття рішень по розподілу фінансових ресурсів: 1) інвестицій в екстенсивний розвиток підприємства, його розширення $U_1 \in U_1$; 2) інвестицій в інтенсивний розвиток підприємства (зокрема за рахунок використання патентів та нових технологій), підвищення його конкурентоспроможності на ринку $U_2 \in U_2$; 3) інвестицій в зростання ринку інноваційного продукту $U_3 \in U_3$.

Таким чином C_0 координує роботу підсистем C_i $(i = \overline{1,3})$. Зазначені підсистеми здійснюють керуючі впливи на процес споживання інформаційно-комунікаційних послуг. Для задоволення принципу координації дворівневої системи визначимо задачі кожної підсистеми та множини параметрів, які характеризують систему в цілому.

На рівні керування процесу П підсистемою C_1 «Керування ресурсами, інвестиції в фонди підприємства» розв'язується задача оптимального керування фондами підприємства за рахунок внутрішніх інвестицій, виділених координатором системи C_0, в екстенсивний та інтенсивний розвиток інформаційно-комунікаційної системи. На рівні керування процесом П підсистемами C_2 «Аналіз ринку інформаційно-комунікаційних послуг та інвестиції в конкурентоспроможність підприємства», C_3 «Аналіз ринку інформаційно-комунікаційних послуг та інвестиції в зростання ринку інновацій» розглядається задача моделювання динаміки вартості послуг, які надаються підприємством в умовах ринкової конкуренції, керування конкурентоспроможністю підприємства на ринку послуг і керування збільшення інноваційного ринку інформаційно-комунікаційних послуг за рахунок виділених внутрішніх інвестицій.

Формалізуємо розподілену систему k-го підприємства, що функціонує на ринку, за допомогою мережевої моделі: $G = < S, L >$,

де $S = \left\{ s_i \middle| \begin{array}{l} s_i = < e_i, o_i, q_i, d_i >, \\ h_i, z_i, q_i \in R^*, d_i \in D_i (i = \overline{1, v(t)}) \end{array} \right\}$ – множина технічних вузлів мережі, яка обслуговує споживачів інформаційно-комунікаційних послуг; s_i – ідентифікатор i-го вузла (запис у списку, адреса), який містить посилання на структуру з полями e_i, o_i, q_i, d_i; e_i – пропускна здатність вузла; o_i – об'єм пам'яті носіїв інформації; q_i – вартість вузла (в яку включено вартість обладнання, системного та прикладного ПЗ, засобів захисту інформації); d_i – каталог інформації, записаний на носіях вузла; R^* – множина невід'ємних дійсних чисел; D – множина каталогів інформації; $v(t)$ – кількість вузлів $(0 \le v(t) \le v_0)$; v – максимальна кількість вузлів мережі; $t \in [0, T]$ – час моделювання процесу керування мережею. Множина каналів зв'язку між s_i, s_j вузлами мережі:

$$L = \left\{ l_{ij} \middle| l_{ij} = < a_{ij}, b_{ij} >; a_{ij}, b_{ij} \in R^*, (i, j = \overline{1, v(t)}) \right\}$$

де l_{ij} – ідентифікатор каналу зв'язку, який містить посилання на структуру з полями a_{ij} та b_{ij}: a_{ij} – пропускна здатність каналу; b_{ij} – вартість каналу.

На першому етапі в системі формується глобальна мережа $G = < S, L >$, що містить множину всіх можливих вузлів мережі та зв'язків між ними. $G = < S, L >$ є формалізацією всіх об'єктів інформаційно-комунікаційної системи, які реально існують і потрапляють в сферу інтересів координуючого центру C_0. У довгостроковій перспективі $G = < S, L >$ може розвиватися та доповнюватися новими елементами, проте на протязі розглядуваного періоду моделювання процесу управління $t \in [0, T]$ мережа $G = < S, L >$ є заданою і залишається незмінною. У початковий момент часу ідентифікатори $s_i \in S$, $l_{ij} \in L$ містять вихідні адреси вузлів і каналів зв'язку $G(0)$. В межах множини G розглядаються створення і розвиток поточної мережі $G(t)$, яка може розвиватися і переходити з певного стану $G(t_1)$ в стан $G(t_2)$. При цьому змінюються кількість вузлів, каналів зв'язку між ними, їх технічні та вартісні характеристики. Ідентифікатори мереж s_i, l_{ij}, яка містить адреси вузлів та каналів зв'язку, завжди обираються з множин S, L.

На рівні координації C_0 може бути розглянуто три різних сценарії керування підприємством в залежності від стратегічних цілей та планів екстенсивного або інтенсивного шляху розвитку, що сформульовані у вигляді відповідних задач

Kyiv National Taras Shevchenko University

оптимального керування. Надалі ми розглядатиме тільки задачу оптимального керування екстенсивного розвитку підприємства (захоплення ринку) – збільшення кількості вузлів та каналів інформаційно-комунікаційної мережі при обмеженнях на об'єми фінансування та критерії максимізації можливого прибутку підприємства.

На просторі $\Sigma_{J_1} = \{N \times U_1\}$ (N – множина натуральних чисел) введемо критерій якості керування – функціонал $J_1^{(k)}(v, u_1)$ і розглянемо задачу:

$$u_1^*(t) = \arg\max_{u_1(T)\in U} J_1^{(k)}(v^{(k)}, u_1) =$$

$$= \arg\max_{u_1(T)\in U}(v^{(k)}(u_1, T) / v)^*.$$

$$I^{(k)} = R^{(k)}(u(t)) - u_1(t) - Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}) \geq 0,$$

$$R^{(k)} \leq P^{(k)} = F^{(k)}(\Phi^{(k)}),\ G^{(k)}(t) \in G,$$

$$u_1(t) \geq 0,\ u_2(t) = 0,\ u_3(t) = 0.$$

де $v^{(k)}(u_1, T)$ – кількість технічних вузлів мережі k-го підприємства, що обслуговує споживачів інформаційно-комунікаційних послуг, $I^{(k)}$ – вільні кошти підприємства, $R^{(k)}$ – вартість послуг, що надаються підприємство в мережі, $u_1(t)$ – інвестиції у фонди підприємства, $Z_0^{(k)}$ – витрати, $\Phi^{(k)}(t)$ – вартість задіяних (активних) фондів k-го підприємства, $P^{(k)}$ – виробнича функція показує залежність максимального значення вартості послуг в мережі, що надаються підприємством, в залежності від вартості його фондів, $u(t)$ – загальна функція керування

Обмеження для задачі є критерієм зупинки процесу моделювання у випадку якщо в деякий момент часу керування не дає змоги задовольнити дану умову. Тоді підприємство може стати збитковим.

Інформаційно-комунікаційна мережа підприємства надається у вигляді графа, в якому вершинам відповідає певне комунікаційне обладнання (комутатори, маршрутизатори, сервери та інші мережеві пристрої), а ребрам – канали зв'язку. Ребра графа та вершини мають обмеження пропускної здатності, кількості інтерфейсів для підключення каналів між вузлами, кількості інтерфейсів для користувачів.

Розглянемо поетапно алгоритм розв'язування задачі оптимального керування розширенням мережі підприємства (рис. 2):

Етап 1. Побудова графу поточного стану інформаційно-комунікаційної мережі підприємства з зазначенням характеристик вузлів (s_i) та каналів зв'язку (l_{ij}) та територіальною прив'язкою (Tp_i).

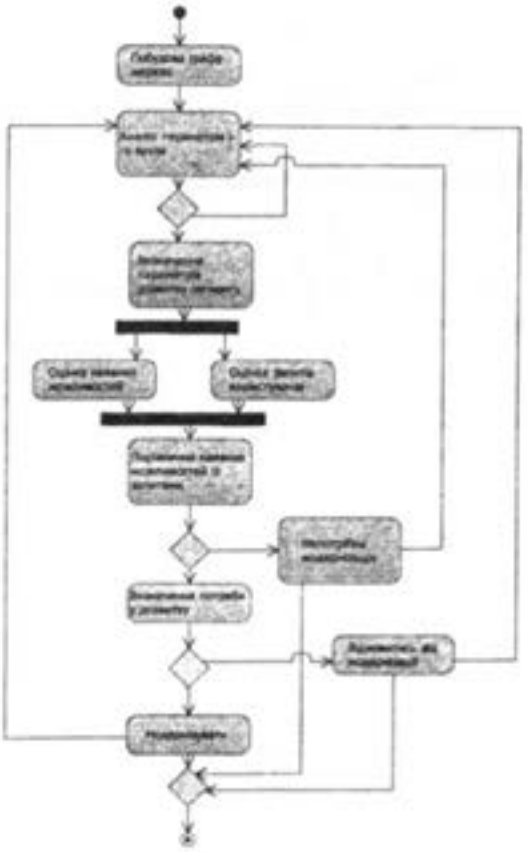


Рис. 2. Діаграма дій для оптимального керування розширенням мережі (етапи 1-13)

Етап 2. Аналіз сегментів ринку інформаційно-комунікаційних послуг в певних регіонах чи субрегіонах (визначення кількості споживачів (α_i), їх категорій (α_g) в розрізі фінансових можливостей (ω_j) для отримання послуг) у прив'язці до попередньо побудованого графу.

$$Tp = \left\{ Tp_i \middle| \begin{array}{l} < a_i, \omega_j >; a_i = \sum_{j=1}^{n} a_g \omega_j \in R^+, \\ (i = \overline{1, v(t)}), (n \in \overline{1, J}) \end{array} \right\},$$

де J – максимальна кількість категорій споживачів.

Етап 3. Аналіз перспективних сегментів ринку інформаційно-комунікаційних послуг в регіонах чи субрегіонах з точки зору присутності конкуруючих підприємств (аналіз

Kyiv National Taras Shevchenko University

долі ринку в розрізі кількості користувачів, їх фінансових витрат на послуги, аналіз технічних та технологічних можливостей конкурентів).

$$Tp^* = \left\{ Tp_i \middle| \begin{matrix} \alpha_i \geq a^*; \overline{\omega_{ij}} \geq \omega^*; a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \\ \overline{\omega_{ij}} = \frac{a_{ij}\omega_j}{a_{ij}} \in R^+; (i = \overline{1, v(t)}, (n \in \overline{1, J}) \end{matrix} \right\}.$$

Для кожного Tp_i^* визначається:

$$Tp^* = \left\{ Tp_i^* \middle| \begin{matrix} < \alpha^k{}_{0i}, e^k{}_i, q_i^k, o_i^k >; \\ a_{0i} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k{}_{0i}, e^k{}_i, q_i^k, o_i^k \in R^+; \\ (i = \overline{1, v(t)}, (n \in \overline{1, K}) \end{matrix} \right\},$$

де K – максимальна кількість конкурентів у територіальному вузлі.

Етап 4. Визначення частини користувачів (γ_i), які зацікавлені отримувати інформаційно-комунікаційні послуги підприємства (γ_i^k) (отримуватимуть послуги вперше або зацікавлені в переході від конкурентів) та їх фінансових можливостей ($\omega^k{}_{ij}$) для кожного регіону/субрегіону.

$$\gamma = \left\{ \gamma_i \middle| \begin{matrix} < \gamma_i^k, \omega^k{}_{ij} >; \\ \gamma_i^k = f(\alpha_{ik}^*, t), \omega^k{}_{ij} \in R^+; \\ (i = \overline{1, v(t)}, (n \in \overline{1, K}) \end{matrix} \right\}.$$

Етап 5. Оцінка доходу (виручки) (P) підприємства від визначеної на попередньому етапі частини користувачів для кожного регіону/субрегіону та сумарного доходу.

$$P = \sum_{i=0}^{n} P_i \middle| P_i = f(Tp_i^*, \gamma_i), (i = \overline{1, v(t)})$$

Етап 6. Оцінка запитів користувачів з точки зору технічних можливостей обладнання та каналів зв'язку, комплексу технічних та технологічних факторів.

$$Z = \left\{ Z_i \middle| \begin{matrix} < e^*{}_i, q_i^*, o_i^* >; \\ (i = \overline{1, v(t)}) \end{matrix} \right\}.$$

Етап 7. Оцінка можливостей наявної інформаційно-комунікаційної інфраструктури по частковому задоволенню запитів користувачів.

$$\Delta Z = \left\{ (Z_i op S_i) (i = \overline{1, v(t)}) \right\},$$

де op – операція логічного порівняння наявних можливостей вузла з запитами користувачів.

Етап 8. Модифікація графу стану мережі із визначенням перспективних напрямів розвитку інформаційно-комунікаційної системи підприємства з врахуванням даних попередніх етапів.

Етап 9. Вибір обладнання та каналів зв'язку для проекту розвитку мережі з кожному регіоні/субрегіоні з врахуванням можливих перспектив подальшого розширення.

Етап 10. Оцінка фінансових витрат на реалізацію розширення мережі у регіоні/субрегіоні та загальних витрат по розширенню мережі.

$$S^* = \left\{ s^* \middle| \begin{matrix} s^* = < e^*{}_i, o^*{}_i, q^*{}_i, d^*{}_i >; \\ e^*{}_i, o^*{}_i, q^* \in R^*, d^*{}_i \in D_i (i = \overline{1, v(t)}) \end{matrix} \right\}.$$

Етап 11. Порівняння розрахунку витрат з виділеними обмеженими фінансовими ресурсами.

Етап 12. При перевищенні витрат прийняття рішення про відсікання гілки (гілок) графа певного регіону/субрегіону з врахуванням перспектив розвитку гілок, що залишаються.

$$R^* = \begin{cases} 1, q_i^* \leq q_i^* \\ 0, q_i^* > q_i^* \end{cases}$$

Етап 13. Прийняття рішення про впровадження проекту розвитку інформаційно-комунікаційної мережі.

Висновки

Застосування методів оптимального керування багаторівневими ієрархічними системами за Штекельбергом та алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків на графах дозволило побудувати ефективний алгоритм, який працює в режимі реального часу, для розв'язування задачі оптимального керування екстенсивним розвитком мережі інформаційно-комунікаційного підприємства в умовах обмеженого фінансування.

Список використаних джерел

1. *Moiseev N.N.* Mathematical problems of system analysis. M.: Nauka. – 1986.– 487 p.
2. *Mesarovic M.D., Macko D., Takahara Y.* Theory of hierarchical multilevel systems. M.: Mir.– 1973.– 344 p.
3. *Novikov D.A.* Networking and organizational systems.– M.: IPURAN, 2003.–102 p.
4. *Intrilligator M.* Mathematical optimization techniques and economic theory. – M.: Iris-Press. – 2002. – 553 p.

Надійшла до редколегії 05.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 519.254

Жирицький* В.П.

Методи оцінювання надійності тестів у системі дистанційного навчання «VITAVA»

У статті розглянуті методи побудови оцінок надійності тестів, які реалізовані у системі дистанційного навчання «VITAVA». Наведені переваги та недоліки кожного методу.

Ключові слова: надійність тесту, тестові завдання, методи оцінювання надійності тестів.

V.P. Zhyrytskyy

Methods for evaluating the reliability of tests in distance learning system «VITAVA»

This paper deals with methods for constructing estimates of tests' reliability that are implemented in the distance learning system «VITAVA». Listed advantages and disadvantages of each method.

Keywords: reliability of test, test items, methods for evaluating the reliability of tests.

*E-mail: v.zhiritskiy@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ та постановка проблеми

Розвиток нових інформаційних технологій зробили реальністю застосування обчислювальних засобів для автоматизованого збору, збереження, обробки і передачі даних. Це зумовило потужний поштовх для розвитку систем дистанційного навчання та методик тестового оцінювання знань за допомогою комп'ютерного тестування.

З метою всебічного оцінювання знань почалось впровадження різних видів тестових завдань у тести. Таке наповнення тестів привело до нової проблеми, яка полягає у надійності тестів, що використовуються під час комп'ютерного тестування рівня знань студентів.

Кілька останніх років спостерігається тенденція щодо створення Intranet- та Internet-орієнтованих систем дистанційного навчання, які спрощують процес підготовки тестових завдань, відбір тестових завдань для тесту і представлення результатів тестування у різних предметних областях.

На жаль, під час розробки систем дистанційного навчання, велику увагу приділяють функціональним можливостям по управлінню навчальним матеріалом – створенню дистанційних курсів, підручників, модулів, бібліотек, та інше і значно меншу увагу приділяють забезпеченню функціональним можливостям підсистеми тестування рівня знань студентів. Цей факт є важливим недоліком, оскільки від надійності тесту як інструменту вимірювання залежить об'єктивність інформації про рівень знань студентів, можливість порівняння рівня знань студентів між собою та інше.

За останні десятиліття зроблено суттєвий крок в напрямку дослідження тестів, тестових завдань, підходів, методів та алгоритмів реалізації базових задач, які виникають на основних етапах тестування за допомогою автоматизованих систем.

Статистичним обґрунтуванням якості, надійності тестів, методами конструювання гомогенних педагогічних тестів займалися В. С. Аванесов, М. Б. Челишкова [1; 9] та інші.

Математичні моделі, методи та алгоритми тестування рівня знань за допомогою автоматизованих систем можна знайти в роботах [5; 6; 8].

Розробка програмних засобів автоматизації тестування рівня знань користувачів і впровадження в практику нових методик комп'ютерного оцінювання описується в статтях [3; 4].

Проте, незважаючи на наявність наукових праць з проблем використання інформаційних технологій в цій галузі, методи оцінювання надійності тестів недостатньо розроблені у вітчизняній системі освіти.

Метою даної статті є розробка методів оцінювання надійності тестів та їх реалізація у системі дистанційного навчання «VITAVA».

Підходи до оцінювання надійності тесту

Для оцінки рівня знань студентів в певній області необхідно перевірити виконання ними

© В.П. Жирицький, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

великої кількості тестових завдань різної складності. Але очевидно, що на практиці будь-який тест складається із обмеженої кількості тестових завдань. У зв'язку з цим постає питання про оцінку точності вимірювання рівня знань студентів на скінченній кількості тестових завдань. Надійний тест повинен давати стійкі оцінки рівня знань студентів при повторному його використанні. Це означає, що незначні зміни умов тестування і стану студентів приводять до незначних змін результатів тестування.

В теорії тестування процес обґрунтування точності вимірювання результатів тестування передбачає оцінку надійності тесту. Надійність тесту – це характеристика тесту, яка відображає стійкість результатів тестування до дії випадкових факторів ([7]).

Таким чином, індивідуальний бал X_i, який отримує i-ий студент за результатами виконання тестових завдань запишемо у вигляді:

$$X_i = T_i + E_i, \qquad (1)$$

де T_i - істинний індивідуальний бал i-го студента, а E_i - помилка, яка характеризує вплив випадкових факторів на істинний бал i-го студента.

Нехай

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\,,\ \overline{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i\,,\ \overline{E} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_i$$

тоді

$$\overline{X} = \overline{T} + \overline{E}\,. \qquad (2)$$

Враховуючи формули (1) і (2) отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})^2 + \sum_{i=1}^{N}(E_i - \overline{E})^2 + 2\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})(E_i - \overline{E})$$

Для вибіркової дисперсії маємо

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(E_i - \overline{E})^2 +$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})(E_i - \overline{E}) \qquad (3)$$

або

$$DX = DT + DE + \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})(E_i - \overline{E}) \qquad (4)$$

де

$$DX = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2\,,\ DT = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})^2\,,$$

$$DE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(E_i - \overline{E})^2\,.$$

В теорії тестування вважають

$$\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})(E_i - \overline{E}) \qquad (5)$$

не значимим і тому цим доданком знехтуємо.

У цьому випадку з формули (4) отримаємо:

$$DX = DT + DE \qquad (6)$$

Надійність тесту повинна показати, в якій мірі індивідуальні бали X можна вважати істинними індивідуальними балами студентів. Кількісною мірою надійності є коефіцієнт надійності, який позначається $\rho_N \in [0;1]$ і характеризує долю дисперсії істинних індивідуальних балів в загальній дисперсії:

$$\rho_N = \frac{DT}{DX}$$

Враховуючи, що з формули (6) випливає:

$$DT = DX - DE\,,$$

отримаємо:

$$\rho_N = \frac{DT}{DX} = \frac{DX - DE}{DX} = 1 - \frac{DE}{DX}\,, \qquad (7)$$

У таблиці 1 наведені значення коефіцієнта надійності та його інтерпретація.

Таблиця 1

Значення коефіцієнта надійності та його інтерпретація

Діапазон значень	Інтерпретація
$\rho_N \geq 0.90$	Дуже висока надійність тесту
$\rho_N \in [0.80; 0.89]$	Висока надійність тесту
$\rho_N \in [0.7; 0.8)$	Середня надійність тесту
$\rho_N \in [0.65; 0.7)$	Допустима надійність тесту
$\rho_N < 0.65$	Тест не надійний

Дослідження критеріїв надійності тестів призвели до виникнення численних методів обґрунтування надійності тесту, які взаємно доповнюють один одного [2, 7, 9]. Кожен із методів має свої переваги і недоліки, свою

Kyiv National Taras Shevchenko University

область застосування і свої особливості в інтерпретації оцінок надійності тестів.

Методи оцінювання надійності тестів наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Методи оцінювання надійності тестів

Група методів	Метод
методи, основані на повторному тестуванні	ретестовий метод
	метод паралельних форм
методи, основані на одноразовому тестуванні	метод розщеплення тесту
	метод Рюлона
	метод Кьюдера-Річардсона
	коефіцієнт альфа Кронбаха

На практиці віддають перевагу методам, основаним на одноразовому тестуванні, оскільки оцінка надійності, підрахована за ретестовим методом, залежить від часового періоду між першим та другим тестуванням, застосування методу паралельних форм вимагає додаткових зусиль т'ютора для розробки паралельних форм одного і того ж тесту.

В системі дистанційного навчання «VITAVA» реалізовані методи, основані на одноразовому тестуванні. Розглянемо їх детальніше.

Метод розщеплення тесту

Метод розщеплення тесту на дві частини найбільш поширений завдяки своїй зручності у підрахунку, оскільки дозволяє підраховувати оцінку надійності тесту при одноразовому тестуванні студентів.

Для застосування цього методу тестові завдання у відкоригованій матриці тестових результатів (матриця тестових результатів, з якої вилучені екстремальні тестові завдання) розбивають на дві множини. Таке розбиття можна провести декількома способами: до першої множини включають результати тестування студентів по першій половині тестових завдань, до другої – по другій половині тестових завдань або до першої множини включають тестові завдання з парними номерами, до другої - з непарними номерами.

Далі застосовують формулу:

$$(\rho_H)_{1/2} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}{\sqrt{N\sum_{i=1}^{N}(X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}(X_i)\right)^2}\sqrt{N\sum_{i=1}^{N}(Y_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}(Y_i)\right)^2}} \quad (8)$$

де X_i - індивідуальний бал (сумарний) i-го студента по тестових завданнях з першої множини ($i = 1, 2, \ldots, N$); Y_i - індивідуальний бал i-го студента по тестових завданнях з другої множини ($i = 1, 2, \ldots, N$).

Підрахований за методом розщеплення тесту коефіцієнт кореляції не є оцінкою надійності всього тесту, оскільки підрахунок проводиться не по n тестових завданнях, а по $n/2$. Оцінку надійності всього тесту підраховують за формулою Спірмана-Брауна:

$$\rho_H = \frac{2(\rho_H)_{1/2}}{1+(\rho_H)_{1/2}},$$

де $(\rho_H)_{1/2}$ - підрахований коефіцієнт кореляції для $n/2$ тестових завдань.

Метод Рюлона

Альтернативний метод підрахунку надійності тесту по двох половинах тесту був розроблений Рюлоном ([9]). Коефіцієнт надійності тесту підраховують за формулою:

$$(\rho_H)_P = 1 - \frac{S_d^2}{S_x^2},$$

де S_x^2 - дисперсія індивідуальних балів;

S_d^2 - дисперсія різниць між індивідуальними балами кожного студента по обох половинах тесту, яку підраховують за формулою:

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left((X_i^n - X_i^n) - \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i^n - X_i^n)}{N}\right)^2}{N-1},$$

де $(X_i^n - X_i^n)$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ різниця між індивідуальними балами кожного студента по тестових завданнях з парними та непарними номерами.

Розглянуті вище метод розщеплення тесту та метод Рюлона основані на припущенні паралельності двох половин тесту. Дві половини тесту називаються паралельними, якщо вони відрізняються лише змістом тестових завдань, а основні статистичні характеристики співпадають. На практиці таке припущення не виконується і можна говорити, лише про значимість чи не

Kyiv National Taras Shevchenko University

значимість розбіжності статистичних характеристик. Наступний метод не залежить від даного припущення.

Метод Кьюдера-Річардсона та коефіцієнт альфа Кронбаха

Коефіцієнт надійності тесту за методом Кьюдера-Річардсона підраховують за формулою ([9]):

$$(\rho_н)_{KR-20} = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{S_x^2}\right) \qquad (9)$$

де p_j - доля вірних відповідей на j-те тестове завдання; q_j – доля невірних відповідей на j-те тестове завдання, $q_j = 1 - p_j$; S_x^2 - дисперсія індивідуальних балів; n – кількість тестових завдань у тесті.

Формула (9) використовується для підрахунку коефіцієнта надійності тестів, у яких виконання тестового завдання оцінюється дихотомічно - «вірно» чи «невірно». Для тестів, у яких тестові завдання мають інші правила оцінювання, коефіцієнт надійності необхідно підраховувати за узагальненою формулою (10), яка носить назву коефіцієнт альфа Кронбаха ([9]):

$$(\rho_н)_\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} S_j^2}{S_x^2}\right) \qquad (10)$$

де S_j^2 - дисперсія бальних оцінок для j-го тестового завдання.

Висновки

У статті представлені методи оцінювання надійності тесту, які реалізовані у системі дистанційного навчання «VITAVA».

Оцінка надійності, підрахована як коефіцієнт альфа Кронбаха, вважається найкращим показником надійності. Для тестових завдань, де відповідь оцінюється дихотомічно, рекомендується використовувати метод Кьюдера-Річардсона.

Коефіцієнт надійності тесту може бути використаний для побудови довірчих інтервалів істинних індивідуальних балів студентів, а також для визначення оптимальної кількості тестових завдань у тесті для досягнення допустимої надійності.

Список використаних джерел

1. Аванесов В. С. Форма тестовых заданий [Текст] / Аванесов В. С. - М.: Центр тестирования, 2005. - 155 с.
2. Анастази А. Психологическое тестирование – 7-е изд. / А. Анастази, С. Урбина. – СПб.: Питер, 2007. – 688 с.
3. Білоус Н. В. Модель навчання на основі тестових завдань довільних форм // Освіта і віртуальність-2003: Зб. наук. пр. 6-ої міжн. конф. / Н. В. Білоус, І. В. Войтович. – Харків - Ялта, 2003. – С. 71-75.
4. Боцула М. П. Розробка підсистеми обміну тестами до системи дистанційного навчання "eLearning Server" / М. П. Боцула, Д. П. Зарезенко // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – №2. – С. 68-71.
5. Дьоміна В. М. Методи та моделі оцінювання знань в автоматизованих системах тестування: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.13.06 «Автоматиз. системи упр. та прогрес. інформ. технології» / В. М. Дьоміна. - Харків, 2002. - 19 с.
6. Катасва Є. Ю. Інформаційна технологія автоматизованого навчання та контролю знань в управлінні учбовим процесом. - дис. … канд. техн. наук: 05.13.06 / Катасва Євгенія Юріївна. - Черкаси, 2004. - 221 с.
7. Нейман Ю.М. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов / Ю. М. Нейман, В. А. Хлебников. – Москва, 2000. – 168 с.
8. Федорук П. І. Інтелектуальна система дистанційного навчання та контролю знань / П. І. Федорук // Штучний інтелект. – 2005. – №3. – С. 541-548.
9. Челышкова М. Б. Разработка педагогических тестов на основе современных математических моделей: Учебное пособие. / Челышкова М. Б. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1995. – 32 с.

Надійшла до редколегії 20.06.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 681.3

Івохін Є.В., к.ф.-м.н., доц.

Про організацію автоматичного тестування баз даних

Розглянуто технологію розробки програмного забезпечення, яка базується на повторенні коротких циклів розробки: генерація тесту, створення коду для виконання тесту, рефакторінг нового коду до відповідних стандартів. Детально викладено методику розробки баз даних шляхом автоматичного тестування, що містить організацію підготовки тестів і підтримку навиків тестування.

Ключові слова: програмне забезпечення, рефакторінг, бази даних, автоматичне тестування

Ivokhin E.V., Ph.D., associate professor

About organization of the automatic test-driven database development

It is considered the technology software development which based on short creation cycles: test generation, code creation for test execution, refactoring of new code for the corresponding standard. The method of automatic test-driven database creation, what includes test development organization and support of testing experience is described in detail.

Key words: software, refactoring, database, automatic test-driven development

E-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, проф. Анісімов А.В.

Сьогодні розвиток програмного забезпечення відбувається в напрямку збільшення та ускладнення систем. Це частково пов'язано з тим, що комп'ютери із року в рік стають все більш потужними, а це, в свою чергу, спонукає користувачів очікувати від них більшої допомоги та функціональності. Наші запити у відношенні більш розвинутого програмного забезпечення зростають по мірі того, як з виходом кожного наступного випуску ми починаємо розуміти, яким чином можна покращити цей продукт. Бажання мати програмне забезпечення, яке краще пристосоване для наших нестатків, приводить до ускладнення програм.

Інший важливий стимул розвитку програмного забезпечення (ПЗ) – час виходу на ринок. Практика застосування вимагає появи програмного забезпечення якомога швидше. Зробити це, однак, нелегко. Наше бажання одержати потужні і складні програми не поєднується з тим, як ці програми розробляються. Якщо ми не поліпшимо наші методи, ми не зможемо виконати свою задачу по розробці так необхідного сьогодні складного програмного забезпечення.

Одна з головних проблем створення сучасного програмного забезпечення зводиться до організації роботи розробників, змушених переборювати в ході створення великих проектів багато штучних перешкод. Суспільство розробників ПЗ має потребу в керованому методі роботи. Йому потрібний процес, що об'єднав би безліч аспектів розробки програм.

Більшість методологій направлена на виявлення основних вимог до системи на початкових стадіях розробки та проектування такої архітектури, щоб вона задовольняла цим вимогам та враховувала плани на майбутнє, тобто була би пристосованою до подальшого розвитку системи. Технології розробки стабільної та перспективної архітектури супроводжується процесом отримання та реалізації змін у вимогах замовника. Внесення модифікацій стикається на практиці з складними, занадто бюрократизованими процесами зміни технічного завдання, а це стає на заваді процедурі нормального врахування нових вимог. Раціональне врахування змін є прийнятним і з точки зору розробників, але це може призвести до виникнення однієї досить важливої проблеми: бізнес-середовище, для якого розробляється система не може не змінюватися, а отже, будуть корегуватися вимоги до системи. Якщо мати складний шлях внесення модифікацій в постановку задачі, то можна прийти до ситуації, коли розроблена система, що задовольняє початковим вимогам, вже не буде задовольняти реальній ситуації.

Таким чином, можна сформулювати одну з головних парадигм сучасного стану розробки

©Є.В.Івохін, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

програмного забезпечення: "єдина складова в розробці ПЗ - зміни будуть і вони є необхідними". При цьому треба зазначити, що більшість методологій розробки ПЗ не є достатньо адаптивними для розв'язання цієї проблеми.

Потреба внесення змін в систему, що розробляється, визначає необхідність у створенні механізму для перевірки недеструктивності цих змін. Для роз'язання цієї проблеми можна використовувати модульне та приймальне тестування (UnitTesting). Модульне тестування - це методика автоматичної перевірки працездатності окремої функції, класу чи пакету. Для досягнення автоматичності тестування можна використовувати ту саму мову програмування, що й для розробки програмного коду, та виводити повідомлення про помилки в будь-якій придатній для сприйняття користувачем чи розробником формі. Ця проблема частково вирішена. Адже існує велика кількість бібліотек і середовищ для виконання модульного тестування, більшість яких має відкриті вихідні коди, вільну ліцензію та постійно вдосконалюється співтовариством розробників. Отже, враховуючи те, що використання модульного тестування є потужним інструментом у розробці інформаційних систем, то зупинимося саме на ньому та на керованому тестами програмуванні (TDD - Test-Driven Development) [1].

Чистий код, що працює – головний зміст методології Test-Driven Development. Ця методика порівняно недавно відокремилися від методології екстремального програмування та використовується як частина інших методологій. Наведемо її основні положення:

- перед написанням будь-якого фрагмента коду розроблювальної системи пишеться автоматизований тест, що перевіряє функціонування цього фрагмента коду (природно, якщо спочатку цей тест не виконується).
- після того, як написаний тест став виконуватися, необхідно усунути дублювання в коді.

Такий підхід більш точно визначається як "червоний-зелений-рефакторінг", що за окремими складовими означає наступне:

- ***червоний*** - пишеться тест, який навіть не компілюється, але при цьому фокусується увага на інтерфейсі, що надається кодом, який планується розробити, і на формулюванні того, які результати повинні отримуватися;
- ***зелений*** – реалізується програмний код так, щоб він відповідав необхідному тесту, і, як тільки досягається спрацювання тесту, можемо вважати роботу виконаною;
- ***рефакторінг*** – в разі необхідності написаний програмний код переробляється для вдосконалення його внутрішньої структури, а за допомогою тестів постійно перевіряється, щоб після кожної переробки наш код не змінив результатів своєї роботи.

Використовуючи такий підхід, виявляються помилки на ранніх стадіях розробки, а отже, вартість їх виправлення досить невелика. Під час червоної фази дії фокусуються не на реалізації, а на інтерфейсі та результатах виконання, а отже, можна відкинути не найкращі варіанти реалізації, не написавши жодного оператора. Крім цього:

- існує точний критерій, коли потрібно зупинитися і вважати, що задачу виконано;
- в разі необхідності починають виконувати переробку архітектури системи, не побоюючись, що зміни призведуть до виникнення прихованих помилок, адже є тести, за допомогою яких швидко перевіряється працездатність системи, а отже, розробники мають можливість відкинути деякі невдалі проектні рішення та зробити систему більш гнучкою;
- майже постійно маємо працюючу систему, яку зможуть використовувати реальні користувачі.

Але при розробці через тестування варто знайти золоту середину, для того, щоб не писати тести, які не є необхідними, та створювати ті тести, що дійсно є корисними. Інакше можна потрапити у ситуацію коли або розробники будуть витрачати час на написання зайвих тестів, або будуть мати омманливу впевненість, що в системі все гаразд. Для уникнення такої ситуації користуються наступними правилами:

- ✓ якщо інтерфейс методу зовсім незрозумілий, необхідно написати спочатку тест, а потім метод;
- ✓ якщо інтерфейс зрозумілий, однак вважається, що при реалізації можуть виникнути хоча б незначні проблеми, потрібно написати спочатку тест, а потім метод;
- ✓ якщо обмірковуються незвичні умови, у яких код повинний працювати так, як це передбачається, необхідно написати тест для того, щоб описати ці умови;
- ✓ якщо пізніше виявляється проблема, потрібно написати тест, що ізолює цю проблему;
- ✓ якщо виконується переробка коду і немає впевненості в тому, чи коректно він буде поводитися після переробки, і ще не існує тесту, що дозволяє перевірити необхідний аспект

Kyiv National Taras Shevchenko University

поведінки коду, треба спочатку написати тест.

Тепер, коли сформульовані основні переваги, можливості та принципи розробки керованості тестами, вкажемо на існуючі проблеми, точніше ситуації, коли не вдається використати технологію TDD через суто технологічні або архітектурні особливості. Безліч різних організацій зіштовхується з численними проблемами TDD, і ці проблеми ніяк не висвітлені в літературі з TDD та екстремального програмування (XP). Можливо, ці проблеми взагалі ніяк не вирішити в рамках TDD. Наведемо деякі з них:

- не існує способу автоматичного тестування GUI (наприклад, Swing, CGI, JSP/Servlets/Struts);
- не існує способу автоматичного тестування розподілених об'єктів (наприклад, RPC, CORBA/EJB і JMS);
- TDD не можна використовувати для розробки схеми бази даних (наприклад, JDBC);
- немає необхідності тестувати код, розроблений сторонніми розробниками, чи код, який генерується зовнішніми інструментами автоматизації розробки;
- TDD не можна використовувати для розробки компілятора/інтерпретатора мови програмування.

Надалі приділимо нашу увагу розв'язанню лише однієї з цих проблем. А саме тестуванню баз даних, що є особливо важливим в ситуаціях, коли на базу даних покладається не лише управління даними, а й частина прикладної логіки та розширений контроль доступу, за допомогою збережених процедур.

Найпростішим з логічної точки зору методом тестування бази даних є написання послідовностей програмного коду, що виконують виклики SQL-запитів та збережених процедур для внесення змін та перевірки результатів з використанням середовищ модульного тестування. Але при такому підході виникають дві основні проблеми – це складність написання коду та необхідність постійно писати один й той самий код для виконання запитів та перевірок результатів, або, іншими словами, необхідність не помилятися, постійно записуючи код, що дублюється, з внесенням невеликих змін. Отже, для розв'язання цих проблем код повинен записуватися не мовою програмування, а у вигляді конфігураційного файлу для того, щоб його могли писати ті спеціалісти, які знають мову SQL та вміють звертатися для збережених процедур, але не знають мов програмування. Це дозволяє фокусуватися на написанні необхідних запитів та еталонних результатів, тобто можна скористатися стандартним підходом для функціонального тестування, коли розробники надають тестерам або замовнику каркас для написання тестів без написання програмного коду.

Однак, при розробці такого інструментарію очевидні деякі проблеми, що притаманні лише базам даних або постають дуже гостро саме при їх тестуванні:

- збереження параметрів з проміжними результатами;
- забезпечення ізольованості тестів;
- забезпечення спільного виконання великої групи команд;
- виконання часових характеристик;
- простота розробки файлів для тестів;
- початкове завантаження.

Отже для того, щоб автоматичне тестування баз даних було можливим необхідно розробити архітектуру програмного засобу та/або набір методологічних вказівок для його побудови.

Можна сформулювати основні вимоги до такої системи, як результат аналізу проблем, що притаманні TDD в розрізі баз даних:

- тести повинні задаватися конфігураційними файлами;
- опис тестів повинен бути простим;
- час виконання тестів повинен бути досить малим;
- тестувальнику надається змога не виконувати взагалі або виконувати лише частково початкове завантаження бази даних;
- опис завантаження бази даних повинен задаватися у вигляді звичайного тесту, що посилається на сторонні файли;
- тести повинні бути ізольованими;
- в тест може входити довільна кількість запитів, для кожного з яких є можливою перевірка;
- перевірки повинні дозволяти вказувати як скалярні еталони, так і декілька рядків опису;
- повинна існувати можливість зберігати проміжні результати у параметрах та виставляти значення параметрів у запитах;
- необхідно мати часові тести.

Для задоволення цих вимог необхідно розробити наступні елементи архітектури:

- формат конфігураційних файлів та правила їх обробки;
- методи формування тестів та їх виконання;
- загальне налаштування системи.

Ознайомимося з кожним з цих елементів

Kyiv National Taras Shevchenko University

окремо.

Кожен тест складається з декількох кроків, кожен крок може мати опис запиту, параметрів, які необхідно встановити, еталонного результату та часових обмежень. Тобто, опис тесту має ієрархічну структуру, тому пропонується в якості основи для опису тестів використати мову XML. Але, в загальному випадку, якщо буде знайдено кращий засіб для опису ієрархічних даних, то варто буде використати саме його. Таким чином, розв'язуються питання ієрархічності тестів та з'являється можливість вдосконалювати їх в майбутньому. Кожен тест може розроблятися окремим співробітником, тому бажано розділити тести по окремих файлах.

Існують засоби для підтримки модульного тестування об'єктно-орієнтованого програмного коду, наприклад такі як JUnit або NUnit [2]. Такі засоби забезпечують середовище для написання невеликих фрагментів програмного коду – тестів, які потім викликаються з тестуючої програми та виконують перевірку деякої функціональності. Отже, варто використати такі засоби для полегшення розробки системи тестування баз даних. При цьому, кожний описаний в конфігураційному файлі тест для бази даних повинен перетворюватися в тест для деякого середовища xUnit. Для того, щоб в середовищі xUnit були зрозумілі тести необхідно згенерувати по одному методу для кожного тесту. Кожен з таких методів можна побудувати двома шляхами:

1. у тілі кожного методу, що генерується, звертаються до уніфікованого методу тестування та передають йому в якості параметру ім'я файлу з тестом;
2. аналізуючи кожен файл тесту повністю генерується код відповідною мовою програмування, що виконує описані в файлі тесту операції.

Другий підхід є більш ефективним для використання, виходячи з описаних нижче причин:

- тест виконується частіше, ніж змінюється, а отже, перевірка не повинна аналізувати всі файли тестів кожного разу;
- в тесті виконуються лише операції роботи з даними, а всі проблеми та помилки конфігурації виявляються на етапі створення тестуючого коду;
- не додаються додаткові відхилення при тестуванні часових характеристик.

Отже, за результатами аналізу можна запропонувати використання другого підходу. При цьому, проблема сумісного виконання декількох тестів вже розв'язана за допомогою організації конфігураційного файлу. Поки що є нерозв'язаною проблема ізольованості тестів. Виходячи з неможливості спрогнозувати, які зміни можуть викликати тести при повному та частковому виконанні, неможливо створювати для кожного тесту свій варіант компенсації. Отже, потрібно мати засіб для повного відкату всіх дій незалежно від їх успішності. Таким засобом при роботі з базами даних можна вважати транзакцію. Виконання тесту починається з транзакції, і в кінці виконання незалежно від результатів транзакції робиться її відкат.

На основі розглянутих вище підходів до організації тестування створено систему, що дозволяє спростити тестування клієнт-серверних програмних систем, в яких наявна складна логіка, розміщена на рівні СКБД [3]. Розв'язано типові проблеми, що виникають при автоматичному тестуванні, такі як необхідність забезпечити швидкість виконання, ізольованість тестів та простоту їх створення. Крім того, були вирішені проблеми, які раніше робили неможливим або досить складним виконання автоматичного тестування баз даних.

Список використаних джерел

1. *Кент Бек.* Экстремальное программирование: разработка через тестирование. — «Питер», 2003.
2. *Лайза Крістін, Джанет Грегорі.* Гибкое тестирование: практическое руководство для тестировщиков ПО и гибких команд. — М.: «Вильямс», 2010. — 464 с.
3. *Косинський К.О., Юштін К.Е.* Інформаційно-аналітична система забезпечення управління роботою наукових підрозділів у ВНЗ// Збірник наукових статей ХНЕУ «Управління розвитком». - Харків, 2007. С.158.

Надійшла до редколегії 05.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 515.124+510.5

Карнаух Т.О

Метрично-можливісний підхід до задач розпізнавання

При розв'язуванні задач розпізнавання пропонується формалізувати евристики як можливість того, що відстань між об'єктами не перевищує заданої величини.

Ключові слова: відстань, можливість, семантична рівність.

T.O. Karnaukh, Ph.D.

Usage metries and possibility in recognition

We propose to formalize heuristics which occur in recognition in form of distance estimation possibility.

Key Words: distance, possibility, semantic equality.

E-mail: tkarnaukh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

У задачах розпізнавання найчастіше за все ми ототожнюємо деякі варіації зображення об'єкта, що розпізнається, а тому класична метрика [3] не дуже зручна. Для подолання цієї проблеми в роботі [4] було введено розширення поняття метрики, що має сенс для просторів синтаксичних моделей, — псевдометрику, головна відмінність якої від звичайної метрики полягає в послабленні першої аксіоми метрики. У результаті такого розширення семантично еквівалентні, але синтаксично різні, об'єкти можуть знаходитися на нулевій відстані.

Задачу розпізнавання можна формулювати як задачу оцінки відстані між реальним об'єктом та об'єктом, що зображено або задано моделлю, у просторі реальних об'єктів. Не для всіх об'єктів відстань між ними можна обчислити точно. Зокрема, якщо оцінювати алгоритм як чорну скриньку, то відстань до нього навіть неможливо обчислити алгоритмічно хоча б тому, що в кожен момент часу ми маємо лише скінченні відомості про нього. Отже, ми можемо тільки оцінювати величину відстані та розв'язувати задачу розпізнавання, використовуючи різноманітні евристики. Тому формалізація методик оцінки величини відстані за умови неможливості обчислити дану характеристику алгоритмічно є актуальною та важливою задачею, яка й розглядається в цій роботі. Загальний підхід до формалізацій евристик по суті було започатковано ще в роботах [1] та [2] введенням поняття можливості. У даній роботі розглядаються формалізації евристик, що виникають при розв'язанні специфічних задач, а саме задач розпізнавання.

Якщо синтаксичну відстань між різними об'єктами в багатьох випадках можна обчислити за скінченний час, то відстань між однаковими об'єктами знайти набагато складніше. Якщо об'єктами є нескінченні зображення, то про обчислення відстані між однаковими об'єктами за скінченний час не може бути й мови. Повернемося до природи розв'язуваних задач розпізнавання: всі вони мають певну ступінь достовірності відповіді (й не завжди абсолютно достовірну). Тому дослідник може зробити, наприклад, таке припущення: достатньо малі відстані будемо вважати рівними нулю. Це припущення дозволить більш ефективно (але менш точно) обчислювати оцінку відстані. Зрозуміло, що тут є неоднозначності, наприклад: які відстані вважати достатньо малими. Різні дослідники можуть мати різні точки зору на це питання. Крім того, при розв'язанні задач розпізнавання можна залучати кілька характеристик, які можуть бути як залежними, так й незалежними. Тоді виникає питання: як поєднати різні варіанти оцінювання відстані для визначення остаточної? Відповіддю на це може бути відстань, до якої приєднується ще можливість набуття нею певного значення. Так, якщо стає відомо, що відстань між двома об'єктами достатньо мала, просто покладемо, що існує додатна (та достатньо велика) можливість того, що ця відстань буде рівною нулю (у подальшому формальному викладенні, насправді розглядається можливість того, що відстань не перевищує задану величину). Наведені міркування приводять до такого формалізму, як метрично-можливісний простір.

Метрично-можливісний простір

Нехай задано псевдометричний [4] простір (X, d). Введемо для нього можливість, як оцінку того, що відстань між двома точками простору не перевищує деякого значення. Під можливістю тут будемо розуміти відображення $p: X\times X\to[0; +\infty)\to[0; 1]$, для якого виконуються певні умови, що випливають з його семантики.

© Т.О. Карнаух, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Згідно нашої інтерпретації можливості в даному контексті значення $p(x, y, a)$ для дослідника змістовно означає оцінку того, що відстань між точками x та y не перевищує a. Тому природно вимагати, щоб для відображення p виконувались такі умови.

— $p(x, y, a) \le p(x, y, b)$, якщо $a \le b$.

Ця вимога означає монотонність можливості відносно відстані, тобто чим більший є діапазон значень відстані, тим більше його можливість.

— $p(x, y, a) = p(y, x, a)$

Ця вимога природно випливає з симетричності відстані.

— $p(x, y, d(x, y)) = 1$ (або $p(x, y, d(x, y)) > 0$)

— $p(x, y, a) = 0 \Rightarrow d(x, y) > a$

Ці дві вимоги можна перефразувати так: істинне повинно бути абсолютно можливим (або просто можливим), а неможливе має бути хибним. Далі буде доведено, що друга з цих вимог випливає з першої та монотонності можливості відносно відстані.

У той же час від аналогу нерівності трикутника

$p(x, z, a+b) \ge \min\{p(x, y, a) \wedge p(y, z, b)\}$

варто відмовитися. Справа в тім, що на практиці відношення «є схожим» не є транзитивним. Якщо розглядати більш формальні приклади, то можна зазначити, що для протилежних двійкових векторів однакової довжини завжди можна побудувати ланцюжок двійкових векторів, який переводить перший заданий вектор у другий і в якому за кожним вектором йде сусідній з ним (тобто ротшашований на одиничний відстані (у розумінні відстані Хеммінга)). Якщо в межах комп'ютерної графіки розглядати перетворення морфінгу, то його прагматика також полягає в тім, щоб майже непомітними для ока перетвореннями зображення з заданого зображення отримати інше — цільове, при цьому задане та цільове зображення зовсім не зобов'язані бути схожими.

Зауваження. Вимога $p(x, y, d(x, y)) = 1$ відповідає тому, що дослідник при наближеному обчисленні значення відстані має тенденцію проводити обчислення відстані з нестачею, тобто зменшувати шукане значення. Оцінку відстані, що відповідає цій вимозі надалі будемо розглядати як ультраможливість. Від цієї вимоги можна й відмовитись, замінивши її більш слабкою $p(x, y, d(x, y)) > 0$, яка (як буде показано далі, див. теорему 6) дає більше можливостей для змістовної інтерпретації різних «ступенів» можливості, крім двох абсолютних значень 0 та 1; тобто уможливлює більш «тонке» налаштування оцінки. В обох випадках дослідник може дещо зменшувати оцінку відстані, тому абсолютна можливість не свідчить про істинність (але абсолютна неможливість завжди свідчить про хибність).

Аналогічно можливості, можна розглядати й необхідність того, що відстань між двома точками простору не перевищує деякого значення. Аналізуючи можливість та необхідність, можна дійти висновку, що необхідність має відповідати всім умовам, що накладаються на можливість, але ще природно вважати, що абсолютно необхідне (зі значенням необхідності 1) має бути істинним. У цьому випадку для необхідності варто дотати вимогу

$n(x_1, x_2, a) = 1 \Rightarrow d(x_1, x_2) \le a$.

Ця вимога, хоча й вимагає більш ретельної побудови оцінки, але отримана оцінка має здатність якісно розділяти вже не два випадки (як попередні), а три: точно хибне; точно істинне; можливо, що хибне, а можливо, що й істинне.

Зауваження. Раніше зазначалося, що ультраможливість схильна зменшувати оцінюване значення відстані. Отже, стратегію розпізнавання на основі ультраможливості можна вважати «ризиковою» у тому сенсі, що вона має тенденцію ототожнювати близькі між собою об'єкти. У той час необхідність є прикладом «обережної» стратегії розпізнавання, коли оцінюване значення відстані дещо завищується (порівняно з реальним) і деякі пари на нульовій відстані в результаті можуть не ототожнюватися.

Можливість у псевдометричному просторі

Сформулюємо формальні означення. Нехай задано псевдометричний простір (X, d).

Відображення $p: X \times X \times [0; +\infty) \to [0; 1]$, яке задовольняє наступним умовам:

1) умові монотонності відносно відстані

$\forall x, y \in X \; \forall a, b \in [0; +\infty)$

$(a \le b \to p(x, y, a) \le p(x, y, b))$;

2) умові симетричності

$\forall x, y \in X \; \forall a \in [0; +\infty) \; p(x, y, a) = p(y, x, a)$;

3) $\forall x, y \in X \; p(x, y, d(x, y)) > 0$,

будемо називати *можливістю в псевдометричному просторі* (X, d).

Ультраможливістю в псевдометричному просторі (X, d) будемо називати можливість, яка задовольняє умові

$\forall x, y \in X \; p(x, y, d(x, y)) = 1$.

Теорема 1. Якщо p є можливістю в псевдометричному просторі (X, d), то:

1) $p(x, y, a) > 0$ для всіх $a \ge 0$ та $x, y \in X$ таких,

Kyiv National Taras Shevchenko University

що $d(x, y) \le a$;

2) $p(x, x, a) > 0$ для всіх $x \in X$ та $a \ge 0$;

3) $p(x, y, a) = 0 \Rightarrow d(x, y) > a$.

Доведення. З урахуванням монотонності можливості відносно відстані, перше твердження теореми маємо з такого ланцюжка порівнянь:

$$0 < p(x, y, d(x, y)) \le p(x, y, a).$$

Його контрапозицією є третє, а друге отримується з рівності $d(x, x) = 0$.

Теорема 2. Якщо p є ультраможливістю в псевдометричному просторі (X, d), то:

1) $p(x, y, a) = 1$ для всіх $a \ge 0$ та $x, y \in X$ таких, що $d(x, y) \le a$;

2) $p(x, x, a) = 1$ для всіх $x \in X$ та $a \ge 0$;

3) $p(x, y, a) < 1 \Rightarrow d(x, y) > a$.

Доведення теореми майже повторює доведення теореми 1, з тією відмінністю, що слід розглядати такий ланцюжок порівнянь:

$$1 = p(x, y, d(x, y)) \le p(x, y, a) \le 1.$$

Теорема 3. Якщо p є ультраможливістю в псевдометричному просторі (X, d) та для двох різних точок $x, y \in X$ існує таке значення відстані a, можливість якого менша за 1, тобто $p(x, y, a) < 1$, то відстань між цими точками має бути більше 0.

Доведення. Якщо $d(x, y) = 0$, то за теоремою 2 $p(x, y, a) = 1$ для всіх $a \ge 0$. Звідки маємо $x = y$. Теорема доведена.

Теорема 4. Якщо для ультраможливості p у псевдометричному просторі (X, d) виконано

$$\forall x, y \in X,\ x \ne y\ \exists a > 0\ p(x, y, a) < 1,$$

то псевдометрика d є метрикою в просторі X.

Доведення. Оскільки d є псевдометрикою, то достатньо довести

$$\forall x, y \in X\ (d(x, y) = 0 \to (x = y)).$$

За теоремою 3 з $x \ne y$ маємо $d(x, y) > 0$, звідки й випливає шукане твердження. Теорема доведена.

Зауваження. Водночас, для метричного простору (X, d) з ультраможливістю p умова

$$\forall x, y \in X,\ x \ne y\ \exists a > 0\ p(x, y, a) < 1$$

може не виконуватись. Як приклад можна розглянути *тривіальну* ультраможливість p, задану правилом: $p(x, y, a) = 1$ для всіх $x, y \in X$ та $a \ge 0$.

Необхідність у псевдометричному просторі

Необхідністю в псевдометричному просторі (X, d) будемо називати можливість n, яка задовольняє умові

$$\forall x, y \in X\ \forall a \ge 0\ (n(x, y, a) = 1 \to d(x, y) \le a).$$

Наприклад, у псевдометричному просторі (X, d) необхідністю буде можливість n, що визначається так:

$$n(x_1, x_2, a) = 1, \text{ якщо } d(x_1, x_2) \le a;$$

$$n(x_1, x_2, a) = 0, \text{ якщо } d(x_1, x_2) > a.$$

Теорема 5. Довільні можливість p та необхідність n у псевдометричному просторі (X, d) зв'язані співвідношеннями

$$n(x_1, x_2, a) = 1 \Rightarrow p(x_1, x_2, a) > 0,$$

$$p(x_1, x_2, a) = 0 \Rightarrow n(x_1, x_2, a) < 1.$$

Доведення теореми випливає з властивостей можливості та необхідності.

Для простору може існувати кілька можливостей, що одночасно є в ньому необхідностями. Наведемо приклад сім'ї можливостей p_n $(n \ge 1)$ для одновимірного евклідового простору. Для всіх $x, y \in X$ та $a \ge 0$ покладемо

$$p(x, y, a) = 1, \text{ якщо } d(x, y) \le a;$$

$$p(x, y, a) = 2^{-n}, \text{ якщо } d(x, y) > a.$$

Наведена сім'я відображень є східчастою за третім аргументом. Можна запропонувати ще такий неперервний (за третім аргументом) приклад можливості, що одночасно є необхідністю:

$$p(x, y, a) = 1, \text{ якщо } d(x, y) \le a;$$

$$p(x, y, a) = \frac{a}{d(x, y)}, \text{ якщо } d(x, y) > a.$$

Кілька слів про порівняння можливості та необхідності

Раніше ультраможливість було означено так, щоб істинне завжди було абсолютно можливим. При конструктивному заданні можливості це означає, що як тільки не можна заперечувати певний факт, він має бути абсолютно можливим. З точки зору на це, в якості значень можливості можна використовувати лише два : 0 та 1.

Теорема 6. Для ультраможливості p у псевдометричному просторі (X, d) існує ультраможливість s, яка приймає значення в множині $\{0, 1\}$ та для якої:

$$p(x, y, a) = 1 \Leftrightarrow s(x, y, a) = 1.$$

Доведення. Для $x, y \in X$ та $a \ge 0$ задамо s так:

$$s(x, y, a) = 1, \text{ якщо } p(x, y, a) = 1;$$

$$s(x, y, a) = 0, \text{ якщо } p(x, y, a) < 1.$$

Неважко перевірити, що s також є ультраможливістю в псевдометричному просторі (X, d). Теорема доведена.

Отже, у неконструктивному випадку достатньо розглядати ультраможливості, що не приймають жодних інших значень, крім 0 та 1. Для конструктивно заданої ультраможливості p конструкція доведення теореми 6 може виявитись нереалізовною хоча б тому, що для її використання необхідно вміти за скінченний час визначати істинність предиката $(p(x, y, a) < 1)$, що, не завжди можливо, та, більш того, можна навести приклад такої конструктивної можливості p, за якою

Kyiv National Taras Shevchenko University

значену в теоремі 6 ультраможливість s побудувати не можна.

З необхідністю дещо інакше: порівняно з можливістю вона дає більш тонку оцінку правдоподібності, якщо можна так казати. З одного боку, істинне має мати додатну необхідність; але з іншого — абсолютно необхідне має бути істинним.

У більш загальному випадку можливість та необхідність можуть приймати значення не у відрізку дійсної прямої $[0; 1]$, а в довільній дистрибутивній решітці з нулем та одиницею.

Задачи можливостей та необхідностей

Інколи для задання значень можливості $p(x, y, \cdot)$ відносно третього аргументу більш зручно задати її значення лише в деяких точках, а потім продовжити функцію на решту значень третього параметра, щоб отримати відображення, яке буде можливістю в просторі. На практиці ця ситуація може мати місце, коли експерт визначає окремі значення можливості. Розглянемо умови, за яких це можливо. Для цього нам знадобляться наступні позначення.

Для функції $f: X\times X\times[0; +\infty)\to[0; 1]$ покладемо $f_* = f\cup\{((x, x, a), t)\,|\,((x, y, a), t)\in f\}$.

Позначкою $\downarrow$ будемо позначати той факт, що відповідне значення функції існує.

Теорема 7 (про поповнення функції до можливості). Часткова функція $f: X\times X\times[0; +\infty)\to[0; 1]$ у псевдометричному просторі (X, d) може бути довизначена до можливості в просторі (X, d) тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє умовам:

1) $f_*\in$ функцією (можливо, частковою), що на області визначення задовольняє усім умовам, що накладаються на можливість;

2) якщо значення $\inf\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow, t\ge d(x, y)\}$ існує, то $\in$ додатним.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай p — деяке продовження функції f до можливості. За симетричністю можливості $f_*\subseteq p$. Умови, що накладаються на можливість, повинні справджуватися для довільного її звуження.

Доведемо необхідність виконання останньої умови. Нехай

$\inf\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow, t\ge d(x, y)\} = 0$.

Оскільки можливість p приймає невід'ємні значення та є монотонною за відстанню, то

$0\le p(x, y, \inf\{t\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow, t\ge d(x, y)\})\le$

$\le\inf\{p(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow, t\ge d(x, y)\} =$

$= \inf\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow, t\ge d(x, y)\} = 0$,

звідси

$p(x, y, \inf\{t\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow, t\ge d(x, y)\}) = 0$.

Але тоді для можливості має виконуватися оцінка

$d(x, y) > \inf\{t\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow,\ t\ge d(x, y)\}$,

далі залишається помітити, що

$\inf\{t\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow,\ t\ge d(x, y)\}\ge d(x, y)$,

звідки $d(x, y) > d(x, y)$, що неможливо.

($\Leftarrow$) Доведемо, що за виконання умови теореми функцію f можна довизначити до можливості p.

Нехай $x, y\in X$. Введемо у розгляд величини A, B, C, що змістовно будуть відповідати значенням шуканої можливості $p(x, y, \cdot)$ у точках 0, $d(x, y)$ та на нескінченності. Якщо область визначення функції $f_*(x, y, \cdot)$ порожня, покладемо $A = B = C = ½$. Розглянемо тепер інший випадок. Покладемо

$A = \inf\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow\}$;

$C = \sup\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow\}$,

якщо $\sup\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow\} > 0$.

$C = ½$, якщо $\sup\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow\} = 0$;

$B = \inf\{f_*(x, y, t)\,|\,f_*(x, y, t)\downarrow,\ t\ge d(x, y)\}$, якщо множина, за якою береться інфімум непорожня,

$B = C$, інакше.

Зазначимо, що в усіх випадках $C > 0$ та, з урахуванням умови теореми, $B > 0$.

Якщо область визначення функції $f_*(x, y, \cdot)$ необмежена, покладемо

$H(x, y) = \{((x, y, 0), A), ((x, y, d(x, y)), B)\}$,

інакше візьмемо довільне $D > d(x, y)$, що обмежує область визначення функції $f_*(x, y, \cdot)$, та покладемо

$H(x, y) = \{((x, y, 0), A),$

$((x, y, d(x, y)), B)\}\cup\{((x, y, D + n), C')\,|\,n\in N\}$.

Відповідність $h = f_*\cup\bigcup_{x, y\in X} H_{(x, y)}$ є функціональною, монотонною за відстанню на області визначення, $h = h_*$ та задовольняє всім умовам теореми.

Для $x, y\in X$ та $a\ge 0$ задамо значення $p(x, y, a)$. Якщо значення $h(x, y, a)$ визначено, покладемо $p(x, y, a) = h(x, y, a)$. Інакше введемо у розгляд величини

$a_- = \sup\{t\,|\,h(x, y, t)\downarrow, t\in[0; a)\}$,

$b_- = \sup\{h(x, y, t)\,|\,h(x, y, t)\downarrow, t\in[0; a)\}$;

$a_+ = \inf\{t\,|\,h(x, y, t)\downarrow, t\in(a; +\infty)\}$,

$b_+ = \inf\{h(x, y, t)\,|\,h(x, y, t)\downarrow, t\in(a; +\infty)\}$,

та визначимо значення $p(x, y, a)$ за таким алгоритмом:

якщо $a_- = a$, покладемо $p(x, y, a) = (b_- + b_+)/2$; інакше покладемо

$p(x, y, a) = b_- + \dfrac{b_+ - b_-}{a_+ - a_-}(x - a_-) + b_-$.

За побудовою $f\subseteq f_*\subseteq h\subseteq p$, функція p є мо-

Kyiv National Taras Shevchenko University

нотонною за відстанню та для неї виконується умова симетричності. Крім того, за побудовою значення $h(x, y, d(x, y))$ визначене та додатне, тому $p(x, y, d(x, y)) = h(x, y, d(x, y)) > 0$ та функція p є можливістю. Теорема доведена.

Теорема 8 (про поповнення функції до ультраможливості). Часткова функція $f: X\times X\times[0; +\infty)\to[0; 1]$ може бути довизначена до ультраможливості в псевдометричному просторі (X, d) тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє таким умовам:

1) f_t є функцією (можливо, частковою), що на області визначення задовольняє усім умовам, що накладаються на ультраможливість;

2) якщо значення $\inf\{f_t(x, y, t) \mid f_t(x, y, t)\downarrow, t \ge d(x, y)\}$ існує, то дорівнює 1.

Доведення цілком аналогічно доведенню теореми 7 з тією лише різницею, що $B = C = 1$,

$A = ½$ для порожньої області визначення функції $f_t(x, y, \cdot)$, інакше

$A = f_t(x, y, 0)$, якщо $f_t(x, y, 0)\downarrow$,

$A = \inf\{f_t(x, y, t) \mid f_t(x, y, t)\downarrow\}$ інакше.

Наслідок 1. Часткова функція $f: X\times X\times[0; +\infty)\to[0; 1]$ може бути довизначена до можливості (ультраможливості) в псевдометричному просторі (X, d) якщо

1) f_t є функцією (можливо, частковою), що на області визначення задовольняє усім умовам, що накладаються на можливість (ультраможливість);

2) для всіх $x, y\in X$ область визначення функції $f_t(x, y, \cdot)$ є цілком упорядкованою.

Доведення. Нехай $\inf\{f_t(x, y, t) \mid f_t(x, y, t)\downarrow, t \ge d(x, y)\} = 0$. Для цілком упорядкованої області визначення неспадної функції $f_t(x, y, \cdot)$

$$0 = \inf\{f_t(x, y, t) \mid f_t(x, y, t)\downarrow, t \ge d(x, y)\} =$$
$$= f_t(x, y, \min\{t \mid f_t(x, y, t)\downarrow, t \ge d(x, y)\}).$$

Звідки маємо суперечність

$$d(x, y) \le \min\{t \mid f_t(x, y, t)\downarrow, t \ge d(x, y)\} < d(x, y).$$

Далі слід використати теорему 7. Випадок ультраможливості розглядається аналогічно з використанням теореми 8.

Розглянемо питання довизначення функції до неперервної за відстанню можливості та ультраможливості. Перш за все зазначимо, що якщо для всіх $x, y\in X$ область визначення функції $f_t(x, y, \cdot)$ не має жодної граничної точки, то побудована у доведенні теорем 7 та 8 функція $p(x, y, \cdot)$ є кусково-лінійною, а, отже, й неперервною.

Приклад часткової функції f, яку не можна довизначити до можливості, неперервної за відстанню: $f(x, y, (1-2^{-n})d(x, y)) = 0$, $x, y\in X$, $n\in N$.. Наведена функція f відповідає всім умовам теореми 7, тому її можна довизначити до можливості p. Якщо припустити, що p є неперервною за відстанню, будемо мати

$$p(x, y, d(x, y)) = p(x, y, \lim_{n\to+\infty}(1-2^{-n})d(x, y)) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} p(x, y, (1-2^{-n})d(x, y)) = 0,$$

що суперечить означенню можливості.

Про часткову функцію f будемо казати, що вона неперервна в граничній точці $x\in D_f$ області визначення, якщо обидва значення $f(x-0)$ та $f(x+0)$ існують та рівні між собою, або $(x; +\infty)\cap D_f = \varnothing$ та значення $f(x-0)$ існує, або $(-\infty; x)\cap D_f = \varnothing$ та значення $f(x+0)$ існує.

Теорема 9 (про неперервне поповнення функції до можливості). Часткова функція $f: X\times X\times[0; +\infty)\to[0; 1]$, яка може бути довизначена до можливості (ультраможливості) у псевдометричному просторі (X, d), може бути довизначена до неперервної за відстанню можливості (ультраможливості), тоді й тільки тоді, коли для всіх $x, y\in X$ функція $f_t(x, y, \cdot)$ є неперервною в граничних точках області визначення та, якщо існує границя $\lim_{a\to d(x,y)} f_t(x, y, a) = b$, то $b > 0$ ($b = 1$).

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай f можна довизначити до неперервної можливості (ультраможливості) p. Тоді $f\subseteq f_t\subseteq p$ та функція $f_t(x, y, \cdot)$ має бути неперервною в граничних точках області визначення. Нехай існує границя $\lim_{a\to d(x,y)} f_t(x, y, a) = b$. Тоді за неперервністю $p(x, y, d(x, y)) = b$. Звідси необхідно $b > 0$ для можливості p та $b = 1$ у випадку ультраможливості p.

($\Leftarrow$) За виконання умов теореми розширення функції $f(x, y, \cdot)$ до функції $h(x, y, \cdot)$ у доведенні теореми 7 (для ультраможливості слід використати доведення теореми 8) є неперервним за відстанню в граничних точках області визначення, а використана конструкція побудови p за h зберігає неперервність. Теорема доведена.

Теорема 10 (про поповнення функції до необхідності). Часткова функція $f: X\times X\times[0; +\infty)\to[0; 1]$ може бути довизначена до необхідності в псевдометричному просторі (X, d) тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє умовам:

1) f можна довизначити до можливості;

2) $\sup\{f_t(x, y, t) \mid f_t(x, y, t)\downarrow, 0\le t\le a\} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x, y) \le a$.

Доведення необхідності технічно повторює доведення з теореми 7. Доведемо достатність, тобто, що за виконання умови теореми функцію f

Kyiv National Taras Shevchenko University

можна довизначити до необхідності. Для цього використаємо відповідну частину доведення теореми 7, зробивши єдину зміну: у випадку невизначеного значення $f_A(x, y, 0)$ покладемо

$A = \inf\{\ f_A(x, y, t) \mid f_A(x, y, t)\downarrow\}$, якщо $\inf\{ f_A(x, y, t) \mid f_A(x, y, t)\downarrow\} < 1$;

$A = ½$, якщо $\inf\{ f_A(x, y, t) \mid f_A(x, y, t)\downarrow\} = 1$.

Неважко перевірити, що так побудована функція p для функції f, що задовольняє умовам теореми, буде ще й необхідністю.

Наслідок 2. Часткова функція $f: X\times X\times[0; +\infty) \to [0; 1]$ може бути довизначена до необхідності в псевдометричному просторі (X, d) якщо вона задовольняє таким умовам:

1) f_t є функцією (можливо, частковою), що на області визначення задовольняє усім умовам, що накладаються на необхідність;

2) для всіх $x, y \in X$ область визначення функції $f_t(x, y, \cdot) \in$ цілком упорядкованою за прямим та обернеником порядками.

Доведення. Оскільки необхідність є можливістю, то за наслідком 1 функцію f можна довизначити до можливості. Отже, на області визначення f_t задовольняє всі умови, що накладаються на можливість. Оскільки область визначення неспадної функції $f_t(x, y, \cdot) \in$ цілком упорядкованою за оберненим порядком, то

$1 = \sup\{f_t(x, y, t) \mid f_t(x, y, t)\downarrow, 0 \le t \le a\} =$
$= f_t(x, y, \max\{t \mid f_t(x, y, t)\downarrow, 0 \le t \le a\})$,

звідки

$d(x, y) \le \max\{t \mid f_t(x, y, t)\downarrow, 0 \le t \le a\} \le a$.

Далі залишається застосувати теорему 10.

Розглянемо питання довизначення функції до неперервної за відстанню необхідності. Перш за все зазначимо, що аналогічно випадку можливості якщо для всіх $x, y \in X$ область визначення функції $f_t(x, y, \cdot)$ не має жодної граничної точки, то побудована у доведенні теорем 7 та 8 функція $p(x, y, \cdot) \in$ кусково-лінійною, а, отже, й неперервною.

Крім того, наведена в прикладі функція, яку не можна довизначити до неперервної за відстанню можливості, задовольняє усім умовам теореми 10, а тому її можна довизначити до необхідності, але обов'язково розривної за відстанню, оскільки кожна необхідність одночасно є й можливістю.

Теорема 11 (про неперервне поповнення функції до необхідності). Часткова функція $f: X\times X\times[0; +\infty) \to [0; 1]$, яка може бути довизначена до необхідності у псевдометричному просторі (X, d), може бути довизначена до неперервної за відстанню необхідності, тоді й тільки тоді, коли для всіх $x, y \in X$ функція $f_t(x, y, \cdot) \in$ неперервною в граничних точках області визначення та виконуються наступні дві умови

1) якщо існує границя $\lim_{a \to d(x,y)} f_a(x, y, a) = b$, то $b > 0$;

2) якщо $\lim_{t \to a} f_t(x, y, t) = 1$, то $a \ge d(x, y)$.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай f можна довизначити до неперервної необхідності n. Тоді її можна довизначити до неперервної можливості, звідки за теоремою 9 залишається довести лише необхідність другої умови. Нехай $\lim_{t \to a} f_t(x, y, t) = 1$. Тоді за неперервністю $n(x, y, a) = \lim_{t \to a} f_t(x, y, t) = 1$, звідки $a \ge d(x, y)$.

($\Leftarrow$) За виконання умов теореми розширення функції $f(x, y, \cdot)$ до функції $h(x, y, \cdot)$ у доведенні теореми 10 є неперервним за відстанню в граничних точках області визначення. Використана в доведенні теореми 10 конструкція побудови необхідності за h зберігає неперервність. Теорема доведена.

Висновки

У роботі розглянуто концепцію роза'язання задач розпізнавання в умовах алгоритмічної нерозв'язності, сформульовано поняття метрично-можливісного простору. У подальших дослідженнях планується запропонувати відповідні можливості для окремих задач та розглянути методики агрегації різних евристик (тобто різних розподілів можливості).

Список використаних джерел

1. Дюбуа Д. Теория возможностей. / Д.Дюбуа, А. Прад. – М.:Радио и связь, 1990. – 288 с.
2. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения / Ю.П. Пытьев. – М.:Едиториал УРСС, 2000. – 192 с.
3. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1976. – 544 с.
4. *Карнаух Т.О.* Відстані в синтаксичних просторах / Т.О. Карнаух // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 2. – С. 134-139.

Надійшла до редколегії 17.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 519.2

Клюшин Д. А. д. ф.-м. н., проф.
Алєксєєнко В. В., асп.

Статистичні властивості довірчих еліпсів, побудованих за допомогою афінних перетворень прямокутників

Проведено порівняння статистичних властивостей довірчих еліпсів, побудованих за допомогою афінних перетворень прямокутників.

Ключові слова: довірчий еліпс, рівень значущості, мінімальний еліпс.

Klyushin D. A., doctor of science, professor
Alexeyenko V. V., post-graduate

Statistical properties of confidence ellipses constructed using affine transformations of rectangular

Comparison of statistical properties of confidence ellipses constructed using affine transformations of rectangulars is performed.

Keywords: confidence ellipse, significance level, minimal ellipse.

*Email: vvalexeyenko@gmail.com, dokmed5@gmail.com
Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Хусаїнов Д.Я.

Вступ. В задачах квадратичного дискримінантного аналізу часто виникає необхідність побудувати еліпси, що містять множини випадкових точок. Для того щоб мінімізувати ймовірність невизначенної відповіді, яка виникає, коли еліпси перетинаються, бажано, щоб ці еліпси мали мінімальну площу. Втім, відомі методи побудови еліпсу мінімальної площі, запропоновані Б.В. Рубльовим і Ю.І.Петуніним [1, 2], P. Sun і R. Freund [3], P. Kumar і E. Yildirim [4] та іншими не дозволяють точно визначати їхній довірчий рівень. З цієї причини в роботі Б.В.Рубльова і Ю.І.Петуніна [5] була запропонована апроксимація мінімального охоплюючого еліпсу за допомогою еліпсу, що має визначений довірчий рівень і з інтуїтивних міркувань вважається близьким до мінімального. У зв'язку з цим виникає питання, наскільки вдалою є така апроксимація і чи не існують інші способи побудови еліпсу, що має визначений довірчий рівень і мінімальну площу. В роботі як альтернатива розглядається побудова довірчого еліпсу за допомогою теореми Toissaint [6].

1 Теорема Хілла для абсолютно неперервного розподілу

Нехай $G=(M,F)$, $M\subset\mathbb{R}$ – генеральна сукупність випадкових величин з невідомим розподілом імовірності F. Основною розподіленою масою генеральної сукупності G називається підмножина $B\subseteq M$, така що $P\{x\in B\}=1-\alpha$, де x – довільний елемент з вибірки, яка одержана за допомогою випадкового вибору з генеральної сукупності G, а α – заданий рівень значущості (наприклад $\alpha=0,05$). Якщо вибіркові значення $x_1,x_2,\ldots,x_n$ є симетрично залежними випадковими величинами з однаковим абсолютно неперервним розподілом, то, як стверджує гіпотеза Хілла [7],

$$P\left(x_{n+1}=x\in\left(x_{(i)},x_{(j)}\right)\right)=\frac{j-i}{n+1},$$

де x_{n+1} – наступне вибіркове значення, а $x_{(i)},x_{(j)}$ — порядкові статистики. Частковий варіант гіпотези Хілла, коли вибіркові значення $x_1,x_2,\ldots,x_n$ є незалежними у сукупності випадковими величинами з однаковим неперервним розподілом, доведений в роботі [8].

За певних умов ця формула є справедливою, якщо вибірка $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ складається з симетрично залежних випадкових величин із неперервною функцією розподілу [9].

Теорема 1. Якщо $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n+1}$ — симетрично залежні однаково розподілені випадкові величини з абсолютно неперервною сумісною функцією розподілу, такі що $P\{\eta_k=\eta_m\}=0$ при $k\neq m$,

© Д.А. Клюшин, В.В. Алєксєєнко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$P\{\eta_k \ge \eta_1,\dots,\eta_k \ge \eta_{k-1},\eta_k \ge \eta_{k+1},\dots,\eta_k \ge \eta_{n+1}\} = \frac{1}{n+1}.$$

Доведення. Нехай $F_k(x_1,x_2,\dots,x_k)$ – сумісна функція розподілу будь-яких k величин серед $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n+1}$. Для довільного $k = 1,2,\dots,n+1$ запишемо формулу повної імовірності в такому вигляді:

$$P\{\eta_k \ge \eta_1,\dots\eta_k \ge \eta_{k-1},\eta_k \ge \eta_{k+1}\dots,\eta_k \ge \eta_{n+1}\} =$$
$$= \int_R P\{x \ge \eta_1,\dots,x \ge \eta_{k-1},x \ge \eta_{k+1},\dots,x \ge \eta_{n+1}/\eta_k = x\} f(x)dx,$$

де $f(x) = F'(x)$ – щільність розподілу однієї випадкової величини.

Зауважимо, що

$$P\{x \ge \eta_1,\dots,x \ge \eta_{k-1},x \ge \eta_{k+1},\dots,x \ge \eta_{n+1}/\eta_k = x\} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P\{x \ge \eta_1,\dots,x \ge \eta_{k-1},x \ge \eta_{k+1},\dots,x \ge \eta_{n+1},x-\varepsilon < \eta_k\}}{P\{x-\varepsilon < \eta_k\}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_{n+1}(x,x,\dots,x,x) - F_{n+1}(x,x,\dots,x,x-\varepsilon)}{F(x) - F(x-\varepsilon)} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(F_{n+1}(x,x,\dots,x,x) - F_{n+1}(x,x,\dots,x,x-\varepsilon)\right)/\varepsilon}{\left(F(x) - F(x-\varepsilon)\right)/\varepsilon} =$$
$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}F_{n+1}\left(\underbrace{x,\dots,x}_{n},y\right)}{f(x)}.$$

Звідси випливає, що

$$P\{\eta_k \ge \eta_1,\dots,\eta_k \ge \eta_{k-1},\eta_k \ge \eta_{k+1},\dots,\eta_k \ge \eta_{n+1}\} =$$
$$= \int_R \frac{\partial}{\partial y}F_{n+1}(x,\dots,x,y)dx.$$

Отже, величини $\int_R \frac{\partial}{\partial y}F_{n+1}(x,\dots,x,y)$ однакові при $k = 1,2,\dots,n+1$. Подія $\{\eta_k \ge \eta_1,\dots,\eta_k \ge \eta_{k-1},\eta_k \ge \eta_{k+1},\dots,\eta_k \ge \eta_{n+1}\}$ означає, що деяка величина набуде найбільшого значення серед усіх. Ці події складають повну групу, тобто

$$\sum_{k=1}^{n+1} P\{\eta_k \ge \eta_1,\dots,\eta_k \ge \eta_{k-1},\eta_k \ge \eta_{k+1},\dots,\eta_k \ge \eta_{n+1}\} =$$
$$(n+1)\int_R \frac{\partial}{\partial y}F_{n+1}(x,\dots,x,y)dx = 1.$$

доходимо висновку, що

$$P\{\eta_k \ge \eta_1,\dots,\eta_k \ge \eta_{k-1},\eta_k \ge \eta_{k+1},\dots,\eta_k \ge \eta_{n+1}\} = \frac{1}{n+1}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n+1}$ – симетрично залежні випадкові величини з абсолютно неперервною сумісною функцією розподілу, такі що $P\{\eta_k = \eta_{(j)}\} = 0$ при $k \ne m$, а $\eta_{(1)} \le \eta_{(2)} \le \dots \le \eta_{(n)}$ – варіаційний ряд, що побудований на перших n з них, то

$$P\left\{\eta_{n+1} \in \left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right]\right\} = \frac{1}{n+1}.$$

Доведення. Розіб'ємо напівінтервал $\left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right]$ на ділянки абсолютної неперервності функції розподілу і атоми.

$$P\left\{\eta_{n+1} \in \left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right]\right\} = P\left\{\eta_{n+1} > \eta_{(j)},\eta_{n+1} \le \eta_{(j+1)}\right\} =$$
$$= P\left\{\eta_{n+1} \in \left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right)\right\} + P\left\{\eta_{n+1} = \eta_{(j+1)}\right\} =$$
$$= \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} P\left\{\eta_{n+1} > \eta_{i_1},\eta_{n+1} > \eta_{i_2},\dots,\eta_{n+1} > \eta_{i_j},\right.$$
$$\left.\eta_{n+1} < \eta_{i_{j+1}},\eta_{n+1} < \eta_{i_{j+2}},\dots,\eta_{n+1} < \eta_{i_n}\right\}.$$

Перший доданок містить C_n^j доданків, тобто всі такі комбінації $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}$ з чисел $\{1,2,\dots,n\}$, що j величин серед $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$ менші ніж η_{n+1}, а інші $n-j$ величини не менші ніж η_{n+1}. За принципом включення–виключення маємо, що

$$P\left\{\eta_{n+1} \in \left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right]\right\} =$$
$$= \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} P\left\{\underbrace{\eta_{n+1} > \eta_{i_1},\eta_{n+1} > \eta_{i_1},\dots,\eta_{n+1} > \eta_{i_j}}_{A},\right.$$
$$\left.\underbrace{\eta_{n+1} \le \eta_{i_{j+1}},\eta_{n+1} \le \eta_{i_{j+2}},\dots,\eta_{n+1} \le \eta_{i_n}}_{A_1}\right\} =$$
$$= \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n}\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k \sum_{\substack{\{s_1,s_2,\dots,s_k\}\subset \\ \subset\{i_{j+1},i_{j+2},\dots,i_n\}}} P\left\{\eta_{n+1} > \eta_{i_1},\dots,\right.$$
$$\left.\eta_{n+1} > \eta_{i_j},\eta_{n+1} > \eta_{s_1},\dots,\eta_{n+1} > \eta_{s_k}\right\}$$

Оскільки на інтервалі $\left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right)$ функція розподілу F є абсолютно неперервною, згідно теореми 1 отримаємо

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$P\left\{\eta_{n+1}\in\left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right]\right\}=$$

$$=\sum_{s_1,s_2,\dots,s_k}\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k\sum_{\substack{\{s_1,s_2,\dots,s_k\}\subset\\ \subset\{j+1,j+2,\dots,s_k\}}}\frac{1}{j+k+1}=$$

$$C_n^j\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k C_{n-j}^k\frac{1}{j+k+1}=C_n^j\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k C_{n-j}^k\int_0^1 t^{j+k}dt=$$

$$C_n^j\int_0^1 t^j(1-t)^{n-j}dt=C_n^j\int_0^1\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k C_{n-j}^k t^{j+k}dt.$$

Скористаємось означенням бета-функції.

$$P\left\{\eta_{n+1}\in\left(\eta_{(j)},\eta_{(j+1)}\right]\right\}=C_n^j\mathrm{B}(j+1,n-j+1)=$$

$$=C_n^j\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+2)}=C_n^j\frac{j!(n-j)!}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{j!(n-j)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Теорему доведено.

Наслідок. Із теореми 2 випливає, що

$$P\left\{\eta_{n+1}\in\left(\eta_{(i)},\eta_{(j)}\right)\right\}=\frac{j-i}{n+1}\quad\forall\ 0\le i<j\le n+1,$$

де $\eta_0=-\infty,\eta_{n+1}=+\infty$.

Доведення.

$$P\left\{\eta_{n+1}\in\left(\eta_{(i)},\eta_{(j)}\right)\right\}=$$

$$P\left\{\tilde{x}\in\left[x_{(i)},x_{(i+1)}\right)\cup\left[x_{(i)},x_{(i+2)}\right)\cup\dots\cup\left[x_{(j-1)},x_{(j)}\right)\right\}=$$

$$=P\left\{\eta_{n+1}\in\left[\eta_{(i)},\eta_{(i+1)}\right)\right\}+P\left\{\eta_{n+1}\in\left[\eta_{(i+1)},\eta_{(i+2)}\right)\right\}+\dots+$$

$$+P\left\{\eta_{n+1}\in\left[\eta_{(j-1)},\eta_{(j)}\right)\right\}=\frac{j-i}{n+1}.$$

2 Теорема Хілла для розподілу з атомами

Нехай $x_1,x_2,\dots,x_n$ – реалізація неперервної випадкової величини X, $x_{(1)}\le x_{(2)}\le\dots\le x_{(n)}$ — відповідний варіаційний ряд. Згідно теореми Хілла в цьому випадку ймовірність того, що наступна реалізація x_{n+1} потрапить у інтервал $\left(x_{(i)},x_{(j)}\right)$ не залежить від функції розподілу F_X і дорівнює:

$$P\left(x_{n+1}\in\left(x_{(i)},x_{(j)}\right)\right)=\frac{j-1}{n+1}\qquad(1)$$

Нехай $x_1,x_2,\dots,x_n$ – відповідні заокруглення вибірки $x_1',x_2',\dots,x_n'$, отриманої простим випадковим вибором із генеральної сукупності G, породженої неперервною випадковою величиною. Для визначеності будемо вважати, що якщо $x_k=x_{(i)}=x_{(i+1)}=x_l$, то $k<l$. Припустимо, що якщо

$$x_{(i-1)}<x_{(i)}=x_{(i+1)}=\dots=x_{(i+l)}<x_{(i+l+1)}\qquad(2)$$

то $\forall x_k: x_k=x_{(i)}$ виконується: $x_{(i)}'<x_k<x_{(i+l)}'$. Таке припущення назвемо гіпотезою заокруглення

Позначимо:

$$M(i)=Max\left\{k: x_{(k)}=x_{(i)}\right\}\qquad(3)$$

$$m(i)=Min\left\{k: x_{(k)}=x_{(i)}\right\}\qquad(4)$$

Теорема 3. В рамках гіпотези заокруглення справедлива формула:

$$P\left(x_{n+1}\in\left(x_{(i)},x_{(j)}\right)\right)=\frac{m(j)-M(i)}{n+1}\qquad(5)$$

Доведення: Покажемо, що $x_{n+1}>x_{(i)}\Leftrightarrow x_{n+1}'>x_{(M(i))}'$.

Необхідність. Нехай $x_{n+1}>x_{(i)}$ і $x_{n+1}'\le x_{(M(i))}'$. З властивостей оператора заокруглення випливає, що $x_{n+1}'\ge x_{(i)}'=x_{(M(i))}'$. Отже, $x_{n+1}'=x_{(M(i))}'$, що суперечить припущенню заокруглення.

Достатність. Нехай $x_{n+1}'>x_{(M(i))}'$. Тоді з властивостей заокруглення: $x_{n+1}\ge x_{(M(i))}$ і враховуючи гіпотезу заокруглення випливає, що $x_{n+1}>x_{(i)}=x_{(M(i))}$

Аналогічно можна довести, що $x_{n+1}<x_{(j)}\Leftrightarrow x_{n+1}'<x_{(m(j))}'$.

Тепер застосувавши гіпотезу Хілла отримаємо:

$$P\left(x_{n+1}\in\left(x_{(i)},x_{(j)}\right)\right)=$$

$$=P\left(x_{n+1}'\in\left(x_{(M(i))}',x_{(m(j))}'\right)\right)=\frac{m(j)-M(i)}{n+1}$$

Теорема 4. Якщо у вибірці $x_1,x_2,\dots,x_n$ елемент x_i повторюється m разів, то в рамках гіпотези заокруглення:

$$P\left(x_{n+1}=x_{(i)}\right)=\frac{M(i)-m(i)}{n+1}\qquad(6)$$

Доведення. Покажемо, що $x_{n+1}=x_{(i)}\Leftrightarrow x_{m(i)}'<x_{n+1}'<x_{M(i)}'$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Необхідність випливає із гіпотези заокруглення безпосередньо.

Достатність. Нехай $x'_{m(i)} < x'_{m+1} < x'_{M(i)}$. Тоді з властивостей оператора заокруглення випливає: $x_{m(i)} \le x_{m+1} \le x_{M(i)}$, звідки і випливає, що $x_{m+1} = x_{(i)}$.

Застосувавши гіпотезу Хілла отримаємо:

$$P\left(x_{m+1} = x_{(i)}\right) = P\left(x'_{m+1} \in \left(x'_{m(i)}, x'_{M(i)}\right)\right) = \frac{M(i) - m(i)}{n+1}$$

Наслідок 1. В рамках гіпотези заокруглення справедлива формула:

$$P\left(x_{m+1} \in \left[x_{(i)}, x_{(s)}\right]\right) = \frac{n-1}{n+1} \qquad (7)$$

Доведення.

$$P\left(x_{m+1} \in \left[x_{(i)}, x_{(s)}\right]\right) =$$

$$P\left(x_{m+1} = x_{(i)}\right) + P\left(x_{m+1} \in \left(x_{(i)}, x_{(s)}\right)\right) + P\left(x_{m+1} = x_{(s)}\right) =$$

$$\frac{M(1) - m(1) + m(n) - M(1) + M(n) - m(n)}{n+1} =$$

$$= \frac{M(n) - m(1)}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Зауваження: Якщо $x_{(i)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$, то припущення гіпотези Хілла є достатнім для виконання гіпотези заокруглення (вважаємо, що значення збігаються із заокругленнями) і формула Теореми 1 збігається з формулою гіпотези Хілла.

3. Алгоритм побудови довірчого еліпсу

В роботі [5] описано алгоритм побудови еліпсів, що містять задані точки (x_i, y_i), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) із імовірністю $\frac{n-1}{n+1}$, де числа x_i та y_i вважалися незалежними випадковими величинами із неперервними функціями розподілу. Цей алгоритм має такий вигляд.

Алгоритм Петуніна–Рубльова.

1. Шукаємо дві точки (x_k, x_l) і (x_r, x_s), відстань між якими є найбільшою.
2. Проводимо через точки (x_k, x_l) і (x_r, x_s) пряму L.
3. Шукаємо дві точки (x_r, x_s) і (x_t, x_w), відстань яких від прямої L є найбільшою (з обох боків від прямої).
4. Проводимо через точки (x_r, x_s) і (x_t, x_w) прямі L_1 і L_2, які є паралельними до прямої L.
5. Проводимо через точки (x_k, x_l) і (x_r, x_s) дві прямі, які є перпендикулярними до прямої L.
6. Перетини прямих L, L_1 і L_2 утворюють прямокутник Π, сторони якого мають довжини a і b.
7. Здійснюємо поворот і перенос системи координат, так щоб лівий нижній кут прямокутника був розташований в початку нової системи координат с осями Ox' і Oy', а точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) перейшли в точки (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n).
8. Здійснюємо стискання абсцис усіх точок (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n) з коефіцієнтом $\alpha = \frac{a}{b}$ і отримуємо сукупність точок $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$, які лежать в квадраті S.
9. Знаходимо центр квадрата (x'_0, y'_0) і обчислюємо відстані від нього до кожної точки $r_1, r_2, \ldots, r_n$.
10. Знаходимо найбільше число $R = \max(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.
11. Будуємо коло з центром в точці (x'_0, y'_0) і радіусом R (рис. 4; всі точки $(\alpha x'_1, y'_1)$, $(\alpha x'_2, y'_2)$, ..., $(\alpha x'_n, y'_n)$ тепер лежать всередині цього кола.)
12. Застосовуємо до цього кола операцію розтягування вздовж осі Ox' з коефіцієнтом $\beta = \frac{1}{\alpha}$, отримуючи шуканий еліпс.

За гіпотезою Хілла [7], якщо числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ є симетрично залежними випадковими величинами із неперервною функцією розподілу, то

$$P\left(r_{n+1} \in \left(r_{(i)}, r_{(j)}\right)\right) = \frac{j-i}{n+1}, \text{ де } j > i,$$

а $r_{(i)}$ — i-та порядкова статистика.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Нагадаємо, що вибіркові значення $r_1, r_2, ..., r_n$ є симетрично залежними випадковими величинами, якщо їх сумісна функція розподілу

$$F(u_1, ..., u_n) = p(x_1 < u_1, ..., x_n < u_n)$$

не залежить від перестановок аргументів. В роботі [5] відносно точок (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) було зроблено припущення, що вони є незалежними в сукупності, але доведення того, що побудований еліпс містить задані точки із імовірністю $\frac{n-1}{n+1}$, проведено не було. Отже, для доведення коректності описаного вище алгоритму, потрібно довести наступну теорему.

Теорема 5. Якщо точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) є незалежними у сукупності, то еліпс, побудований за алгоритмом 1 містить їх із імовірністю $\frac{n-1}{n+1}$.

Доведення. Оскільки задані точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) є незалежними у сукупності, то їхні координати x_i та y_i також є незалежними випадковими величинами із неперервними функціями розподілу. На етапі 1 ми шукаємо дві точки (x_k, x_l) і (x_r, x_s), відстань між якими є найбільшою. Очевидно, що ця пара однозначно визначається незалежно від перестановок точок. На етапі 3 шукаємо дві точки (x_r, x_q) і (x_v, x_w), відстань яких від прямої L є найбільшою (з обох боків від прямої). Ці дві точки також залишаться тими ж самими при будь-якій перестановці точок (за координатами, а не за порядковим номером). Отже, параметри прямокутника і квадрата, що містять точки та їх образи при перетвореннях (переносі, повороті і стисканні) не залежать від порядку нумерації вихідних точок. Залежність між точками виникає, коли на етапі 10 обчислюються відстані від кожної із них до центра квадрата $r_1, r_2, ..., r_n$. Але розподіл цих відстаней

$$F(u_1, ..., u_n) = p(r_1 < u_1, ..., r_n < u_n)$$

залишається незмінним при будь-якій перестановці точок (відповідно, відстаней). Таким чином, вибіркові значення $r_1, r_2, ..., r_n$ є симетрично залежними, і гіпотеза Хілла є слушною. Отже, еліпс, побудований за алгоритмом 1 містить їх із імовірністю $\frac{n-1}{n+1}$. Теорему доведено.

Гіпотеза Хілла дозволяє модифікувати алгоритм 1 наступним чином. Нехай етапи 1–8 залишаються тими самими, а на етапі 9 замість центра квадрата оберемо центр тяжіння точок, що містяться в квадраті. Решта етапів виконується аналогічно попередньому варіанту. Оскільки перестановка точок не впливає на вибірку $r_1, r_2, ..., r_n$, а точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) є незалежними у сукупності, доходимо висновку, що вибіркові значення $r_1, r_2, ..., r_n$ є симетрично залежними. Отже має місце теорема, аналогічна теоремі 2.

Аналіз алгоритму показує також, що він залишається коректним і в оригінальному варіанті, оскільки перенумерація точок не змінює параметрів еліпсу.

4. Порівняння алгоритмів

Алгоритм Петуніна–Рубльова, дозволяє побудувати еліпс, що має довірчий рівень, який залежить лише від кількості точок у вихідної множині та кількості точок, образи яких після стискання лежать на однаковій відстані від центру квадрату, але він не гарантує, що площа еліпсу буде мінімальною.

Згідно теореми, доведеної Toussaint [9], серед усіх прямокутників, що містять задану множину точку, найменшу площу має прямокутник, сторона якого містить одну зі сторон опуклої оболонки, побудованої навколо цієї множини точок. Виникає питання, чи можна скористатися цим фактом, щоб побудувати мінімальний довірчий еліпс.

"Найгірший" випадок спостерігається, коли точка лежить у вершині квадрата. Тоді одна точок лежить на максимальній відстані від центра квадрата, і коло, що містить образи точки, є описаним навколо квадрата.

"Найкращий" випадок спостерігається, коли точка лежить на середині сторони

Kyiv National Taras Shevchenko University

квадрата. Тоді одна з точок лежить на відстані від центра квадрата, що дорівнює половині його сторони, і коло, що містить образи точки, є вписаним у квадрат. Легко бачити, що в цих варіантах площа дорвірчого еліпса прямо пропорційна площі мінімального прямокутника.

Дослідження інших варіантів проведемо за допомогою статистичного моделювання. Моделювання двовимірної випадкової величини з нормальним розподілом $N(\vec{a},\vec{b})$, де $\vec{a}=(0,0)$ і $\vec{b}=(1,1)$ за допомогою 10 вибірок розміром 100 показало, що в середньому площа довірчого еліпса, побудованого за допомогою алгоритма Toussaint на 25% більше, ніж площа еліпса, побудованого за допомогою алгоритма 1. Цікаво, що для двовимірної випакової величини з рівномірним розподілом на квадраті $[0,1]\times[0,1]$ цей показник майже той самий — 26%. В той же час порівняння із площею точного мінімального еліпса доводить переваги алгоритма Петуніна–Рубльова: для рівномірного розподілу площа прямокутника, побудованого за цим алгоритмом, в середньому перевищувала площу мінімального еліпса на 25%, а той час як прямокутник за алгоритмом Toussaint — на 67%. Для нормального розподілу ці величини склали 27% і 102% відповідно. Як бачимо, коли множина точок стає витягнутою, алгоритм Toussaint стає делалі менш точним, в той час як алгоритм Петуніна-Рубльова демонструє певну незалежність від розподілу.

Висновки. Еліпси, побудовані за прямокутником шляхом афінних перетворень, мають визначений довірчий рівень. Еліпс, побудований за прямокутником, визначеним за допомогою алгоритма Toussaint [9], у крайніх випадках має мінімальну площу серед усіх еліпсів, побудованих за допомогою афінних перетворень прямокутника, а в решті ситуацій в середньому поступається алгоритму Петуніна–Рубльова.

Список використаних джерел

1. Рублев Б.В. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное множество точек. Ч. 1 / Б.В. Рублев, Ю.И. Петунин // Украинский математический журнал. — 1998. — № 7. — С. 973–981.
2. Рублев Б.В., Петунин Ю.И. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное множество точек. Ч. 2 / Б.В. Рублев, Ю.И. Петунин // Украинский математический журнал. — 1998. — № 8. — С. 1098–1105.
3. Sun P. Computation of minimum volume covering ellipsoids / P. Sun, R. M. Freund // Oper. Res., 2004. — 52. — P. 690-706.
4. Kumar P. Minimum volume enclosing ellipsoids and core sets / P. Kumar, E. A. Yildirim // J. Optim. Theory Appl. — 2005. — 126. — P. 1-21.
5. Петунин Ю.И. Распознавание образов с помощью квадратичных дискриминантных функций / Ю.И. Петунин, Б.В. Рублев Б.В. // Вычисл. и прикл. матем. — 1996, вып. 80. — С. 89–104.
6. Toussaint G.T. Solving geometric problems with the rotating calipers / Toussaint G.T. // Proc. 2nd IEEE Mediterranean electrotechnical conference. — 1983. — P. A10.02/1-4.
7. Hill B.M. Posterior distribution of percentiles: Bayes' theorem for sampling from a population / B.M. Hill // Journal of American Stat. Assoc. — 1968. — vol. 63, № 322. — P. 677–691.
8. Мадреимов И. Характеризация равномерного распределения с помощью порядковых статистик / И. Мадреимов, Ю.И. Петунин // Теор. вероятностей и мат. статистика. — 1982. — 27. — С. 96–102.
9. Andrushkiw R.I. Construction of the bulk of general population in the case of exchangeable sample values / R.I. Andrushkiw, D.A. Klyushin, Yu.I. Petunin, V.N. Lysyuk // In: Proceedings of the International Conference of Mathematics and Engineering Techniques in Medicine and Biological Science (METMBS'03). – Las Vegas, Nevada, USA, June 26-29, 2003. – P.486-489.

Надійшла до редколегії 20.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки **2012, 3** *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 519.718.2

Королік Р.П., асп.
Пічкур В.В., д.ф.м.н., доц.

Оцінка множини початкових умов множинної дискретної системи

В роботі одержано оптимальні оцінки множини початкових умов в задачі практичної стійкості дискретної множинної системи. Для випадку лінійної динамічної складової обґрунтовано теореми про оптимальні оцінки при конкретних фазових обмеженнях.

Ключові слова: дискретна система, множинна система, практична стійкість.

*E-mail: korolik@email.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

R. P. Korolik*, grad. Student
Pichkur V.V. doctor of science

Score a set of initial conditions of discrete set systems

This paper is focused on the set of initial conditions in the problem of practical stability of discrete set systems. For the case of linear dynamic component is focused on theorems on optimal evaluation of phase with specific limitations.

Key Words: discrete set system, maximum set, practical stability.

Вступ. Задачі дослідження якісної поведінки дискретних систем набули широкого розповсюдження у науковій літературі. Це пов'язано з суттєвим прикладним значенням співвідношень такого класу. Так, ряд фізичних, біологічних та соціальних процесів описуються дискретними моделями. Крім того, в зв'язку з широким застосуванням обчислювальної техніки, актуальним є дослідження різницевих співвідношень, що застосовуються при побудові числових методів для різних класів задач. До аналізу дискретних систем застосовуються методи теорії стійкості [2, 6, 8]. В працях [2, 5] отримані оцінки і властивості максимальних множин практичної стійкості дискретних систем.

У випадку, якщо при дослідженні динамічної системи потрібно враховувати її просторову конфігурацію, одержуємо множинну динамічну систему. До множинної динамічної системи приходять також в задачі лінійної фільтрації, де динамічна компонента є фільтром, а множинна компонента є інформаційною областю [7]. Задача практичної стійкості множинною динамічною системою у неперервному випадку досліджувалась в [1].

В роботі одержано оптимальні оцінки максимальної за включенням множини початкових умов в задачі практичної стійкості дискретної множинної системи. Результати мають алгоритмічну спрямованість.

Будемо використовувати такі позначення: R^n – евклідовий n – вимірний простір, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток в R^n, який породжує евклідову норму $\|\cdot\|$, $\operatorname{int} A$, ∂A – сукупність внутрішніх точок і границя множини $A \subset R^n$ відповідно, $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ – одинична сфера, $K_r(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| \le r\}$ – замкнутий шар радіуса r з центром в точці $a \in R^n$, $c(A,\psi) = \sup\limits_{x \in A}\langle x,\psi\rangle$ - опорна функція множини $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$, $comp(R^n)$ - сукупність всіх непорожніх компактів з R^n, $conv(R^n)$ - множина всіх непорожніх і опуклих компактів з R^n, $[0,N] = \{0,1,\dots,N\}$ – множина індексів.

Основні означення і постановка задачі.

Розглянемо систему вигляду

$$x(k+1) = f_k(x(k)), \tag{1}$$

$$B_k : R^m \to comp(R^n), \tag{2}$$

де $x \in R^n$, $f_k : D \to D \subset R^n$ - m -вимірна функція в області D, $\Phi(k) \in comp(R^n)$ - множина фазових обмежень. Відображення $B_k : R^m \to comp(R^n)$ - неперервне в області D [1, 4].

Означення 1. Система (1), (2) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$-стійкою, якщо

$$B_k(x(k, x_0)) \subset \Phi(k)$$

для всіх $x_0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 2. Сукупність G_* з R^n називається максимальною за включенням множиною практичної стійкості системи (1), (2)

© Р.П. Королік, В.В. Пічкур, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

при фазових обмеженнях $\Phi(k)$ на інтервалі $[0,N]$, якщо система (1), (2) є $\{G_*,\Phi(k),0,N\}$ - стійкою і $G_0 \subseteq G_*$ для всіх множин G_0, для яких має місце $\{G_0,\Phi(k),0,N\}$ - стійкість системи (1), (2).

Означення 3. Будемо говорити, що для системи (1), (2) виконується умова δ, якщо існує $\delta > 0$, таке, що хоча б для одного $k \in [0,N]$ справджується співвідношення

$$B_k(x)/\Phi(k) \neq 0, \ \|x\| > \delta .$$

За умови δ множина G_* є компактною.

Нехай заданий клас множин

$$W = \{H(p) \in comp(R^m) : p \geq 0\}.$$

Припустимо, що відображення $H : p \to H(p)$, $p \geq 0$ є неперервним і задовольняє такі умови: $H(0) \subset \operatorname{int} G_*$; $H(p) \subset \operatorname{int} H(q)$, $p < q$; знайдеться $s > 0$ таке, що множина $H(s)/G_*$ не є порожньою.

Задача оцінки максимальної за включенням множини практичної стійкості G_* системи (1)-(2) у класі W полягає у знаходженні всіх значень параметра $p > 0$, при яких наявна $\{H(p),\Phi(k),0,N\}$ - стійкість нульового розв'язку системи (1), (2).

Означення 4. Оптимальною оцінкою множини початкових умов практичної стійкості системи (1), (2) у структурній формі W називається значення параметра

$$p_* = \max\{p \geq 0 : H(p) \subseteq G_*\}.$$

За вищевказаних умов оптимальна оцінка існує та єдина [1].

Розглянемо дискретну мішану систему вигляду

$$x(k+1) = A(k)x(k), \tag{3}$$

$$B_k : R^m \to conv(R^n), \tag{4}$$

де $A(k)$ - невироджена матриця розмірності $m \times m$, $k \in [0, N-1]$, $\Phi(k) \in conv(R^n)$ - множина фазових обмежень, B_k - неперервні відображення, для яких виконується *умова подібу*

$$c(B_k(x),\psi) = \langle x, g_k(\psi)\rangle + h_k(\psi) \tag{5}$$

де $g \in C(R^n, R^m)$, $h \in C(R^n)$, $\|\psi\| \leq \mu \|g(\psi)\|$, $\mu > 0$. Крім того, $H(p) \in conv(R^n)$.

Запишемо загальний розв'язок системи (3), (4) у вигляді

$$x(k) = \Theta(k)x_0 , \ k \in [1, N],$$

де $\Theta(k,s) = A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_s = \prod_{v=s:k-1} A_v$ - невироджена матриця, $\Theta(k) = \Theta(k,0)$, $s \in [0,k]$, $k \in [1,N]$, $\Theta(0)$ - одинична матриця. За властивостями функції деформації

$$G_* = \bigcup_{e \in S} \{x = ke : k \in [0, d_*(e)]\},$$

де

$$d_*(e) = \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k),\psi) - h_k(\psi)}{\langle g_k(\psi), \Theta(k)e\rangle}. \tag{6}$$

Тоді оптимальна оцінка множини початкових умов знаходиться з співвідношення [1]

$$p_* = \min_{e \in S} d_*(e).$$

Оптимальна оцінка множини початкових умов у вигляді кулі.

Розглянемо наступний випадок. Нехай

$$W = \{K_p(0) : p \geq 0\},$$

фазові обмеження $\Phi(k) = K_{r(k)}(0)$, множина компонента $B_k(x) = K_{p(k)}(x)$, $r(k) > p(k) > 0$, $k \in [0,N]$. Звідси з урахуванням (6) одержуємо

$$d_*(e) = \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{r(k) - p(k)}{\langle \psi, \Theta(k)e\rangle} =$$

$$= \min_{k \in [0,N]} \frac{r(k) - p(k)}{\max_{\psi \in S} \langle \psi, \Theta(k)e\rangle}.$$

Оскільки $\max_{\psi \in S} \langle \psi, \Theta(k)e\rangle = \|\Theta(k)e\|$, то

$$d_*(e) = \min_{k \in [0,N]} \frac{r(k) - p(k)}{\|\Theta(k)e\|}.$$

Звідси $p_* = \min_{e \in S} \min_{k \in [0,N]} \frac{r(k) - p(k)}{\|\Theta(k)e\|}$. Позначимо $Q(k) = \Theta^*(k)\Theta(k)$ - симетрична додатновизначена $m \times m$-матриця. Оскільки $\|\Theta(k)e\| = \sqrt{\langle Q(k)e, e\rangle}$, то

$$p_* = \min_{e \in S} \min_{k \in [0,N]} \frac{r(k) - p(k)}{\max_{e \in S} \|\Theta(k)e\|}.$$

Зі співвідношення Релея [3] випливає, що

$$\max_{e \in S} \|\Theta(k)e\| = \sqrt{\max_{e \in S} \langle Q(k)e, e\rangle} = \sqrt{\lambda_{\max}(Q(k))}.$$

Тут $\lambda_{\max}(Q(k))$ - максимальне власне число матриці $Q(k)$. Одержуємо, що оптимальна оцінка практичної стійкості в цьому випадку має вигляд

$$p_* = \min_{k \in [0,N]} \frac{r(k) - p(k)}{\sqrt{\lambda_{\max}(Q(k))}}.$$

Введемо таке означення.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Означення 5. Множинна система (3), (4) називається $\{p, r(k), p(k), 0, N\}$ – стійкою, якщо для довільної початкової умови $x(0) \in K_p(0)$ має місце включення

$$K_{p(k)}(x(k)) \subset K_{r(k)}(0),$$

де $x(k) = x(k, x_0)$, $k \in [0, N]$.

Справджується така теорема

Теорема 1. Для того, щоб система (3), (4) була $\{p, r(k), p(k), 0, N\}$ – стійкою необхідно і достатньо, щоб

$$p \le p_* = \min_{k \in [0,N]} \frac{r(k) - p(k)}{\sqrt{\lambda_{\max}(Q(k))}}.$$

Розглянемо задачу знаходження оптимальної оцінки практичної стійкості системи (3), (4) у структурній формі

$$W = \{K_p(0) : p \ge 0\}.$$

З (6) випливає, що

$$p_* = \min_{e \in S} \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}{\langle g_k(\psi), \Theta(k) e \rangle}.$$

Позначимо $C(k) = \Theta(k)\Theta^*(k)$ - симетрична додатновизначена $m \times m$-матриця. Оскільки

$$\max_{e \in S} \langle g_k(\psi), \Theta(k) e \rangle = \left\| \Theta^*(k) g_k(\psi) \right\| =$$

$$= \sqrt{\langle C(k) g_k(\psi), g_k(\psi) \rangle},$$

то оптимальна оцінка

$$p_* = \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}{\sqrt{\langle C(k) g_k(\psi), g_k(\psi) \rangle}}.$$

Введемо наступне означення.

Означення 6. Множинна система (3), (4) називається $\{p, \Phi(k), 0, N\}$ – стійкою, якщо для довільної початкової умови $x(0) \in K_p(0)$ має місце включення

$$B_k(x(k)) \subset \Phi(k), \quad k \in [0, N],$$

де B_k задовольняє умову поділу (5).

Має місце таке твердження.

Теорема 2. Для того, щоб система (3), (4) була $\{p, \Phi(k), 0, N\}$ – стійкою, необхідно і достатньо, щоб

$$p \le p_* = \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}{\sqrt{\langle C(k) g_k(\psi), g_k(\psi) \rangle}},$$

де $C(k) = \Theta(k)\Theta^*(k)$.

Оптимальна оцінка практичної стійкості у формі еліпсоїда.

Розглянемо задачу оцінки практичної стійкості системи (3), (4) в структурній формі

$$W = \{E_p(0, Q) : p \ge 0\}.$$

Тут

$$E_p(0, Q) = \{x \in R^m : \langle Qx, x \rangle \le p^2\}$$

є еліпсоїдом з центром в точці 0, Q - симетрична додатновизначена матриця розмірності $m \times m$. Покажемо, що оптимальна оцінка в цьому випадку задовольняє співвідношення

$$p_* = \min_{e \in \partial E_1(0,Q)} d_*(x).$$

Згідно [1], при $p = p_*$ мають співвідношення

$$E_p(0, Q) \subseteq G_*, \quad \partial E_p(0, Q) \cap \partial G_* \ne \varnothing. \qquad (7)$$

Функція деформації еліпсоїда $E_p(0, Q)$ має вигляд

$$d(z) = \frac{p}{\sqrt{\langle Qz, z \rangle}}, \quad z \in S.$$

Співвідношення (7) означає, що для всіх $z \in S$

$$d(z) \le d_*(z),$$

але знайдеться таке $z_0 \in S$, що $d(z_0) = d_*(z_0)$.

Останні співвідношення означають, що

$$p_* \le \sqrt{\langle Qz, z \rangle} d_*(z) = d_*\left(\frac{z}{\sqrt{\langle Qz, z \rangle}}\right)$$

при довільному $z \in S$, причому в останній нерівності має місце рівність при $z = z_0$. Отже,

$$p_* = \min_{z \in S} d_*\left(\frac{z}{\sqrt{\langle Qz, z \rangle}}\right).$$

Точка $x = \frac{z}{\sqrt{\langle Qz, z \rangle}} \in \partial E_1(0, Q)$ при $z \in S$.

Тому $p_* = \min_{x \in \partial E_1(0,Q)} d_*(x)$. Підставляючи (6), одержуємо

$$p_* = \min_{e \in \partial E_1(0,Q)} \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}{\langle g_k(\psi), \Theta(k) e \rangle}.$$

Для того, щоб спростити останню рівність, розв'яжемо задачу на умовний екстремум

$$\max_{e \in E_1(0,Q)} \langle g_k(\psi), \Theta(k) e \rangle.$$

Для цього введемо заміну змінних $z = Q^{1/2} e$. Оскільки $e \in E_1(0, Q)$, то вектор $z \in K_1(0)$. Тоді $e = Rz$, де $R = Q^{-1/2}$. Так як матриця Q є симетричною і додатновизначеною, то можна ввести $Q^{1/2}$, що буде симетричною додатновизначеною матрицею розмірності $m \times m$ [3]. Звідси

$$\max_{e \in E_1(0,Q)} \langle g_k(\psi), \Theta(k) e \rangle =$$

$$= \max_{z \in K_1(0)} \langle g_k(\psi), \Theta(k) Rz \rangle =$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$= \left\| R^* Q^*(k) g_k(\psi) \right\| = \sqrt{\langle M(k) g_k(\psi), g_k(\psi) \rangle}.$$

Тут $M(k) = \Theta(k) R R^* \Theta^*(k)$. Оскільки $RR^* = Q^{-1}$, то $M(k) = \Theta(k) Q^{-1} \Theta^*(k)$. Покажемо, що для знаходження матриці $M(k)$ можна записати матричне дискретне рівняння. Справді,

$$M(k+1) = \Theta(k+1) Q^{-1} \Theta^*(k+1) =$$
$$= A(k) \Theta(k) Q^{-1} \Theta^*(k) A^*(k) = A(k) M(k) A^*(k),$$

$k = 0,1,\ldots$. При цьому $M(0) = Q^{-1}$. Введемо таке означення.

Означення 7. Множинна система (3), (4) називається $\{p, Q, \Phi(k), 0, N\}$ – стійкою, якщо для довільної початкової умови $x(0) \in E_p(0, Q)$ має місце включення

$$B_k(x(k)) \subset \Phi(k), \quad k \in [0, N],$$

де B_k задовольняє умову поділу (5).

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. Для того, щоб система (3), (4) була $\{p, Q, \Phi(k), 0, N\}$ – стійкою необхідно і достатньо, щоб

$$p \le p_* = \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}{\sqrt{\langle M(k) g_k(\psi), g_k(\psi) \rangle}},$$

де

$$M(k+1) = A(k) M(k) A^*(k),$$
$$M(0) = Q^{-1}, \quad k \in [0, N-1].$$

Приклад. Знайдемо оптимальну оцінку практичної стійкості системи (3), (4) в структурній формі $W = \{E_p(0,Q) : p \ge 0\}$ за умови, що фазові обмеження $\Phi(k) = K_{r(k)}(0)$, множинна компонента $B_k(x) = K_{p(k)}(x)$, $r(k) > p(k) > 0$, $k \in [0, N]$. Тоді згідно теореми 3

$$p_* = \min_{k \in [0,N]} \frac{r(k) - p(k)}{\sqrt{\lambda_{\max}(M(k))}},$$

де $\lambda_{\max}(M(k))$ - максимальне власне число матриці $M(k)$.

Оптимальна оцінка множини початкових умов у формі гіперкуба.

Розглянемо задачу оцінки практичної стійкості системи (3), (4) в структурній формі $W = \{\Pi_p(0) : p \ge 0\}$,

де $\Pi_p(0) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* : |x_i| \le p\}$ - гіперкуб з центром в точці 0, $p > 0$. Оптимальна оцінка в цьому випадку задовольняє співвідношення

$$p_* = \min_{e \in \Pi_1(0)} d_*(e) =$$
$$= \min_{e \in \Pi_1(0)} \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}{\langle g_k(\psi), \Theta(k) e \rangle}.$$

Розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\max_{e \in \Pi_1(0)} \langle g_k(\psi), \Theta(k) e \rangle = \max_{e \in \Pi_1(0)} \langle \Theta^*(k) g_k(\psi), e \rangle =$$
$$= c(\Pi_1(0), \Theta^*(k) g_k(\psi)) = \sum_{i=1}^{m} |\langle \theta_i(k), g_k(\psi) \rangle|.$$

Тут $\theta_i(k) \in R^m$ - стовпчики матриці $\Theta(k)$, $i = 1,2,\ldots,m$. Тоді оптимальна оцінка множини початкових умов в класі гіперкубів матиме вигляд

$$p_* = \min_{k \in [0,N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}{\sum_{i=1}^{m} |\langle \theta_i(k), g_k(\psi) \rangle|}.$$

Висновки. В роботі побудовано оптимальні оцінки множини початкових умов в задачі практичної стійкості множинної дискретної системи за умов, що динамічна складова є лінійною, а множинна складова задовольняє умову поділу. Одержані співвідношення мають алгоритмічну спрямованість.

Список використаних джерел

1. Башняков О.М., ГаращенкоФ.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. Башняков А.Н., Пичкур В.В., Хитько И.В. О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы // Проблемы управления и информатики. –2011. –№2. –С.5-11.
3. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
4. Благодатских В. И. Теория дифференциальных включений. – М:. Изд-во МГУ, 1979. – 88 с.
5. Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Київ: Наук.думка, 1985. – 304 с.
6. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
7. Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. – Boston: IIASA and Birkhauser. – 1997. – 321 p.
8. Martynyuk A.A. Stability analysis of discrete systems // International Applied Mechanics – 2000. – Vol.36, No. 7. – P. 3-34.

Надійшла до редколегії 09.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev Series: Physics & Mathematics

УДК 004.056.2

Кулага А.А., аспірант

Алгоритми обчислення білінійного цифрового підпису наосліп

У роботі запропоновано алгоритми формування та перевірки білінійного підпису наосліп з відкритим індивідуальним ключем.

Ключові слова: білінійні відображення, схеми підпису, еліптичні криві.

*E-mail: anat.kiev@mail.ru.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Kulaga A.A., post-graduate student

Algorithms of Blind Identity-Based Digital Signature Scheme

The aim of this paper is to provide algorithms of generation and verification of blind identity-based digital signature scheme.

Key words: bilinear maps, signature schemes, elliptic curve,.

Вступ

Першим визначним застосуванням спарювань в криптографії була робота Менезеса та ін., які показали що спарювання Вейля на суперсингулярних еліптичних кривих може використовуватися для зведення задачі дискретного логарифму на еліптичних кривих до задачі дискретного логарифму на певній підгрупі відповідного розширення скінченного поля на якому визначена крива. В скінчених полях складність задачі дискретного логарифму є субекспоненційною, на відміну від цієї ж задачі на кривій, де складність експоненційна. Робота Менезеса показала, що задачі дискретного логарифму на суперсингулярних кривих не пригідні для багатьох криптографічних застосувань. Фрей і Рюк також розглядали цю можливість, але використовуючи спарювання Тейта, яке має певні переваги.

Сучасні роботи щодо спарювань в криптографії розглядають їх використання в визначенні та реалізації нових і потенційно дуже корисних протоколів. Боне і Франклін, наприклад, використали спарювання для розробки ефективної системи шифрування, що використовує особисті данні користувачів (identity-based).

В цієї статті пропонується схема підпису наосліп, де відкриті ключі виводяться з особистих даних користувачів, для побудови якої використовуються білінійні спарювання. Вона побудована на основі однієї з білінійних схем підпису, запропонованих автором в [8].

Стаття організована наступним чином. Спочатку описуються теоретичні основи білінійних спарювань Вейля і Тейта, після чого показано їх модифікації, використовуючи скривлюючи відображення. Далі, наводяться коротка схема підпису BLS та її варіант підпису наосліп [5,6], після чого описано запропонована схема підпису.

Білінійні спарювання та алгоритм Міллера

Нехай $E/\mathbb{F}_q$ еліптична крива. Дивізор це елемент абелевої групи (позначається $\mathrm{Div}(E)$), утворений множиною точок $E(\overline{\mathbb{F}_q})$. Для заданого дивізору $D=\sum_{P\in E} n_P(P)$, можна визначити його степінь $\deg(D)=\sum_{P\in E} n_P$. Інтерес викликає підгрупа дивізорів степені 0, а саме $\mathrm{Div}^0(E)=\{D\in \mathrm{Div}(E):\deg(D)=0\}$. Для ненульової раціональної функції f над E, визначається її дивізор $\mathrm{div}(f)=\sum_{P\in E}\mathrm{ord}_P(f)(P)$, де $\mathrm{ord}_P(f)$ порядок f в точці P. Виявляється, що $\mathrm{div}(f)$ є елементом $\mathrm{Div}^0(E)$ і називається головним дивізором. Характеристика головного дивізору: $D=\sum_{P\in E} n_P(P)\in \mathrm{Div}^0(E)$ є головним тоді і тільки тоді, коли $\sum_{P\in E} n_P P=\mathcal{O}$, де $\mathcal{O}$ нескінченно віддалена точка [3]. Відношення еквівалентності $\sim$ на елементах $\mathrm{Div}^0(E)$ вводиться наступним чином: $D_1\sim D_2$ тоді і тільки тоді, коли D_1-D_2 є головним дивізором.

Носій дивізора $D=\sum_{P\in E} n_P(P)$ є множиною точок P при $n_P\neq 0$. Якщо f ненульова раціональна функція така, що $\mathrm{div}(f)$ та D мають

© А.А. Кулага, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

не перетинаючи носії, розширюється визначення f від D наступним чином $f(D) = \prod_{P \in \mathrm{supp}(D)} f(P)^{n_P}$.

Нехай m ціле, взаємно просте із $p = \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$, якщо $p > 0$, $E[m] = \{P \in E(\overline{\mathbb{F}_q}) : mP = \mathcal{O}\}$. Для двох точок $P, Q \in E[m]$ існують такі $D_P, D_Q \in \mathrm{Div}^0(E)$, що $D_P \sim (P) - (\mathcal{O})$ та $D_Q \sim (Q) - (\mathcal{O})$. Тоді існують функції f_P, f_Q, дивізори яких приймають відповідні значення $\mathrm{div}(f_P) = mD_P$ та $\mathrm{div}(f_Q) = mD_Q$. Якщо припустити, що носії дивізорів D_P та D_Q не перетинаються, тоді наступний вираз буде приймати певне значення мультиплікативної групи поля:

$$e'_m(P,Q) = \frac{f_P(D_Q)}{f_Q(D_P)},$$

а функція $e'_m(P,Q)$ називається спарюванням Вейля, воно визначається, як відображення вигляду $e'_m : E[m] \times E[m] \to \mu_m \subset \mathbb{F}_{q^k}^*$, де μ_m – множина коренів m-го степеня з одиниці [1].

Можна довести, що спарювання Вейля задовольняє властивість лінійності для обох аргументів:

$$e'_m(S_1 + S_2, T) = e'_m(S_1, T) \cdot e'_m(S_2, T),$$

$$e'_m(S, T_1 + T_2) = e'_m(S, T_1) \cdot e'_m(S, T_2).$$

Спарювання Тейта визначається також на основі $f_P(D_Q)$. Для відповідного розширення поля, якщо необхідно, можна припустити, що поле $\mathbb{F}_q$ містить корені m-го степеня з одиниці. Нехай $P \in E(\mathbb{F}_q)[m]$ та $Q \in E(\mathbb{F}_q)$. Як і раніше, існує така функція f_P, що $\mathrm{div}(f_P) = m(P) - m(\mathcal{O})$. Для такої точки $S \in E$, що носії дивізорів $D_Q = (Q+S) - (S)$ та $\mathrm{div}(f_P)$ не перетинаються, відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E(\mathbb{F}_q)[m] \times E(\mathbb{F}_q) / mE(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^* / (\mathbb{F}_q^*)^m,$$

яке задається виразом $\langle P, Q \rangle = f_P(D_Q)$, називається спарюванням Тейта [2].

Спарювання Тейта також задовольняє властивість лінійності для обох аргументів:

$$\langle P_1 + P_2, Q \rangle = \langle P_1, Q \rangle \langle P_2, Q \rangle,$$

$$\langle P, Q_1 + Q_2 \rangle = \langle P, Q_1 \rangle \langle P, Q_2 \rangle$$

Так як значення спарювання Тейта належить фактор групі $\mathbb{F}_{q^k}^* / (\mathbb{F}_{q^k}^*)^m$, де обидва елементи $a, b \in \mathbb{F}_{q^k}^*$, еквівалентні ($a \approx b$) тоді і тільки тоді, коли існує такий елемент $c \in \mathbb{F}_{q^k}^*$, що $a = bc^m$. Якщо необхідно, щоб спарювання приймало єдине значення, виведене з певного класу суміжності, що часто вимагається для побудови криптографічних алгоритмів, потрібно підносити значення спарювання до степеня $(q^k - 1)/m$, оскільки $c^{q^k - 1} = 1$ для довільного $c \in \mathbb{F}_{q^k}^*$. Таким чином, значення спарювання після цього експоненціювання буде коренем m-го степеня з одиниці. Це призводить до альтернативного визначення спарювання Тейта, яке також використовується в літературі, що відображає до групи μ_m коренів m-го степеня з одиниці:

$$\langle P, Q \rangle' = f_P(D_Q)^{(q^k - 1)/m}.$$

Алгоритм Міллера для обчислення спарювання Тейта

Теорема (формула Міллера). Нехай $P \in E(\mathbb{F}_{q^k})$ та раціональна функція f_c для $c \in \mathbb{Z}$ така, що $\mathrm{div}(f_c) = c(P) - (cP) - (c-1)(\mathcal{O})$. Тоді для $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ має місце рівність:

$$f_{a+b} = f_a f_b \frac{l_{aP,bP}}{v_{(a+b)P}}.$$

Розглянемо дивізори $D_1 = a(P) - a(\mathcal{O})$ та $D_2 = b(P) - b(\mathcal{O})$. Тоді їх канонічна форма задається $D_1 = (aP) - (\mathcal{O}) + \mathrm{div}(f_a)$ та $D_2 = (bP) - (\mathcal{O}) + \mathrm{div}(f_b)$. Їх сума $D_1 + D_2 = (a+b)(P) - (a+b)(\mathcal{O})$ в канонічній формі буде мати вигляд

$$(a+b)(P) - (a+b)(\mathcal{O}) =$$

$$= ((a+b)P) - (\mathcal{O}) + \mathrm{div}(f_a f_b \frac{l_{aP,bP}}{v_{(a+b)P}}),$$

$$\mathrm{div}(f_{a+b}) = \mathrm{div}(f_a f_b \frac{l_{aP,bP}}{v_{(a+b)P}}).$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Так як $\mathrm{div}(f_0)=\mathrm{div}(f_1)=0$, тому.

Отже, обчислити значення f_m можна послідовно, використовуючи адитивний ланцюжок числа m.

Степінь вкладення

Спарювання Вейля та Тейта на кривій $E/\mathbb{F}_q$ потребують деякого розширеного поля від основного поля $\mathbb{F}_q$. Степінь цього розширеного поля називають степенею вкладення яку позначають k_w для Вейля спарювання та відповідно k_t для Тейта спарювання, які не завжди рівні. Степінь вкладення k_w визначається як таке найменше ціле, що крива над $\mathbb{F}_{q^{k_w}}$ містить всі m-торсійні точки, тобто $E[m]\subseteq E(\mathbb{F}_{q^{k_w}})$. Для спарювання Тейта, k_t – це найменше ціле, для якого $m\mid q^{k_t}-1$.

Якщо визначити нижню межу k як таке найменше ціле, що $m\mid q^k-1$, тоді у всіх випадках $k_t=k$ та у більшості випадків $k_w=k$. Більш конкретно, виконуються $k_t=k$ та $k_w\geq k$. Якщо $k>1$, тоді $k_w=k_t=k$.

Скривлюючі відображення

Нехай P буде m-торсійною точкою з координатами в $\mathbb{F}_q$ для цілого m взаємно простого з q. Значення спарювання Вейля $e_m(P,P)$ та, при $k>1$, спарювання Тейта $\langle P,P\rangle$ є одиничний елемент групи. Тоді, через властивість білінійності, спарювання від двох лінійно залежних точок, призводить також до одиничного результату. Тому, часто вимагається дві лінійно незалежні точки, скривлюючі відображення (distortion maps) Вареула [3] є корисним інструментом для знаходження пари незалежних точок, які існують не для всіх еліптичних кривих та які більш доцільно використовувати на суперсингулярних кривих.

Визначення. *Нехай m ціле, яке взаємно просте з q, еліптична крива E визначена над $\mathbb{F}_q$ та $P\in E(\mathbb{F}_q)[m]$. Скривлююче відображення по відношенню до точки P – це ендоморфізм $\varphi\in\mathrm{End}(E)$, який відображає точку P до точки $\varphi(P)$, яка лінійно незалежна із P.*

Ендоморфізм завжди відображає нескінченно віддалену точку $\mathcal{O}$ до себе, тому не існує скривлюючого відображення по відношенню до точки $\mathcal{O}$. Крім цього, відображення ендоморфізмом m-торсійної точки, знов буде m-торсійною точкою. Тому, якщо існує скривлююче відображення φ, воно відображає точку $P\in E(\mathbb{F}_q)[m]$ до m-торсійної точки $\varphi(P)$.

Визначення. *Нехай m просте та $E/\mathbb{F}_q$ суперсингулярна крива, на якій скривлююче відображення φ існує по відношенню до всіх точок $E(\mathbb{F}_q)[m]$ крім $\mathcal{O}$. Нехай $P,Q\in E[m]$, тоді модифіковане спарювання Вейля m-торсійних точок P та Q визначається*

$\hat{e}_m(\cdot,\cdot): E[m]\times E[m]\to\mu_m$, *яке задається* $\hat{e}_m(P,Q)=e_m(P,\varphi(Q))$.

Це модифіковане спарювання Вейля задовольняє наступній властивості.

Теорема. *Нехай $\hat{e}_m$ модифіковане спарювання Вейля, $P\in E(\mathbb{F}_q)[m]$, $P\neq\mathcal{O}$. Тоді виконується* $\hat{e}_m(P,P)=e_m(P,\varphi(P))\neq 1$.

Подібним чином, модифікується спарювання Тейта.

Визначення. *Нехай m просте та $E/\mathbb{F}_q$ суперсингулярна крива, на якій скривлююче відображення φ існує по відношенню до всіх точок $E(\mathbb{F}_q)[m]$ крім $\mathcal{O}$. Нехай $P\in E(\mathbb{F}_{q^k})[m]$ та $Q\in E(\mathbb{F}_{q^k})/mE(\mathbb{F}_{q^k})$, тоді модифіковане спарювання Тейта точок P та Q визначається*

$\widehat{\langle\cdot,\cdot\rangle}: E(\mathbb{F}_{q^k})[m]\times E(\mathbb{F}_{q^k})/mE(\mathbb{F}_{q^k})\to\mathbb{F}_{q^k}^*/(\mathbb{F}_{q^k}^*)^m$

, *яке задається* $\widehat{\langle P,Q\rangle}=\langle P,\varphi(Q)\rangle$.

Для $k>1$ спарювання Тейта $\langle P,P\rangle$ є тривіальним (тобто $\langle P,P\rangle\in(\mathbb{F}_{q^k}^*)^m=1$).

Теорема. *Нехай $\widehat{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ модифіковане спарювання Тейта та нехай $P\in E(\mathbb{F}_q)[m]$, $P\neq\mathcal{O}$. Якщо $k>1$ (тобто $m\nmid q-1$), тоді $\widehat{\langle P,P\rangle}\notin(\mathbb{F}_{q^k}^*)^m$. Отже, модифіковане спарювання*

Kyiv National Taras Shevchenko University

Тейта є сильно невиродженим, тобто виконується $\langle P,P\rangle = \langle P,\varphi(P)\rangle \neq 1$.

У випадку $k=1$ або звичайне $\langle\cdot,\cdot\rangle$ або модифіковане $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ спарювання Тейта (якщо існує) сильно невироджене.

Симетричні спарювання

Використовуючи модифікації спарювань Вейля та Тейта можна визначити симетричне спарювання, яке є відображенням виду $\hat{e}: G_1 \times G_1 \to G_T$, де G_1, G_T – адитивна та мультиплікативна групи відповідно. Воно задовольняє наступним властивостям:

1. *Білінійність.* Для всіх P, Q, $S \in G_1$

$$\hat{e}(P+S,Q) = \hat{e}(P,Q)\cdot\hat{e}(S,Q) \text{ та}$$
$$\hat{e}(P,Q+S) = \hat{e}(P,Q)\cdot\hat{e}(P,S).$$

2. *Невиродженість.* $\hat{e}(P,P) \neq 1$ (називається строгою невиродженістю).

3. *Обчислюваність.* $\hat{e}$ може бути ефективно обчисленим, тобто алгоритмом з поліноміальним часом роботи (використовується алгоритм Міллера).

Важкообчислювальні задачі

Задача дискретного логарифму (DLP) глибоко вивчалась з появи криптографії на відкритих ключах в 1975 році. DLP в адитивній групі $G = \langle P\rangle$ порядку n є задачею, де по заданим P та Q потрібно знайти таке $x \in [0, n-1]$, що $Q = xP$. Вважається, що DLP є важкою для певних (ретельно вибраних) груп, включаючи мультиплікативні групи скінчених полів та групи точок еліптичних кривих, визначених над скінченними полями. Безпосередньо з нею зв'язана обчислювальна задача Діффі-Хеллмана (CDHP), яка є такою задачею, де по заданим P, aP та bP потрібно знайти abP. Легко побачити, що CDHP зводиться за поліноміальний час до DLP. Позначимо оракул, що розв'язує цю задачу $CDH_P(aP,bP)$, тоді $CDH_P(aP,bP) = abP$.

Крім обчислювальної задачі Діффі-Хеллмана існує слабкіша версія, відома як розпізнавальна задача Діффі-Хеллмана (*decision Diffie-Hellman problem – DDHP*), яка в G_1 може бути ефективно розв'язаною. Для заданої трійки $(aP,bP,cP)_P$ елементів з G_1, де P твірний елемент G_1, визначення, чи є вона правильною трійкою Діффі-Хеллмана, тобто чи виконується $cP = abP$, називається розпізнавальною задачею Діффі-Хеллмана. Це визначення можна досягти обчисленням $\gamma_1 = \hat{e}(P,cP) = \hat{e}(P,P)^c$ та $\gamma_2 = \hat{e}(aP,bP) = \hat{e}(P,P)^{ab}$; $cP = abP$ тоді і тільки тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2$.

Отже, якщо оракул, що розв'язує цю задачу позначити $DDH_P(aP,bP,cP)$, тоді виконується

$$DDH_P(aP,bP,cP) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } CDH_P(P,aP,bP) = cP, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Короткий підпис Боне, Ліна і Шахама

Спочатку розглянемо короткий підпис BLS [6] та його варіант підпису наосліп, запропонований [5].

Схема короткого підпису BLS використовує білінійне спарювання $\hat{e}$, а також криптографічну геш-функцію $H: \{0,1\}^* \to G_1 \setminus \{\mathcal{O}\}$. Таємний ключ сторони A являє собою випадково вибране ціле $s \in \mathbb{Z}_n^*$, в той час, коли відкритий ключ $Q = sP \in$ елементом групи G_1. Підпис A під повідомленням $m \in \{0,1\}^*$ це єдиний елемент групи G_1 $\sigma = sM$, де $M = H(m)$. Будь-яка сторона, яка володіє відкритим ключем A, може перевірити цей підпис обчисленням $M = H(m)$ та перевіркою, що $(Q,M,\sigma)_P$ правильна трійка Діффі-Хеллмана. Це є строго визначений випадок DDHP в G_1 – $DDH_P(Q,M,\sigma)$, яку перевіряючий може розв'язати перевіряючи рівність: $\hat{e}(P,\sigma) = \hat{e}(Q,M)$.

Атакуючому, який бажає підробити підпис сторони A під повідомленням m', не знаючи таємного значення s, потрібно обчислити $\sigma' = sM'$ по заданим P, Q та $M' = H(m')$. Це є випадок вирішення задачі CDH в G_1, тобто $CDH_P(Q,M')$, яка за припущенням є важкою.

BLS підпис наосліп

Позначимо $\sigma_B(x)$ підпис користувача B від значення x. Користувач A посилає на підпис B значення $f(x)$, отримує підпис $\sigma_B(f(x))$, за яким надалі відновлює $\sigma_B(x)$. Функція f – деяка функція, яка називається функцією "*осліплення*".

Kyiv National Taras Shevchenko University

Для відновлення використовується функція "зрячості" g, при цьому виконується $g(\sigma_B(f(x))) = \sigma_B(x)$.

В [5] в якості функції осліплення використовується відображення $[r]$ кривої $E(K)$ на себе множенням точки $P \in E(K)$ на число r: $[r]P = rP$.

Описання протоколу.

- *KeyGen:* Нехай $H : \{0,1\}^* \to G_1$ є геш-функцією. Таємний ключ підпису $s \in \mathbb{Z}_q^*$ випадкове ціле, та відкритий ключ $P_{pub} = sP$.

- *Формування підпису наосліп:* Для таємного ключа s та повідомлення $m \in \{0,1\}^*$, виконуються наступні кроки

- *Осліплення:* Користувач випадково вибирає $r \in \mathbb{Z}_q^*$, обчислює $M' = rH(m)$ та відправляє M' на підпис.

- *Підписування:* Обчислюється $\sigma' = sM'$ та відправляється назад.

- *Відновлення:* Користувач обчислює підпис $\sigma = r^{-1}\sigma'$.

- *Перевірка:* Використовуючи відкритий ключ P_{pub}, повідомлення m та підпис σ, перевіряється рівність $\hat{e}(P_{pub}, H(m)) = \hat{e}(P, \sigma)$.

Схема підпису наосліп з відкритим індивідуальним ключем

Для Ель-Гамаля – подібних схем ЦП можлива побудова їх аналогів з використовуванням математичного апарата білінійних відображень з метою побудови схем ЦП з відкритим індивідуальним ключем користувача. Такими схемами є, наприклад, схеми запропоновані автором в [8]. Розглянемо одну з них.

Нехай G_1 та G_2 циклічні адитивна та мультиплікативна групи відповідно, з порядком q та нехай $ID \in \{0,1\}^*$ – особисті дані користувача схеми, який формує підпис повідомлення m, Q_{ID} – його відкритий ключ, s – таємний майстер-ключ PKG, $P_{pub} = sP$ – відкритий майстер-ключ PKG. Відкритий ключ Q_{ID} користувача обчислюється з його ID за допомогою геш-функції $h_1 : \{0,1\}^* \to G_1$.

Підпис під повідомленням m, яку формує користувач з загальновідомими даними ID, це така пара (r, S), де $S \in G_1$, $r = h(m)\overline{e_R} \in \mathbb{Z}$. $e_R = \hat{e}(P, R) = \hat{e}(P, kP) = \hat{e}(P, P)^k$ – випадковий елемент групи G_2, який визначається випадковим параметром $k \in \mathbb{Z}_q^*$, що виконується рівність:

$$\hat{e}(P, P)^k = \hat{e}(S, P)\hat{e}(Q_{ID}, P_{pub})^r. \quad (1)$$

Розв'язати це рівняння відносно невідомої точки еліптичної кривої S можна тільки знаючи таємне значення s. Отже значення параметру S виражається наступним чином:

$$S = kP - rD_{ID}, \text{ де } D_{ID} = sQ_{ID} \quad (2)$$

Для формування підпису користувачем A з його особистими даними ID_A необхідно, щоб PKG згенерував таємний майстер-ключ s, обчислив P_{pub} та параметр D_{ID_A}, що є таємним ключем користувача A. Користувач A отримує D_{ID_A} від PKG по захищеному каналу і генерує випадкове значення $k \in \mathbb{Z}_q^*$, потім обчислює r та у відповідності з (2) знаходить параметр S.

Для перевірки цього підпису, тобто пари (r, S) під повідомленням m, потрібно обчислити значення e_R у відповідності з (1), потім значення $\overline{h(m)e_R}$ та порівняти його із параметром підпису r. Ці значення повинні бути рівними.

Основна ідея полягає в тому, щоб підбирати параметр S так, щоб трійка Діффі-Хеллмана (P, S, srQ_{ID}, kP) була вірною, отже виконувалось $DDH_P(S, srQ_{ID}, kP) = 1$. Вирішити цю задачу дозволяють спарювання, таким чином отримується рівняння (1).

Стійкість цієї схеми обумовлена важкістю вирішення обчислювальної задачі Діффі-Хеллмана в адитивної групі. Так, якщо припустити, що атакуючому відомі параметри P, Q_{ID} та $P_{pub} = sP$, тоді для того щоб підробити підпис, він повинен вміти знаходити $D_{ID} = sQ_{ID}$, тобто розв'язати задачу $CDH_P(Q_{ID}, P_{pub})$. Отже, ця схема стійка від повного розкриття системи, за умови складності вирішення обчислювальної задачі Діффі-Хеллмана.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Побудова білінійної схеми підпису наосліп

У праці [7] для побудови схеми підпису наосліп на основі стандарту ДСТУ4145-2002 у основному рівнянні підпису замість точки R використовується точка $\alpha P + \beta R$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Таким чином отримується наступне рівняння

$$\alpha P + \beta R = sP + rQ, \text{ де } r = \overline{h(m)x_{\alpha P+\beta R}}. \quad (3)$$

Параметр s, який задовольняє цьому рівнянню, має вигляд $s = \alpha + \beta k + rd$. Клієнт має можливість засліпити параметр r: $\tilde{r} = r\beta^{-1} \bmod q$, для цього йому потрібно згенерувати значення α та β, та отримати від серверу точку еліптичної кривої R, при цьому таємне значення k сервер зберігає в секреті. Сервер використовує засліплене значення параметру r для отримання засліпленого параметру s: $\tilde{s} = k + \tilde{r}d$. Для його відновлення клієнт використовує формулу: $s = \tilde{s}\beta + \alpha$, яке і є правильним значенням s для формули (3), так як

$$\tilde{s}\beta + \alpha = (k + \tilde{r}d)\beta + \alpha = k\beta + rd + \alpha.$$

Для побудови білінійного варіанту підпису наосліп можна також використати цей метод. Замість значення $\hat{e}(kP, P)$ використаємо значення поля $\hat{e}(\alpha P + \beta kP, P) = \hat{e}_{\alpha P+\beta kP}$, тоді отримаємо основне рівняння підпису

$$\hat{e}(\alpha P + \beta kP, P) = \hat{e}(S, P)e(Q_{ID}, P_{pub})^r, \quad (4)$$

де $r = \overline{h(m)\hat{e}_{\alpha P+\beta kP}}$.

Так як має місце наступна рівність $\hat{e}((\alpha + \beta k)P, P) = \hat{e}(S + rD_{ID}, P)$, отримаємо значення параметру S: $S = (\alpha + \beta k)P - rD_{ID}$.

Засліплення параметру r відбувається таким же чином, як і в попередній схемі: $\tilde{r} = r\beta^{-1} \bmod q$, а параметр $\tilde{S}$, який обчислюється сервером, має значення $\tilde{S} = kP - \tilde{r}D_{ID}$. Відновлення параметру S відбувається клієнтом: $S = \beta\tilde{S} + \alpha P$, яке буде задовольняти рівняння (4), так як $\beta\tilde{S} + \alpha P = k\beta P - \tilde{r}\beta D_{ID} + \alpha P = (k\beta + \alpha)P - rD_{ID}$.

Список використаних джерел

1. Menezes A.J. Elliptic Curve Public Key Cryptosystems / Alfred Menezes // Kluwer Academic Publishers, – 1993.

2. Frey G. The Tate Pairing and the Discrete Logarithm Applied to Elliptic Curve Cryptosystems / Frey G., Müller M., Rück Hans-Georg. // IEEE Transactions on Information Theory 45(5), – 1999. – P.1717–1719.

3. Silverman J.H. The Arithmetic of Elliptic Curves / Joseph H. Silverman // Springer-Verlag, New York, – 1986.

4. Verheul E. Evidence that XTR Is More Secure than Supersingular Elliptic Curve Cryptosystems / E. Verheul.// Advances in Cryptology – Eurocrypt 2001, Lecture Notes in Computer Science 2045, Springer-Verlag, – 2001. – P.195–210.

5. Boldyreva A. Efficient Threshold Signature, Multisignature and Blind Signature Schemes Based on the Gap-Diffie-Hellman-Group Signature Scheme / A. Boldyreva // PKC 2003, Lecture Notes in Computer Science 2139, Springer-Verlag, – 2003. – P. 31-46.

6. Boneh D. Short Signatures from the Weil Pairing / Dan Boneh, Ben Lynn, Hovav Shacham //Advances in Cryptology – Asiacrypt 2001, Lecture Notes in Computer Science 2248, Springer-Verlag, – 2002. – P.514–532.

7. Кочубинский А.И. Алгоритмы вычисления слепой цифровой подписи на основе национального стандарта Украины цифровой подписи ДСТУ 4145-2002 и российского стандарта цифровой подписи ГОСТ Р 34.10-2001 / А.И. Кочубинский, А.М. Фаль // Кибернетика и системный анализ, – 2012. – №4, – С. 95-100.

8. Кулага А.А. Построение билинейных цифровых подписей с открытым ключом на основе личностных данных пользователя / А.А. Кулага // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №.3, – С. 155-162.

Надійшла до редколегії 28.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 517.982

Лялецький О.О., к.ф.-м.н., м.н.с.

Декартові властивості категорії умовно повних векторних решіток

У статті доводиться, що категорія, об'єктами якої є умовно повні векторні решітки, а морфізмами – цілком лінійні оператори, є декартово замкненою.

Ключові слова: частково впорядкована множина, векторна решітка, цілком лінійний оператор, декартово замкнена категорія.

A.A.Lyaletsky, Ph.D. (Physics & Mathematics), junior scientific researcher

A.A.Lyaletsky, Ph.D. (Physics & Mathematics), junior scientific researcher

Cartesian properties of the category of bounded complete vector lattices

The paper contains the proof of the cartesian closedness of the category whose objects are bounded complete vector lattices and whose morphisms are completely linear operators.

Key Words: partially ordered set, vector lattice, completely linear operator, cartesian closed category.

E-mail: aal@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

В роботі доводиться, що категорія **ContVectLat**, об'єктами якої є умовно повні векторні решітки, а морфізмами – цілком лінійні (тобто адитивні, регулярні та цілком (o)-неперервні) оператори, є декартово замкненою. Цей результат можна отримати наступним чином. Спочатку ми доведемо, що якщо $f: X_0 \times X_1 \to Y$ є оператором, який є цілком лінійним за кожним зі своїх аргументів, то f є цілком лінійним як оператор, який діє з векторної решітки $X_0 \times X_1$ у Y. З одного відомого результату А.Г.Пінскера та Р.Кристеску випливає, що клас умовно повних векторних решіток є замкненим відносно переходу до функційних просторів, а тому категорія **ContVectLat** є "майже" строго конкретною, а це дозволяє спростити та скоротити перевірку багатьох умов її декартової замкненості; в дійсності, як це буде видно в подальшому, всі вони або є простими наслідками відповідних означень, або є не складними наслідками зформульованого вище результату.

В цій роботі ми будемо наводити лише деякі з означень та результатів, які використовуватимуться. Що стосується інших, то будемо робити відповідні посилання, за мірою необхідності.

Нагадаємо деякі означення, які стосуються поняття (o)-збіжності.

Нехай задано частково впорядковану множину $A = (A, \leq)$ та спрямованість $D = (d_j)_{j \in J}$ на A; тоді кажуть, що D (o)-*збігається* до деякого елемента $x \in A$, якщо на A існують такі зростаюча спрямованість $C = (c_i)_{i \in I}$ та спадаюча спрямованість $E = (e_k)_{k \in K}$, що:

1) $\sup C = x = \inf E$;
2) для кожних індексів $i \in I$ та $k \in K$ існує такий індекс $j_0 \in J$, що $c_i \leq d_j \leq e_k$ для будь-якого $j \geq j_0$.

В цьому разі ми пишемо $\lim D = x$.

Функція $f: A_0 \to A_1$, де A_0 та A_1 є частково впорядкованими множинами, називається *цілком (o)-неперервною*, якщо вона зберігає ліміти всіх (o)-збіжних спрямованостей на A_0, тобто з (o)-збіжності D випливає (o)-збіжність $f(D)$ й при цьому $f(\lim D) = \lim f(D)$.

Частково впорядкована множина називається *умовно біповною*, якщо $\sup D$ існує для її будь-якої її непорожньої обмеженої зверху спрямованої підмножини D та, аналогічно, $\inf E$ існує для будь-якої її непорожньої знизу коспрямованої підмножини E.

Лема 1. Монотонна функція $f: A \to B$, де A та B є умовно біповними частково впорядкованими множинами, в тому і тільки тому разі є цілком (o)-неперервною, коли f зберігає супремуми спрямованих та інфімуми коспрямованих непорожніх підмножин A, тобто вона задовольняє наступним умовам:

a) якщо непорожня обмежена зверху підмножина $D \subseteq A$ є спрямованою, то $f(\sup D) = \sup f(D)$;
b) якщо непорожня обмежена знизу підмножина $D \subseteq A$ є коспрямованою, то $f(\inf D) = \inf f(D)$.

Доведення. Нам знадобиться наступний результат (див. [3, стор. 39, теорема II.6.1]):

© О.О.Лялецький, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

зокрема, якщо хоча б один з lim D та sup C існує, то існує й інший, причому в обох випадках:

$$\lim D = \sup D.$$

Необхідність. Доведемо а). Кожну спрямовану підмножину D можна розглядати як зростаючу спрямованість $D = (d_\delta)_{\delta\in D}$ на A, множина індексів якої також є D з індукованим з A впорядкуванням. Оскільки D є зростаючою спрямованістю, такою ж є й f(D). Враховуючи (*) та цілковиту (o)-неперервність f, маємо:

$$f(\sup D) = f(\lim D) = \lim f(D) = \sup f(D).$$

Отже, ми довели властивість а); властивість b) розглядається аналогічно.

Достатність. Нехай $D = (d_i)_{i\in I}$ – довільна (o)-збіжна спрямованість на A, $C = (c_i)_{i\in I}$ та $E = (e_k)_{k\in K}$ – відповідні зростаюча та спадаюча спрямованості з означення (o)-збіжності. Оскільки функція f є монотонною, то, по-перше, спрямованість f(C) є зростаючою та обмеженою зверху, а f(E) – спадаючою та обмеженою знизу, тож sup f(C) та inf f(E) існують, і, по-друге, якщо для деяких $i \in I$, $j \in J$ та $k\in K$ виконуються співвідношення $c_i \le d_j \le e_k$, то $f(c_i) \le f(d_j) \le f(e_k)$. Звідси випливає, що f(C) та f(E) задовольняють умові 2) означення (o)-збіжності. Нарешті, умова 1) є прямим наслідком (*) та припущень а) і b) леми, що розглядається. Отже, f зберігає (o)-ліміти будь-якої (o)-збіжної спрямованості на A, а тому f є цілком (o)-неперервною. □□

Нагадаємо, що підмножина A` частково впорядкованої множини A називається *опуклою*, якщо для будь-яких $a_1, a_2, a_3 \in A$ з $a_0 \le a_1 \le a_2$ та $a_1, a_3 \in A`$ випливає $a_2 \in A`$.

Нехай задано функцію $f: A \to B$, $A \subseteq A_1\times A_2$, де A_1, A_2 та B є частково впорядкованими множинами. Тоді f називається *(o)-неперервною за першим аргументом*, якщо для кожного $x \in Pr_1(A)$ функція $f_x: Pr_2(A) \to B$, яка визначається за правилом:

(**) $f_x(y) = f(x, y)$ для будь-якого $y \in Pr_2(A)$,

є (o)-неперервною. Аналогічно вводяться функції $f_y: Pr_1(A) \to B$, де $y \in Pr_1(A)$, та поняття функції, що є *(o)-неперервною за другим аргументом*.

Лема 2. Нехай задано монотонну функцію $f: A \to B$, де $A \subseteq A_1\times A_2$, A_1, A_2 та B є умовно біповними частково впорядкованими множинами, причому A є опуклою підмножиною $A_1\times A_2$ і замкненою відносно супремумів та інфімумів своїх відповідно спрямованих та коспрямованих непорожніх підмножин. Тоді f в тому і тільки тому разі є цілком (o)-неперервною, коли вона є цілком (o)-неперервною за кожним аргументом.

Доведення. Зауважимо, що з умов леми випли-ває, що частково впорядкована множина A також є умовно біповною.

Необхідність очевидна.

Достатність. Застосуємо лему 1. Нехай $D \subseteq A$ довільна непорожня обмежена зверху спрямована підмножина. Тоді проекції $Pr_1(D)$ та $Pr_2(D)$ знову є спрямованими та обмеженими зверху. З монотонності f випливає, що такими ж є їх образи $f(Pr_1(D))$ та $f(Pr_2(D))$. Маємо:

$$\begin{aligned}
&f(\sup D) = \\
&= f(\sup Pr_1(D), \sup Pr_2(D)) \quad \text{(за прип. щодо A)} = \\
&= \sup \{ f(x, \sup Pr_2(D)) \mid x \in Pr_1(D) \} \\
&\qquad \text{(за прип. щодо f)} = \\
&= \sup \{ \sup \{ f(x, y) \mid y \in Pr_2(D) \} \mid x \in Pr_1(D) \} = \\
&= \sup \{ f(x, y) \mid x \in Pr_1(D), y \in Pr_2(D) \} \\
&\qquad \text{(за асоціативністю sup)} = \\
&= \sup f(D)
\end{aligned}$$

(оскільки D є спрямованою та f – монотонною), що й треба було довести. Випадок, коли $D \subseteq A$ є непорожньою обмеженою знизу коспрямованою підмножиною, розглядається аналогічно. □□

Переходимо до застосування отриманих результатів до теорії векторних решіток. Будемо вважати, що читач знайомий з деякими основними визначеннями та результатами теорії векторних решіток; ті з них, що використовуються в даній роботі, можуть бути знайдені, наприклад, в [2; 3; 5]. Лише нагадаємо наступне.

Умовно повні векторні решітки називаються просторами Канторовича (в західній літературі вони також відомі як простори Рісса) і для стислості їх часто також називають *K-просторами*, а звичайні (тобто необов'язково умовно повні) векторні решітки – *K-лінеалами*. Адитивний оператор $f: X \to Y$, де X та Y – довільні K-лінеали, називається *регулярним*, якщо його можна представити в вигляді $f = g - h$, де $g, h: X \to Y$ – додатні (тобто монотонні) адитивні оператори. Регулярний оператор, який, до того ж, є цілком (o)-неперервним, називається *цілком лінійним*. Якщо X та Y – довільні K-лінеали, то через $[X \to Y]_r$ та $[X \to Y]$ будемо позначати сукупність всіх регулярних операторів та сукупність всіх цілком лінійних операторів відповідно, які діють з X в Y. Нагадаємо, що згідно теореми Канторовича [4; 3, стор. 229, теорема VIII.2.1], якщо X – довільний K-лінеал, а Y – K-простір, то сукупність $[X \to Y]_r$ (при звичайному, тобто поточковому визначенні лінійних операцій та часткового порядку) є K-простором.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Тому кожний регулярний оператор $f: X \to Y$ може бути представлено у вигляді:

$$(***) \quad f = f_+ - f_-,$$

де $f_+, f_-: X \to Y$ – відповідно додатня та від'ємна частини f, які обидві є додатними операторами. Згідно теореми Крістеску-Пінскера [1; 5; 3, стор. 241, теорема VIII.4.3], сукупність $[X \to Y]$ є компонентою $[X \to Y]_r$; отже, $[X \to Y]$ також є K-простором і якщо $f: X \to Y$ – будь-який цілком лінійний оператор, то f можна представити у вигляді (***) і при цьому його додатня та від'ємна частини f_+ та f_- також є цілком лінійними.

Всі векторні решітки, які розглядатимуться в подальшому, є K-просторами.

Теорема 1. Нехай на K-просторі $X = X_1SX_2$, де X_1 та X_2 – його компоненти, які утворюють розкладення X, задано оператор $f: X \to Y$. Тоді f в тому і тільки тому разі є цілком (o)-лінійним, коли він є цілком (o)-лінійним за кожним зі своїх аргументів (тобто цілком лінійними є оператори f_{x1} та f_{x2} (див. (**)) для кожних $x_1 \in X_1$ та $x_2 \in X_2$). Зокрема, якщо K-простір X є ізоморфним прямому добутку $X_1 \times X_2$, то для цілковитої (o)-лінійності оператора $f: X \to Y$ необхідно і достатньо, щоб f був цілком (o)-лінійним за кожним зі своїх аргументів.

Доведення. Необхідність очевидна.

Достатність. Зрозуміло, що з адитивності оператора f за кожним аргументів випливає адитивність та регулярність f як оператора вигляду $f: X \to Y$. Згідно [3, стор. 232, теорема VIII.2.2], регулярність лінійного оператора може бути охарактеризована як властивість відображати обмежені підмножини у обмежені. Отже, з регулярності оператора f за кожним аргументів випливає його регулярність як оператора вигляду $f: X \to Y$. Тому f можна представити у вигляді (***): $f = f_+ - f_-$, де $f_+, f_-: X \to Y$ – додатні оператори. Залишилось довести, що f є цілком (o)-неперервним.

З того, що f є регулярним, випливає, що його можна представити у вигляді (***): $f = f_+ - f_-$ де $f_+, f_-: X \to Y$ – додатні оператори, причому обидва f_+ та f_- є неперервними за кожним з аргументів. Оскільки X_1 та X_2 є нормальними підпросторами K-простору X, множина визначення $X = X_1SX_2$ оператора f є опуклою підмножиною умовно біповної частково впорядкованої множини $X_1 \times X_2$, а оскільки X_1 та X_2 є його компонентами, тобто задовольняють умові правильності, X_1SX_2 є замкненою відносно супремумів спрямованих та інфімумів коспрямованих непорожніх підмножин умовно біповної частково впорядкованої множини $X_1 \times X_2$. Нарешті, позитивність лінійного оператора еквівалентна його монотонності. Отже, виконано всі умови леми 2 для операторів f_+ та f_-, а тому вони є цілком (o)-неперервними як функції $f_+, f_-: X \to Y$. Але цілковита (o)-неперервність зберігається при застосуванні лінійних операцій; тому й $f = f_+ - f_-$ також є цілком (o)-неперервним як оператор вигляду $f: X \to Y$. □□

Тепер застосуємо доведену теорему для того, щоб показати, що категорія, **ContVectLat**, об'єктами якої є K-простори, а морфізмами – цілком лінійні оператори, є декартово замкненою. Всі теоретико-категорні терміни та результати, яку будуть використовуватися, можуть бути знайдені, наприклад, в [6]. Кожний K-простір має носій; отже, існує природний забуваючий функтор F: **ContVectLat** $\to$ **Set**, який співставляє кожному K-простору її носій. Зі врахуванням цього спостереження, для того, щоб **ContVectLat** насправді була декартово замкненою, достатньо, щоб були виконані наступні загальні умови, які ми зформулюємо для випадку будь-якого класу "структур" з "носієм".

Нехай **K** – деякий клас "структур" з "носієм", та P – деяке поняття "неперервності функції", яке співставляє кожній парі **K**-структур S та T з носіями A та B відповідно нову структуру $[S \to T]_P$ P-неперервних функцій, які діють з S у T, причому $[S \to T]_P \subseteq B^A$. Припустимо, що:

i) S містить одноелементу структуру;
ii) S є замкненим відносно прямих добутків;
iii) для кожних K-структур S та T структура $[S \to T]_P$ також належить до **K**;
iv) аплікація ev_P: $[A \to B]_P \times A \to B$, де $ev_P(f, a) = f(a)$, є звуженням звичайної теоретико-множинної аплікації;

причому виконуються наступні властивості (де S та T позначають довільні **K**-структури з носіями A та B відповідно):

1) проекції Pr_A: $A \times B \to A$ та Pr_B: $A \times B \to B$, де $Pr_A(x, y) = x$ та $Pr_B(x, y) = y$, є P-неперервними;
2) аплікація ev_P: $[A \to B]_P \times A \to B$ є P-неперервною;
3) якщо функція $f: S_1 \times S_2 \to T$ є P-неперервною за кожним з аргументів, то вона є P-неперервною.

Отже, кожна функція вигляду $\Theta \to A$, де Θ - одноелементна структура, може розглядатися як категорія, об'єктами якої є **K**-структури, а морфізмами – P-неперервні функції. Кожна така категорія **K**, яка задовольняє умовам i)–iv) та

Kyiv National Taras Shevchenko University

1)-3), завжди є, по-перше, *декартово замкненою* та, по-друге, "майже" *строго конкретною*. Неформально кажучи, це означає, що об'єкти та морфізми з **K** "досить точно" представляються в категорії **Set**. Зауважимо, що, взагалі кажучи, з умов i)-iv) та 1)-3) не випливає, що кожна функція вигляду $\Theta \to A$, де Θ – одноелементна структура, є P-неперервною; це є єдиною причиною того, чому ми не можемо стверджувати, що **K** є справжньою строго конкретною категорією.

В нашому випадку категорії **ContVectLat** клас **K** складається зі всіх K-просторів, а в якості P-неперервних функцій виступають цілком лінійні оператори.

Теорема 2. **ContVectLat** є декартово замкненою та майже строго конкретною категорією.

Доведення. Властивості i) та ii) є очевидними. Властивість iii) – це відомий результат Крістеску-Пінскера, який ми вже згадували вище. Як тільки доведено iii), властивість iv) стає осмисленою та також очевидною. Властивість 1) є прямим наслідком відповідних означень, а 3) зформульовано у другому рівні теореми 1. Доведемо властивість 2).

Нехай X та Y – довільні K-простори; треба довести цілковиту лінійність оператора ev: $[X \to Y] \times X \to Y$. Легко бачити, що ev є адитивним та регулярним. Отже, залишилось довести його цілковиту (o)-неперервність. За теоремою 1, для цього достатньо довести, що ev є цілком (o)-неперервним за кожним з аргументів. Зафіксуємо $f_0 \in [X \to Y]$. Оператор $ev_E\colon X \to Y$ (такий, що $ev_E(x) = f_0(x)$ при кожному $x \in X$) є цілком лінійним за означенням f_0; отже, ev є цілком лінійним за першим аргументом. Тепер зафіксуємо $x_0 \in X$, і нехай $\lim (d_i)_{i\in I} = d$, де $(d_i)_{i\in I} \in$ спрямованістю на $[X \to Y]$, яка (o)-збігається до $d \in [X \to Y]$. Згідно [3, стор. 233, теорема VIII.2.3], з $\lim (d_i)_{i\in I} = d$ випливає, що $\lim (d_i(x))_{i\in I} = d(x)$ для будь-якого $x \in X$. Маємо:

$$\lim ev_{x_0}(d_i) = \lim (d_i(x_0))_{i\in I} = d(x_0) =$$
$$= (\lim (d_i)_{i\in I})(x_0) = ev_{x_0}(\lim (d_i)_{i\in I}).$$

Отже, ev є цілком (o)-лінійним і за другим аргументом. □

Висновок. Доведені результати є цікавими самі по собі. Але, з точки зору автора, більш важливим є те, що вони надають можливість переосмислення вже відомих конструкцій та результатів. Наведемо приклад, не вникаючи в його деталі.

В кожній декартово замкненій категорії виконується аналог відомої теоретико-множинної біекції

$$Z^{Y\times X} \leftrightarrow (Z^Y)^X,$$

яка у випадку категорії **ContVectLat** приймає вигляд:

(****) $[X \times Y \to Z] \leftrightarrow [X \to [Y \to Z]]$.

Відомий результат Х.Накано (див. 3, стор. 291, теорема IX.6.1) надає необхідні та достатні умови для того, щоб довільний K-простір X з достатньою кількістю цілком лінійних функціоналів був ізоморфним своєму другому спряженому простору $[[X \to \Re] \to \Re]$. Замість другого $\Re$ в цьому виразі будемо розглядати образ природного вкладення $\Re$ в $[X \to \Re]$, який є ін'єктивним, оскільки X має достатню кількість цілком лінійних функціоналів. Отже $[[X \to \Re] \to \Re] \in$ підпростором K-простору

$$[[X \to \Re] \to [X \to \Re]].$$

Застосувавши до цього виразу перетворення (****) (але в протилежний бік), отримаємо "аплікаційний" простір $[[X \to \Re] \times X \to \Re]$, який містить, з точністю до ізоморфізму, другий спряжений простір $[[X \to \Re] \to \Re]$. Але для цього аплікаційного простору умови Х.Накано є дуже природними.

Список використаних джерел

1. Cristescu R. / Spatii Liniare Ordonate.– Edit. Acad. RPR.– 1959.– 330 стор.
2. Meyer-Nieberg M. Banach Lattices.– Springer-Verlag.– 1991.– 410 стор.
3. Вулих Б.З. / Введение в теорию полуупорядоченных пространств.– М: Мир.– 1961.– 408 стор.
4. Канторович Л.В. // К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах.– ДАН СССР.– 1936.– стор. 271-274.
5. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. / Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.– М: Гостехиздат.– 1950.– 550 стор.
6. Маклейн С. / Категории для работающего математика.– М: Физматлит.– 2004.– 352 стор.

Надійшла до редколегії 12.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 681.3

Олександр О. Марченко, к.ф.-м.н., доц.

Алгоритм інтеграції знань з електронних енциклопедій у семантичні онтологічні мережі

В роботі описаний метод автоматичного зв'язування статей електронної енциклопедії з вузлами понять онтологічної бази знань. Метод перевірено в експериментах з он-лайн енциклопедією Wikipedia та онтологією WordNet. Якість розв'язання неоднозначностей при визначенні семантики статей досягає 92.6%. Алгоритм розроблено для автоматизації процесів збагачення онтологій знаннями з енциклопедичних ресурсів.

Ключові слова: штучний інтелект, комп'ютерна лінгвістика, інженерія знань, онтологічна семантика, онтологічні бази знань.

Oleksandr O. Marchenko, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

An algorithm for integration of knowledge from an electronic encyclopedia to ontological semantic network

In this paper a method for automatic assignment of articles from an electronic encyclopedia to concept nodes in ontology is considered. It has been approved in experiments with Wikipedia and WordNet. The quality of disambiguation in semantic analysis of encyclopedia articles reaches 92.6 %. The algorithm is developed to enrich ontologies with encyclopedic knowledge.

Key words: artificial intelligence, computational linguistics, knowledge engineering, ontological semantics, ontological knowledge bases.

E-mail: *rozenkrans@yandex.ua*

Статтю представив чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

Сьогодні однією із найбільш актуальних задач в штучному інтелекті є розробка автоматизованих методів побудови та наповнення баз знань, які є фундаментальною основою для створення сучасних інтелектуальних систем в усіх напрямках інформатики. Побудова онтологій та наповнення їх контентом є дуже довгим та кропітким процесом, який вимагає значних ресурсів та участі великої кількості спеціалістів різного профілю – кібернетиків, програмістів, лінгвістів, психолінгвістів, когнітологів та філософів. Тому реалізація таких проектів вимагає мільйонних коштів та триває десятками років. Зараз існує ряд успішних проектів по створенню баз знань онтологічного типу. Це лексико-семантичні бази WordNet[1], CYC[2], MIKROKOSMOS[3], Verbnet[4], FrameNet[5] та ConceptNet[6]. Вони розробляються вже багато років, мають свої переваги та недоліки, але інтенсивно використовуються як в дослідженнях комп'ютерної лінгвістики так і на практиці, при побудові прикладних систем інтелектуальної обробки текстової інформації.

Серед недоліків створених семантичних та онтологічних баз знань необхідно зазначити відсутність спільних стандартизованих форматів, які б дозволяли сумісне використання всіх доступних ресурсів при створенні систем обробки природної мови. Тому постала актуальна проблема побудови таблиць відображення (mapping tables) для зв'язування тотожних семантичних одиниць сутностей в різних лексико-семантичних базах, де це є можливо. Таким чином реалізується структурна інтеграція даних з різних джерел для їх використання в рамках одного проекту.

Однією з найактуальніших проблем є розв'язання задачі організації ефективного наповнення контентом онтологічних баз знань. Ручна робота є дуже дорогою та вимагає багато часу. Окрім того ручна робота хоч і є на порядок більш якісною порівняно із методами автоматичного наповнення, але ж і вона не позбавлена помилок через наявність нюансів людського фактору. З іншого боку увага науковців сьогодні зосереджена над розробкою алгоритмів автоматизації процесів здобування знань та наповнення ними онтологічних

© О.О. Марченко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

семантичних баз знань. Чи не найбільш багатими ресурсами для здобування знань є сучасні електронні енциклопедії, серед яких, безумовно, перше місце займає зараз Wikipedia[7]. Тому ряд дослідницьких проектів в США та Європейському Союзі спрямовано саме на розробку засобів формалізації знань з Wikipedia та інтеграції їх в різні онтології, зокрема в WordNet. Це проекти BabelNet[8], DBpedia[9], WikiTax2WordNet[10], WordNet++[11]. Саме цей напрям інтеграції даних з Wikipedia до ієрархічних структур таксономії WordNet виглядає найбільш перспективним з огляду на те, що WordNet має високоякісно проблему впродовж двох с половиною десятиріч структуру гіпонімічних відношень, на відміну від Wikipedia, яка є суспільним проектом і має доволі несистематизовані зв'язки, містить цикли та помилки. Але WordNet містить лише приблизно 120 тисяч понять-вузлів. Цього є явно недостатньо для якісного аналізу та обробки текстів довільної тематики. Англомовна Wikipedia на сьогодні містить приблизно 4 мільйони статей, тобто понять. Інтегрування даних понять в якості нових вузлів WordNet шляхом прикріплення до найбільш семантично близьких синсетів мережі WordNet(в якості синівських або як тотожних) може надати можливість формування онтологічної семантичної бази знань з якісною структурою WordNet і з покриттям 4 мільйона вузлів-концептів. Це має бути найбільш потужним структурованим джерелом знань у світі на сьогоднішній день.

Побудова відображення множини статей Wikipedia в множину синсетів WordNet

Розглянемо декілька найбільш популярних підходів до побудови відображення множини статей Wikipedia в множину концептів WordNet.

В роботі *Maria Ruiz-Casado, Enrique Alfonseca and Pablo Castells* "Automatic assignment of Wikipedia encyclopedic entries to WordNet synsets" [12] автори пропонують наступний алгоритм прив'язки статей Wikipedia до синсетів WordNet.

Система читає Simple English Wikipedia збираючи визначення слів-термінів і пов'язує кожний вхід (кожне значення) з деяким синсетом WordNet. Обробка відбувається наступним чином:

1. Отримати веб-сторінку з енциклопедії.

2. Видалити на сторінці все, крім статті (видалити всі меню і навігацію посилань).

3. Виконати морфологічний і синтаксичний аналіз статті. Видалити всі слова, окрім іменників, дієслів, прикметників і прислівників.

4. Прикріпити сторінку до того синсету в WordNet, що найбільш відповідає означенню концепту даної статті. В даній ситуації може існувати декілька варіантів:

- Існує лише один синсет в WordNet, що містить слово(словосполучення), яке описано в статті. Наприклад, стаття **Маргарет Тетчер**. Цей випадок є тривіальним, так як цю статтю можна просто зв'язати з відповідним синсетом.

- Може бути так, що термін, описаний в енциклопедії, не міститься в WordNet. В цьому випадку він ігнорується.

- І, нарешті, може трапитися так, що декілька синсетів в WordNet містять слово (словосполучення), яке описано в даній статті. Тоді необхідно визначити, яке значення є правильне і найбільш відповідає контексту статті.

Останній випадок є прикладом класичної проблеми комп'ютерної лінгвістики - розв'язаним неоднозначності слів (Word Sense Disambiguation, WSD). Як правило, у даному випадку використовуються деякі метрики семантичної подібності слів для встановлення відповідності статті Вікіпедії з одним з можливих кандидатів-синсетів WordNet. Інші існуючі підходи використовують статистичну інформацію стосовно частотних оцінок спільного вживання слів, застосовують відношення WordNet, або просто єдиний тип його відношень *is-a* (відношення гіперніміі) з різним успіхом. Крім того, дослідження показують, що гілки концептів WordNet є дуже корисними і успішно застосовуються при обчисленні міг семантичної близькості.

Пропонується знайти метрику подібності між статтями енциклопедії та синсетами WordNet. Якщо вони відповідають одному концепту-значенню, то можна очікувати, що має бути багато спільного між двома означеннями. Саме це є причиною того, що підхід ґрунтується в основному на лексичному порівнянні між собою двох гілок:

1. Стаття Вікіпедії представляється як вектор ***e***, використовуючи модель векторного простору, де кожний вимір відповідає слову, а координати для цього виміру є частота слова в статті.

2. Нехай $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ множина синсетів WordNet, що містять даний термін визначений в статті Вікіпедії.

Kyiv National Taras Shevchenko University

3. Кожен синсет S_i представляється як множина слів його глосу: $G_i = \{t_1, t_2, ..., t_k\}$.

4. Нехай N = 1

5. Розширити множини G_i синонімами з синсетів S_i і гіперонімами на відстані N.

6. Зважити кожен терм t в кожній множині G_i, порівнюючи з глосами для інших значень. Таким чином, чисельний вектор V_i, що містить ваги терму, обчислюється для кожної G_i. В експериментах використовувалися дві вагові функції - tf·idf та $\aleph^2$ [13].

7. Вибрати таке значення, щоб схожість між *e* та V_i була найбільшою. Для обчислення оцінки близькості між двома векторами використовувалися дві метрики: скалярний добуток та косинус. Якщо оцінка однакова для двох чи більше значень, тоді виконати збільшення N:= N+1 і повернутися до кроку 5.

Алгоритм непогано себе зарекомендував. Він має точність коректної прив'язки статей Wikipedia до відповідних їм вузлів-синсетів WordNet близько 91.1%(загальна оцінка) та 83.9% (у випадках полісемії).

В роботі *R. Navigli, S. P. Ponzetto* BabelNet: Building a Very Large Multilingual Semantic Network[8] описується методологія побудови відображення множини понять Вікіпедії у множину концептів WordNet.

Для того щоб встановити відповідність між двома ресурсами, спочатку були визначені контексти розв'язання неоднозначностей для сторінок Wikipedia та для значень WordNet. Далі пропонується перетнути ці контексти для побудови відображення.

Контекст розв'язання неоднозначностей сторінок Вікіпедії. Дана сторінка Вікіпедії *w*. Використовується наступні дані для формування контексту подолання неоднозначностей: **Sense labels (мітки значень), Links (зв'язки), Categories (категорії)**. Для сторінки *w* контекст розв'язання неоднозначностей Ctx(*w*) визначається як множина слів, отриманих з трьох вищезгаданих розділів.

Контекст розв'язання неоднозначностей концептів WordNet. Отримавши значення s та відповідний йому синсет WordNet S, потрібно зібрати наступну інформацію: всі синоніми з синсету S, всі слова з гіперонімів та гіпонімів S, слова з братських синсетів (що є синами батька-гіпероніма S) а також значущі слова з глосу S. Визначається контекст розв'язання неоднозначностей Ctx(*s*) значення s як множина слів, отриманих з чотирьох вищезгаданих розділів.

Алгоритм побудови відображення. Для того щоб з'єднати кожну сторінку Вікіпедії з відповідним вузлом WordNet треба виконати наступні кроки:

- Спочатку відображення μ – порожнє, тобто воно ставить у відповідність кожній сторінці Wikipedia w порожню множину.
- Для кожної сторінки Wikipedia *w*, де лема є однозначною як у Wikipedia, так і у WordNet, ми будуємо відображення сторінки *w* у синсет, що містить цю лему.
- Для кожної сторінки Wikipedia w, для якої ще не було знайдено відображення(тобто μ(w) = []), ми приписуємо найбільш імовірне значення, ґрунтуючись на максимізації умовної ймовірності $p(s|w)$ над значеннями $s \in Senses_{WN}(w)$ (відображення не встановлюється, якщо зв'язок має місце).

Щоб знайти відображення сторінки Вікіпедії w, ми повинні обчислити умовну ймовірність $p(s|w)$ вибору значення s WordNet для даної сторінки w. Значення, яке максимізує цю ймовірність, визначається таким чином:

$$\mu(w) = \arg\max_{s \in Senses_{WN}(w)} p(s \mid w) =$$

$$\arg\max_s \frac{p(s,w)}{p(w)} = \arg\max_s p(s,w) \quad (1)$$

Остання формула отримана через припущення, що $p(w)$ не впливає на максимізацію, так як вона не залежна від *s*. В результаті визначення найбільш придатного *s* полягає в знаходженні такого значення, яке максимізує умовну ймовірність $p(s,w)$, що має вигляд:

$$p(s,w) = \frac{score(s,w)}{\sum_{\substack{s' \in Senses_{WN}(w), \\ w' \in Senses_{WN}(w)}} score(s',w')}, \quad (2)$$

де $score(s, w) = |Ctx(s) \cap Ctx(w)| + 1$ (ми додаємо 1 як коефіцієнт згладжування). Таким чином, в алгоритмі краще значення *s* знаходиться шляхом обчислення перетину контекстів подолання неоднозначності *s* і *w*, і нормалізацією по балах, що підсумовуються за всіма значеннями *w* у Вікіпедії та WordNet.

Приведений алгоритм також має непогані оцінки якості роботи та коректності побудови відображення множини сторінок Вікіпедії в

Kyiv National Taras Shevchenko University

множину синсетів WordNet. P=81.9, R=77.5, F1=79.6 [8].

Розроблений алгоритм прив'язки статей Вікіпедії до вузлів синсетів WordNet

Прив'язка вхідної статті Wikipedia до синсету WordNet складається з двох підзадач: пошуку слів, до яких може бути прив'язана стаття, та визначення відповідного синсету (відношення між множинами слів та синсетів - багато-до-багатьох). Знаходження правильного слова для прив'язки є важливим результатом, оскільки його значення вже може бути визначено пізніше при використанні інструментів семантичного аналізу, наприклад, з контексту. тому кількість правильно визначених слів для прив'язки також є оцінкою якості інструменту.

В експериментах був використаний зріз англомовної Wikipedia, що зберігає в собі всі оригінальні статті. Кожна стаття містить в собі короткий опис змісту (резюме), основний зміст статті та список категорій, до яких вона належить. Також в тексті статті містяться посилання на інші сторінки. З вибірки сторінок Wikipedia були видалені деякі безсмістовні статті.

Для кожної статті були створені класи, що містять в собі назву, список синонімічних назв, список категорій статті та резюме статті. Резюме, категорії та назви статті проходять етап синтаксичного аналізу для виділення основних сутностей.

Отже, на вхід алгоритму прив'язки подається об'єкт статті, що містить, зокрема, синтаксичне дерево вступу до статті. Алгоритм обирає кандидатів(слова або словосполучення) на прив'язку з наступних джерел у статті: категорії, іменники та іменні сполучення з фрази "definition", якщо перше речення вступу відповідає синтаксичному шаблону «"Object" is a "definition"», синонімічні назви, включаючи саму назву, після чого для кожного кандидата формується список його синсетів. При цьому фраза «definition» може містити посилання на іншу статтю Wikipedia, яку теж можливо використати для прив'язки сторінки. Пріоритет мають фрази з "definition", що складаються більше, ніж з одного слова. Наприклад в статті Alclofenac перше речення є «Alclofenac is a non-steroidal anti-inflammatory drug», тому кандидати будуть розглядатися в такому порядку: non-steroidal anti-inflammatory drug, потім anti-inflammatory drug, потім лише drug, і в даному випадку вже перший кандидат міститься у WordNet. В основі цього підходу лежить намагання визначення найбільш конкретної прив'язки для даної статті. В результаті аналізу статей було визначено, що найбільш ефективно розглядати вказані множини слів-кандидатів на прив'язку в такому порядку:

- Фраза "definition" з синтаксичного шаблону
- Синонімічні назви
- Слова з категорій
- Перетин слів категорій та слів вступу

При цьому більшість прив'язок відбувається в першому випадку, значно менше – з синонімічних назв та категорій та абсолютна меншість – в останньому випадку.

Після того як визначене слово, до якого треба робити прив'язку, далі стоїть найскладніша в алгоритмі задача – вирішення неоднозначності (англ. Disambiguation), тобто визначення концепту – синсету WordNet, що відповідає даному слову, оскільки прив'язка має відбуватись не до слова, а до вузлу-синсету (семантичного значення).

В ,запропонованому алгоритмі ця задача розглядається як двокритеріальна: оцінка кожного кандидату-синсету відбувається за двома критеріями - це відповідність його означення змісту статті, що обчислюється як лексичний перетин (overlap) текстів вступу статті та означення синсету(це глос, доповнений словами з синсету); і семантична близькість синсету-кандидату до синсетів іменників зі списку категорій статті Wikipedia.

Лексичний перетин overlap обраховується за методикою, описаною в роботі[14]. При обчисленні перетину враховуються оцінки семантичної близькості між всіма значущими словами глосу(а також словами з синсету) та, відповідно, ключовими поняттями статті Wikipedia.

Семантична близькість вузлу synset та синсетів категорій вхідної сторінки Wikipedia обчислюється за формулою:

$$relatedness(synset, catSynsets) = \frac{\sum_{i=1}^{N} 1/\log(WnDist(synset, categorySynset_i) + 1)}{N}$$

де $catSynsets = \{categorySynset_1, categorySynset_2, \ldots categorySynset_N\}$ – всі синсети, що відповідають

Kyiv National Taras Shevchenko University

словам категорій, N - кількість синсетів з категорій, $categorySynset_i$ - і-й синсет, $WnDist(synset, categorySynset_i)$ - відстань між синсетами в мережі WordNet, що знаходиться алгоритмом двостороннього пошуку в ширину.

Треба зазначити, що обидва критерії нормалізовані та можуть приймати значення від 0 до 1.

Були розглянуті 2 варіанти розв'язання даної двокритеріальної задачі:

- Побудова комплексного критерію (зваженої суми) за формулою $a_1*overlap+a_2*relatedness$, при цьому необхідна оптимізація параметрів a_i з максимізацією частки правильних прив'язок.
- Метод ε-обмежень – максимізація одного критерію при обмеженні мінімального значення іншого.

Для оптимізації використовувалась випадкова вибірка зі статей Вікіпедії об'єму порядка 500 сторінок, для якої вручну були зроблені правильні прив'язки. Найкращі результати були отримані для методу ε-обмежень. Точність на вибірці склала приблизно 92.6% .

Алгоритм має в своєму складі декілька числових констант, що задають, наприклад, порогові рівні для значень критеріїв – такі, що кандидати з меншим значенням критерію не можуть бути прийняті. Тобто алгоритм можна розглядати як параметричну функцію, оцінкою якої є точність та якість прив'язки статей енциклопедії до вузлів онтології. Цю оцінку можна оптимізувати, визначивши оптимальні значення параметрів.

Отримана оцінка точності розробленого методу прив'язки доводить, що він не поступається найкращим існуючим на сьогодні алгоритмам побудови відображення множини статей енциклопедії в множину концептів онтологічної бази знань. Натомість, разом з найкращими показниками точності та якості метод має просту та прозору структуру та ефективно застосовує всю доступну контекстну інформацію з Wikipedia та WordNet. До того ж він має кращі часові оцінки, що робить алгоритм дуже актуальним та затребуваним на практиці. При деяких незначних модифікаціях метод прив'язки можна застосовувати для динамічного зв'язування статей Вікіпедії з синсетами WordNet в процесах семантичного аналізу текстів природною мовою у тих випадках, де специфіка задачі та ресурси системи дозволяють виконувати такі обчислення.

Висновки

Робота присвячена дослідженню сучасних актуальних алгоритмічних підходів до побудови систем автоматичного поповнення контенту баз знань. Одним з найбільш популярних напрямів в цій галузі є збагачення онтологічних баз знань таксономічного типу даними з джерел різноманітних електронних енциклопедій. В якості найбільш застосованих для цього ресурсів в багатьох дослідницьких, а також і в комерційних проектах виступають всесвітньо відома розробка Принстонського університету – лексико-семантична онтологічна база знань WordNet та популярний суспільний проект Вікіпедія.

В статті розглянуті найкращі існуючи методи інтеграції концептів зі статей Вікіпедії до відповідних їм, найбільш семантично близьких вузлів-синсетів онтологічної мережі бази WordNet. Також було запропоновано оригінальний алгоритм прив'язки сторінок Wikipedia до тих вузлів-концептів WordNet, які є найбільш подібними за їх семантичним значенням. Алгоритм не поступається в показниках точності та якості прив'язки статей Wikipedia до вузлів-синсетів WordNet найкращим існуючим сьогодні в світі методам, і навіть перевершує їх на деяких тестових вибірках (точність в середньому досягає 92.6%). Незважаючи на це структура алгоритму є достатньо простою та прозорою, тому він легко реалізується і є досить зручним в використанні. Запропонований метод має найкращі часові оцінки, що робить його застосування на практиці доцільним та дуже ефективним. При певних змінах в структурі програми алгоритм прив'язки можна використовувати для динамічного зв'язування сторінок Вікіпедії з вузлами-синсетами WordNet в різних прикладних лінгвістичних системах, якщо потужності комп'ютерів дозволяють великі об'єми обчислень.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Список використаних джерел

1. *G. A. Miller, R. Beckwith, C. D. Fellbaum, D. Gross, K. Miller* WordNet: An online lexical database. / G. A. Miller, R. Beckwith, C. D. Fellbaum, D. Gross, K. Miller //Int. J. Lexicograph. – 1990.-3, 4, pp. 235–244.
2. CYC[Електронний ресурс] Електронна адреса : http://www.cyc.com/
3. *Sergei Nirenburg and Victor Raskin* Ontological Semantics/Sergei Nirenburg, Victor Raskin//. – Cambridge: The MIT Press. – 2004. – 442 c.
4. *Karin Kipper Schuler, Anna Korhonen, Susan W. Brown* VerbNet overview, extensions, mappings and apps. Tutorial / Karin Kipper Schuler, Anna Korhonen, Susan W. Brown //. – NAACL-HLT 2009. – Boulder. – Colorado
5. *Cliff Goddard* Semantic Analysis: A Practical Introduction./ Cliff Goddard // Oxford University Press. – 2011. – pp. 78–81.
6. ConceptNet [Електронний ресурс] Електронна адреса:http://web.media.mit. edu /~hugo/conceptnet/
7. Wikipedia [Електронний ресурс] Електронна адреса :http://www.wikipedia. org/
8. *R. Navigli, S. P. Ponzetto* BabelNet: Building a Very Large Multilingual Semantic Network./ R. Navigli, S. P. Ponzetto // Proc. of the 48th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL 2010). – Uppsala. – Sweden. 2010. – pp. 216–225.
9. *C. Bizer, J. Lehmann, G. Kobilarov, S. Auer, C. Becker, R. Cyganiak, S. Hellmann* DBpedia – A crystallization point for the Web of Data./ C. Bizer, J. Lehmann, G. Kobilarov, S. Auer, C. Becker, R. Cyganiak, S. Hellmann // Web Semantics. – 7(3). – 2009. – pp. 154–165
10. *S. Ponzetto, R. Navigli* Large-Scale Taxonomy Mapping for Restructuring and Integrating Wikipedia/ S. Ponzetto, R. Navigli // In Proc. of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2009). – Pasadena. – California. – 2009. – pp. 2083–2088.
11. *S. P. Ponzetto, R. Navigli* Knowledge-rich Word Sense Disambiguation rivaling supervised systems/ S. P. Ponzetto, R. Navigli // In Proc. of the 48th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). – 2010. – pp. 1522–1531.
12. *Maria Ruiz-Casado, Enrique Alfonseca and Pablo Castells* Automatic assignment of Wikipedia encyclopedic entries to WordNet synsets/ Maria Ruiz-Casado, Enrique Alfonseca and Pablo Castells // Proceedings of the Atlantic Web Intelligence Conference – AWIC-2005.
13. *Manning C.D., Schutze, H.* Foundations of statistical Natural Language Processing/ Manning C.D., Schutze, H. // MIT Press (2001)
14. *A. Anisimov, O. Marchenko, V. Kysenko* A method for the computation of the semantic similarity and relatedness between natural language words. A. Anisimov, O. Marchenko, V. Kysenko // Cybernetics and Systems Analysis, Volume 47. – Number 4. – July 2011. – pp. 515-522(8)

Надійшла до редколегії 26.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 519.8

Машенко* С.О., д. ф.-м. н., доц.

Задача диз'юнктивного програмування з нечіткою множиною обмежень

Пропонується метод розв'язку задачі диз'юнктивного програмування з нечіткою множиною індексів обмежень. Побудовано відображення належності нечіткої множини типу 2, яка є множиною допустимих альтернатив. Досліджені властивості цієї множини і розглянутий вибір раціональних розв'язків.

Ключові слова: диз'юнктивне програмування, функція належності, нечітка множина типу 2, прийняття рішень, раціональний вибір.

Mashchenko* S.O., D. Sci (Phys-Math.), Ass. Prof.

The problem of disjunction programming with the fuzzy set of constraints

The decision method of the disjunction programming problem with the fuzzy set of constraints indexes is offered. The membership reflection of type 2 fuzzy set, which is the set of its possible alternatives. Properties of this set are explored and considered problems of rational decisions choice.

Keywords: disjunction programming, membership function, fuzzy set of type 2, decision making, rational choice.

*E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Класична постановка задачі диз'юнктивного програмування полягає в пошуку екстремуму функції, яка називається цільовою, на множині F допустимих альтернатив x, які є елементами деякої множини X. Цільова функція характеризує корисність альтернатив для особи, що приймає рішення (ОПР), і може представляти якусь одну з їхніх властивостей. Множина допустимих альтернатив F може задаватися на X деякій сукупністю $M = \{1,2,...,m\}$ обмежень за допомогою, наприклад, нерівностей вигляду: $f_i(x) \le 0$, $i \in M$. У загальному випадку функції $f_i(x)$, $i \in M$, можуть бути векторними. На відміну від задач математичного програмування, у задачах диз'юнктивного програмування достатньо виконання хоча б одного обмеження з множини M. На перший погляд така умова повинна спрощувати задачу, але насправді - все навпаки. Задачі диз'юнктивного програмування можуть бути суттєво складнішими за задачі математичного програмування, наприклад, у силу їхньої багатоекстремальності. Незважаючи на складність, вони достатньо вивчені і можуть розв'язуватись різноманітними методами [1].

Припустимо, що ОПР не може чітко вказати, які обмеження з множини $M = \{1,2,...,m\}$, насправді повинні визначати допустимі альтернативи, а може лише задати функцію $\mu(i)$, $i \in M$, належності, нечіткої множини індексів $\tilde{M} \subseteq M$ актуальних, на його думку, обмежень. Без обмеження загальності вважатимемо, що ОПР максимізує цільову функцію. Тоді виникає задача диз'юнктивного програмування з нечіткою множиною індексів обмежень:

$$g(x) \to \max,\ x \in X,\ \underset{i \in \tilde{M}}{\vee} \{f_i(x) \le 0\}. \qquad (1)$$

Позначимо $F_i = \{x \in X \mid f_i(x) \le 0\}$ - множину альтернатив, що задовольняють обмеженню з індексом $i \in M$. Тоді задача (1) може бути представленою у вигляді:

$$g(x) \to \max,\ x \in \tilde{F}, \qquad (2)$$

де $\tilde{F} = \bigcup_{i \in \tilde{M}} F_i$ - множина, яка представляє собою об'єднання нечіткої підмножини $\tilde{M} \subseteq M$ чітких множин F_i, $i \in M$. Визначимо це поняття відповідно до підходу, запропанованому в [2].

Для $\forall i \in M$ на множині X визначимо характеристичну функцію чіткої множини F_i:

$$\varphi_i(x) = \{1 \mid f_i(x) \le 0,\ 0 \mid f_i(x) > 0\}.$$

Спочатку розглянемо множину $F = \bigcup_{i \in M} F_i$, яка є об'єднання чіткої множини M чітких множин F_i, $i \in M$. Відповідно до класичної теорії вона є чіткою множиною, яка на X задається функцією належності $\varphi(x) = \max_{i \in M} \varphi_i(x)$, $x \in X$. Неважко помітити, що значення функції належності $\varphi(x)$ при фіксованому значенні альтернативи $x \in X$ фактично визначається як значення цільової функції тривіальної задачі "чіткого"

© С.О.Машенко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

математичного програмування $\varphi = \max_{i \in M} \varphi_i$ (тут не вказане фіксоване значення $x \in X$).

Розглянемо тепер об'єднання $\tilde{F} = \bigcup_{i \in M} F_i$ нечіткої множини $\tilde{M}$ чітких множин F_i, $i \in M$. Природне узагальнення класичної операції об'єднання чіткої множини M чітких множин призводить до того, що множина $\tilde{F}$ задаватиметься функцією належності

$$y(x) = \max_{i \in M} \varphi_i(x), \ x \in X. \qquad (3)$$

Цілком зрозуміло, що значення функції належності $y(x)$ для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ визначатиметься як значення цільової функції задачі нечіткого математичного програмування:

$$y = \max_{i \in M} \varphi_i. \qquad (4)$$

Задачі нечіткого математичного програмування достатньо добре вивчені. Згідно [3], розв'язком задачі (4) називається нечітка множина $\tilde{M}^*$, носієм якої буде множина оптимальних за Парето альтернатив (позначимо її M^{PO}) двохкритеріальної дискретної задачі:

$$\varphi_i \to \max, \ \mu(i) \to \max, \ i \in M. \qquad (5)$$

Функцією належності $\tilde{\mu}$ нечіткої множини $\tilde{M}^*$ буде звуження функції належності $\mu(i)$, $i \in M$, з універсальної множини індексів обмежень M на множину $M^{PO} \subseteq M$. Іншими словами, ця функція належності матиме вигляд:

$$\tilde{\mu}(i) = \begin{cases} \mu(i), & i \in M^{PO}, \\ 0, & i \notin M^{PO}. \end{cases}$$

Множині розв'язків задачі (4), якою є нечітка множина $\tilde{M}^*$ з функцією належності $\tilde{\mu}(i)$, $i \in M$, згідно [3] відповідає нечітка множина $\Psi \subseteq \{0,1\}$ оптимальних значень цільової функції цієї задачі з функцією належності $\psi : \{0,1\} \to [0,1]$, $\psi(y) = \max_{\varphi = y} \tilde{\mu}(i)$, $y \in \{0,1\}$. Слід зазначити, що універсальною множиною нечіткої множини Ψ оптимальних значень цільової функції задачі (4) буде множина $\{0,1\}$, яка складається з двох елементів $y = 0$ і $y = 1$. Це пояснюється тим, що змінна y може приймати значення, що дорівнюють лише $\varphi_i(x)$, $i \in M$, які, у свою чергу, при будь-якій фіксованій альтернативі $x \in X$ можуть дорівнювати 0 або 1.

Таким чином, для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ значення $y(x)$ функції належності (3) нечіткої множини $\tilde{F} = \bigcup_{i \in M} F_i$ утворюють також нечітку підмножину Ψ універсальної множини $Y = \{0,1\}$. Звідси випливає, що нечітка множина $\tilde{F}$ є, так званою [2], нечіткою множиною типу 2.

Тепер можна формалізувати поняття об'єднання $\tilde{F} = \bigcup_{i \in M} F_i$ нечіткої множини $\tilde{M}$ чітких множин F_i, $i \in M$.

Для довільної альтернативи $x \in X$ розглянемо відношення домінування, яке породжується цільовими функціями задачі (5) на множині обмежень M.

Говоритимемо, що обмеження з індексом $i \in M$ домінує обмеження з індексом $j \in M$ для альтернативи $x \in X$ і позначатимемо це $i \overset{x}{\succ} j$, якщо справедливі такі нерівності: $\varphi_i(x) \geq \varphi_j(x)$, $\mu(i) \geq \mu(j)$, і хоча б одна з них є строгою.

Це поняття дозволяє визначити множину оптимальних за Парето альтернатив двохкритеріальної задачі (5), яка буде носієм нечіткої множини розв'язків задачі (4). Для кожної альтернативи $x \in X$ позначимо цей носій

$$M^{PO}(x) = \{i \in M \mid j \overset{x}{\not\succ} i, \ \forall j \in M\}. \qquad (6)$$

Для довільних $x \in X$, $i \in M$ визначимо функцію належності нечіткої множини розв'язків задачі (2):

$$\tilde{\mu}(x,i) = \begin{cases} \mu(i), & i \in M^{PO}(x), \\ 0, & i \notin M^{PO}(x). \end{cases} \qquad (7)$$

Об'єднанням нечіткої множини $\tilde{M}$ чітких множин F_i, $i \in M$, називатимемо $\tilde{F} = \bigcup_{i \in M} F_i$ - нечітку множину типу 2, яка задається трійками $(x, \psi(x,y))$, де

$\psi : X \times Y \to [0,1]$ - нечітке відображення, що виконує роль нечіткої функції належності і визначене таким чином:

$$\psi(x,y) = \max_{i \in M} \{\tilde{\mu}(x,i) \mid \varphi_i(x) = y\}, \qquad (8)$$

якщо $\exists i \in M : \ \varphi_i(x) = y$,

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\psi(x,y)=0, \qquad (9)$$

якщо $\varphi_i(x)\neq y,\ \forall i\in M$;

x – елемент множини альтернатив X;

y - елемент універсальної множини $Y=\{0,1\}$ значень відображення належності $\psi(x,y)$ нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2.

Значення нечіткого відображення належності $\psi(x,y)$ для фіксованої альтернативи $x^0\in X$ утворюють нечітку підмножину $\Psi_Y(x^0)$ множини $Y=\{0,1\}$ з функцією належності $\psi(x^0,y),\ y\in\{0,1\}$. Значення $\psi(x^0,1)$ можна розуміти як ступінь належності альтернативи $x^0\in X$ множині $\tilde{F}$. Відповідно значення $\psi(x^0,0)$ має сенс ступеню відсутності належності $x^0\in X$ множині $\tilde{F}$.

Позначимо: $I^*=\{i\in M\mid \mu(i)=\max\limits_{j\in M}\mu(j)\}$.

Спростити побудову відображення належності $\psi(x,y)$ дозволяє наступна теорема.

Теорема. Нехай F_i, $i\in M$, - чіткі множини, які задані на множині X відповідними характеристичними функціями $\varphi_i(x)$, $x\in X$, $i\in M$; $\mu(i)$, $i\in M$, - функція належності нечіткої множини $\tilde{M}$. Для того, щоб нечітка множина $\tilde{F}$ типу 2, яка задана відображенням належності $\psi(x,y)$ була об'єднанням нечіткої множини $\tilde{M}$ чітких множин F_i, $i\in M$, тобто $\tilde{F}=\bigcup\limits_{i\in\tilde{M}}F_i$ необхідно і достатньо, що б для $x\in X$.

$$\psi(x,1)=\begin{cases}\max\limits_{\varphi_i(x)=1}\mu(i), & \exists i\in M:\ \varphi_i(x)=1,\\ 0, & \varphi_i(x)=0,\ \forall i\in M,\end{cases}$$
$$\psi(x,0)=\begin{cases}\max\limits_{i\in M}\mu(i), & \varphi_i(x)=0,\ \forall i\in I^*,\\ 0, & \exists i\in I^*:\ \varphi_i(x)=1.\end{cases} \qquad (10)$$

Доведення. Для початку покажемо, що формули (8), (9) еквівалентні наступній:

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\max\limits_{i\in M(x,y)}\mu(i), & M(x,y)\neq\varnothing,\\ 0, & M(x,y)=\varnothing,\end{cases} \qquad (11)$$

де для $\forall x\in X\ \ \forall y\in\{0,1\}$

$$M(x,y)=\{i\in M\mid\ y=\varphi_i(x)=\max_{\mu(j)\geq\mu(i)}\varphi_j(x),$$
$$\mu(i)=\max_{\varphi_j(x)\geq\varphi_i(x)}\mu(j)\}. \qquad (12)$$

Відзначимо, що з (7), (8) випливає, що

$$\tilde{F}=\bigcup_{i\in\tilde{M}}F_i\Leftrightarrow\psi(x,y)=$$
$$=\begin{cases}\max\limits_{i\in M^{PO}(x)}\{\mu(i)\mid\varphi_i(x)=y\}, & \exists i\in M:\ \varphi_i(x)=y,\\ 0, & \varphi_i(x)\neq y,\ \forall i\in M,\end{cases} \qquad (13)$$

$x\in X$, $y\in\{0,1\}$. Для доведення еквівалентності (8), (9) та (11) достатньо показати, що (13) є еквівалентною (11), (12). Отож покажемо

$$M^{PO}(x)=\{i\in M\mid\varphi_i(x)=\max_{\mu(j)\geq\mu(i)}\varphi_j(x),$$
$$\mu(i)=\max_{\varphi_j(x)\geq\varphi_i(x)}\mu(j)\}. \qquad (14)$$

Нехай для деяких $x\in X$, $i\in M$ виконується:

$$\varphi_i(x)=\max_{\mu(j)\geq\mu(i)}\varphi_j(x),\ \mu(i)=\max_{\varphi_j(x)\geq\varphi_i(x)}\mu(j) \qquad (15)$$

Припустимо супротивне, що $i\notin M^{PO}(x)$. Тоді згідно (6) $\exists l\in M$, що $l\overset{*}{\succ}i$, тобто $\varphi_l(x)>\varphi_i(x)$, $\eta(l)\geq\eta(i)$ або $\varphi_l(x)\geq\varphi_i(x)$, $\eta(l)>\eta(i)$.

У першому випадку, звідси випливає $\varphi_l(x)>\max\limits_{\mu(j)\geq\mu(i)}\varphi_j(x)$. У другому випадку, одержимо $\mu(l)>\max\limits_{\varphi_j(x)\geq\varphi_i(x)}\mu(j)$, а це, очевидно, суперечить (15). Тому одержимо $i\in M^{PO}(x)$.

Нехай $i\in M^{PO}(x)$. Припустимо супротивне, що справедлива нерівність $\varphi_i(x)<\max\limits_{\mu(j)\geq\mu(i)}\varphi_j(x)$ або $\mu(i)<\max\limits_{\varphi_j(x)\geq\varphi_i(x)}\mu(j)$.

У першому випадку робимо висновок, що $\exists l\in M$, для якого $\mu(l)\geq\mu(i)$, $\varphi_l(x)>\varphi_i(x)$. Тоді $l\overset{*}{\succ}i$ і за (6) $i\notin M^{PO}(x)$.

Аналогічно у другому випадку, $\exists k\in M$, для якого $\mu(k)>\mu(i)$, $\varphi_k(x)\geq\varphi_i(x)$. Тоді $k\overset{*}{\succ}i$ і за (6) $i\notin M^{PO}(x)$. Таким чином, отримали суперечність і має місце (14), а звідси випливає рівність $M(x,y)=M^{PO}(x)\cap\{i\in M\mid\ \varphi_i(x)=y\}$, тоді формула (13) еквівалентна (11), (12), а тому формули (8), (9) та (11) є еквівалентними.

Тепер для доведення теореми достатньо показати еквівалентність (10) та (11).

Для початку запишемо (12) для $y=1$ у двох можливих випадках. Спочатку нехай $\varphi_i(x)=0,\forall i\in M$. Тоді за (10) $\psi(x,1)=0$. З іншого боку, з (12) випливає, що $M(x,1)=\varnothing$ і тоді за (11) $\psi(x,1)=0$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

У другому випадку, нехай $\exists i \in M : \varphi_i(x) = 1$. Визначимо за (11) значення $\psi(x,1)$. Для цього відповідно до (12) побудуємо наступну множину: $M(x,0) = \{i \in M \mid 1 = \varphi_i(x) = \max_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x), \mu(i) = \max_{\varphi_j(x)=1} \mu(j)\}$. Покажемо, що виконується $M(x,1) = \operatorname{Arg}\max_{\varphi_j(x)=1} \mu(j)$. Позначимо $\mu_1^* = \max_{\varphi_j(x)=1} \mu(j)$. Нехай $i \in \operatorname{Arg}\max_{\varphi_j(x)=1} \mu(j)$, тоді $\mu(i) = \mu_1^*(x)$ та $\max_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x) = \max\{\max_{\mu(j) > \mu_1^*(x)} \varphi_j(x), \max_{\mu(j) \ge \mu_1^*(x)} \varphi_j(x)\} = \max\{1, \max_{\mu(j) \ge \mu_1^*(x)} \varphi_j(x)\} = 1 = \varphi_i(x)$. Звідси очевидно, що $i \in M(x,1)$.

Тепер навпаки, нехай $i \in M(x,1)$. Тоді $1 = \varphi_i(x) = \max_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x)$ та $\mu(i) = \mu_1^*(x)$. Звідси $i \subset \operatorname{Arg}\max_{\varphi_j(x)=1} \mu(j)$, тоді за (11) $\psi(x,1) = \mu_1^*$, а тому формули (10), (11) є еквівалентними для $y = 1$.

Далі запишемо (12) для $y = 0$ у двох можливих випадках. Позначимо: $\mu_0^* = \max_{j \in M} \mu(j)$, $I^* = \operatorname{Arg}\max_{j \in M} \mu(j)$. Спочатку нехай $\varphi_i(x) = 0$, $\forall i \in I^*$. Тоді за (10) $\psi(x,0) = \mu_0^*$. Визначимо значення $\psi(x,0)$ за формулою (11). Для цього побудуємо відповідно до (12) множину: $M(x,0) = \{i \in M \mid 0 = \varphi_i(x) = \max_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x), \mu(i) = \max_{j \in M} \mu(j)\} = \{i \in I^* \mid 0 = \varphi_i(x) = \max_{j \in I^*} \varphi_j(x)\} = I^*$. Звідси за (11) $\psi(x,0) = \mu_0^*$.

У другому випадку, нехай $\exists i \in I^* : \varphi_i(x) = 1$. Тоді за (10) $\psi(x,0) = 0$. Визначимо значення $\psi(x,0)$ згідно (11). Для цього за (12) побудуємо $M(x,0) = \{i \in M \mid 0 = \varphi_i(x) = \max_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x), \mu(i) = \max_{j \in M} \mu(j) = \mu_0^*\} = \{i \in I^* \mid 0 = \varphi_i(x) = \max_{j \in I^*} \varphi_j(x) = 1\} = \varnothing$. Звідси за (11) $\psi(x,0) = 0$, а тому формули (10), (11) є еквівалентними для $y = 0$.

Теорему доведено.

З викладених вище міркувань стає зрозуміло, що множина $\tilde{F}$ допустимих альтернатив задачі (1) є нечіткою множиною типу 2, яка задається відображенням належності $\psi(x,y)$, де

$$\psi(x,1) = \begin{cases} \max_{f_i(x) \le 0} \mu(i), & \exists i \in M : f_i(x) \le 0, \\ 0, & f_i(x) > 0, \ \forall i \in M, \end{cases}$$

- ступінь допустимості альтернативи $x \in X$;

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \max_{i \in M} \mu(i), & f_i(x) > 0, \ \forall i \in I^*, \\ 0, & \exists i \in I^* : f_i(x) \le 0, \end{cases}$$

- ступінь її недопустимості.

Оскільки ОПР зацікавлена у максимізації як цільової функції, так і у ступеня допустимості отриманого розв'язку, то перед нею постає наступна двохкритеріальна задача:

$$\max\{g(x) \mid x \in X\}, \max\{\mu(i) \mid i \in M, f_i(x) \le 0\}. \quad (16)$$

Позначимо PO - множину оптимальних за Парето альтернатив цієї задачі.

Цілком зрозуміло, що у визначення раціонального розв'язку задачі (1) слід включати лише альтернативи з множини PO. Ці міркування приводять до наступного визначення.

Загальним розв'язком задачі (1) диз'юнктивного програмування з нечіткою множин індексів обмежень називатимемо нечітку множину $\tilde{F}^*$ типу 2 з відображенням належності

$$\psi^*(x,y) = \begin{cases} \psi(x,y), & x \in PO, \\ 0, & x \notin PO, \end{cases}$$

де $x \in X$, $y \in Y = \{0,1\}$.

У закінченні слід відмітити, що у разі, коли ОПР цікавить конкретна альтернатива, то її можна вибрати за допомогою того або іншого методу багатокритеріальної оптимізації, вирішивши задачу (16).

Список використаних джерел

1. *Еремин, И.И.* Сигма-кусочные функции и задачи дизъюнктивного программирования / И.И. Еремин // Доклады РАН. – 1998. – **358**, № 5. – С. 38 – 540.

2. *Мащенко С.О.* Операции пересечения и объединения нечеткого множества нечетких множеств / С.О. Мащенко // Искусственный интеллект. – 2012. – № 2 . – С. 111 - 122.

3. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

Надійшла до редколегії 25.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 519.8

Мащенко С.О., д. ф.-м. н., доц.,
Бовсунівський* О.М., аспірант

Задача вибору альтернатив з нечіткою множиною чітких цілей

Розглядається задача раціонального вибору альтернатив, у якій ціль особи, що приймає рішення, задана нечіткою множиною чітких цільових множин. Розглядається поняття перетину нечіткої множини чітких множин та досліджуються його властивості.

Ключові слова: нечітка ціль, нечітка множина типу 2, прийняття рішень, раціональний вибір.

S.O.Mashchenko, D.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.,
O.M.Bovsunivskyi*, Postgrad. Stud.

The problem of alternatives choice with the fuzzy set of clear goals

The problem of alternatives rational choice, in which goal of person who makes decision, is defined with the fuzzy set of clear goal (aim) sets. The concept of intersection of fuzzy set of clear sets is considered and in it also investigated its properties.

Keywords: fuzzy set, fuzzy goal, membership function, fuzzy set of type 2, decision making, rational choice.

*E-mail: msomail@yandex.ru, bovs@email.ua
Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Різноманітні форми опису нечітких вихідних даних можуть приводити до різних постановок задач нечіткого математичного програмування (НМП): задача досягнення нечітко поставленої цілі при нечітких обмеженнях [1]; задача НМП з нечіткою множиною альтернатив [2]; задача узагальненого НМП з ціллю, що задана нечітким відображенням [2]; задача з "послабленою" цільовою функцією та (або) обмеженнями [3], в якій замість оптимізаційної розв'язується задача досягнення цілі (при цьому відповідні нерівності для цільової функції і обмежень можуть порушуватися); задача математичного програмування з нечіткими коефіцієнтами [3] та інші.

У вказаних вище відомих постановках задач НМП нечіткість виявляється як в описі цілі, так і в описі множини альтернатив. В даній роботі буде розглянута задача прийняття рішень, сама структура якої в деякому розумінні носить нечіткий характер, а саме, множина цілей є нечіткою.

Нехай X – універсальна множина альтернатив, на якій задана нечітка множина альтернатив D функцією належності $\mu_D : X \to [0,1]$. Нехай особа, що приймає рішення (ОПР), має множину $N = \{1,2,...n\}$ можливих цілей, які задаються деякими чіткими підмножинами $G_i \subseteq X$, $i \in N$, n - їхня кількість.

Досить часто виникають ситуації, коли ОПР не може чітко вказати, які саме множини G_i, $i \in N$, характеризують її ціль на час прийняття рішення, але може задати деяку нечітку підмножину $\tilde{N} \subseteq N$ цих множин.

Наприклад, якщо ОПР хоче придбати автомобіль, характеристики якого, повинні належати певним цільовим множинам, які визначають: ціну автомобіля, економічність, вартість обслуговування, довговічність експлуатації, наявність бажаних систем безпеки та комфорту, тощо. Зовсім необов'язково, що всі ці множини характеризують ціль ОПР зі ступенем належності, який дорівнює одиниці. Тому цілком логічно припустити, що ОПР може задати деяку нечітку підмножину множини цілей, яка буде адекватно характеризувати її реальну ціль на час покупки.

Позначимо $\eta : N \to [0,1]$ функцію належності нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, які характеризують ціль ОПР. Тоді загалом її ціль може бути заданою перетином $\tilde{G} = \bigcap_{n \tilde{N}} G_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, $i \in N$. Визначимо це поняття відповідно до підходу, який був запропонований у [4].

Нехай $\mu_{G_j} : X \to \{0,1\}$ - характеристична функція чіткої множини G_j, тобто

$$\mu_{G_j}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in G_j \text{ та } \mu_{G_j}(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin G_j$$

для $\forall x \in X$, $j \in N$. Спочатку розглянемо множину $G = \bigcap_{n N} G_i$, яка є перетином чіткої

© С.О.Мащенко,
О.М. Бовсунівський, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

множини N чітких множин G_i, $i \in N$. За класичною теорією множин вона є чіткою множиною, яка задається характеристичною функцією $\mu_{\tilde{G}}(x) = \min_{j \in N} \mu_{G_j}(x)$, $x \in X$, значення якої при кожній фіксованій альтернативі $x \in X$ фактично визначається як екстремум цільової функції тривіальної задачі "чіткого" математичного програмування наступного вигляду: $\mu_{\tilde{G}} = \min_{j \in N} \mu_{G_j}$.

Розглянемо випадок перетину $\tilde{\tilde{G}} = \bigcap_{i \in \tilde{N}} G_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ нечітких множин G_i, $i \in N$. Узагальнення згаданої вище класичної операції перетину чіткої множини N нечітких множин природно приводить до того, що множина $\tilde{G}$ буде задаватися функцією належності

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \min_{j \in N} \mu_{G_j}(x), \; x \in X. \qquad (1)$$

Цілком зрозуміло, що значення цієї функції належності $\mu_{\tilde{G}}$ для кожної альтернативи $x \in X$ буде визначатися як екстремум цільової функції задачі нечіткого математичного програмування :

$$\mu_{\tilde{G}} = \min_{j \in N} \mu_{G_j}. \qquad (2)$$

Задачі нечіткого математичного програмування достатньо добре вивчені. За С. Орловським [2], розв'язком задачі (2) вважається нечітка множина $\tilde{N}^{\cap}$, носієм якої є множина оптимальних за Парето розв'язків (позначатимемо її через $N^{\cap}$) такої двохкритеріальної задачі:

$$\mu_{G_i} \to \min, \; \eta(i) \to \max, \; i \in N. \qquad (3)$$

Функцією належності $\eta^{\cap}$ нечіткої множини $\tilde{N}^{\cap}$ є звуження функції належності $\eta(i)$, $i \in N$, з універсальної множини індексів критеріїв N на множину $N^{\cap}$. Іншими словами, ця функція належності буде мати такий вигляд:

$$\eta^{\cap}(i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^{\cap}, \\ 0, & i \notin N^{\cap}. \end{cases}$$

Відповідно до розв'язку задачі (2), яким є нечітка множина $\tilde{N}^{\cap}$, за [2] визначається нечітка множина $\Re$ оптимальних значень цільової функції цієї задачі. Вона задається функцією належності $\rho : \{0,1\} \to [0,1]$, $\rho(z) = \max_{\mu_{G_i} = z} \eta^{\cap}(j)$, $z \in \{0,1\}$.

Слід відмітити, що функція належності $\rho(z)$, $z \in \{0,1\}$, нечіткої множини $\Re$ оптимальних значень цільової функції задачі (2) визначена на двохелементній множині $\{0,1\}$. Це пояснюється тим, що при будь-якій фіксованій альтернативі $x \in X$ будь-яка характеристична функція $\mu_{G_j}(x)$, $j \in N$, може прийняти значення 0 або 1.

Таким чином, для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ значення функції належності (1) нечіткої множини $\tilde{G} = \bigcap_{i \in \tilde{N}} G_i$ утворює також нечітку множину. Звідси випливає, що нечітка множина $\tilde{G}$ є, так званою [5], нечіткою множиною типу 2.

Для довільної альтернативи $x \in X$ розглянемо відношення домінування, яке породжується цільовими множинами задачі (3) на універсальній множині цілей N.

Будемо говорити, що ціль з індексом $i \in N$ домінує ціль з індексом $j \in N$ для альтернативи $x \in X$ і позначати це $i \overset{(x)}{\succ} j$, якщо мають місце такі нерівності: $\mu_{G_i}(x) \le \mu_{G_j}(x)$, $\eta(i) \ge \eta(j)$, і хоча б одна з них є строгою.

Це поняття дозволяє визначити множину оптимальних за Парето розв'язків двохкритеріальної задачі (3), яка буде носієм нечіткої множини розв'язків задачі нечіткого математичного програмування (2).

Для довільної альтернативи $x \in X$ позначимо цей носій

$$N^{\cap}(x) = \left\{ i \in N \mid j \overset{(x)}{\not\succ} i, \; \forall j \in N \right\}. \qquad (4)$$

Для довільних $x \in X$, $i \in N$ визначимо функцію належності нечіткої множини розв'язків задачі (2):

$$\eta^{\cap}(x,i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^{\cap}(x), \\ 0, & i \notin N^{\cap}(x). \end{cases} \qquad (5)$$

Тоді, перетином нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, $i \in N$, будемо називати $\tilde{G} = \bigcap_{i \in \tilde{N}} G_i$ - нечітку множина типу 2, яка задається парами $(x, \mu_{\tilde{G}}(x,z))$, де x – елемент множини альтернатив X, а $\mu_{\tilde{G}}(x,z)$ - нечітке відображення

Kyiv National Taras Shevchenko University

$\mu_{\tilde{G}}: X \times \{0,1\} \to [0,1]$, яке виконує роль його нечіткої функції належності і визначене таким чином:

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = \max_{i \in N} \{\eta^{\bigcap}(x,i) \mid \mu_{G_i}(x) = z\}, \quad (6)$$

якщо

$$\exists i \in N,\ \mu_{G_i}(x) = z,\ z \in \{0,1\};$$

та

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = 0, \quad (7)$$

якщо

$$\mu_{G_i}(x) \neq z, \forall i \in N,\ z \in \{0,1\}.$$

Обчислення функції належності $\mu_{\tilde{G}}(x,z)$ нечіткої множини типу 2 за формулами (4)-(7) можна спростити за допомогою наступної теореми.

Позначимо $I^* = \operatorname{Arg}\max_{j \in N} \eta(j)$.

Теорема 1. Нехай G_i, $i \in N$, - чіткі множини, які задані на множині X відповідними характеристичними функціями $\mu_{G_i}(x)$, $x \in X$, $i \in M$; $\eta(i)$, $i \in N$, - функція належності нечіткої множини $\tilde{N}$. Для того, щоб нечітка множина $\tilde{G}$ типу 2, яка задана відображенням належності $\mu_{\tilde{G}}(x,z)$, $x \in X$, була перетином нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, $i \in N$, тобто $\tilde{G} = \bigcap_{i \in N} G_i$ необхідно й достатньо, щоб для $x \in X$:

$$\mu_{\tilde{G}}(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{i \in N,\ \mu_{G_i}(x)=0} \eta(i), & \exists i \in N:\ \mu_{G_i}(x) = 0, \\ 0, & \mu_{G_i}(x) = 1,\ \forall i \in N, \end{cases}$$
$$\mu_{\tilde{G}}(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{i \in N} \eta(i), & \mu_{G_i}(x) = 1,\ \forall i \in I^*, \\ 0, & \exists i \in I^*:\ \mu_{G_i}(x) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Доведення. Спочатку покажемо, що формули (6), (7) еквівалентні наступній:

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = \begin{cases} \max\limits_{i \in N(x,z)} \eta(i), & N(x,z) \neq \varnothing, \\ 0, & N(x,z) = \varnothing, \end{cases} \quad (9)$$

де

$$N(x,z) = \{i \in N \mid\ z = \mu_{G_i}(x) = \min_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_j}(x),\ \eta(i) = \max_{\mu_{G_j}(x) \leq \mu_{G_i}(x)} \eta(j)\}. \quad (10)$$

Відзначимо, що з формул (6), (7) очевидно випливає

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = \max_{i \in N^{\cap}(x)} \{\eta(i) \mid \mu_{G_i}(x) = y\} \quad (11)$$

якщо

$$\exists i \in N:\ \varphi_i(x) = z,$$

та

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = 0 \quad (12)$$

якщо

$$\mu_{G_i}(x) \neq z,\ \forall i \in N.$$

Тому, для доведення еквівалентності (6), (7) та (9) достатньо показати, що формули (11), (12) еквівалентні (9). Для цього скористаємося відомою [6] теоремою про необхідні й достатні умови ефективності альтернатив в задачах багатокритеріальної оптимізації, згідно якої множина оптимальних за Парето розв'язків двохкритеріальної задачі (3) буде мати вигляд:

$$M^{PO}(x) = \{i \in M \mid \varphi_i(x) = \min_{\mu(j) \geq \mu(i)} \varphi_j(x),\ \mu(i) = \max_{\varphi_j(x) \leq \varphi_i(x)} \mu(j)\}. \quad (13)$$

З (10), (13) очевидно випливає рівність $N(x,z) = N^{\cap}(x) \bigcap \{i \in N \mid\ \mu_{G_i}(x) = z\}$. Тому формули (11), (12) еквівалентні (9). Звідси можна зробити висновок, що формула (7) також еквівалентна (9).

Тепер для доведення теореми достатньо показати еквівалентність формул (8) та (9). Спочатку розглянемо (8) та (9) при $z = 0$ в двох можливих випадках. Нехай $\mu_{G_i}(x) = 1, \forall i \in N$. Тоді згідно (8) $\mu_{\tilde{G}}(x,0) = 0$. З іншого боку, з (10) випливає, що $N(x,0) = \varnothing$. Тому згідно (9) також отримаємо $\mu_{\tilde{G}}(x,0) = 0$.

В другому випадку, нехай $\exists i \in N: \mu_{G_i}(x) = 0$. Визначимо відповідно до (9) значення $\mu_{\tilde{G}}(x,0)$. Для цього за (10) побудуємо множину $N(x,0) = \{i \in N \mid\ 0 = \mu_{G_i}(x) = \min_{\eta(j) \geq \eta(i)} \mu_{G_j}(x), \eta(i) = \max_{\mu_{G_j}(x)=0} \eta(j)\}$. Покажемо $N(x,0) = \operatorname{Arg}\max_{\mu_{G_i}(x)=0} \eta(j)$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Позначимо через $\eta_0^*(x) = \max\limits_{\mu_{G_i}(x)>0} \eta(j)$. Нехай $i \in \operatorname{Arg}\max\limits_{\mu_{G_j}(x)>0} \eta(j)$, тоді $\eta(i) = \eta_0^*(x)$ та

$$\min_{\eta(j)\ge\eta(i)} \mu_{G_j}(x) = \min\{\min_{\eta(j)=\eta_0^*(x)} \mu_{G_j}(x), \min_{\eta(j)>\eta_0^*(x)} \mu_{G_j}(x)\} =$$
$$= \min\{0, \min_{\eta(j)>\eta_0^*(x)} \mu_{G_j}(x)\} = 0 = \mu_{G_i}(x). \quad 3$$

одержаних рівностей очевидно випливає, що $i \in N(x,0)$.

Тепер навпаки, нехай $i \in N(x,0)$. Тоді виконуються рівності: $0 = \mu_{G_i}(x) = \min\limits_{\eta(j)\ge\eta(i)} \mu_{G_j}(x)$ та $\eta(i) = \eta_0^*(x)$. Звідси $i \in \operatorname{Arg}\max\limits_{\mu_{G_j}(x)>0} \eta(j)$, тоді згідно з (8) одержимо $\mu_{\tilde{G}}(x,0) = \eta_0^*$. Таким чином, формули (8) та (9) будуть еквівалентні при $z = 0$.

Далі порівняємо формули (8) та (9) при значенні $z = 1$. Можливі лише два випадки.

Позначимо $\eta_1^* = \max\limits_{j\in N} \eta(j)$ та нагадаємо про позначення $I^* = \operatorname{Arg}\max\limits_{j\in N} \eta(j)$. Спочатку нехай $\mu_{G_i}(x) = 1$, $\forall i \in I^*$. Тоді згідно з (8) $\mu_{\tilde{G}}(x,1) = \eta_1^*$. Визначимо значення $\mu_{\tilde{G}}(x,1)$ за формулою (9). Для цього побудуємо у відповідності з (10): $N(x,1) = \{i \in N \mid 1 = \mu_{G_i}(x) = \min\limits_{\eta(j)\ge\eta(i)} \mu_{G_j}(x),\ \eta(i) = \max\limits_{j\in N} \eta(j)\} = \{i \in I^* \mid 1 = \mu_{G_i}(x) = \min\limits_{j\in I^*} \mu_{G_j}(x)\} = I^*$. Звідси згідно з (8) $\mu_{\tilde{G}}(x,1) = \eta_1^*$.

Таким чином, у випадку, що був розглянутий вище значення за формулами (8) та (9) при $z = 1$ співпадають.

Розглянемо другий випадок. Нехай $\exists i \in I^* : \mu_{G_i}(x) = 0$. Тоді згідно з (8) $\mu_{\tilde{G}}(x,1) = 0$. Визначимо значення $\psi(x,1)$ відповідно до (9). На підставі (10) одержимо множину $N(x,1) = \{i \in N \mid 1 = \mu_{G_i}(x) = \min\limits_{\eta(j)\ge\eta(i)} \mu_{G_j}(x),\ \eta(i) = \max\limits_{j\in N} \eta(j) = \eta_1^*\} = \{i \in I^* \mid 1 = \mu_{G_i}(x) = \min\limits_{j\in I^*} \mu_{G_j}(x) = 0\} = \varnothing$. Звідси згідно з (9) $\psi(x,1) = 0$, а тому формули (7), (8) - еквівалентні при $z = 1$. Теорему доведено.

Приклад 1. Нехай множина $X = \{a,b,c,d\}$. На ній задані дві чіткі множини G_1, G_2 з функціями належності, відповідно, $\mu_{G_1}(x)$ і $\mu_{G_2}(x)$ (табл. 1). Функція належності $\min\{\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x)\}$ їхнього перетину вказана в третьому рядку табл. 1. Нехай також задана нечітка підмножина $\tilde{N}$ множини $N = \{1,2\}$ з функцією належності $\eta(i)$, $i \in N$, яка має значення: $\eta(1) = 0.8$, $\eta(2) = 0.5$. Значення функцій належності $\mu(x,0)$ і $\mu(x,1)$, які задають відповідні перерізи нечіткої множини $\tilde{G} = \bigcap\limits_{i\in N} G_i$ типу 2 вказані в табл. 1.

Перейдемо до побудови розв'язку задачі раціонального вибору альтернатив за нечіткою ціллю, яка задається нечіткою множиною $\tilde{G} = \bigcap\limits_{i\in N} G_i$ типу 2. Спочатку побудуємо загальний розв'язок, яким буде нечітка множина $X^* = \tilde{G} \cap D$ типу 2. За Л. Заде [5] перетин двох нечітких множин A і B типу 2, які задаються нечіткими відображеннями (вони виконують роль їхніх нечітких функцій належності) відповідно $\mu_A(x,z)$ та $\mu_B(x,z)$, $x \in X$, $z \in [0,1]$, є нечіткою множиною типу 2 з функцією належності:

$$\mu_{A\cap B}(x,z) = \max_{\substack{z_A, z_B \in [0,1],\\ z=\min(z_A, z_B)}} \min\{\mu_A(x,z_A), \mu_B(x,z_B)\}.$$

Тому нечітке відображення, яке задає нечітку функцію належності нечіткої множини розв'язків вихідної задачі $X^* = \tilde{G} \cap D$ типу 2, буде мати вигляд:

$$\mu(x,z) = \max_{\substack{z_D, z_G \in [0,1],\\ z=\min(z_D, z_G)}} \min\{\mu_D(x,z_D), \mu_{\tilde{G}}(x,z_G)\}, \quad (14)$$

де $\mu_D(x,z_D)$ - відображення, яке задає нечітку множину альтернатив D і визначається для $\forall x \in X$, $\forall z \in [0,1]$ за функцією належності $\mu(x)$ наступним чином:

$$\mu_D(x,z) = \begin{cases} 1, & z = \mu_D(x), \\ 0, & z \ne \mu_D(x). \end{cases} \quad (15)$$

Слід відмітити, що величини $\mu(x,1)$ та $\mu(x,0)$ фактично характеризують ступінь належності та неналежності альтернативи $x \in X$ нечіткій множині типу 2 (позначимо її через X^*) допустимих альтернатив, які задовольняють нечіткій множині цілей ОПР. По великому рахунку, цю множину варто вважати розв'язком вихідної задачі. Оскільки ОПР часто цікавить не вся множина розв'язків, а якийсь конкретний з них, то постає задача раціонального вибору єдиної альтернативи з нечіткої множини X^* типу 2.

Слід зазначити, що якщо у функції належності $\mu(x,z)$ нечіткої множини X^* типу 2 зафіксувати $z = 1$, то ми отримаємо нечітку підмножину

Kyiv National Taras Shevchenko University

Таблиця 1

Перетин нечіткої множини чітких множин

x	a	b	c	d
$\mu_{G_1}(x)$	0	1	0	1
$\mu_{G_2}(x)$	0	0	1	1
$\min\{\mu_{G_1}(x),\mu_{G_2}(x)\}$	0	0	0	1
$\mu(x,0)$	0,8	0,5	0,8	0
$\mu(x,1)$	0	0,8	0	0,8

елементів $x \in X$, що належать множині X^*, з функцією належності $\mu(x,1)$. Позначимо цю множину $X^*(1)$. Аналогічно для фіксованого значення $z=0$ отримаємо нечітку множину елементів $x \in X$, що не належать множині X^*, з функцією належності $\mu(x,0)$. Позначимо її $X^*(0)$. Цікаво, що в загальному випадку $X^*(0) \neq \overline{X^*(1)}$, і, відповідно $\mu(x,0) \neq 1-\mu(x,1)$. Тому, як нечітка множина $X^*(0)$, так і $X^*(1)$, є нечіткими множинами перерізів відповідно при $z=0$ і $z=1$ нечіткої множини X^* типу 2 і є її складовими.

Побудуємо функцію належності $\mu(x)$ звичайної нечіткої множини (типу 1), яка буде агрегувати у собі інформацію про ступінь належності альтернативи $x \in X$ нечіткої множини допустимих альтернатив, що задовольняють нечіткій множині цілей ОПР, враховуючі обидві множини перерізів відповідно при $z=0$ і $z=1$ нечіткої множини X^* типу 2 наступним чином:

$$\mu(x) = \min\{\mu(x,1), 1-\mu(x,0)\}. \qquad (16)$$

Встановимо її властивості.

Спочатку припустимо, що $x \notin D$. Тоді за формулою (15) $\mu_D(x,1)=0, \mu_D(x,0)=1$. Звідси за формулою (14) $\mu(x,1)=\min\{0,\mu_G(x,1)\}=0$, $\mu(x,0)=\max\{\mu_G(x,0),\mu_G(x,1)\}$. Тоді з (16) випливає, що $\mu(x)=0$.

Тепер припустимо, що $x \in D$. Тоді за формулою (15) $\mu_D(x,1)=1, \mu_D(x,0)=0$. Звідси за формулою (14) $\mu(x,1)=\min\{1,\mu_G(x,1)\}=\mu_G(x,1)$, $\mu(x,0)=\max\{0,\mu_G(x,0),0\}=\mu_G(x,0)$. Тоді з (16) випливає, що

$$\mu(x) = \min\{\mu_G(x,1), 1-\mu_G(x,0)\}. \qquad (17)$$

Звідси можна зробити висновок, що для вибору раціональної альтернативи, яка буде мати ненульову ступінь належності до множини розв'язків вихідної задачі слід лише розглядати лише допустимі альтернативи (з множини D). В цьому випадку функція належності $\mu(x)$ нечіткої множини розв'язків вихідної задачі буде мати вигляд (17).

Розглянемо наступну властивість. Хоча в загальному випадку множини $X^*(0)$ і $X^*(1)$ не доповнюють одна іншу, але, за певних умов, між ними можна встановити наступний зв'язок.

Теорема 2. Нехай функція належності $\eta(j)$ нечіткої множини $\tilde{N}$ є нормальною, тобто $\max\limits_{j\in N}\eta(j)=1$. Тоді $1-\mu(x,0) \le \mu(x,1)$, $\forall x \in D$.

Доведення. Можливі лише три наступні випадки. Розглянемо їх.

1. Припустимо $\mu_{G_i}(x)=1$, $\forall i \in N$. Тоді з (8) випливають рівності $\mu(x,0)=0$, $\mu(x,1)=1$. Звідси має місце така нерівність $1=1-\mu(x,0) \le \mu(x,1)=\max\limits_{j\in N}\eta(j)=1$.

2. Припустимо, що мають місце рівності: $\mu_{G_i}(x)=1$, $\forall i \in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j)$ і $\exists j \notin Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j)$, для якого $\mu_{G_j}(x)=0$. Позначимо $\max\limits_{\mu_{G_j}(x)=0}\{\eta(j) \mid j\in N, j \notin \operatorname{Arg}\max\limits_{j\in N}\eta(j), \mu_{G_j}(x)=0\}=\delta$.

Відмітимо, що $0 \le \delta < 1$. Тоді з (8) випливає $\mu(x,0)=\delta$, $\mu(x,1)=1$. Звідси очевидно, що $1-\mu(x,0) \le \mu(x,1)$.

3. Припустимо $\exists i \in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j)$, для якого $\mu_{G_i}(x)=0$. Тоді з (13) випливає $\mu(x,0)=1$, $\mu(x,1)=0$. Звідси одержимо нерівність $1-\mu(x,0)=0 \le 0=\mu(x,1)$.

Таким чином, $1-\mu(x,0) \le \mu(x,1)$ для $\forall x \in D$. Теорему доведено.

Далі, без зменшення загальності, будемо вважати функцію належності $\eta(j)$ нечіткої множини $\tilde{N}$ нормальною, тобто $\max\limits_{j\in N}\eta(j)=1$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Тоді з (17) з теореми 2 випливає, що $\mu(x) = 1 - \mu_D(x,0)$, $\forall x \in D$. Звідси за (8):

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \max\limits_{\mu_{G_i}(x)=0} \eta(i), & \exists i \in N: \ \mu_{G_i}(x) = 0, \\ 1, & \mu_{G_i}(x) = 1, \quad \forall i \in N. \end{cases} \qquad (18)$$

Нагадаємо, що за визначенням характеристичних функцій: $\mu_{G_j}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in G_j$ та зробимо такі висновки.

Якщо існує допустима альтернатива $x^* \in D$, яка належить усім цільовим множинам (що можна перевірити), тобто $x^* \in G_j$, $\forall j \in N$, то її безперечно можна вважати "чітким" розв'язком вихідної задачі.

У протилежному випадку, доцільно шукати альтернативу $x^* \in D$, яка буде максимізувати функцію належності $\mu(x)$ нечіткої множини допустимих альтернатив, що задовольняють нечіткій множині цілей ОПР. З формули (18) випливає, що для цього достатньо розв'язати задачу оптимізації:

$$\min_{x \in D} \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid \ x \notin G_i\}. \qquad (19)$$

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 2. Нехай множина $X = \{a,b,c,d\}$. Допустима множина альтернатив $D = \{a,b,c\}$. На X задані дві чіткі множини $G_1 = \{b,d\}$, $G_2 = \{c,d\}$. Нехай також задана нечітка підмножина $\tilde{N}$ множини $N = \{1,2\}$ з функцією належності $\eta(i)$, $i \in N$, яка має значення: $\eta(1) = 0.8$, $\eta(2) = 0.5$. Неважко переконатися, що функція належності $\mu(x)$ приймає значення:

$$\mu(a) = \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid \ a \notin G_i\} = 0,8;$$
$$\mu(b) = \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid \ b \notin G_i\} = 0,5;$$
$$\mu(c) = \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid \ c \notin G_i\} = 0,8.$$

Таким чином, розв'язком задачі оптимізації (19) і, відповідно, вихідної задачі буде альтернатива $b = \arg \min\limits_{x \in \{a,b,c\}} \mu(x)$.

У закінчення слід відмітити, що розглянутий у цій роботі підхід до "раціонального" вибору альтернатив у задачі прийняття рішень з цільовою множиною, яка може бути задана нечіткою множиною чітких множин є іншим поглядом на цю проблему, ніж метод, який був розвинений у роботах Р. Белмана та Л. Заде, зокрема в [7], з використанням вагових коефіцієнтів, які характеризують перевагу ОПР на множині цільових множин. Наприклад, якщо прийняти значення $\eta(1) = 0.8$, $\eta(2) = 0.5$ за коефіцієнти важливості відповідно цільових множин $G_1 = \{b,d\}$, $G_2 = \{c,d\}$ з прикладу 2, то максимальне значення функції належності $\min\{0,8\mu_{G_1}(x), 0,5\mu_{G_2}(x), \mu_D(x)\}$ на універсальній множині $X = \{a,b,c,d\}$ буде досягатися одразу на трьох її елементах "a", "b" та "c". Цікаво, що серед них елемент "a" навіть не належить жодній цільовій множині. З цього прикладу нескладно побачити, що і у загальному випадку задачі прийняття рішень з чіткими цільовими множинами, підхід Р. Белмана та Л. Заде приводить або до тривіального розв'язку – допустимої альтернативи, яка належить усім цільовим множинам (якщо вона існує), або пропонує всю множину допустимих альтернатив.

Список використаних джерел

1. *Mashchenko S.* Decision making problem with fuzzy set of goal sets / Sergiy Mashchenko, Oleksandr Bovsunivskyi// International Journal "Information Theories and Applications". – 2012. – **19**. – N 3. – P. 249 - 257.
2. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учебное пособие.- К. : Вища школа., 1991.- 191 с.
4. *Мащенко С.О.* Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия / С.О. Мащенко // Кибернетика и вычислительная техника. – 2010, вип.159. – С. 19 – 29.
5. *Zadeh L.A.* Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes.- IEEE Transactions System, Man Cybernetics, SMC-3. – 1973. - N1. - p. 28-44.
6. *Подиновский В.В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач : монография / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Физматлит, 2007 (Чебоксары). – 255 с.
7. *Bellman R. E.* Decision-Making in a Fussy Environment / R. E. Bellman, L. A. Zadeh // Management Science. - 1970.- N17.-p. 141-164.

Надійшла до редколегії 05.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 627.324.2/3:532.72

Мічута О.Р., аспірант, Власюк А.П., д.т.н., професор, Мартинюк П.М., к.ф.-м.н., доцент.

Математичне моделювання впливу багатокомпонентних хімічних розчинів та неізотермічних умов на фільтраційну консолідацію тіла грунтової греблі

Побудовано математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації тіла грунтової греблі з урахуванням впливу багатокомпонентних сольових розчинів і неізотермічних умов. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом радіальних базисних функцій. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: фільтраційна консолідація, грунтова гребля, хімічна суфозія, просідання.

O.R. Michuta, PhD student, A.P. Vlasyuk, Doctor of science, prof., P.M. Martyniuk, PhD, assoc. prof.

Mathematical modeling of influence of multicomponent chemical solutions and non-isothermal conditions on the consolidation of soil dams

The two-dimensional mathematical model of consolidation of soil dams has been built taking into account multicomponent chemical solutions and unisothermal conditions. The numerical solutions of corresponding boundary-value problem have been found by the method of radial base functions. The series of numerical experiments and their analysis have been carried out.

Key words: filtration consolidation, ground dams, chemical suffosion, subsidence.

*E-mail: michuta@ukr.net
Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. За статистичними даними на 2% великих гребель в світі мали місце аварії та інциденти [20]. Основна їх причина – фільтраційні процеси. Підвищені напори в тілі греблі збільшують ризики, пов'язані з виникненням критичних під час будівництва та експлуатації гідротехнічних споруд. Ці напори можуть виникати від власної ваги грунту, під час будівництва греблі, під впливом інтенсивних атмосферних опадів, як результат різкого підняття або падіння рівня води у верхньому б'єфі.

Зміна напорів в поровій рідині пористого середовища пов'язана з деформаціями його скелету – ущільненням або набуханням. Процес розсіювання надлишкових напорів (фільтраційна консолідація) в грунті призводить до зближення частинок грунту і, в результаті, до його ущільнення під впливом прикладеного навантаження або власної ваги. Такі процеси та рівняння досить повно описані та виведені в роботі [7]. В роботах [1, 3, 4] побудовані та досліджені математичні моделі фільтраційної консолідації грунтів в умовах впливу хімічних розчинів та температури. В роботі [5] процеси консолідації при наявності впливу хімічних розчинів розглянуті з точки зору натурних експериментів.

Однак, в цих роботах в якості порової рідини розглядався однокомпонентний сольовий розчин. Насправді ж, в природних умовах, поровий розчин є багатокомпонентним. Прикладом може бути загіпсований грунт в пори якого починає надходити інший хімічний розчин. Важливість вивчення питання про розчинення порід в основах гідротехнічних об'єктів висвітлено в роботі [14]. Загіпсовані та засолені грунти досить часто використовуються в якості матеріалу для будівництва грунтових гребель. Моделювання поведінки таких грунтів має свої особливості. Основна – це необхідність урахування розчинення хімічних елементів (хімічної суфозії) в процесі будівництва та експлуатації грунтових споруд [12].

Процеси фільтраційної консолідації грунтів, коли поровий розчин багатокомпонентний, і є ціллю даної статті. Елементи вказаних досліджень наведено в роботах [9, 10]. Найбільш складний момент при математичному моделюванні таких процесів – це рівняння масообміну між рідкою та твердою фазами. Адже, один хімічний елемент може впливати на масообмінні процеси інших елементів (змінювати швидкість масообміну та концентрацію граничного насичення). Більш того, вони можуть вступати в хімічні реакції. Тому при дослідженні реальних задач для

© О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

реального об'єкта потрібно проводити цілу низку натурних експериментів із дослідження вказаних питань. Деякі дані про розчинність гіпсу при різних температурах та при впливі інших хімічних розчинів наведено в роботі [12, ст. 14]. Аналогічні дані наведено в [8, ст.50]. Також експериментальні дані щодо розчинності гіпсу наведено в [17, 19]

Огляд властивостей та вдосконалення інженерних методів прогнозу поведінки засолених ґрунтів присвячено монографію [6]. В роботі [18] запропоновано один із методів зменшення розчинності гіпсу в ґрунті.

Математичні моделі переносу багатокомпонентних хімічних розчинів наведено в роботах [21, 22]

Математична модель процесу задачі. Математична модель двовимірної задачі консолідації тіла ґрунтової греблі (рис.1.) з урахуванням впливу багатокомпонентного сольового розчину та неізотермічних умов на основі робіт [3, 4, 9, 10] може бути описана наступною крайовою задачею:

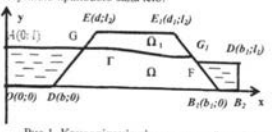


Рис.1. Консолідація тіла ґрунтової греблі в двовимірному випадку.

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a}\nabla\cdot\left[\left(\mathbf{K}(\mathbf{z},N,T)\nabla h-\sum_{s=1}^{\overline{S}}\mathbf{v}_s\nabla c_s-\mathbf{v}_T\nabla T\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{\overline{S}}\frac{e(1+e)(1+\xi)}{2\gamma\rho_s a}\left(n\frac{\partial\rho_s}{\partial t}-e\frac{\partial N_s}{\partial t}\right)\right)=\frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{D}_s\nabla c_s)+\nabla\cdot(\mathbf{D}_T\nabla T)-(\mathbf{u},\nabla c_s)=$$
$$=n\frac{\partial c_s}{\partial t}+\frac{\partial N_s}{\partial t},\ s=\overline{1,S}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t}=-\gamma_s\left(c_s^{(\max)}(\mathbf{z},T)-c_s\right)N_s^{\alpha_s},\ s=\overline{1,S}, \quad (3)$$

$$\nabla\cdot(\lambda\nabla T)-\rho c_p(\mathbf{u},\nabla T)=c_T\frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}-e\mathbf{v}=-\mathbf{K}(\mathbf{z},N,T)\nabla h+\sum_{s=1}^{\overline{S}}\mathbf{v}_s\nabla c_s+\mathbf{v}_T\nabla T, \quad (5)$$

$$h(\mathbf{X},0)=H_0(\mathbf{X}),\quad c_s(\mathbf{X},0)=C_s^{(0)}(\mathbf{X}),$$
$$N_s(\mathbf{X},0)=N_s^{(0)}(\mathbf{X}),s=\overline{1,S},$$
$$T(\mathbf{X},0)=T_0(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}\in\overline{\Omega}, \quad (6)$$

$$h(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(h)}}=H_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(h)},$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(h)}}=0,\mathbf{X}\in\Gamma_2^{(h)},$$
$$c_s(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(c)}}=C_1^{(c)}(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(c)},$$
$$(\mathbf{q}_s,\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(c)}}=0,\mathbf{X}\in\Gamma_2^{(c)},s=\overline{1,S},$$
$$T(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(T)}}=T_1(\mathbf{X},t),\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(T)},$$
$$(\mathbf{q}_T,\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(T)}}=0,\mathbf{X}\in\Gamma_2^{(T)}, \quad (7)$$

де $H_0(\mathbf{X})$, $C_s^{(0)}(\mathbf{X})$, $N_s^{(0)}(\mathbf{X})$, $s=\overline{1,S}$, $T_0(\mathbf{X})$, $H_1(\mathbf{X},t)$, $T_1(\mathbf{X},t)$ - задані функції. Тут використані наступні позначення: e - коефіцієнт пористості; γ - питома вага сольового розчину; a - коефіцієнт стисливості ґрунту; ξ - коефіцієнт бічного тиску ґрунту; $\mathbf{K}(c,N,T)$ - коефіцієнт фільтрації (тензор), що залежить від вектора концентрації солей в рідкій та твердій фазах та температури; $\mathbf{v}_s=\{v_{s_{ij}}\}$, $s=\overline{1,S}$, $\mathbf{v}_T=\{v_{T_{ij}}\}$, $i,j=1,2$ - коефіцієнти (тензори) хімічного та термічного осмосів; N_s, $s=\overline{1,S}$ - концентрації солей в твердій фазі; ρ_s, $s=\overline{1,S}$ - густини солей в твердій фазі; n - пористість ґрунту; $\mathbf{D}_s=\{D_{s_{ij}}\}$, $s=\overline{1,S}$, $i,j=1,2$ - коефіцієнти (тензори) дифузії; γ_s, $s=\overline{1,S}$ - коефіцієнти швидкості масообміну; α_s, $s=\overline{1,S}$ - показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи [2]; $\mathbf{D}_T=\{D_{T_{ij}}^{(s)}\}$, $s=\overline{1,S}$, $i,j=1,2$ - коефіцієнти (тензор) термічної дифузії; $C_s^{(\max)}$, $s=\overline{1,S}$ - концентрації граничного насичення, які залежать від температури та концентрації інших солей в рідкій фазі; $\lambda=\{\lambda_{ij}\}$, $i,j=1,2$ - коефіцієнт (тензор) теплопровідності вологого ґрунту; ρ - густина порового сольового розчину; c_p - питома теплоємність порового сольового розчину; c_T - об'ємна теплоємність ґрунту; $\mathbf{u}=(u_1;u_2)$ - вектор швидкості фільтрації; $\mathbf{v}=(v_1;v_2)$ - вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту; $\mathbf{q}_s=\mathbf{u}\cdot c_s-\mathbf{D}_s\nabla c_s$, $s=\overline{1,S}$; $\mathbf{q}_T=\rho c_p\mathbf{u}\cdot\nabla T-\lambda\nabla T$; s - кількість компонент в сольовому розчині. Також $\Gamma_1^{(h)}\cup\Gamma_2^{(h)}=\Gamma$ - межа області Ω. Причому $\Gamma_1^{(h)}\cap\Gamma_2^{(h)}=\varnothing$. Аналогічні позначення використані для інших невідомих функцій.

Kyiv National Taras Shevchenko University

На вільній поверхні Г (кривій дисперсії) функція $h(\mathbf{X},t)$ задовольняє наступними умовам [15]:

$$h(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma} = y,\ (\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_{\Gamma} = n\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad (8)$$

Співвідношення $\varphi(\mathbf{X},t) = (y - h(\mathbf{X},t))\big|_{\Gamma} = 0$ описує вільну поверхню Г. Для концентрацій сольових розчинів в рідкій фазі на десперсійній кривій в неізотермічному режимі виконується наступна гранична умова [3]:

$$(\mathbf{D}_s \nabla c_s + \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{n})\big|_{\Gamma} = 0,\ s = \overline{1,S}. \qquad (9)$$

В результаті розсіювання надлишкових напорів та розчинення (кристалізації) солей грунт буде просідати (набухати). Тому на межі грунту має задаватись кінематична гранична умова[9, 10]

$$\frac{\partial l(t)}{\partial t} = -\int_{l(t)}^{l} \frac{1}{\left(1-\sum_{s=1}^{S}\frac{1}{\rho_s}N_s(t)(1+e)\right)(1+e)}\left(\frac{2\gamma\alpha}{1+\xi}\frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2\sum_{s=1}^{S}\frac{\gamma_s}{\rho_s}\left(C_s^{(\max)} - c_s\right)N_s^{a_s}\right)dx.$$

Вищенаведену умову запишемо у вигляді

$$\frac{\partial l(t)}{\partial t} = -\int_{l(t)}^{l} F(c,N,h)dx. \qquad (10)$$

Умова (10) виведена з припущення лише вертикальних просідань грунту.

Чисельне розв'язання крайової задачі. Чисельне розв'язання крайової задачі (1)–(10) здійснене методом радіальних базисних функцій [4, 9, 10]. Покриємо область Ω вузловими точками $\mathbf{X}_j = \left(x_j^{(\mathrm{X})}, y_j^{(\mathrm{X})}\right),\ j = \overline{1,m}$. Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (1)–(10) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{m} h_j(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_H),\ c_s(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{m} c_{sj}(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_s),$$

$$N_s(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{m} N_{sj}(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_{N_s}),\ s = \overline{1,S},$$

$$T(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{m} T_j(t)\varphi_j(r_j,\varepsilon_T), \qquad (11)$$

де $\varepsilon_h, \varepsilon_s, \varepsilon_{N_s}, \varepsilon_T,\ s = \overline{1,S}$, – параметри форми; $\varphi_j(r_j,\varepsilon)$ – радіальні базисні функції; $h_j(t), c_{sj}(t), N_{sj}(t), T_j(t),\ s = \overline{1,S}$, – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу; $r_j = \sqrt{\left(x - x_j^{(\mathrm{X})}\right)^2 + \left(y - y_j^{(\mathrm{X})}\right)^2},\ j = \overline{1,m}$.

Покриємо замикання $\overline{\Omega}$ області Ω колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = \left(x_i^{(\mathrm{Y})}, y_i^{(\mathrm{Y})}\right),\ i = \overline{1,M}$. Введемо множини $\varpi = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Omega\}$, $\gamma_1^{(k)} = \left\{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_1^{(k)}\right\}$, $\gamma_2^{(k)} = \left\{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_2^{(k)}\right\}$. Аналогічно визначаємо множини номерів граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{\left(x_i^{(\mathrm{Y})} - x_j^{(\mathrm{X})}\right)^2 + \left(y_i^{(\mathrm{Y})} - y_j^{(\mathrm{X})}\right)^2},\ j = \overline{1,m},$$
$$i = \overline{1,M},\ m \ge M.$$

Підставляючи (11) в рівняння (1)–(4), початкові умови (6) та граничні умови (7)–(9), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{H}(t) = \left\{h_j(t)\right\}_{j=1}^{m}$, $\mathbf{C}_s(t) = \left\{c_{sj}(t)\right\}_{j=1}^{m}$, $\mathbf{N}_s(t) = \left\{N_{sj}(t)\right\}_{j=1}^{m},\ s = \overline{1,S}$, $\mathbf{T}(t) = \left\{T_j(t)\right\}_{j=1}^{m}$:

$$\mathbf{M}^{(1)}\frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s(t),\mathbf{T}(t))\mathbf{H}(t) = \mathbf{K}_s^{(1)}\frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt} + \mathbf{A}_s^{(1)}\frac{d\mathbf{C}_s(t)}{dt} + \mathbf{A}_s'^{(1)}\mathbf{C}_s(t) + \mathbf{E}'^{(1)}\mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \qquad (12)$$

$$\mathbf{M}_s^{(2)}\frac{d\mathbf{C}_s(t)}{dt} + \mathbf{L}_s^{(2)}(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s(t),\mathbf{T}(t))\mathbf{C}_s(t) = \mathbf{K}_s^{(2)}\frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt} + \mathbf{E}^{(2)}\mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(2)},\ s = \overline{1,S}, \qquad (13)$$

$$\mathbf{M}_s^{(3)}\frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt} = \mathbf{L}_s^{(3)}\left(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s^{a_s}(t)\right),\ s = \overline{1,S}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{M}^{(4)}\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}_s(t),\mathbf{N}_s(t),\mathbf{T}(t))\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^{(4)}, \qquad (15)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{(1)}\mathbf{H}_0(t) = \widetilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \widetilde{\mathbf{M}}_s^{(2)}\mathbf{C}_s^{(0)}(t) = \widetilde{\mathbf{F}}^{(2)},$$
$$\widetilde{\mathbf{M}}_s^{(3)}\mathbf{N}_s^{(0)}(t) = \widetilde{\mathbf{F}}^{(3)},\ s = \overline{1,S}, \widetilde{\mathbf{M}}^{(4)}\mathbf{T}_0(t) = \widetilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \qquad (16)$$

де $\mathbf{M}_s^{(k)} = \left\{m_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\widetilde{\mathbf{M}}_s^{(k)} = \left\{\widetilde{m}_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\mathbf{L}_s^{(k)} = \left\{l_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $k = 2,3$; $\mathbf{M}^{(k)} = \left\{m_{ij}^{(k)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\widetilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \left\{\widetilde{m}_{ij}^{(k)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\mathbf{L}^{(k)} = \left\{l_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $k = 1,4$; $\mathbf{K}_s^{(k)} = \left\{k_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $k = 1,2$; $\mathbf{A}_s^{(1)} = \left\{a_{sij}^{(1)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\mathbf{A}_s'^{(1)} = \left\{a'^{(1)}_{sij}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\mathbf{E}^{(1)} = \left\{e_{ij}^{(1)}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\mathbf{E}'^{(2)} = \left\{e'^{(2)}_{ij}\right\}_{i=1,\,j=1}^{M,\,m}$, $\widetilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \left\{\widetilde{f}_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{m}$, $\mathbf{F}^{(k)} = \left\{f_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{m}$, $k = \overline{1,4}$, $s = \overline{1,S}$.

Елементи матриць задачі Коші (12)–(16) визначаються однотипно, але досить громіздко. Так, для рівняння теплопровідності (4) маємо

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$f_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \nabla(\lambda_i \nabla \varphi_j(r_0, \varepsilon_T)) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_0, \varepsilon_T), & i = \overline{\varpi_r}. \\ \varphi_j(r_0, \varepsilon_T), & i \in \gamma_1^{(T)}; \\ \left(\nabla \varphi_j(r_0, \varepsilon_T), \mathbf{n}\right), i \in \gamma_2^{(T)}; \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(k)} = -c_T \varphi_j(r_0, \varepsilon_T), i = \overline{\varpi}; \; f_i^{(k)} = \begin{cases} T_i(t_k), i \in \gamma_1^{(T)}; \\ 0, \; i \in \gamma_2^{(T)}. \end{cases}$$

Для відшукання чисельного розв'язку задачі Коші (12)–(16) дискретизуємо часовий відрізок рівномірно з кроком τ. Для дискретизації рівнянь (12), (13), (15) по часу використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [4, 13]. Оскільки рівняння (14) є нелінійними, то для їх лінеаризації використано метод Ньютона [13]

$$\mathbf{M}_s^{(s)} \frac{\mathbf{N}_s^{(k+1)} - \mathbf{N}_s^{(k)}}{\tau} = \alpha_s \mathbf{L}_s^{(s)}\left(\mathbf{C}_s^{(k)}, \mathbf{N}_s^{(\alpha_s - 1)}(t_k)\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{N}_s^{(k+1)} - \mathbf{N}_s^{(k)}\right) + \mathbf{L}_s^{(s)}\left(\mathbf{C}_s^{(k)}, \mathbf{N}_s^{\alpha_s}(t_k)\right), s = \overline{1, S}.$$

Отриману після дискретизації по часу систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) розв'язано модифікованим методом Гауса, але перед цим попередньо використовувався метод найменших квадратів [16].

Для апроксимації положення вільної межі Г використано друге з рівнянь (8). Для перерахунку координат вузлових та коллокаційних точок використано кінематичну граничну умову (10).

Результати чисельних експериментів. Розглянемо двохвимірну задачу фільтраційної консолідації загіпсованої грунтової греблі з профілем рівностороннього трапеції висотою 30м, довжинами верхньої та нижньої основ 80м та 20м відповідно. У верхньому бєфі знаходиться концентрований сольовий розчин з концентрацією граничного насичення 160 г/літр. Вхідні дані задачі візьмемо такими

$$n = 0.4, \; e = 0.7, \; \alpha = 0.5, \; \beta = 0.5,$$
$$a = 2{,}4 \cdot 10^{-4} \, і^{\,2}/ї \, , \; \rho_C = 2100 \; кг/м^3,$$
$$\rho_S = 2300 \; ёд/і^{\,3}, \; C_w = 160 \; г/л,$$
$$D_{C11} = D_{C22} = 0.08 м^2/доба,$$
$$D_{S11} = D_{S22} = 0.008 м^2/доба$$
$$K_{C11} = K_{C22} = 6 \cdot 10^{-7} м^2/кг \cdot доба,$$
$$K_{S11} = K_{S22} = 6 \cdot 10^{-8} м^2/кг \cdot доба,$$
$$K_{T11} = K_{T22} = 6 \cdot 10^{-8} \, і^{\,2}/С^0 \cdot ділдà,$$
$$\gamma_C = \gamma_S = 6.5 \cdot 10^{-5} \, ділдà^{-1},$$
$$\gamma = 1.1 \cdot 10^4 кг/(м^2 \cdot доба^2), \; c_T = 2137 кДж/м^3 \cdot град$$
$$c_p = 4{,}2 кДж/кг \cdot град,$$
$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 кДж/м \cdot град \cdot доба, \; T_0(x) = 4°C,$$
$$T_{опш} = 17 + 13\cos\left(\frac{\pi}{180}\right), \; C_0(x) = 8z/л,$$
$$S_0(x) = 0.1z/л, \; C_1(t) = 8z/л, \; S_1(t) = 0.1z/л,$$
$$H_1(t) = 20м, \; H_2(t) = 1і \, .$$

Розглянемо випадок, коли початковий розподіл напорів в тілі греблі зумовлюється власною вагою грунту. Тобто,

$$H_0(x, y) = y_\Gamma \frac{\gamma_\Gamma}{\gamma} + y \, ,$$

де y_Γ - вертикальна відстань від точки з координатами (x, y) до верхньої межі греблі (висота стовпа грунту прикладеного до даної точки); $\gamma_\Gamma = 1{,}95 \cdot 10^4 Па/м^3$ - питома вага грунту; γ - питома вага порового сольового розчину.

Значення температури на верхньому б'єфі береться з розрахунку, що там розміщена водойма охолоджувач АЕС [11]

Коефіцієнт фільтрації для чистої води рівний $K_h = 0.001 м/доба$. Для апроксимації залежності $K_h(C,T)$ використаємо метод РБФ з експериментальними даними, взятими з монографії [4]. Для апроксимації залежності $S_w(C,T)$ використаємо метод РБФ з експериментальними даними взятими з [8].

Процес досліджувався протягом 360діб, з кроком по часу 10 діб.

Були отримані значення температури, концентрації солі та гіпсу в твердій та рідкій фазі, та напорів, які на момент часу 350 діб відображені графічно (рис.2. - рис.4.).

Рис.5. демонструє, що сіль та гіпс здійснюють значний вплив на розподіл поля надлишкових напорів в тілі греблі (максимальна різниця напорів близько 4.77м). При наявності солі та гіпсу надлишкові напори розсіюються повільніше. Тому нехтувати наявністю хімічних елементів в поровій рідині не можна.

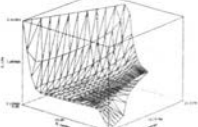


Рис.2. Розподіл концентрації гіпсу в рідкій фазі з врахуванням залежності $S_w = S_w(C,T)$

Kyiv National Taras Shevchenko University

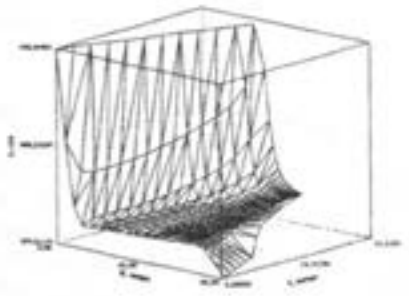


Рис.3. Розподіл концентрації гіпсу в твердій фазі з врахуванням залежності $S_m = S_m(C,T)$

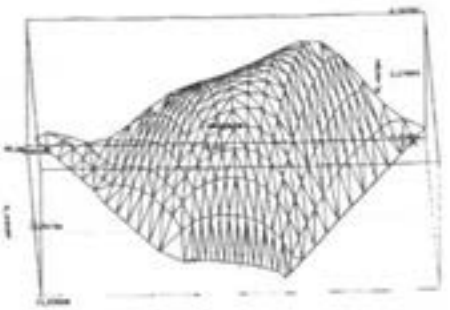


Рис.4. Різниця розподілу напорів з врахуванням наявності солі і гіпсу і без урахування

В таблицях 1 та 2 показано величину просідання верхньої межі грунту за рахунок зміни напорів і концентрації солей. "Н" – просідання за рахунок зміни напорів; "С+S" – просідання за рахунок зміни концентрації солі та гіпсу; "сума" – сумарне просідання. Причому знак "-" означає просідання, а "+" – набухання грунту.

Як видно з таблиці 1, при наявності солі та гіпсу відбувається сумарно більше просідання верхньої межі греблі, аніж у інших випадках. Також у випадку врахування впливу хімічних речовин напори в тілі греблі зростають і відбувається набухання (рядок "Н"). Але це набухання компенсується просіданням за рахунок хімічної суфозії. Урахування залежності $S_m = S_m(c,T)$ збільшує просідання верхньої межі грунту.

Дані таблиці 2 демонструють що через 5-ть років при $S_m = S_m(c,T)$ просідання за рахунок хімічної суфозії приблизно на 150% більші, аніж у випадку $S_m = const$. Отже, вказаними залежностями нехтувати не можна.

Таблиця 1

Просідання верхньої межі грунту в сантиметрах через 1-н рік.

x, м	35,88	40,58	42,94	47,64	50
З врахуванням солі і гіпсу ($S_m = S_m(c,T)$)					
Н	4,55	3,77	2,76	-0,69	-3,65
С+S	-21,05	-22,43	-22,82	-23,1	-23,19
сума	-16,5	-18,66	-20,06	-23,79	-26,84
З врахуванням солі і гіпсу ($S_m = const$)					
Н	4,72	3,92	2,9	-0,58	-3,56
С+S	-20,17	-21,6	-21,96	-22,24	-22,34
сума	-15,45	-17,68	-19,06	-22,82	-25,9
Без врахування солі і гіпсу					
Н	-4,28	-4,54	-5,11	-7,23	-8,95
С+S	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08
сума	-4,28	-4,47	-5,04	-7,15	-8,87

Таблиця 2

Просідання верхньої межі грунту в сантиметрах через 5-ть років.

x, м	35,88	40,58	42,94	47,64	50
З врахуванням солі і гіпсу ($S_m = S_m(c,T)$)					
Н	-9,83	-10,24	-11,2	-14,33	-15,87
С+S	-78,92	-81,28	-84,66	-95,98	-101,87
сума	-88,75	-91,52	-95,86	-110,31	-117,74
З врахуванням солі і гіпсу ($S_m = const$)					
Н	-8,56	-8,85	-9,73	-13,06	-14,76
С+S	-29,54	-35,53	-38,5	-45,06	-50,57
сума	-38,1	-44,38	-48,23	-58,12	-65,33

Висновки. В статті побудовано математичну модель двовимірної задачі консолідації тіла грунтової греблі з урахуванням впливу багатокомпонентного сольового розчину та неізотермічних умов. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено безсітковим методом, що базується на методі колокацій в точці з використанням в якості базисних радіальних функцій. Здійснено програмну реалізацію алгоритму. При проведенні та аналізі чисельних експериментів виявлено суттєвий вплив хімічної суфозії на процес просідання грунту та на розподіл надлишкових напорів. В подальшому плануються дослідження тривимірної задачі консолідації засолених та загіпсованих грунтів.

Список використаних джерел

1. Булавацький В.М. Системний підхід до проблеми математичного моделювання процесу фільтраційної консолідації / В.М. Булавацький, В.В. Скопецький // Кібернетика та системний аналіз. – 2006. – №6. С. 71-79.

Kyiv National Taras Shevchenko University

2. Веригин Н. Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н.Н.Веригин, В.С.Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонизительн. и дренаж. систем. – М. – 1980. – С. 19-24.
3. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А.П.Власюк, П.М.Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
4. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А.П.Власюк, П.М.Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
5. Джоші О.І. Експериментальні дослідження консолідації ґрунтів в умовах наявності градієнта концентрації сольового розчину / О.І. Джоші, О.В. Жеребятьєв // Вісник РДТУ. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Спецвипуск. – Рівне: 1999. - С. 195-199.
6. Дорджиев А.Г. Инженерно-геологические свойтсва карбонатосодержащих прочалочных грунтов Северо-Западного Прикаспия / А.Г. Дорджиев. – Элиста: ЗАОр «НПП «Джангар», – 2006. – 220 с.
7. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П.Л.Иванов. – М.: Высш. шк., 1991. – 447 с.
8. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л.Лукнер, В.М.Шестаков. – М.: Недра, 1986. – 208 с.
9. Мічута О.Р. Про одну задачу фільтраційної консолідації засолених ґрунтів із врахуванням впливу хімічної суфозії в неізотермічних умовах / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Тези XVII Міжнар. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – 2011. - С. 138-140.
10. Мічута О.Р. Математичне моделювання впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію засолених ґрунтів в неізотермічних умовах в двовимірному випадку / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2011. – Вип..4. - С. 169-175.
11. Мостова Н.М. Особливості температурного і кисневого режимів водойм в умовах теплового навантаження / Н.М. Мостова // Наук. праці УкрНДГМІ. – 2006. - Вип. 255. – С. 117-126.
12. Петрухин В.П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В.П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 120 с.
13. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир,2003. – 316 с.
14. Семенов М. П. Задачи изучения выщелачивания и растворения горных пород при проектировании гидротехнических сооружений / М. П. Семенов // Растворение и выщелачивание горных пород. – М.: Госстройиздат, 1957. – С. 6-10.
15. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.
16. Шахно С.М. Чисельні методи лінійної алгебри / С.М. Шахно. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. – 243 с.
17. Azimi G. Modelling of calcium sulphate solubility in concentrated multi-component sulphate solutions / G. Azimi, V.G. Parangelakis, J.E. Dutrizac // Fluid Phase Equilibria. – 2007. – 260. P. 300-315.
18. Yousif A. H. Gypseous soil improvement using fuel oil / A. H. Yousif // Engenharia Ambiental. – 2011. – V.8, №2. - P. 207-215.
19. Begdugo I. On the behaviour of the Ca-SO$_4$-H$_2$O system / I. Begdugo , E. Romero, M. Saaltink, M. Albis // Rev. Acad. Colomb. Cienc. – 2008. - 32(125).– P. 545-557.
20. Forster M. Use of event trees to estimate the probability of failure of embankment dams by internal erosion and piping / M. Forster, R. Fell // 20th Congres on Large Dams, Beijing. – 2000. – Pp.237-259.
21. Sbai M.A. A numerical Model for Miscible Displacement of Multi-Component Reactive Species / M.A. Sbai, M. Azaroual // 15th International Conference on Computational Methods in Water Resources, Chapel Hill, NC. – 2004. – Pp.237-259.
22. Three-dimensional model for multi-component reactive transport with variable density groundwater flow / X. Mao, H. Prommer, D.A. Barry, C.D. Langevin, B. Panteleit, L. Li // Environmental Modelling and Software. – 2006. – 21.-P. 615-628.

Надійшла до редколегії 15.05.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 004.42,510.649

Нікітченко* М. С., д. ф.-м. н., проф.,
Криволап А.В., аспірант.

Семантичні властивості монотонних логік Флойда-Хоара

В роботі визначаються монотонні логіки Флойда-Хоара на базі багатоосновних алгебр часткових квазіарних предикатів та програм. Для цієї цілі дається визначення спеціальної, монотонної композиції Флойда-Хоара. Доводиться що означена композиція є також неперервною. Будуються правила виводу в монотонних логіках, які отримуються з правил виводу логіки Флойда-Хоара за допомогою додавання до правил відповідних обмежень. Доводиться коректність системи правил виводу та необхідність додаткових обмежень, що накладаються на них.

Ключові слова: програмна логіка, часткові предикати, монотонність, композиційно-номінативний підхід.

*E-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

M.S. Nikitchenko*, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor, A.V. Kryvolap, PhD student.

Semantic properties of monotone Floyd-Hoare logics

Based on many-sorted algebras of partial quasiary predicates and programs monotone Floyd-Hoare logics are defined. For this purpose definition of special monotone Floyd-Hoare composition is given. Specified composition is proved to be also continuous. Rules of inference in monotone logic, which are obtained from rules of inference for Floyd-Hoare logic, are constructed. Their validity and the need of additional restrictions imposed on them are proved.

Key words: program logic, partial predicates, monotonicity, composition-nominative approach.

Вступ

Програмні логіки, прикладом яких є логіка Флойда-Хоара, є одними з основних засобів що використовуються для формального представлення програм та доведень тверджень про їх властивості. Якщо розглядати випадок використання часткових функцій та предикатів, то монотонність композицій відносно визначеності функцій та предикатів є однією з ключових властивостей програмних логік . Адже це є природнім, вимагати, щоб коли одна зі складових програми стає більш визначеною, то результат виконання програми на даних, на яких вона вже була попередньо визначена, не змінився. Це дозволяє поступово доводити коректність програми, довівши твердження для її частин, за допомогою чого довести твердження для програми як для композиції її частин, гарантуючи, що поведінка у вже розглянутих випадках не зміниться.

Проте звичайна логіка Флойда-Хоара [1,2] не є монотонною в вищезазначеному сенсі якщо її розширити на випадок часткових предикатів. Тому виникає потреба в модифікованому визначенні композиції Флойда-Хоара в цьому випадку таким чином, щоб вона мала бажані властивості. Саме це разом з побудовою логіки Флойда-Хоара для випадку часткових предикатів на основі запропонованого визначення є метою даної роботи.

Для того, щоб мати змогу використовувати означену монотонну логіку Флойда-Хоара, потрібно також описати систему правил виводу для неї, яка були б коректною та повною. Це відбувається за допомогою додавання деяких обмежень до правил виводу класичної логіки Флойда-Хоара. Для яких потрібно довести коректність для випадку монотонних логік. Для того, щоб показати необхідність введених обмежень, потрібно довести, що у випадку послаблення обмежень коректність правил виводу втрачається. Це покаже, що обмеження на правила виводу є найслабшими можливими і тому не можуть бути послаблені, якщо вимагається коректність системи правил виводу. Таким чином буде підтверджено необхідність обмежень.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [3,4,5].

© М.С. Нікітченко, А.В. Криволап, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Алгебри квазіарних функцій та предикатів

Для того, щоб говорити про відповідні алгебри, дамо спочатку визначення квазіарних функцій та предикатів разом з визначенням бікваліарних функцій. Для цього попередньо введемо поняття іменної множини.

Нехай V та A довільні множини, тоді V-іменною множиною будемо називати довільне функціональне бінарне відношення. Іншими словами множина V містить можливі імена змінних, множина A – значення, а st – визначає відповідність значень іменам. Таким чином V-іменну множину st можна вважати станом системи.

Множину всіх V-іменних множин над A будемо позначати ${}^{V}A$.

Квазіарним предикатом на A будемо називати довільну часткову функцію вигляду $p:{}^{V}A \to \{T,F\}$. Множину всіх квазіарних предикатів на A позначатимемо $Pr^{V,A}$.

Квазіарною функцією на A будемо називати довільну часткову функцію вигляду $f:{}^{V}A \to A$. Множину всіх квазіарних функцій на A позначатимемо $Fn^{V,A}$.

Бікваліарною функцією над A будемо називати довільну функцію вигляду $p:{}^{V}A \to {}^{V}A$. Множину всіх бікваліарних функцій над A позначатимемо $Prg^{V,A}$. В рамках даної роботи інтуїтивне та неформальне поняття програми над іменними даними замінимо чітким поняттям бікваліарної функції. Таким чином за аргументи композиції Флойда-Хоара для часткових квазіарних функцій та предикатів візьмемо два квазіарні предикати, як формальне подання передумови та післяумови; та бікваліарну функцію, як формальне представлення програми.

Визначивши відповідні множини, дамо стисле визначення логік трьох рівнів:

1) логіка чистих квазіарних предикатів, основана на алгебрі з однією основою: $Pr^{V,A}$;
2) квазіарна предикатно-функціональна логіка, основана на алгебрі з двома основами: $Pr^{V,A}$ та $Fn^{V,A}$;
3) квазіарна програмна логіка, основана на алгебрі з трьома основами: $Pr^{V,A}$, $Fn^{V,A}$, та $Prg^{V,A}$.

Для логік чистих квазіарних предикатів будемо розрізняти реноміативний, кванторний та кванторно-еквайційний рівні.

Реноміативні логіки є найбільш абстрактними серед всіх вищезазначених логік. Основною композицією для таких логік є композиція реномінації (перейменування) $R^{x_1,\dots,x_n}_{x_1,\dots,x_n}: Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$. Інтуїтивно для заданого квазіарного предиката P та іменної множини d значення $R^{x_1,\dots,x_n}_{x_1,\dots,x_n}(P)(d)$ обчислюється наступним чином: спочатку нова іменна множина d' утворюється з d змінюючи значення імен $v_1, \dots, v_n$ на значення імен $x_1,\dots, x_n$ відповідно; тоді предикат P застосовується до d'. Отримане значення (якщо воно може бути обчислено) буде результатом $R^{x_1,\dots,x_n}_{x_1,\dots,x_n}(P)(d)$. Основними композиціями реноміативних логік є $\vee$, $\neg$, та $R^{x_1,\dots,x_n}_{x_1,\dots,x_n}$.

На кванторному рівні всі базові значення можуть бути використані для того, щоб утворити нові іменні множини, до яких будуть застосовані квазіарні предикати. Це дозволяє ввести композицію квантифікації $\exists x$. Ця композиція означається в стилі звичайних кванторів в сильній логіці Клині, коли допускається частковість предикатів. Базові композиції логік кванторного рівня – це $\vee$, $\neg$, $R^{\bar{x}}_{\bar{y}}$, та $\exists x$.

На кванторно-еквайційному рівні виникають нові можливості для розрізнення значень за допомогою спеціальних нуль-арних композицій. Це так звані предикати рівності $=_{xy}$. Базовими композиціями логік кванторно-еквайційного рівня є $\vee$, $\neg$, $R^{\bar{x}}_{\bar{y}}$, $\exists x$, та $=_{xy}$.

Всі вищезазначені логіки (реноміативні, кванторні та кванторно-еквайційні) базуються на алгебрах з однією основою: класом квазіарних предикатів.

Для квазіарних предикатно-функціональних логік ми вводимо додатково функціональний та функціонально-еквайційний рівні.

На функціональному рівні ми розширюємо можливості формування нових аргументів для функцій та предикатів. В цьому випадку можна ввести композицію суперпозиції S^2 (дивись [4]). Також природно ввести спеціальні нуль-арні композиції деномінації 'x. Це дозволить моделювати композиції реномінації за

Kyiv National Taras Shevchenko University

допомогою суперпозиції. Базовими композиціями логік функціонального рівня є $\vee$, $\neg$, S^1, $\exists x$, та $'x$.

На функціонально-екваційному рівні вводиться додатково спеціальна композиція рівності = [4]. Базові композиції функціонально-екваційного рівня – це $\vee$, $\neg$, S^1, $\exists x$, $'x$, та =. На цьому рівні можуть бути визначені різні класи логік першого порядку.

Рівень програмних логік досить широкий. Під програмою, як вже було зазначено вище, будемо розуміти біквазіарну функцію, додаючи відповідну множину до основ алгебри. Після того визначимо програмні композиції, що відповідають основним конструкціям, які задають структуру програми. В найпростішому випадку це композиція присвоєння AS^x: $Fn^{V,A} \to Prg^{V,A}$, композиція послідовного виконання $\bullet$: $Prg^{V,A} \times Prg^{V,A} \to Prg^{V,A}$, умовна композиція IF: $Pr^{V,A} \times Prg^{V,A} \times Prg^{V,A} \to Prg^{V,A}$, композиція циклу WH: $Pr^{V,A} \times Prg^{V,A} \to Prg^{V,A}$. Окрім наведених композицій, ми масмо визначити ті, що описують властивості програм. В даній роботі потрібно лише зазначити композицію Флойда-Хоара FH, яка буде введена далі.

Отримана трьохосновна алгебра представлена на рис. 1.

Далі приведемо формули для обчислення основних композицій.

Суперпозиція визначається наступним чином:

$$(S^n(f, g_1, \dots, g_n))(st) = f(g_1(st), \dots, g_n(st))$$

Композиція присвоєння подається за допомогою функції накладання:

$$AS^x(fa)(st) = st\nabla[x \mapsto fa(st)]$$

Послідовне виконання визначається природнім чином:

$$fs_1 \bullet fs_2(st) = fs_2(fs_1(st))$$

Композиція умовного оператора залежить від значення першої функції, яка є власне умовою:

$$IF(fb, fs1, fs2)(st) = \begin{cases} fs1(st), & \text{якщо } fb(st) = true, \\ fs2(st), & \text{якщо } fb(st) = false. \end{cases}$$

Цикл визначається як $WH(fb, fs)(st) = st_n$, де $st_0 = st$, $st_1 = fs(st_0)$, …, $st_n = fs(st_{n-1})$, причому $fb(st_0) = true$, $fb(st_1) = true$, …, $fb(st_{n-1}) = true$, $fb(st_n) = false$

Композиція тотожна програма є найпростішою $id(st) = st$.

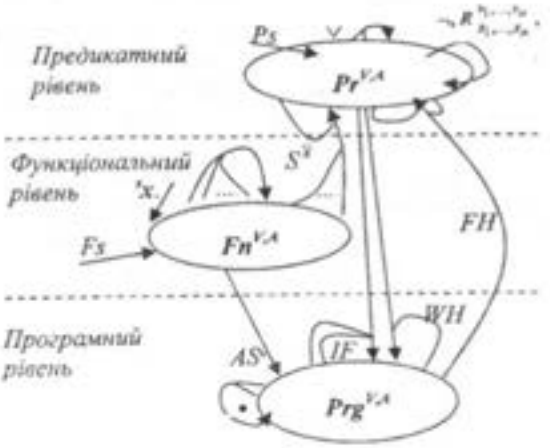


Рис. 1

Монотонність та неперервність композицій Флойда-Хоара

Для того, щоб показати, що композиція в класичній логіці Флойда-Хоара не є монотонною в сенсі визначеності у випадку часткових предикатів, введемо наступні позначення та визначення.

Областями істинності, хибності та невизначеності предиката P на D назвемо множини:

$$P^T = \{d \mid P(d) = T\}$$

$$P^F = \{d \mid P(d) = F\}$$

$$P^{\perp} = \{d \mid P(d) \uparrow\}$$

Дамо формальне визначення монотонної композиції.

Композиція $C : (Prg^{V,A})^n \times (Pr^{V,A})^m \to Pr^{V,A}$ називається монотонною, якщо виконується наступна умова

$$f_1 \subseteq g_1, \dots, f_n \subseteq g_n, p_1 \subseteq q_1, \dots, p_m \subseteq q_m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C(f_1, \dots, f_n, p_1, \dots, p_n) \subseteq C(g_1, \dots, g_n, q_1, \dots, q_n)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Розглянемо наступний приклад: $\{true\}WH(true,id)\{false\}$. Ця трійка Флойда-Хоара буде всюди істиною, так як нескінченний цикл не визначений на жодному даному і таким чином на кожному даному виконується умова істинності композиції Флойда-Хоара, за якою істинність передумови вимагає щоб післяумова була істина лише якщо програма завершує свою роботу на таких вхідних даних. Крім того маємо, що $WH(true,id) \subseteq id$, так як нескінченний цикл всюди невизначений. Тепер розглянемо трійку $\{true\}id\{false\}$, яка є всюди хибний предикат. Таким чином при збільшенні визначеності біквазіарної функції (тобто в інтуїтивному розумінні програми), що входить до композиції Флойда-Хоара, змінюється істинність результуючого предикату на всіх даних. Щоб уникнути таких ситуацій, потрібно ввести спеціальні, монотонні логіки Флойда-Хоара, композиція в яких мала б потрібні властивості.

Далі під істинністю предиката будемо розуміти його неспростовність, тобто $\models P \Leftrightarrow P^F = \varnothing$.

Побудова монотонних логік Флойда-Хоара має відбуватись за наступними принципами:

1. Часткової. Всі функції, предикати та біквазіарні функції часткові.
2. Монотонності. Композиція монотонна за всіма аргументами.
3. Принцип максимальної можливої визначеності за істиною та хибою (принцип Кліні).

Для того, щоб визначити композицію Флойда-Хоара, введемо наступні позначення:

$$Q^{-T,f} = f^{-1}[Q^T]$$

$$Q^{-F,f} = f^{-1}[Q^F]$$

$$Q^{-\perp,f} = f^{-1}[Q^\perp]$$

$$P^{T,f} = f[P^T]$$

$$P^{F,f} = f[P^F]$$

$$P^{\perp,f} = f[P^\perp]$$

Твердженням часткової коректності будемо називати наступну трійку: $\{P\}f\{Q\}$, де P, Q часткові предикати над номінативними даними, а f – часткова біквазіарна функція.

Композиція Флойда-Хоара має наступний тип: $FH : Pr^{V,A} \times Prg^{V,A} \times Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$. І композиції $FH(P,f,Q)$ будемо ставити у відповідність твердження часткової коректності $\{P\}f\{Q\}$.

Означимо композицію, описавши області істинності та хибності предиката, що є її значеннями.

$$FH(P,f,Q)^T = P^F \cup Q^{-F,f}$$

$$FH(P,f,Q)^F = P^T \cap Q^{-F,f}$$

Тоді $\models FH(P,f,Q) \Leftrightarrow P^T \cap Q^{-F,f} = \varnothing$

Твердження часткової коректності будемо називати істинним, позначається $\models \{P\}f\{Q\}$, якщо відповідна композиція Флойда-Хоара істина (неспростовна).

Теорема 1. Композиція Флойда-Хоара монотонна за всіма аргументами.

Доведемо окремо монотонність за кожним компонентом, розглядаючи області істинності та хибності. З монотонності за кожним компонентом випливатиме монотонність за всіма в сукупності.

Для області істинності передумови маємо: $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow P_1^T \subseteq P_2^T \Rightarrow P_1^T \cap Q^{-F,f} \subseteq P_2^T \cap Q^{-F,f} \Rightarrow FH(P_1,f,Q)^F \subseteq FH(P_2,f,Q)^F$

Аналогічно для області хибності передумови маємо: $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow P_1^F \subseteq P_2^F \Rightarrow P_1^F \cup Q^{-T,f} \subseteq P_2^F \cup Q^{-T,f} \Rightarrow FH(P_1,f,Q)^T \subseteq FH(P_2,f,Q)^T$

Отже маємо $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow FH(P_1,f,Q) \subseteq FH(P_2,f,Q)$

У випадку області хибності післяумови доведення проводиться аналогічно: $Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow Q_1^F \subseteq Q_2^F \Rightarrow Q_1^{-F,f} \subseteq Q_2^{-F,f} \Rightarrow P^T \cap Q_1^{-F,f} \subseteq P^T \cap Q_2^{-F,f} \Rightarrow FH(P,f,Q_1)^F \subseteq FH(P,f,Q_2)^F$

Аналогічно для області істинності післяумови: $Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow Q_1^T \subseteq Q_2^T \Rightarrow Q_1^{-T,f} \subseteq Q_2^{-T,f} \Rightarrow P^F \cup Q_1^{-T,f} \subseteq P^F \cup Q_2^{-T,f} \Rightarrow FH(P,f,Q_1)^T \subseteq FH(P,f,Q_2)^T$

Отже $Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow FH(P,f,Q_1) \subseteq FH(P,f,Q_2)$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Покажемо, що з включення програм випливає включення областей хибності композиції: $f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow Q^{-F,f_1} \subseteq Q^{-F,f_2} \Rightarrow P^T \cap Q^{-F,f_1} \subseteq P^T \cap Q^{-F,f_2} \Rightarrow FH(P,f_1,Q)^F \subseteq FH(P,f_2,Q)^F$

Аналогічно покажемо включення областей істинності: $f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow Q^{-T,f_1} \subseteq Q^{-T,f_2} \Rightarrow P^F \cup Q^{-T,f_1} \subseteq P^F \cup Q^{-T,f_2} \Rightarrow FH(P,f_1,Q)^T \subseteq FH(P,f_2,Q)^T$

Отже $f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow FH(P,f_1,Q) \subseteq FH(P,f_2,Q)$

Таким чином було показано, що композиція монотонна за кожним компонентом, що й треба було довести.

Для наведеної композиції виконується сильніший результат – вона є неперервною. Для того щоб це показати введемо наступні позначення та визначимо, яку композицію будемо називати неперервною.

Ланцюгом функцій (предикатів) будемо називати наступну нескінченну множину індексованих функцій (предикатів) $\{f_0, f_1, \ldots\}, f_i \subseteq f_{i+1}, i \in \omega$.

Границею ланцюга функцій (предикатів) називатимемо супремум відповідної множини, будемо її позначати $\coprod_i f_i$.

Композиція $C : (Prg^{V,A})^n \times (Pr^{V,A})^m \to Pr^{V,A}$ називається неперервною за першим аргументом, якщо для довільного ланцюга $\{f_i \mid i \in \omega\}$

$$C(\coprod_i f_i, g_2, \ldots, g_n, p_1, \ldots, p_m) = \coprod_i C(f_i, g_2, \ldots, g_n, p_1, \ldots, p_m)$$

Аналогічним чином визначається неперервність за іншими аргументами.

Теорема 2. Композиція Флойда-Хоара є неперервною за кожним компонентом.

Проведемо доведення неперервності за першим аргументом. У випадку інших аргументів доведення аналогічне.

Розглянемо ланцюг предикатів $\{p_i \mid i \in \omega\}$. Так як композиція Флойда-Хоара є монотонною, то $\{FH(p_i,f,q) \mid i \in \omega\}$ також буде ланцюгом. Потрібно показати, що $FH(\coprod_i p_i,f,q) = \coprod_i FH(p_i,f,q)$.

Візьмемо довільне дане d, можливі два варіанти – $\coprod_i p_i(d)\uparrow$ та $\coprod_i p_i(d)\downarrow$. В першому випадку жоден з елементів ланцюга не є визначеним на d. І отже $\forall j \in \omega, FH(\coprod_i p_i,f,q)(d) = FH(p_j,f,q)(d)$, звідки напряму випливає рівність границі ланцюга композицій на цьому даному. Якщо ж границя визначена на даному, то можна знайти елемент ланцюга предикатів, який на цьому даному також визначений, інакше границя на ньому також була б невизначеною, це гарантує відношення включення на елементах ланцюга. Нехай це буде елемент з номером k. Тоді ми маємо, що $FH(\coprod_i p_i,f,q)(d) = FH(p_k,f,q)(d)$ та $FH(p_k,f,q)(d) = \coprod_i FH(p_i,f,q)(d)$, тому що $\forall i > k, p_i(d) = p_k(d)$ з визначення ланцюга.

Таким чином отримуємо $FH(\coprod_i p_i,f,q)(d) = \coprod_i FH(p_i,f,q)(d)$. Так як дане було обрано довільним чином, то отримуємо $FH(\coprod_i p_i,f,q) = \coprod_i FH(p_i,f,q)$, що і треба було довести.

Доведення для програми та післяумови проводиться аналогічно. Таким чином доведено, що монотонна композиція Флойда-Хоара є також неперервною за кожним аргументом.

Система правил виводу

В зв'язку з тим, що результат композиції Флойда-Хоара тепер може бути невизначеним на деяких даних, класичні правила виводу [6] можуть не бути коректними. Це відбувається через те, що предикати тепер можуть бути частковими і композиція, для того щоб бути монотонною, визначена інакше ніж класична композиція Флойда-Хоара. Для того, щоб правила можна було використовувати в модифікованій логіці, потрібно додати до більшості правил додаткові умови, які б не дозволяли використання правил в особливих випадках, що виникають при переході від класичної логіки Флойда-Хоара до монотонної логіки Флойда-Хоара для часткових квазіарних предикатів. Таким чином, виключивши особливі випадки, які виникли, ми можемо гарантувати, що система правил залишиться коректною.

Побудуємо аксіоматичну систему виведення для тверджень часткової коректності наступним чином:

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\{S^{[x]}(P,f)\}AS^x(f)\{P\} - Ax_AS$$

$$\{P\}id\{P\} - Ax_ID$$

$$\frac{\{P\}f\{Q\},\{Q\}g\{R\}}{\{P\}f\bullet g\{R\}},P^{T,f}\subseteq Q^T \quad - Ax_SEQ$$

$$\frac{\{b\wedge P\}f\{Q\},\{\neg b\wedge P\}g\{Q\}}{\{P\}IF(b,f,g)\{Q\}} - Ax_IF$$

$$\frac{\{b\wedge P\}f\{P\}}{\{P\}WH(b,f)\{\neg b\wedge P\}}(b\wedge P)^{T,f}\subseteq P^T - Ax_WH$$

$$\frac{\{P'\}f\{Q'\}}{\{P\}f\{Q\}},P^T\subseteq P'^T,Q^F\subseteq Q'^F - Ax_CONS$$

Будемо казати, що твердження часткової коректності вивідне, якщо існує його вивід, який закінчується композиціями вигляду *Ax_AS*, *Ax_ID*. Позначається $\vdash \{P\}f\{Q\}$

Покажемо, що додані умови є необхідними та не є надлишковими. Для цього продемонструємо, що за умови порушення додаткових обмежень можна навести такий приклад застосування правила виводу, в якому засновки істинні, а висновки хибні.

$$\frac{\{P\}f\{Q\},\{Q\}g\{R\}}{\{P\}f\bullet g\{R\}},P^{T,f}\subseteq Q^T$$

Нехай додаткова умова не виконується і $\exists P,Q,f,d: P(d)=T, Q(f(d))\uparrow, \models \{P\}f\{Q\}$ тоді візьмемо R та g такі, що $\models \{Q\}g\{R\}$ та $g(f(d))\downarrow, R(g(f(d)))=F$. Це можливо, якщо визначити їх наступним чином:

$$g=id,\ R(x)=\begin{cases}T, x\neq d\\ F, x=d\end{cases}.$$

Тоді $\models \{P\}f\bullet g\{R\}$ порушується, бо $P(d)=T$ та $R(f\bullet g(d))=F$, що рівносильне $\{d\}\subseteq P^T\cap R^{-F,f\bullet g}$.

$$\frac{\{b\wedge P\}f\{P\}}{\{P\}WH(b,f)\{\neg b\wedge P\}}(b\wedge P)^{T,f}\subseteq P^T$$

Побудуємо такі b, f, P, що виконуються наступні умови:

$$\models \{b\wedge P\}f\{P\},(b\wedge P)^{T,f}\not\subset P^T,$$

$$\not\models \{P\}WH(b,f)\{\neg b\wedge P\}$$

$$b(x)=\begin{cases}T, x\neq d_3\\ F, x=d_3\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases}x, x\neq d_1,d_2\\ d_2, x=d_1\\ d_3, x=d_2\end{cases},$$

$$P(x)=\begin{cases}T, x\neq d_2,d_3\\ \uparrow, x=d_2\\ F, x=d_3\end{cases}.$$

Неважко перевірити, що це задовольняє наведеним вище властивостям.

$$d_2\in(b\wedge P)^{T,f},d_2\notin P^T.$$

Для цього візьмемо $d_1\neq d_2\neq d_3$. Визначимо b, f, P наступним чином:

$$d_1\in P^T, d_3=WH(b,f)(d_1),$$

$$d_3\in(\neg b\wedge P)^F\Rightarrow d_1\in(\neg b\wedge P)^{\neg F,WH(b,f)}$$

$$d_1\in(b\wedge P)^T, d_2\in P^\perp, d_3\in P^F$$

Звідки $\models \{b\wedge P\}f\{P\}$, бо у всіх інших точках, P дає істину.

Отже додаткова умова є необхідною, бо інакше на таких прикладах правило не є коректним.

Випадок з правилом *Ax_CONS* є аналогічним попереднім.

Коректність правил виводу

В попередньому розділі було показано, що додаткові умови не є надлишковими, залишається лише довести, що отримана система правил виводу є коректною.

Теорема 3. Побудована система правил виводу коректна, тобто $\vdash \{P\}f\{Q\}\Rightarrow\models \{P\}f\{Q\}$.

Доведемо коректність за допомогою індукції за довжиною виводу.

База індукції – це правила *Ax_AS* та *Ax_ID*. Потрібно показати, що $\models \{S^{[x]}(P,f)\}AS^x(f)\{P\}$ та $\models \{P\}id\{P\}$.

Для того, щоб виконувалось

Kyiv National Taras Shevchenko University

$\models \{S^{[x]}(P,f)\}AS^x(f)\{P\}$ потрібно, щоб задовольнялась наступна умова:

$$FH(S^{[x]}(P,f),AS^x(f),P)^F = (S^{[x]}(P,f))^T \cap P^{-F,AS^x(f)} = \varnothing$$

Припустимо, що це не так і перетин не порожній, нехай деяке дане d належить перетину.

Якщо $d \in (S^{[x]}(P,f))^T$, то $P(d\nabla[x \mapsto f(d)]) = T$.

Нехай $d \in P^{-F,AS^x(f)}$, тоді $P(AS^x(f)(d)) = P(d\nabla[x \mapsto f(d)]) = F$, що неможливо, отже припущення невірне і $(S^{[x]}(P,f))^T \cap P^{-F,AS^x(f)} = \varnothing$, аналогічно $(S^{[x]}(P,f))^{T,AS^x(f)} \cap P^{\perp} = \varnothing$, що означає $\models \{S^{[x]}(P,f)\}AS^x(f)\{P\}$

$\models \{P\}id\{P\}$ слідує з визначення.

Кроком індукції є доведення того, що правила *Ax_SEQ*, *Ax_IF*, *Ax_WH*, *Ax_CONS* застосовані до істинних засновків дають істині висновки.

$$\frac{\{P\}f\{Q\},\{Q\}g\{R\}}{\{P\}f \bullet g\{R\}}, P^{T,f} \subseteq Q^T.$$

За припущенням індукції ми маємо $\models \{P\}f\{Q\}, \models \{Q\}g\{R\}$, що означає:

$$P^T \cap Q^{-F,f} = \varnothing; Q^T \cap R^{-F,g} = \varnothing$$

Потрібно показати, що $P^T \cap R^{-F,f \bullet g} = \varnothing$

Нехай це не так і $\exists d : d \in P^T \wedge d \in R^{-F,f \bullet g}$. Це означає, що $P(d) = T \wedge R(f \bullet g(d)) = F$.

Але з додаткової умови $P^{T,f} \subseteq Q^T$, отже $Q(f(d)) = T$. Таким чином $f(d) \in Q^T$, тому $f(d) \notin R^{-F,g}$, що суперечить тому факту, що $R(f \bullet g(d)) = F \Rightarrow f \bullet g(d) \in R^F \Rightarrow f(d) \in R^{-F,g}$

Прийшли до протиріччя, тому припущення невірне і $P^T \cap R^{-F,f \bullet g} = \varnothing$.

Тому $\models \{P\}f \bullet g\{R\}$

$$\frac{\{b \wedge P\}f\{Q\},\{\neg b \wedge P\}g\{Q\}}{\{P\}IF(b,f,g)\{Q\}}$$

За припущенням індукції маємо $\models \{b \wedge P\}f\{Q\}, \models \{\neg b \wedge P\}g\{Q\}$, що означає:

$$(b \wedge P)^T \cap Q^{-F,f} = \varnothing; (\neg b \wedge P)^T \cap Q^{-F,g} = \varnothing$$

Потрібно показати, що $P^T \cap Q^{-F,IF(b,f,g)} = \varnothing$

Нехай $\exists d : d \in P^T \wedge d \in Q^{-F,IF(b,f,g)}$. Тоді $P(d) = T, Q(IF(b,f,g)(d)) = F$.

Розглянемо різні варіанти відносно $b(d)$:

$b(d)\downarrow$ – неможливо тому, що тоді $IF(b,f,g)(d)\downarrow$ призводить до протиріччя з припущенням щодо існування такого d.

$b(d) = T \Rightarrow IF(b,f,g)(d) = f(d) \wedge d \in (b \wedge P)^T \wedge IF(b,f,g)(d) \in (b \wedge P)^{T,f}$.

Додавши властивості верхньої частини правила виведення, маємо:

$$(b \wedge P)^T \cap Q^{-F,f} = \varnothing \wedge IF(b,f,g)(d) = f(d) \wedge d \in (b \wedge P)^T \Rightarrow d \notin Q^{-F,IF(b,f,g)}$$

$b(d) = F$ – аналогічно випадку $b(d) = T$.

$$(\neg b \wedge P)^T \cap Q^{-F,g} = \varnothing \wedge IF(b,f,g)(d) = g(d) \wedge d \in (\neg b \wedge P)^T \Rightarrow d \notin Q^{-F,IF(b,f,g)}$$

Таким чином $d \notin Q^{-F,IF(b,f,g)}$ в будь-якому випадку. якщо d визначено, що гарантується припущенням . Прийшли до протиріччя, отже припущення невірне і $P^T \cap Q^{-F,IF(b,f,g)} = \varnothing$

Таким чином маємо $\models \{P\}IF(b,f,g)\{Q\}$

$$\frac{\{b \wedge P\}f\{P\}}{\{P\}WH(b,f)\{\neg b \wedge P\}} (b \wedge P)^{T,f} \subseteq P^T$$

За припущенням індукції ми маємо $\models \{b \wedge P\}f\{P\}$, що означає:

$$(b \wedge P)^T \cap P^{-F,f} = \varnothing$$

Потрібно показати, що виконується $P^T \cap (\neg b \wedge P)^{-F,WH(b,f)} = \varnothing$

Нехай $\exists d : d \in P^T \wedge d \in (\neg b \wedge P)^{-F,WH(b,f)}$. Тоді $\exists d_* : d_* = WH(b,f)(d)$, і з визначення композиції маємо $\exists d_1, d_2, \ldots d_*$: $d = d_1 \wedge d_{i+1} = f(d_i)$, $i = \overline{1,n-1} \wedge b(d_j) = T$, $j = \overline{1,n-1} \wedge P(d_1) = T \wedge b(d_*) = F$ та $(\neg b \wedge P)(d_*) = F$.

Таким чином, $(b \wedge P)(d_1) = T$. З умов $(b \wedge P)^{T,f} \subseteq P^T$ отримуємо, що $P(d_2) = P(f(d_1)) = T$.

Застосовуючи індукцію за станами отримуємо, що $P(d_*) = T$. Таким чином $(\neg b \wedge P)(d_*) = T$. Отже маємо протиріччя і тому $P^T \cap (\neg b \wedge P)^{-F,WH(b,f)} = \varnothing$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\frac{\{P'\}f\{Q'\}}{\{P\}f\{Q\}}, P^T \subseteq P'^T, Q^F \subseteq Q'^F$$

За припущенням індукції ми маємо $\models \{P'\}f\{Q'\}$, що означає:

$$P'^T \cap Q'^{-F,f} = \varnothing$$

Потрібно показати, що $P^T \cap Q^{-F,f} = \varnothing$

Нехай це не так і $\exists d : d \in P^T \wedge d \in Q^{-F,f}$. Це означає, що $P(d) = T \wedge Q(f(d)) = F$.

З умови, що $P^T \subseteq P'^T$ отримуємо $P'(d) = T$.

Але $P'^T \cap Q'^{-F,f} = \varnothing$, отже $d \notin Q'^{-F,f}$, так як $d \in Q^{-F,f}$, то $f(d)\downarrow$, маємо $Q'(f(d)) \neq F$.

Прийшли до протиріччя, тому припущення невірне і $P^T \cap Q^{-F,f} = \varnothing$.

Обидві умови доведено, тому $\models \{P\}f\{Q\}$

Отже, всі правила розглянуто і таким чином доведено крок індукції, а отже система є коректною.

Отриманий результат дозволяє застосовувати наведену систему правил виводу з обмеження у випадку використання монотонної логіки Флойда-Хоара над частковими квазіарними предикатами.

Висновки

В роботі було визначено монотонну логіку Флойда-Хоара для випадку часткових квазіарних предикатів. Описано модифіковану композицію Флойда-Хоара, яка є не лише монотонною, але й неперервною. Побудовано систему правил виводу з додатковими умовами, яка для випадку часткових предикатів має властивості аналогічні системі правил виводу класичної логіки Флойда-Хоара. Доведено необхідність, тобто відсутність надлишковості, додаткових умов правил виводу. Доведено, що отримана система правил виводу є також коректною і може бути використана на практиці для доведення коректності програм, властивості яких задано частковими предикатами. Наступним кроком буде доведення повноти та пошук більш спрощеного подання обмежень. Таким чином було розширено область використання однієї з основних програмних логік, тобто логіки Флойда-Хоара, на випадок часткових квазіарних предикатів, які дозволяють більш адекватно описувати програми написані на сучасних мовах програмування.

Список використаних джерел

1. *C.A.R. Hoare* An axiomatic basis for computer programming/ C.A.R. Hoare // Communications of the ACM. – 1969 . – №12 – pp. 576-580,583.
2. *R.W. Floyd* Assigning meanings to programs / R.W. Floyd // Proceedings of the American Mathematical Society Symposia on Applied Mathematics. – 1967. – Vol. 19 – pp. 19–31
3. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С. Никитченко // Пробл. программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
4. *Нікітченко М.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
5. *Нікітченко М.С.* Теорія програмування. Частина 1: [навчальний посібник]. – Ніжин: Видавництво НДУ імені Миколи Гоголя, 2010. – 129 с.
6. *H. Riis Nielson, F. Nielson,* Semantics with applications: an appetizer, Springer, 2007. – 274 p.

Надійшла до редколегії 28.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 004.655

Поляков С.А.[1], к. ф.-м. н., м.н.с.,
Сільвейструк Л.М.[2], к. ф.-м. н., н.с.,
Шишацька О.В.[3], інж.

Класифікація моделей даних

Метою статті є класифікація та огляд моделей даних, спираючись на єдиний концептуальний базис – колекції та відношення на колекціях. Побудовані реляційні дерева, які є композицією бінарних зв'язків.

Ключові слова: модель даних, колекція, мультимножина, реляційне дерево.

S.A. Polyakov, PhD,
L.M. Silveistruk, PhD,
O.V. Shyshats'ka, engineer.

Classification of data models

The purpose of the article is classification and review of data models using collections and relations on the collections. Relational trees has been constructed which are the composition of binary relations.

Key words: data model, collection, multiset,bag relational tree.

E-mail: [1]polyakov@unicyb.kiev.ua, [2]slm-klm@ukr.net, [3] olena74@i.ua
Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Модель даних відноситься до фундаментальних понять в теорії баз даних. Це поняття згадувалось ще в революційній статті Е. Кодда, присвяченій реляційним базам даних [1], але без деталізації. Пізніше Кодд розглянув це поняття більш детально в статті "Моделі даних в керуванні базами даних" в 1981 р. [2]. Згідно з визначенням Кодда модель даних складається з трьох компонентів:

- сукупність типів об'єктів даних, що утворюють базові будівні блоки для будь-якої бази даних, яка відповідає моделі;
- сукупність загальних правил цілісності, що обмежують множину екземплярів тих типів об'єктів, які на законній підставі можуть з'явитись в будь-якій базі даних, яка відповідає моделі;
- сукупність операцій, які застосовуються к екземплярам об'єктів для вибірки елементів та інших дій.

Ці компоненти не є взаємно незалежними. Сукупність правил цілісності та операцій багато в чому залежить від типів об'єктів даних. Таким чином, перший компонент відіграє центральну роль в моделях даних. Інші два компонента є підпорядкованими і можуть навіть не включатись в поняття моделі даних. Наприклад в підручнику А.С.Маркова [3] модель даних визначається як трійка $\{D, R, A\}$, де

D – задана множина (носій структури);

R – скінченна сукупність відносин, в яких знаходяться елементи множини;

A – обмежувальні умови, які накладаються на відносини (аксіоми структури).

Тобто D та R складають перший компонент із визначення Кодда, а A є другим компонентом – обмеженнями цілісності. В той же час Дж. Мартин в своїй монографії [4] відносить до моделі даних лише сукупність даних та зв'язків між ними. Зв'язки відіграють важливу роль в моделі даних; і хоча в визначенні Кодда вони явним чином не вказані, в інших визначеннях зв'язки, як правило, фігурують як окрема сутність. Так Дж. Мартин відзначає: "Если бы назначением базы данных было только хранение данных, то структура ее была бы простой. Причина же в ее сложности объясняется тем, что она должна обеспечивать еще и связи между различными элементами данных" [4, с. 68].

Далі модель даних буде задаватися через

- тип атомарних даних та тип колекцій даних;
- тип допустимих зв'язків на колекціях даних;
- множину операцій.

Множина операцій є необов'язковим компонентом і може бути відсутня для деяких моделей даних.

Колекції

Відмітимо, що потрібно розрізняти терміни "модель даних" і "модель бази даних". Останній задає множину допустимих станів якоїсь конкретної бази даних, в той час як перший задає множину всіх допустимих моделей баз даних.

Дані об'єднуються в рядки. Кожний рядок може розглядатися як множина пар (ім'я, значення) або як функція, яка відображає

© С.А. Поляков, Л.М. Сільвейструк, О.В. Шишацька, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

множину імен в множину значень. Рядок є аналогом поняття структури або запису в мовах програмування. В той же час, на відміну від цих понять, він не вимагає порядку на атрибутах (іменах). Тобто два рядка дорівнюють один одному, якщо для кожного атрибуту одного рядка існує атрибут з таким самим ім'ям в іншому рядку, значення яких співпадають, і навпаки. Два рядка будемо називати однотипними, якщо множини їх атрибутів співпадають.

Однотипні рядки групуються у множини, мультимножини та послідовності [5]. Для узагальненої назви таких сукупностей будемо використовувати термін "колекція". Тобто колекція відіграє роль метатипу, значеннями або спеціалізаціями якого виступають множини, мультимножини та послідовності. Слід відмітити, що на сьогодні не існує загальноприйнятого набору типів, які включаються до колекції. Так, іноді до колекції можуть входити списки, множини, мультимножини, асоціативні масиви, дерева, графи або множини, класи, сім'ї та мультимножини [6].

Зв'язки

Перейдемо до зв'язків між колекціями. Зв'язки будуть задаватися за допомогою відношень. Для множин відношення розуміються в стандартному сенсі як підмножини декартового добутку множин.

Для послідовностей та мультимножин такий спосіб не підходить внаслідок наявності дублікатів. Наприклад, нехай є дві мультимножини $\{a,a\}$ та $\{b,b\}$. Тоді їх декартовим з'єднанням буде мультимножина $\{(a,b),(a,b),(a,b),(a,b)\}$ (для мультимножин операція, аналогічна декартовому добутку, називається декартовим з'єднанням ([7]; розділ 2)). В ній відсутня інформація про те, які саме екземпляри елементів a та b входять до декартового з'єднання. Тому відношення, яке складається з першого екземпляру елемента a і першого екземпляру елемента b, виглядає так само, як і відношення, яке складається з другого екземпляру елемента a і другого екземпляру елемента b, а саме $\{(a,b)\}$. Як буде показано нижче, ця інформація є важливою при маніпулюванні з відношеннями. Така ж сама ситуація має місце і для послідовностей.

Введемо операцію розширеного декартового з'єднання. Для наведених вище мультимножин, розширеним декартовим з'єднанням буде множина вигляду $\{((a,1),(b,1)),((a,1),(b,2)),((a,2),(b,1)),((a,2),(b,2))\}$, другий компонент елементів якої враховує, який саме екземпляр входить до елементів з'єднання. Тоді відношення, яке складається з першого екземпляру елемента a і першого екземпляру елемента b, задасться як $\{((a,1),(b,1))\}$, а відношення, яке складається з другого екземпляру елемента a і другого екземпляру елемента b задається як $\{((a,2),(b,2))\}$. Для послідовностей будемо враховувати місце (позицію), яке займає елемент в послідовності. Наприклад для послідовностей (a,b,a) і (c) розширене декартове з'єднання $\{((a,1),(c,1)),((b,2),(c,1)),((a,3),(c,1))\}$ означає, що в парі $((a,1),(c,1))$ елемент a знаходиться на першій позиції у вихідній послідовності, а в парі $((a,3),(c,1))$ елемент a знаходиться на третій позиції у вихідній множині. На перший погляд може здатися, що не має значення, який саме екземпляр елемента мультимножини використовується, або з якої позиції у вихідній послідовності він береться. Насправді, це може не мати значення, коли колекція використовується тільки в одному відношенні. Якщо ж деяка колекція бере участь у кількох відношеннях, то вміння розрізняти окремі екземпляри одного і того ж елементу має принципове значення. Наприклад, нехай є мультимножина $\{a,a,b,c\}$, на якій задані відношення $\{((b,1),(a,1)),((a,1)(c,1))\}$ та $\{((b,1),(a,1)),((a,2)(c,1))\}$. В транзитивному замиканні першого відношення з'явиться новий елемент $((b,1),(c,1))$, в той час як в транзитивному замиканні другого відношення цей елемент буде відсутній, див. рис. 1.

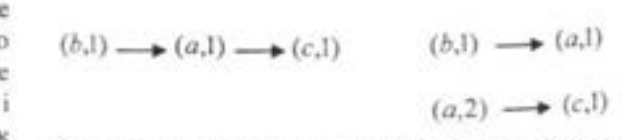


Рис. 1. Приклад відношень на мультимножинах

Відмітимо, що в реляційних базах даних однакові екземпляри рядків в таблицях відрізняються один від одного. Для цього, можуть використовуватись спеціальні унікальні ідентифікатори рядків. Наприклад в Oracle в якості такого ідентифікатора виступає спеціальний псевдоатрибут rowid.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Перейдемо до зв'язків, під якими будемо розуміти відношення з накладеними на них обмеженнями спеціального виду. Зв'язок виду 1–1 (один до одного) є бінарним відношенням на колекціях A та B, для якого кожний елемент колекції A находиться у відношенні рівно з одним елементом колекції B та навпаки. Таке відношення задає біекцію між A та B.

Зв'язок виду $1-m$ (один до багатьох) є бінарним відношенням на колекціях A та B, для якого кожний елемент колекції A знаходиться у відношенні з одним та більше елементами колекції B (але кількість таких елементів скінченна), а кожний елемент колекції B знаходиться у відношенні рівно з одним елементом колекції A (точніше говорячи, встановлюється зв'язок виду $1-m$ на коллекціях A та B в напрямку від A до B). Такий зв'язок задає сюр'єктивну функцію, яка відображає B на A.

Зв'язок виду $1-0..m$ є бінарним відношенням на колекціях A та B, для якого кожний елемент колекції A знаходиться у відношенні з довільною (скінченною) кількістю елементів колекції B, в тому числі нульовою, а кожний елемент колекції B знаходиться у відношенні рівно з одним елементом колекції A. Такий зв'язок задає функцію, яка відображає B в A та, взагалі кажучи, не є сюр'єкцією.

Зв'язок виду $0..1-0..m$ є бінарним відношенням на колекціях A та B, для якого кожний елемент колекції A знаходиться у відношенні з довільною (скінченною) кількістю елементів колекції B, в тому числі нульовою, а кожний елемент колекції B знаходиться у відношенні не більш ніж з одним елементом колекції A. Такий зв'язок задає часткову функцію, яка відображає B в A.

Поряд з бінарними зв'язками, будуть використовуватись і n-арні зв'язки виду один до багатьох, $n=3,4,\ldots$. Під n-арним зв'язком виду один до багатьох, будемо розуміти множину $n-1$ бінарних відношень виду один до багатьох $\{C_0R_1C_1, C_0R_2C_2, \ldots, C_0R_{n-1}C_{n-1}\}$, в яких колекція C_0 однакова для всіх зв'язків (зазначимо, що моделювання n-арного зв'язку $n-1$ бінарними зв'язками основане на очевидному ін'єктивному відображенні $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto ((a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots, (a_1, a_n))$). В статті R, R_1, R_2 позначають бінарні відношення.

Насправді існує набагато більше видів зв'язків (дивись, наприклад, [8]). Тут розглянуті лише ті види, які будуть використовуватись для характеристики моделей даних. Поняття зв'язку дуже близько до поняття відношення, складається враження, що використання двох різних термінів зумовлене скоріше історичними причинами ніж об'єктивною необхідністю. В подальшому ці терміни іноді будуть використовуватися як синоніми.

Реляційні дерева

Для характеристики моделей даних потрібно буде розглядати не окремі бінарні відношення, а сукупності таких відношень, які утворюють так звані дерева відношень (або реляційні дерева). Поняття реляційного дерева введемо індуктивним чином.

Бінарне відношення виду один до одного або один до багатьох C_1RC_2 є реляційним деревом з коренем C_1RC_2 та кореневою колекцією C_1.

Якщо $RT_1, RT_2, \ldots, RT_n$ – реляційні дерева з спільною кореневою колекцією C_1, а C_0RC_1 – бінарне відношення виду один до одного або один до багатьох і колекція C_0 не входить до будь-якого дерева $RT_1, RT_2, \ldots, RT_n$, то $(C_0RC_1, (RT_1, RT_2, \ldots, RT_n))$ є реляційним деревом з коренем C_0RC_1 та кореневою колекцією C_0.

В реляційному дереві елементи колекцій, в свою чергу, утворюють дерева, дуги яких задаються відношеннями реляційного дерева. Будемо вважати, що дуги є орієнтованими, і проходять від лівого елементу пари, яка належить відношенню, до правого. Так, дерево, яке складається з одного відношення виду один до одного, визначає ліс, зображений на рис. 2.

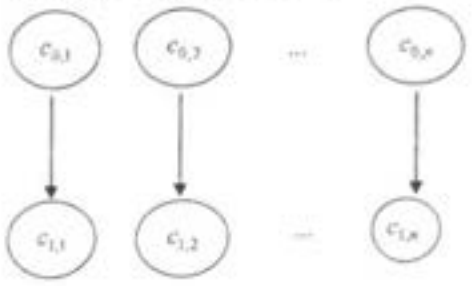


Рис. 2. Дерево, яке складається з одного відношення виду один до одного

Дерево, яке складається з одного відношення виду один до багатьох, визначає ліс, зображений на рис. 3.

Kyiv National Taras Shevchenko University

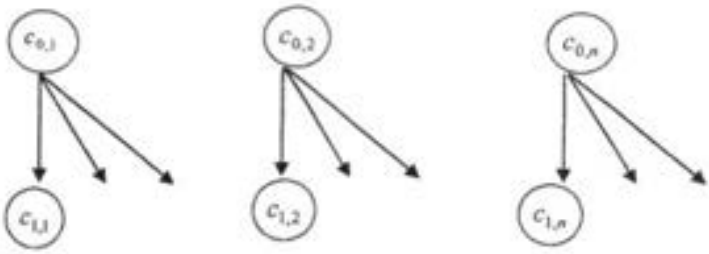


Рис. 3. Дерево, яке складається з одного відношення виду один до багатьох

Розглянемо тепер випадок бінарного відношення C_0RC_0 виду один до багатьох, заданого на одній і той же самій колекції C_0. Якщо граф, який відповідає цьому відношенню, є ациклічним і кожна вершина має не більше ніж одну вхідну дугу, то він утворює ліс на елементах колекції C_0. Якщо ж існує рівно одна вершина, яка не має вхідних дуг, то це буде дерево.

Відповідний ліс або дерево може бути побудовані ітеративним чином. Спочатку шукається множина кореневих вершин. Це будуть вершини, які не мають вхідних дуг. Так як граф є ациклічним, то існує принаймні одна така вершина. Для кожної вершини будується відповідне дерево ітеративним чином. На першому кроці знайдемо всіх синів кореневої вершини. Далі повторюємо процедуру для кожного із синів. Так як граф ациклічний, то процедура закінчиться через скінченну кількість кроків. В результаті отримаємо дерево для цієї вершини.

Висновки

В роботі надане визначення моделі даних, яке містить найбільш суттєві риси існуючих визначень. Показано, що визначення зв'язку між таблицями на множинах не може бути безпосередньо застосовано до мультимножин та послідовностей без втрати суттєвої інформації. Надане визначення зв'язку на випадок мультимножин та послідовностей, яке зберігає інформацію про те, які саме екземпляри входять в зв'язок.

Побудовані реляційні дерева, які є композицією бінарних зв'язків в деревоподібні структури та використовуються для задання ієрархічних та рекурсивних моделей даних.

В наступних статтях будуть розглянуті існуючи моделі даних з позиції використання понять колекції та зв'язку.

Список використаних джерел

1. *Codd E.F.* A relational model of data for large shared data banks / E. F. Codd //Comm. ACM. – V. 13, N 6. – 1970. – P. 377-387.
2. *Codd E.F.* Data Models in Database Management / E. F. Codd. Proc. Workshop in Data Abstraction, Databases, and Conceptual Modelling (Michael L. Brodie and Stephen N. Zilles, eds.), Pingree Park, Colo. (June 1980): ACM SIGART Newsletter No. 74 (January 1981); ACM SIGMOD Record 11(2), February 1981; ACM SIGPLAN Notices 16(1), January 1981.
3. *Марков А.С.* Базы данных. Введение в теорию и методологию / А. С. Марков, К. Ю. Литовский. – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 512 с.
4. *Мартин Дж.* Организация баз данных в вычислительных системах / Дж. Мартин. – Москва: Мир, 1980. – 660 с.
5. Буй Д. Б. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці / Д. Б Буй, С. А. Поляков // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 2. – С. 183-194
6. Collection (mathematics) [электронний ресурс]. - режим доступу: http://en.wikipedia.org/wiki/Collection_(mathematics)
7. *Редько В.Н.* Програмологія: ретроспективи та перспективи / В. Н. Редько // Вісник. Кібернетика (Київський національний університет імені Тараса Шевченка). – 2000. – Вип. 1. – С. 34-57.
8. *Сільвейструк Л.М.* Формалізація моделі „сутність-зв'язок": типи сутностей, типи зв'язків та їх обмеження: дисертація кандидата фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Сільвейструк Людмила Миколаївна. – Київ, 2009. – 173 с.

Надійшла до редколегії 20.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 004.04

Т.В. Россада, аспірант

Аналіз, моделювання та дослідження синонімії у формальних мовах

У статті вводиться формальне визначення відношення синонімії на множині номінативних множин та номінативних даних. Доводиться стійкість програм над номінативними даними щодо відношення синонімії.

Ключові слова: номінативні дані, мови програмування, семантика програм, програмні алгебри, відношення синонімії.

T.V.Rossada, PhD student

Analysis, design and research of synonymy in formal languages

Formal definition of synonymy relation on the set of nominative sets and data is introduced. Stability of programs of nominative data under synonymy relation is proved.

Key Words: nominative data, programming languages, program semantics, program algebras, synonymy relation.

*E-mail: trossada@gmail.com

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н. Анісімов А.В.

Синонімія є одним з фундаментальних понять лінгвістики (лексична синонімія та синонімія мовних одиниць), логіки (бінарне відношення, в якому знаходяться будь-які два *рівнозначні*, але *не тотожні* вирази), логічної семантики та семіотики. У логіці та логічній семантиці, залежності від відношення до спільного денотату чи сигніфікату, розрізняють, відповідно, *екстенсіональну* (наприклад, *«5»* і *«2+3»*) та *інтенсіональну* (наприклад, *«5»* і *«відмінно»*) синонімію.

У формальних мовах можливе використання інтенсіональної синонімії і використовується екстенсіональна [1-3], але для цього має бути визначене хоча б одне нетривіальне відношення еквівалентності або рівності [4]. Наприклад, Synonym (SQL) в Oracle використовується для альтернативного іменування об'єктів, що дає можливість по-різному інтерпретувати одні і ті самі дані (аналог номінативного визначення), або для спрощення запису довгих імен об'єктів баз даних, особливо повних імен, що складаються з чотирьох частин, наприклад:

ServerName.DBName.OwnName.ObjectName.

Прикладом інтенсіональної синонімії у мовах програмування є використання змінних, що посилаються на одну і ту саму ділянку пам'яті (наприклад, у Fortran такий спосіб завдання даних використовували для повторного використання ділянок пам'яті) [5].

Питання формалізації синонімії частково висвітлювалося в [6], дана робота представляє собою більш детальний огляд саме цього аспекту номінації.

У даній статті будемо будувати ієрархічні номінативні [7] дані із синонімією. Ієрархічні дані представляють собою множину пар *ім'я ↦ значення*, де значення може бути як *простим* (визначається абстрактно, як деякий елемент множини можливих значень: число, рядок, таблиця, фільм, дата та ін., або їх ідентифікаторів: номерний знак автомобіля, ідентифікаційний код людини), так і *складеним* (іншим ієрархічним даним). Ранг ієрархічного даного визначає довжину шляху від кореня ієрархії до листка. Ієрархічне дане рангу 0 являє собою номінативне дане.

Ієрархічні дані є більш гнучкими і виразно спроможними [8-9] у порівнянні з класичними структурами даних.

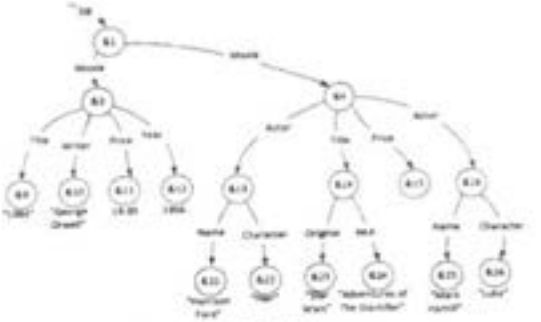


Рис. 1. Фрагмент ОЕМ БД [9]

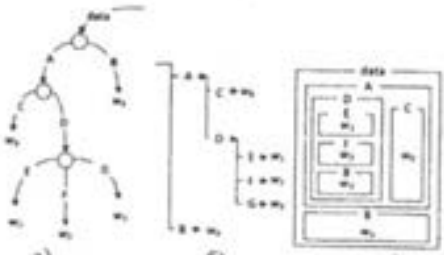
Такі дані можна представляти в текстовому (лінійному), або у графічному вигляді. Візьмемо, наприклад, такий текстовий запис:

© Т.В. Россада, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$d = [A \mapsto [B \mapsto [D \mapsto 1,\ C \mapsto [E \mapsto 2]],\ F \mapsto 3],\ B \mapsto 4].$$

Йому відповідає певне орієнтоване дерево з дугами, розміченими іменами, і кінцевими вершинами (листям), розміченими значеннями. На рис. 2 представлені різноманітні його форми: а) традиційна, б) схемна і в) вкладені множини.



а) б) в)

Рис. 2. Графічні представлення ієрархічного даного: а) традиційна форма; б) схемна форма; в) вкладені множини (в деякому наближенні – діаграми Венна).

Схемна форма використовується для представлення таких даних, як зміст глав у книзі, дерево каталогів у файловій системі, тощо. Прикладом вкладених множин може слугувати представлення відкритих вікон і вкладок на робочому столі деякої ОС (Windows, Linux), дошка об'яв, тощо.

Що стосується представлення таких даних у пам'яті ЕОМ для подальшої роботи з ними – це легко реалізується, наприклад, за допомогою списків структур посилань (рис. 3). Схожим чином реалізовані структури даних у деяких файлових системах, наприклад UFS [10]. У даному випадку те, що у файловій системі UNIX виступає у ролі inode (index data), у номінативному даному є частиною даного, якщо це не просте значення.

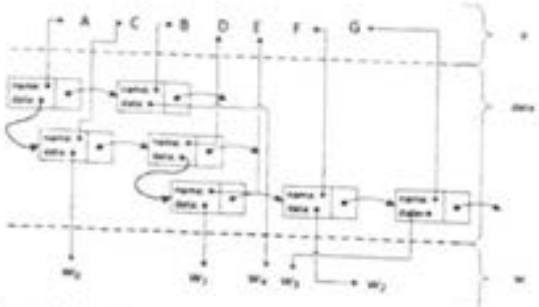


Рис. 3. Варіант представлення даного з рис. 2 у пам'яті ЕОМ

Таке представлення зручне тим, що дає можливість працювати з даним не завантажуючи у динамічну пам'ять елементи з W і V; індексувати [11] значення (рис. 4), частково дублюючи лише структуру посилань, але не самі значення; працювати окремо з множинами W і V, вводячи на них необхідні відношення, у тому числі – синонімію.

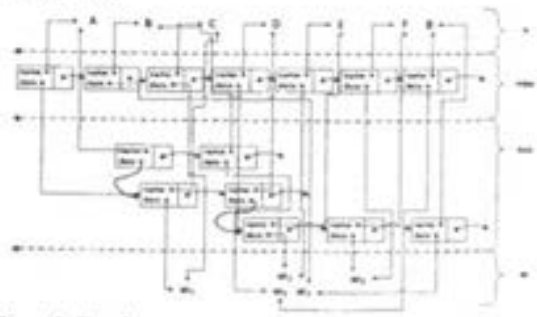


Рис. 4. Варіант представлення даного з рис. 2 в) та його індексу у пам'яті ЕОМ

Визначимо відношення синонімії як відношення еквівалентності на множині V (позначатимемо $\sim_s$). Розглянемо такі класи даних із синонімією: номінативні множини, номінативні дані із одноранговою синонімією і номінативні дані з різноранговою синонімією. Питання формалізації синонімії частково висвітлювалося у [13], дана робота представляє собою більш детальний огляд саме цього аспекту номінації.

1. Номінативні множини із синонімією

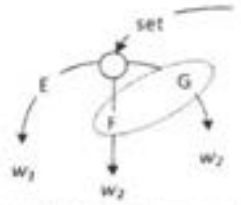


Рис. 5. Номінативна множина з синонімією

Розглянемо підклас іменних множин з унікальними іменами із синонімією (рис. 5): $UNS_s(V,W) \subseteq UNS(V,W)$), де імена з множини V, значення, з множини W (зафіксуємо множини V і W), а імена-синоніми (тобто такі, що належать $\sim_s$) приймають однакове значення. Враховуючи відношення синонімії на множині імен V, відношення синонімічної еквівалентності на множині елементів класу UNS_s визначимо наступним чином: $\forall s, s' \in UNS_s$ s *синонімічно-еквівалентне* s' (позначимо $s \approx_s s'$), якщо існує бієктивна функція $\varphi : V \to V$ така, що $f\varphi(v) \mapsto w \mid v \mapsto w \in_s s$ і $\varphi(v) \sim_s v] = s'$. Для випадку $s = s'$ такою функцією буде $\varphi(x) = x$. У випадку

Kyiv National Taras Shevchenko University

$s, s' \in W$ умова виконується для будь-якої функції φ.

Бієктивність функції φ передбачає однакову потужність множини імен s та s', тобто: $||nms(s)|| = ||nms(s')||$. Розглянемо на прикладі. За умови $v \sim_s v'$ виконується наступне:

$$[v \mapsto w] \approx_s [v' \mapsto w],$$

але $[v \mapsto w, v' \mapsto w] \not\approx_s [v \mapsto w]$.

Введемо базові функції, що враховують особливості такої системи. Серед базових операцій над класом даних UNS_s функція іменування та функція-константа обнулення визначається як відповідні функції над даними класу UND. Розіменування та накладання визначимо наступним чином:

- *розіменування* $v \Rightarrow^i_{ss} : UNS_s \to W$ даного $s \in UNS_s$ з параметром $v \in V$: $v \Rightarrow^i_{ss}(s) = w$, якщо $\exists v'$: $v' \sim_s v$ і $v' \mapsto w \in_s s$; в іншому випадку значення функції невизначено;

- *накладання* $\nabla^i_{ss} : UNS_s \to UNS_s$ даних $s, s' \in UNS$ є об'єднанням номінатів із s таких, що імена не входять до множини імен і їх синонімів з s', номінатів із s' таких, що імена не входять до множини імен і їх синонімів з s та номінатів, імена з яких належать множині імен s, а значеннями є відповідні значення імен-синонімів із s':

$$s \nabla^i_{ss} s' = [v \mapsto w \mid (v \mapsto w \in_s s \;\&\; v \notin nms(\lceil s' \rceil)) \vee$$
$$\vee (v \mapsto w \in_s s' \;\&\; v \notin nms(\lceil s \rceil)) \vee$$
$$\vee (v \in nms(\lceil s \rceil) \setminus nms(s) \;\&\; \exists u (u \sim_s v): u \mapsto w \in_s s')],$$

де операція $\lceil . \rceil : UNS_s \to UNS_s$ повертає «стелю» даного по відношенню до синонімії: додає до даного номінати, імена яких є синонімами до імен з множини імен даного, а значення – відповідним значенням імені з даного. Визначається наступним чином:

$$\lceil s \rceil = [v \mapsto w \mid \exists u: u \mapsto w \in_s s \;\&\; v \sim_s u].$$

Зауваження. За побудовою операція $\lceil . \rceil$ є такою, що в утвореному даному імена-синоніми будуть приймати однакові значення, якщо дане на вході мало таку ж властивість.

Розглянемо операцію накладання на прикладі. Нехай $v_i \in V$, $w_i \in W$ для всіх $i = \overline{1..5}$, $s, s' \in UNS$ і визначені наступним чином:

$$s = [v_1 \mapsto w_1, v_2 \mapsto w_2, v_3 \mapsto w_3],$$

$$s' = [v_{\sigma 1} \mapsto w_3, v_4 \mapsto w_4, v_5 \mapsto w_5],$$

причому $v_1 \sim_s v_3$. Очевидно, що при застосуванні до цих множин простого накладання, результат не буде унікальноіменним даним із синонімією:

$$s \nabla s' = [v_1 \mapsto w_1, v_2 \mapsto w_2, v_3 \mapsto w_3, v_4 \mapsto w_4, v_5 \mapsto w_5],$$

оскільки до даного входять номінати з іменами-синонімами, але різними значеннями: $v_1 \mapsto w_1$, $v_3 \mapsto w_3$. А при застосуванні ∇^i_{ss} маємо:

$$s \nabla^i_{ss} s' = [v_2 \mapsto w_2, v_4 \mapsto w_4, v_1 \mapsto w_3, v_3 \mapsto w_3, v_5 \mapsto w_5],$$

що є унікальноіменним даним із синонімією.

Твердження 1.1. Клас UNS_s замкнений відносно базових функцій та операцій.

Доведення випливає із побудови.

У алгебрі програм [7] над класом даних UNS_s операція $v \Rightarrow$ та $\Rightarrow v$ інтерпретуються як $v \Rightarrow^i_{ss}$ та як звичайне іменування $\Rightarrow v$ відповідно, а присвоєння As^v, залежне від параметру $v \in V$, ординарної [12] функції f_s (що задає підпрограму над даним) та номінативної множини s – як унарна композиція, що задається формулою $As^v_{ss}(f_{ss})(s) = s \nabla^i_{ss} [v \mapsto f(s)]$. Інтерпретації композицій послідовного виконання, умовного оператору та циклу задаються в даних алгебра звичайним чином. Тому кожен семантичний терм Pr інтерпретується в алгебрах програм над класом даних UNS_s як певна функція. Клас таких функцій надалі будемо позначати як F^i_{ss}.

Теорема 1.1. Класи UNS_s, W, $bool$ разом з базовими функціями $v \Rightarrow^i_{ss}$, $\overline{\varnothing}$ та композиціями AS^v_{ss}, $\bullet$, IF та WH утворюють триосновну алгебру: $\langle UNS, W, bool; v \Rightarrow^i_{ss}, \overline{\varnothing}; AS^v_{ss}, \bullet, IF, WH \rangle$.

Доведення слідує із замкненості класу UNS_s відносно функцій, утворених скінченною кількістю застосувань вказаних композицій до базових функцій, та твердження 1.1.

Твердження 1.2. Синонімічна еквівалентність даних класу UNS_s зберігається базовими функціями та операціями $v \Rightarrow^i_{ss}$, $\overline{\varnothing}$, та ∇^i_{ss}.

Доведення слідує із побудови.

Твердження 1.3. Композиції AS^v_{ss}, $\bullet$, IF, WH функцій, що зберігають синонімічну

Kyiv National Taras Shevchenko University

еквівалентність, також зберігають синонімічну еквівалентність.

Теорема 1.2. Для $\forall s, s' \in UNS_s$ таких, що $s \sim_s s'$ і для $\forall f \in F^1_{ss}$: $f(s)\downarrow \Leftrightarrow f(s')\downarrow$ і $f(s) \approx_s f(s')$.

Доведення випливає із тверджень 1.2 та 1.3.

Наслідок з теореми 1.2. Для $\forall s, s' \in UNS_s$ таких, що $s \sim_s s'$ і для будь-якої ординарної $f \in F^1_{ss}$: $f(s)\downarrow \Leftrightarrow f(s')\downarrow$ і $f(s) = f(s')$.

2. Унікальноіменні дані із одноранговою синонімією

Розглянемо підклас унікально іменних [11] даних з одноранговою синонімією (рис. 6) $UND'_s \subseteq UND$. Визначаємо індуктивно: $d \in UND$ називатимемо унікальноіменним даним із синонімією, якщо кореневі імена-синоніми в ньому приймають однакові значення.

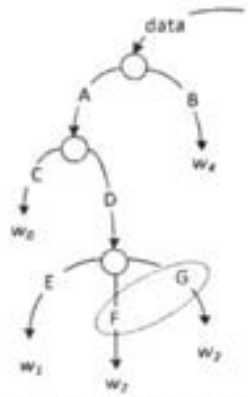


Рис. 6. Ієрархічне дане з одноранговою синонімією.

Для $\forall d, d' \in UND'_s$ будемо казати, що *d синонімічно-еквівалентне d'* (позначимо $d \approx_s d'$), якщо існує бієкція $\varphi : rn(d) \to rn(d')$ така, що для $\forall v \in rn(d)$:

1. $\varphi(v) \sim_s v$;

2. для всіх $b, b' \in UND'_s$, таких, що $v \mapsto b \in_s d$ і $\varphi(v) \mapsto b' \in_s d'$: $b \approx_s b'$.

Введемо базові функції та операції над даними класу UND'_s. Серед базових, функція іменування та функція-константа обнулення визначається як відповідні функції над даними класу UND. Розіменування та накладання визначимо наступним чином:

- *розіменування* $v \Rightarrow^2_{ss} : UND'_s \to UND'_s$ даного $d \in UND'_s$ з параметром $v \in V$: $v \Rightarrow^2_{ss}(d) = b$, якщо $\exists v'$: $v' \sim_s v$ і $v' \mapsto b \in_s d$; в іншому випадку значення функції невизначено;
- *накладання* $\nabla^2_{ss} : UND'_s \to UND'_s$ даних $d, d' \in UND'_s$:

$$d \nabla^2_{ss} d' = [v \mapsto b \mid (v \mapsto b \in_s d \ \&\ v \notin nms(\lceil d' \rceil)) \vee (v \mapsto b \in_s d' \ \&\ v \notin nms(\lceil d \rceil)) \vee (v \in nms(\lceil d \rceil) \setminus nms(d) \ \&\ \exists u (u \sim_s v) : u \mapsto b \in_s d')].$$

де операція $\lceil . \rceil : UND'_s \to UND'_s$ визначається наступним чином:

$$\lceil d \rceil = [v \mapsto b \mid \exists u : u \mapsto b \in_s d \ \&\ v \sim_s u].$$

З визначення операцій і результатів, отриманих для даних класу UNS_s, слідує:

Твердження 2.1. Клас UND'_s з одноранговою синонімією замкнений відносно базових функцій та операцій.

У алгебрі програм над класом даних UND'_s операція $v\Rightarrow$ та $\Rightarrow v$ інтерпретуються як $v \Rightarrow^2_{ss}$ та звичайне іменування $\Rightarrow v$ відповідно, а присвоєння As^v, залежне від параметру $v \in V$, функції f (що задає підпрограму над даним) та унікальноіменного даного d – як унарна композиція, що задається формулою $As^v_{ss}(f)(d) = d \nabla^2_{ss} [v \mapsto f(d)]$. Інтерпретації композицій послідовного виконання, умовного оператору та циклу задаються в даних алгебра звичайним чином. Тому кожен семантичний терм Pr інтерпретується в алгебрах програм над класом даних UND'_s як певна функція. Клас таких функцій надалі будемо позначати як F^2_{ss}.

Теорема 2.1. Класи UND'_s разом з базовими функціями $v \Rightarrow^2_{ss}$, $\overline{\varnothing}$ та композиціями AS^v_{ss}, $\bullet$, IF та WH утворюють програмну алгебру: $\langle UND'_s; v \Rightarrow^2_{ss}, \overline{\varnothing}; AS^v_{ss}, \bullet, IF, WH \rangle$.

Доведення слідує із замкненості класу UND'_s відносно функцій, утворених скінченною кількістю застосувань вказаних композицій до базових функцій, та твердження 2.1.

Твердження 2.2. Синонімічна еквівалентність даних класу UND'_s зберігається базовими функціями та операціями $v \Rightarrow^2_{ss}$, $\overline{\varnothing}$ та ∇^2_{ss}.

Доведення слідує із побудови.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Твердження 2.3. Композиції AS^{v}_{ss}, $\bullet$, IF, WH функцій над даними класу UND'_s, що зберігають синонімічну еквівалентність, також зберігають синонімічну еквівалентність.

Теорема 2.2. Для $\forall d, d' \in UND'_s$, таких, що $d \sim_s d'$ і для $\forall f \in F^2_{ss}$: $f(d)\downarrow \Leftrightarrow f(d')\downarrow$ і $f(d) \approx_s f(d')$.

Доведення випливає із тверджень 2.2 та 2.3.

3. Унікальноіменні дані із різноранговою синонімією

Розглянемо підклас унікальноіменних даних з різноранговою синонімією (рис. 7) $UND_s \subseteq UND$. Визначаємо індуктивно: $d \in UND_s$ називатимемо унікальноіменним даним із синонімією, якщо усі (не тільки кореневі) імена-синоніми в ньому приймають однакові значення.

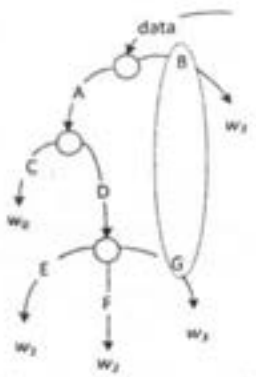


Рис. 7. Ієрархічне дане з різноранговою синонімією

Введемо базові функції та операції над даними класу UND_s. Функція-константа обнулення визначається як відповідна функція над даними класу UND. Іменування, розіменування та накладання визначимо наступним чином:

Операція *іменування* $\Rightarrow^{1}_{ss} v$ з параметром $v \in V$ даного $d \in UND_s$ визначається рівністю $\Rightarrow^{1}_{ss} v(d) = [v \mapsto d]$, якщо для $\forall v'$ такого, що $v \sim_s v'$: $v' \notin nms(d)$; невизначена інакше.

Операція *розіменування* унікальноіменних даних з синонімами $v \Rightarrow^{1}_{ss}$ з параметром $v \in V$ даного $d \in UND_s$:

$$v \Rightarrow^{1}_{ss}(d) = \begin{cases} v \Rightarrow_s (d), & \text{if} \quad v \in nms(d), \\ u \Rightarrow_s (d), & \text{if} \quad u \in nms(d) \wedge v \sim_s u, \\ \uparrow, & \text{else}. \end{cases}$$

Будемо казати, що $d, d' \in UND_s$ *порівнювані*, якщо $\forall v, v' \in V$: $v \sim_s v' \Rightarrow v \Rightarrow^{1}_{ss}(d) = v \Rightarrow^{1}_{ss}(d')$ у випадку, коли обидва значення визначені.

Операція *накладання* ∇^{1}_{ss} з параметром $v \in V$ даних $d, d' \in UND_s$ невизначена у випадку, якщо d і d' – не порівнювані. Якщо d і d' – порівнювані – операція ускладнена за рахунок необхідності зміни значення усіх імен-синонімів при зміні значення хоча б одного з цих імен. Тобто, якщо ім'я v має n імен-синонімів (позначимо їх v_i, $i = \overline{1..n}$), що належать множині імен даного d, то:

$$d \nabla^{1}_{ss} [v \mapsto d'] = d \nabla_s [v \mapsto d'] \nabla_s$$

$$\nabla_s [v_1 \mapsto d'] \nabla_s [v_n \mapsto d'].$$

Твердження 3.1 Клас UND_s з синонімією замкнений відносно базових функцій та операцій.

Доведення слідує із побудови.

Для $\forall d, d' \in UND_s$ будемо казати, що d *синонімічно-еквівалентне* d' (позначимо $d \approx_s d'$), якщо існує біекція $\varphi : nms(d) \to nms(d')$ така, що для $\forall v \in nms(d)$:

1. $\varphi(v) \sim_s v$;
2. $v \Rightarrow^{1}_{ss}(d) = v \Rightarrow^{1}_{ss}(d')$

Твердження 3.2. Для $\forall d, d' \in UND_s$: якщо $d \approx_s d'$, то $ind(d) \approx_s ind(d')$. Але обернене твердження не завжди вірно.

Твердження 3.3. Синонімічна еквівалентність даних класу UND_s зберігається базовими функціями та операціями $v \Rightarrow^{1}_{ss}$, $\overline{\varnothing}$ та ∇^{1}_{ss}.

Доведення слідує із побудови.

У алгебрі програм над класом даних UND_s операція $v \Rightarrow$ та $\Rightarrow v$ інтерпретуються як $v \Rightarrow^{1}_{ss}$ та $\Rightarrow^{1}_{ss} v$ відповідно, а присвоєння As^{v}, залежне від параметру $v \in V$, функції f (що задає підпрограму над даним) та номінативного даного d – як унарна композиція, що задається формулою $As^{v}_{ss}(f)(d) = d \nabla^{1}_{ss} [v \mapsto f(d)]$. Інтерпретації композицій послідовного виконання, умовного оператору та циклу задаються в даних алгебра звичайним чином. Тому кожен семантичний терм Pr інтерпретується в алгебрах програм над класом даних UND_s як певна функція. Клас таких функцій надалі будемо позначати як F^{1}_{ss}.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Теорема 3.1. Клас UND_s разом з базовими функціями та композиціями утворюють алгебру: $<UND_s; \vee \Rightarrow^{3}_{ss}, \overline{\varnothing}; AS^{v}_{ss}, \bullet, IF, WH>$.

Доведення випливає із замкненості класу UND відносно функцій, утворених скінченною кількістю застосувань базових композицій до базових функцій та Твердження 3.2.

Твердження 3.4. Композиції AS^{v}_{ss}, $\bullet$, *IF*, *WH* функцій над даними класу UND_s, що зберігають синонімічну еквівалентність, також зберігають синонімічну еквівалентність.

Доведення слідує із побудови.

Теорема 3.2. Програми класу F^{3}_{ss} стійкі щодо заміни даних на синонімічно-еквівалентні.

Доведення слідує із тверджень 3.3 і 3.4.

4. Висновки

У статті побудовано номінативні множини із визначеним на них відношенням синонімії, на їх основі побудовано ієрархічні дані з простою (одноранговою) синонімією та номінативні дані зі складеною (різноранговою) синонімією. Над елементами даних класів визначено відповідні базові функції, операції та композиції над ними, введено інтерпретації мови програм *SICON* над відповідними класами даних, доведена стійкість введених інтерпретацій мови програм *SICON* щодо відношення синонімічної еквівалентності.

Список використаних джерел

1. Мельчук И. А. Опыт теории лингвистических моделей «Смысл – Текст» / И. А. Мельчук // М.: Школа «Языки русской культуры», – 1999. – 346 с.

2. Апресян Ю. Д. Лексическая семантика. Синонимические средства языка / Ю.Д. Апресян // М.: Языки русской культуры – 1995. – 464 с.

3. Шрейдер Ю. А. Логика знаковых систем / Ю. А. Шрейдер // М. Знание – 1974. – 64 с.

4. Чёрч А. Введение в математическую логику / А. Чёрч // Пер. с англ. В.С. Черняевского, под ред. В.А. Успенского – М.: Издательство иностранной литературы – 1960.

5. Себеста Р. Основные концепции языков программирования / Р. Себеста // М.: Вильямс – 2001.

6. Россада Т.В. Аспекты некласической теории номинации и их использование в формальнгых языках / Т.В. Россада // Збірних праць "Problems of Computer Intellectualization". – 2012. – С.182-189.

7. Nikitchenko N. S. A Composition Nominative Approach to Program Semantics /N. S. Nikitchenko // Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark.– 1998.– 103 p.

8. Cooper B. A fast index for semistructured data / B. F. Cooper, N. Sample, J. F. Michael, G. R. Hjaltason, M. Shadmon // VLDB. – 2001. – P. 341-350.

9. McHugh J. Indexing Semistructured Data [електронный ресурс] / J. McHugh, J. Widom, S. Abiteboul, Q. Luo, A. Rajaraman // Technical Report, January 1998. Режим доступу: http://infolab.stanford.edu/lore/pubs/semiindexing98.pdf. Дата звертання: 01.05.2012.

10. Робачевский А. Н., Немнюгин С. А., Стесик О. Л. Индексные дескрипторы / Базовая файловая система System V / Глава 4. Файловая система // Операционная система UNIX. — 2-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — С. 334-. — 656 с.

11. Россада Т.В. Класи номінативних даних із швидким доступом до компонентів / Т.В. Россада // «Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки». – 2011. – №4.

12. Россада Т.В. Властивості слабкоструктурованих даних з багатозначним іменуванням та їх використання / Т.В. Россада, А.В. Скляр // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 2. – С.86-95.

13. Россада Т.В. Формалізація багатозначного іменування у мовах програм над номінативними даними / Т.В. Россада // «Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки». – №1. – 2012.

Надійшла до редколегії 19.06.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 550.38:519.6

Семенів О.В.,** к.т.н.,
Черемних С.О., аспірант,
Яценко В.О.,* проф., д.т.н.

Прогнозування космічної погоди на основі адаптивної процедури статистичного навчання

У роботі викладено новий метод прогнозування геомагнітних подій (магнітних бурь) для оперативного оцінювання стану навколоземного космічного простору. Запропоновано використання ряду інформативних ознак та процедури навчання для побудови моделі прогнозування поведінки Dst-індексу. Модель реалізована у вигляді алгоритму адаптивного попередження геомагнітних бурь на шість годин вперед за даними супутникових спостережень. На конкретних прикладах продемонстровано ефективність запропонованого алгоритму та високий ступінь регулярності і адекватності використаної моделі.

Ключові слова: динамічна система, космічна погода, прогнозування, опорні вектори.

O. Semeniv,** PhD.,
S. Cheremnykh, Postgraduate Student,
V. Yatsenko,* Doctor of Sciences, Professor.

Learning adaptive algorithm for space weather prediction

In this article new method of geomagnetic events prediction (magnetic storms) in order to estimate the changes in near-space Earth is described. It is recommended to use range of informative characteristics and learning technique for DST-index prediction model identification. The model is implemented as algorithm of adaptive geomagnetic storm warning for 6 hours using spacecrafts data. Effectiveness of this algorithm and high level of regularity and accuracy of this model is shown on examples.

Key Words: dynamic system, space weather, prediction, support vector machine.

E-mail: vyatsenko@gmail.com*; oleg.semeniv@gmail.com**.

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Безпека космічних польотів та функціонування біологічних і технічних систем на Землі істотно залежать від стану іоносфери та навколоземного космічного простору, що визначається активністю Сонця [1-4]. Їх забезпечення полягає в дослідженні сонячно-земних зв'язків та чинників формування космічної погоди (КП) [4-8]. Одна з головних проблем КП є виявлення причинно-наслідкових взаємозв'язків між сонячною активністю, її проявами в міжпланетному середовищі, магнітосфері, іоносфері і атмосфері Землі, та техногенними і біологічними системами. Друга, не менш важлива проблема полягає в розробленні методів оцінювання та прогнозування стану КП з метою попередження негативних наслідків впливу факторів сонячного вітру.

Активний розвиток космічних досліджень у напрямку вивчення сонячно-земних зв'язків привів до появи нових методів прогнозування КП. Ряд методів грунтується на використанні фізичних властивостей магнітосфери та гіпотетичних припущеннях щодо взаємозв'язку сонячний вітер-магнітосфера для побудови емпіричних моделей динаміки геомагнітних індексів [8-11]. Інші спрямовані на побудову регресійних моделей, нейронних мереж, РБФ моделей та моделей на основі Wavelet-аналізу [12-24]. В усіх згаданих моделях Dst-індекс є ключовим параметром, який характеризує стан магнітосфери Землі під час магнітної бурі [4]. Відзначимо, що в ряді робіт розроблено підходи прогнозування геомагнітних подій на основі Dst-індексу з використанням стохастичних моделей, які базуються на моделюванні марковських процесах та розрахунку фрактальної розмірності [25, 26]. Однак, згадані методи спрямовані на прогнозування середньо добових значень динаміки КП, що в значній мірі зменшує оперативність реагування космічних технічних систем на зміну стану навколоземного простору.

Розроблення супутникових бортових та наземних систем оперативного реагування на виникнення критичних ситуацій у навколоземному просторі вимагає створення нових і розвиток існуючих підходів

© О.В. Семенів, С.О. Черемних, В.О. Яценко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

прогнозування геомагнітної активності з метою підвищення ефективності прогнозування та збільшення швидкодії. Головна ідея цієї роботи полягає в об'єднанні адаптивного підходу короткострокового прогнозу з методами добового прогнозування геомагнітних подій. Для реалізації ідеї пропонується використовувати процедуру навчання на основі опорних векторів.

Проблема навчання моделі прогнозування геомагнітних подій

Стан магнітосфери зазвичай характеризується рядом геомагнітних індексів [27]. Припускається, що динаміку зміни КП можна представити послідовністю геомагнітних подій. Під геомагнітними подіями будемо розуміти магнітні бурі, суббурі, слабкі збурення магнітосфери — різні слабкі магнітні пульсації [25, 26]. Згадані геомагнітні події можна описати зміною Dst-індексу. В результаті проблема прогнозування зводиться до розв'язку задачі прогнозування часового ряду значень Dst-індексу.

Припустимо, що зміну КП можна представити складною системою, яка знаходиться під дією деяких випадкових процесів [19-22]. Нехай в результаті спостережень за даною системою отримуються вибірки величин: значення Dst-індексу $y(k),\ k \in N$ та $\mathbf{u}(k),\ k \in N$, де $\mathbf{u}(k)$ – вектор параметрів сонячного вітру та міжпланетного магнітного поля, а N – величина вибірки. Позначимо через вектор $\mathbf{y} = [y_1, ..., y_N]$, $y_n \in R^n$, часовий ряд спостережень зміни Dst-індексу, де R^n – множина дійсних чисел, та припустимо, що система може знаходитися в S станах, які відповідають введеним нами класам подій. Нехай кожна подія характеризується певними значеннями Dst-індексу. Відомо, що в магнітоспокійні дні величина Dst-індексу рівна $y(k) > -30nT$ [25, 26]. Магнітною бурею рахують $-50nT < y(k) \le -30nT$, сильною бурею $-100nT < y(k) \le -50nT$ та дуже сильною $y(k) \le -100nT$ [25, 26]. Тоді для $s \in S$, $S = 4$, можна задати цілочисельну функцію f_s, таку, що

$$f_s = \begin{cases} 1, & if\ y(k) > -30nT, \\ 2, & if\ -50nT < y(k) \le -30nT, \\ 3, & if\ -100nT < y(k) \le -50nT, \\ 4, & if\ y(k) \le -100nT. \end{cases} \quad (1)$$

Кожна подія s означена тривалістю $t_s \in T$, де T – максимальний час, тої чи іншої події. Введемо вектора $\mathbf{q}_s^{k_1} = [y(k_1), k_1]$ та $\mathbf{q}_s^{k_2} = [y(k_2), k_1]$, які характеризують точки початку та кінця тривання події, де через $y(k_1)$ і $y(k_2)$ позначено значення Dst-індексу, а через k_1 і k_2 моменти часу початку і завершення процесу. Основною характеристикою кожної події є глобальний мінімум значення Dst-індексу $y^* = \min y(k),\ k \in t_s$ на інтервалі часу $t_s \in T$. Представимо набір ознак події s у вигляді вектору $\mathbf{d}_s^i = \left\{ t_s, \mathbf{q}_s^{k_1}, \mathbf{q}_s^{k_1}, y^* \right\}$, де $i = \overline{1, I_s}$, $I_s \in N$, порядковий номер події, що належить класу подій із ланцюга зареєстрованих. Тоді можна сформулювати задачу навчання динамічної РБФ моделі.

Нехай є множина передісторій подій, що представлена набором значень параметрів сонячного вітру та Dst-індексу. Даний набір запишемо у вигляді матриці $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_I\} \in \mathbf{X}$. Очевидно, що існує функція $f^* : \mathbf{X} \to \mathbf{\Psi}$, значення якої $f^* = f(\mathbf{x}_i)$ відоме лише на множині $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_I\} \in \mathbf{X}$. Сукупність пар "вхід-вихід" $f^* : \mathbf{X} \to \mathbf{\Psi}$ будемо називати навчальною вибіркою. Задача навчання полягає в тому, щоб відновити функціональну залежність між вхідними та вихідними даними, тобто побудувати відображення $F : \mathbf{X} \to \mathbf{\Psi}$, що задовольняє наступним вимогам: $\mathbf{\Psi} = \left\{ \left(f_1^i, \mathbf{d}_1^i\right), ..., \left(f_S^i, \mathbf{d}_S^i\right) \right\}$. Тоді задача прогнозування зводиться до розбиття простору ознак на S областей, що не перетинаються (по одній для кожного класу подій). Для простоти припустимо, що на виході алгоритму прогнозування отримаємо послідовний набір символів $\{-1, 0, 1\}$. Реконструкція моделі прогнозування різнотипних подій, що відносяться до одного з класів S, за даними спостережень будемо проводити з використанням методу статистичного навчання, а саме методу опорних векторів [27-31].

Прогнозування геомагнітних подій методом опорних векторів

Перед побудовою адаптивної моделі прогнозування геомагнітних подій на основі

Kyiv National Taras Shevchenko University

супутникових та наземних вимірювань, необхідно провести відбір навчальних даних (тобто передісторії події). Враховуючи значну кількість так званих "пропусків" в часових рядах супутникових спостережень, для отримання достатньо адекватної моделі введемо алгоритм їх заповнення. Для цього виберемо розмір "вікна" часового ряду $\Delta = 100$ годин та введемо цілочисельну функцію f_k, значення якої відповідають наступному сценарію заповнення пропусків

$$f_k\left(x^*(k)\right)=\begin{cases}0, & x^*(k)<\Delta x^*,\\ 1, & x^*(k)\ge\Delta x^*,\ x^*(k-1)\ge\Delta x^*,\ x^*(k+1)\ge\Delta x^*,\\ -1, & x^*(k)\ge\Delta x^*,\ x^*(k-1)<\Delta x^*, x^*(k+1)<\Delta x^*,\end{cases} \tag{2}$$

де $x^*(k)$ – значення змінної x^* в момент часу k дослідного інтервалу, а Δx^* – граничне допустиме значення, яке може приймати змінна $x^*(k)$. Дана процедура дозволяє провести обробку даних за наступною схемою

$$x^*(k)=\begin{cases}f_k=0, & x^*(k),\\ f_k=1, & x^*(k)=\dfrac{1}{\Delta}\sum\limits_{k^*=k-\Delta}^{k}\left(x^*(k^*)\right)^2,\\ f_k=-1, & x^*(k)=\dfrac{x^*(k+1)-x^*(k-1)}{2},\end{cases} \tag{3}$$

і одночасно здійснити нормування даних

$$\overline{x}_{j^*n}=\frac{\hat{x}-x^*_{j^*n}}{\widetilde{x}},\quad j^*=\overline{1,J},\quad n=\overline{1,N}, \tag{4}$$

де $\hat{x}$ компонента вектору $\mathbf{x}^*_{j^*}$ із максимальним значенням, $\widetilde{x}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}x^*_{j^*n}$, $j^*=\overline{1,J}$, де J – кількість розглянутих вхідних змінних. Нормовані дані виміряних параметрів (параметри сонячного вітру та міжпланетного магнітного поля), для збільшення швидкодії моделі прогнозування, "склеїмо" у вектор $\mathbf{x}$. В результаті отримаємо набір векторів $\mathbf{x}_i$, кожен з яких буде відповідати певному типу подій.

Оброблені таким чином дані використано для проведення процедури навчання та пошуку опорних векторів [27-32]. З цією метою, враховуючи все сказане вище, розглянемо задачу розділення навчальних векторів $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N$ на два класи (магнітні бурі $z=1$ та спокійне магнітне поле $z=-1$)

$$\mathbf{D}=\left\{(\mathbf{x}_1,z_1),\ldots,(\mathbf{x}_N,z_N)\right\},\mathbf{x}\in R^n,\ z\in\{-1,1\}. \tag{5}$$

Для цього розглянемо гіперплощину

$$\langle\mathbf{w},\mathbf{x}\rangle+b=0, \tag{6}$$

де $\mathbf{w}\in R^n$ – вектор параметрів, а $b\in R^n$ – скалярний поріг. Вважаємо, що навчальні вектора розділяються гіперплощиною у тому випадку, коли похибка розділення мінімальна і смуга розділення має найбільшу ширину. Нехай є деяка допустима похибка розділення $\varepsilon=const$, $\varepsilon\ge 0$. Тоді гіперплощина повинна, відповідно [28, 29], задовольняти обмеження

$$z_i\left[\langle\mathbf{w},\mathbf{x}_i\rangle+b\right]\ge\varepsilon,\quad i=\overline{1,N}. \tag{7}$$

Приймаючи до уваги обставину, що КП описується нелінійною системою, то оптимальну гіперплощину розділення зручніше будувати з урахуванням позитивних змінних $\xi_i\ge 0$ та штрафної функції

$$F_\gamma(\xi)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i^\gamma,\quad \gamma\ge 0, \tag{8}$$

де $\xi_i\ge 0$ - величини похибки класифікації. В результаті проблема зводиться до мінімізації похибки класифікації та розмірності простору опорних векторів з урахуванням обмеження (7). Для спрощення обмеження (7) приведемо останнє до вигляду

$$z_i\left[\langle\mathbf{w},\mathbf{x}_i\rangle+b\right]\ge\varepsilon-\xi_i,\quad i=\overline{1,N}. \tag{9}$$

Отже, оптимальна гіперплощина будується із використанням вектора $\mathbf{w}$, що дозволяє мінімізувати функціонал

$$\Phi(\mathbf{w},\xi)=\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2+C\sum_{i=1}^{N}\xi_i. \tag{10}$$

Припустимо, що є деякий параметр $\nu\in(0,1]$, який дозволяє контролювати кількість відібраних опорних векторів та похибку класифікації. Тоді рівняння (10) можна представити у вигляді

$$\Phi(\mathbf{w},\xi)=\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2-\nu\varepsilon+C\sum_{i=1}^{N}\xi_i,\ C\ge\frac{1}{N}. \tag{11}$$

Задачу (11) з урахуванням обмеження (9) будемо розв'язувати як задачу пошуку сідлової точки Лагранжіана [33]

$$\Phi(\mathbf{w},b,\boldsymbol{\alpha},\xi)=\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2+C\sum_{i=1}^{N}\xi_i-\\ -\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left(z_i\left[\mathbf{w}^T\varphi(\mathbf{x}_i)+b\right]-\varepsilon+\xi_i\right), \tag{12}$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Таблиця 1

Результати прогнозування геомагнітних подій на навчальній та тестовій вибірках

№№	Навчальна вибірка	Тестова вибірка
1) Відсоток точності прогнозування бурь	94.64% (2701/2854)	82% (8077/9850)
2) Відсоток точності прогнозування сильних бурь	71.44% (1023/1432)	74.54% (2044/2742)
3) Відсоток точності прогнозування дуже сильних бурь	71.95% (295/410)	83.26% (582/699)
94.64% – відсоток точності прогнозування, 2701/2854 – кількість точно прогнозованих подій / загальна кількість подій у вибірці		

де $\boldsymbol{\alpha}$ – множники Лагранжа. Проводячи стандартними методами мінімізацію Лагранжіана щодо змінних $\mathbf{w}$, b, ξ та максимізацію щодо $\boldsymbol{\alpha}$, запишемо рівняння (12) як

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha}) = \max_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\min_{\mathbf{w},b,\xi} \Phi(\mathbf{w},b,\boldsymbol{\alpha},\xi) \right). \quad (13)$$

В результаті з (12) та (13) отримаємо

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j z_i z_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k, \quad (14)$$

із обмеженнями

$$0 \le \alpha_i \le C, \quad i = \overline{1,N}, \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j z_j = 0. \quad (15)$$

Для більш надійної та точної класифікації на два класи (магнітні бурі $z = 1$ і спокійне магнітне поле $z = -1$) введемо в рівняння (14) функцію ядра $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, що дозволяє більш гнучко проектувати вхідний простір змінних в простір опорних векторів. В якості останньої, використовуємо функцію

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|\right), \ \gamma \ge 0. \quad (16)$$

Вигляд (16) вибраний із міркувань спрощення пошуку оптимальної гіперплощини та спрощення задачі (13).

Результати моделювання

Для чисельного моделювання та реалізації алгоритму прогнозування використовувалися дані OMNI2-web [34]. Перед відбором подій для навчання з набору даних за 1991-2009 роки, застосовано процедуру заповнення пропущених спостережень. Після попередньої обробки, здійснено відбір подій різних класів та їх передісторії протягом 72 годин, $n_t = 72$.

Для формування навчальної вибірки введено часовий поріг Δt для прогнозування тої, чи іншої події. У розглянутому прикладі обрано границю рівну шести годинам $\Delta t = 6$. Так для кожної події з класу S отримано вектор значень $\mathbf{x}$, який складається з 66 компонент. В результаті отримано навчальну вибірку даних із 120 подій класу 4, 379 подій класу 3, 1043 подій класу 2 та 2710 подій класу 1.

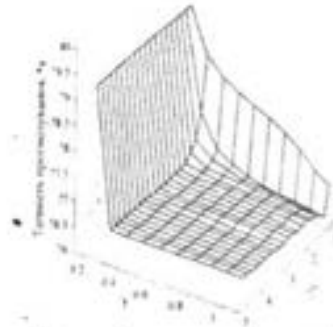


Рис. 1 Залежність кількості точно спрогнозованих подій навчальної вибірки щодо значень γ та C

Попередній аналіз результатів прогнозування показав, що для забезпечення найбільш точного прогнозу та отримання високого значення критерію регулярності, необхідно підібрати оптимальні значення констант $\gamma \ge 0$, $C \ge 0$. Для цього використана процедура крос-валідації [29-32], яка полягає в наступному: а) спочатку навчальний набір даних довільним чином розбивається на ряд рівнозначних підмножин; б) після цього, в ході ітеративної процедури поетапно використовуються різні підмножини для навчання та тестування моделі прогнозування (розрахунок критерію регулярності та похибки прогнозу). Такий підхід дозволив на обмеженому наборі даних отримати адекватну модель з високим критерієм регулярності. Результати розрахунків наведено на рис. 1. З рисунку видно, що для задачі прогнозування геомагнітних подій найбільш придатні значення констант рівні $\gamma = 0.01$, $C = 0.5$. Використовуючи попередні

Kyiv National Taras Shevchenko University

розрахунки здійснено навчання моделі прогнозування різнотипних геомагнітних подій.

В таблиці 1 представлені результати оцінок точності прогнозування для навчальної та тестової вибірок. Як видно з таблиці 1, запропонований підхід дозволяє побудувати адекватну модель на основі опорних векторів, яка з точністю не менше 82% може передбачати виникнення геомагнітних бурь.

Висновки

Запропоновано новий підхід прогнозування стану космічної погоди, який базується на використанні моделі опорних векторів та передісторії виникнення різнотипних геомагнітних подій. Показано можливість побудови адекватної моделі прогнозування динаміки космічної погоди з високим критерієм регулярності та точністю прогнозування геомагнітних бурь на шість годин вперед не менше 82%. Досліджено залежність точності прогнозування геомагнітних подій від значень констант γ та C, які використовуються для побудови гіперплощини розділення. Представлено результати чисельного моделювання залежності точності прогнозу від значень вище згаданих констант. Вперше запропоновано ітеративний алгоритм оперативного прогнозування різнотипних геомагнітних подій на основі комбінації методу опорних векторів та аналізу середньодобових динамічних характеристик параметрів стану космічної погоди. Показана можливість побудови системи оперативного прогнозування геомагнітних бурь на основі запропонованого алгоритму.

Список використаних джерел

1. *Акасофу С.И., Чепмен С.* Солнечно-земная физика / С.И. Акасофу, С. Чепмен – Мир, ч.1. – 1975. – 384 р.
2. *Кузнецов Н.В., Панасюк М.И.* Космическая радиация и прогнозирование сбое- и отказоустойчивости интегральных микросхем в бортовой аппаратуре космических аппаратов / Н.В. Кузнецов, М.И. Панасюк // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ), серия радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. – В. 1-2. – 2001. С.3 – 8.
3. *Gussenhoven M.S., et al.* Phillips Laboratory Space Physics Division Radiation Models / M.S. Gussenhoven et al. // In: "Radiation Belts. Models and Standards", Geophysical Monograph. – V.97. – 1996. – 93p.
4. *Кременцький І.О., Черемних О.К.* Космічна погода: механізми та прояви / І.О. Кременцький, О.К. Черемних – Київ: Наукова думка. – 2009. – 143 с.
5. *Goodman J.M.* Space Weather & Telecommunication / J.M. Goodman - New York: The Kluwer International Series in Engineering & Computer Science. Springer Science+Business Media Inc. – 2005. – 382p.
6. *Daglis I.A.*. Effects of Space Weather on Technology Infrastructure / *I.A. Daglis* – NATO Science Series. Kluwer Academic Publishers. – 2004. – 334 p.
7. *Hanslmeier A.* The sun and space wheather / A. Hanslmeier – New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers. – 2002. – 243p.
8. *Wang H.* Space weather: scientific forecasting / H. Wang // COSPAR Colloquium: Solar-Terrestrial Magnetic Activity and Space Environment. Bejing, China. – 2001. – 55p.
9. *Baker D.N., Klimas A.J., McPherron R.L., Buchner J.* "The evolution from weak to strong geomagnetic activity: an interpretation in terms of deterministic chaos / D.N. Baker, A.J. Klimas, R.L. McPherron, J. Buchner // J. Geophys. – 1990. – 17 (1). – P. 41–44.
10. *Burton R.K., McPherron R.L., Russell C.T.* An empirical relationship between interplanetary conditions and Dst / R.K. Burton, R.L. McPherron, C.T. Russell // J. Geophys. – 1975. – 80. – P. 4204–4214.
11. *Goertz C.K., Shan L.H., Smith R.A.* Prediction of geomagnetic activity / C.K. Goertz, L.H. Shan, R.A. Smith // J. Geophys. – 1993. – 98. –P.7673–7684.
12. *Billings S.A., Wei H.L.* The wavelet-NARMAX representation: a hybrid model structure combining the polynomial models and multiresolution wavelet decompositions / S.A. Billings, H.L. Wei // Int. J. Systems Science. – 2005. – 36 (3). – P. 137–152.
13. *Boaghe O.M., Balikhin M.A., Billings S.A., Alleyne H.* Identification of nonlinear processes in the magnetosphere dynamics and forecasting of Dst index / O.M. Boaghe, M.A. Balikhin, S.A. Billings, H. Alleyne // J. Geophys. – 2001. – 106. – P. 30047–30066.
14. *Chen S., Billings S.A.* Neural networks for nonlinear dynamic system modelling and

Kyiv National Taras Shevchenko University

identification / S. Chen, S.A. Billings // Int. J. Control. – 1992. – 56. – P. 319–346.

15. *Sharifi J., Araabi B.N., Lucas C.* Multi-step prediction of Dst index using singular spectrum analysis and locally linear neurofuzzy modelling / J. Sharifi, B.N. Araabi, C. Lucas // Earth Planets Space. – 2006. – 58 (3). – P. 331–341.
16. *Wei H.L., Billings S.A.* A unified wavelet-based modelling framework for nonlinear system identification: the WANARX model structure / H.L. Wei, S.A. Billings // Int. J. Control. – 2004. – 77 (4). – P. 351–366.
17. *Wei H.L., Zhu D.Q., Billings S.A., Balikhin M.A.* Forecasting the geomagnetic activity of the Dst index using multiscale radial basis function networks / H.L. Wei, D.Q. Zhu, S.A. Billings, M.A. Balikhin // Advances in Space Research. – 2007. – 40. – P. 1863–1870.
18. *Temerin M., Li X.* A new model for the prediction of Dst on the basis of the solar wind / M. Temerin, X. Li // J. Geophys. Res. 2002. V. 107 (A12). Art. No. 1472.
19. *Cheremnykh O., Yatsenko V., Semeniv O., Shatokhina Iu.* Nonlinear dynamical model for space weather prediction / O. Cheremnykh, V. Yatsenko, O. Semeniv, Iu. Shatokhina // Український фізичний журнал. –Т. 53. – № 5. – 2008. – С. 502-505.
20. *Семенив О.В., Сидоренко В.И., Черемных О.К., Шатохина Ю.В., Яценко В.А.* Оптимизационный подход к прогнозированию космической погоды / О.В. Семенив, В.И. Сидоренко, О.К. Черемных, Ю.В. Шатохина, В.А. Яценко // Проблеми управления и информатики. – 2008. – № 4. – С. 115-130.
21. *Семенив О.В., Яценко В.А.* Идентификация динамических моделей прогнозирования динамики Dst-индекса / О.В. Семенив, В.А. Яценко // Космічна наука і технологія. - 2010. - Т.16, №1. - С. 51-56.
22. *Яценко В.А., Черемных О.К., Кунцевич В.М., Семенив О.В.* Идентификация моделей геомагнитной активности и прогнозирование космической погоды / В.А. Яценко, О.К. Черемных, В.М. Кунцевич, О.В. Семенив // Проблеми управления и информатики. – 2009. – № 6. – С. 114 – 125
23. *Парновский А.С.* Метод регрессионного моделирования и его применение к задаче прогнозирования космической погоды / А.С. Парновский // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 3. – С. 128 – 135.
24. *Parnowski A.S.* Regression modeling method of space weather prediction / A.S. Parnowski // Astrophys. & Space Sci. – 2009. — 323, N 2. — P. 169-180. doi:10.1007/s10509-009-0060-4. [arXiv:0906.3271]
25. *Anh V., Yu Z., Wanliss J., Watson S.* Prediction of magnetic storm events using the Dst index / V. Anh, Z. Yu, J. Wanliss, S. Watson // Nonlin. Processes Geophys. – 12. – 2005. – P.799–806.
26. *Yu Z.G., Anh V.V., Wanliss J.A., Watson S.M.* Chaos game representation of the Dst index and prediction of geomagnetic storm events / Z.G. Yu, V.V. Anh, J.A. Wanliss, S.M. Watson // Chaos Soliton. Fract. – 31. – 2007. – P. 736–746.
27. *Mayaud P.N.* Derivation, meaning and use of geomagnetic indices / P.N. Mayaud // AGU Geophysical Monograph – 1980. – 22p.
28. *Vapnik V.N.* Statistical learning theory. — New York: John Wiley and Sons Inc. – 1998. – 736 p.
29. *Vapnik V.* The Nature of Statistical Learning Theory / V. Vapnik. – New York: Springer. – 1995. – 320 p.
30. *Bousquet O., Boucheron S., Lugosi G.* Introduction to statistical learning theory / O. Bousquet, S. Boucheron, G. Lugosi // Advanced Lectures on Machine Learning. – 2003. – P.169 –207.
31. *Burges C.J.C.* A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition / C.J.C. Burges // Data Mining and Knowledge Discovery. – 1998. – Volume 2. – 43 p.
32. *Gunn S.R.* Support vector machines for classification and regression: technical report / Faculty of Engineering, Science and Mathematics School of Electronics and Computer Science, University of Southampton. – 1998. – 66 p.
33. *Minoux M.* Mathematical Programming: Theory and Algorithms / *M. Minoux* – John Wiley and Sons. – 1986. – 489p.
34. OMNI2 Database. – http://nssdc.gsfc.nasa.gov/omniweb

Надійшла до редколегії 27.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 512.552+519.713

Скобелєв В. В., к.ф.-м.н.

Аналіз автоматів на параметризованих многовидах над асоціативним кільцем.

Досліджено властивості автоматів які визначено на множині траєкторій, що виділені на параметризованому многовиді над скінченим асоціативним не обов'язково комутативним кільцем. Охарактеризовано множини групових автоматів, автоматів які мають стани-джерела та автоматів які мають стани-стоки. Досліджено сім'ї геш-функцій які визначаються автоматами без виходу. Для автоматів Мілі і Мура охарактеризовано множини автоматів які мають стани-близнюки, автоматів які є 1-діагностуємими та автоматів які є оборотними.

Ключові слова: кільця, параметризовані многовиди, автомати, геш-функції.

V. V. Skobelev, Cand. Phys.-Math. Sci..

Analysis of automata determined over parametric varieties over an associative ring.

There are analyzed properties of automata determined over some set of trajectories extracted into parametric variety over any finite associative not necessary commutative ring. The sets of group automata, automata with source-states and automata with flow-states are characterized. Families of hash-functions determined via automata without output mapping are analyzed. For Mealy and Moore models there are characterized the sets of automata with twins-states, 1-distingushisable automata and reversible automata.

Key Words: rings, parametric varieties, automata, hash-functions.

E-mail: yv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Introduction.

Actuality of analysis of automata determined via systems of equations over some finite ring is justified by potential possibility to explore these models in the process of solving information protection problems, including problems of cryptography. Elliptic cryptography [1] justifies expediency of extraction over any finite ring varieties with some algebra, as well as actuality of analysis of automata determined via systems of equations over pointed algebras [2].

One of the most important classes of varieties consists those varieties, which are parametric via polynomials [3]. Thus, from theoretic and applied point of view, both, it is actual problem to investigate properties of automata determined via systems of equations over above pointed varieties into any finite associative not necessary commutative ring. This is the main aim of the given paper.

All algebraic notions non-determined in the given paper are the same as in [4,5].

1. Basic notions.

Let $\mathsf{K}=(K,+,\cdot)$ be any finite associative not necessary commutative ring. The set of invertible elements is denoted by K^{inv} and the center of the ring K is denoted by K_{com}. It is worth to note that the following propositions hold:

1) $K^{inv}=\varnothing$ if and only if $1\notin K$;

2) $K_{com}\neq\varnothing$ and $(K_{com},+,\cdot)$ is the maximal commutative sub-ring of the ring K.

The sets of left and right divisors of zero in the ring K are denoted, correspondingly, by K^{ld} and K^{rd}. The sets of left and right annulments of an element $x\in K$ are denoted, correspondingly, by I_x^l and I_x^r. Thus, we get $I_x^l=\{y\in K\mid yx=0\}$ and $I_x^r=\{y\in K\mid xy=0\}$. It is worth to note that the following propositions hold:

1) $I_0^l=I_0^r=K$;

2) for any $x\in K\setminus(K^{rd}\cup\{0\})$

$$I_x^l=I_{x^2}^l=\ldots=I_{x^m}^l=\ldots=\{0\},$$

and for any $x\in K\setminus(K^{ld}\cup\{0\})$

$$I_x^l=I_{x^2}^l=\ldots=I_{x^m}^l=\ldots=\{0\};$$

3) for any $x\in K^{rd}$

$$I_x^l\subseteq I_{x^2}^l\subseteq\ldots\subseteq I_{x^m}^l\subseteq\ldots,$$

and for any $x\in K^{ld}$

$$I_x^r\subseteq I_{x^2}^r\subseteq\ldots\subseteq I_{x^m}^r\subseteq\ldots;$$

4) for any element $x\in K$ if $a\in K\setminus(K^{ld}\cup\{0\})$ (correspondingly, $a\in K\setminus(K^{rd}\cup\{0\})$) then

© В.В. Скобелєв, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

$I^r_{ss} = I^r_s$ and $aI^r_s = I^r_s$ (correspondingly, $I^l_{ss} = I^l_s$ and $I^l_s a = I^l_s$);

5) $I^l_s \cap I^r_s \neq \varnothing$ for any $x \in K$;

6) $I^l_s = I^r_s = I_s$ for any $x \in K_{zmr}$;

7) $y \in I^l_s$ $(x, y \in K)$ if and only if $x \in I^r_y$;

8) $\mathsf{G}_{s,\alpha} = (I^\alpha_s, +)$ $(x \in K, \alpha \in \{l, r\})$ is some subgroup of the group $\mathsf{G} = (K, +)$.

9) for any $x \in K$ the set I^l_s (correspondingly, the set I^r_s) is a left ideal (correspondingly, a right ideal) of the ring K;

Since the group $\mathsf{G} = (K, +)$ is commutative then any subgroup $\mathsf{G}_{s,\alpha} = (I^\alpha_s, +)$ $(x \in K, \alpha \in \{l, r\})$ is normal subgroup.

The set of elements of the factor-group $\mathsf{G}/\mathsf{G}_{s,\alpha}$ $(x \in K, \alpha \in \{l, r\})$ is denoted by K / I^α_s. If this set is considered as a partition of the set K then it is denoted by π_{K/I^α_s}. It is worth to note that $|\pi_{K/I^\alpha_s}| = |K| \cdot |I^\alpha_s|^{-1}$ and $|B| = |I^\alpha_s|$ $(B \in \pi_{K/I^\alpha_s})$.

We determine the partition $\pi^{(m)}_{K/I^\alpha_s}$ $(m \in \mathbf{N})$ in the following way

$$\widetilde{u} \equiv u(\pi^{(m)}_{K/I^\alpha_s}) \Leftrightarrow \widetilde{u}^m \equiv u^m(\pi_{K/I^\alpha_s}).$$

It is worth to note that

$$\pi^{(1)}_{K/I^\alpha_s} = \pi_{K/I^\alpha_s} \quad (x \in K, \alpha \in \{l, r\}). \qquad (1)$$

In accordance with [5] for any mapping h $(Dom\, h = S)$ the kernel $\ker h$ is an equivalence relation over the set S determined in the following way

$$(s, \widetilde{s}) \in \ker h \Leftrightarrow h(s) = h(\widetilde{s}).$$

If factor-set $S / \ker h$ is considered as a partition of the set S then it is denoted by $\pi_{S,h}$.

For any partition π of the set K and any $y \in K$ we set $y\pi = \{yB \mid B \in \pi\}$ and $\pi y = \{By \mid B \in \pi\}$. It is evident that $y\pi$ (correspondingly, πy) is some partition of the set K if $y \in K \setminus (K^{ld} \cup \{0\})$ (correspondingly, $y \in K \setminus (K^{rd} \cup \{0\})$). Moreover, for any $y \in K \setminus (K^{ld} \cup \{0\}$ (correspondingly, $y \in K \setminus (K^{rd} \cup \{0\}))$ and $B \in \pi$ there hold identities $|y\pi| = |\pi|$ and $|yB| = |B|$ (correspondingly, identities $|\pi y| = |\pi|$ and $|By| = |B|$).

2. Preliminary results.

Let $m \in \mathbf{N}$ and $a, b \in K$ $(a \neq 0)$. We consider mappings $h : K \to K$ determined either by formula

$$h(t) = at^m + b, \qquad (2)$$

or by formula

$$h(t) = t^m a + b, \qquad (3)$$

It is evident that these mappings coincide with each other if $a \in K_{zmr} \setminus \{0\}$.

Lemma 1. If $h : K \to K$ is any mapping determined by formula (2) then

$$\pi_{K,h} = \pi^{(m)}_{K/I^r_a}. \qquad (4)$$

Proof. Let $h : K \to K$ is any mapping determined by formula (2). For any $t, \widetilde{t} \in K$ we get

$$\widetilde{t} \equiv t(\pi_{K,h}) \Leftrightarrow h(t) = h(\widetilde{t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow at^m + b = a\widetilde{t}^m + b \Leftrightarrow a(\widetilde{t}^m - t^m) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{t}^m - t^m \in I^r_a \Leftrightarrow \widetilde{t}^m \equiv t^m(\pi_{K/I^r_a}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{t} \equiv t(\pi^{(m)}_{K/I^r_a}).$$

Q.E.D.

Lemma 1 implies the following two corollaries.

Corollary 1. If $h : K \to K$ is any mapping determined by formula (2) then

$$|Val\, h| = |\pi^{(m)}_{K/I^r_a}|. \qquad (5)$$

Corollary 2. Let $h : K \to K$ is any mapping determined by formula (2) and $g : K \to K$ is any mapping determined by formula $g(t) = a_1 h(t)$, where $a_1 \in K \setminus (K^{ld} \cup \{0\})$. Then $\pi_{K,g} = a_1 \pi_{K,h}$.

In particular, if $n = 1$ (i.e. $h(t) = at + b$, where $a, b \in K$ $(a \neq 0)$) then formula (1), lemma 1 and corollary 1 imply that there hold identities $\pi_{K,h} = \pi_{K/I^r_a}$ and $|Val\, h| = |\pi_{K/I^r_a}|$.

Similarly, it can be established that the following propositions hold.

Lemma 2. If $h : K \to K$ is any mapping determined by formula (3) then

$$\pi_{K,h} = \pi^{(m)}_{K/I^l_a}. \qquad (6)$$

Corollary 3. If $h : K \to K$ is any mapping determined by formula (3) then

$$|Val\, h| = |\pi^{(m)}_{K/I^l_a}|. \qquad (7)$$

Corollary 4. Let $h : K \to K$ is any mapping determined by formula (2) and $g : K \to K$ is any mapping determined by formula $g(t) = h(t)a_1$, where $a_1 \in K \setminus (K^{rd} \cup \{0\})$. Then $\pi_{K,g} = \pi_{K,h} a_1$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

In particular, if $n=1$ (i.e. $h(t)=ta+b$, where $a,b\in K$ $(a\neq 0)$) then there hold identities $\pi_{K,h}=\pi_{K/I_a^l}$ and $|Val\,h|=|\pi_{K/I_a^l}|$.

It was established that for any mapping $h:K\to K$ determined either by formula (2) or by formula (3) the structure of partition $\pi_{K,h}$ is sufficiently transparent. Unfortunately, even in the case of associative-commutative ring $\mathsf{K}=(K,+,\cdot)$ essentially different situation takes the place for any mapping

$$h(t)=a_0t^m+a_1t^{m-1}+\ldots+a_{m-1}t+a_m, \qquad (8)$$

where $n\geq 2$, $a_0\neq 0$ and at least one of coefficients $a_1,\ldots,a_{m-1}$ differs from zero.

Indeed, let $S=\bigcap_{i=1}^{m-1}I_{a_i}$. Lemmas 1 and 2 imply that for any mapping determined by formula (8) we get

$$\pi|_{S,h|S}=\pi^{(m)}_{S/(S\cap I_{a_0})}.$$

Below it is established that even under the most propitious circumstances the structure of partition $\pi_{K,h}$ is complicated essentially because of distribution of elements of the set $K\setminus S$ over blocks of partition $\pi_{K,h}$.

Lemma 3. If K is any associative-commutative ring with unit and $h:K\to K$ is any mapping determined by formula

$$h(t)=at^2+bt+c \quad (a\in K^{inv},b\in K\setminus\{0\}) \qquad (9)$$

then

$$B_t=\{\widetilde{t}\mid \widetilde{t}\in(I_{a(\widetilde{t}+t)+b}+u)\cap(I_{\widetilde{t}-t}-t-a^{-1}b)\}, \qquad (10)$$

where B_t $(t\in K)$ is the block of partition $\pi_{K,h}$, which contains the element t.

Proof. Let $h:K\to K$ is any mapping determined by formula (9). For any $t,\widetilde{t}\in K$ we get

$$h(t)=h(\widetilde{t})\Leftrightarrow at^2+bt+c=a\widetilde{t}^{\,2}+b\widetilde{t}+c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\widetilde{t}-t)(a(\widetilde{t}+t)+b)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\widetilde{t}-t\in I_{a(\widetilde{t}+t)+b}\\ a(\widetilde{t}+t)+b\in I_{\widetilde{t}-t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\widetilde{t}\in I_{a(\widetilde{t}+t)+b}+t\\ a\widetilde{t}\in I_{\widetilde{t}-t}-at-b\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\widetilde{t}\in I_{a(\widetilde{t}+t)+b}+t\\ \widetilde{t}\in I_{\widetilde{t}-t}-t-a^{-1}b\end{cases}. \qquad (11)$$

It is evident that formulae (11) and (10) are equivalent.

Q.E.D.

Thus, extraction of algebraic mappings $h:K\to K$ determined by formulae (2) and (3) in associative not necessary commutative ring $\mathsf{K}=(K,+,\cdot)$ can be justified by the factor that just for these mappings the structure of the partition $\pi_{K,h}$ is sufficiently transparent.

It is worth to note that above pointed "transparency of the structure of partition" $\pi_{K,h}$ for mappings $h:K\to K$ determined by formulae (2) and (3) essentially differs from the notion "partition with regular structure". Following simple example illustrates this circumstance.

Example. Let $\mathbf{Z}_{p^k}=(\mathbf{Z}_{p^k},+,\cdot)$ is residue ring (p is prime number and $k\geq 8$) and $h(t)=at^m+b$ $(a,b\in\mathbf{Z}_{p^k},a\neq 0)$, where $2\leq m\leq\lfloor 0{,}25k\rfloor$.

If $a=ep^l$ $(1\leq l\leq\lfloor 0{,}25k\rfloor,e\in\mathbf{Z}^{inv}_{p^k})$ then we get $I_a=\{dp^{k-l}\mid d\in\mathbf{Z}_{p^k}\}$ and

$$\pi_{\mathbf{Z}_{p^k}/I_a}=\{I_a\}\cup\{I_a+e_1p^i\mid e_1\in\mathbf{Z}^{inv}_{p^k},i\in\mathbf{Z}_{k-l}\}.$$

Thus,

$$\pi^{(m)}_{\mathbf{Z}_{p^k}/I_a}=\{B_0\}\cup\bigcup_{e_2\in\mathbf{Z}^{inv}_{p^k}}\bigcup_{i=0}^{r}S_{e_2,i},$$

$$B_0=I_a\cup\bigcup_{e_1\in\mathbf{Z}^{inv}_{p^k}}\bigcup_{i=r+1}^{k-l-1}\{I_a+e_1p^i\},$$

$$S_{e_2,i}=\{I_a+e_1p^i\mid e_1\in\mathbf{Z}^{inv}_{p^k}\ \&\ e_1^m=e_2\}.$$

where $r=km^{-1}-1$, if $k\vdots m$, and $r=\lfloor km^{-1}\rfloor$, if $k\not\vdots m$.

3. Investigated models.

Let $V_n(\mathsf{K})$ $(n\in\mathbf{N})$ is the set of all parametric varieties $\mathbf{V}$ in K^n, such that $\mathbf{V}$ is the set of all points with coordinates

$$\begin{cases}v_1=h_1(t)\\ \ldots\ldots\ldots\\ v_n=h_n(t)\end{cases}\quad(t\in K), \qquad (12)$$

under supposition that for every $i=1,\ldots,n$ either

$$h_i(t)=a_it^{m_i}+b_i, \qquad (13)$$

or

$$h_i(t)=t^{m_i}a_i+b_i, \qquad (14)$$

where $m_1,\ldots,m_n\in\mathbf{N}$ and $a_1,\ldots,a_n\in K\setminus\{0\}$.

For simplicity we present (12) in the vector form, i.e. $\mathbf{v}=\mathbf{h}(t)$ $(t\in K)$, where $\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_n)^T$.

It is worth to note that $|\mathbf{V}|=|K/\ker\mathbf{h}|$, where $\ker\mathbf{h}=\bigcap_{i=1}^{n}\ker h_i$ and $\pi_{K,h}=\prod_{i=1}^{n}\pi^{(m_i)}_{K/I_{a_i}}$ $(\alpha_i=r$, if

Kyiv National Taras Shevchenko University

h_i is determined by formula (13) and $\alpha_i = l$, if h_i is determined by formula (14)). Taking into account this factor and transparency of the structure of partitions $\pi^{(\alpha_i)}_{K/l^{\alpha_i}}$, it is sufficient to analyze properties of any construction determined over any variety parametric by system of equations (12), (where h_i is determined by formulae (13) or (14)) just in terms of partition $\pi_{K,\mathbf{h}}$.

Let $\mathsf{F}_{\mathbf{h}}$ is the set of all mappings $\varphi: K \to K$, such that

$$(\tau,\tilde{\tau}) \in \ker \mathbf{h} \Rightarrow (\varphi(\tau),\varphi(\tilde{\tau})) \in \ker \mathbf{h}.$$

On any variety $\mathbf{V} \in V_n(\mathsf{K})$ any mapping $\varphi \in \mathsf{F}_{\mathbf{h}}$ determines the set $\mathsf{T}_{\mathbf{V},\varphi}$ of trajectories

$$\mathbf{h}(\tau_0),\mathbf{h}(\tau_1),\ldots,\mathbf{h}(\tau_n),\ldots \quad (\tau_0 \in K), \qquad (15)$$

where $\tau_{i+1} = \varphi(\tau_i)$ $(i \in \mathbf{Z}_+)$.

It is evident that for any point $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ there exists in the set $\mathsf{T}_{\mathbf{V},\varphi}$ single trajectory starting in point $\mathbf{v}$. Just this factor implies that for any integers $k,l \in \mathbf{N}$, variety $\mathbf{V} \in V_n(\mathsf{K})$ and family of mappings $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k}$, such that $\theta_j \in \mathsf{F}_{\mathbf{h}}$ $(j \in \mathbf{Z}_k)$ there can be determined the set $\mathsf{A}^{(1)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta)$ of Mealy automata

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{h}(\theta_{x_{t+1}}(\tau_t)) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{r}_{x_{t+1}}(\mathbf{q}_t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+) \qquad (16)$$

and the set $\mathsf{A}^{(2)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta)$ of Moore automata

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{h}(\theta_{x_{t+1}}(\tau_t)) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{r}(\mathbf{q}_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \qquad (17)$$

where $\tau_0 \in K$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{h}(\tau_0)$, $\tau_{t+1} = \varphi(\tau_t)$ $(t \in \mathbf{Z}_+)$, $\mathbf{r}_i : K^n \to K^l$ $(i \in \mathbf{Z}_k)$, $\mathbf{r}: K^n \to K^l$, and $x_{t+1} \in \mathbf{Z}_k$ $(t \in \mathbf{Z}_+)$.

It is worth to note that for any automaton $M \in \mathsf{A}^{(1)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta) \cup \mathsf{A}^{(2)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta)$ the set $\mathbf{Z}_k$ is the input alphabet, variety $\mathbf{V}$ is the set of states. The output alphabet for an automaton $M \in \mathsf{A}^{(1)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta)$ is the set $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}_k} Val(\mathbf{r}_j|_{\mathbf{V}})$, while the output alphabet for an automaton $M \in \mathsf{A}^{(2)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta)$ is the set $Val(\mathbf{r}|_{\mathbf{V}})$.

For fixed integers $k,l \in \mathbf{N}$, variety $\mathbf{V} \in V_n(\mathsf{K})$ and family of mappings $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k}$, such that $\theta_j \in \mathsf{F}_{\mathbf{h}}$ $(j \in \mathbf{Z}_k)$ we denote by $\mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ the set of all automata without output mapping determined by equation

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{h}(\theta_{x_{t+1}}(\tau_t)) \quad (t \in \mathbf{Z}_+), \qquad (18)$$

where $\tau_0 \in K$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{h}(\tau_0)$ and $\tau_{t+1} = \varphi(\tau_t)$ $(t \in \mathbf{Z}_+)$.

It is evident that the set of automata $\mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ gives the possibility to characterize all properties of the set of automata $\mathsf{A}^{(1)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta) \cup \mathsf{A}^{(2)}_{k,l}(\mathbf{V},\Theta)$, which can be formulated only in terms of the structure of the transition graph of an automaton.

4. Analysis of the set $\mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$.

A state of an automaton is:

1) a source-state, if it cannot be reached from any state of automaton;

2) a flow-state, if no other state of automaton can be reached from this state.

We denote by $\mathsf{A}^{src}_k(\mathbf{V},\Theta)$ (correspondingly, by $\mathsf{A}^{flow}_k(\mathbf{V},\Theta)$) the set of all automata $M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ with source-states (correspondingly, with flow-states). Formula (18) implies that the following propositions hold.

Proposition 1. Identity $\mathsf{A}^{src}_k(\mathbf{V},\Theta) = \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ holds if and only if there exists such $B \in \pi_{K,\mathbf{h}}$, that $Val\theta_j \cap B = \varnothing$ for all $j \in \mathbf{Z}_k$.

Proposition 2. Identity $\mathsf{A}^{src}_k(\mathbf{V},\Theta) = \varnothing$ holds if and only if for every $B \in \pi_{K,\mathbf{h}}$ there exists $j \in \mathbf{Z}_k$, such that $Val\theta_j \cap B \neq \varnothing$.

Proposition 3. Identity $\mathsf{A}^{flow}_k(\mathbf{V},\Theta) = \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ holds if and only if there exists such $B \in \pi_{K,\mathbf{h}}$, that $\theta_j(B) \subseteq B$ for all $j \in \mathbf{Z}_k$.

Proposition 4. Identity $\mathsf{A}^{flow}_k(\mathbf{V},\Theta) = \varnothing$ holds if and only if for every $B \in \pi_{K,\mathbf{h}}$ there exists $j \in \mathbf{Z}_k$, such that $\theta_j(B) \not\subseteq B$.

We denote by $\mathsf{A}^{gr}_k(\mathbf{V},\Theta)$ the set of all group automata $M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ and by $\mathsf{F}^{(0)}_{\mathbf{h}}$ the set of all mappings $\varphi \in \mathsf{F}_{\mathbf{h}}$, such that

$$(\tau,\tilde{\tau}) \notin \ker \mathbf{h} \Rightarrow (\varphi(\tau),\varphi(\tilde{\tau})) \notin \ker \mathbf{h}.$$

Formula (18) implies that the following propositions hold.

Proposition 5. Identity $\mathsf{A}^{gr}_k(\mathbf{V},\Theta) = \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ holds if and only if the family of mappings $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k}$ consists only elements of the set $\mathsf{F}^{(0)}_{\mathbf{h}}$.

Proposition 6. Identity $\mathsf{A}^{gr}_k(\mathbf{V},\Theta) = \varnothing$ holds if and only if the family of mappings $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k}$ consists some element of the set $\mathsf{F}_{\mathbf{h}} \setminus \mathsf{F}^{(0)}_{\mathbf{h}}$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

We denote by $H_{(M,q)}(u)$ the state of an automaton M into which a state q is transformed under input sequence u.

It is evident that any initial automaton $(M,\mathbf{q}_0)$ $(M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta), \mathbf{q}_0 \in \mathbf{V})$ determines some mapping $H_{(M,\mathbf{q}_0)}: \mathbf{Z}_k^* \to \mathbf{V}$. This mapping can be considered as some hash-function, which presents sequences of elements of the set $\mathbf{Z}_k$ via points of the variety $\mathbf{V}$.

It is worth to note that for any input sequences $u, \widetilde{u} \in \mathbf{Z}_k^*$ there holds the identity

$$H_{(M,\mathbf{q}_0)}(u\widetilde{u}) = H_{(M,H_{(M,\mathbf{q}_0)}(u))}(\widetilde{u}).$$

Thus, any automaton $M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ determines the family of hash-functions

$$\mathsf{H}_M = \{H_{(M,\mathbf{q}_0)} \mid \mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}\}.$$

Let G_k is the set of families of mappings $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k}$, such that the following two conditions hold:

1) $\theta_j \in \mathsf{F}_h^{(0)}$ for all $j \in \mathbf{Z}_k$;

2) $\theta_j(B) \neq \theta_{\widetilde{j}}(B)$ for all $j, \widetilde{j} \in \mathbf{Z}_k$ $(j \neq \widetilde{j})$ and $B \in \pi_{K,h}$.

It is evident that if $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k} \in G_k$ then for any $B \in \pi_{K,h}$ holds the identity

$$|\{\widetilde{B} \in \pi_{K,h} \mid (\exists j \in \mathbf{Z}_k)(\theta_j(\widetilde{B}) \subseteq B)\}| = k.$$

Theorem. For any two states $\mathbf{q}_0, \widetilde{\mathbf{q}}_0 \in \mathbf{V}$ $(\mathbf{q}_0 \neq \widetilde{\mathbf{q}}_0)$ of any automaton $M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ $(\Theta \in G_k)$

$$H_{(M,\mathbf{q}_0)}(u) \neq H_{(M,\widetilde{\mathbf{q}}_0)}(u) \qquad (19)$$

for any input sequence $u \in \mathbf{Z}_k^*$.

Proof. Since $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k} \in G_k$ then the first condition implies that $\theta_j \in \mathsf{F}_h^{(0)}$ for all $j \in \mathbf{Z}_k$.

Thus, if $\Theta \in G_k$ then (see proposition 5) there holds the identity

$$\mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta) = \mathsf{A}_k^{gr}(\mathbf{V},\Theta).$$

Since any $M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ $(\Theta \in G_k)$ is a group automaton then any input sequence $u \in \mathbf{Z}_k^*$ determines some permutation on the set of states $\mathbf{V}$ of an automaton M. This implies that the formula (19) is true.

Q.E.D.

Theorem 1 implies that the following corollary holds.

Corollary 5. For any three states $\mathbf{q}_0, \widetilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ $(\mathbf{q}_0 \neq \widetilde{\mathbf{q}}_0)$ of any automaton $M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ $(\Theta \in G_k)$ there holds the identity

$$H_{(M,\mathbf{q}_0)}^{-1}(\mathbf{q}) \cap H_{(M,\widetilde{\mathbf{q}}_0)}^{-1}(\mathbf{q}) = \varnothing.$$

Thus, it is established that for any automaton $M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta)$ $(\Theta \in G_k)$ the family of hash-functions H_M consists of pair-wise different hash-functions. Besides, searching of any input sequence $u \in \mathbf{Z}_k^*$ of fixed length, such that $H_{(M,\mathbf{q}_0)}(u) = \mathbf{q}$ for any given state $\mathbf{q} \in \mathbf{V}$ under supposition that the state $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}$ is unknown, as well as searching of any input sequences $u, \widetilde{u} \in \mathbf{Z}_k^*$ of fixed length, such that $H_{(M,\mathbf{q}_0)}(u) = H_{(M,\mathbf{q}_0)}(\widetilde{u})$ under supposition that the state $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}$ is unknown, both, are reduced to solving some system of non-linear equations over the ring K.

These factors justify expediency to apply families of hash-functions H_M $(M \in \mathsf{A}_k(\mathbf{V},\Theta), \Theta \in G_k)$ in the process of solving problems of cryptography.

5. Analysis of the sets $\mathsf{A}_{k,j}^{(i)}(\mathbf{V},\Theta)$ $(i = 1,2)$.

Two different states of an automaton are twins-states, if every input symbol transforms them into the same state with the same reaction of an automaton.

Formula (16) implies that the following proposition holds.

Proposition 7. There are twins-states in an automaton $M \in \mathsf{A}_{k,j}^{(1)}(\mathbf{V},\Theta)$ if and only if the family $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k}$ consists only elements of the set $\mathsf{F}_h \setminus \mathsf{F}_h^{(0)}$ and, besides, there exist blocks $B, \widetilde{B} \in \pi_{K,h}$ $(B \neq \widetilde{B})$, such that the following two conditions hold:

1) for any $j \in \mathbf{Z}_k$ the sets $\theta_j(B)$ and $\theta_j(\widetilde{B})$ are subsets of the same block of the partition $\pi_{K,h}$;

2) blocks B and $\widetilde{B}$ are subsets of the same block of the partition $\prod_{j=1}^{k} \pi_{K,j,h}$.

Similarly, formula (17) implies that the following proposition holds.

Proposition 8. There are twins-states in an automaton $M \in \mathsf{A}_{k,j}^{(2)}(\mathbf{V},\Theta)$ if and only if the family $\Theta = \{\theta_j\}_{j \in \mathbf{Z}_k}$ consists only elements of the set $\mathsf{F}_h \setminus \mathsf{F}_h^{(0)}$ and, besides, there exist blocks $B, \widetilde{B} \in \pi_{K,h}$ $(B \neq \widetilde{B})$, such that for every $j \in \mathbf{Z}_k$ the sets $\theta_j(B)$

Kyiv National Taras Shevchenko University

and $\theta_j(\widetilde{B})$ are subsets of the same block of the partition $\pi_{K,k} \cdot \pi_{K,r\circ\mathbf{h}}$.

An automaton is 1-distinguishable, if any two its different states can be distinguished by some input symbol.

Formula (16) implies that the following proposition holds.

Proposition 9. An automaton $M \in \mathsf{A}_{k,j}^{(1)}(\mathbf{V},\Theta)$ is 1-distinguishable if and only if it holds the identity

$$\pi_{K,k} = \prod_{i=1}^{k} \pi_{K,r_i\circ\mathbf{h}}.$$

Similarly, formula (17) implies that the following proposition holds.

Proposition 10. An automaton $M \in \mathsf{A}_{k,j}^{(2)}(\mathbf{V},\Theta)$ is 1-distinguishable if and only if it holds the identity

$$\pi_{K,k} = \pi_{K,r\circ\mathbf{h}}.$$

We denote by $f_{(M,\mathbf{q}_0)}$ the mapping of input semi-group into output semi-group performed by initial automaton $(M,\mathbf{q}_0)$.

Any automaton $M \in \mathsf{A}_{k,j}^{(1)}(\mathbf{V},\Theta) \cup \mathsf{A}_{k,j}^{(2)}(\mathbf{V},\Theta)$ is a reversible one, if every mapping $f_{(M,\mathbf{q}_0)}$ $(\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V})$ is some bijection of input semi-group onto output semi-group. It is evident that any reversible automaton can be considered as mathematical model of some stream cipher.

Formula (16) implies that the following proposition holds.

Proposition 11. An automaton $M \in \mathsf{A}_{k,j}^{(1)}(\mathbf{V},\Theta)$ is reversible one if and only if the following two conditions hold:

1) there exists $\mathbf{S} \subseteq K^l$, such that $|\mathbf{S}| = k$ and $Val(\mathbf{r}_j|_{\mathbf{V}}) = \mathbf{S}$ for all $j \in \mathbf{Z}_k$;

2) $\mathbf{r}_{j_1} \circ \mathbf{h}(B) \neq \mathbf{r}_{j_2} \circ \mathbf{h}(B)$ for all $B \in \pi_{K,k}$ and $j_1, j_2 \in \mathbf{Z}_k$ $(j_1 \neq j_2)$.

Similarly, formula (17) implies that the following proposition holds.

Proposition 12. An automaton $M \in \mathsf{A}_{k,j}^{(2)}(\mathbf{V},\Theta)$ is reversible one if and only if the following two conditions hold:

1) there exists $\mathbf{S} \subseteq K^l$, such that $|\mathbf{S}| = k$ and $Val(\mathbf{r}|_{\mathbf{V}}) = \mathbf{S}$;

2) for all $B \in \pi_{K,k}$ and $j_1, j_2 \in \mathbf{Z}_k$ $(j_1 \neq j_2)$ the sets $\theta_{j_1}(B)$ and $\theta_{j_2}(B)$ are subsets of different blocks of the partition $\pi_{K,r\circ\mathbf{h}}$.

Conclusions.

In the given paper properties of automata determined via systems of equations onto trajectories of parametric varieties into an associative not necessary commutative ring are analyzed. Subsets of group automata, as well as subsets of automata with source-states or flow-states are characterized. Families of hash-functions determined by automata without output function are determined and investigated. Working out in detail properties of pointed families of hash-functions under these or others restrictions onto the set of trajectories forms one of trends for future research.

In the given paper for Mealy and Moore models subsets of automata with twins-states, 1-distinguishable automata and reversible automata are characterized. Working out in detail properties of pointed subsets of automata under these or others restrictions onto the set of trajectories and on output function of automata forms another trend for future research.

Список використаних джерел

1. *Bolotov A.A., Gashkov S.B., Frolov A.B., Chasovskich A.A.* Algorithmic backgrounds of elliptic cryptography. – Moscow: Moskow Energetic Inst., 2000. – 100 p. (in Russian).
2. *Skobelev V.V.* Automata over varieties with an algebra // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky\"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 2. – P. 234-238. (in Ukrainian).
3. *Cox D., Little J., O'Shea D.* Ideals, varieties, and algorithms. An Introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. – Moscow: Mir, 2000. – 687 p. (in Russian).
4. *Kurosh A.G.* Lectures in general algebra. – Moscow: Nauka, 1973. – 400 p. (in Russian).
5. *Cohn P.M.* Universal algebra. – Moscow: Mir, 1968. – 352 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 20.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 519.004.93

Соломянюк І.Г., студ.

До задачі смугової класифікації цифр та букв алфавіту

Розглянуто проблему розпізнавання зашумлених цифрових зображень з використанням алгоритму смугової класифікації на основі методів псевдообернення. Пропонується метод розпізнавання цифрового зображення та його комп'ютерна реалізація в середовищі Matlab. Метод протестований на цифрах та буквах українського алфавіту.

Ключові слова: смугова класифікація, нейронна мережа, псевдообернення.

I. G. Solomianiuk, stud.

To the problem of stripe classification numbers and letters of the alphabet

The problem of distorted digital images recognition using a stripe classification algorithm based on pseudoinverse methods is analysed in this article. The technique of digital image recognition is suggested and its implementation in a computer environment Matlab is studied. This method is tested on numbers and letters of Ukrainian alphabet.

Key Words: stripe classification, neural network, pseudoinverse.

E-mail: Solomeniukinga@gmail.com
Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Теорія і практика проектування систем класифікації інформації на даний момент отримали істотний розвиток в численних роботах [1]-[6]. Проте залишається актуальною проблема підвищення якості розпізнавання образів при дослідженні зображень особи, текстової інформації та інше.

Одним із методів розв'язань задачі класифікації є метод опорних векторів, запропонований В. Н. Вапником і відомий як SVM (Support Vector Machine). Цей метод будує класифікуючу функцію $F(x)$ у вигляді

$$F(x) = sign(\langle w, x \rangle + b),$$

де $x \in R^n$, $\langle\ ,\ \rangle$ - скалярний добуток, w – нормальний вектор до розділяючої гіперплощини, b – параметр. Об'єкти, для яких $F(x) = 1$ потрапляють в один клас, а об'єкти з $F(x) = -1$ - в інший. Далі вибираються такі w і b, які максимізують відстань до кожного класу, складається задача квадратичного програмування, яка розв'язується за допомогою множників Лагранжа.

Іншим підходом до розв'язання даної задачі є побудова деякої нейронної мережі (НМ). Для випадку класифікації цифр та букв будується двошарова НМ, яка включає в себе 35 входів і 43 виходів (букв 33+10 цифр). Функцією активації може бути логарифмічна сигмоїдна функція, яку зручно використовувати, так як вихідні вектори приймають значення із діапазону [0,1]. На прихований рівень НМ виділяється 10 нейронів. Навчання проводиться за допомогою процедури оберненого розповсюдження – розповсюдження сигналів помилки від виходів НМ до її входів, в напрямку оберненому прямому розповсюдженню сигналів.

В роботах [4], [5] був запропонований метод смугової класифікації, побудований на основі псевдообернення. В термінах псевдообернених операцій досить лаконічно і конструктивно представляються необхідні та достатні умови існування Δ-робастної дихотомної лінійної роздільності множини в просторі ознак, а синтез систем класифікації зводиться до пошуку якнайкращих нелінійних трансформацій або компонент вектора ознак або оптимально сформованих лінійних комбінацій компонент. В свою чергу цей пошук полегшується в обчислювальному аспекті за рахунок використання формул представлення збурення псевдообернених матриць при заміні вектор-рядків в початкових матрицях новими вектор-рядками. Ці формули отримуються послідовним застосуванням прямих і обернених формул Гревіля. Природно дані операції допускають використання їх в суперпозиції, а також, що є особливо важливим, в прикладному значенні - у

© І.Г.Соломянюк, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

формі каскадно Δ-робастної дихотомної класифікації точок в просторі ознак.

Теоретичні основи

Будемо вважати, що $x = (x_1,\dots x_m)^T$ - це вектор ознак, компоненти якого описують цифри або букви українського алфавіту. Необхідно визначити лінійну функцію

$$y = a^T x + b^T,\quad y \in R^1,\ x \in R^m,$$

яка буде розділяти в просторі векторів ознак букву/цифру, тобто при $x(j) \in \Omega_x(1)$ мала місце нерівність

$$y(j) = a^T x(j) + b^T \ge \Delta,$$

а при $x(j) \in \Omega_x(2)$ –

$$y(j) = a^T x(j) + b^T \le -\Delta,$$

де $\Omega_x(1) \subset \Omega_x = \{x: x(1),\dots,x(n)\}$ – підмножина векторів ознак, відповідних зображенням першого класу, $\Omega_x(2) \subset \Omega_x$ – підмножина векторів ознак з другого класу, Δ – заданий поріг, що визначає рівень робастності правила класифікації.

Для цього необхідно знайти коефіцієнти лінійного перетворення та значення функції $y(x) = a^T x + b^T$ з допустимої області. Тобто, для функції

$$y(x) = a^T x + b^T$$

мали б місце співвідношення

$$a^T x(j_1) + b^T = y(j_1) \ge \Delta, \qquad (1)$$

для тих j_1, при яких $x(j_2) \in \Omega_x(2)$, і

$$a^T x(j_2) + b^T = y(j_2) \le -\Delta, \qquad (2)$$

для тих j_2, при яких $x(j_2) \in \Omega_x(2)$.

Якщо таких значень коефіцієнтів лінійного перетворення і величин, при яких виконуються співвідношення (1)-(2) не існує, тоді розглядається задача або по більш якісному виборі простору ознак або по здійсненню суперпозиції нелінійних перетворень в даному просторі ознак з метою досягнення умов (1)-(2) після реалізації цих перетворень. Загалом, необхідну і достатню умову розв'язання цієї задачі можна представити у вигляді:

$$y_*^T Z(X) y_* = \min_{y \in \Omega_y(d)} y^T Z(X) y = 0, \qquad (3)$$

де $X = (x(1)\vdots\dots\vdots x(n))$ - матриця вхідних даних, $y \in \Omega_y(d)$ при умовах (1) та (2), $d = (\Delta,\dots,\Delta) \in R^n$, $Z(X) = I_n - X^+ X$ - матриця проектування на ортогональне доповнення до лінійної оболонки, натягнутої на вектор-рядки матриці X в R^n.

При виконанні умови (3) вектор a визначається формулою

$$a = (X^T)^+ y_*. \qquad (3')$$

При цьому, відстань між гіперплощинами знаходимо у вигляді

$$h = \frac{2}{\|a\|} = \frac{2}{y_*^T R(X) y_*}, \qquad (4)$$

де $R(X) = X^+ (X^+)^T$ - проекційна матриця.

Якщо ж не виконується необхідна і достатня умова розв'язності та існування розділяючої гіперплощини, то функціонал (3) можна мінімізувати зміною компонент вектора ознак, використовуючи засоби збурення псевдообернених матриць .

Пошук мінімуму квадратичної функції

$$f(y) = y^T Z(X) y$$

за умови $y \in \Omega_y(d)$ можна реалізувати, наприклад, одним з варіантів алгоритму проектування градієнтного спуску, де операція проектування в ітераційному процесі градієнтного методу здійснюється з урахуванням специфіки обмежень, що дозволяє істотно підвищити швидкість збіжності алгоритму.

З метою врахування обмежень на параметри в градієнтний метод внесені наступні удосконалення:

- Якщо при спуску по знайденому напрямку є вихід за межі області обмежень, то знаходиться точка перетину напрямку спуску з i-ою гіперплощиною G_i, якщо по i-ій компоненті вийшли за межі області D.

За наступну ітерацію приймається знайдена точка перетину з границею.

- Після цього спуск здійснюється по гіперплощині G_i області D, для чого фіксуються ті компоненти вектора x, що вийшли за межі області D (вводиться спеціальний вектор фіксації індексів *vecti_fix*). Причому перший напрямок спуску на гіперплощину G_i одержується як проекція попереднього напрямку на G_i.

- Якщо при спуску по G_i отримана кутова точка обмеження, то здійснюється зняття фіксації всіх індексів вектора *vecti_fix* і проводиться пошук напрямку спуску з кутової

Kyiv National Taras Shevchenko University

точки в область D. Якщо такого напрямку немає, то кутова точка є точкою мінімуму.

Аналогічно для випадку, якщо точка мінімуму знаходиться на границі G.

Результати чисельних експериментів. Порівняльна характеристика методів класифікації: SVM, НМ та МПК.

Експерименти проводилися на цифрах та буквах українського алфавіту. На вхід подавалися зображення із різним ступенем зашумленості. Спочатку проводилося навчання тільки на ідеальних даних. Для наочності було побудовано графік, який ілюструє вхідне – вихідне співвідношення, тобто номер букви на вході повинен відповідати номеру букви на виході (ідеальним розпізнаванням буде той випадок, коли буде отримано діагональ квадранта на графіку).

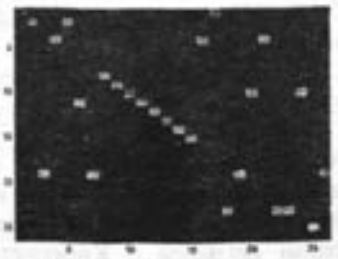


Рис. 1. Відповідність між входом та правильним розпізнаванням на виході

Постає питання, а скільки ж нейронів в прихованому шарі має бути. Для цього було побудовано залежність, яка наочно показує співвідношення нейронів в прихованому шарі і відсоток помилкового розпізнавання.

(- - - помилки тестування, -- - помилки навчання)

Рис. 2. Співвідношення нейронів в прихованому шарі і відсоток помилкового розпізнавання.

Аналізуючи рис.1 та рис. 2 можна помітити, що із збільшенням кількості нейронів, можна домогтися 100% розпізнавання вхідних даних. Так само підвищенням ймовірності правильного розпізнавання буде повторне навчання раніше навченої нейронної мережі великою кількістю даних. Після такого етапу неважко помітити, що зростає відсоток правильного розпізнавання букв/цифр.

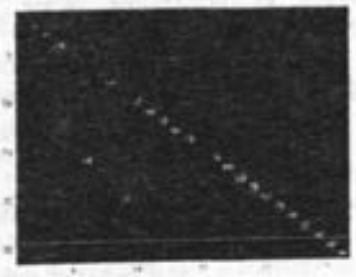
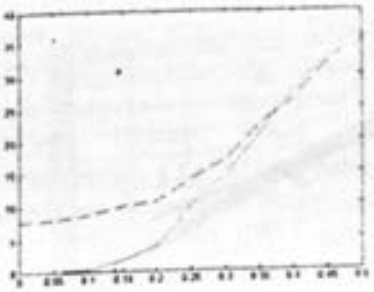


Рис. 3. Відповідність між входом та правильним розпізнаванням на виході

Але все добре працює до певного моменту, при кількості більше 25 нейронів мережа починає допускати помилки.

Також проведено навчання НМ, використовуючи крім ідеальних даних, ще й зашумлені дані та результати порівнювалися. Помічено, що при незначному шумі НМ, яка була навчена спотвореними даними, працює набагато краще (відсоток помилкового розпізнавання нижче).



(- - - навчання без шумів, -- - навчання з шумом)

Рис. 4. Відсоткове співвідношення кількості похибок при розпізнаванні

Отримані результати свідчать про те, щоб підвищити коректність розпізнавання необхідно більше часу на навчання НМ і збільшення

Kyiv National Taras Shevchenko University

кількості нейронів, які знаходяться в прихованому шарі. Якщо є можливість, то краще збільшити розмір вхідних векторів. Найважливішим є те, що в процесі навчання необхідно використовувати більшу кількість наборів вхідних даних, наприклад із великими зашумленнями важливої інформації.

Вектор-ознаки букв українського алфавіту та цифр також класифікувалися методом опорних векторів. Цей метод дозволяє розв'язувати замість багато екстремальних задач, задачу квадратичного програмування, яка має єдиний розв'язок. Автоматично визначається число нейронів прихованого шару, яке дорівнює числу опорних векторів. Принцип оптимально розділяючої гіперплощини призводить до максимізації ширини розділяючої смуги між класами, тобто до більш ефективної класифікації. Градієнтні нейромережеві методи обирають положення розділяючої гіперплощини довільним чином. Але, якщо навчаюча вибірка містить великі зашумлення, то вони значним чином впливають та враховуються при побудові розділяючої гіперплощини. В методі є досить мала кількість параметрів для налаштування і тому на сильно зашумлених даних навчання проводиться назвичайно повільно, що може призвести до значної похибки роботи методу. Можливі складні та не зрозумілі нелінійні перетворення, які значно ускладнюють класифікацію даних.

Враховуючи недоліки методу опорних векторів та НМ, був розроблений та перевірений на практиці класифікатор, який використовує теорію псевдообернення.

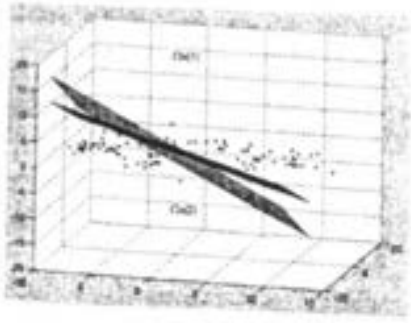


Рис. 4. Приклад класифікації даних

Класифікатор оптимально розділив цифри та букви українського алфавіту гіперплощинами. Визначено ширину смуг роздільності, що дорівнює 0,026 одиниць відстані. Даний метод також дозволив розширити смуги роздільності, завдяки проведеню деяких перетворень над даними (наприклад, змінити вплив найбільш зашумленої компоненти вектора-ознак конкретної букви (цифри) шляхом певних перетворень).

Методи псевдообернення, а також теорія збурень псевдообернених і проекційних матриць, дозволяють побудувати конструктивні, явні схеми засобів виділення в скінченній множині дискретних точок роздільні та віддільні підмножини, дозволяє оптимізувати якість таких процесів перебором елементів підмножини.

Список використаних джерел

1. *C.-W. Hsu and C.-J. Lin.* A comparison of methods for multi-class support vector machines, IEEE Transactions on Neural Networks, 13(2):415-425, March 2002.
2. Kohonen T. Self-Organizing Maps, -3-d ed. – Tokyo: Springer, 2001.-501 p.
3. Vapnik, V.N. Statistical Learning Theory. New York: Wiley. 1998
4. Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П. Оптимизация синтеза гиперплоскостных кластеров и нейрофункциональных преобразований в системах классификации сигналов // Кибернетика и системный анализ. – 2008. -№6. –С. 107-124.
5. Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П. Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации. // Кибернетика и системный анализ. – 2007. - №3. С. 47-57
6. Кусуль Н.М., Шелестов А.Ю., Лавриняк А.М. Інтелектуальні обчислення: Навчальний посібник. – Київ: Наукова думка, 2006.-186 с.

Надійшла до редколегії 20.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 519.68

В.М. Терещенко, д.ф.-м.н., доцент

Побудова мінімального шляху на многогранній поверхні в R^3

Робота присвячена побудові найкоротшого шляху між двома точками на поверхні політопу. Зокрема, розглядаються 2 способи покращення відомого алгоритму Чена [1]. Експерименти на багатьох практичних прикладах показали, що 99% вікон, які створює алгоритм Чена не використовуються при побудові мінімального шляху. В роботі запропоновано фільтрацію непридатних вікон та підтримку пріоритетної черги для покращення продуктивності алгоритму.

Ключові слова: найкоротший шлях, поверхня, політоп, фільтрація, пріоритетна черга.

V.M. Tereshchenko, Dr. Sci.(Phis.-Math.), Associate Professor

Constructing minimum path on the polyhedral surface in R^3

The paper is devoted to constructing the shortest path between two points on the on a polyhedral surface of the polytope. In particular, we propose two techniques to improve the known Chen's algorithm [1]. Experiments on many practical examples showed that 99 % of the windows, which creates Chen's algorithm are no use to define a shortest path. In the paper we propose filtering of useless windows and support priority queues to improve performance of the algorithm.

Key Words: shortest path, polytope, filtering, priority queue.

E-mail: vtereshch@gmail.com
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Постановка проблеми. В роботі розглядаються методи прискорення пошуку найкоротшого шляху між двома точками на многогранній поверхні. Ця задача часто виникає в робототехніці, плануванні руху, навігації, тощо. Також вона є базовою для багатьох інших геометричних проблем. Наприклад, задача розрізу сітки на декілька діаграм, або створення метрик відстані на поверхні часто включають розрахунок найкоротших шляхів. Задача полягає в побудові структури даних, яка дозволяє швидко отримувати відповідь — найкоротший шлях від початкової до будь-якої іншої точки.

Аналіз останніх досліджень. Першими дослідниками цієї задачі були Sharir та Schorr [2], вони розробили алгоритм для опуклого многогранника, що працював за $O(n^3 \cdot \log n)$. Пізніше Mount, Mitchell і Papadimitriou [3] (MMP) запропонували $O(n^2 \cdot \log n)$ алгоритм, де використовувалась парадигма алгоритму Дейкстри. Нарешті Chen та Han [1] запропонували $O(n^2)$ алгоритм (CH), що базується на ключовому спостереженні - "один кут — одне розбиття". Також, Kapoor [4] вдосконалив цей алгоритм до $O(n \cdot \log^2 n)$, але його доведення ще не прийняте науковим співтовариством.

На сьогоднішній день основними підходами до розв'язання задачі є - оптимізація існуючих алгоритмів MMP та CH для покращення їх роботи на практичних даних, незважаючи на те, що складність в найгіршому випадку квадратична. Непогані результати покращення алгоритму MMP були досягнуті в роботі

© В.М. Терещенко 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Surazhsky та інші [5]. На практиці алгоритм працює за субквадратний час.

Новизна та ідея. Основна ідея полягає в тому, щоб відсіяти непродуктивні вікна, які значно погіршують час роботи алгоритму в загальному випадку і витрачають багато пам'яті. Інша ідея полягає в належній підтримці черги з пріоритетами, таким же чином як і в алгоритмі Дейкстри.

Мета статті. Розробити швидку і оптимальну по пам'яті реалізацію алгоритму СН.

2 Метод розв'язання задачі

Нехай S — (тріангульована) багатогранна поверхня в R^3, яка задається множиною граней, ребер та вершин. Вважаємо, що S має n вершин і s — це вершина в багатограннику. Наша задача — визначити найкоротший шлях з вершини s до будь-якої вершини t на поверхні політопу.

Послідовність граней F задається як список суміжних граней $f_1, f_2, ..., f_m + 1$ таких що f_i та $f_i + 1$ містять спільне ребро e_i. Будемо називати список $E = (e_1, e_2, ..., e_m)$ *послідовністю ребер.*

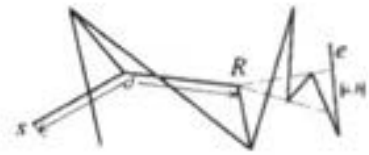
У вивченні проблеми найкоротшого шляху часто використовують метод, що називається *площинна розгортка.* Послідовність ребер $E = (e_1, e_2, ..., e_m)$ буде розгорнута в такий спосіб: обертаємо f_1 навколо e_1 поки площини f_1 і f_2 не співпадуть і т.д. Будемо мати, що всі грані $f_1, f_2, ..., f_m$ лежать в площині f_{m+1}.

Лема 2.1. Загальний вигляд найкоротшого локально шляху — шлях, який проходить через послідовність вершин та послідовність ребер, такий що розгортка шляху вздовж будь-якого ребра — це прямий відрізок і обидва кути шляху, що проходить через вершину більші або дорівнюють $180°$. Глобально найкоротший шлях геодезичний і має додаткову властивість: ніяке ребро не може з'явитися в більш ніж одній послідовності ребер і кожне ребро послідовності має бути простим.

Будемо використовувати 2 типи *вікон* для кодування інформації про геодезичні послідовності: *псевдо-початкове* вікно та *інтервальні* вікна, рис. 1.

Якщо Г закінчується вершиною v, ми просто використовуємо пару (d, v) для збереження ключової інформації, в якій d — найкоротша відстань від початку до вершини v.

(а) псевдо-початкове вікно



(б) інтервальне вікно

Рис. 1.

Якщо Γ закінчується на ребрі e, тоді остання вершина r в Γ визначена як *корінь*. В ході розгортки послідовності ребер наступної для вершини r, потрібні обертання, формується список зображень r. $\{I_i\}$, серед яких останнє зображення I міститься на площині ребра e. Множина точок, що утворюють прямолінійні відрізки найкоротшого шляху по розгортці називається *інтервалом*, або [a,b]. Тоді, можна назвати четвірку $(d, I, e, [a, b])$ *інтервальним вікном*, в якому d — найкоротша відстань з початкової вершини s до кореня r.

Під час розширення вікна, псевдо-початкове вікно в сідловій вершині v (сума інцидентних кутів більша за 2π) або в граничній вершині v може мати дочірні вікна: інтервальне вікно на кожному ребрі, протилежному до v та псевдо-початкове вікно на кожній вершині, прилеглій до v, в той час як інтервальне вікно на ребрі e може мати не більше трьох дочірніх: два інтервальних вікна на двох ребрах, наступних за e та одне псевдо-початкове на вершині, протилежній e. Зважаючи на такі відношення "батьківські-дочірні", можна побудувати дерево послідовності T експоненціального розміру, що містить вікна. T буде мати не більше n рівнів, де n — кількість граней. СН-агоритм уникає експоненційної складності, завдяки наступній Лемі 2.2, а саме властивості "один кут — одне розбиття". На рис. 2 два вікна w_1 та w_2 входять в v_1v_2v з ребра $\overline{v_1v_2}$ і обидва покривають вершину v.

"Один кут — одне розбиття" означає, що або w_1 або w_2 може мати два дочірніх інтервальних вікна під час розповсюдження вікна. Можна

Kyiv National Taras Shevchenko University

сказати, що дво-дочірне вікно займає кут v_1vv_2 у одно-дочірнього.

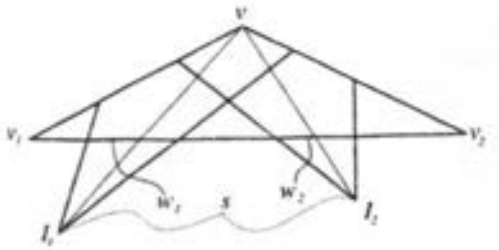


Рис.2.

Звичайно, w_1 та w_2 можуть також мати псевдо-початкові дочірні вікна у v, якщо тільки вони забезпечують найкоротшу відстань до v.

Лема 2.2. Нехай w_1 та w_2 два вікна на одному й тому ж ребрі $\overline{v_1v_2}$ як на рис. 2. Якщо обидва покривають вершину v, тоді не більше як один з них може мати два дочірні вікна, які можуть використовуватися для визначення найкоротшої послідовності.

Алгоритм Чена (CH)

1.Проводимо ініціалізацію: для всіх вершин, крім початкової, встановлюємо відстані в $+\infty$, потім асоціюємо кожний кут з нульовим інтервальним вікном та кожну вершину з нульовим псевдо-початковим вікном. Нарешті, вводимо FIFO чергу Q для зберігання подій.
2.Присвоюємо початковій вершині відстань 0, створюємо псевдо-початкове вікно w для s і кладемо w в Q.
3. ПОКИ Q не порожня і рівень не перевищує число граней n:
- беремо вікно w з Q;
- якщо w — псевдо-початкове, w=(d, v)
- якщо $d <$ поточна оцінка відстані в v
- оновлюємо значення відстані v;
- якщо v — сідлова - видаляємо всі старі псевдо-початкові вікна в v та його піддеревах.

4. Для кожного ребра, протилежного v, додаємо дочірне вікно $(d, v, e, [0, I])$ у хвіст списка Q.
5. Оновлюємо відстань кожної вершини v' суміжної до v через w і додаємо псевдо-початкове вікно
$\left(d+\left|\overline{vv'}\right|, v'\right)$ в Q якщо $d+\left|\overline{vv'}\right| <$ *відстань у* v'

ІНАКШЕ // w — інтервальне, $w = (d, I, e, [a, b])$
6. Якщо w має тільки одне дочірне вікно на лівому (правому) ребрі або w не зайняло протилежний кут у w' відповідно до Леми 2.2, тоді:
-рахуємо лише дочірні і заносимо в Q;
ІНАКШЕ // w займає протилежний кут у w'
7. Видалити скасоване піддерево w'.
8. Порахувати два дочірні дерева w і занести в Q.
9. Перевірити чи w може давати найкоротшу відстань до v, протилежно ребру e; якщо так, оновлюємо відстань у v; і якщо v — сідлова або гранична, необхідно також згенерувати псевдо-початкове вікно в v і вставити в чергу Q.

Chen та Han [1] довели, що загальне число вузлів, що буде згенероване (включаючи скасовані) $O(n^2)$ замість експоненціального. Але, щоб досягнути пам'яті $O(n)$ вони радять зберігати лише вузли листів та гілок, відкидаючи одно-дочірні інтервальні вікна.

Перевірка вікон за відстанями до вершин.

Як було сказано вище, низька ефективність CH-алгоритму спричинена створенням великої кількості зайвих вікон. Спробуємо ввести більш строгу перевірку для нових вікон, що створюються. Розглянемо ситуацію на рис. 3.

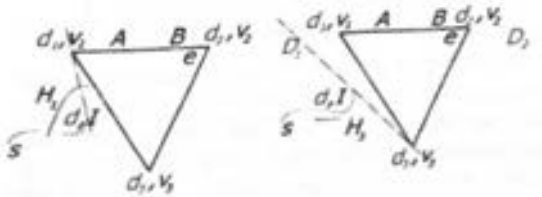


Рис.3.

Вікно $w = (d, I, e, \overline{AB})$ кодує множину найкоротших шляхів, що входять в трикутник через ребро $\overline{v_1v_3}$ і виходять через відрізок AB. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 2.3. *Нехай w — вікно, що входить у $v_1v_2v_3$ через ребро $\overline{v_1v_3}$. Покладемо, що d_1, d_2, d_3 - мінімальні відстані відповідно у вершинах v_1, v_2, v_3. Тоді w не може визначати*

Kyiv National Taras Shevchenko University

найкоротшу послідовність, якщо

$d + |IB| > d1 + |v_1 B|$ *або*

$d + |IA| > d2 + |v_2 A|$ *або*.

$d + |IB| > d3 + |v_3 A|$

Таким чином, можна відсікти переважну більшість зайвих вікон і також уникнути подальшого їх поширення.

Підтримка черги з пріоритетами

Нагадаємо, що багато алгоритмів найкоротшого шляху (напр. алгоритм Дейкстри, MMP та ін.) підтримують чергу з пріоритетами таким чином, щоб "найближча" подія була оброблена першою. Щоб застосувати цю техніку, необхідно ввести поняття метрики відстані $|\cdot|$ для вікон і забезпечувати $|w| \le |w'|$ якщо w — дочірня вершина w'. Для псевдо-початкового вікна $w = (d, v)$, просто визначимо $|w| = d$; і для інтервального вікна $w = (d, I, e, [a,b])$, наступного визначення достатньо

$$|w| = d + \min_{p \in [a,b]} |Ip|$$

Далі можна довести, що якщо вікна $w_1, w_2, ..., w_k$ досягаються в плоскій розгортці певної геодезичної послідовності, то

$$|w_1| \le |w_2| \le ... \le |w_k|.$$

CH -алгоритм виконує розповсюдження вікон рівень за рівнем, а не від ближнього до далекого. Оскільки манера "по відстані" більш сумісна з проблемами найкоротших шляхів, зберігання пріоритету черги дає надію на подальшу оптимізацію алгоритму.

3 Обгрунтування складності

Що стосується складності, то в найгіршому випадку вона залишається $O(n^2 \log n)$. Ця складність виходить з того, що кожне ребро має максимум $O(n)$ вікон, тобто маємо $O(n^2)$ всього вікон. $\log n$ - швидкість пошуку в черзі з пріоритетами. На практиці ж, для більшості фігур, ребра містять лише $O(\sqrt{n})$ вікон.

4 Висновки

У статті розглянуто проблему пошуку найкоротших шляхів. Головною метою даного дослідження є демонстрація техніки відфільтровування непотрібних вікон, використовуючи поточні оцінки відстаней до вершин та розглянути техніку, що включає підтримку черги з пріоритетами. Запропонований алгоритм значно покращує CH-алгоритм [1] і по часу і по пам'яті та навіть працює швидше, ніж MMP-алгоритм [3].

Список використаних джерел

1. Chen, J. and Han, Y. Shortest paths on a polyhedron // *In Proc. of the 7-th an. Symposium on Computational geometry.* ACM Press, New York, USA, P. 360–369, 1990.
2. M. Sharir and A. Schorr. On shortest paths in polyhedral spaces // *SIAM J. Comput.*, 15, P.193-215, 1986.
3. S. B. Mitchell, D. M Mount, C.H. Papadimitriou. The discrete geodesic problem // *SIAM J. Comput., 16, N 4*, P. 647-668, 1987.
4. S. Kapoor. Efficient computation of geodesic shortest paths // *Proc. of the 31-th an. ACM Symposium on Theory of computing, Atlanta*, GA USA, P. 770 - 779, 1999.
5. Surazhsky, V., Surazhsky, T., Kirsanov, D., Gortler, S. J., and Hoppe, H. Fast exact and approximate geodesics on meshes // *ACM Trans. Graph.* 24, 3, P. 553–560, 2005.
6. Xin S. and Wang G. Efficiently determining a locally exact shortest path on polyhedral surfaces // *Computer-Aided Design*, 39, 12, P. 1113–1119, 2007.

Надійшла до редколегії 07.06.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 519.68

Терещенко В.М., д.ф.-м.н., доцент,
Трегубенко А.С.,аспірант

Пошук мінімального зв'язаного шляху у простому многокутнику

Робота присвячена дослідженню задачі швидкого пошуку мінімального зв'язного шляху між двома довільними точками у простому многокутнику без використання точок Штейнера.

Ключові слова: мінімальний зв'язаний шлях, простий многокутник, точки Штейнера, пошуковий запит.

Tereshchenko V.N., Dr. Sci.(Phis.-Math.), As. Prof., Tregubenko A.S. PhD student

Finding a minimum link path within a simple polygon

The paper is devoted research the problem of the fast finding a minimum link path between two arbitrary points within a simple polygon without using Steiner points.

Key Words: minimum link path, simple polygon, Steiner points, search query.

E-mail: vtereshch@gmail.com
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Постановка проблеми. В роботі досліджуються можливість побудови алгоритму пошуку найкоротшого шляху між двома точками у простому многокутнику на площині, який покращує ефективність існуючих підходів. При цьому використовуючи лише вершини многокутника. Ця задача часто виникає в робототехніці, плануванні руху, навігації, тощо.

Актуальність проблеми. В наш час алгоритми знаходження оптимальних шляхів за евклідовою мірою використовуються майже в усіх комп'ютерних іграх. Зв'язна міра використовується у робототехніці, коли зміна напрямку руху є набагато дорожчою за сам рух. Зв'язна міра без використання точок Штейнера використовується у задачах передавання прямолінійних бездротових сигналів, де необхідно мати можливість швидко визначати, як передати сигнал з однієї точки території до іншої з використанням найменшої кількості передавачів.

Аналіз останніх досліджень. Для задач зв'язної міри у простому многокутнику конструкція, відома як віконне розбиття, виявилася дуже корисною [1]. Одним із зручних способів опису цієї конструкції є використання ідеї видимості. Покладемо, що усі фронтально видимі з s точки лежать на відстані 1. Позначимо цю множину точок через V_1. Границі між видимими та невидимими точками назвемо вікнами. Точки з $P \setminus V_1$, які є видимими з якоїсь точки вікна V_1 будуть мати відстань 2. Повторення цієї конструкції дасть усе віконне розбиття многокутника. Для фіксованої точки s структура даних «віконне дерево» [1] дає можливість робити пошук за $O(\log N)$ використовуючи $O(N)$ пам'яті. Для випадку задання точок по запиту в роботі [AMS92_2] авторами запропонована структура даних, яка дозволяє робити пошук за $O(\log N)$, проте з використанням $O(N^3)$ загального часу пошуку та $O(N^3)$ пам'яті на попередню обробку. У статті В. Мак Авеня пропонується алгоритм, який працює за час $O(E(n)\alpha(n)\log^2 n)$ [3]

Новизна та ідея. Обмеження на точки Штейнера не дозволяє використати віконне розбиття для пошуку найкоротшого зв'язаного шляху. Тому для побудови ефективного алгоритму розв'язання задачі в роботі запропоновано розбиття многокутника на області видимості, в яких здійснюється локалізація точки.

© А.С. Трегубенко, В.М. Терещенко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

2. Постановка задачі та побудова алгоритму

Означення. Мінімальний зв'язний шлях – це шлях з найменшою кількістю ребер.

Означення. Точкою Штейнера називається точка, яка не належить вхідній множині.

Геометрична постановка задачі. Нехай заданий простий многокутник P та пара точок $s,t \in P$. Знайти мінімальний зв'язний шлях в P з s до t без використання точок Штейнера, рис.1.

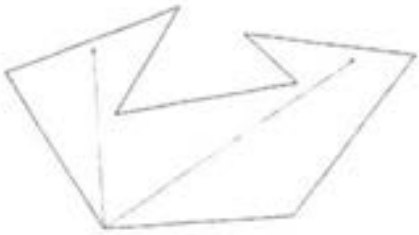


Рис.1. Мінімальний зв'язний шлях без використання точок Штейнера.

2.1. Пошук без попередньої обробки

Задача пошуку мінімального зв'язаного шляху без використання точок Штейнера зводиться до задачі пошуку у графі видимості многокутника. Для цього:

1) спочатку перевіряються точки на пряму видимість за $O(N)$, переглянувши перетин з'єднуючого відрізку із сторонами многокутника;

2) якщо перетину немає то найкоротший шлях буде 1;

3) інакше, треба будувати граф видимості для вершин ($O(E)$, [4]);

4) знайти видимі вершини з точок s і t ($O(N)$, [5]);

5) знайти дерево мінімальних шляхів від вершини s за допомогою пошуку у ширину ($O(E)$, [6]);

6) переглянувши усі видимі вершини многокутника з t знайти ту, відстань від якої до s буде найменшою.

Загалом алгоритм потребуватиме $O(E)$ часу і пам'яті.

2.2. Пошук із попередньою обробкою (алгоритм областей видимості)

Для швидкої реалізації запиту найкоротшого шляху необхідно винести побудову дерева мінімальних шляхів у попередню обробку. Для цього розіб'ємо многокутник на області видимості, рис.2.

Означення. Областю видимості многокутника назвемо таку його частину, для всіх точок з якої множина видимих вершин буде однаковою.

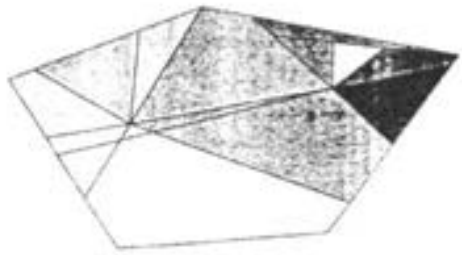


Рис.2. Області видимості в опуклій оболонці.

Алгоритм попередньої обробки.

1. Спочатку будуємо граф видимості для вершин ($O(E)$, [4]).

2. Далі будуємо опуклу оболонку нашого многокутника за алгоритмом Лі. Опукла оболонка буде коренем дерева областей ($O(N)$, [7]).

3. Знайдемо список вікон, які утворюють усі вершини многокутника ($O(N^2)$, [1]).

4. Додамо до цього списку початкові сторони многокутника.

5. Усі відрізки списку будемо зберігати таким чином, щоб з лівого боку від відрізка була видима частина, а з правого боку – невидима. Нехай S – це кількість таких відрізків.

6. Далі у випадковому порядку додаємо вершини до дерева областей наступним чином:

- вносимо відрізок у вершину дерева областей;

Kyiv National Taras Shevchenko University

- якщо вершина є листком, то розрізаємо відрізком на 2 області та записуємо частини що утворилися у відповідні нащадки цієї вершини, а відрізок – як відтинаючу пряму цієї вершини;

- інакше, перевіряємо позицію відрізка відносно відтинаючої прямої у вершині;

- якщо він не перетинає її – продовжуємо пошук у тому під-дереві, у яке потрапив відрізок;

- якщо перетинає – розділяємо відрізок на 2 частини та вставляємо ці частини у відповідні під-дерева;

- усі відрізки, що накладаються вилучаємо.

7. Нехай R – загальна кількість утворених областей. Для кожної з утворених областей видимості знаходимо центр та видимі точки з цього центру ($O(N)$, [5]). На основі цього будуємо дерево найкоротших шляхів пошуком у ширину ($O(E)$,[6,7]).

Алгоритм пошуку.

1. Перевіряємо точки на видимість.

2. Якщо прямої видимості немає – починаємо пошук.

3. Локалізуємо точки у дереві ($O(\log R)$). Для цього ми у вершині дерева перевіряємо, з якого боку від відтинаючої прямої знаходиться точка і продовжуємо пошук у відповідному під-дереві, поки не дійдемо до листка. Якщо точка знаходиться на відтинаючій прямій то за нашою побудовою ліва частина для відрізка, який утворив відтинаючу пряму, буде видимою, отже пошук продовжувати будемо в лівому під-дереві.

4. Локалізувавши точки, знаходимо ту видиму вершину з точок видимості іншої області, до якої найкоротший шлях від першої області ($O(N)$), рис.3.

5. Відповідно ця довжина + 2 буде мінімальною зв'язною довжиною, а сам шлях можна вивести за $O(W)$, де W - його довжина.

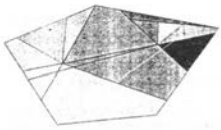


Рис. 3. Локалізація точок та пошук найкоротшого шляху.

2.3. Удосконалення попередньої обробки для прискорення пошуку

Для досягнення часу запиту $O(\log N)$ під час попередньої обробки знайдемо карту мінімальних шляхів між усіма областями видимості ($O(R^2 N)$ час, $O(R^2)$ пам'ять). Тоді під час пошуку необхідно буде лише локалізувати точки ($O(\log R)$). Виведення шляху буде здійснено за $O(W)$, де W - його довжина.

3. Обґрунтування коректності та складності

Лема 1. Нехай S це кількість ребер а R кількість областей видимості, тоді має місце наступне:

1) усі області є опуклі;.
2) $S < N(N-1)$;
3) $R \le \frac{(S+1)S}{2} + 1$.

Доведення.

1). Спочатку в дереві знаходиться опукла оболонка многокутника, а отже опукла множина. По індукції маємо, що на кожному кроці ми будемо розрізати опуклу множину прямою, а отже отримаємо теж опуклі множини.

2). Вікно задається двома вершинами многокутника.

3) Спочатку маємо одну область. А $(i+1)$-й відтинаючий відрізок, який ми додаємо, може перетинатися не більше ніж з i відрізками (прямими), які вже були додані, а отже утворить

Kyiv National Taras Shevchenko University

не більше ніж $i+1$ нових областей. Отже

$$R \le 1 + \sum_{i=1}^{S} i \le \frac{(S+1)S}{2} + 1$$

Середня оцінка. Для випадкових многокутників $R - N^2$

Лема 2. З усіх точок області видимості видно однакову множину вершин.

Доведення. Нехай це не так і є дві точки, одна з яких бачить вершину V, а інша не бачить. Але тоді між ними має бути або вікно, або сторона многокутника, які б розділили область на дві частини.

Загальна складність алгоритму. Алгоритм потребує $O(RN^2)$ часу та $O(RN)$ пам'яті на попередню обробку та $O(\log R + N)$ часу на запит. Удосконалений алгоритм потребує $O(R^2N)$ часу та $O(R^2)$ пам'яті на попередню обробку та $O(\log R)$ часу на запит. Виведення мінімального шляху здійснюється за $O(W)$, де W - його довжина, рис. 4.

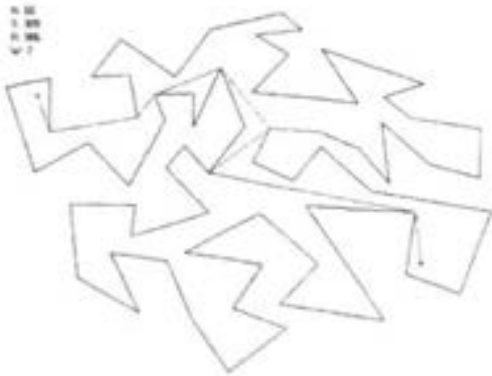


Рис. 4. Числові характеристики

4. Практична частина

В роботі запропонована програмна реалізація розробленого алгоритму у середовищі Delphi 7. Основними модулями програми є: генерація розбиття на області, вставка у дерево областей та локалізація точки у дереві.

5. Висновки

У роботі розглянуто алгоритми пошуку мінімального зв'язного шляху у многокутнику без використання точок Штейнера. Розв'язання задачі зводиться до задачі пошуку у графі видимості, для якого нема швидших алгоритмів за звичайні для незважених графів [8]. Для покращення алгоритму попередньої обробки можна запропонувати впорядковану побудову дерев мінімальних шляхів для областей видимості. При цьому часова складність попередньої обробки в простому алгоритмі буде покращена з $O(RN^2)$ до $O(RN)$, а в удосконаленому. Відкритим лишається питання побудови збалансованого дерева областей видимості без збільшення кількості цих областей.

Список використаних джерел

1. S. Suri. On some link distance problems in a simple polygon // *IEEE Trans. Robot. Autom., 6:108-113, 1990.*

2. E.M. Arkin, J.S.B. Mitchell, and S.Suri. Optimal link path queries in a simple polygon // *In Proc. 3rd ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms, pages 269-279, 1992.*

3. W. McAveney. Minimum link path finding methods in 2D polygons // *CS 633 Fall 2007.*

4. J. Hershberger. An optimal visibility graph algorithm for triangulated simple polygons // *Algorithmica, 4:141-155, 1989.*

5. B. Joe and R.B. Simpson. Correction to Lee's visibility polygon algorithm // *BIT, 27:458-473, 1987.*

6. A. Goldberg. P-to-P shortest path algorithms with preprocessing / *Sofsem, 2007.*

7. D.T. Lee. On finding the convex hull of a simple polygon // *IJCIS, Vol.12, No. 2, pages 87-98, 1983.*

8. M. Nouri, M.Ghodsi. Space-query-time tradeoff for computing the visibility polygon // *LNCS, Vol 5598/2009, pages 120-131, 2009.*

Надійшла до редколегії 28.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 004.93

Умянський В. І., аспірант

Розробка алгоритму локалізації та розпізнавання машиночитуваної зони подорожніх документів

Машиночитувана зона – необхідний атрибут сучасних подорожніх документів, вона присутня на паспортах громадян більшості країн світу, закордонних паспортах України, державних ідентифікаційних картках громадян. Вона містить два або три рядки символів, в яких кодується основна інформація про власника документа з метою її зчитування комп'ютером шляхом оптичного розпізнавання символів. Задача локалізації та розпізнавання символів машинно зчитуваної зони є складною та актуальною для застосування у мобільних системах зчитування документів, оскільки алгоритми, призначені для стаціонарних систем, не можливо використати для зображень, що отримуються за допомогою веб-камери мобільного пристрою.

У даній роботі пропонується новий підхід до локалізації та розпізнавання машинно зчитуваної зони документів.

Ключові слова: машиночитувана зона, розпізнавання, електронний паспорт, безпека

V. I. Umansky, PhD student

An algorithm for machine readable zone of traveling documents detection and recognition

Machine readable zone is a necessary attribute of any modern traveling document, it's present on passports of most countries around the world and on Ukrainian foreign passports as well. It contains two or three lines of symbols which encode basic information about the owner of document in order to be read by computer using optical character recognition technique. Machine readable zone localization and recognition task is hard and topical for using in mobile document reading systems as algorithms designed for stationary systems are not usable for images, received from web-camera of mobile device.

In this paper a new approach for machine readable zone localization and recognition is introduced.

Key Words: machine readable zone, recognition, electronic passport, security

*E-mail: vietal@list.ru

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Міжнародна асоціація авіаперевізників (ICAO) запропонувала стандарт [1], що був пізніше затверджений комітетом ISO (ISO/IEC 7501-1) щодо машиночитуваних подорожніх документів, в тому числі паспортів. Стандарт покликаний поліпшити безпеку та спростити формальні процедури перетину кордонів за рахунок включення елементів, призначених для машинного зчитування, зокрема спеціальної машиночитуваної зони (МЗЗ) та електронного чипу, в структуру документу. МЗЗ завжди знаходиться в нижній частині документа, містить основну інформацію про власника паспорта, зокрема номер паспорту, прізвище та ім'я, та призначена для швидкого введення цієї інформації в електронну систему методом оптичного розпізнавання символів.

Для стаціонарних систем зчитування паспорту проблема розпізнавання символів МЗЗ фактично є вирішеною, оскільки спеціалізовані оптичні сканери мають відповідний до паспорту розмір, рівномірну підсвітку та фіксатор паспорту в певному положенні. У випадку мобільних застосувань для отримання зображення паспорту припускається використання веб-камери або протяжних сканерів замість громіздких стаціонарних сканерів, що призводить до значно більших допусків на зміщення та поворот паспорту на отримуваному зображенні, а також більш низьку якість зображення. Крім цього, нерівномірність освітлення та інші фактори значно ускладнюють процес локалізації та розпізнавання зони машинного зчитування. Це в цілому унеможливлює використання існуючих алгоритмів. Враховуючи зростаючі вимоги до безпеки кордонів держави, дана задача є досить актуальною. В даній роботі пропонується новий метод локалізації та розпізнавання зони машинного зчитування.

© Умянський В.І., 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Постановка задачі

На вході задається кольорове зображення або зображення в тонах сірого головної сторінки паспорта, приклад такого зображення представлено на Мал. 1. Головна сторінка паспорту призначена як для візуального, так і машинного зчитування. Вона складається з декількох зон (Мал. 2), деякі з них є необов'язковими, деякі мають нефіксоване розташування. Зона, призначена для машинного зчитування є обов'язковим елементом та завжди займає нижню частину документа.

Мал. 1. Приклад головної сторінки машинозчитуваного паспорту. Машинозчитувана зона розташована в нижній частині документу.

МЗЗ паспорту складається з двох рядків по 44 символи. Стандартом зафіксовані фізичні розміри сторінок паспорту, розташування зони, розмір та гарнітура шрифту. Також обмежено набір допустимих символів: дозволеними лише є великі символи латиниці, цифри та знак < (Мал. 3).

Мал. 2 Приклад розташування зон на паспорті [1]

МЗЗ містить основну інформацію про власника паспорта: номер паспорту, прізвище та ім'я, стать, дату народження, термін дії документу, код країни видачі паспорту та громадянство, додаткові дані. Найбільш важливі дані як, наприклад, номер паспорту та його термін дії захищені контрольними сумами – таким чином, в процесі розпізнавання, є можливість перевірити відсутність помилок.

```
0123456789
ABCDEFGHI
JKLMNOPQR
STUVWXYZ <
```

Мал. 3 Набір символів, дозволений в зоні машинного зчитування

Оскільки маркерів для локалізації зони машинного зчитування не передбачено, орієнтація та зміщення паспорта на зображенні є невідомими, єдиним надійним способом пошуку МЗЗ є виявлення структури, що відповідає структурі тексту машинозчитуваної зони: кількість символів в рядку та кількість рядків зафіксовано в стандарті, так само як і відстань між символами рядка та відстань між рядками. Крім того, проаналізувавши набір допустимих символів (Мал. 3) можна помітити, що всі символи складаються з єдиної компоненти зв'язності, що значно спрощує локалізацію окремих символів МЗЗ.

Алгоритм розпізнавання МЗЗ

Загальна схема підходу до локалізації машино зчитуваної зони, що пропонується, зображено на Мал. 4: на вхідному зображенні паспорта виконується сегментація надрукованого тексту та фону шляхом бінаризації зображення, на отриманому двоколірному зображенні виконується пошук компонент зв'язності, та аналізуються їх розміри та взаємне розташування за допомогою алгоритмів пошуку мінімальних обмежуючих кіл та тріангуляції Делоне з метою визначення тих компонент, що відповідають символам МЗЗ. Детальний опис етапів роботи алгоритму наведено нижче.

Мал. 4 Схема процесу локалізації зони машинного зчитування.

Kyiv National Taras Shevchenko University

На першому етапом роботи алгоритму виконується бінаризація вхідного зображення: з кольорового зображення отримується чорно-біле – таким чином текст відділяється від фонового візерунка паспорта. Оскільки сторінка паспорту може бути освітлена нерівномірно, звичайна бінаризація з єдиним порогом для всього зображення є неприйнятною, тому використовується адаптивна бінаризація, яка визначає поріг для кожної точки окремо на основі інтенсивності точок з певного околу. Для вирішення цієї задачі було обрано адаптивну бінаризацію Гаусса [3]. Суть методу полягає в наступному. Позначимо вхідне зображення як $I(x,y), x=\overline{1,n}, y=\overline{1,m}$, вихідне відповідно як $O(x,y), x=\overline{1,n}, y=\overline{1,m}$. Поріг визначається для кожного пікселя окремо як зважена двовимірним Гаусіаном сума інтенсивностей сусідніх пікселів, таким чином, значення пікселю вихідного зображення обчислюється за наступною формулою:

$$O(x,y)=\begin{cases}1, & I(x,y) > \dfrac{1}{S}\sum_{i=x-r}^{x+r}\sum_{j=y-r}^{y+r} I(i,f)\cdot e^{\frac{-(x-i)^2-(y-j)^2}{2\sigma^2}} \\ 0 & \text{інакше}\end{cases}$$

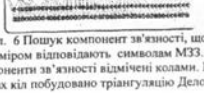
де $S=\sum_{i=x-r}^{x+r}\sum_{j=y-r}^{y+r} e^{\frac{-(x-i)^2-(y-j)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma=0.3(r-1)+0.8$

Параметр r визначає розмір околу сусідніх пікселів і для вхідного зображення розміром 640×480 оптимальну якість зображення можна отримати прийнявши $r=21$. Даний етап є важливим, оскільки від нього повністю залежить робота наступних етапів. Приклад зображення, бінаризованого за допомогою даного підходу, наведено на Мал. 5.

Мал. 5 Бінаризоване зображення головної сторінки паспорту

На наступному етапі виконується пошук зв'язних компонент на бінаризованому зображенні [2], розумінні визначення 8-зв'язності. Деякі зв'язні компоненти відповідають символам машинозчитуваної зони, деякі – іншим символам на сторінці та шумам.

Для оцінки розміру кожної компоненти зв'язності виконується пошук мінімального охоплюючого кола [3]. Оскільки розміри символів МЗЗ є відомими, можна провести попередню фільтрацію знайдених компонент зв'язності, вилучивши з розгляду ті компоненти, що за розміром точно не можуть відповідати символам машино зчитуваної зони. На Мал. 6 зображено кола, що потенційно відповідають компонентам зв'язності машино зчитуваної зони.



Мал. 6 Пошук компонент зв'язності, що за розміром відповідають символам МЗЗ. Компоненти зв'язності відмічені колами. На центрах кіл побудовано тріангуляцію Делоне.

Очевидно, на зображенні присутня велика кількість компонент зв'язності, що не відповідають символам МЗЗ, але є подібні за розміром. Таким чином, необхідно додатково використати інформацію про просторове співвідношення між символами машино зчитуваної зони. Для цього на центрах знайдених кіл будується тріангуляція Делоне [4] (Мал. 6). Отриманий планарний граф характеризується тим, що його просторово найближчі вершини зв'язані ребром, таким чином, і компоненти зв'язності, що відповідають сусіднім символам МЗЗ необхідно зв'язані ребром.

Мал. 7 Тріангуляція Делоне, побудована на центрах охоплюючих кіл знайдених компонент зв'язності, з видаленими ребрами довжини, що не відповідає відстаням між символами МЗЗ одного рядка

Kyiv National Taras Shevchenko University

Таким чином, далі задача полягає у визначенні ребер, що сполучають символи МЗЗ. Оскільки відстані між символами є фіксованими згідно стандарту [1], відстань між центрами відповідних кіл необхідно знаходиться в певних межах. Серед всіх ребер графа тріангуляції відбираються лише ті, довжина яких знаходиться в певних межах. В наслідок цього граф тріангуляції розпадається на компоненти зв'язності (Мал. 7). Експериментально встановлено, що вершини графа, які відповідають символам МЗЗ, знаходяться в одній компоненті зв'язності (з високою ймовірністю) та утворюють ланцюг. Таким чином, задача зводиться до пошуку двох таких ланцюгів довжиною 44 елементи (кількість символів в рядку МЗЗ), що робиться тривіальним чином. Координати чотирикутника, що містить символи МЗЗ визначаються координатами крайніх символів ланцюгів.

Мал. 8 Вхідне та оброблене зображення. Для відфільтрованих компонент зв'язності зображені їх мінімальні охоплюючі кола. На їх центрах побудовано тріангуляцію Делоне. Знайдена область МЗЗ помічена прямокутником.

Після знаходження чотирикутника, що містить МЗЗ (Мал. 8), відповідна частина оригінального зображення копіюється. Перед розпізнаванням символів, скопійована область бінаризується та з неї видаляються шуми шляхом пошуку та видалення зв'язних компонент невідповідного розміру.

Для безпосереднього розпізнавання тексту на зображенні використано вільну бібліотеку Tesseract, що була додатково навчена на обмеженому наборі символів набраних шрифтом, зазначеним в [1]. Після розпізнавання, у випадку, якщо всі контрольні суми співпадають, виконується розбір МЗЗ на складові компоненти за допомогою регулярних виразів згідно того ж стандарту.

Мал. 9 Приклад зображення ID-картки, що містить трирядкову машино зчитувану зону та результат її обробки запропонованим алгоритмом.

Даний метод також легко поширюється на випадок ID карток [1], що також містять МЗЗ, але вона, на відміну від МЗЗ паспорта, містить три рядки по 30 символів. Розроблений алгоритм є універсальним та автоматично розпізнає тип представленого документу та дані, що містяться в МЗЗ.

Висновок

Було розроблено та реалізовано мовою C++ алгоритм локалізації зони машинного зчитування паспорту з використанням примітивів вільної бібліотеки OpenCV та подальше розпізнавання за допомогою вільної OCR бібліотеки Tesseract. Алгоритм працює в режимі реального часу та є досить стійким щодо нерівномірного освітлення та зашумленості зображення і може бути використаним для мобільної системи зчитування документів. Запропонований підхід можна застосувати для розпізнавання інших об'єктів, що містять подібну до МЗЗ жорстку структуру.

Список використаних джерел

1. Машиносчитываемые проездные документы. Часть 1. Том 1. Издание шестое. — Международная ассоциация гражданской авиации, 2006.
2. Gonzales R.C., Woods R. E. Digital image processing, 2nd edition — Prentice Hall, 2001.
3. Bradsky G., Kaehler A. Learning OpenCV, 1st edition — O'Reilly, 2001.
4. de Berg M., van Creveld M., Overmars M., Schwarzkopf O. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Second, revised edition — Springer, 2000

Надійшла до редколегії 27.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012,3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 004.942; 681.3; 519.876.5

Андрій Л. Фісуненко, аспірант

Модель мультиагентної системи обробки візуальної інформації для вирішення задач реконструкції

Надано огляд сучасного стану моделювання мультиагентних адаптивних систем обробки візуальної інформації з перспективою загальносвітової тенденції зростання обсягів надмірних масивів даних. Визначено доцільність використання мультиагентної архітектури для вирішення задач реконструкції та перспективність моделювання еволюційних процесів в таких системах з наголосом на пошук умов саморозвитку (мета-системних переходів).

Ключові слова: мультиагентні системи, надмірні дані, єдине алгоритмічне середовище, мета-системні переходи, реконструкція.

Andriy L. Fisunenko, PhD student.

The model of a multi-agent visual information processing system for solving reconstruction tasks

A review of state-of-the-art in modeling of multi-agent adaptive systems for visual information processing is presented from a perspective of the worldwide trend of big data increase. It is determined that it is rational to apply multiagent architecture for surface reconstruction problem solving and it is attractive to model their evolutionary processes with a stress on discovering of conditions of self-development (meta-system transitions) for such systems.

Key Words: multiagent systems, extra large data, common algorithmic space, meta-system transitions, reconstruction.

*E-mail: alf.vis @ gmail.com

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Постановка проблеми. Прискорення темпів збільшення обсягів інформації, яка генерується людством, як суцільною системою, та всебічна складність інформаційних систем суттєво загострюють як саму проблему автоматичної обробки даних, так і проблему створення відповідних засобів автоматичної обробки інформації. Традиційно з цим колом задач пов'язані визначені напрямки досліджень та практичних застосувань *штучного інтелекту*. При цьому, загальною тенденцією є зміщення акцентів з систем, що мають наперед визначену поведінку, до таких, що здатні адаптуватися в умовах невизначеного оточуючого середовища [1]. Впродовж останніх двадцяти років продуктивною та плідною вважається концепція інтелектуальності, що базується на *раціональних агентах* [2]. Зокрема, в оглядовому аналізі стратегічних напрямків розвитку штучного інтелекту [3] мультиагентні системи (МАС) визначено, як один з основних.

У зв'язку із експансією технологій віртуалізації обчислювань (cloud-систем) та зростаючому проникненню під'єднаної до Інтернет високопродуктивної персональної, мобільної та побутової обчислювальної техніки, мультиагентні технології стають більш актуальними. Кожен з програмних агентів МАС або їх група можуть бути розміщеними як на окремій віртуальній платформі в cloud-середовищі, так і на клієнтських пристроях. При цьому підсистема, яка відповідає за еволюцію, тобто за створення, розповсюдження та життєві цикли агентів, може працювати в автономному режимі, самостійно виконуючи логіку розширення обчислювальних потужностей, сховищ даних та зовнішніх сервісів, дотримуючись визначених ресурсних обмежень.

Розробка теоретичного базису для побудови автономних або частково автономних МАС із здатністю до накопичення знань та до саморозвитку на основі цих знань та добірки базових правил, що задаються при проектуванні є однією із перспективних проблем.

Більшість існуючих досліджень у галузі МАС пов'язані: 1) з використанням МАС, як моделі визначеного колективного процесу (імітаційне моделювання, наприклад, соціальної чи економічної систем); 2) організацією розподілених обчислень між втіленими та/або програмними агентами. Іноді розглядається самоорганізація обчислень [6], але питання само-

© А.Л. Фісуненко 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

ускладнення (само-розвитку) залишається відкритим.

Новизна запропонованого підходу полягає, у синтезі: по-перше, МАС з базуванням у віртуальних середовищах; по-друге, використанні мультиагентності для задач розподіленої обробки візуальної інформації; по-третє, у пошуку еволюційних моделей, які дозволяють мультиагентним системам розвиватися автономно.

Мета статті полягає у визначенні сучасного стану та напрямків розвитку мультиагентних технологій з перспективою застосування їх для інтелектуальної обробки надвеликих масивів даних візуальної інформації, зокрема для задач реконструкції просторових моделей.

Приклади МАС для обробки візуальної інформації

В публікації [1] зазначено про доцільність та ефективність застосування мультиагентного підходу саме у тих випадках, коли паралелізм та розподілений характер обчислювань є суттєвим і природнім для певного кола задач, особливо у випадках нечіткого оточуючого середовища. Хоча розробка МАС складніша за побудову класичної розподіленої чи монолітної системи [5], обробка візуальної інформації та проблематика комп'ютерного зору, відносяться саме до такого класу задач і застосування МАС до їх розв'язання викликає значний інтерес з боку дослідницьких груп.

Наприклад, в роботі [6] представлено мультиагентну архітектуру для моделювання систем комп'ютерного зору із здатністю до самоорганізації. Демонструється, що такого роду системи: 1) здатні динамічно адаптуватися під різні задачі та зміни в оточуючому середовищі; 2) керувати суперечливою інформацією; 3) функціонально нарощуватися новими модулями (агентами) без перебудови та зупинки всієї системи. Архітектура включає два основних типи агентів: керуючий («Master»), що відповідає за стратегії планування і комунікації, та виконуючий («Slave»), що спеціалізований для виконання відповідних індивідуальних задач з обробки візуальної інформації (такі як обробка зображень, вилучення характеристик зображень, тощо). Механізм самоорганізації закладено на структурному рівні, через здатність агентів створювати певні комбінації зв'язків для постачання та споживання результатів обробки візуальної інформації з використанням визначеного простого протоколу обміну даними.

Близькою до [6] за підходом є робота [7], в якій МАС використовується для розпізнавання об'єктів на супутникових зображеннях. В дослідженні вводиться декілька типів агентів, включаючи координуючий та виконуючий типи. Показано, що використання мультиагентної архітектури для обробки візуальної інформації дозволяє зменшити неоднозначність при вирішенні різних задач з нечіткими та неповними вхідними даними, та, відповідно, підвищити ймовірність правильної ідентифікації об'єктів.

Задачі реконструкції

Реконструкція просторових моделей об'єктів по даним з різних сенсорів є однією з ключових задач комп'ютерного зору. Прикладами практичного застосування є збереження культурної спадщини, реконструкція з медичних зображень, CAD системи, тощо.

Умовно поділимо методи реконструкції на дві категорії: прямі та на основі моделей. В прямих методах обробляються вхідні дані зі сканерів. Методи на основі моделі передбачають, що система має опорні (еталонні) просторові репрезентації-моделі об'єктів. Обидві категорії методів мають широке покриття практичних застосувань.

У зв'язку з існуванням сенсорів різної природи та, відповідно, різних типів вхідних даних, задачі ***прямої реконструкції*** мають велике різноманіття постановок. Найбільш доцільно розглядати загальний випадок, коли у якості вхідних даних для задачі реконструкції надається тільки множина окремих точок з визначеними просторовими координатами, за якими необхідно відтворити наближену поверхню об'єкту, гомоморфну до тієї, що реконструюється [8]. Дана постановка задачі входить до кола фундаментальних проблем обчислювальної геометрії (Проблема №26 за таксономією [9]). На сьогодні задача вирішена для гладких поверхонь [8] та залишається відкритою для поверхонь з гострими ребрами та кутами.

У галузі комп'ютерного зору однією із актуальних проблем є також реконструкція просторової моделі об'єкту, який відповідає множині вхідних двовимірних зображень. Вхідна множина зображень відповідає послідовності кадрів, які отримані з одного чи декількох

Kyiv National Taras Shevchenko University

сенсорів. У загальному випадку, може бути декілька сенсорів, що надають зображення області спостереження під різними кутами. Після детектування границь об'єкту на зображеннях, основною алгоритмічною задачею є визначення факту, чи відповідають ці границі зображення визначеному об'єкту (див. Рис. 1). У загальному випадку, якщо вхідні зображення двовимірні, P – довільний многокутник.

Для задач реконструкції штучних об'єктів актуальним є випадок, коли системі заздалегідь може бути задана просторова модель об'єкту, по якій можна виконати повністю автоматичне «навчання» системи. Відповідно, категорію пов'язаних задач, будемо називати *реконструкцією на основі моделі*.

Розглянемо одну узагальнену постановку задач реконструкції на основі моделей у вигляді декомпозиції на найбільш суттєві під-задачі.

Під-задача 1. Сегментація зображення та детектування країв.
На вході:
- P
астрове зображення (M x N). За певною ознакою виділити частину растру, яка відповідає проекції об'єкту з певною ймовірністю.
На виході:
- M
ножина елементів растру, наприклад, матриць M x N, в яких кожен елемент a_{ij} вказує ймовірність [0, 1] того, що відповідний елемент растру, належить проекції об'єкту.

Під-задача 2. Векторизація границь регіонів растру.
На вході:
- -
множина елементів растру, що отримана в Під-задачі 1.
На виході:
- M
ногокутник P, що охоплює та або перетинає за певними ознаками елементи растру (векторизація растрового зображення та його спрощення.

Примітка: можливо застосування алгоритмів «згладжування» - зменшення кількості відрізків в ламаних лініях, що мають кути між відрізками близькі до 180.

Під-задача 3. Пошук повної та приблизних множини 2D проекцій 3D об'єкту.
На вході:
- -
3D-модель об'єкту;
На виході:
- M
ножина многокутників, що є усіма можливими проекціями об'єкту, які не є попарно гомоморфними.

Під-задача 4. Пошук подібних многокутників
На вході:
- M
ногокутник P, що отриманий на виході Під-задачі 2 (після векторизації растрового зображення);
- б
аза даних моделей об'єктів з Під-задачі 3.
На виході:
- i
дентифікатор об'єкту, що відповідає многокутнику P.

Рис. 1 ілюструє основну послідовність вирішення задачі.

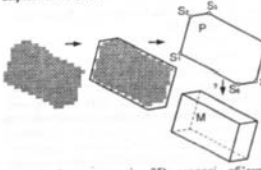


Рис. 1 Реконструкція 3D моделі об'єкту з растрового 2D зображення.

Модель мультиагентної системи для вирішення задач реконструкції

Оскільки наведені вище дві категорії задач реконструкції передбачають множину приблизних можливих рішень, є доцільним розглянути наступну модель MAC для вирішення задач реконструкції.

Як і в роботах [6] і [7], вводимо два базових типи агентів: координуючі та виконуючі. Координуючі агенти керують життєвим циклом інших керуючих та виконуючих агентів: створення та розміщення на певних віртуальних ресурсах, надсилання завдань та очищення віртуальних ресурсів. Виконуючі агенти відповідно до назви націлені на виконання окремих під-задач основної задачі реконструкції.

Kyiv National Taras Shevchenko University

множина типів агентів $A(T_i)$: $\{A_k\}$, кожен з яких розв'язує задачу T_i алгоритмом A_k незалежно, використовуючи однакові набори вхідних даних. Для того, щоб постановка проблеми мала сенс в термінах мультиагентного підходу, множина $\{A_k\}$ повинна складатися принаймні з двох елементів (алгоритмів).

Для вирішення ситуації з неоднозначними рішеннями задачі T_i, що отримуються як результати від різних агентів A_k, повинна застосовуватися деяка логіка колективного прийняття рішень агентами.

Оскільки при вирішенні під-задач реконструкції з використанням МАС апріорно існує велика кількість взаємозв'язаних алгоритмічних задач, що виконуються над одними й тими ж самими просторовими даними та допоміжними структурами, доцільно використовувати підхід ***єдиного алгоритмічного середовища*** [10]. Вказаний підхід дозволяє використовувати узагальнену стратегію «розділяй та володарюй», яка знімає обмеження щодо лінійної нероздільності та лінійності кроку злиття, а також застосовувати паралельно-рекурсивні процедури.

Сформулюємо постановку задачі, з урахуванням попередніх міркувань. МАС приймає на вхід два основних типи даних: опорні просторові моделі об'єктів $\{M_i\}$, та вхідні дані, що отримані з сенсорів $\{S_k\}$. Для просторових моделей визначається метрика їх спорідненості $\alpha(M_i, M_j)$, яка дозволяє відносити їх до певної підмножини (класу C_i). Основною функцією системи є визначення того, чи присутні на $\{S_k\}$ об'єкти, що можуть бути описані моделлю з класу C_i, та відбудова просторових моделей M_i' таких об'єктів.

Для МАС необхідно знайти такий варіант внутрішньої структури та правил взаємодії, при яких її еволюція приводить до саморозвитку. При цьому, саморозвиток визначаємо як еволюційну зміну системи у функціональному, структурному або інших аспектах, що на m-му кроці приводить до більш оптимального значення функції корисності системи, як цілого, по відношенню до попередніх станів ($k=1,..., m-1$). МАС повинна без втручання з боку оператора-людини: накривати більш потужну множину вхідних ситуацій із сенсорів; оптимізувати сховище даних у термінах обсягів пам'яті та швидкості доступу до них.

Висновки

В роботі оглянуто окремі дослідження у галузі МАС обробки візуальної інформації та визначено перспективність їх застосування для вирішення відкритих задач просторової реконструкції з різних типів вхідних даних.

З урахуванням необхідності обробки надвеликих об'ємів даних та прямим відношенням задач просторової реконструкції до апарату обчислювальної геометрії, перспективним є застосування методології єдиного алгоритмічного середовища.

Постановками задач визначено перспективні напрямки подальшого дослідження щодо: пошуку оптимальних моделей побудови МАС із здатністю до саморозвитку (здійснення метасистемних переходів), поширення застосувань методології єдиного алгоритмічного середовища [10]; вирішення окремих відкритих проблем обчислювальної геометрії.

Список використаних джерел

1. Dzitac I., Bârbat B.E., Artificial Intelligence + Distributed Systems = Agents, International Journal Computers, Communications & Control, Vol. IV-2009, No. 1. – P. 17-26.
2. Rassell S., Norvig P., Artificial Intelligence: A Modern Approach, Third Edition. Pearson Education, 2010 – 1152 p.
3. Doyle J., Dean T., Г. Strategic directions in artificial intelligence, AI Magazine, Volume 18, Number 1., 1997. – P. 87 - 101.
4. Wooldridge M., An Introduction to MultiAgent Systems, John Wiley & Sons Ltd, 2002-366 p.
5. Wooldridge M. J., Jennings N. R., Pitfalls of Agent-Oriented Development, Proceedings of the 2nd International Conference on Autonomous Agents (Agents'98), 1998.
6. Graf T., Knoll A., A multi-agent approach to self-orginizing vision system, Proceedings of the International Conference on Intelligent Agent Technologies, Hongkong, China, 1999.
7. Yoon T., Object Recognition based on multi-agent spatial reasoning, Dissertation, The Ohio State University – 2008.
8. Amenta N., Choi S., Dey T. K., Leekha N., A. Simple Algorithm for Homeomorphic Surface Reconstruction.
9. Demaine E. D., Mitchell J., O'Rourke J. The Open Problems Project, 2012 - Режим доступу до публікації.
10. V. N. Tereshchenko, A. V. Anisimov. Recursion and parallel algorithms in geometric modeling problems. *Journal: Cybernetics and Systems Analysis:* Vol. 46, N 2 (2010), Page 173 - 184.

Надійшла до редколегії 12.06.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012,3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 519.21

Шарапов* М.М., к.ф.-м. н., доцент,
Наврузов Федір, студент,
Нужна Алеся, студент,
Протопоп Юлія, студент.

Ймовірносні методи і технології Public Relations

В статті розглядається ймовірносний підхід до розв'язку задачі конкурентної боротьби між трьома юридичними особами. Задача сформульована вербально в загальному вигляді, формалізована та розв'язана на основі запропонованої теореми. Отриманий результат може бути легко перенесений на аналогічні дослідження взаємодій трьох сторін в будь-якій іншій сферах на галузях людської діяльності (політична, економічна, стратегічна, військова, логістична та і.н.) саме завдяки сформульований і доведений теоремі.

Ключові слова: public relations, змішані стратегії, конкурентна боротьба.

M.M. Sharapov*, Cadnd.Sci.(Phys.-Math.).
Fedir Navruzov, student,
Nyzhna Alesia, student,
Protopop Iuliia, student.

Probabilistic methods in Public Relations

Here we consider a problem of concurrent battles under probabilistic approach. The problem has been formulated, formalized and solved using a theorem that considers all possible aspects of the case. The results could be easily applied to many other occasions of so called three parts problems due to mentioned theorem that considers all possible variants of the problem.

Key Words: public relations, mixed strategies, competitive struggle.

*E-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua,
Стаття представив д. т. н., професор Гаращенко Ф.Г.

Розглянемо три суб'єкти (юридичні особи), що застосовують методи і технології public relations (PR), направлені на зменшення ділової активності один одного аж до припинення їхньої діяльності. Протягом умовного сезону (часового етапу) кожна юридична особа проводить black-PR акцію по відношенню до однієї із двох інших юридичних осіб. Вважається, що така акція, проведена одночасно проти двох конкурентів, має досить низьку ефективність. Нехай ефективність акцій кожної фірми виражається ймовірністю того, що фірма-об'єкт припинить свою діяльність. Нехай A, B та C – три зазначені фірми, а ефективності їхніх акцій, відповідно, p_1, p_2 та p_3. Якщо на ринку після чергової black-PR акції залишається більше однієї фірми, то акції триватимуть до тих пір, доки не залишиться лише одна фірма, або жодної.

Нашою метою буде визначення оптимальних стратегій суб'єктів цих акцій. Занумеруємо можливі стани для трьох фірм:

№1 – 0 (всі суб'єкти припинили діяльність);
№2 – A; №3 – B; №4 – C;
№5 – A,B; №6 – A,C; №7 – B,C;
№8 – A,B,C (всі суб'єкти продовжують діяльність).

Фірма A має обрати свою стратегію, яку можна характеризувати вектором

$$(\alpha, 1-\alpha),\ \alpha \in [0;1],$$

де перша компонента є ймовірністю, з якою A направляє акцію проти фірми B, а друга компонента – ймовірність, з якою A направляє акцію проти фірми C. Аналогічно для B стратегія матиме вид вектора

$$(\beta, 1-\beta),\ \beta \in [0;1],$$

де перша компонента є ймовірністю, з якою B направляє акцію проти фірми A, а друга компонента – ймовірність, з якою B направляє акцію проти фірми C. Для C стратегія матиме вид вектора

$$(\gamma, 1-\gamma),\ \gamma \in [0;1],$$

де перша компонента є ймовірністю, з якою C направляє акцію проти фірми A, а друга компонента – ймовірність, з якою C направляє акцію проти фірми B. Вважаємо, що жоден суб'єкт не може проігнорувати проведення акції.

Очевидно, що кожен суб'єкт буде направляти акцію проти тієї фірми-конкурента, у

Kyiv National Taras Shevchenko University

якої ефективність проведення подібної акції є найвищою серед конкурентів. Отже, стратегії фірм будуть визначатись таким чином:

$$\alpha = \alpha(p_2, p_3) = \begin{cases} 1, & p_2 > p_3 \\ 0, & p_2 < p_3 \\ 0.5, & p_2 = p_3 \end{cases}$$

(при цьому, якщо $p_2 = p_3$, то вибір стратегії фірми А не змінює її власних шансів на перемогу, але змінює шанси конкурентів),

$$\beta = \beta(p_1, p_3) = \begin{cases} 1, & p_3 < p_1 \\ 0, & p_3 > p_1 \\ 0.5, & p_3 = p_1 \end{cases}$$

$$\gamma = \gamma(p_1, p_2) = \begin{cases} 1, & p_1 > p_2 \\ 0, & p_1 < p_2 \\ 0.5, & p_1 = p_2 \end{cases}$$

Перехідні ймовірності для описаних вище станів є такими:

$p_{81} = \alpha(1-\beta)\gamma p_1 p_2 p_3 + (1-\alpha)\beta(1-\gamma)p_1 p_2 p_3$,

$p_{82} = (1-\beta)(1-\gamma)p_2 p_3 + \alpha(1-\beta)p_1 p_2(1-p_3) +$

$+(1-\alpha)(1-\gamma)p_1(1-p_2)p_3$,

$p_{83} = (1-\alpha)\gamma p_1 p_3 + (1-\alpha)\beta p_1 p_2(1-p_3) +$

$+(1-\beta)\gamma(1-p_1)p_2 p_3$,

$p_{84} = \alpha\beta p_1 p_2 + \alpha\gamma p_1(1-p_2)p_3 +$

$+\beta(1-\gamma)(1-p_1)p_2 p_3$,

$p_{85} = (1-p_3)\big[(1-\alpha)(1-\beta)(p_1 + p_2 - p_1 p_2) +$

$+\alpha(1-\beta)(1-p_1)p_2 + (1-\alpha)\beta p_1(1-p_2)\big]$,

$p_{86} = (1-p_2)\big[\alpha(1-\gamma)(p_1 + p_3 - p_1 p_3) +$

$+\alpha\gamma p_1(1-p_3) + (1-\alpha)(1-\gamma)(1-p_1)p_3\big]$,

$p_{87} = (1-p_1)\big[\beta\gamma(p_2 + p_3 - p_2 p_3) +$

$+\beta(1-\gamma)p_2(1-p_3) + (1-\beta)\gamma(1-p_2)p_3\big]$,

$p_{88} = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$,

$p_{71} = p_2 p_3$, $p_{73} = p_2(1-p_3)$, $p_{74} = (1-p_2)p_3$,

$p_{77} = (1-p_2)(1-p_3)$, $p_{61} = p_1 p_3$, $p_{62} = p_1(1-p_3)$,

$p_{64} = (1-p_1)p_3$, $p_{66} = (1-p_1)(1-p_3)$, $p_{51} = p_1 p_2$,

$p_{52} = p_1(1-p_2)$, $p_{53} = (1-p_1)p_2$,

$p_{55} = (1-p_1)(1-p_2)$, решта $p_{ij} = 0$.

Складена із наведених ймовірностей матриця ймовірностей переходів для однорідного марковського ланцюга набуде виду

$$P = \begin{pmatrix} E_4 & O \\ R & Q_4 \end{pmatrix},$$

де E_4 – одинична матриця розмірності 4x4. За матрицею P згідно з критерієм граничності (див. [1]) будуємо матрицю

$$M = \begin{pmatrix} E_4 & O \\ (E_4 - Q_4)^{-1} R & Q_4 \end{pmatrix},$$

яка і дає шукані ймовірності перемог кожної фірми:

$$P(A) = M_{8,2}, \quad P(B) = M_{8,3}, \quad P(C) = M_{8,4}.$$

Оскільки ситуація для фірм-учасників є в певному сенсі симетричною, то достатньо знайти $P(A) = M_{8,2}$ та проаналізувати її стратегію. Для B та C досить буде поміняти (циклічно переставити) індекси та ймовірності α, β, γ. В результаті підрахунків отримаємо:

$$P(A) = \frac{k\alpha + b}{d_{13}d_{12}\big(d_{23}(1-p_1) + p_1\big)}, \quad (1)$$

де $d_{ij} = p_i + p_j - p_i p_j$, $k = -p_1 k_1$,

$k_1 = p_2^2(1-p_3)d_{13}\beta - p_3^2(1-p_2)d_{12}\gamma +$

$+(p_3 - p_2)\big[p_2 p_3(1-p_1) + p_1\big]$,

$b = (d_{12} - \beta p_2)(1-p_3)p_1(1-p_2)d_{13} +$

$+(1-p_2)p_3(1-p_1)(1-\gamma)p_1(1-p_3)d_{12} +$

$+d_{12}d_{13}\big[(1-\beta)p_2(1-\gamma)p_3 + p_1(1-\gamma)p_3(1-p_2)\big]$.

Зважаючи на симетричність задачі та на зазначені вище стратегії, одержуємо наступну теорему.

Теорема. Три суб'єкти застосовують методи і технології public relations (PR), направлені на зменшення ділової активності один одного аж до припинення їхньої діяльності. Протягом умовного сезону (часового етапу) кожна юридична особа проводить black-PR акцію по відношенню до однієї із двох інших юридичних осіб. Ефективність акції кожної фірми виражається ймовірністю того, що фірма-об'єкт припинить свою діяльність. Нехай A, B та C – три зазначені фірми, а ефективності їхніх акцій, відповідно, p_1, p_2 та p_3. Якщо на ринку після чергової black-PR акції залишається більше однієї фірми, то акції триватимуть до тих пір, доки не залишиться лише одна фірма, або жодної.

Не порушуючи загальності вважаємо, що $p_1 \geq p_2 \geq p_3$.

I) Якщо $p_1 > p_2 > p_3$, то максимальні ймовірності перемоги для кожної фірми складуть (коли A діє проти B, B та C діють проти A):

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$P(A)=\frac{p_1^2(1-p_2)(1-p_3)^2}{\left[(1-p_1)d_{22}+p_1\right]d_{13}},\ P(B)=\frac{(1-p_1)p_2(1-p_3)}{(1-p_1)d_{22}+p_1},$$

$$P(C)=\frac{(1-p_1)^2(1-p_2)p_3^2+p_1p_2(p_1-p_3)+(2-p_1)p_1p_2}{\left[(1-p_1)d_{22}+p_1\right]d_{13}}.$$

2) Якщо $p_1>p_2=p_3$, то максимальні ймовірності перемоги для кожної фірми складуть (коли А діє проти В чи С з ймовірність 0.5, В та С діють проти А, $P(B)=P(C)$):

$$P(A)=\frac{p_1^2(1-p_2)^3}{\left[(1-p_1)p_2(2-p_2)+p_1\right]d_{12}},$$

$$P(B)=\frac{\left[2p_1(1-p_2)+p_1(3-p_1)-p_1p_2(2-p_2)(3-2p_1)\right]p_2}{\left[(1-p_1)p_2(2-p_2)+p_1\right]d_{12}}$$

При цьому, якщо фірма А змінить свою стратегію, то її ймовірність на перемогу не зміниться, а зміняться лише ймовірності перемоги для В та С.

3) Якщо $p_1=p_2>p_3$, то максимальні ймовірності перемоги для кожної фірми складуть (коли А діє проти В, В діє проти А, С діє проти А чи В з ймовірність 0.5):

$$P(A)=P(B)=\frac{p_1(1-p_1)(1-p_3)\left(2p_1(1-p_3)+p_3\right)}{2\left[(1-p_1)d_{13}+p_1\right]d_{13}},$$

$$P(C)=\frac{p_3^2+(1-p_1)^3p_3^2+2p_1p_3(1-p_1)}{\left[(1-p_1)d_{13}+p_1\right]d_{13}}.$$

При цьому, якщо С змінить свою стратегію, то її ймовірність на перемогу не зміниться, а зміняться лише ймовірності для А та В.

4) Якщо $p_1=p_2=p_3$, то ймовірності на перемогу для кожної фірми складуть (коли кожна фірма обирає навмання, проти кого направляти акцію):

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}\frac{8-16p_1+13p_1^2-4p_1^3}{\left(3-3p_1+p_1^2\right)(2-p_1)}.$$

Зауважимо, що в кожному випадку сума знайдених трьох ймовірностей не буде дорівнювати одиниці, бо є ще ймовірність того, що всі три фірми припинять свою діяльність.

Приклади:

1) $p_1=0.7,\ p_2=0.6,\ p_3=0.5,\ \alpha=\beta=\gamma=1$.

Спочатку просто порахуємо за теоремою:

$$P(A)=\frac{p_1^2(1-p_2)(1-p_3)^2}{\left[(1-p_1)d_{23}+p_1\right]d_{13}}=\frac{49}{799},\ P(B)=$$

$$=\frac{(1-p_1)p_2(1-p_3)}{(1-p_1)d_{23}+p_1}=\frac{9}{94},\ P(C)=$$

$$=\frac{(1-p_1)^2(1-p_2)p_3^2+p_1p_2(p_1-p_3)+(2-p_1)p_1p_2}{\left[(1-p_1)d_{23}+p_1\right]d_{13}}=\frac{548}{799}$$

Тепер покажемо, як можна просто використати (1). Для А маємо:

$$k_1=\frac{7}{500},\ k=\frac{49}{5000},\ b=\frac{833}{25000},\ P(A)=\frac{49}{799}.$$

Для В треба покласти $p_1=0.6,\ p_2=0.7,\ p_3=0.5$, $\alpha=\beta=1,\ \gamma=0$ і тоді (1) дасть ймовірність перемоги саме для В (хоча формально там і записано А):

$$k_1=\frac{6}{125},\ k=\frac{-18}{625},\ b=\frac{288}{3125},\ P(B)=\frac{9}{94}.$$

Для С треба покласти $p_1=0.5,\ p_2=0.6,\ p_3=0.7$, $\alpha=\beta=\gamma=0$ і тоді (1) дасть ймовірність перемоги саме для С (хоча формально там і записано А):

$$k_1=\frac{71}{1000},\ k=\frac{-71}{2000},\ b=\frac{274}{625},\ P(C)=\frac{548}{799}.$$

2) $p_1=0.9,\ p_2=0.3,\ p_3=0.3,\ \alpha=0.5,\ \beta=\gamma=1$.

Спочатку просто порахуємо за теоремою:

$$P(A)=\frac{p_1^2(1-p_2)^3}{\left[(1-p_1)p_2(2-p_2)+p_1\right]d_{12}}=\frac{3087}{9827},$$

$$P(B)=P(C)=$$

$$=\frac{\left[2p_1(1-p_2)+p_1(3-p_1)-p_1p_2(2-p_2)(3-2p_1)\right]p_2}{\left[(1-p_1)p_2(2-p_2)+p_1\right]d_{12}}=$$

$$=\frac{2662}{9827}.$$

Тепер покажемо, як можна просто використати (1). Для А маємо:

$$k_1=0,\ k=0,\ b=\frac{2583819}{10000000},\ P(A)=\frac{3087}{9827}.$$

Для В (як і для С) треба покласти $p_1=0.3,\ p_2=0.9,\ p_3=0.3,\ \alpha=1,\ \beta=0.5,\ \gamma=0$ і тоді (1) дасть ймовірність перемоги саме для В та С (хоча формально там і записано А):

$$k_1=\frac{-29763}{200000},\ k=\frac{89289}{2000000},\ b=\frac{775413}{10000000},$$

$$P(B)=P(C)=\frac{2662}{9827}.$$

3) $p_1=0.8,\ p_2=0.8,\ p_3=0.2,\ \alpha=\beta=1,\ \gamma=0.5$.

Спочатку просто порахуємо за теоремою:

$$P(A)=P(B)=\frac{p_1(1-p_1)(1-p_3)\left(2p_1(1-p_3)+p_3\right)}{2\left[(1-p_1)d_{13}+p_1\right]d_{13}}=$$

$$=\frac{296}{2541},$$

$$P(C)=\frac{p_3^2+(1-p_1)^2p_3^2+2p_1p_3(1-p_1)}{\left[(1-p_1)d_{13}+p_1\right]d_{13}}=\frac{1801}{2541}.$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Тепер покажемо, як можна просто використати (1). Для А (як і для В) маємо:

$$k_1 = \frac{-228}{3125},\ k = \frac{912}{15625},\ b = \frac{2544}{78125},$$

$$P(A) = P(B) = \frac{296}{2541}.$$

Для С треба покласти $p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.8,\ p_3 = 0.8,$ $\alpha = 0.5,\ \beta = \gamma = 0$ і тоді (1) дасть ймовірність перемоги саме для С (хоча формально там і записано А):

$$k_1 = 0,\ k = 0,\ b = \frac{37821}{78125},\ P(C) = \frac{1801}{2541}.$$

4) $p_1 = 0.4,\ p_2 = 0.4,\ p_3 = 0.4,\ \alpha = \beta = \gamma = 0.5$.

Спочатку просто порахуємо за теоремою:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1 - 8 - 16p_1 + 13p_1^2 - 4p_1^3}{4\left(3 - 3p_1 + p_1^2\right)(2 - p_1)} = \frac{107}{392}.$$

Тепер покажемо, як можна просто використати (1). Для А (як і для В та С) маємо: $k_1 = 0,\ k = 0,$

$$b = \frac{6848}{78125},\ P(A) = P(B) = P(C) = \frac{107}{392}.$$

Відмітимо, що отримані числові результати контрастують зі своїми відповідниками в тих задачах, де застосовувались інші підходи. Пояснення просте: запропонована модель не є легкою ні для формалізації, ні для розв'язання поставленої задачі, але саме вона дає справжню відповідь для змішаних стратегій (яку ми фактично і отримуємо, записуючи ймовірності застосування кожної чергової black-PR акції по відношенню до одного з двох наявних конкурентів).

Складність (у порівнянні з класичними задачами на пошук змішаних стратегій) полягає, по-перше, в тому, що розглядаються не дві, а три сторони, а по-друге, як було показано, не стільки формалізація, скільки розв'язок поставленої задачі принципово залежить від розподілу сил сторін. В представленій теоремі розглянуто всі можливі варіанти, що робить її дуже зручною до застосування.

Зрозуміло, що отриманий результат можна застосовувати до розв'язку багатьох «схожих» задач, де розглядається протидія трьох учасників і кожному з них потрібно правильно розподілити свої сили у цій боротьбі. Для меншої кількості учасників (двох) задача не просто тривіальна, а взагалі не має ніякого практичного сенсу, а для більшої кількості сторін (чотирьох і більше) задача в загальному (аналітичному) вигляді ще не розв'язана. Збільшення кількості сторін сильно ускладнює задачу, бо збільшується кількість варіантів розподілу сил учасників, які всі треба враховувати (як це було зроблено у наведеній теоремі), тому поки немає загального розв'язку для більшої кількості сторін, в разі необхідності можна діяти так: розглядаючи конкретну ситуацію (конкретні числові дані з фіксованим розподілом сил сторін) можна формалізувати задачу у частковому (конкретному чисельному) випадку, а потім застосувати чисельні методи до описаного раніше алгоритму пошуку вектора стратегій. Звісно, при цьому кожного разу доведеться складати новий алгоритм для чисельного розв'язку, але це вже дає хоч якийсь шлях до пошуку часткових відповідей загальної задачі. При великій кількості сторін цілком прийнятним може виявитись метод імітаційного моделювання, хоча до його основного недоліку (підміни шуканих ймовірностей частотами моделювання) додається ще один – апроксимаційний підбір власне векторів стратегій, але тут на допомогу можуть прийти ті міркування побудови стратегій, про які йшлося на початку цієї статті.

Зауважимо, що єдиним недоліком розглянутої моделі є умова послідовності дій сторін, але ця умова не звужує клас задач тільки до навчальних, бо зазначена послідовність може зумовлюватись законодавчо. Так, наприклад, виступи кандидатів у президенти зазвичай проходять послідовно, а не паралельно; під час воєнних дій завжди є сторона, яка розпочинає війну (завдає першого удару); до влади політичні сили теж приходять послідовно, а не всі разом.

Література

[1] Шарапов М.М. Критерій існування граничного значення степенів стохастичних матриць. *Вісник Київського університету*, серія фіз.-мат. науки, №1, 2006, ст. 223-228.

[2] Шарапов М.М. Відшукання граничних значень степенів стохастичних матриць та їх застосування, *Вісник Київського університету*, серія фіз.-мат. науки, №4, 2004, ст. 272-277.

[3] Анисимов В.В., Война А.А. Марковские и полумарковские процессы. Учебное пособие, Киев КГУ, 1986.

[4] Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова, М. 1949.

Надійшла до редколегії 14.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012,3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 621.391 : 519.24

Швець О.Ф., к.фіз.-мат.н., доцент

Особливості числового моделювання рівнянь чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору

Аналізуються особливості числової реалізації рівнянь чутливості для динамічних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору.

Ключові слова: динамічна система, аналіз чутливості, змінний фазовий простір.

O.F. Shvets, Ph.D. in Physics and Mathematics

Features of numerical modelling sensitivity of dynamical systems with variable-dimension phase space

Features of the sensitivity equations for dynamic systems of ordinary differential equations with variable dimensionality of the phase space has been investigated.

Key words: dynamical system, sensitivity analysis, variable phase space.

E-mail: olgasv@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

В даній роботі приведені алгоритми для числового аналізу чутливості параметричних систем [1–7] зі змінною вимірністю фазового простору [8–11]. Такі задачі виникають у зв'язку з необхідністю забезпечення нормального функціонування об'єкта на реальних режимах, що пов'язано з урахуванням факторів різної природи, параметрів зовнішнього середовища та умов експлуатації. Деякі з них несуть основну інформацію про властивості системи, враховуються в її моделі завдяки вектору фазового стану. Але завжди реально існує безліч додаткових факторів, що можуть значно впливати на роботу об'єкта. З іншого боку, у реальних умовах експлуатації завжди виникає розкид значень параметрів від їх розрахункових, що зумовлює зміну вектора фазових координат та критерію якості системи. Якщо розкид змінних стану за величиною буде досить значним, то це може призвести до непрацездатності об'єкту. Отже, працездатність реальної системи визначається характером залежності її властивостей від змінювання параметрів, тобто – чутливістю системи. Природно вимагати, щоб система була малочутливою до зміни параметрів. Тому питання чутливості доцільно розглядати ще на етапі проектування, хоча це буде й ускладнювати розв'язання вихідної задачі. Основна увага в роботі зосереджується на числовому моделюванні рівнянь чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору. Акцентується увага на тому, що для векторного параметра необхідно розв'язувати матричне диференціальне рівняння зі змінною вимірністю відносно елементів матриці чутливості. В роботі приведені рівняння чутливості для загальних систем зі змінною вимірністю фазового простору в матричній формі. Запропоновано ефективний спосіб числової реалізації такої процедури з допомогою спеціальної формули Коші для матричного диференціального рівняння.

Матричні рівняння чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору

Нехай рівняння руху об'єкта описується системою диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору [8–11]

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha) \quad t_{i-1} < t < t_i, i = \overline{1,N}, \quad (1)$$

де $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ..., x_{n_i}^{(i)})$, $f^{(i)}(x^{(i)}, t)$ – n_i-вимірні вектор-функції, які задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку, α – m-вимірний вектор параметрів, N – визначає число систем диференціальних рівнянь, які моделюють даний процес.

Моменти t_i, які визначають зміну одного диференціального рівняння іншим називають моментами перемикання. Припускаємо, що вектор фазового стану в момент t_i змінює свою структуру згідно з співвідношеннями

$$x^{(i+1)}(t_i + 0) = x^{(i+1)+} = \Phi^{(i+1)}(x^{(i)-}, t_i, \alpha), \quad (2)$$

де $x^{(i+1)+} = x^{(i+1)}(t_i + 0)$, $x^{(i)-} = x^{(i)}(t_i - 0)$, $\Phi^{(i)}$ – вектор-функції розмірності n_i, диференційовані за всіма аргументами. Співвідношення (2) називають умовами зміни вимірності фазового

© О.Ф. Швець, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

простору. Моменти перемикання в загальному випадку знаходяться з умов

$$\psi_i(x^{(i)-},t_*,\alpha)=0, \qquad (3)$$

які називають умовами перемикання. Тут $\psi_i(\cdot)$ – скалярні функції, неперервно-диференційовані за своїми аргументами. Вибираючи індекси i, можна знайти розривний розв'язок для (1)-(3) з початковими умовами, які

теж залежать від α

$t_0=t_0(\alpha)$, $x^{(0)}(t_0)=x^{(0)+}(t_0)=x^{(0)-}(t_0,\alpha)=x^{(1,0)}(\alpha)$. (4)

В (4) $t_0(\alpha)$ та $x^{(1,0)}(\alpha)$ являються диференційованими функціями векторного параметра α. Також припустимо, що система додаткових співвідношень (2) – (4) така, що для будь-яких α з деякої множини можна однозначно побудувати розв'язки на інтервалі $t_0\le t<t_1(\alpha)$. При цьому моменти перемикання можуть залежати від α, тобто $t_i=t_i(\alpha)$. В результаті можна побудувати множину розв'язків зі змінною вимірністю

$$x^{(i)}=x^{(i)}(t,\alpha),\ t_{i-1}(\alpha)<t<t_i(\alpha)<t_i(\alpha)<\infty, i=1,2,\dots \qquad (5)$$

Матрицею функцій чутливості параметричного сімейства (5) будемо називать похідну [11] $U^{(i)}(t,\alpha)=\dfrac{\partial x^{(i)}(t,\alpha)}{\partial\alpha}$ розмірності $n_i\times m$, в якій оператор $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$ означає звичайну похідну в точках диференційованості $x^{(i)}(t,\alpha)$ і не визначену в точках зміни розмірності вектора фазових координат.

Нехай (5) – параметричне сімейство розв'язків. Тоді знайдеться $t_1(\alpha)>t_0(\alpha)$ таке, що для будь-яких $\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}=f^{(1)}(x^{(1)},t,\alpha),\ t_0(\alpha)\le t<t_1(\alpha). \qquad (6)$$

Якщо $t_0(\alpha)$, $x^{(1,0)}(\alpha)$ – неперервно-диференційовані за компонентами вектора α, а $f^{(1)}(x,t,\alpha)$ – неперервна за всіма аргументами і неперервно-диференційована за x, α, тоді початковими умовами (4) і системою (1) визначено на цьому інтервалі параметричне сімейство розв'язків, для яких існує матриця функцій чутливості першого порядку в класичному розумінні $U^{(1)}(t,\alpha)=\dfrac{\partial x^{(1)}(t,\alpha)}{\partial\alpha}$, яка задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dU^{(1)}}{dt}=A^{(1)}(t)U^{(1)}+B^{(1)}(t) \qquad (7)$$

з початковими умовами

$$U^{(1)}(t_0)=U^{(1,0)}=\frac{dx^{(1,0)}(\alpha)}{d\alpha}-\dot{x}^{(1,0)}\frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha}. \qquad (8)$$

Тут

$$A^{(1)}(t)=\left.\frac{\partial f^{(1)}(x^{(1)},t,\alpha)}{\partial x^{(1)}}\right|_{x^{(1)}=x^{(1)}(t,\alpha)},$$

$$B^{(1)}(t)=\left.\frac{\partial f^{(1)}(x^{(1)},t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{x^{(1)}=x^{(1)}(t,\alpha)}.$$

По аналогії для i-ої підсистеми

$$\frac{dx^{(i)}}{dt}=f^{(i)}(x^{(i)},t,\alpha),\ t_{i-1}(\alpha)<t<t_i(\alpha)$$

матриця функцій чутливості існує в класичному розумінні і визначається системою рівнянь

$$\frac{dU^{(i)}}{dt}=\left.\frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)},t,\alpha)}{\partial x^{(i)}}\right|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t,\alpha)}\cdot U^{(i)}+$$
$$+\left.\frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)},t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t,\alpha)}. \qquad (9)$$

Якщо для деякого α $(\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2)$ виконується співвідношення

$$\frac{\partial\psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)-}}f^{(i)-}+\frac{\partial\psi_i^-}{\partial t}\ne 0 \qquad (10)$$

(тут індекс "–" означає, що всі величини обчислюються при $t=t_i-0$), тоді для цих α матриця функцій чутливості існує і задовольняє рівняння (9) при початкових умовах (8). При цьому переході від одного рівняння (9) до іншого відбуваються згідно умов

$$U^{(i+1)+}=\frac{\partial\Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}}U^{(i)-}+$$
$$+\left[\frac{\partial\Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}}f^{(i)-}-f^{(i+1)+}\right]\frac{dt_i}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi^{(i+1)-}}{\partial\alpha}, \qquad (11)$$

де

$$U^{(i+1)+}=\left.\frac{\partial x^{(i+1)}(t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{t=t_i+0}, \qquad (12)$$

$$\frac{dt_i}{d\alpha}=-\frac{\dfrac{\partial\psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)-}}U^{(i)-}+\dfrac{\partial\psi_i^-}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial\psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)-}}f^{(i)-}+\dfrac{\partial\psi_i^-}{\partial t}}. \qquad (13)$$

Зупинимось на властивостях отриманих співвідношень.

Kyiv National Taras Shevchenko University

1). Підставимо (13) в (11) і запишемо скачки для функцій чутливості в такій конструктивній формі

$$U^{(i+1)+} = P^{(i)}U^{(i)-} + Q^{(i)}, \qquad (14)$$

де матриці $P^{(i)}$ та $Q^{(i)}$ розмірності $n_{i+1} \times n_i$ та $n_{i+1} \times m$ обчислюються за формулами

$$P^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \dot{x}^{(i)}} - f^{(i)-} - f^{(i+1)+}\right)\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}}\right)^T}{\left[\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial \dot{x}^{(i)}}\right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t}\right]}\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}}\right)^T, \qquad (15)$$

$$Q^{(i)} = -\frac{\left(\frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \dot{x}^{(i)}} - f^{(i)-} - f^{(i+1)+}\right)\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha}\right)^T}{\left[\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial \dot{x}^{(i)}}\right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t}\right]} + \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \alpha}. \qquad (16)$$

2). Зрозуміло, що співвідношення залишаться такими ж, якщо система рівнянь (1) має один і той же порядок для будь-яких i. При цьому $\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \dot{x}^{(i)}}$ будуть квадратними матрицями.

3). Перерахунок стрибків в точках перемикання (11) або (14) являється лінійним відносно функцій чутливості.

4). Якщо t_i фіксовано, то $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$. Тоді з (11)

$$U^{(i+1)+} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} U^{(i)-} + \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \alpha}, \qquad (17)$$

тобто

$$P^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}}, \quad Q^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \alpha}.$$

Випадок неперервних розв'язків

Приведені формули спрощуються, якщо розглянути

$n_1 = n_2 = ... n_N = n$, $x^{(1)} = x^{(2)} = x^{(N)} = x$,

$U(t_i, \alpha) = \frac{\partial x(t_i, \alpha)}{\partial \alpha}$,

а розв'язок системи (1) є неперервний. В цьому випадку умови скачка (2) мають вигляд $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$. Тоді

$$\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x} = E, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)\pm}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)\pm}}{\partial t} = 0. \qquad (18)$$

З формули (11) отримаємо

$$U(t_i + 0) - U(t_i - 0) = -\Delta f^{(i)} \frac{dt_i}{d\alpha}, \qquad (19)$$

де $\Delta f^{(i)} = f^{(i+1)}(x(t_i), t_i, \alpha) - f^{(i)}(x(t_i), t_i, \alpha)$ – величина розриву правої частини в точці t_i. Звідси

$$P^{(i)} = \frac{1}{\psi_i} \Delta f^{(i)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)^T + E, \; Q^{(i)} = \frac{1}{\psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \Delta f^{(i)}. \qquad (20)$$

Відмітимо деякі особливості обчислення матриць функцій чутливості на основі отриманих формул:

1). Матриці функцій чутливості в момент перемикання t_i залишаються неперервними в двох випадках, коли $\Delta f^{(i)} = 0$, тобто права частина системи (1) є неперервною при $t = t_i$ та при $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$, тобто моменти перемикання не залежать від α;

2). Відносно властивості матриць $P^{(i)}$. Якщо a, b – вектор-стовпці, то

$$\det(E + ab^T) = 1 + b^T a. \qquad (21)$$

При умові $1 + b^T a \neq 0$

$$(E + ab^T)^{-1} = E - \frac{ab^T}{1 + b^T a}. \qquad (22)$$

Формули (21), (22) перевіряються безпосередніми обчисленнями. Тоді

$$\det P^{(i)} = 1 + \frac{1}{\psi_i^*}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)^T \Delta f^{(i)} = 1 + \frac{1}{\psi_i^*}(\psi_i^* - \dot{\psi}_i^-) = \frac{\dot{\psi}_i^*}{\dot{\psi}_i^-}. \qquad (23)$$

3). Для неперервного випадку $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$. Отже

$$\frac{dx(t_i(\alpha), \alpha)}{d\alpha} = U^{(i)-} + f^{(i)-}\frac{dt_i}{d\alpha} = U^{(i)+} + f^{(i)+}\frac{dt_i}{d\alpha}. \qquad (24)$$

Формула Коші для числового розв'язування матричних диференціальних рівнянь чутливості зі змінною вимірністю

Розглянемо матричну задачу Коші (9) – (11).

Kyiv National Taras Shevchenko University

Розв'язок матричної задачі Коші (9) – (11) запишемо у вигляді формули типу Коші для будь-якого i

$$U^{(i)}(t) = Y^{(i)}(t,t_{i-1})U^{(i)}(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t} Y^{(i)}(t,\tau)B^{(i)}(\tau)d\tau \quad (25)$$

з початковими умовами в точках перемикання

$$U^{(i)+} = \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i-1)}} U^{(i)-} + \left[\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i-1)}} f^{(i-1)-} - f^{(i)+}\right] \frac{dt_{i-1}}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}, \quad (26)$$

де $t_{i-1} < t < t_i$, $i = \overline{1, N-1}$.

Тут $Y^{(i)}(t,\tau)$ – нормована за моментом τ фундаментальна матриця, яка задовольняє матричне рівняння

$$\frac{dY^{(i)}}{dt} = A^{(i)}(t)Y^{(i)}, \; Y^{(i)}(t_{i-1},t_{i-1}) = E, \quad (27)$$

$$A^{(i)}(t) = \left.\frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)},t,\alpha)}{\partial x^{(i)}}\right|_{x^{(i)}=\hat{x}^{(i)}(t,\alpha)},$$

$$B^{(i)}(t) = \left.\frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)},t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{x^{(i)}=\hat{x}^{(i)}(t,\alpha)},$$

відомі матриці розмірності $n_i \times n_i$ та $n_i \times m$ відповідно з неперервними елементами.

Висновки

В роботі приведені алгоритми для обчислення функцій чутливості динамічних систем звичайних диференціальних рівнянь зі зміною вимірністю фазового простору, залежних від векторного параметра. Запропоновано ефективний спосіб числової реалізації такої процедури з допомогою виведеної формули Коші для матричного диференціального рівняння. Для числового знаходження функцій чутливості виписані матричні моделі, які також являються системами звичайних диференціальних рівнянь зі зміною вимірністю фазового простору. Побудовані алгоритми є досить загальними і можуть бути використані для розв'язування задач аналізу стійкості та чутливості, оптимізації, обчислення допусків на параметри широкого класу динамічних систем.

Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно–параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.

2. Гаращенко Ф.Г., Панталіенко Л.А. Аналіз та оцінка параметричних систем. – К.: ІСДО, 1995. – 140 с.

3. Гаращенко Ф.Г., Пантаелиенко Л.А. Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №1–2. – С.145–161.

4. Гаращенко Ф.Г., Пантаелиенко Л.А. Исследование задач теории чувствительности методами практической устойчивости // Изв. АН СРСР. – Техническая кібернетика. – 1989. – Вып.6. – С.17–25.

5. Гаращенко Ф.Г., Пантаелиенко Л.А. Исследование задач расчета допусков на параметры с помощью методов практической устойчивости // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №4. – С. 43–55.

6. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. – 115 с.

7. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 484с.

8. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур. – Чернівці: Рута, 1995. – 155с.

9. Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Моделі для аналізу чутливості розривних динамічних систем зі зміною вимірністю фазового простору// Вісник Київського університету.– Сер. фізико-математичні науки. – 2009. – №1. – С.158–162.

10. Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Про матричні моделі для чисельного аналізу параметричної чутливості систем зі зміною вимірністю фазового простору// Вісник Київського університету.– Сер. фізико-математичні науки. – 2010. – №1. – С.152–157.

Надійшла до редколегії 18.06.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 004.42:510.69

Шкільняк О.С., к. ф.-м. н.

Семантичні аспекти транзиційних композиційно-номінативних модальних логік

Досліджено нові класи спеціальних програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки. Описано семантичні моделі та мови цих логік. Для чистих першопорядкових темпоральних і мультимодальних транзиційних логік розглянуто властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Ключові слова: модальна логіка, семантика, предикат, логічний наслідок.

E-mail: me.oksana@gmail.com

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

O.S. Shkilniak, PhD.

Semantic aspects of transitional composition-nominative modal logics

We investigate new classes of special program-oriented logical formalisms – transitional composition-nominative modal logics. Semantic models and languages of these logics are defined. Properties of logical consequence relations for sets of state-specified formulas of pure first-order temporal and multimodal transitional logics are studied.

Key words: modal logic, semantics, predicate, logical consequence

Для опису й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини з великим успіхом використовуються модальні логіки, в першу чергу темпоральні та епістемічні. Особливого значення такі логіки набувають у зв'язку зі створенням та розвитком сучасних інформаційних і програмних систем [1]. Апарат епістемічних логік успішно застосовується для опису інформаційних та експертних систем, баз даних і баз знань з неповною інформацією. Темпоральні логіки використовуються для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. На базі цих логік розроблено багато різноманітних систем і мов специфікацій (Temporal Logic, Petri nets, TLA+, TLS, StateCharts, GIL, CSP та ін.).

Обмеження класичної логіки предикатів та базованих на її основі модальних логік мотивують необхідність побудови нових класів цих логік, які більше орієнтовані на потреби інформатики й програмування. На основі поєднання можливостей композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [2] і традиційних модальних логік запропоновано [3] композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ). Враховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, виділено КНМЛ, які описують переходи від одного стану світу до іншого – транзиційні КНМЛ. Темпоральні, мультимодальні та епістемічні композиційно-номінативні логіки можна трактувати як окремий випадок транзиційних КНМЛ.

Метою роботи є дослідження семантичних властивостей транзиційних КНМЛ (ТМЛ). Вивчаються композиційно-номінативні мультимодальні логіки (ММЛ) та композиційно-номінативні темпоральні логіки (ТиМЛ), в межах ММЛ виділено загальні ТМЛ і ТМЛ епістемічного типу. Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових ТМЛ зазначених класів, розглянуто властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [4–6]. Будемо зазвичай дотримуватись позначень роботи [6].

1. Композиційно-номінативні модальні системи

Основним для КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) [2]. Важливим класом КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС). В межах ТМС виділяються мультимодальні та темпоральні (ТиМС) модальні системи. Окремими випадками мультимодальних є епістемічні та загальні ТМС.

КНМС – це об'єкт вигляду $M = (Cms, Fm, Jm)$. Тут Cms – композиційна модальна система, Fm – множина формул відповідної мови, Jm – відображення інтерпретації формул на станах світу.

Композиційні модальні системи (КМС) задають семантичні аспекти світу, вони є моделями реляційного типу.

© О.С. Шкільняк, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

КМС мають вигляд $Cms = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C)$. Тут $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$ вигляду $R \subseteq S \times S^n$, Pr – множина предикатів на станах світу, C – множина композицій на Pr.

Множина C визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями. Для чистих першопорядкових логік (логік кванторного рівня) базові загальнологічні композиції: $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}^n_i$, $\exists x$.

Для першопорядкових КНМЛ множину $\boldsymbol{S}$ конкретизуємо [5] як множину неокласичних [4] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних [4] предикатів вигляду ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$. Тоді $Pr = \bigcup_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ та $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ – це відповідно множина предикатів усіх станів світу та множина усіх базових даних світу.

ТМС – це КНМС, у яких $\boldsymbol{R}$ складається з відношень вигляду $R \subseteq S \times S$. Такі R трактуємо як відношення переходу (досяжності) на станах.

ТМС, у яких $\boldsymbol{R} = \{\triangleright_i | i \in I\}$, а базовими модальними композиціями є $\boldsymbol{K}_i$, $i \in I$, де кожному $\triangleright_i$ зіставлено відповідну $\boldsymbol{K}_i$, назвемо *мультимодальними* (ММС).

ТМС, у яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення $\triangleright$, а базовими модальними композиціями є $\Box$ (завжди буде) та $\Box_1$ (завжди було), називають *темпоральними* (ТмМС).

ТМС, у яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення $\triangleright$, а базовою модальною композицією є $\Box$ (необхідно), називають *загальними*.

Загальні ТМС (ЗТМС) є окремим випадком ММС, для них $\boldsymbol{R} = \{\triangleright\}$ та маємо єдину базову модальну композицію $\Box$. Для загальних ТМС традиційно задають дуальну композицію $\Diamond$ (можливо): $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$.

Зауважимо, що для ММС дія кожної $\boldsymbol{K}_i$ аналогічна дії $\Box$, але тільки щодо свого $\triangleright_i$, $i \in I$.

Для ТмМС теж традиційно задають дуальні композиції $\Diamond_1$ (колись буде) і $\Diamond_\downarrow$ (колись було): $\Diamond_1 P$ означає $\neg\Box_1\neg P$; $\Diamond_\downarrow P$ означає $\neg\Box_\downarrow\neg P$.

Опишемо мову ТМС кванторного рівня.

Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів; символи базових композицій $\neg, \vee, \boldsymbol{R}^n_i, \exists x$; модальна сигнатура Ms (множина символів базових модальних композицій).

Множину Fm формул мови визначаємо так:

FA) кожний $p \in Ps$ – (атомарна) формула;

F$\neg$) нехай $\Phi \in Fm$; тоді $\neg\Phi \in Fm$;

F$\vee$) нехай $\Phi, \Psi \in Fm$; тоді $\vee\Phi\Psi \in Fm$;

FR) нехай $\Phi \in Fm$; тоді $R^n_i(\Phi) \in Fm$;

F$\exists$) нехай $\Phi \in Fm$; тоді $\exists x\Phi \in Fm$; – формула;

FM) нехай $\Phi \in Fm$, $\mathfrak{K} \in Ms$; тоді $\mathfrak{K}\Phi \in Fm$.

У випадку ММС маємо $Ms = \{\boldsymbol{K}_i | i \in I\}$, тоді п. FM визначення формули набуває вигляду:

FK) нехай $\Phi \in Fm$, $\boldsymbol{K}_i \in Ms$; тоді $\boldsymbol{K}_i\Phi \in Fm$.

У випадку ТмМС маємо $Ms = \{\Box_1, \Box_\downarrow\}$, тоді п. FM визначення формули набуває вигляду:

F$\Box_{1\downarrow}$) нехай $\Phi \in Fm$; тоді $\Box_1\Phi, \Box_\downarrow\Phi \in Fm$.

У випадку загальних ТМС маємо $Ms = \{\Box\}$, тоді п. FM визначення формули набуває вигляду:

F$\Box$) нехай $\Phi \in Fm$; тоді $\Box\Phi \in Fm$.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах світу $Im : Ps \times S \to Pr$, при цьому $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Таке I продовжимо до відображення інтерпретації формул на станах світу $Jm : Fm \times S \to Pr$. При цьому $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$.

IA) $Jm(p, \alpha) = Im(p, \alpha)$ для всіх $p \in Ps$;

I$\neg$) $Jm(\neg, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$;

I$\vee$) $Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$;

IR) $Jm(R^n_i\,\Phi, \alpha) = \boldsymbol{R}^n_i(Jm(\Phi, \alpha))$;

I$\exists$) $Jm(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi, \alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \\ \qquad \text{для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, \text{ якщо } Jm(\Phi, \alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \qquad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для модалізованих формул маємо наступне.

У випадку ММС додаємо такий пункт:

I$\boldsymbol{K}$) $Jm(\boldsymbol{K}_i\,\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S\colon\ \alpha \triangleright_i \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S\colon\ \alpha \triangleright_i \delta \text{ та } Jm(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \qquad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha \triangleright_i \beta$, то вважаємо $Jm(\boldsymbol{K}_i\,\Phi, \alpha)(d)^\uparrow$ для кожного $d \in {}^{V}A_\alpha$.

У випадку ЗТМС додаємо пункт:

I$\Box$) $Jm(\Box\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S\colon\ \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S\colon\ \alpha \triangleright \delta \text{ та } Jm(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \qquad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha \triangleright \beta$, то вважаємо $Jm(\Box\Phi, \alpha)(d)^\uparrow$ для кожного $d \in {}^{V}A_\alpha$.

У випадку ТмМС додаємо пункт:

I$\Box_{1\downarrow}$) $Jm(\Box_1\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S\colon\ \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S\colon\ \alpha \triangleright \delta \text{ та } Jm(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \qquad \text{невизначене в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

$Jm(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(d) =$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S\colon\ \delta \rhd \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S\colon\ \delta \rhd \alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$

Якщо для стану α не існує такого β, що $\alpha \rhd \beta$, то вважаємо $Jm(\Box_I\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^{V}A_{\alpha}$; якщо для α не існує такого β, що $\beta \rhd \alpha$, то вважаємо $Jm(\Box_I\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^{V}A_{\alpha}$.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$ позначаємо Φ_{α}.

Аналогічно можна описати мову ТМС ременіативного рівня, тільки у відповідних визначеннях опускаємо пункти, пов'язані з квантором.

Для ТмМС, ММС і ЗТМС, як і для загального випадку КНМС [5], даємо визначення: типу ТмМС, ММС, ЗТМС; визначення істинної в стані та в ТМС формули; всюди істинної формули.

Ф істинна в стані α (позн. $\alpha \models \Phi$), якщо Φ_{α} – істинний (неспростовний) предикат.

Ф істинна в ТМС (ТмМС, ММС, ЗТМС) $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо $\alpha \models \Phi$ для кожного $\alpha \in \boldsymbol{S}$.

Ф всюди істинна (позн. $\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх ТМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Залежно від властивостей відношень переходу можна визначати різні класи ТиМС і ММС.

Традиційно розглядають випадки, ці відношення можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними.

Якщо в ММС всі $\rhd_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ *R*; якщо всі $\rhd_i$ транзитивні, то пишемо *T*; якщо всі $\rhd_i$ симетричні – пишемо *S*.

Отримуємо такі чисті типи ММС:

R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС,

RT-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Розглядаючи випадки, коли єдине $\rhd$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним, дістаємо відповідні класи ТмМС та ЗТМС:

R-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС,

RT-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС;

R-ТМС, *T*-ТМС, *S*-ТМС,

RT-ТМС, *RS*-ТМС, *TS*-ТМС, *RTS*-ТМС.

Водночас для загального випадку ММС можливі набагато складніші, змішані типи. Наприклад, $\rhd_1$ транзитивне, а $\rhd_2$ симетричне і т.п.

ММС із скінченними множинами однотипних відношень $\rhd_i$ назвемо *епістемічними*. Загальні ТМС є окремим випадком епістемічних ММС.

Залежно від того, як визначити $\Phi_{\delta}(d)$ при умові $d\varepsilon^{V}A_{\delta}$, можна виділити [5] ТМС із *сильною* та із *загальною* умовою визначеності на станах.

Для ТМС із сильною умовою визначеності на станах при $d\varepsilon^{V}A_{\delta}$ вважаємо $\Phi_{\delta}(d)\uparrow$. Ця умова накладає сильні обмеження, що може привести до порушення інформаційної монотонності.

ТМС із сильною умовою визначеності на станах названо *St*-ТМС. Зокрема, так ми отримуємо *St*-ММС, *St*-ЗТМС, *St*-ТмМС,

Модальні композиції *St*-ММС, *St*-ЗТМС та *St*-ТмМС не зберігають [5] еквітонність предикатів, а зберігають слабшу умову – слабку еквітонність.

Цього недоліку позбавлена загальна умова визначеності на станах. Вона задається так.

При $d\varepsilon^{V}A_{\delta}$ визначаємо $\Phi_{\delta}(d) = \Phi_{\delta}(d_{\delta})$, де d_{δ} – скорочене позначення для $\{w \to a \varepsilon d \mid a \varepsilon A_{\delta}\}$.

Така умова означає, що предикати стану δ "відчувають" лише компоненти даних вигляду $w \to a$ із $a \varepsilon A_{\delta}$, тому $\Phi_{\delta}(d) = \Phi_{\delta}(d_{\delta})$ для всіх $d\varepsilon^{V}A$.

ТМС із цією умовою назвемо *Gn*-ТМС. Зокрема, так дістаємо *Gn*-ММС, *Gn*-ЗТМС, *Gn*-ТмМС. Базові модальні композиції *Gn*-ММС, *Gn*-ЗТМС, *Gn*-ТмМС вже зберігають [5] еквітонність.

Таким чином, основну увагу варто приділити розгляду ТМС із загальною умовою визначеності на станах. Водночас зауважимо, що розглянуті нижче властивості вірні як для ТМС із сильною, так і для ТМС із загальною умовою визначеності на станах.

Символи модальних композицій ММС, ЗМС та ТмМС можна [5] проносити через ременіації: $(R_{\alpha}^{\alpha} \mathbin{\mathcal{H}} \Phi)_{\alpha}(d) = (\mathcal{H} \mathbin{R_{\alpha}^{\alpha}} \Phi)_{\alpha}(d)$ для всіх $\mathcal{H} \in Ms$, $\alpha \in S$, Φ, $d\varepsilon^{V}A_{\alpha}$. Звідси $\models R_{\alpha}^{\alpha} \mathbin{\mathcal{H}} \Phi \leftrightarrow \mathcal{H} \mathbin{R_{\alpha}^{\alpha}} \Phi$.

Тут і надалі $Ms = \{K_i \mid i \varepsilon I\}$ для випадку ММС, $Ms = \{\Box_t, \Box_s\}$ для випадку ТмМС, $Ms = \{\Box\}$ для випадку загальних ТМС.

Взаємодія в ТМС модальних композицій та кванторів вже не така проста.

Доведено [5, 6], що для довільних $\mathcal{H} \in Ms$ масмо $\boldsymbol{M} \models \exists x \mathcal{H}\Phi \to \mathcal{H} \exists x \Phi$ та $\boldsymbol{M} \models \mathcal{H} \forall x \Phi \to \forall x \mathcal{H} \Phi$ (тут $\boldsymbol{M}$ – довільна ТМС відповідного типу).

Звідси $\models \exists x \mathcal{H}\Phi \to \mathcal{H} \exists x \Phi$ та $\models \mathcal{H} \forall x \Phi \to \forall x \mathcal{H} \Phi$. для довільних $\mathcal{H} \in Ms$.

Водночас формули $\forall x \mathcal{H}\Phi \to \mathcal{H} \forall x \Phi$ та $\mathcal{H} \exists x \Phi \to \exists x \mathcal{H} \Phi$ не є всюди істинними.

Відповідні контрмоделі для загальних ЗТМС та $\Box$ наведено в [5], аналогічні контрмоделі можна збудувати для випадків ММС та ТмМС.

Kyiv National Taras Shevchenko University

2. Відношення логічного наслідку для множин формул

Розглянемо поняття логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Специфікована станом формула має вигляд Φ^{α}, де Φ – формула мови, α – $\overline{\text{ii}}$ специфікація (відмітка). Тут $\alpha \in \mathrm{S}$, де S – певна множина імен станів світу.

Нехай $\boldsymbol{M}$ – КНМС із множиною станів світу $\boldsymbol{S}$, Γ – множина специфікованих станами формул, причому ці специфікації утворюють множину S.

Множина формул Γ *узгоджена* із КНМС $\boldsymbol{M}$, якщо задана ін'єкція S у $\boldsymbol{S}$.

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станами формул. Відношення логічного наслідку для таких множин визначаємо наступним чином.

Δ є логічним наслідком Γ в узгодженій із ними КНМС $\boldsymbol{M}$, якщо для всіх $d \in^{V} A$ із того, що $\Phi_{\mathrm{d}}(d_{\alpha}) = T$ для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$, випливає, що неможливо $\Psi_{\beta}(d_{\beta}) = F$ для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$.

Те, що Δ є логічним наслідком Γ в КНМС $\boldsymbol{M}$, позначаємо $\Gamma \models_{M} \Delta$.

Надалі запис $\Gamma \models_{M} \Delta$ завжди означатиме узгодженість КНМС $\boldsymbol{M}$ із Γ та Δ.

Δ є логічним наслідком Γ (відносно КНМС певного типу), якщо $\Gamma \models_{M} \Delta$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

Те, що Δ є логічним наслідком Γ, позначаємо $\Gamma \models \Delta$.

Отже, $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують узгоджена із Γ та Δ КНМС $\boldsymbol{M}$ та $d \in^{V} A$ такі:

для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$ маємо $\Phi_{\mathrm{d}}(d_{\alpha}) = T$ та

для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$ маємо $\Psi_{\beta}(d_{\beta}) = F$.

Наведемо основні властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Немодальні властивості успадковуються від традиційної логіки. Вони фактично повторюють відповідні властивості логічного наслідку для множин формул логік еквітонних квазіарних предикатів (див. [4]).

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models_{M} \Delta$.

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Upsilon$ та та $\Delta \subseteq \Sigma$. Тоді

$\Gamma \models_{M} \Delta \Rightarrow \Upsilon \models_{M} \Sigma$.

$\neg_{\vdash}$) $\neg\Phi^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, \Phi^{\alpha}$.

$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, \neg\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$.

$\vee_{\vdash}$) $\Phi \vee \Psi^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$ та $\Psi^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$.

$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, \Phi \vee \Psi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, \Phi^{\alpha}, \Psi^{\alpha}$.

RT$_{\vdash}$) $R^{\forall,\forall}_{\gamma,\delta}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$.

RT$_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall,\forall}_{\gamma,\delta}(\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha}$.

ΦN$_{\vdash}$) $R^{\forall,\forall}_{\gamma,\delta}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$ (за умови $y \in \mu(\Phi)$).

ΦN$_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall,\forall}_{\gamma,\delta}(\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha}$

(за умови $y \in \mu(\Phi)$).

R$\neg_{\vdash}$) $R^{\forall}_{\gamma}(\neg\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$.

R$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\neg\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, \neg R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha}$.

R$\vee_{\vdash}$) $R^{\forall}_{\gamma}(\Phi \vee \Psi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\forall}_{\gamma}(\Phi) \vee R^{\forall}_{\gamma}(\Psi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$.

R$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\Phi \vee \Psi)^{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\Phi) \vee R^{\forall}_{\gamma}(\Psi)^{\alpha}$.

RR$_{\vdash}$) $R^{\forall}_{\gamma}(R^{\forall}_{\gamma}(\Phi))^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\forall}_{\gamma \circ \gamma}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$.

RR$_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(R^{\forall}_{\gamma}(\Phi))^{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma} \circ R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha}$.

R$\exists$R$_{\vdash}$) $R^{\exists,\delta}_{\forall,\delta}(\exists x \Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\forall}_{\delta}(\exists x \Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$ (тут $x \notin \{\overline{u}\}$).

Зокрема, $R^{\forall}_{\gamma}(\exists x \Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow \exists x \Phi^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$.

R$\exists$R$_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\exists,\delta}_{\forall,\delta}(\exists x \Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\delta}(\exists x \Phi)^{\alpha}$ (тут $x \notin \{\overline{u}\}$).

Зокрема, $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\exists x \Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, \exists x \Phi^{\alpha}$.

Для першопорядкових логік важливими є властивості, пов'язані з елімінацією кванторів. Розглядаємо дві різновидності таких властивостей – елімінація зовнішнього квантора та елімінація квантора під реноменацією:

$\exists$R$_{\vdash}$) $R^{\forall}_{\gamma}(\exists x \Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow R^{\forall,x}_{\gamma,\delta}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$

(за умови $x \notin \{\overline{u}\}$, $y \in V_{\mathrm{T}}$, $y \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\exists x \Phi))$);

$\exists_{\vdash}$) $\exists x \Phi^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{\delta}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \models_{M} \Delta$

(за умови $y \in V_{\mathrm{T}}$ та $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$);

$\exists$R$_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall,x}_{\gamma,\delta}(\Phi)^{\alpha}, R^{\forall}_{\gamma}(\exists x \Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, R^{\forall}_{\gamma}(\exists x \Phi)^{\alpha}$;

$\exists_{\dashv}$) $\Gamma \models_{M} \Delta, R^{x}_{\delta}(\Phi)^{\alpha}, \exists x \Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_{M} \Delta, \exists x \Phi^{\alpha}$.

Наведемо властивості, повязані з модальними композиціями. Це пронесення модальностей через реноменації та елімінація модальностей.

Пронесення модальностей через реноменації:

R$\mathcal{H}_{\vdash}$) $\Gamma, R^{\forall}_{\gamma}(\mathcal{H}\Phi)^{\alpha} \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, \mathcal{H} R^{\forall}_{\gamma}(\Phi)^{\alpha} \models_{M} \Delta$, де $\mathcal{H} \in Ms$;

Kyiv National Taras Shevchenko University

$\mathrm{R}\mathcal{H}_{\neg\mathrm{J}}$) $\Gamma \models_M \Delta$, $R_\tau^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}\Phi)^a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta$, $\mathcal{H} R_\tau^{\mathcal{H}}(\Phi)^a$, де $\mathcal{H} \in Ms$.

Зокрема, для ММС отримуємо властивості RK_Φ- та $\mathrm{RK}_{\neg\Phi}$ де $\mathrm{K}_i \in M_i$; для загальних ТМС отримуємо властивості $\mathrm{R}\Box_\Phi$- та $\mathrm{R}\Box_{\neg\mathrm{J}}$; для ТмМС отримуємо $\mathrm{R}\Box_{\uparrow\Phi}$, $\mathrm{R}\Box_{\downarrow\Phi}$, $\mathrm{R}\Box_{\uparrow\neg\mathrm{J}}$ та $\mathrm{R}\Box_{\downarrow\neg\mathrm{J}}$.

Із елімінацією модальностей пов'язані наступні властивості.

У випадку ММС маємо (тут $\mathrm{K}_i \in Ms$):

$\mathrm{K}_{\mathrm{J}\Phi}$) $\mathrm{K}_i\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \triangleright \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\mathrm{K}_{\neg\mathrm{J}\Phi}$) $\Gamma \models_M \Delta$, $\mathrm{K}_i\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \triangleright \beta$.

У випадку загальних ТМС маємо:

$\Box_\Phi$) $\Box\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \triangleright \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_\neg$) $\Gamma \models_M \Delta$, $\Box\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \triangleright \beta$.

У випадку ТмМС $\Box_\uparrow$ та $\Box_\downarrow$ розщеплюються:

$\Box_{\uparrow\Phi}$) $\Box_\uparrow\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \triangleright \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_{\uparrow\neg\mathrm{J}}$) $\Gamma \models_M \Delta$, $\Box_\uparrow\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \triangleright \beta$;

$\Box_{\downarrow\Phi}$) $\Box_\downarrow\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \beta \triangleright \alpha\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_{\downarrow\neg\mathrm{J}}$) $\Gamma \models_M \Delta$, $\Box_\downarrow\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\beta \triangleright \alpha$.

Наведені властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул є семантичною основою для побудови секвенційних числень розглянутих класів TMJ: властивість $\subset$ задає умову замкненості секвенції, а всі інші (окрім U) властивості індукують відповідні секвенційні форми. При побудові секвенційного дерева ми фактично перевіряємо *відсутність* логічного наслідку, тому секвенційні форми мусять зберігати $\not\models$ при переході від висновку до засновків (декомпозиція формули, що й відбувається при застосуванні секвенційної форми), та зберігати $\models$ при переході від засновків до висновку (збір формули із компонентів). Тому для всіх цих властивостей відношення $\models$ наведемо відповідні *дуальні* властивості відношення $\not\models$.

Враховуючи, що умова $\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$ рівносильна умові $\neg\mathrm{P} \Leftrightarrow \neg\mathrm{Q}$, майже для всіх цих властивостей відношення $\models$ відповідні властивості відношення $\not\models$ отримуємо заміною $\models_M$ на $\not\models_M$, лише для $\forall_\Phi$ та властивостей вигляду $\mathcal{H}_{\neg\mathrm{J}}$ дуальні властивості задаємо інакше.

$\vdash\neg$) $\neg\Phi^\alpha, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta, \Phi^\alpha$.

$\neg\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta, \neg\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \not\models_M \Delta$.

$\vdash\vee$) $\Phi\vee\Psi^\alpha, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \not\models_M \Delta$ або $\Psi^\alpha, \Gamma \not\models_M \Delta$.

$\vee\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta, \Phi\vee\Psi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta, \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$.

$\vdash\mathrm{RT}$) $R_{\tau,\mathrm{J}}^{\neq\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$.

$\mathrm{RT}\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_{\tau,\mathrm{J}}^{\neq\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}$.

$\vdash\Phi\mathrm{N}$) $R_{\tau,\mathrm{J}}^{\neq\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$ (за умови $y \in \mu(\Phi)$).

$\Phi\mathrm{N}\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_{\tau,\mathrm{J}}^{\neq\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta, R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}$

(за умови $y \in \mu(\Phi)$).

$\vdash\mathrm{R}\neg$) $R_\tau^{\mathcal{S}}(\neg\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow \neg R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$.

$\mathrm{R}\neg\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\tau^{\mathcal{S}}(\neg\Phi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta, \neg R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}$.

$\vdash\mathrm{R}\vee$) $R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi\vee\Psi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)\vee R_\tau^{\mathcal{S}}(\Psi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$.

$\mathrm{R}\vee\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi\vee\Psi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta$,

$R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)\vee R_\tau^{\mathcal{S}}(\Psi)^{\mathrm{a}}$.

$\vdash\mathrm{RR}$) $R_\tau^{\mathcal{S}}(R_\tau^{\mathcal{R}}(\Phi))^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_\tau^{\mathcal{S}} \circ_\tau^{\mathcal{R}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$.

$\mathrm{RR}\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\tau^{\mathcal{S}}(R_\tau^{\mathcal{R}}(\Phi))^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\tau^{\mathcal{S}} \circ_\tau^{\mathcal{R}}(\Phi)^{\mathrm{a}}$.

$\vdash\mathrm{R}\exists\mathrm{R}$) $R_{\sigma,\mathrm{J}}^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$ (тут $x \notin \langle\!\langle \vec{u} \rangle\!\rangle$).

Зокрема, $R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$.

$\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_{\sigma,\mathrm{J}}^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}}$ (тут $x \notin \langle\!\langle \vec{u} \rangle\!\rangle$).

Зокрема, $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta, \exists x\Phi^{\mathrm{a}}$.

$\vdash\exists\mathrm{R}$) $R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow R_{\sigma,\mathrm{J}}^{\neq\mathcal{R}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$

(за умови $x \notin \langle\!\langle \vec{u} \rangle\!\rangle$, $y \in V_\Gamma$, $y \in nm(\Gamma, \Delta, R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi))$).

$\exists\vdash$) $\exists x\Phi^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow R_\sigma^{\mathcal{r}}(\Phi)^{\mathrm{a}}, \Gamma \not\models_M \Delta$

(за умови $y \in V_\Gamma$ та $y \in nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$.

$\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{R}$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_{\sigma,\mathrm{J}}^{\neq\mathcal{R}}(\Phi)^{\mathrm{a}}$, $R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\sigma^{\mathcal{R}}(\exists x\Phi)^{\mathrm{a}}$.

$\neg\exists$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $\exists x\Phi^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta, \exists x\Phi^{\mathrm{a}}$.

$\vdash\mathrm{R}\mathcal{H}$) $\Gamma, R_\tau^{\mathcal{S}}(\mathcal{H}\Phi)^{\mathrm{a}} \not\models_M \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \mathcal{H} R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}} \not\models_M \Delta$,

де $\mathcal{H} \in Ms$.

$\mathrm{R}\mathcal{H}\vdash$) $\Gamma \not\models_M \Delta$, $R_\tau^{\mathcal{S}}(\mathcal{H}\Phi)^{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta$, $\mathcal{H} R_\tau^{\mathcal{S}}(\Phi)^{\mathrm{a}}$,

де $\mathcal{H} \in Ms$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Дуальні властивості елімінації модальностей задаємо так.

У випадку ММС маємо (тут $K_i \in Ms$):

$_{\vdash}K_i$) $K_i\Phi^{\alpha}, \Gamma \mid\!\neq_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd_i \beta\} \cup \Gamma \mid\!\neq_M \Delta$;

$_{\dashv}K_i$) $\Gamma \mid\!\neq_M \Delta, K_i\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \mid\!\neq_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha \rhd_i \beta$.

У випадку загальних ТМС маємо:

$_{\vdash}\Box$) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma \mid\!\neq_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \mid\!\neq_M \Delta$;

$_{\dashv}\Box$) $\Gamma \mid\!\neq_M \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \mid\!\neq_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha \rhd \beta$.

У випадку ТмМС властивості $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$ розщеплюються:

$_{\vdash}\Box_{\uparrow}$) $\Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha}, \Gamma \mid\!\neq_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \mid\!\neq_M \Delta$;

$_{\dashv}\Box_{\uparrow}$) $\Gamma \mid\!\neq_M \Delta, \Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \mid\!\neq_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha \rhd \beta$;

$_{\vdash}\Box_{\downarrow}$) $\Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha}, \Gamma \mid\!\neq_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \beta \rhd \alpha\} \cup \Gamma \mid\!\neq_M \Delta$;

$_{\dashv}\Box_{\downarrow}$) $\Gamma \mid\!\neq_M \Delta, \Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \mid\!\neq_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\beta \rhd \alpha$.

Зауважимо, що зазначені властивості справджуються як для ТМС із сильною умовою визначеності, так і для ТМС із загальною умовою визначеності на станах.

Наведені властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул будуть використані при побудові числень секвенційного типу для чистих першопорядкових темпоральних і мультимодальних композиційно-номінативних логік еквітонних предикатів.

Висновки

В роботі досліджено нові класи спеціальних програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки. Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових темпоральних і мультимодальних транзиційних логік, розглянуто взаємодію реномінацій та кванторів із модальними композиціями. Для цих логік наведено властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Такі властивості є семантичною основою побудови для досліджених логік числень секвенційного типу, що буде зроблено в наступних роботах.

Список використаних джерел

1. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford: Clarendon Press, 1994–2000.
2. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С. Никитченко // Пробл. программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
3. *Нікітченко М.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Пробл. программирования. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33.
4. *Нікітченко М.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
5. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.
6. *Нікітченко М.С.* Побудова модальних логік темпорального та епістемічного типу на основі композиційно-номінативного підходу / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 204–211.

Надійшла до редколегії 25.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics

УДК 004.42:510.69

Шкільняк С.С., д. ф.-м. н., доц.

Спеціальні секвенційні числення логік однозначних квазіарних предикатів

Для відношень істиннісного, хибнісного і сильного логічного наслідку композиційно-номінативних логік однозначних квазіарних предикатів побудовано спеціальні секвенційні числення. Для такої побудови використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних. Доведено коректність і повноту цих числень.

Ключові слова: логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

S.S.Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Ass. Professor.

Special sequent calculi for logics of single-valued quasi-ary predicates

We construct special sequent calculi for relations of true-valued, false-valued and strong logical consequence of composition-nominative logics of single-valued quasi-ary predicates. Special variable definedness predicates are used for the construction. The soundness and completeness of these calculi are proved.

Key words: logic, predicate, logical consequence, sequent calculus.

E-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Хусаїнов Д.Я.

На даний час розроблено багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в програмуванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Проте класична логіка має принципові обмеження, які ускладнюють її використання. Тому на перший план виходить проблема побудови нових, програмно орієнтованих логічних формалізмів. Такі формалізми, збудовані на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу, названо композиційно-номінативними логіками (КНЛ). КНЛ досліджувались, зокрема, в роботах [1–6]. Уточнення фундаментального поняття логічного слідування в КНЛ квазіарних предикатів за допомогою відношень логічного наслідку запропоновано в [4]. Введено такі "природні" відношення: "істиннісний" $|\approx_T$, "хибнісний" $|\approx_F$, "сильний" $|\approx_{TF}$, "неспростовнісний" $|\approx_O$, "насичений" $|\approx_{Sk}$ логічні наслідки. Для пропозиційної логіки подібні відношення розглядались в [7], для першопорядкових логік квазіарних предикатів такі відношення досліджено в [2–4]. Для логік однозначних частковних предикатів можна розглядати відношення $|\approx_T$, $|\approx_F$, $|\approx_{TF}$, $|\approx_O$. Традиційним для таких логік є $|\approx_O$, для цього відношення збудовано [1, 2, 5, 6] низку числень секвенційного типу.

Метою даної роботи є побудова спеціальних секвенційних числень, які формалізують відношення $|\approx_T$, $|\approx_F$, $|\approx_{TF}$ в чистих першопорядкових КНЛ однозначних квазіарних предикатів. Їх особливістю є використання спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для предметних імен, введених в [8]. Для збудованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [1, 3], а також [5, 6]. Для полегшення читання нагадаємо основні визначення.

1. Відношення логічного наслідку

В даній роботі розглядаємо логіки *часткових однозначних* квазіарних предикатів.

Область істинності та область хибності V-квазіарного предиката $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ – це множини $\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = T\}$ та $\boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = F\}$.

Базовими композиціями чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) є $\neg, \vee, \boldsymbol{R}^{\varepsilon}_{k}, \exists x$.

R-формула – це формула вигляду $R^{\varepsilon}_{k}(\Pi)$.

Предикат, який є значенням формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначимо $\Phi_{\boldsymbol{A}}$.

Введемо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z, тобто наявність значення для z (див.[8]). Предикати εz задамо так:

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z_{\boldsymbol{A}}) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \in asn(d)\}$;

$\boldsymbol{T}(\varepsilon z_{\boldsymbol{A}}) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \notin asn(d)\}$.

Предикати εz назвемо індикаторами наявності значення для предметної імені (змінної).

Далі розглядаємо ЧКНЛ, мови яких розширені множиною $\{\varepsilon x \mid x \in V\}$ символів предикатів-індикаторів εx. Такі розширені логіки названі ε-ЧКНЛ, їх базовими композиціями є $\neg, \vee, \boldsymbol{R}^{\varepsilon}_{k}, \exists x, \varepsilon x$.

© С.С. Шкільняк, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Задамо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови A.

1) "Істинний" наслідок $\models_T$:

$\Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi) \subseteq T(\Psi)$.

2) "Хибність" наслідок $\models_F$:

$\Phi \models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi) \subseteq F(\Phi)$.

3) "Сильний", або "строгий" наслідок $\models_{TF}$:

$\Phi \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi) \subseteq T(\Psi)$ та $F(\Psi) \subseteq F(\Phi)$.

4) "Неспростовність", або "неоклясичний" $\models_{CI}$:

$\Phi \models_{CI} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi) \cap F(\Psi) = \varnothing$.

Відповідні відношення логічного наслідку $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{CI}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi \models \Psi \Leftrightarrow \Phi \models \Psi$ для кожної моделі мови A.

Маємо $\Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_T \Psi$ та $\Phi \models_F \Psi$; $\Phi \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_T \Psi$ та $\Phi \models_F \Psi$.

Відношення еквівалентності в моделі мови A $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{CI}$ та відношення логічної еквівалентності $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{CI}$ визначаємо за схемою:

$\Phi \sim \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$;

$\Phi \sim \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Відношення $\sim_{CI}$ – це традиційне відношення еквівалентності в логіках однозначних часткових предикатів (див. [1]), його зазвичай позначаємо $\sim$.

Для кожної моделі мови A маємо: $\Phi \sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi) = T(\Psi)$ та $F(\Psi) = F(\Phi)$, тобто $\Phi_A = \Psi_A$. Тому $\Phi \sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат.

Введені відношення мають [3, 4] дещо специфічні властивості. Так, для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ невірний закон контрапозиції, для $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$ не можна знімати заперечення в обох частинах еквівалентності.

Поширимо відношення логічного наслідку на множини формул. Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$.

Відношення наслідку для множин формул при інтерпретації на моделі мови A задаємо так.

$\Gamma \models_{CI} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$

$\Gamma \models_T \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$

$\Gamma \models_F \Delta$, якщо $\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A)$

$\Gamma \models_{TF} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$ і $\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A)$.

Відношення логічного наслідку для множин формул $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{CI}$ визначаємо за схемою:

$\Gamma \models \Delta$, якщо $\Gamma_A \models \Delta$ для кожної моделі мови A.

Теорема заміни еквівалентних формулюється для $\sim_{TF}$ та для $\sim_{CI}$ (тут $\sim$ – це $\sim_{TF}$ або $\sim_{CI}$):

Теорема 1. *Нехай* $\Phi \sim \Psi$; *тоді* $\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ *та* $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Для $\sim_T$ та $\sim_F$ ця теорема вже невірна.

На відміну від $\models_{CI}$, для $\models_T$, $\models_F$ та $\models_{TF}$ не можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки, тому для них треба додатково сформулювати властивості для зовнішнього заперечення на рівні мовою.

До основних властивостей відношень логічного наслідку для множин формул найперше відносемо такі (тут $\models$ – це $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{CI}$).

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models \Delta$.

Додатково гарантують наявність відповідного логічного наслідку такі властивості:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models \Delta$ (тут $\models$ – це $\models_T$, $\models_{CI}$);

CR) $\Gamma \models \Delta, \Phi, \neg\Phi$ (тут $\models$ – це $\models_F$, $\models_{CI}$).

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

До основних властивостей відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{CI}$ віднесемо: $\neg\neg_T$, $\neg\neg_{TF}$, $\neg\vee_{T-}$, $\neg\vee_{TF}$, $\vee_{T-}$, $\vee_{-F}$ (наведені в [5, 6]); RT_T, RT_{TF}, ΦN_{T-}, ΦN_{-F}, RR_T, RR_{TF}, $R\neg_T$, $R\neg_{TF}$, $R\vee_{T-}$, $R\vee_{-F}$, $\neg RT_{T-}$, $\neg RT_{-F}$, $\neg\Phi N_{T-}$, $\neg\Phi N_{-F}$, $\neg RR_{T-}$, $\neg RR_{-F}$, $\neg R\neg_{T-}$, $\neg R\neg_{-F}$, $\neg R\vee_{T-}$, $\neg R\vee_{-F}$ (наведені в [5]); $R\exists R_{T-}$, $R\exists R_{-F}$, $\neg R\exists R_{T-}$, $\neg R\exists R_{-F}$ (наведені в [6]); властивості елімінації кванторів.

Властивості елімінації кванторів запишуються з використанням εα (тут $\models$ – це $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{CI}$):

$\exists R_{T-})$ $R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{T,z}^{\varepsilon}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$;

$\exists_{-F})$ $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_F^{\varepsilon}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$;

$\neg\exists R_{-F})$ $\Gamma \models \Delta, \neg R_F^{\varepsilon}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{F,z}^{\varepsilon}(\Phi), \varepsilon z$;

$\neg\exists_{-T})$ $\Gamma \models \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_T^{\varepsilon}(\Phi), \varepsilon z$;

$\exists Rf_{-T})$ $\Gamma \models \Delta, R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi), R_{T,z}^{\varepsilon}(\Phi), \varepsilon z$;

$\exists f_{-T})$ $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_T^{\iota}(\Phi), \varepsilon z$;

$\neg\exists Rf_{-})$ $\neg R_F^{\varepsilon}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R_F^{\varepsilon}(\exists x\Phi), \neg R_{F,z}^{\varepsilon}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$;

$\neg\exists f_{-})$ $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_F^{\iota}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$;

Для $\exists R_{+-}$, $\neg\exists R_{+-}$, $\exists Rf_{+-}$, $\neg\exists Rf_{+-}$ умови: $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi))$; для $\exists_{+-}$, $\neg\exists_{+-}$, $\exists f_{+-}$, $\neg\exists f_{+-}$ умови: $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists Rv_{-})$ $\Gamma \models \Delta, R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi), R_{T,y}^{\varepsilon,x}(\Phi), \varepsilon y$;

$\exists v_{-f})$ $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_T^{\iota}(\Phi), \varepsilon y$;

$\neg\exists Rv_{+})$ $\neg R_F^{\varepsilon}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R_F^{\varepsilon}(\exists x\Phi), \neg R_{F,y}^{\varepsilon,x}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon y$;

$\neg\exists v_{+})$ $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_F^{\iota}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon y$;

$\exists Rd_{-})$ $\Gamma \models \Delta, R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R_T^{\varepsilon}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R_F^{\varepsilon}(\exists x\Phi), R_{F,y}^{\varepsilon,x}(\Phi), \varepsilon y$;

Kyiv National Taras Shevchenko University

$\exists d_n)\ \Gamma \models_{\nu} \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models_{\nu} \Delta, \exists x\Phi$ та $\Gamma \models_{\nu} \Delta, \exists x\Phi, R^i_n(\Phi), \varepsilon y$;

$\neg\exists R d_n)\ \neg R^{\beta}_n(\exists x\Phi), \Gamma \models_{\nu} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varepsilon y, \neg R^{\beta}_n(\exists x\Phi), \Gamma \models_{\nu} \Delta$ та
$\neg R^{\beta}_n(\exists x\Phi), \neg R^{\beta,i}_{n,x}(\Phi), \Gamma \models_{\nu} \Delta, \varepsilon y$;

$\neg\exists d_n)\ \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_{\nu} \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_{\nu} \Delta$ та
$\neg\exists x\Phi, \neg R^i_n(\Phi), \Gamma \models_{\nu} \Delta, \varepsilon y$.

2. Секвенційні числення

Секвенційні числення, які формалізують відношення логічного наслідку для множин формул ЧКНЛ однозначних квазіарних предикатів, будуємо на базі семантичних властивостей цих відношень. Числення *QSC*, яке формалізує традиційне відношення $\models_{CQ}$, тут розглядати не будемо.

Числення *QSL* формалізує відношення $\models_{\Gamma}$.

Числення *QSR* формалізує відношення $\models_{\nu}$.

Числення *QSLR* формалізує відношення $\models_{\Gamma\Gamma}$.

Подібні числення *QCl*, *QL*, *QR*, *QLR* для відношень $\models_{Cl}$, $\models_{\Gamma}$, $\models_{\nu}$, $\models_{\Gamma\Gamma}$ логік однозначних квазіарних предикатів, розглянуті в [5, 6], вони збудовані на основі властивостей спеціальних *X–Y*-означених відношень логічного наслідку.

Секвенції ми трактуємо як множини формул, специфікованих спеціальними символами $\vdash_{\Gamma}$ та $\dashv_{\Gamma}$. Секвенції позначаємо як $\vdash_{\Gamma}\Delta$ або як Σ. Формули секвенції, відмічені $\vdash_{\Gamma}$, називають *T*-формулами, а відмічені $\dashv_{\Gamma}$ – *F*-формулами. Секвенційні числення будуємо так: $\vdash_{\Gamma}\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \Gamma \models_{\nu} \Delta$.

Надалі вважаємо, що $\models_{\nu}$ – це $\models_{\Gamma}$, $\models_{\nu}$, $\models_{\Gamma\Gamma}$.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість $\vdash_{\Gamma}\Delta$ означає, що $\Gamma \models_{\nu} \Delta$.

Базова умова замкненості секвенції Σ:

С) існує формула Φ така, що $\vdash_{\Gamma}\Phi \in \Sigma$ та $\dashv_{\Gamma}\Phi \in \Sigma$.

Додаткова умова замкненості секвенції в усіх численнях – *uny*-замкненість.

Множиною *uny*-змінних секвенції $\vdash_{\Gamma}\Delta$ назвемо множину $Un = \{u \in V \mid \varepsilon(u) \in \Gamma\}$.

Нехай *R*-формула $R^{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m}_{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m}\Phi$ така:

$\{r,\dots,r_n, s,\dots,s_n, y_1,\dots,y_m\} \subseteq Un$,
$\{x_1,\dots,x_n\} \cap Un = \varnothing$, $\{v_1,\dots,v_m\} \cap Un = \varnothing$.

Un-uny-форма формули $R^{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m}_{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m}\Phi$ – це вираз вигляду $R^{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m}_{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m}\Phi$, де ε позначає невизначене значення.

R-формули Φ та Ψ *uny*-еквівалентні відносно *Un*, якщо Φ та Ψ мають однакові *Un-uny*-форми.

Якщо *R*-формули Φ та Ψ *uny*-еквівалентні відносно *Un*, то $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$ для кожних моделі мови A та $d \in^e A$, для яких $\varepsilon_{M(A)}(d) = T$ для всіх $u \in Un$.

Секвенцію $\vdash_{\Gamma}\Delta$ із множиною *uny*-змінних *Un* назвемо *uny-замкненою*, якщо існує пара Φ та Ψ *uny*-еквівалентних відносно *Un R*-формул Φ та Ψ таких, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Psi \in \Delta$.

Якщо секвенція $\vdash_{\Gamma}\Delta$ *uny*-замкнена, то $\Gamma \models_{\nu} \Delta$.

Додатковими умовами замкненості є Cl., CR, CLR. Вони ідентифікуються відповідними властивостями *Cl*, *CR*, *CLR* відношень $\models_{\Gamma}$, $\models_{\nu}$, $\models_{\Gamma\Gamma}$.

CL) Існує формула Φ: $\vdash_{\Gamma}\Phi \in \Sigma$ та $\vdash_{\Gamma}\neg\Phi \in \Sigma$.

CR) Існує формула Φ: $\dashv_{\Gamma}\Phi \in \Sigma$ та $\dashv_{\Gamma}\neg\Phi \in \Sigma$.

CLR) Існують формули Φ та Ψ такі:
$\vdash_{\Gamma}\Phi \in \Sigma$, $\vdash_{\Gamma}\neg\Phi \in \Sigma$, $\dashv_{\Gamma}\Psi \in \Sigma$, $\dashv_{\Gamma}\neg\Psi \in \Sigma$.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення логічного наслідку для множин формул.

Секвенційне дерево *замкнене*, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ *виводна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ. Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції Σ.

На основі властивостей відношень $\models_{\Gamma}$, $\models_{\nu}$, $\models_{\Gamma\Gamma}$ вводимо наступні базові секвенційні форми:

– $\vdash_{\Gamma}RT$, $\dashv_{\Gamma}RT$, $\vdash_{\Gamma}\neg RT$, $\dashv_{\Gamma}\neg RT$, $\vdash_{\Gamma}\Phi N$, $\dashv_{\Gamma}\Phi N$, $\vdash_{\Gamma}\neg\Phi N$, $\dashv_{\Gamma}\neg\Phi N$, $\vdash_{\Gamma}R\exists R$, $\dashv_{\Gamma}R\exists R$, $\vdash_{\Gamma}\neg R\exists R$, $\dashv_{\Gamma}\neg R\exists R$, $\vdash_{\Gamma}R\exists p$, $\dashv_{\Gamma}R\exists p$, $\vdash_{\Gamma}\neg R\exists p$, $\dashv_{\Gamma}\neg R\exists p$, $\vdash_{\Gamma}RR$, $\dashv_{\Gamma}RR$, $\vdash_{\Gamma}\neg RR$, $\dashv_{\Gamma}\neg RR$, $\vdash_{\Gamma}R\neg$, $\dashv_{\Gamma}R\neg$, $\vdash_{\Gamma}\neg R\neg$, $\dashv_{\Gamma}\neg R\neg$, $\vdash_{\Gamma}Rv$, $\dashv_{\Gamma}Rv$, $\vdash_{\Gamma}\neg Rv$, $\dashv_{\Gamma}\neg Rv$, $\vdash_{\Gamma}\neg\neg$, $\dashv_{\Gamma}\neg\neg$, $\vdash_{\Gamma}\neg\vee$, $\dashv_{\Gamma}\neg\vee$; такі форми наведені в [6];

– форми елімінації кванторів $\vdash_{\Gamma}\exists$, $\dashv_{\Gamma}\exists$, $\vdash_{\Gamma}\exists R$, $\dashv_{\Gamma}\exists R$, $\vdash_{\Gamma}\exists f$, $\dashv_{\Gamma}\exists f$, $\vdash_{\Gamma}\exists Rf$, $\dashv_{\Gamma}\exists Rf$, $\vdash_{\Gamma}\forall v$, $\dashv_{\Gamma}\forall v$, $\vdash_{\Gamma}\exists Rv$, $\dashv_{\Gamma}\exists Rv$, $\vdash_{\Gamma}\forall d$, $\dashv_{\Gamma}\forall d$, $\vdash_{\Gamma}\exists Rd$, $\dashv_{\Gamma}\exists Rd$; вони використовують спеціальні предикатні символи (ПС) вигляду εz.

Наведемо форми елімінації кванторів:

$$\vdash\exists\ \frac{\vdash R^i_n(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\vdash \exists xA, \Sigma}; \qquad \dashv\exists\ \frac{\dashv R^i_n(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\dashv \exists xA, \Sigma};$$

$$\vdash\exists R\ \frac{\vdash R^{\beta,i}_{n,x}(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\vdash R^{\beta}_n(\exists xA), \Sigma}; \qquad \dashv\exists R\ \frac{\dashv R^{\beta,i}_{n,x}(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\dashv R^{\beta}_n(\exists xA), \Sigma};$$

$$\vdash\exists f\ \frac{\vdash \exists xA, \dashv R^i_n(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\vdash \exists xA, \Sigma};$$

$$\vdash\neg\exists f\ \frac{\vdash \neg\exists xA, \dashv \neg R^i_n(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\vdash \neg\exists xA, \Sigma};$$

$$\vdash\exists Rf\ \frac{\vdash R^{\beta}_n(\exists xA), \dashv R^{\beta,i}_{n,x}(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\vdash R^{\beta}_n(\exists xA), \Sigma};$$

$$\vdash\neg\exists Rf\ \frac{\vdash \neg R^{\beta}_n(\exists xA), \dashv \neg R^{\beta,i}_{n,x}(A), \dashv \varepsilon z, \Sigma}{\vdash \neg R^{\beta}_n(\exists xA), \Sigma}.$$

Для форм $\vdash\exists$, $\dashv\exists$, $\vdash\exists f$, $\dashv\exists f$ умова:
$z \in V_T$, $z \in nm(\Sigma, \exists xA)$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Для форм $_{\dashv}\exists R$, $_{\dashv}\neg\exists R$, $_{\dashv}\exists Rf$, $_{\vdash}\neg\exists Rf$ умова:

$z\in V_T, z\in nm(\Sigma, R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA))$.

Для $_{\dashv}\exists f$, $_{\vdash}\neg\exists f$ та $_{\dashv}\exists Rf$, $_{\vdash}\neg\exists Rf$ додаткова умова: Σ не містить спеціальних ПС вигляду εz. Вона означає: застосування такої форми до формули секвенції Ω на шляху Υ від кореня до Ω – це *перше* застосування форми елімінації кванторів на Υ.

$_{\dashv}\exists f$, $_{\vdash}\neg\exists f$, $_{\dashv}\exists Rf$, $_{\vdash}\neg\exists Rf$ – це форми типу $\exists f$.

$$_{\dashv}\exists v\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists v\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\dashv}\exists Rv\ \frac{_{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\varepsilon,x}_{\zeta,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists Rv\ \frac{_{\vdash}\neg R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\ _{\vdash}\neg R^{\varepsilon,x}_{\zeta,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}.$$

$_{\dashv}\exists v$, $_{\vdash}\neg\exists v$, $_{\dashv}\exists Rv$, $_{\vdash}\neg\exists Rv$ – це форми типу $\exists v$.

$$_{\dashv}\exists d\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}\exists xA,\Upsilon \qquad _{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Upsilon}{_{\dashv}\exists xA,\Upsilon};$$

$$_{\vdash}\neg\exists d\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\vdash}\neg\exists xA,\Upsilon \qquad _{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Upsilon}{_{\vdash}\neg\exists xA,\Upsilon};$$

$$_{\dashv}\exists Rd\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\Upsilon \qquad _{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\varepsilon,x}_{\zeta,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Upsilon}{_{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\Upsilon};$$

$$_{\vdash}\neg\exists Rd\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\Upsilon \qquad _{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\varepsilon,x}_{\zeta,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Upsilon}{_{\dashv}R^{\varepsilon}_{\zeta}(\exists xA),\Upsilon}.$$

$_{\dashv}\exists d$, $_{\vdash}\neg\exists d$, $_{\dashv}\exists Rd$, $_{\vdash}\neg\exists Rd$ – це форми типу $\exists d$.

Для форм типу $\exists d$ умова: εy не входить до Σ, водночас Σ містить принаймі один ПС вигляду εz.

Форми $_{\dashv}\exists R$, $_{\dashv}\neg\exists R$, $_{\vdash}\exists$, $_{\dashv}\neg\exists$ назвемо $\exists_T$-формами.

Форми типів $\exists f$, $\exists v$, $\exists d$ назвемо $\exists_F$-формами.

Секвенційні форми типів RT, $\neg$RT, ΦN, $\neg$ΦN, R∃R, $\neg$R∃R, R∃p $\neg$R∃p назвемо *допоміжними*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

Наведені вище секвенційні форми є базовими формами кожного з числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*. Відмінність між цими численнями визначається різними умовами замкненості секвенції.

Числення *QSL*: умова C ∨ CL ∨ UnD.

Числення *QSR*: умова C ∨ CR ∨ UnD.

Числення *QSLR*: умова C ∨ CLR ∨ UnD.

Зауважимо, що одночасне виконання умов CL та CR рівносильне виконанню умови CLR.

Процедура побудови дерева для заданої секвенції Σ фактично однакова для різних першопорядкових числень (див., напр., [1, 2, 5, 6]), тому тут акцентуємо увагу на особливостях цієї процедури для числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*.

Процедура побудови дерева розбита на етапи, вона починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед побудовою дерева зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* "нових" тотально неістотних імен такий, що $nm(\Sigma)\cap TN=\varnothing$. На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списків *T*-формул та *F*-формул. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (або єдина *T*-формула чи *F*-формула, якщо один зі списків порожній).

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі k+1 перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, маємо замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією. Незамкнена вершина-секвенція Ω – *фінальна*, якщо до неї незастосовна жодна форма, або кожне застосування форми до Ω не вводить нових формул (відмінних від формул секвенцій на шляху від кореня до Ω).

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ таким чином. Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ. Далі до кожної активної формули застосовуємо відповідну основну форму (як описано нижче).

За потреби застосовуємо належну кількість разів допоміжні форми типів RT, $\neg$RT, ΦN, $\neg$ΦN, R∃R, $\neg$R∃R, R∃p. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні. До таких формул на даному етапі основні форми вже не застосовуються.

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному застосуванні такої форми беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне ім'я z як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини. Після цього застосовуємо форми типу RR, $\neg$RR, R$\neg$, $\neg$R$\neg$, R∨, $\neg$R∨, $\neg\neg$, $\neg\vee$, $\neg\vee$. Далі застосовуємо $\exists_F$-форми. Це робимо так.

Якщо в момент першого застосування $\exists_F$-форми серед доступних формул секвенції ще немає спеціальних ПС вигляду εy, то застосовуємо відповідну форму типу $\exists f$. Далі застосовуємо форми типу $\exists v$ для всіх y таких, що спеціальні ПС вигляду εy є доступними *F*-формулами секвенції.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Після цього застосовуємо форми типу ∃d (необхідною умовою є наявність серед доступних формул секвенції хоч одного специального ПС вигляду $\varepsilon_{\mathbf{z}}$, інакше виконуємо форму типу ∃f). Форму типу ∃d застосовуємо для всіх $y \in nm(\Sigma_0)$ таких, що $y \in \Sigma_0$, де Σ_0 – множина доступних формул.

Після виконання кожної форми перевіряємо на замкненість секвенції-вершини. При появі замкненої секвенції до неї незастосована жодна форма, процес побудови дерева на цьому шляху обривається. Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції Σ завершена позитивно, то маємо скінченне замкнене дерево.

Якщо ця процедура завершена негативно (маємо скінченне незамкнене дерево) або процедура не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

3. Теореми коректності та повноти

Для побудованих числень справджується

Теорема 2 (коректності). 1) *Секвенція* $_1\Gamma_1\Delta$ *виводна в QSL-численні* $\Rightarrow \Gamma \models_{\mathit{T}} \Delta$;

2) $_1\Gamma_1\Delta$ *виводна в QSR-численні* $\Rightarrow \Gamma \models_{\mathit{F}} \Delta$;

3) $_1\Gamma_1\Delta$ *виводна в QSLR-численні* $\Rightarrow \Gamma \models_{\mathit{TF}} \Delta$.

Доведення. Нехай $_1\Gamma_1\Delta$ виводна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Із процедури побудови випливає, що $\Lambda \models \mathbf{K}$ для кожної його вершини $_1\Lambda_1\mathbf{K}$. Для листів дерева це випливає з їх замкненості. Збереження секвенційними формами відношень $\models_{\mathit{T}}$, $\models_{\mathit{F}}$, $\models_{\mathit{TF}}$ (які засновків до висновків) випливає із відповідних одноіменних властивостей цього відношення. Отже, $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти побудованих числень використовується метод модельних (хінтікківських) множин. За його допомогою доводиться теорема про існування контрмоделі, звідки стандартним чином отримуємо теорему повноти.

Теорема 3. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві,* $\boldsymbol{H}$ *– множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху* $\wp$. *Тоді існують моделі мови* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ *та* $\delta, \eta \in {}^{\mathit{V}}\boldsymbol{A}$ *такі*:

1) $_1\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{A}}(\delta) = \mathit{T}$ *та* $_{\mathcal{A}}\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{A}}(\delta) \neq \mathit{T}$;

2) $_1\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(\eta) \neq \mathit{F}$ *та* $_{\mathcal{B}}\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(\eta) = \mathit{F}$.

Пари $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та $(\boldsymbol{B}, \eta)$ із такими властивостями назвемо *T-контрмоделлю* та *F-контрмоделлю*.

Задамо множини означених і неозначених імен: $W = \{y \in nm(\boldsymbol{H}) \mid {}_{\mathcal{A}}y \in \boldsymbol{H}\}$; $Un = \{y \in nm(\boldsymbol{H}) \mid {}_{\mathcal{A}}y \in \boldsymbol{H}\}$.

Доведення. Застосування форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула на шляху $\wp$ рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується жодна з умов замкненості. Тому для множини $\boldsymbol{H}$ гарантовано виконуються наступні умови коректності:

НС) не існує примітивної Ф: $_1\Phi \in \boldsymbol{H}$ та $_{\mathcal{A}}\Phi \in \boldsymbol{H}$;

НСU) не існує примітивних *Un-um*-еквівалентних $R^n_{\mathit{T}}A$ та $R^n_{\mathit{F}}A$ таких: $_1R^n_{\mathit{T}}A \in \boldsymbol{H}$ та $_{\mathcal{A}}R^n_{\mathit{F}}A \in \boldsymbol{H}$.

Для *QSL*-числень додатково виконується:

HCL) не існує примітивної Ф: $_1\Phi \in \boldsymbol{H}$ та $_{\mathcal{A}}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$.

Для *QSR*-числень додатково виконується:

HCR) не існує примітивної Ф: $_{\mathcal{A}}\Phi \in \boldsymbol{H}$ та $_{\mathcal{A}}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$.

Для *QSLR*-числень додатково виконується:

HCLR) не існують примітивні формули Ф та Ψ такі, що $_1\Phi \in \boldsymbol{H}$, $_1\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$ та $_{\mathcal{A}}\Psi \in \boldsymbol{H}$, $_{\mathcal{A}}\neg\Psi \in \boldsymbol{H}$.

Умова "HCLR" рівносильна "HCL або HCR".

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої виконуються згідно з базовими секвенційними формами (вони однакові для числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*). Таким чином, для $\boldsymbol{H}$ виконуються відповідні умови переходу, вони наведені в [6].

Множину специфікованих формул $\boldsymbol{H}$, для якої виконуються такі умови переходу, назвемо:

– *L-моделлю*, якщо для $\boldsymbol{H}$ виконуються умови коректності НС, НСU, HCL;

– *R-моделлю*, якщо для $\boldsymbol{H}$ виконуються умови коректності НС, НСU, HCR;

– *LR-моделлю*, якщо для $\boldsymbol{H}$ виконуються умови коректності НС, НСU, HCLR.

За модельною множиною $\boldsymbol{H}$ тепер побудуємо контрмоделі.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$.

Візьмемо деяку ін'єктивну $\delta \in {}^{\mathit{V}}A$ з $asrt(\delta) = W$.

Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ і η та на ІМ вигляду $\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\delta)$ і $\mathrm{r}^n_{\mathit{F}}(\eta)$:

якщо $_1\varepsilon y \in \boldsymbol{H}$, то $\varepsilon_{\mathcal{A}}(\delta) = \mathit{T}$, тобто $y \in asrt(\delta)$;

якщо $_{\mathcal{A}}\varepsilon y \in \boldsymbol{H}$, то $\varepsilon_{\mathcal{A}}(\delta) = \mathit{F}$, тобто $y \in asrt(\delta)$;

якщо $_1p \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\delta) = \mathit{T}$ та $p_{\mathcal{B}}(\eta) \neq \mathit{F}$;

якщо $_{\mathcal{A}}p \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\delta) \neq \mathit{T}$ та $p_{\mathcal{B}}(\eta) = \mathit{F}$;

якщо $_1\neg p \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\delta) = \mathit{F}$ та $p_{\mathcal{B}}(\eta) \neq \mathit{T}$;

якщо $_{\mathcal{A}}\neg p \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\delta) \neq \mathit{F}$ та $p_{\mathcal{B}}(\eta) = \mathit{T}$;

якщо $_1R^n_{\mathit{T}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\delta)) = \mathit{T}$ та $p_{\mathcal{B}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\eta)) \neq \mathit{F}$;

якщо $_{\mathcal{A}}R^n_{\mathit{T}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\delta)) \neq \mathit{T}$ та $p_{\mathcal{B}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\eta)) = \mathit{F}$;

якщо $_1\neg R^n_{\mathit{T}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\delta)) = \mathit{F}$ та $p_{\mathcal{B}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\eta)) \neq \mathit{T}$;

якщо $_{\mathcal{A}}\neg R^n_{\mathit{T}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то $p_{\mathcal{A}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\delta)) \neq \mathit{F}$ та $p_{\mathcal{B}}(\mathrm{r}^n_{\mathit{T}}(\eta)) = \mathit{T}$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів та їх заперечень задаємо довільно, керуючи до уваги обмеження щодо неістотності (див. [6]).

Kyiv National Taras Shevchenko University

Для атомарних формул і вигляду $R_i^n(p)$ та їх заперечень твердження теореми випливають із визначення значень базових предикатів. Далі доведення проводиться стандартним чином індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення модельної множини $\boldsymbol{H}$ (див. [5, 6]).

На основі теореми 3 отримуємо теореми повноти для побудованих числень.

Теорема 4. *Нехай* $\Gamma|\!=_T\Delta$. *Тоді секвенція* ${}_+\Gamma_+\Delta$ *вивідна в QSL-численні.*

Доведення. Нехай супротивне: $\Gamma|\!=_T\Delta$ та ${}_+\Gamma_+\Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для ${}_+\Gamma_+\Delta$ існує незамкнений шлях, звідки множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – L-модельна. За теоремою 3 існує T-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$: ${}_+\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\in T(\Phi_A)$ та ${}_-\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\notin T(\Phi_A)$.

Згідно з ${}_+\Gamma_+\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ тоді $\Phi_A(\delta) = T$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi_A(\delta) \neq T$ для всіх $\Psi\in\Delta$. Звідси $\delta\in T(\Gamma_A)$ та $\delta\notin T(\Delta_A)$, тому невірно $T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)$; отже, $\Gamma|\!\neq_T\Delta$.

Теорема 5. *Нехай* $\Gamma|\!=_F\Delta$. *Тоді секвенція* ${}_+\Gamma_+\Delta$ *вивідна в QSR-численні.*

Доведення. Аналогічне доведенню теореми 4.

У випадку *QSLR*-числень для вибору T-контрмоделі чи F-контрмоделі беремо до уваги таке.

Якщо при виконанні HCLR невірно HCL (тоді HCR), то для T-контрмоделі маємо неоднозначний предикат, тому беремо F-контрмодель.

Якщо при виконанні HCLR невірно HCR (тоді HCL), то для F-контрмоделі маємо неоднозначний предикат, тому беремо T-контрмодель.

Якщо виконуються HCL та HCR, то можна брати як T-контрмодель, так і F-контрмодель.

Теорема 6. *Нехай* $\Gamma|\!=_{TF}\Delta$. *Тоді секвенція* ${}_+\Gamma_+\Delta$ *вивідна в QSLR-численні.*

Доведення. Нехай супротивне: $\Gamma|\!=_{TF}\Delta$ та ${}_+\Gamma_+\Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для ${}_+\Gamma_+\Delta$ існує незамкнений шлях, звідки множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – LR-модельна. За теоремою 3 існують T-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та F-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \eta)$ такі:

1) ${}_+\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та ${}_-\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$;

2) ${}_+\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$ та ${}_-\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Для T-контрмоделі згідно з ${}_+\Gamma_+\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ маємо: $\Phi_A(\delta) = T$, для всіх $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi_A(\delta) \neq T$ для всіх $\Psi\in\Delta$. Звідси $\delta\in T(\Gamma_A)$ та $\delta\notin T(\Delta_A)$, звідки невірно $T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)$. Отже, $\Gamma|\!\neq_T\Delta$, тому й $\Gamma|\!\neq_{TF}\Delta$.

Для F-контрмоделі згідно з ${}_+\Gamma_+\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ маємо: $\Phi_B(\eta) \neq F$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi_B(\eta) = F$ для всіх $\Psi\in\Delta$. Звідси $\eta\notin F(\Gamma_B)$ та $\eta\in F(\Delta_B)$, звідки невірно $F(\Delta_B)\subseteq F(\Gamma_B)$. Отже, $\Gamma_B|\!\neq_F\Delta$, тому й $\Gamma|\!\neq_{TF}\Delta$.

Висновки

В роботі досліджено композиційно-номінативні логіки часткових однозначних квазіарних предикатів. Для відношень істиннісного, хибнісного і сильного логічного наслідку в таких логіках побудовано спеціальні числення секвенційного типу, доведено їх коректність і повноту. Для такої побудови використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних. Побудову подібних числень планується продовжити для логік неоднозначних квазіарних предикатів.

Список використаних джерел

1. *Нікітченко М.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предикатов первого порядка / С.С. Шкильняк // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6 – С. 32–49.
3. *Нікітченко М.С.* Першопорядкові композиційно-номінативні логіки / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 176–185.
4. *Шкильняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С.С. Шкильняк // Пробл. програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
5. *Шкильняк С.С.* Секвенційні числення першопорядкових логік однозначних квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2012. – № 1 – С. 34–51.
6. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2012. – № 2–3 – С. 33–43.
7. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия / Е.Д. Смирнова. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.
8. *Nikitchenko M.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics / M. Nikitchenko, V. Tymofieiev // Comm. in Computer and Inf. Science. – Vol. 0137. – Springer, 2012.

Надійшла до редколегії 19.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

РАДІОФІЗИКА

Kyiv National Taras Shevchenko University

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 577.322.23

Балінський* О.М., аспірант,
Судаков О.О., к.ф.-м.н., доц.,
Платонов М.О., к.б.н.

Пошук низькомолекулярних лігандів доменів білок-білкової взаємодії із застосуванням методів геометричного молекулярного моделювання

Домени білок-білкової взаємодії беруть участь у різноманітних біологічних процесах та є перспективними терапевтичними мішенями. У роботі представлене застосування комплексу методів молекулярного моделювання для пошуку нових низькомолекулярних лігандів для родин доменів PDZ та SH2. Тисячі тривимірних структур доменів та більше мільйона низькомолекулярних хімічних сполук були проаналізовані та кластери звані із застосуванням методів геометричного моделювання з метою отримання різноманітних вибірок, які були застосовані у молекулярному докінгу. Отримані комплекси білок-ліганд були пропущені крізь геометричні фільтри для автоматизації післядокінгової візуальної експертизи. У результаті для кожної з родин доменів була отримана таргетна бібліотека розміром порядку тисяч сполук. Отримані бібліотеки є загальним засобом для використання у якості стартової точки при пошуку лігандів експериментальними методами і розроблені з метою використання із будь-яким доменом відповідної родини.

Ключові слова: білок-білкова взаємодія, геометричне молекулярне моделювання, докінг.

O.M. Balinskyi*, postgrad. stud.,
O.O. Sudakov, Ph.D.,
M.O. Platonov, Ph.D.

Small-molecule ligand search for protein interaction domains involving shape-based molecular modeling methods

Protein interaction domains are involved in various biological processes and are promising drug targets. Here we present a complex of molecular modeling methods applied for discovery of novel small-molecule ligands for PDZ and SH2 domain families. Thousands of three-dimensional domain structures and more than a million drug-like compounds were analyzed and clustered using shape-based methods in order to select diverse sets which were used in molecular docking. Resulting protein-ligand complexes were passed through geometry filters to automate post-docking visual inspection. This resulted in a targeted library containing thousands of compounds for each of the domain families. The libraries are generic tools for use as starting points for ligand discovery with experimental methods and are designed to be used with any specific domain of the corresponding family.

Key words: protein-protein interaction, shape-based molecular modeling, docking.

*E-mail: o_balinskyi@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Introduction

Protein-protein interaction is critical for various biological processes and is the mechanism behind formation of supramolecular protein complexes and signal transduction [1]. Usually, proteins interact via specific protein interaction domains. In human proteome, there are about 80 families of such domains sharing structural and functional similarities. Search for small molecule ligands of the domains can be the initial stage of drug discovery process. Here we focus on two such families, namely PDZ and SH2, as the most common and well-studied [2, 3]. Domains of each of the families share similar secondary and tertiary structure (fold) with well defined binding site, which specifically binds short (up to 10 amino acid residues) peptides which are parts of interacting partner proteins.

A massive amount of structural data including thousands of unique 3D structures is available in the Protein Data Bank [4]. The data is derived both from solution NMR and crystal X-ray diffraction and includes isolated domains as well as domain-ligand complexes. Together with the size of small-molecule compound libraries offered by chemical suppliers,

© O.M. Balinskyi, O.O. Sudakov, M.O. Platonov, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

which reaches up to millions, this makes ligand discovery a complicated task.

The aim of this study was design of a generic targeted library of small molecule compounds for each of the two families of protein interaction domains using molecular modeling methods.

Molecular docking is a modeling method which allows screening large sets of chemical compounds against a defined protein binding site to select potential ligands [5]. In this study, we report an approach which allowed using docking for design of a generic targeted library for a domain family with numerous available 3D structures. To achieve this goal, we performed clustering of the domain structures according to binding site geometry and selected several diverse structures based on the clustering.

Geometric shape of protein binding pocket plays considerable role in recognition of small molecule ligands and can be considered as first approach in distinguishing between different binding sites. Various successful shape-based methods of binding site determination, numerical shape-based description and comparison have been reported [6]. Here we apply shape distributions approach [7] to protein solvent accessible surface to construct shape descriptors.

As during the docking simulation protein-ligand binding free energy is estimated using empirically calibrated scoring functions, which still have large errors and can produce significant artifacts, the complexes need post-docking visual inspection by a drug discovery expert [8]. Here we introduce geometry filters which do not use any approximate potentials of atom interactions and rely only on complex geometry. The filters were used to automate post-docking visual expertise.

Materials and methods

Three-dimensional structures of domains were retrieved from RCSB PDB [4]. For PDZ domains, 266 files were retrieved, of which 126 are NMR solution structures and 140 result from crystal X-ray diffraction data. The structures belong to 163 PDZ domains of 117 different proteins of 11 organisms. For SH2 domains, there are 219 files (66 NMR and 153 X-ray) for 67 domains of 65 proteins of 9 organisms. Files which contain more than one conformation for a domain (up to 50 for NMR-derived data) were split into separate structures. The total number of unique 3D structures is 2,708 for PDZ domains and 1,129 for SH2.

Triangulated solvent accessible surface was built for each domain structure using MSMS software [9] with spherical probe radius 1.4 Å and vertex density 10 $Å^{-1}$. The largest connected set of surface vertices within 9 Å from the center of binding site was used to construct shape-based numerical descriptors. The descriptors are 508-dimensional vectors of non-negative integer numbers and were built using shape distributions approach [7]. 10^7 vertex triplets were chosen randomly, each forming a triangle. Triangles which have a side longer than 16 Å were discarded. Triangle sides were distributed into 16 length bins, each 1 Å wide, covering lengths from 0 to 16 Å. A combination of three sorted side lengths, each belonging to one of 16 distance bins, defines one of 508 categories of the triangles. Number of triangles of each category was calculated, resulting in a 508-dimensional vector which is used as a numerical descriptor of the binding pocket shape. For further operations with descriptors, Euclidian metric was used.

In order to plot and visually evaluate distribution of shape descriptors in 508-dimensional space, principal component analysis was used. Vector descriptors were projected on the first two eigenvectors of the covariance matrix.

For each family of domains, descriptors were distributed into clusters using k-means algorithm [10]. Number of clusters was set to 6 for PDZ and 8 for SH2. For each cluster, a *centroid structure* was defined as the one, whose descriptor is the closest to mean descriptor for the cluster. The centroid structures were used for docking.

Molecular dynamics simulations were carried out using GROMACS software [11] in OPLS-AA/L force field [12] with periodic boundary conditions. Structure of second PDZ domain of PTPN13 protein of *Mus musculus* (PDB ID 1gm1, model 5) was put into a dodecahedric cell filled with 5079 molecules of TIP4P water [13] and 15 Na^+ and 16 Cl^- ions. After energy minimization and 5 equilibration simulations, 10 ps each, the main NPT ensemble simulation was performed at 310 K and 1 bar for 10 ns.

Collection of 1,195,395 drug-like compounds from chemical supplier Enamine Ltd. [14] was used as the primary source of small molecule structural data. A diverse subset of compounds was selected from the collection in three steps. At each step, diverse subset algorithm was used to narrow down the compound set. First, 500,000 compounds were selected using structural MACCS keys with Tanimoto metric. After that, a total of 3,500,000 3D conformers (7 conformers per compound on average) were generated using ConfGen software [15] with maximum strain energy 50 kJ/mol and minimal root-

Kyiv National Taras Shevchenko University

mean-square distance between the atoms of any two conformers 4 Å. Next, 200,000 compounds were selected from them, using pharmacophore properties diversity represented by piDAPH3 fingerprints. At last, 50,000 compounds were selected by shape diversity using EShape3D fingerprints.

The 14 centroid domain structures and the obtained 50,000 structural diversity set of compounds were docked against each other using QXP/Flo software [16], resulting into 10 complexes for each pair domain-compound. Complexes were filtered by contact energy and then passed through geometry filters.

Geometry filters were designed for automation of visual inspection procedure for protein-ligand complexes obtained in docking procedure. Properties of a complex to which filtering was applied include such values: distance from a given protein atom to the nearest ligand atom, distance from a given protein atom to the ligand's center of mass, fraction of ligand atoms which are in contact with protein molecule and number of hydrogen bonds.

Compounds from complexes which passed through the filters were defined as two final targeted libraries for PDZ and SH2 domains, containing 1119 and 3018 compounds respectively.

Results

In order to visualize distribution of binding site shape descriptors in the 508-dimensional space, they were projected onto a plane using principal component analysis. First two eigenvalues of the covariance matrix for the total 3,837 descriptor vectors made up 0.60 and 0.25 from the matrix trace, which means that projection on first two components contributes 85% of descriptor deviation in the space. Distribution of descriptors for PDZ and SH2 domains is plotted in Fig. 1.

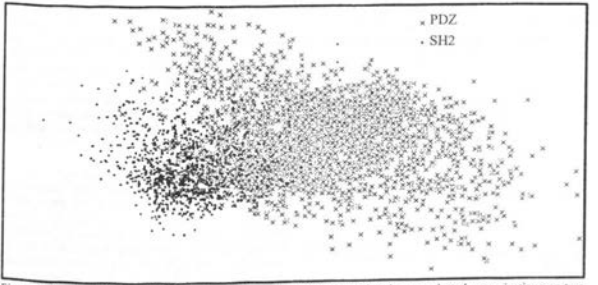


Fig. 1 Location of PDZ and SH2 domain descriptors in 508-dimensional space plotted as projections on two main components.

As one can see, the used descriptors allow partial distinguishing between the families. However, regions containing domains of two families intersect which means that some domains from different families may possess similar binding site shape. Comparison of descriptors for different conformations of the same PDZ domains is presented in Fig. 2. Conformations were taken from two PDB files derived from solution NMR experiment. The figure shows, that a domain's binding site can be more or less flexible. For example, visual inspection of the two distinct structures shown on the figure showed that side chains of binding site residues are flexible and thus can affect ligand binding properties. This is also confirmed by diversity of structures of a PDZ domain from molecular dynamics trajectory (Fig. 3). Domain conformations cut from the trajectory at a 100 ps step spread over a large part of descriptor space.

When we plot descriptors of unbound domain structures and those taken from domain-ligand complexes (Fig. 4), one can see that there is a region in space, where only unbound structures reside.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Visual inspection of such structures revealed that the cavity in molecular surface of the binding site (binding pocket) is closed, making ligand binding impossible (energetically highly unfavorable). A total of 466 structures from the region were considered 'unproductive' and were discarded prior to clustering. For SH2 domains, no such effect was observed.

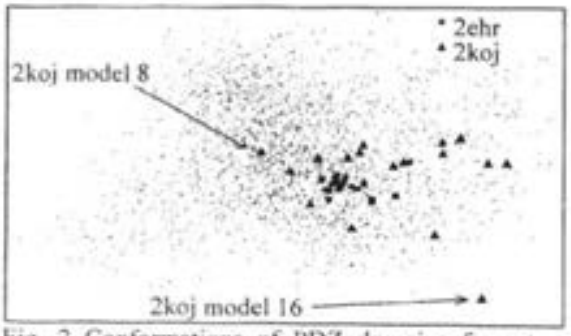


Fig. 2 Conformations of PDZ domains from two NMR-derives structural data files, PDB IDs 2ehr and 2koj. Highly dissimilar conformations (models) of the same domain shown by arrows.

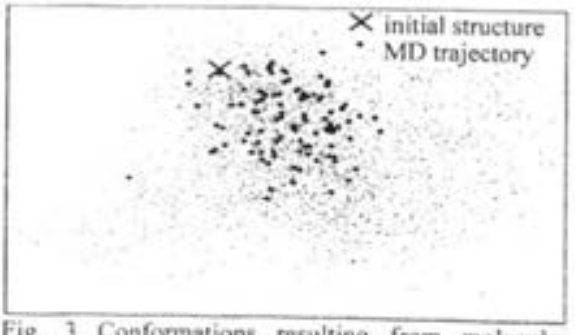


Fig. 3 Conformations resulting from molecular dynamics simulation. Starting conformation shown as cross.

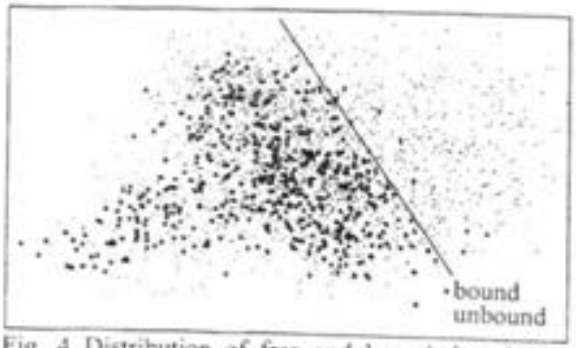


Fig. 4 Distribution of free and bound domains in descriptor space. Unproductive structures are to the right from the line.

Using k-means clustering algorithm, PDZ domain structures were divided into 6 clusters, containing from 187 to 543 structures. For SH2 domains, the number of clusters was set to 8, resulting into clusters containing from 48 to 223 structures. For each cluster, a centroid structure was defined as the closest to the average descriptor of the cluster. The 14 centroids are considered to represent full shape diversity of analyzed structures and uniformly cover the descriptor space. The centroid structures were used in molecular docking.

In the next step, we performed molecular cross-docking procedure for the 14 selected structures on one side and a diverse set containing 50,000 chemical compounds on the other one. The set was selected from a wide database of more than a million drug-like compounds and is diverse in terms of chemical structure, pharmacophore properties and 3D shape of a molecule (see Materials and methods). After docking and filtering of the obtained complexes, we got from 135 to 927 compounds for each of the 14 domain structures. The compounds were grouped into two sets containing 1119 and 3018 compounds respectively for PDZ and SH2 domains, which are the final targeted libraries. Here we must also note that 255 and 689 compounds respectively successfully passed through filters in complex with 2 or more domain structures, which confirms that coverage of shape space with the centroid structures is dense enough.

Discussion and conclusions

Simple and computationally fast methods of geometry modeling introduced in the paper allow effective narrowing down the set of protein structures from thousands to tens and the collection of compounds from more than a million to tens of thousands. Along with use of geometry filters, this resulted in highly optimized docking procedure.

In the first part of this study, we analyzed the massive set of all available 3D structures of PDZ and SH2 domains using developed shape-based binding site descriptors. It revealed that a specific domain can have significantly different conformations spreading in a large part of descriptor space. Furthermore, this means that regions of conformations for different domains intersect in the descriptor space, and therefore, different (in terms of primary structure) domains can have similarly shaped binding sites. Here we must stress that while clustering the descriptors, we are not considering *classification of domains* but rather just selection of diverse *domain structures* which represent the whole shape diversity of the family.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Intersection of sets of compounds found for different domain structures along with results of shape space analysis defines the concept of obtained targeted libraries. When screening the libraries against specific domains in an experimental assay, we neither expect any strong specificity of hits nor estimate any correspondence between their specificity profiles with domains, whose structures were used in docking. The libraries are designed as a generic tool for initial hit identification for any specific domain, while the specificity of found hits is a subject for further optimization using experimental methods.

Список використаних джерел

1. *Pawzon T.* Assembly of cell regulatory systems through protein interaction domains / T. Pawson, P. Nash // Science. – 2003. – **300**. – P. 445–452.
2. *Lee H.-J.J.* PDZ domains and their binding partners: structure, specificity, and modification / H.-J.J. Lee, J.J. Zheng // Cell communication and signaling. – 2010. – **8**. – P. 8+.
3. *Liu B.A.* The human and mouse complement of SH2 domain proteins – establishing the boundaries of phosphotyrosine signaling / B.A. Liu, K. Jablonowski, M. Raina, M. Arcé, T. Pawson, P.D. Nash // Molecular Cell. – 2006. – **22**. – P. 851–868.
4. *Berman H.M.* The protein data bank / H.M. Berman, J. Westbrook, Z. Feng, G. Gilliland, T.N. Bhat, H. Weissig, I.N. Shindyalov, P.E. Bourne // Nucleic Acids Research. – 2000 – **28**. – P. 235 – 242.
5. *Lengauer T.* Computational methods for biomolecular docking / T. Lengauer, M. Rarey // Current Opinion in Structural Biology. – 1996. – **6**. – P. 402–406.
6. *Weisel M.* PocketPicker: analysis of ligand binding-sites with shape descriptors / M. Weisel, E. Proschak, G. Schneider // Chemistry Central Journal. – 2007. – 1:7+.
7. *Onada R.* Shape distributions / R. Osada, T. Funkhouser, B. Chazelle, D. Dobkin // ACM Transactions on Graphics. – 2002. – **21**. – P. 807–832.
8. *Cole J.C.* Comparing protein-ligand docking programs is difficult / J.C. Cole, C.W. Murray, J.W. Nissink, R.D. Taylor, R. Taylor // Proteins. – 2005. – **60**. – P. 325–332.
9. *Sanner M.F.* Reduced surface: an efficient way to compute molecular surfaces / M.F. Sanner, A.J. Olson, J.C. Spehner // Biopolymers. – 1996. – **38**. – P. 305–320.
10. *Jain A.K.* Algorithms for clustering data / A.K. Jain, R.C. Dubes – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1988. – 320p.
11. *Hess B.* GROMACS 4: Algorithms for highly efficient, load-balanced, and scalable molecular simulation / B. Hess, C. Kutzner, D. van der Spoel, E. Lindahl // Journal of Chemical Theory and Computation. – 2008. – 4. – P. 435–447.
12. *Kaminski G.A.* Evaluation and reparametrization of the OPLS-AA force field for proteins via comparison with accurate quantum chemical calculations on peptides / G.A. Kaminski, R.A. Friesner, J. Tirado-Rives, W.L. Jorgensen // Journal of Physical Chemistry B. – 2001. – **105**. – P. 6474–6487.
13. *Jorgensen W.L.* Comparison of simple potential functions for simulating liquid water / W.L. Jorgensen, J. Chandrasekhar, J.D. Madura, R.W. Impey, M.L. Klein // The Journal of Chemical Physics. – 1983. – **79**. – P. 926–935.
14. *Chuprina A.* Drug- and lead-likeness, target class, and molecular diversity analysis of 7.9 million commercially available organic compounds provided by 29 suppliers / A. Chuprina, O. Lukin, R. Demoiseaux, A. Buzko, A. Shivanyuk // Journal of Chemical Information and Modeling. – 2010. – **50**. – P. 470–479.
15. *Watts K.S.* ConfGen: A conformational search method for efficient generation of bioactive conformers / K.S. Watts, P. Dalal, R.B. Murphy, W. Sherman, R.A. Friesner, J.C. Shelley // Journal of Chemical Information and Modeling. – 2010. – **50**. – P. 534–546.
16. *Mcmartin C.* QXP: Powerful, rapid computer algorithms for structure-based drug design / C. Mcmartin, R.S. Bohacek // Journal of Computer-Aided Molecular Design. – 1997. – 11. – P. 333–344.

Надійшла до редколегії 28.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 535.4

Голобородько А.О., к.ф.-м.н., доц.

Вплив апертури періодичних структур на ефект Талбота

Теоретично проведено аналіз впливу апертури періодичної структури на ефект Талбота. Наведено порівняння теоретичних розрахунків та експериментальних результатів розподілу інтенсивності когерентного електромагнітного випромінювання в площині Талбота. Показано можливість застосування ефекту Талбота у сенсорі хвильового фронту.

Ключові слова: хвильовий фронт, періодична структура, розподіл інтенсивності.

Goloborodko A.A., Ph.D., asc.prof.

Effect of periodic structures aperture on Talbot phenomena

The aperture of periodic structure effect on the Talbot phenomena theoretically calculated. Comparison of theoretical calculations and experimental results of the coherent electromagnetic radiation intensity distribution of in Talbot plane was made. The possibility Talbot phenomena using in wavefront sensor showed.

Key words: wave front, periodic structure, intensity distribution.

E-mail: angol@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Вирішення проблеми визначення форми світлової хвилі є важливим завданням в багатьох розділах фізики, таких як адаптивна оптика, лазерна фізика, офтальмологія і т.д [1]. Форма хвильового фронту безпосередньо пов'язана з фазою хвилі. Та в зв'язку з тим, що в оптичному діапазоні фаза не може бути виміряна безпосередньо, необхідно переводити фазу хвилі в інтенсивність. Тому дане перетворення є основним в методах вимірювання форми хвильового фронту в оптиці, результатом якого є залежність інтенсивності світла на фотоприймачі від фазової функції, яку потрібно знайти. Датчиками хвильового фронту називаються пристрої, які вимірюють форму хвильового фронту.

Виділяють два види датчиків хвильового фронту: інтерференційні і геометричні. В першому виді використовується інтерференція двох пучків світла, отриманих від монохроматичного джерела, до того ж один із них є опорним, а інший відрізняється від нього на величину оптичної різниці ходу, яка вимірюється [3]. Проте інтерферометри мають ряд недоліків: велика чутливість до вібрації, вимагають неспотворену когерентну опорну хвилю, процедура обробки інтерферограм достатньо складна, її важко виконати в реальному масштабі часу.

Принцип роботи геометричного датчика [7] оснований на тому, що за допомогою діафрагми вирізаються вузькі пучки світла. У випадку, коли хвильовий фронт відрізняється від плоского фронту, ми отримуємо поперечне зміщення положення плям відносно отворів діафрагми. Для визначення локальних нахилів хвильових фронтів використовують виміряні положення центрів плям. Мікролінзи розташовують в отворах для отримання плям меншого розміру. Такий датчик називається датчиком Шека – Хартмана. Розміри отворів визначають просторову роздільну здатність даного датчика. Проте зменшення апертури отворів призводить до збільшення дифракційного розходження пучків, що обмежує можливості даного підходу.

Останнім часом пропонується використовувати ефект Талбота [6, 8] в сенсорах хвильового фронту. З точки зору просторової роздільності і вартості системи такий сенсор хвильового фронту має ряд переваг у порівнянні з сенсором Шека – Хартмана. При цьому не вирішеним є питання обмеженості апертури на дифракцію світла [5]. Тому метою роботи було оцінити вплив апертури вхідної хвилі на ефект Талбота.

1. Дифракція світла на періодичній структурі

Розрахунок дифракційної картини в площині Талбота будемо проводити, використовуючи наближення, що дається принципом Гюгейнса–Френеля [2]. Будемо вважати, що плоска хвиля U_0 нормально падає на періодичну структуру з амплітудним коефіцієнтом пропускання $T(\xi,\eta)$.

© А.О.Голобородько, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Пропускання періодичної структури доцільно записувати у вигляді добутку двох рядів Фур'є:

$$T(\xi,\eta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m\,e^{\frac{2j\pi(m\xi+m\eta)}{\Delta}}, \qquad (1)$$

де Δ – період, C_m – коефіцієнти розкладу:

$$C_{mn}=\frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}T(\xi,\eta)e^{-\frac{2j\pi(m\xi+m\eta)}{\Delta}}d\eta\,d\xi. \qquad (2)$$

Надалі будемо вважати, що коефіцієнт амплітудного пропускання $T(\xi,\eta)$ може бути виражений, як суперпозиція коефіцієнтів пропускання $T(\xi)$ і $T(\eta)$:

$$T(\xi,\eta)=T(\xi)T(\eta). \qquad (3)$$

Тоді (1) можна переписати у наступному вигляді:

$$T(\xi,\eta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{2j\pi n\xi}{\Delta}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{\frac{2j\pi m\eta}{\Delta}}, \qquad (4)$$

де Δ – період, C_n, C_m – коефіцієнти розкладу:

$$C_n=\frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}T(\xi)e^{\frac{2j\pi n\xi}{\Delta}}d\xi \qquad (5)$$

$$C_m=\frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}T(\eta)e^{\frac{2j\pi m\eta}{\Delta}}d\eta$$

При цьому поле в дальній зоні дифракції можна записати, використовуючи дифракційний інтеграл [4]:

$$U(x,y)=\frac{U_0\,e^{j\beta z}}{j\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{\frac{j\beta}{2z}((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)}T(\xi,\eta)d\xi d\eta, \qquad (6)$$

або з використанням (3):

$$U(x,y)=U(x)U(y). \qquad (7)$$

де $U(x),U(y)$ визначаються наступним чином:

$$U(x)=\sqrt{\frac{U_0\,e^{j\beta z}}{j\lambda z}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{j\beta}{2z}x^2}T(\xi)d\xi$$
$$U(y)=\sqrt{\frac{U_0\,e^{j\beta z}}{j\lambda z}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{j\beta}{2z}y^2}T(\eta)d\eta \qquad (8)$$

Тут λ – довжина хвилі оптичного випромінювання, $k=2\pi/\lambda$ – хвильовий вектор, U_0 – амплітуда плоскої хвилі, z – відстань, (x, y) – координати в площині z, (ξ, η) – координати в площині зондування ($z=0$). Надалі будемо розглядати одновимірний розподіл $U(x)$, який, з урахуванням (5), можна записати у наступному вигляді:

$$U(x)=e^{\frac{j\pi^2}{12}}\sqrt{\frac{U_0\,e^{j\beta z}}{j\lambda z}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{2j\pi n\xi}{\Delta}}e^{-\frac{j\beta}{2z}x\xi}d\xi, \qquad (9)$$

Не важко показати, що таким чином записаний розподіл буде періодичним. Для бінарної гратки: $T(\xi)=\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{\Delta}+l\Delta\right);l=\overline{1,\infty}$ просторовий розподіл $U(x)$ в залежності від поздовжньої координати z показаний на рис. 1.

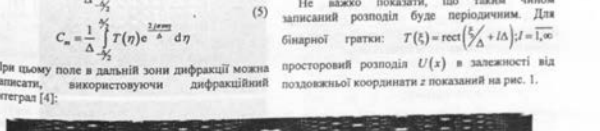


Рис. 1. Теоретично розрахована дифракція світла на періодичній структурі.

З рисунка видно, що на відстані z_T відбувається саморепродукція періодичної структури.

2. Апертурний ефект

Для врахування апертурних ефектів обмежимо одновимірний ряд (4), використавши додаткові множники:

$$T_a(\xi)=\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{2j\pi n\xi}{\Delta}}, \qquad (10)$$

де a – освітлювана апертура періодичної структури. Тоді інтеграл (9) перепишеться у наступному вигляді:

$$U(x)=e^{\frac{j\pi^2}{12}}\sqrt{\frac{U_0\,e^{j\beta z}}{j\lambda z}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\int_{-a/2}^{a/2}e^{\frac{2j\pi n\xi}{\Delta}}e^{-\frac{j\beta}{2z}x\xi}d\xi. \qquad (11)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

Таким чином можна показати, що вплив апертури визначається локалізацію базисних функцій: $a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda z\Delta}(n\lambda z - y\Delta)\right)$:

$$U(x) = e^{i\frac{kx^2}{2z}}\sqrt{\frac{U_0 a^2 e^{ikz}}{i\lambda z}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a(n\lambda z - x\Delta)}{\lambda z\Delta}\right). \quad (12)$$

Ще простіший вигляд можна отримати для бінарної гратки:

$$U(x) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi x(2N+1)\Delta}{\lambda z}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi x\Delta}{\lambda z}\right)}\,\frac{\sin\frac{\pi x\Delta}{N\lambda z}}{\frac{\pi x\Delta}{N\lambda z}}, \quad (13)$$

де N+1 це кількість періодів, які потрапляють в апертуру гратки. Як видно з (13) зображення апертури визначається функцією $\mathrm{sinc}(\pi x\delta N\lambda z_f)$. Таким чином зображення гратки формально не обмежене по апертурі, але через інтерференцію, визначається багатьма факторами у сумі (12), фактична площа зображення обмежена площею, яку можна порівняти з реальною апертурою гратки.

3. Експериментальні дослідження

Для експерименту було виготовлено транспаранти з прозорими областями квадратної форми з наступними характеристиками:

- період Δ =150 мкм,
- діаметр прозорої області d =75 мкм,
- кількість періодів:
  - 5×5,
  - 9×9,
  - 13×13.

Дослідження дифракції світла на виготовлених періодичних структурах проходило на установці, спрощена схема якої, показана на рис. 2.

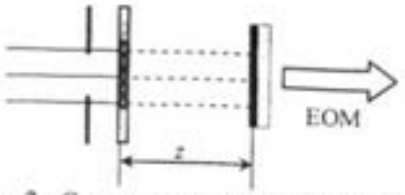


Рис. 2. Спрощена схема дослідження ефекту Талбота.

Плоский лазерний пучок потрапляє на гратку. На відстані z, яка дорівнює $2d^2/\lambda$ відбувається самовідтворення зображення. Це і є ефектом Талбота. Саме на цій відстані від дифракційної гратки розташована фотоприймальна камера, яка реєструє зображення.

На рис.3. зображені зображення в площині Талбота для граток з різною кількістю отворів. З наведених рисунків видно, що присутні додаткові максимуми за межею апертури.

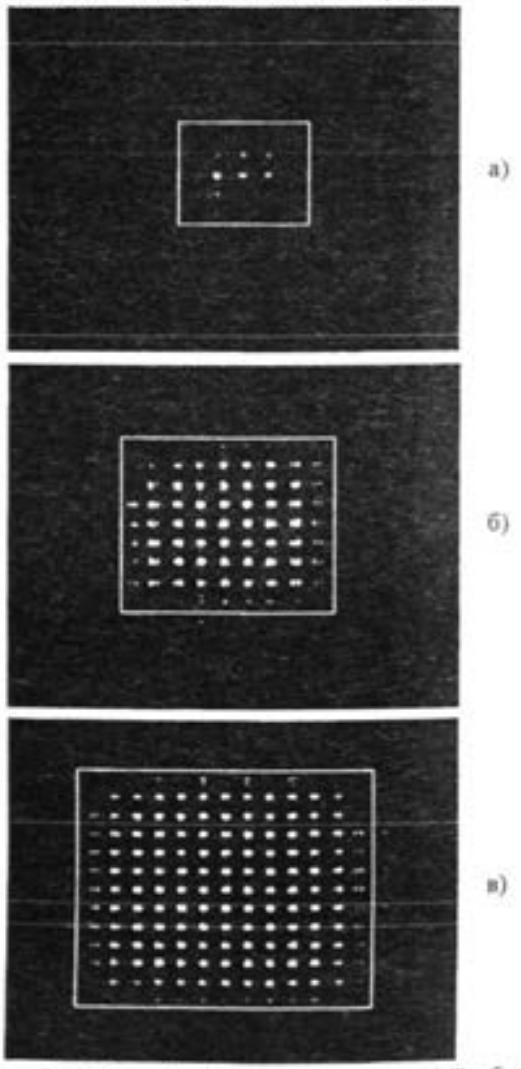


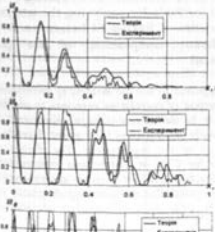
Рис. 3. Дифракційні картини в площині Талбота для періодичних граток: а)5×5, б)9×9, в)13×13.

Результати порівняння теоретичних амплітудних розподілів в площині $y = 0$ та зрізів експериментально отриманих дифракційних зображень наведені на рис. 4.

На графіках видно якісне співпадіння теоретичних розрахунків та отриманих експериментальних даних (мінімуми і максимуми майже для всіх отворів співпадають).

Kyiv National Taras Shevchenko University

що показує справедливість розрахунків. Для граток 9×9 та 13×13 присутнє роздвоєння максимумів поблизу краю апертури, що пов'язане з дифракцією світла на краю апертури освітлення.



а) N=5

б) N=9

в) N=13

Рис. 4. Розрахований та отриманий експериментально розподіли нормованої інтенсивності на періодичній структурі в площині Талбота.

При цьому відмітимо, що у зв'язку з більш сильним впливом дифракції на краю апертури гратки, точність визначення центрів мас крайніх плям зменшується. Таким чином, для при використанні ефекту Талбота в сенсорах хвильового фронту потрібно брати велику апертуру освітлення, а кількість точок для визначення форми хвильового фронту потрібно брати дещо меншу за кількість отворів на апертурі сенсора.

Висновки

Теоретично та експериментально досліджено формування сигналу в площині Талбота при дифракції світла на періодичній структурі. Показано, що виникнення додаткових максимумів пов'язано з апертурними ефектами. Якісне співпадіння теоретичних розрахунків та експериментальних результатів впливу апертури на ефект Талбота в майбутньому дозволить більш точно інтерпретувати отримані експериментальні результати.

Автор висловлює вдячність М.М.Котову, В.П.Даньку та Д.В.Поданчуку за консультації та допомогу в проведені експериментальних досліджень.

Список використаних джерел

1. *Alloin D. M.* Adaptive optics for astronomy/ Ed. D. M. Alloin and J.-M. Mariotti. NATO ASI Series: Kluwer Academic Publ., 1994. –423p.
2. *Аззам Р.* Эллипсометрия и поляризованный свет / Р.Аззам // М.: Мир, 1981. – 584с.
3. *Витриченко Э.А.* Адаптивная оптика/ Э.А.Витриченко. М.:Мир, 1980. – 314с.
4. *Гудмен Дж.* Статистичекая оптика/ Дж.Гудмен// М: Мир, 1988. – 528 с.
5. *Арчакова Е.В.* Дифракционный датчик волнового фронта/ Е.В.Арчакова, Н.П.Козлов //Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2010. – **12**, №4 – С.134–137.
6. *Berry M.V.* Integer, fractional and fractal Talbot effects/ M. V. Berry, S. Klein. J.Mod.Opt. – 1996. – **43** – P.2139 – 2164.
7. *Hamman H. A.* direct technique for calculating the profile of aberration of the eye measured by a modified Hartmann–Shack apparatus/ H. A. Hamman // Optics Communications. – 2000. –**173** – P.23–36.
8. *Podanchuk D.* Wavefront sensor based on the Talbot effect with the precorrected holographic grating/ D.Podanchuk, V.Kurashov, A.Goloborodko, V.Dan'ko, M.Kotov, N.Goloborodko// Appl. Opt. – 2012. – **51** – P.C125-C132.

Надійшла до редколегії 15.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 543.272, 537.311.322

Голобородько Н.С., к.ф.-м.н., м.н.с.,
Ільченко В.В., д.ф.-м.н., проф.

Про можливість аналізу статистичними методами інтегральних змін вольт-амперних характеристик гетероструктури SnO_2-p-Si для різного складу оточуючого газового середовища

Для аналізу зміни вольт-амперних характеристик (ВАХ), а саме зміни величини струму, в залежності від стану навколишнього середовища запропоновано використовувати метод згортки та метод кореляційного відгуку. Експериментально встановлено коефіцієнти відмінності для ВАХ в різних газових середовищах для структури p-Si/SnO_2. Показано можливість розширення класів ВАХ при однаковому рівні точності проведення досліджень.

Ключові слова: вольт-амперні характеристики, відносна дисперсія, згортка, кореляційний відгук.

Goloborodko N.S., Ph.D., j.sci.,
Il'chenko V.V., Dr.Sci, prof.

About the possibility of applying the statistical methods for analysing the integral characteristics of SnO_2-p-Si heterostructure for different composition of the gas environment

It is suggested to use the method of convolution and the method of correlation response to analyze the changes in the current-voltage characteristics (CVC), namely the change of the current, depending on the state of the environment. The distinction coefficients for CVC in various gas environments for the structure p-Si/SnO_2 were experimentally defined. The possibility of expanding the classes of CVC at the same level of research accuracy is shown.

Key words: volt-ampere characteristic, fractional dispersion, convolution, correlation response.

E-mail: sunata@univ.kiev.ua
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Сучасний розвиток та застосування нанотехнологій стимулює інтенсивне вивчення властивостей матеріалів, що можуть бути використані як чутливі елементи для створення сенсорів і сенсорних систем. В першу чергу це пов'язано з тим, що такі системи відкривають нові можливості їх використання в різних сферах діяльності людини: в охороні оточуючого середовища для визначення малих концентрацій отруйних та шкідливих речовин [3, 5, 6, 11]; в медицині для тестування захворювань і можливості дистанційного аналізу отриманих результатів; використання таких систем як перетворювачів для біосенсорів.

Відомо, що тонкі наноструктуровані плівки можна використовувати як чутливий елемент сенсорної системи. Чутливість таких гетероструктур залежить від типу адсорбційно-активного шару, товщини та його елементного складу [9]. Зазначимо, що оскільки вольт-амперні характеристики (ВАХ) можуть показувати незначну зміну струму, виникає проблема коректного інтерпретування та аналізу отриманих даних та необхідність використання методів аналізу експериментальних результатів.

В роботі пропонується використати сучасні методи аналізу (як аналогової так і цифрової інформації), які використовуються в розпізнаванні образів (ця область досить інтенсивно досліджується останнім часом [4, 8]). Основним у даній проблемі є вибір конкретних факторів, що відносять корисний сигнал до відповідного класу сигналів з потрібними характеристиками. Така задача має багато розв'язків та містить ряд похибок, які залежать від вибраного простору. Тим не менше в ряді випадків спільною проблемою є оптимальна класифікація та пошук спільних і відмінних частин. Потрібно зазначити, що простір повинен задовольняти декільком вимогам [10]: по-перше, простори сигналів не повинні перетинатись (іншими словами, класи повинні бути добре розділені); по-друге, розмірність простору ознак має бути якомога менше, для зменшення складності обчислень на стадії класифікації; нарешті, побудова простору і проектування об'єктів, класифікованих в ньому, має бути швидкою і ефективною.

© Н.С.Голобородько, В.В. Ільченко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Таким чином метою даної роботи є перевірка можливості використання статистичних методів для аналізу ВАХ.

1. Експериментальні зразки

У роботі досліджувались експериментальні структури, які були виготовлені методом піролізу [12]. Авторами показано, що з точки зору газової чутливості оптимальною є гетероструктура SnO_2-p-Si з товщиною наноструктурованої плівки 7нм. ВАХ такої плівки в лабораторній атмосфері та атмосфері насичених парів спирту наведено на рис.1.

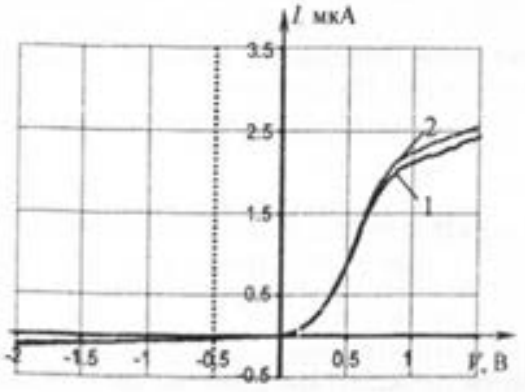


Рис. 1. ВАХ гетероструктури SnO_2-p-Si з товщиною наноструктурованої плівки 7 нм в 1 – лабораторній атмосфері, 2 – атмосфері насичених парів етанолу.

При дослідженні ВАХ залежностей авторами статті [12] було виявлено резонансний характер залежності вольт-амперної характеристики. І встановлено, що при певній частоті модульованого сигналу друга похідна має максимум. Припускається, що саме ця частота відповідає максимальній чутливості сенсора. При цьому аналізуючи вже першу похідну можна сказати про відмінності в сигналах (рис. 2).

При цьому виявилось, що відмінність кривих (критерієм відмінності було вибрано відносну дисперсію

$$\left\langle \left(dI_1/dV_1 - dI_2/dV_2 \right)^2 \right\rangle \Big/ \left\langle \left(dI_1/dV_1 \right)^2 \right\rangle$$

не перевищує 0.1. Потрібно зазначити, що відносна дисперсія для ВАХ складає: $\left\langle (I_1 - I_2)^2 \right\rangle / \left\langle I_1^2 \right\rangle = 0.024$. Таким чином вже перша похідна дозволяє якісніше проводити аналіз кривих. Саме пошук методів аналізу сигналів і визначення критеріїв їх відмінності і є основою цієї роботи.

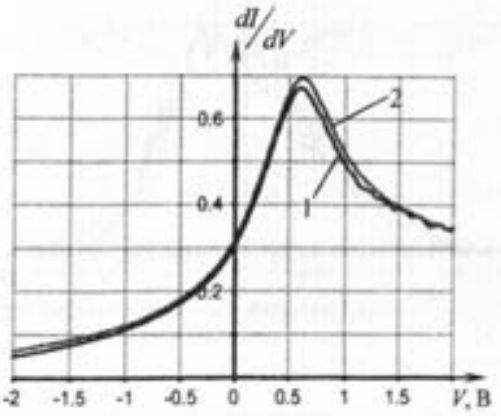


Рис. 2. Перша похідна ВАХ гетероструктури SnO_2-p-Si з товщиною наноструктурованої плівки 7 нм в 1 – лабораторній атмосфері, 2 – атмосфері насичених парів етанолу.

2. Метод згортки

Додаткову інформацію про ВАХ газових сенсорів можна отримати аналізуючи приведені згортки сигналів [1]. Як базовий сигнал вибрано першу похідну ВАХ в лабораторній атмосфері (без наявності парів спирту):

$$G_{11}(V) = \frac{\int_{V_{min}}^{V_{max}} I_1'(v) I_1'(V-v)\,dv}{\left(\int_{V_{min}}^{V_{max}} I_1'(v)\,dv \right)^2}, \quad (1)$$

$$G_{12}(V) = \frac{\int_{V_{min}}^{V_{max}} I_1'(v) I_2'(V-v)\,dv}{\int_{V_{min}}^{V_{max}} I_1'(v)\,dv \int_{V_{min}}^{V_{max}} I_2'(v)\,dv}$$

де $I'(v)$ – перша похідна ВАХ по напрузі, а індекси 1 і 2 відповідають ВАХ у лабораторній атмосфері та у атмосфері насичених парів етанолу відповідно. Зрозуміло, що таким чином побудовані розподіли будуть визначати коефіцієнти кореляції та кроскореляції розподілів для різної напруги. Приклади таких розподілів для гетероструктури SnO_2-p-Si з товщиною наноструктурованої плівки 7нм від напруги показано на рис. 3.

Kyiv National Taras Shevchenko University

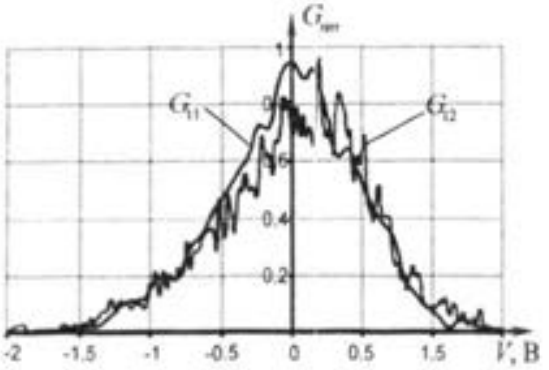


Рис. 3. Згортка похідних ВАХ гетероструктури SnO_2-p-Si з товщиною наноструктурованої плівки 7 нм у різних атмосферах.

Як видно з наведених залежностей існує істотна відмінність кореляційних властивостей у ВАХ з присутністю парів етанолу і без. Таким чином ця характеристика може бути використана для виявлення відмінностей у зміні газового складу середовища.

При цьому, якщо як деяку інтегральну характеристику відмінності цих залежностей використати відносну дисперсію, то ступінь такої відмінності становить: $\left\langle (G_{11}-G_{12})^2 \right\rangle \Big/ \left\langle G_{11}^2 \right\rangle = 0.18$. Останнє значення дозволяє розширити наявні класи сигналів при заданій точності вимірювань.

3. Метод кореляційного відгуку

Як було показано раніше згортка сигналів дозволяє побудувати функціональні залежності, які можуть бути використані для класифікації вимірюваних величин. Зазначимо, що в прямому просторі така операція визначає кореляційну подібність сигналів. При переході ж до оберненого простору можна побудувати сигнал–відгук, який буде інтегральною характеристикою відмінності.

Розглянемо ситуацію існування сигналу $i(V)$, з якого потрібно виділити шуканий сигнал $g(V)$ та відсіяти інші сигнали. Зрозуміло, що кожний сигнал $g(V)$ формує в Фур'є площині спектр частот $G(v)$ [2]:

$$G(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(V)\exp(j2\pi Vv)dV. \qquad (2)$$

Тоді, якщо в Фур'є площині встановити фільтр з пропусканням $G(v)$, в той момент, коли на вхід подано сигнал $g(V)$, розподіл поля, яке пройшло через фільтр, буде дорівнювати:

$$G(v)G(v)=|G(v)|^2, \qquad (3)$$

дійсній величині. Це означає, що такий фільтр повністю компенсує фазову складову Фур'є образу сигналу $g(V)$. В загальному випадку при проходженні сигналу $I(v)$ через узгоджений фільтр $G(v)$, сигнал має вигляд:

$$\begin{aligned} I_{out}(v) &= G(v)^2 + I(v)^2 + \\ &+ G(v)I(v)^* \exp(2j\pi\alpha(v)v) \\ &+ G(v)^* I(v)\exp(-2j\pi\alpha(v)v) \end{aligned}, \qquad (4)$$

де $\alpha(v)$ – дискретний чи неперервний набір частот для відповідного сигналу. Після другого перетворення Фур'є сигнал:

$$L_{cr}(V)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} I_{out}(v)\exp(-j2\pi Vv)dv, \qquad (5)$$

або

$$\begin{aligned} L_{cr}(V) &= |i||g|\delta(V)+\left[I_{out}\oplus I_{out}\oplus G\right]\delta(V)+ \\ &+|g|\left[I_{out}*G*\delta(v+\alpha(v)\lambda v)\right]+ \\ &+|g|\left[G\oplus I_{out}*\delta(v-\alpha(v)\lambda v)\right] \end{aligned}, \qquad (6)$$

де * – позначає згортку, $\oplus$ – кореляцію. Таким чином, сигнал, що проходить таку систему, після ще одного перетворення формує відгук у вихідній площині, по величині якого можна сказати про ступінь однаковості чи неоднаковості сигналів. При цьому, якщо на вхід подано сигнал, відмінний від $g(V)$, тоді фаза Фур'є образу не компенсується фільтром, і сигнал після другого перетворення Фур'є вже не буде мати вигляд імпульсного відгуку, а може бути представленим у вигляді деякого функціонального ряду і буде характеризуватись максимальною інтенсивністю та на півширину. Зауважимо, що перевагою такої системи є те, що зсув шуканого сигналу не зменшує яскравості відгуку, а тільки зсуває його на відповідну відстань у вихідній площині [7].

На рис. 4 показаний кореляційний відгук двох залежностей похідних ВАХ. Опорним є похідна ВАХ плівки у лабораторній атмосфері.

В цьому випадку відносна дисперсія становить $\left\langle (L_{11}-L_{12})^2 \right\rangle \Big/ \left\langle L_{11}^2 \right\rangle = 0.13$, що дещо менше ніж в методі згортки (0.18). Можливо, це пояснюється відносно невеликою ділянкою відмінності сигналів.

Kyiv National Taras Shevchenko University

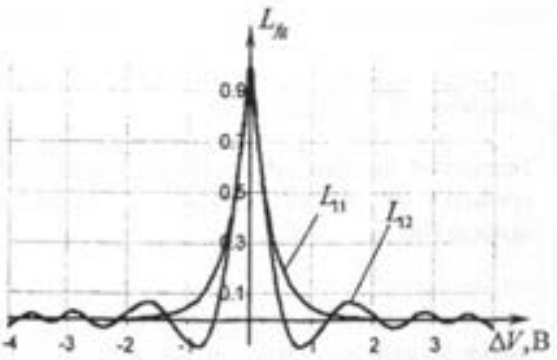


Рис. 4. Кореляційні відгуки сигналів: L_{11} – кореляційний відгук опорного сигналу (узгоджений відгук), L_{12} – кореляційний відгук похідної ВАХ гетероструктури SnO_2-p-Si з товщиною наноструктурованої плівки 7 нм у атмосфері насичених парів етанолу відносно лабораторної атмосфери.

Висновки

Як видно з наведених залежностей розрізнення ВАХ в різних атмосферах можливе за умови використання одного з вищенаведених методів і ці характеристики можуть бути використані для виявлення відмінностей у змісі газового складу середовища. З іншої сторони для врахування можливих кросчутливостей сенсорів потрібно використовувати функціональні розклади ВАХ.

Список використаних джерел

1. *Bremermann H.* Distributions, complex variables and Fourier transforms / H.Bremermann Addison: Wesley, 1965. – 252 p.
2. *Goodman J.W.* Statistical Optics / J.W.Goodman – N.Y.: John Wiley & Sons, 2000. – 572 p.
3. *Вашпанов Ю.О.* Адсорбційна чутливість напівпровідників / Ю.О.Вашпанов, В.А.Смынтина – Одеса: Астропринт, 2005. – 216 с.
4. *Ajmal M.* Illumination invariant recognition and 3D reconstruction of faces using desktop optics / M.Ajmal // Opt. Express. – 2011. – **19** – P.7491-7506.
5. *Bomk O.I.* About the gas sensitivity of metal–silicon contacts with the superthin nickel and titanium films to the ammonia environment / O.I. Bomk, L.G. Il'chenko, V.V. Il'chenko, A.M. Pinchuk, V.M. Pinchuk, G.V. Kuznetsov, V.I. Strykha // Sensors and Actuators. – 2000. – **B 62** – P. 131–135.
6. *Jasinsky P.* Solid-state electrochemical gas sensors / P.Jasinsky // Material Science-Poland. – 2006. – **1**. – P.269-278.
7. *Javidi B.* Image classification with a chirp-encoded joint transform correlator / B.Javidi, Q.Tang, G.Zhang, F.Parchekani // Appl.Opt. – 1994. – **33(26)** – P.6219-6227.
8. *Kim D.* Distortion-tolerant 3-D object recognition by using single exposure on-axis digital holography / D.Kim, B.Javidi // Opt. Express. – 2004. – **12** – P.5539-5548.
9. *Korotchenkov G.* Peculiarities of SnO_2 thin films deposition by spray pyrolysis for gas sensors applications / G. Korotchenkov, V. Brinzari, M. DiBatista, J. Schwank, A. Vasilien // Sensors and Actuators. – 2001. – **B77**. – P. 244-252.
10. *Nakhodkin M.G.* Pattern recognition with fast feature extraction / M.G.Nakhodkin, Y.S.Musatenko, V.N. Kurashov // SPIE Proc. – 1998. – **3402** – P. 333-343.
11. *Крук І.С.* Газо-аналітичні методи контролю токсичних газів у повітрі / І.С.Крук, О.В.Лущевський // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. –2012. – **1** – С. 271-274.
12. *Il'chenko V.V.* Resonant phenomena in heterostructure n-SnO_2(Ni)/p-Si at the condition of the gas adsorption / V.V. Il'chenko, A.I.Kravchenko, I.V.Skrigun // Abstr. 9th International Meeting on Chemical Sensores, July 7-10, 2002, Boston, USA. – Boston. – 2002. – P. 201-203.

Надійшла до редколегії 09.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 535.5:621.029.7

Григорук В.І., д. ф.-м. н., Онисько Ю.Т., пр. інж., Слінченко* Ю.А., к. ф.-м. н.

Удосконалення методики створення пасивних волоконних відгалужувачів X- та Y- типів з багатомодових волоконних світловодів

Удосконалено методику створення пасивних волоконних відгалужувачів X- та Y- типів. Як результат її апробації експериментально виготовлено ряд пасивних відгалужувачів X- та Y- типів із сучасних кварц-кварцових багатомодових світловодів.

Ключові слова: багатомодові волоконні світловоди,пасивні волоконні відгалужувачі.

Grygoruk V.I., Doct. sci., Onys'ko Y.T., pr. eng., Slinchenko Y.A., Ph.D.

Improved method of creating passive fiber couplers of X-and Y-types of multimode optical fibers

The method of creating passive fiber couplers of X-and Y-types has been improved. As a result of testing the method, a number of passive couplers of X-and Y-types has been experimentally produced of modern quartz-silica multimode fibers.

Key Words: multimode optical fibers, passive optic couplers.

*E-mail: yas@univ.kiev.ua

Статтю представив проф., д. ф.-м. н Данилов В.В.

Вступ

Пасивні волоконні відгалужувачі (ПВВ) X- та Y- типів є неодмінними функціональними частинами волоконно-оптичних ліній зв'язку, волоконно-оптичних елементів, волоконно-оптичних сенсорів тощо. Тому поліпшення їх параметрів та методики створення є актуальним завданням.

Метою роботи є вдосконалення методики створення пасивних волоконних відгалужувачів (ПВВ) X- та Y- типів із сучасних багатомодових волоконних світловодів (БВС).

Теорія

Загальний вигляд (ПВВ) X- та Y- типів зображено на рис. 1.

ПВВ повинні задовольняти наступним вимогам: вносити низькі додаткові втрати (менше одиниць дБ), мати високий коефіцієнт направленості (розв'язки) каналів (десятки дБ), суттєво не спотворювати модовий склад випромінювання.

Робота таких відгалужувачів грунтується на хвилеводному зв'язку між серцевинами волокон за рахунок експоненційної затухаючої частини електромагнітного поля, що розповсюджується за межі серцевини в оболонкову зону та викликає перекачування потужності у сусідній волоконний світловод (ВС).

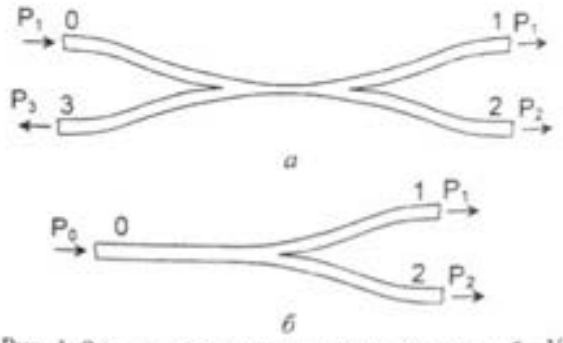


Рис. 1. Загальний вигляд ПВВ: *а* – X- типу, *б* – Y- типу.

Існує два підходи для опису процесу взаємовпливу полів світловодів і, як результат, перекачування потужності [1]. У першому випадку визначаються безпосередньо моди складного ВС (з двох світловодів), а взаємодія між модами двох вихідних ВС, що і призводить до перекачування, проявляється у інтерференції чи биттї полів цих мод. У другому підході визначаються моди кожного з ВС окремо, а зв'язок між ними враховується відповідним коефіцієнтом (рівняння зв'язаних мод). У

© В.І. Григорук, Ю.Т. Онисько, Ю.А.Слінченко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

випадку двох ідентичних слабконаправляючих ВС, якщо на вході одиничною потужністю збуджується лише один ВС - $P_1(0)=1, P_2(0)=0$, то з поздовжньою координатою z потужність буде змінюватися за законом

$$P_1(z)=\cos^2 Cz, P_2(z)=\sin^2 Cz, \qquad (1)$$

де, для першого варіанту опису взаємовпливу полів двох ВС, C визначає довжину биття полів основних мод (що утворюють поле складного ВС), $z_b=\frac{\pi}{C}$ – відстань уздовж вісі ВС на якій потужність перекачується з одного ВС у інший і назад; для другого – коефіцієнт зв'язку. Для двох однакових східчастих ВС маємо [1]

$$C\approx\sqrt{\frac{\pi\Delta}{Wda}}\frac{U^2}{V^2}\frac{\exp(-Wd/a)}{K_1^2(W)}, \qquad (2)$$

де d – відстань між вісями ВС; a – радіуси ВС; V – параметр волокна; U,W – безрозмірні параметри моди в серцевині та оболонці ВС відповідно; $\Delta=(n_1^2-n_2^2)/2n_2^2$ - параметр висоти профілю показника заломлення ВС; K_1 - модифікована функція Бесселя другого роду. Якщо, наприклад, $V=2{,}4, \Delta=0{,}005, d/a=4$ довжина биття $z_b\approx 2{,}8a$.

До двох найбільш загальних методів виготовлення волоконно-оптичних відгалужувачів (ВВ) відносяться полірovка і сплавлення. Такі ПВВ можуть бути виготовлені з досить низькими втратами.

Недоліки першої методики виготовлення полягають у руйнуванні ВС в процесі полірування; проблематичності точного визначення відстані від полірованої поверхні до серцевини волокна, яка визначає характеристики зібраного відгалужувача.

Великою перевагою сплавних ПВВ є можливість контролю коефіцієнта відгалуження у процесі виготовлення.

Експериментальні результати та їх аналіз

При виготовленні ВВ методом сплавлення можливі застосування різних джерел нагріву (газові пальники, електрична дуга, лазерний промінь), що залежить від потрібних параметрів ПВВ. Зазвичай сплавний відгалужувач Х-типу представляє собою два звитих волокна, контакт між якими забезпечується за рахунок сил поверхневого натягу при розплавленні кварцового скла. В результаті розтягування розплавленої ділянки звитих волокон утворюється біконічна перетяжка, яка є зоною перерозподілу енергії між каналами.

Створення ПВВ виконувалось на модернізованій електродуговій установці для зварювання оптичних волокон КСС-111. При цьому два ВС (з попередньо видаленими на місцях майбутнього сплавлення захисними оболонками) закріплювались паралельно один одному і сплавлялись між собою до утворення спільного моноволоконного відрізку. Потім виконувалось нагрівання цієї області електричною дугою та механічне розтягування з одночасним візуальним контролем форми та розмірів біконічного переходу [2]. В процесі формування адіабатичного біконічного переходу виконувався оперативний контроль якості майбутнього волоконного елемента. По закінченні формування біконічний перехід розташовували всередині відрізка скляної або полімерної трубки довжиною 60-120 мм. В місцях виходу з трубки ВС жорстко скріплювалися з нею за допомогою швидкотвердіючого компаунда. Відрізок трубки служив в подальшому корпусом пристрою, який захищає біконічний перехід від деформацій та контакту із зовнішнім середовищем.

ПВВ, як і в [3], виготовлялись на основі багатомодових кварц-кварцових ВС з параметрами: діаметр серцевини – 50 мкм, оптичної оболонки – 125 мкм, затухання ≤ 2.3 Дб/км на λ=850 нм та ≤ 0.6 дБ/км на λ=1300 нм. Вимірювання втрат в коротких відрізках (до 1 м) волокон, відібраних для виготовлення ВВ, виконано за методикою, описаною в [4].

Параметри виготовлених ПВВ Х-типу (рис. 1 *а*) мали значення: коефіцієнт поділу потужності світла $\eta=(P_2/(P_1+P_2))100\%$ – 42÷58%; додаткові втрати які вносяться ВВ $\kappa=10\lg((P_1+P_2)/P_0)$ – κ<0,5 дБ; коефіцієнт направленості $\mu=10\lg(P_3/P_0)$ – μ>48 дБ; коефіцієнт звуження (відношення початкового та кінцевого діаметрів волокна, що виміряний в області перетяжки звуження) – 1,5÷7;

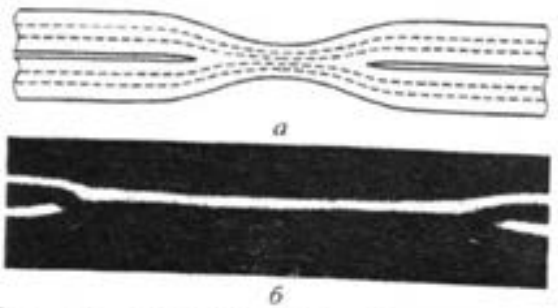
Kyiv National Taras Shevchenko University

довжина робочої ділянки відгалужувача – 1÷15 мм.

Перевага запропонованої методики при виготовленні відгалужувача 2x2 полягає у тому, що замість традиційного звивання двох (чи більше) світловодів (рис. 2) з наступним сплавленням та розтягом, відбувається сплавлення паралельних світловодів з тим самим наступним розтягом для формування біконічного переходу.

Рис. 2. Утворення біконічного переходу при виготовленні ВВ Х-типу шляхом звивання двох ВС.

Сплавлення паралельних, а не скручених, світловодів призводить до більш рівномірного і симетричного розташування серцевин у біконічному переході (рис. 3 *а*) і, як наслідок цього, більш рівномірного перерозподілу (перекачці) енергії випромінювання між каналами. Також при цьому підвищується механічна міцність звареної ділянки відгалужувача, оскільки при такій методиці виготовлення практично відсутні напруження та деформації у ВС, що з'являються при звиванні та подальшому сплавленні [5]. Характерний зовнішній вигляд створених ПВВ Х-типу наведено на рис. 3 *б*.



а

б

Рис. 3. Створені ПВВ Х-типу: *а* – функціональна схема ВВ Х-типу; *б* – виготовлений ПВВ Х- типу.

На рис. 4 наведено розподіл інтенсивності випромінювання у дальній зоні для ПВВ Х-типу 50/50. Видно, що ПВВ мало впливає на модовий розподіл. Так при рівномірному збудженні усіх світловодних мод на вході (канал 0) рис. 1 *а*, на виході також отримали подібний розподіл - рис. 4 *б* (канал 1) та *в* (канал 2). При збудженні (канал 0) переважно мод вищого порядку – рис. 4 *г* і нижчого – рис. 4 *ж* на виходах 1 і 2 було отримано аналогічні розподіли: рис. 4 *ж*, *е* та 4 *з*, *і* відповідно.

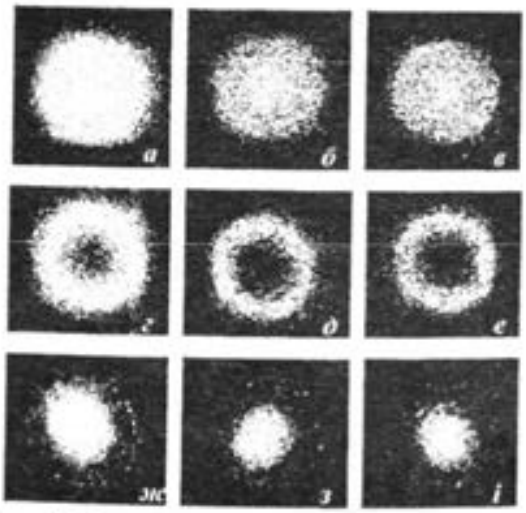
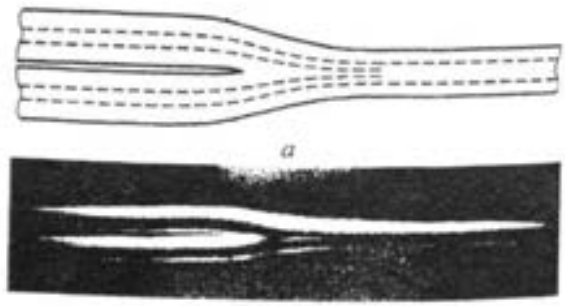


Рис. 4. Розподіл випромінювання у дальній зоні: *а*, *г*, *ж* – на 0 вході відгалужувача; *б*, *д*, *з* та *в*, *е*, *і* – на виходах 1 та 2 відповідно.

Виготовлення ПВВ Y-типу також відбувалося за запропонованою методикою.

На рис. 5 *а* наведено функціональну схему ПВВ Y-типу, зовнішній вигляд якого зображено на рис. 5 *б*.



а

б

Рис. 5. Створені ПВВ Y-типу: *а* – функціональна схема ВВ Y-типу; *б* – виготовлений ПВВ Y- типу.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Потрібно зазначити, що різкий конічний перехід або асиметрія елементів, що з'єднуються у відгалужувачі, призводить до збудження нерівномірного модового складу і додаткових втрат. Аналіз розподілу інтенсивності випромінювання у дальній зоні показав, що розподіл на виході відповідає рівномірному збудженню усіх світловодних мод незалежно від умов на вході ПВВ. На рис. 6 наведено розподіл випромінювання у дальній зоні: в підвідному світловоді (канал 0, рис. 1 *б* при збудженні переважно мод нижчого (рис. 6 *а*) і вищого (рис. 6 *б*) порядків, а на рис. 6 *в*, *г* – на виходах 1 і 2 (рис. 1 *б*) відповідно.

Виготовлені за даною методикою ПВВ Y-типу мали наступні параметри. При їх роботі на розгалуження (введення випромінювання у канал 0, рис. 1 *б* коефіцієнт поділу потужності світла $\eta=(P_2/(P_1+P_2))100\%$ знаходився у межах 44÷56%; додаткові втрати які вносяться ВВ $\kappa=10\lg((P_1+P_2)/P_0)$ становили < 0,5 дБ. При роботі ПВВ на об'єднання інформаційних світлових потоків (введення випромінювання у канали 1 і 2, рис. 1 *б* коефіцієнт направленості $\mu = 10\lg(P_2/P_0)$ був > 45 дБ.

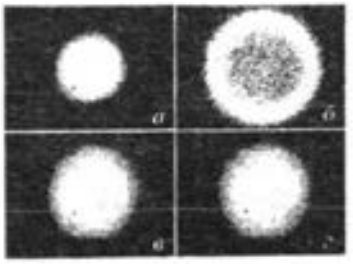


Рис. 6. Розподіл випромінювання у дальній зоні: *а*, *б* – на 0 вході відгалужувача; *в*, *г* – на виходах 1 та 2 відповідно.

Таким чином, вдосконалено фактично основну сьогодні методику виготовлення відгалужувачів методом сплавлення. Запропонований підхід дозволяє поліпшити фізичні параметри ПВВ, спростити процес їх виготовлення виготовлення особливо у випадку виготовлення ВВ типу *N*x*N* (*N*>2).

Список використаних джерел

1. *Снайдер А.* Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав ; пер. с англ. под ред. Е. М. Дианова, В. В. Шевченко. – М. : Радио и связь, 1987. – 656 с.
2. Відеодіагностика волоконно-оптичних елементів / А. М. Василенко, В. І. Григорук, Ю. Т. Онисько, Ю. А. Слінченко // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 1999. – №1. – С. 273–276.
3. *Shuai C.* Experimental measurement and numerical analysis of fused taper shape for optical fiber coupler / C. Shuai, J. Duan, J. Zhong // J. of Central South Univer. of Technol. – 2007. – **14**, № 2. – P. 251–254.
4. *Григорук В. І.* Дослідження затухання світла в коротких волоконних світловодах і біконічних переходах / В. І. Григорук, С. О. Масловський, Ю. Т. Онисько // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 1993. – № 3. – С. 213–216.
5. *Shuai C.* Performance improvement of optical fiber coupler with electric heating versus gas heating / C. Shuai, C. Gao, Y. Nie, S. Peng // Appl. Opt. – 2010. – **49**, № 24. – P. 4514–4519.

Надійшла до редколегії 23.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012. 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 535.375

Іванісік А. І., к.ф.-м.н., Ісаєнко* О. Ю., аспірант, Коротков П. А., д.ф.-м.н., Понежа Г. В., к.ф.-м.н.

Вплив наночастинок благородних металів на ефективність вимушеного комбінаційного розсіювання

Теоретично досліджено вплив ефекту гігантського комбінаційного розсіювання на умови генерації вимушеного комбінаційного розсіювання у рідинах за відсутності самофокусування. Отримано чисельні оцінки для толуолу та бензолу з наночастинками срібла. Результати обчислень вказують на можливість ефективного вимушеного комбінаційного розсіювання при зменшенні довжини середовища у 6-7 разів порівняно з вільним від наночастинок середовищем.

Ключові слова: гігантське комбінаційне розсіювання, вимушене комбінаційне розсіювання, наночастинка.

A. I. Ivanisik, Ph.D., O. Iu. Isaenko*, postgrad. stud., P. A. Korotkov, Dr.Sci., G. V. Ponezha, Ph.D.

The Influence of Noble Metals Nanoparticles on the Effectiveness of Stimulated Raman Scattering

This paper analyzes the possibility of application of surface-enhanced Raman scattering effect as a means of enhancing the generation of stimulated Raman scattering in liquids under the absence of self-focusing. Numerical evaluations are obtained for toluene and benzene with silver nanoparticles. The results indicate the possibility of reducing of medium length for effectual generation of stimulated Raman scattering up to 6-7 times as compared with the case of a nanoparticle-free medium.

Key words: surface-enhanced Raman scattering, stimulated Raman scattering, nanoparticle.

*E-mail: *o_isaienko@bigmir.net*

Статтю представив д. ф.-м. н. Скришевський В. А.

Вступ

Вимушене комбінаційне розсіювання світла (ВКР) застосовується для перестроювання частоти лазерного випромінювання, підсилення світла в оптоволоконних лініях зв'язку, компресії світлових імпульсів тощо. Однак використання ВКР зазвичай ускладнене підвищеними вимогами до параметрів лазерного джерела випромінювання та комбінаційно-розсіюючого (КР) середовища. Зокрема, ефективне ВКР зазвичай вимагає значних величин інтенсивності лазерного випромінювання накачки та довжини КР-середовища.

Для оптимізації умов ВКР-генерації та ВКР-підсилення підбираються середовища з відповідними параметрами, зокрема використовуються активніші КР-речовини, застосовується явище самофокусування тощо. Однак ці підходи мають певні недоліки. Приміром, під час самофокусування спостерігаються інші нелінійно-оптичних явища (такі як фазова самомодуляція, рух фокальної області тощо), які впливають на параметри ВКР-генерації і ускладнюють керування властивостями генерованого світла.

Альтернативним методом покращення умов ВКР-генерації та ВКР-підсилення може стати використання гігантського комбінаційного розсіювання (ГКР). Ефект ГКР виникає, коли КР-активні молекули адсорбуються на шорсткій поверхні металів або на наночастинках металу, введених у КР-середовище у дисперсному стані. За розрахунками [1] коефіцієнт $k_{ГКР}$ зростання інтенсивності компонент КР, тобто, коефіцієнт зростання ефективного перетину КР, за використання наночастинок срібла у розчині може сягати значень 10^6 і більше. Слід враховувати, що коефіцієнт $k_{ГКР}$ визначається кількома обставинами: довжиною хвилі збуджуючого і розсіяного випромінювання (через що максимальне зростання може відбуватися на частоті, відмінній від частоти спектральних КР-ліній середовища), геометричними параметрами поверхні металу, характером адсорбції молекул КР-речовини на поверхні металу тощо. До того ж, найбільшого значення коефіцієнт зростання ефективного перетину КР досягається у випадку взаємодії з наночастинкою лише першого шару адсорбованих КР-активних молекул середовища, а частинки мають бути сумірними за розмірами з

© А.І. Іванісік, О.Ю. Ісаєнко, П.А. Коротков, Г.В. Понежа, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

молекулами середовища, але більшими за них.

Загалом, ефект ГКР може забезпечити підсилення інтенсивності розсіяного випромінювання, що, в принципі, є ефективним засобом зниження вимог до інтенсивності збуджуючого випромінювання, за якої спостерігається ВКР.

Метою роботи є розвиток моделі, в якій розглядається ідеальний випадок ефекту ГКР та його вплив на процес ВКР. У цій моделі прийнято, що самофокусування у випадку керівських рідин за зниження інтенсивності збуджуючого випромінювання проявляє себе незначною мірою, тому ним нехтують. Крім того, в моделі розглянуто утворення лише першої стоксової компоненти ВКР, втрати енергії на ВКР-компоненти вищих порядків не враховують. На основі отриманих результатів зроблено оцінку впливу ГКР на ефективність ВКР.

Комбінаційне розсіювання світла адсорбованими молекулами

Механізм ефекту ГКР є дискусійним питанням. На сьогодні розвинуто кілька моделей, які дають змогу оцінити величину зростання інтенсивності розсіяного світла за певних умов. Для обрахунку коефіцієнта зростання перетину КР внаслідок ефекту ГКР у роботі обрано одну з моделей, запропоновану в [1].

Розглянемо поле однорідної кулі з діелектричною проникністю ε_n, що є моделлю сферичної наночастинки. Припустимо частинка розташована у вакуумі. Під впливом зовнішнього електричного поля $\boldsymbol{E}_0$ падаючої (збуджуючої) електромагнітної хвилі наночастинка поляризується. Поле $\boldsymbol{E}^{(i)}$ всередині частинки є сумою електричного поля $\boldsymbol{E}_0$ та поля від наведеної в ній поляризації $\boldsymbol{P}$ (об'ємної густини дипольного моменту). Поле $\boldsymbol{E}^{(i)}$ становить (в системі СГС; остаточні вирази незалежать від системи одиниць вимірювання) [2]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}^{(i)} = \boldsymbol{E}_0 - \dfrac{4}{3}\pi \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}^{(i)} \end{cases}, \qquad (1)$$

де α – поляризовність матеріалу наночастинки. Враховуючи, що діелектрична проникність матеріалу наночастинки визначається виразом $\varepsilon_n = 1 + 4\pi\alpha$, можна, розв'язуючи систему рівнянь (1), виразити через $\boldsymbol{E}_0$ внутрішнє поле в наночастинці:

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = \frac{3}{\varepsilon_n + 2}\boldsymbol{E}_0,$$

і її поляризацію

$$\boldsymbol{P} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n + 2}\boldsymbol{E}_0. \qquad (2)$$

Дипольний момент сферичної наночастинки з радіусом R визначається співвідношенням:

$$\boldsymbol{d} = V\boldsymbol{P} = R^3\frac{\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n + 2}\boldsymbol{E}_0, \qquad (3)$$

де враховано об'єм частинки $V = 4\pi R^3/3$. Дипольний момент $\boldsymbol{d}$ створює додаткове електричне поле за межами наночастинки. На поверхні частинки (тобто на відстані R від її центру) сума полів становить:

$$\boldsymbol{E}^{(s)} = \boldsymbol{E}_0 + \left[\frac{3(\boldsymbol{dR})}{R^5}\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{d}}{R^3}\right], \qquad (4)$$

де $\boldsymbol{R}$ – радіус вектор з довжиною R, проведений з центру наночастинки. З використанням (3), (4) у випадку $\boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{E}_0$ отримуємо максимальне поле на поверхні частинки:

$$\boldsymbol{E}^{(s)} = \left(1 + 2\frac{\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n + 2}\right)\boldsymbol{E}_0. \qquad (5)$$

Якщо наночастинка розташована у середовищі з діелектричною проникністю ε_s. Вираз (5) набуває вигляду:

$$\boldsymbol{E}^{(s)} = \left(1 + 2\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_s}{\varepsilon_n + 2\varepsilon_s}\right)\boldsymbol{E}_0. \qquad (6)$$

ГКР виникає через збільшення локального поля, діючого на адсорбовану молекулу, якщо

$$E^{(s)} > E_0. \qquad (7)$$

Вираз (6) дає шуканий коефіцієнт $E^{(s)}/E_0$ зростання локального поля на поверхні частинки.

За КР відбувається зсув частоти розсіяного випромінювання відносно частоти збуджуючого світла. Поле розсіяної хвилі теж зростає за описаним механізмом. Отже, результуючий коефіцієнт $k_{ГКР}$ зростання інтенсивності розсіяного світла в компоненти КР становить:

$$k_{ГКР} = \left(\left(1 + 2\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_s}{\varepsilon_n + 2\varepsilon_s}\right)\left(1 + 2\frac{\varepsilon_n' - \varepsilon_s'}{\varepsilon_n' + 2\varepsilon_s'}\right)\right)^2. \qquad (8)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

де ε_n' та ε_c' – діелектричні проникності наночастинки та середовища на комбінаційній частоті, а ε_n та ε_c – на частоті збуджуючої хвилі.

У рамках описаної моделі можливі числові оцінки коефіцієнта $k_{ГКР}$ зростання ефективного перетину КР адсорбованих молекул для різних наночастинок і комбінаційних частотних зсувів. Розглянемо випадок використання наночастинок срібла, які дають змогу отримати одні з найбільших значень $k_{ГКР}$. Припустимо наночастинки введені в толуол (комбінаційний зсув першої стоксової компоненти 1004 см$^{-1}$) або бензол (зсув першої стоксової компоненти 992 см$^{-1}$). За цих умов отримуємо наведену на рис.1 залежність ефективного коефіцієнта зростання перетину КР адсорбованих молекул від довжини хвилі λ_1 збуджуючого випромінювання. Для розрахунку використані дані з дисперсії ε_n срібла роботи [3] У випадку використання рубінового лазера (λ_1 =694,3 нм) на комбінаційній частоті першої стоксової компоненти значення $k_{ГКР}$ складають для толуолу $k_{ГКР}$ = 158,1 і для бензолу $k_{ГКР}$ = 159,9.

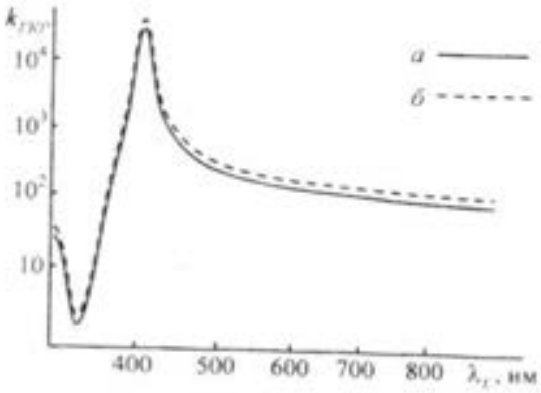


Рис. 1. Залежність коефіцієнта зростання $k_{ГКР}$ ефективного перетину КР на срібних наночастинках від довжини хвилі збуджуючого випромінювання для різних речовин: *а* – толуол, *б* – бензол.

Слід врахувати, що вказана величина $k_{ГКР}$ стосується однієї молекули КР-активної речовини, яка знаходиться у першому шарі молекул, адсорбованих на поверхні наночастинки. Для визначення загального зростання інтенсивності розсіяного світла в розчині наночастинок у толуолі чи бензолі необхідно оцінити відношення вільних молекул середовища, які мають звичайний перетин КР, та адсорбованих молекул з ефективним перетином КР, збільшеним у $k_{ГКР}$ разів.

Коефіцієнт підсилення ВКР у середовищі з наночастинками

Чисте КР-середовище має власний коефіцієнт $g_{ВКР}$ підсилення ВКР, який у разі додавання наночастинок може змінюватися для адсорбованих молекул. Необхідно визначити певний «ефективний» коефіцієнт підсилення $G_{еф}$, що є результатом розсіювання за обома механізмами (КР та ГКР).

Значення $G_{еф}$ залежить від співвідношення вільних та адсорбованих молекул. Для визначення цього співвідношення розглянемо модель середовища, яке складається зі сферичних молекул і сферичних наночастинок з ефективними радіусами r та R, відповідно. З фізичної точки зору на ці параметри накладаються обмеження $R \geq r$, $R \approx r$, оскільки наночастинки мають бути співрозмірними за розміром із молекулами середовища, але бути більшими за них.

У чистому середовищі кількість молекул, що рівномірно розташовані у певному об'ємі V =1 см^3, визначається як $N_{молек} = V / V_1$, де V_1 – об'єм однієї молекули середовища.

Після додавання в речовину наночастинок молекули адсорбуються на їх поверхні і утворюються комплекси «наночастинка + перший шар молекул». Об'єм одного комплекса складає:

$$V_к = \frac{4}{3}\pi\left(R + 2r\right)^3. \qquad (9)$$

Максимально можлива концентрація таких комплексів: $N_{к\,макс} = V / V_к$. Проте, в реальних умовах вона може бути меншою, тому, введемо коефіцієнт k, який вказує на частку концентрації комплексів від максимально можливої. Тож, фактична концентрація описаних комплексів задається виразом:

$$N_к = kN_{к\,макс}. \qquad (10)$$

У цьому разі для вільних молекул середовища залишається доступним об'єм $V_в = V - V_к N_к$ і кількість вільних молекул

Kyiv National Taras Shevchenko University

середовища дорівнює

$$N_в = \frac{V_в}{V_1} = \frac{(V - V_к N_к)}{V_1} = N_{повн} - N_к \frac{V_к}{V_1}.$$

Якщо молекули середовища рівномірно займають всю поверхню наночастинки, то максимально можливу кількість молекул на одній частинці можна оцінити через відношення площі поверхні наночастинки до площі перетину молекули (врахувавши, що оцінюється площа сфери із сумарним радіусом молекули та наночастинки):

$$n_1 = 4\frac{(R+r)^2}{r^2}. \qquad (11)$$

На всіх наночастинках є адсорбованими $N_{адс} = N_в n_1$ молекул.

Врахування (9)–(11) дає змогу оцінити «ефективний» коефіцієнт підсилення ВКР як суму вкладів від КР і ГКР у співвідношенні, що задається кількістю вільних та адсорбованих молекул:

$$G_{ЕФ} = g_{ВКР}\left(\frac{N_в}{N_{повн}} + k_{ГКР}\frac{N_{адс}}{N_{повн}}\right). \qquad (14)$$

Припустивши, що ВКР розвивається за деякої порогової інтенсивності випромінювання накачки, яка безпосередньо пов'язана з коефіцієнтом підсилення, зменшення порогової інтенсивності ВКР-генерації можна оцінити як:

$$\frac{I_{пор.0}}{I_{пор.1}} = \frac{g_{ВКР}}{G_{ЕФ}} = \frac{N_{повн}}{N_в + k_{ГКР}N_{адс}}, \qquad (15)$$

де $I_{пор.0}$ та $I_{пор.1}$ – порогова інтенсивність збуджуючого ВКР випромінювання накачки в чистому середовищі та при врахуванні ГКР, відповідно.

Проаналізуємо залежність $I_{пор.0}/I_{пор.1}$ від радіусу наночастинок, який безпосередньо впливає на можливу кількість їх у речовині та на кількість адсорбованих молекул. У випадку дисперсного розчину наночастинок срібла в толуолі та бензолі слід врахувати, що радіус наночастинок має бути більшим 1 нм, щоб перевищувати радіус молекул, який становить приблизно 0,35 нм. За відповідних для цих речовин параметрів і концентрації з k=0,1 (тобто 10% від максимально можливої) залежність $I_{пор.0}/I_{пор.1}$ від R графічно подано на рис. 2.

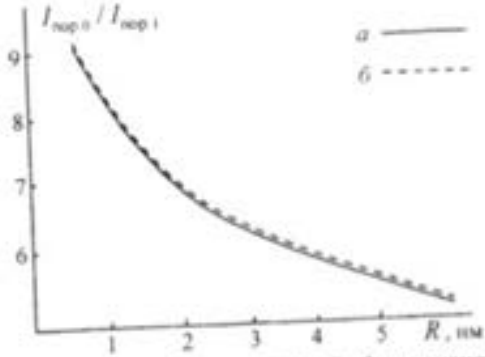


Рис. 2. Залежність порогової інтенсивності накачки для генерації ВКР від розміру наночастинок: a – толуол, $б$ – бензол.

Інтенсивність ВКР за наявності наночастинок

Отримані значення зростання $G_{ЕФ}/g_{ВКР}$ коефіцієнта підсилення дають змогу розрахувати ефективність ВКР для заданої накачки у випадку чистого чи з наночастинками середовища та визначити відстань пройдену випромінюванням накачки у середовищі, з якої починатиметься генерація ВКР.

Розрахунки виконувалися за моделлю, описаною в [4], але без урахуванням генерації комбінаційних компонент вищих порядків і затухання світла в речовині. За цих припущень вихідна система рівнянь для інтенсивностей I_1, I_S збуджуючого випромінювання та першої стоксової компоненти має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dz} = -G_{ЕФ}\dfrac{\lambda_S}{\lambda_1} I_1 I_S \\ \dfrac{dI_S}{dz} = G_{ЕФ} I_1 I_S \end{cases}, \qquad (16)$$

де λ_1 і λ_S – довжини хвиль лазерного випромінювання та стоксової компоненти, відповідно, z – координата уздовж шляху розповсюдження світла. Розв'язки системи рівнянь (16), що дають залежність інтенсивності випромінювання від координати подано на рис. 3 та рис. 4. Використовувалося значення $g_{ВКР}$ =1,17·10^{-11} м/Вт для толуолу та $g_{ВКР}$ =2,8·10^{-11} м/Вт для бензолу. Вважалося, що збудження здійснюється рубіновим лазером з λ_1 = 694,3 нм, а наночастинки мають розмір R=2 нм і концентрацію, яка реалізується за k=0,1.

Kyiv National Taras Shevchenko University

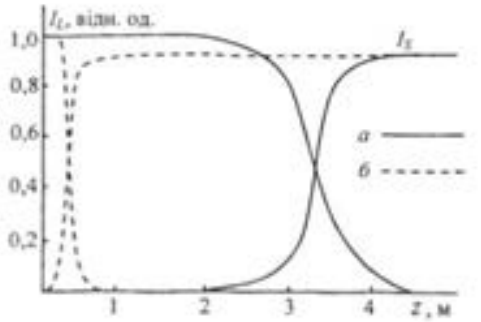


Рис. 3. Відносна інтенсивність лазерного випромінювання і першої стоксової компоненти в чистому толуолі (*а*) та толуолі з додаванням наночастинок срібла (*б*).
($I_L(z=0)=40\,МВт/см^2$, $I_S(z=0)=10\,Вт/см^2$)

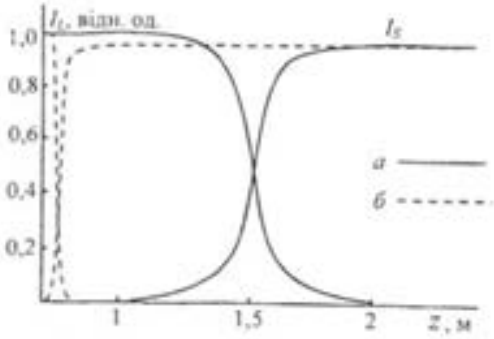


Рис. 4. Відносна інтенсивність лазерного випромінювання і першої стоксової компоненти в чистому бензолі (*а*) та бензолі з додаванням наночастинок срібла (*б*).

У толуолі додавання наночастинок може вести до скорочення шляху, на якому починається генерація ВКР, із 3,5 м до 0,5 м, а в бензолі ті ж самі наночастинки дозволяють зменшити цю відстань із 1,5 м до 0,25 м.

Висновки

Розглянута модель дає уявлення про вплив ГКР на ефективність ВКР-генерації та ВКР-підсилення. Отримані чисельні дані вказують на значне зростання ефективності ВКР, що веде до зменшення вимог до параметрів КР-середовища та випромінювання лазерного джерела накачки. Так, у толуолі теоретично можливе зменшення відстані, на якій досягається ефективна генерація ВКР, становить ~7 разів, а в бензолі ~6, що з іншого боку означає можливість використання у 6÷7 разів менш потужного джерела накачки при незмінній довжині КР-середовища.

У запропонованому розгляді не враховується вплив інших процесів, які розвиваються паралельно з ВКР і ГКР. Так, утворення комбінаційних компонент вищих порядків відбирає частину енергії джерела накачки, зменшуючи ефективність генерації ВКР у першу стоксову компоненту. Самофокусування у керівських рідинах з одного боку збільшує густину енергії випромінювання накачки завдяки зменшенню перетину лазерного пучка, проте внаслідок фазової самомодуляції за імпульсного збудження розширює спектри компонент ВКР. Розміри нині створюваних наночастинок у реальному середовищі досить сильно варіюються, і наночастинки не адсорбують молекули рівним однорідним шаром, що призводить до зменшення ефективності ГКР та зниження коефіцієнта підсилення ВКР. Однак навіть за цих обставин отримані результати вказують на можливість застосування ГКР для підвищення ефективності ВКР.

Зазначимо, що коефіцієнт зростання перетину КР внаслідок ГКР може бути додатково збільшений у випадку керованих змін діелектричної проникності середовища за рахунок введення поглинаючих компонент на певній довжині хвилі або/та інвертування населеності електронних квантових рівнів середовища за допоміжного джерела накачки.

Список використаних джерел

1. *Chang R.K.* Surface Enhanced Raman Scattering / R.K. Chang, T.E. Furtak.– N.Y.: Plenum Press, 1982. –293 p.

2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Электрика и магнетизм/ Д.В.Сивухин.– М.:Наука, 1980.–703 с.

3. *Johnson P.B., Christy R.W.* Optical constants of the noble metals // Phys. Rev. B – 1972.– **6**, N.12.– P. 4370 – 4379.

4. *Іванісік А.І.* Залежність ефективності генерації стоксової компоненти вимушеного комбінаційного розсіяння від поглинання та спектрально складу випромінювання накачування/ Іванісік А.І., Конопатський А. В. // Вісник Київського університету. Сер: фіз.-мат. н..–2008.– В.2.– С. 155-158.

Надійшла до редколегії 20.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 546.26+539.24:621.315.59:519.17

Іванюта О. М., к.ф.-м.н.

Електрофізичні властивості модифікованих вуглецевих нанотрубок.

Проаналізовано транспорт носіїв заряду одношарових вуглецевих нанотрубок з внутрішньомолекулярними з'єднаннями. Знайдено, що з'єднання метал - напівпровідниче мають властивості подібні до випрямляючого діода з нелінійними транспортними характеристиками, які мають виражено асиметричні полярні залежності.

Ключові слова: одношарова вуглецева нанотрубка, скануюча тунельна мікроскопія, хіральність.

*E-mail: iva@univ.kiev.au.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

O. M. Ivanyuta, Ph.D.

Elektrophysical properties modifying carbon nanotubes.

Considered electrical transport measurements on SWCNTs with intramolecular junctions. Found that a metal - semiconductor junction beluves like a rectifying diode with nonlinear transport characteristics that are strongly asymmetric with respect to bias polarity.

Key Words: Single-wall carbon nanotube, Scanning tunneling microscopy, chirality.

Шлях мініатюризації пристроїв передбачає в майбутньому використання окремих молекул для створення функціональних пристроїв. Одностінні вуглецеві нанотрубки (ОВНТ) та багатостінні вуглецеві нанотрубки (БВНТ) є найбільш перспективними кандидатами для досягнення цієї мети. В залежності від їх діаметра і хіральності, нанотрубки або одновимірні метали та напівпровідники будуть визначати електрофізичні властивості пристроїв майбутньої наноелектроніки. Можливі елементи конструкцій одноелектроних і польових транзисторів на основі металізованих нанотрубок представлені на рис. 1. Подібні складові внутрімолекулярних пристроїв, також були запропоновані в роботах [1-3]. Наприклад, шляхом введення п'ятикутника або семикутника в гексагональну решітку вуглецю. Так, дві нанотрубки на сегментах з різною атомної та електронної структури можуть бути легко сплавлені разом, щоб створити систему внутрішньо-молекулярних з'єднань типу метал-метал, метал-напівпровідник або напівпровідник-напівпровідник [3-5].

Зміна конфігурації кінцівок нанотрубок та інших типів нанодротів молекулами дозволяє створювати активні електричні зонди для контролю біологічних взаємодій. Подібні зонди вже стають нанoінструментаріем для вивчення поведінки окремих супрамолекул [4-6].

При додаванні металу на зовнішню поверхню нанотрубки міняється сітка р-зв'язків,

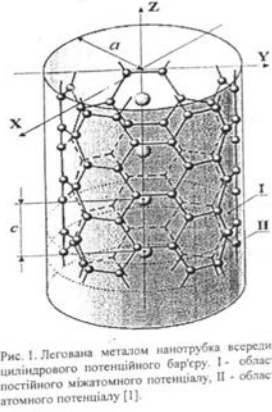


Рис. 1. Легована металом нанотрубка всередині циліндрового потенційного бар'єру. I - область постійного міжатомного потенціалу, II - область атомного потенціалу [1].

а значить - електричні і інші фізичні властивості.

На Рис. 2. приведена залежність ширини щілини напівпровідних нанотрубок від їх

© О.М. Іванюта, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

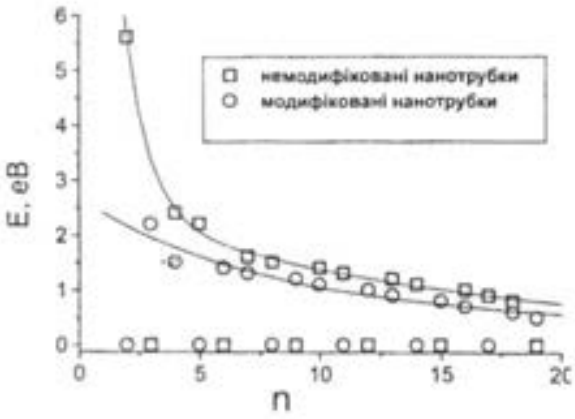


Рис. 2. Залежність ширини забороненої зони для вихідних і модифікованих нанотрубок типа $(n, 0)$ від параметра їх діаметру n [1, 2].

зворотного діаметру, яка показує, що при зменшується. Оскільки всі нанотрубки (n, n) типу - металеві, наполовину металізіровані нанотрубки будуть мати молекулярними гетеропереходами метал-напівметал, незалежно від їх діаметру. Як наслідок, всі нанотрубки F - (n, n) – напівметали, в яких на краю зони Бріллюена щілина відсутня. Згідно з розрахунками, щілина забороненої зони в нанотрубках типа F - (n, 0) зникає, якщо $(n + 1)$ кратне трьом. В останніх випадках модифіковані трубки – напівпровідникові [2, 4]. Оскільки у вихідних, чисто вуглецевих нанотрубках $(n, 0)$, заборонена зона відсутня, якщо n кратне трьом, то наполовину модифіковані нанотрубки (n, 0) будуть, залежно від діаметру, утворювати гетеропереходи різних типів. Якщо $(n - 1)$ кратне трьом ($n = 3\ell + 1$, $\ell = 1, 2$), це буде гетероперехід напівпровідник-напівпровідник, причому ширина забороненої щілини в модифікованій частині трубки приблизно в два рази менше, ніж в початковій (див. рис. 2). При інших значеннях n утворюється гетероперехід метал-напівпровідник, але при n, кратному трьом, металевому кінцю відповідає не модифікована частина нанотрубки, а при $n = 3\ell + 2$ - модифікована.

Для вивчення модифікованих нанотрубок використовувався спектральний метод, як для вивчення лінійних вуглецевих зв'язків в ланцюжках. Безпосередньо, був використаний ІК-спектрометр на проходження зондуючого сигналу через зразок до амплітуди хвильових чисел 300 ÷ 4000 cm^{-1} (Specord M-80) [5]. Блок-схема робочої зони представлена на рис. 3.

Аналіз виявлених коливальних мод і піків у діапазоні 300 ÷ 2000 cm^{-1} був зроблений на підставі результатів робіт [6, 7].

Присутність з'єднань C = C і C - C дає

Рис. 3. Робоча зона для електрофізичних вимірів розподілу потенціалу в плівці полімеризованих модифікованих нанотрубок.

Аналіз виявлених коливальних мод і піків у діапазоні 300 ÷ 2000 cm^{-1} був зроблений на підставі результатів робіт [6, 7]. Присутність з'єднань C = C і C - C дає підставу використати статтю [7] для аналізу даних еталонів та модифікованих зразків. Існування C - C з'єднань підтверджує існування спіральної моделі вуглецевого кругообігу, описаного в роботі [1].

Взаємодії між ОВНТ, як наприклад зв'язок гетеропереходу розширюють енергетичні рівні (оптичні лінії). Поки зв'язки стабільні вплив на фотолюмінісценцію має набагато слабкіший ефект при оптичному поглинанні і рамановському розсіюванні. Для дослідження електронної структури вуглецевих нанотрубок зазвичай, використовують скануючу тунельну мікроскопію (СТМ) в режимі локальної електронної спектроскопії. При цих вимірах положення зонду фіксується нанотрубкою та реєструється залежність тунельного струму від напруги U, прикладеної між зондом і нанотрубкою. Знайдена, таким чином, провідність $G = I/U$ безпосередньо пов'язана з локальною щільністю електронних станів, яка є мірою того, наскільки близько рівні енергії лежать один до одного. У типових ВАХ нанотрубок є контраст між струмом і напругою, що є характерним через злам та сильну нелінійно-асиметричність, що нагадує ВАХ випрямного діоду. На рис. 5 та 6 показані виміри СТМ - спектроскопії у вигляді залежності

Kyiv National Taras Shevchenko University

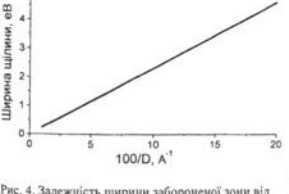


Рис. 4. Залежність ширини забороненої зони від оберненого діаметра нанотрубки.

зростає вище порогового значення для позитивного зсуву на верхньому електроді. Також, існує невелике збільшення струму для великих значень на зворотних ВАХ. Приблизно, при нульовому зсуві, опір переходу стрімко зростає. Вказаний хід залежності, раніше спостерігався у хаотично полімеризованих плівках метал-напівпровідник гетеропереходів заплутаних ОВНТ. [7]. Тим не менш, переходи були не явно вираженими, і в контакті металевий електрод і ОВНТ міжтрубне тунелювання можливо було відшукати за умови зовнішнього опромінення високоенергетичної інтенсивності. Для спектру залежностей $(dI/dV)/(I/V) = 1$ в широкому діапазоні V (див. рис. 5), що означає виконання закону Ома. Із залежності представленої на рис. 6 легко побачити наявність енергетичної щілини в матеріалі. Вона розташована в області енергій, яка відповідає малим приростам струму. Ширина цій області по напрузі визначає величину щілини. При великій напрузі V спостерігаються гострі піки в щільності станів, що характеризують провідність матеріалів низької розмірності. Піки з'являються в мінімумі і на полиці множини підзон. При подачі негативного V, крива ВАХ стає все більш асиметричною та показує майже ідеальну характеристику до найбільшої напруги зсуву. Сильна модуляція порогового елемента характеристики демонструє однозначно, що нижній сегмент нанотрубки напівпровідниковий та має гетероперехід. Для нанотрубки - напівпровідника, показаного на рис. 5, вона складає 0,7 еВ. Особливості представлених ВАХ очевидно пов'язані зі зламом кристалографічної структури та наявністю створених дефектів.

Рис. 5. Результати СТМ-спектроскопії у вигляді залежності нормалізованої диференціальної провідності $(dI/dV)/(I/V)$ від прикладеного між трубкою і зондом напруги V для металевої нанотрубки.

Рис. 6. Результати СТМ-спектроскопії у вигляді залежності нормалізованої диференціальної провідності $(dI/dV)/(I/V)$ від прикладеного між трубкою і зондом напруги V для напівпровідної нанотрубки.

У металевому стані провідність нанотрубок дуже висока, тобто нанотрубка може пропускати надвеликі струми без суттєвого нагрівання. Однією з причин високої провідності трубок є дуже мала кількість дефектів, що викликають розсіяння електронів, а отже і дуже низький опір. Цьому також, сприяє висока теплопровідність нанотрубок. Вона майже удвічі перевищує теплопровідність алмазу, що означає — трубки є дуже хорошими провідниками тепла [1, 7].

Якщо електрони в квантовій теорії можна розглядати, як хвилі, тоді довжина хвилі електрона не укладається в ціле число разів на довжині лінійного розміру нанотрубки. Вона інтерферує сама з собою з дисипацією, так що дозволені лише такі довжини хвиль електронів, які укладаються ціле число разів на периметрі

Kyiv National Taras Shevchenko University

трубки. Це сильно обмежує кількість станів, придатних для провідності довкола циліндру.

Домінуючим напрямом провідності залишається напрям уздовж трубки, що функціонально робить нанотрубку одновимірним квантовим дротом. Електронні стани нанотрубки не утворюють однієї широкої безперервної енергетичної зони, а розбиваються на одновимірні підзони (див. Рис. 5 та 6). Такі стани можна моделювати квантовою ямою у вигляді колодязя з глибиною, рівній довжині нанотрубки [7, 8].

Транспорт електронів на одношарових нанотрубках визначається квантово розмірними ефектами. На металевій нанотрубці, можна побачити особливості у вигляді сходинок на ВАХ (див. Рис. 5 та 6). Сходинки з'являються при напрузі, що залежить від напруги, прикладеної до третього електроду, електростатично пов'язаного з нанотрубкою. Це нагадує конструкцію польового транзистора на вуглецевій нанотрубці. Сходинки на ВАХ є наслідком одноелектронного або резонансного тунелювання через окремі молекулярні орбіталі. Електронний транспорт блокується при низьких напругах. При поступовому збільшенні напруги на затворі електрони поодинці можуть проникати в нанотрубку. Перенесення електронів в трубці відбувається за допомогою тунелювання між дискретними електронними станами. Зміна струму на кожній сходинці пов'язана з додаванням однієї молекулярної орбіталі. Це означає, що електрони в нанотрубці не є сильно локалізованими, а розташовані на великій відстані уздовж трубки. Звичайна присутність дефекту в одновимірній системі викликає локалізацію електронів, проте дефект в нанотрубці не приводить до локалізації через те, що його вплив усереднюється по всьому периметру трубки. Це відбувається унаслідок тороїдальної форми хвильової функції.

Електрофізичні дослідження можливих аналогів радіоелектронних пристроїв можуть також бути проведені для різноманітних типів БВНТ в полімеризованих гелях без будь-якого зовнішнього впливу, чи під дією постійного або змінного полів. Потрібно враховувати, що дія зовнішніх полів на нанотрубки виявляє гістерезисність їх характеристик в неупорядкованих наносистемах, оскільки вони можуть дрейфувати у напрямку до анода або поводилися як диполі. Модифіковані нанотрубки мають за визначенням електричні некомпенсовані закінчення їх кінцівок, тобто можлива доменна структура в гелієвих та полімеризованих структурах. Якщо силові лінії електричних зовнішніх полів співпадають з повздовжніми розмірами нанотрубок, то спостерігається найбільша рухливість носіїв зарядів і навпаки , за умови перпендикулярності. Також відчутний вплив на електрофізичні властивості нанотрубок будуть відігравати геометричний фактор та ступінь їх інтеркаляції атомами з явно вираженими властивостями.

Список використаних джерел

1. *Dresselhaus M.S.* The science of fullerenes and carbon nanotubes / M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, P Eklund. – Academic Press, 1996. – 965 c.
2. *Saito R.* Physical properties of carbon nanotubes / G. Dresselhaus, R. Saito, P Eklund. – World Scientific, 1998. – 704 c.
3. *Harris P.J.F.*, Carbon Nanotubes and Related Structures : New Materials for the Twenty-First Century / P.J.F. Harris. – Cambridge University Press, 1999. – 204 c.
4. *Murugesh A.K, Uthayanan A. Lekakou C.*, Electrophoresis and orientation of multiple wall carbon nanotubes in polymer solution. // Applied Physics A: Materials Science & Processing. – 2010. – **100**(1). – P. 135-144
5. *Wang Q., Dai J.F., Li W.X., Wei Z.Q., Jiang J.L.*, Electrophoresis and orientation of multiple wall carbon nanotubes in polymer solution. // Compos. Sci. Technol. – 2008. – **68**(7–8). – P. 1644–1648.
6. *Kimura T., Ago H., Tobita M., Ohshima S., Kyotani M., Yumura M.*, Polymer Composites of Carbon Nanotubes Aligned by a Magnetic Field. // Adv. Mater. – 2002. – **14**. – P. 1380–1383.
7. *Ma C., Zhu Y.F., Yang X.Z., Ji L.J., Zhang C., Liang J.*, Macroscopic networks of carbon nanotubes in PMMA matrix induced by electric field. // J. Dispers. Sci. Technol. – 2008. – **29**(4). – P. 502–507.
8. *Zhu Y.F., Ma C., Zhang W., Zhang R.P., Kozatkar N., Liang J.*, Alignment of Multiwalled Carbon Nanotubes in Bulk Epoxy Composites via Electric Field. // J. Appl. Phys. – 2009. – **105** – P. 054319-054324.

Надійшла до редколегії 27.08.12

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК: 538.911, 004.8, 004.932

С.А. Корінь, аспірант

Одночасна нейромережева обробка пов'язаних даних при експериментальних параметричних вимірюваннях

Питання одночасної обробки всієї отриманої інформації при параметричних вимірюваннях часто виникає при дослідженні фізичних явищ чи процесів в залежності від характеристик впливу. Зазвичай почергова зміна кількісних характеристики одного і того ж типу впливу призводить до необхідності почергового визначення шуканих властивостей об'єкту дослідження. В статті показано можливість одночасної обробки всіх даних за допомогою штучної нейронної мережі, що призводить до більш точних результатів.

Ключові слова: штучна нейронна мережа, вагові коефіцієнти, РСГР, параметричні вимірювання.

S.A. Korin, post. grad. stud.

Simultaneous processing of associated experimental data at parametrical measurements by neural network

Question about simultaneous processing of all information received by parametric measurements often arises in the study of physical phenomena or processes on dependence of the characteristics of impact. Usually, sequential change of quantitative characteristics of the same type of impact leads to the need of sequential definition of the desired properties of the object under investigation. The paper shows the ability of simultaneous processing of all data using artificial neural network, which leads to more accurate results.

Keywords: Artificial neural network, weights, DLTS, parametrical measurements.

E-mail: sergii.korin@univ.net.ua
Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Скришевський В.А.

1 Вступ

На сьогоднішній день все більшого поширення набувають методи обробки інформації на основі штучних нейронних мереж [2, с. 31-42] – математичних моделей, побудованих за принципом функціонування біологічних нейронних мереж. Зазвичай вони представляють собою систему з'єднаних простих обробників - штучних нейронів [1, с. 16-19]. Зображена на рис.1 модель нейрона відображає його простоту у порівнянні з процесором, що використовується в персональних комп'ютерах. Така модель здатна виконувати тільки основні функції свого природнього прототипу такі як: прийом зважених даних з сусідніх нейронів та передача сигналу свого стану до наступних нейронів. І тим не менш, будучи з'єднаними в досить велику мережу з керованою взаємодією, такі локально прості обробники разом здатні виконувати достатньо складні завдання. Модель штучної нейронної мережі зображена на рис.2, де вхідний шар приймає вхідні дані задачі, схований – збільшує обробну потужність нейронної мережі, вихідний – представляє результати роботи.

Нейронні мережі не програмуються в звичайному розумінні цього слова, вони навчаються. Можливість навчання — одна з головних переваг нейронних мереж перед традиційними алгоритмами.

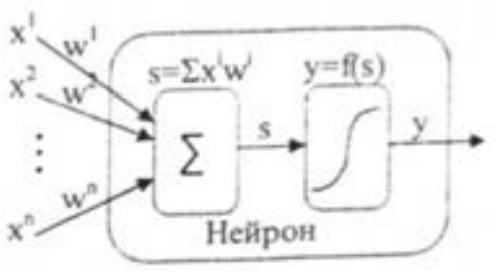


Рис. 1. Модель штучного нейрона

© С.А. Корінь, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

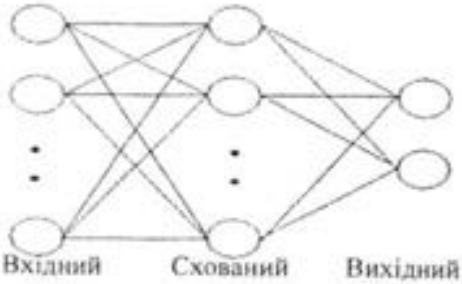


Рис. 2. Приклад штучної нейронної мережі

З математичної точки зору, навчання зводиться до багатовимірної нелінійної оптимізації, шляхом знаходження коефіцієнтів зв'язків між нейронами W^c таким чином, щоб при кожному наборі вхідних даних, на виході нейронної мережі отримувались коректні результати [1,2]. В процесі навчання нейронна мережа здатна виявляти складні залежності між вхідними даними і вихідними, а також виконувати узагальнення.

Це означає, що у разі успішного навчання нейронна мережа зможе повернути вірний результат на підставі даних, які були відсутні в навчальній вибірці, а також неповних або зашумлених даних. Природній аналог доводить, що множина проблем, які поки що не підвладні розв'язуванню наявними комп'ютерами, можуть бути ефективно вирішені блоками нейромереж. Оскільки системам, побудованим на основі штучних нейронних мереж, притаманний ряд переваг: шумостійкість, відмовостійкість, адаптивність, самонавчання та узагальнення, вони широко використовуються в задачах, для яких характерним є складність у формулюванні алгоритмічного розв'язку, проте є багато даних, що визначають необхідну поведінку системи. Такі задачі виникають при фільтрації, прогнозуванні, класифікації, розпізнаванні, побудові асоціативної пам'яті, керуванні. В галузях природничих наук методи на основі нейронних мереж застосовуються для апроксимації функцій [15], вирішенні некоректних математичних задач [11], моделювання фізичних процесів, прогнозів (наприклад, сонячної активності [13]), задачах керування [14] (наприклад, корегування орбіт частинок у прискорювачах, контроль плазми в режимі реального часу), вирішення обернених задач (наприклад, розпізнавання піків в атомно-емісійних спектрах, флюоресцентної діагностики [8-9] забруднень води), обробці даних мас-спектрометрії [10] тощо.

Однією з переваг методу обробки даних на основі штучних нейронних мереж є можливість одночасної обробки всіх існуючих експериментальних даних при параметричних вимірювання. Таких підхід важко реалізується поширеними математичними методами, що застосовуються незалежно для кожної отриманої серії даних, не враховуючи дані при інших вимірюваннях. Також одночасна обробка дозволяє суттєво протистояти шумах, оскільки наявність параметра зазвичай не призводить до стрибкоподібної зміни досліджуваного явища чи процесу і характер кривих не змінюється.

На одному прикладі оберненої задачі - обробки сигналів релаксаційної спектроскопії глибоких рівнів (РСГР) – буде показано ефективність такої обробки.

2 Результати та обговорення

У роботі [3] показано правомірність та переваги використання нейронних мереж для такої обробки описаних спектрів.

При роботі з напівпровідниковим матеріалом з одним глибоким центром [4,5], релаксаційну криву, з точки зору математики, можна представити у вигляді (1):

$$f(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau_e}} \qquad (1)$$

де величини C і τ_e визначають ключові характеристики рівня – концентрацію центрів, енергію активації та термічний переріз захоплення.

Для більш точного визначення величин C і τ_e використовують різні тривалості заповнюючих імпульсів [6]. При такому підході, крива (1) приймає наступний вигляд (2)

$$f(t, t_p) = C_{max}(1 - e^{-\frac{t_p}{\tau_c}})e^{-\frac{t}{\tau_e}} \qquad (2)$$

де t_p - тривалість імпульсу заповнення, а величини C_{max}, τ_c, τ_e визначаються тими ж характеристиками рівня.

Таким чином, для обробки, замість однієї кривої (1), маємо декілька кривих (2) при різних величинах параметра – тривалості імпульсів заповнення, що в результаті надає значно більше інформації.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Якість функціонування штучної нейронної мережі сильно залежить від вибору топології, кількості нейронів та від коректного представлення вхідних та вихідних даних. Для визначення величин $C(t_p)$ і τ_ε для кожного значень параметру t_p побудуємо нейронну мережу з трьохшаровою топологією з двома нейронами на виході, що відображають $C(t_p)$ і τ_ε, та 16 нейронами на вході для подання значень кривої (2) при випадковому t_p в різні моменти часу t.

Процес навчання відбувався за методикою з учителем і класичним алгоритмом градієнтного спуску з модифікаціями щодо уникання локальних мінімумів та оптимізації кроку [7,12]. При цьому спочатку будувалася пряма задача - для нескінченного набору випадкових значень C_{max}, t_p, τ_ε будувалися криві типу (2), а потім зворотна - за допомогою нейронної мережі з кривих (2) визначались початкові C_{max}, t_p, τ_ε. На рис. 3 зображено таких процес навчання.

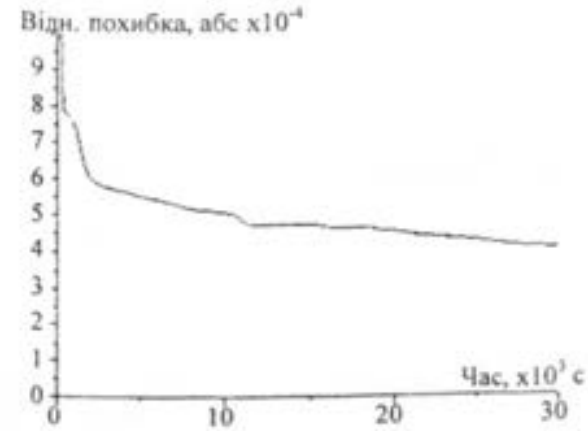


Рис.3. Залежність похибки роботи штучної нейронної мережі від часу навчання.

Кінцева точність визначення шуканих величин кривої (2) складає близько 0.04%.

Для відображення запропонованих ідей, побудуємо нейронну мережу для обробки чотирьох кривих (2), при різних значеннях параметру t_p.

Варто відмітити, що ключовою особливістю різних наборів вхідних даних чи кривих повинна бути однакова функціональна залежність, в даному випадку, експоненціальна.

Для прикладу було обрано нейронну мережу з 64 нейронами на вході та 5 нейронами на виході для визначення C_1, C_2, C_3, C_4 і спільного τ_ε. Процес навчання збільшеної нейронної мережі значно сповільнюється у зв'язку з необхідністю обробляти більше змінних (вагових коефіцієнтів) для пошуку напрямку мінімізації.

Тоді для пришвидшення навчання великої мережі можна побудувати її з існуючої уже попередньої навченої шляхом її дублювання та групування, що зображено на рис. 4. Всі зв'язки суцільною лінією скопійовано.

Міжмережеві нейронні зв'язки (пунктирна лінія) задано нулями, тому вони спочатку не будуть впливати на роботу окремих частин. З усіх чотирьох нейронів τ_ε залишено тільки один спільний, всі зв'язки до якого поділено на 4.

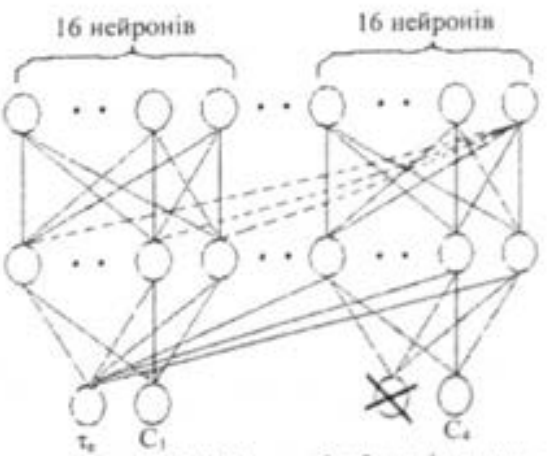


Рис. 4. Побудова ШНМ для обробки всіх кривих.

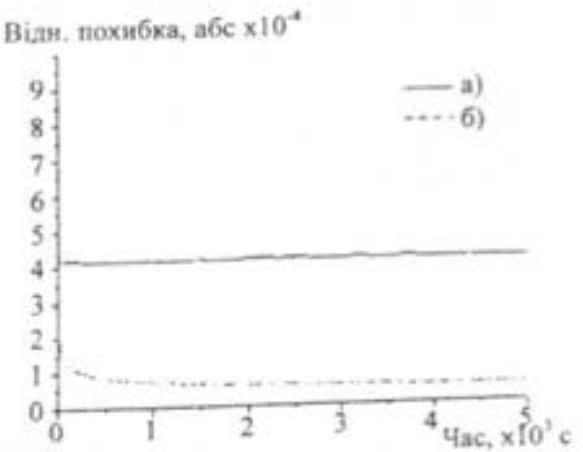


Рис. 5. Порівняння подальших процесів навчання для навченої а) та побудованої нейромережі б).

На рис. 5 зображено продовжений процес навчання для навченої нейромережі на одну

Kyiv National Taras Shevchenko University

криву і тільки що побудованої для обробки чотирьох кривих одночасно.

Видно, що вдалося покращити точність розпізнавання приблизно в 10 разів. Також при аналізі вагових коефіцієнтів, нульові зв'язки (пунктирні лінії на рис.4) набули певних значень, що свідчить про обробку окремими частинами нейромережі всіх вхідних даних та використання інформації з сусідніх частин.

3 Висновки

Таким чином, штучні нейронні мережі можуть надати переваги у обробці даних завдяки своїм можливостям одночасної обробки всіх експериментальних даних. Надані вище рекомендації щодо побудови нейронної мережі, організації вхідних даних та методу пришвидшення навчання великої нейронної мережі, дозволяють отримати кращі результати розпізнавання на прикладі сигналів релаксаційної спектроскопії глибоких рівнів.

Список використаних джерел

1. *Уоссермен Ф.* Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. / Ф. Уоссермен – Москва: Мир, 1992. – 184 с.

2. *Haykin S.* Neural Networks: A Comprehensive Foundation. / NJ, USA: Prentice Hall, 1998. – 1103 p.

3. *Берман Л.С.* Емкостная спектроскопия глубоких центров в полупроводниках / Л.С. Берман, А.А. Лебедев, – Л. : Наука, 1981. – 176 с.

4. *Корінь С.А.* Дослідження процесів та методів навчання нейромереж для обробки РСГР сигналу / С.А. Корінь, Д.Б. Грязнов, Ю.В. Бойко // Вісник Київського університету. – 2009. - № 12, С.23-27.

5. *Lang D.V.* Deep-level transient spectroscopy: A new method to characterize traps in semiconductors. / D.V. Lang // Journal of Applied Physics. - 1974. – **45**. - № 7.- P. 3023–3032.

6. *Третяк О.В.* До питання про визначення поперечного перерізу захоплення носіїв заряду методом DLTS / О.В. Третяк, В.Я. Опилат, Ю.В. Бойко, Д.Б. Грязнов, І.О. Деркач, В.Ю. Поварчук // Сенсорна електроніка і мікросистемні технології. – 2010. - № 1. - С. 42-50.

7. *Xiao-Hu Yu.* Efficient backpropagation learning using optimal learning rate and momentum / Yu. Xiao-H , Guo-An Chen // Neural Networks - 1997 - **10**. - № 3 – P. 517–527

8. *Almhdi K.M.* Classification with Artificial Neural Networks and Support Vector Machines: Application to oil fluorescence spectra / K.M. Almhdi, P. Valigi, V. Gulbinas, R. Westphal, R. Reuter // EARSeL eProceedings – 2007. – **6**. - № 2. - P. 115–129.

9. *Vasilescu J.* Analysis of seawater pollution using neural networks and channels relationship algorithms/ J. Vasilescu, L. Marmureanu, E. Carstea // Rom. Journ. Phys. – 2011. - **56**, P. 530–539.

10. *Belic I.* Neural network methodologies for mass spectra recognition / I. Belic, L. Gyergyek // Vacuum. – 1997. – **48**. - № 7. – P. 633-637.

11. *Kulkarni A.D.* Solving Ill-Posed Problems With Artificial Neural Networks / A.D. Kulkarni // Neural Networks. – 1991. – **4**. P. 477-484

12. *Magoulas G.D.* Effective backpropagation training with variable stepsize / G.D. Magoulas, M.N. Vrahatis, G.S. Androulakis // Neural Networks. – 1997. – **10**. - № 1. – P. 69-82.

13. *Calvo R.A.* Neural network prediction of solar activity / R.A. Calvo, H.A. Ceccatto, R.D. Piacentini // The Astrophysical Journal. – 1995. – **444**. – P. 916-921.

14. *Hagan M.T.* An introduction to the use of neural networks in control systems / M.T. Hagan, B.D. Howard, O. de Jesus // International Journal of Robust and Nonlinear Control . – 2002. – **12**. - № 11. – P. 959-985.

15. *Hornic K.* Multilayer feedforward networks are universal approximators / K. Hornik, M. Stinchcombe, H. White // Neural Networks. – 1989. - **2**. - № 5. – P. 359-366.

Надійшла до редколегії 15.08.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 621.385.833

Находкін.М.Г., докт. фіз.-мат.наук, проф., академік НАН, Федорченко* М.І., канд. фіз.-мат.наук, с.н.с.

Адсорбція Sb на поверхні Si(113)

За допомогою методів електронної спектроскопії (ФЕС, ОЕС та ДПЕ) досліджено структурні та електронні властивості атомарно чистої поверхні Si(113) та системи Sb/Si(113). Встановлено, що адсорбція Sb на поверхні Si(113) приводить до зміни роботи виходу поверхні за рахунок зміни ефективної електронної спорідненості поверхні та загину зон поблизу поверхні. При відпалі системи Sb/Si(113) в діапазоні 20° – 750°C утворюються поверхневі фази 1x1 ($\Theta_{Sb} \approx 1,3$ МШ), 1x2 ($\Theta_{Sb} \approx 1,0$ МШ), 1xn (n=3–4, $\Theta_{Sb} \approx 0.5$ МШ) з характерними значеннями загину зон та ефективної електронної спорідненості.

Ключові слова: Ge(113), адсорбція, робота виходу, загин зон, поверхневі стани, ефективна електронна спорідненість.

Nakhodkin M.G., D.Sc., prof., acad. of NAS of Ukraine, Fedorchenko* M.I., Ph.D.

Adsorption of Sb atoms on the Si (113) surface

The structure and electronic properties of the atomically clean Si(113) surface and the Sb/Si(113) system were investigated using electron spectroscopy methods(PES, AES, LEED). It was established that the Sb adsorption on the Si(113) surface leads to work function change due to change of band bending near the surface and effective electron affinity. At annealing of the Sb/Si(113)system at temperature range from 20° to 750°C form 1x1 surface phase ($\Theta_{Sb} \approx 1,3$ ML), 1x2 ($\Theta_{Sb} \approx 1,0$ ML), 1xn (n=3–4, $\Theta_{Sb} \approx 0.5$ ML) with distinctive value of band bending and electron affinity.

Keywords: Sb, Si(113), adsorption, work function, band bending, surface states, effective electron affinity.

*E-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Дослідження адсорбції атомів Sb на низькоіндексних та високоіндексних гранях Ge та Si викликане фундаментальним та прикладним інтересом. До цих пір ще не до кінця з'ясований механізм дії Sb на структуру та електронні властивості досліджуваних поверхонь [1], на поліпшення умов епітаксіального вирощування металічних та напівпровідникових плівок на таких поверхнях модифікованих атомами Sb [2].

В наших попередніх роботах [3- 7] були проведені дослідження впливу адсорбції атомів Sb на структурні та електронні властивості поверхонь Si(100)-2x1, Si(111)-7x7, Ge(111)–c(2x8), Ge(100)–2x1, Ge(113)–3x1. Були встановлені надструктури, що утворюються при адсорбції Sb на цих поверхнях та притаманні їм значення роботи виходу. На всіх досліджених поверхнях при нанесенні покриття Sb при кімнатній температурі більше одного моношару приповерхнева область розупорядковувалась, а робота виходу зменшувалась як за рахунок зміни ефективної електронної спорідненості, так і за рахунок зміни загину зон поблизу поверхні. Відпал таких адсорбційних систем до температур, при яких приповерхнева область упорядковується, а на поверхні залишається близько одного моношару покриття Sb, призводить до різної поведінки роботи виходу Ge та Si поверхонь. Робота виходу Sb/Ge (Ge(111), Ge(100), Ge(113)) систем при такому відпалі упорядкуванні зростає приблизно на 0.5–0.7 еВ й стає більшою приблизно на 0.2-0.3 еВ від роботи виходу атомарно чистих поверхонь Ge за рахунок зміни ефективної електронної спорідненості та загину зон поблизу поверхні. В той же час робота виходу таких упорядкованих структур зі Sb на поверхнях Si(100) та Si(111) практично не змінюється і залишається приблизно рівною роботі виходу зразків об'ємного Sb [3-4].

Різна поведінка роботи виходу при відпалі та упорядкуванні систем Sb/Ge та Sb/Si може бути обумовлена різним характером вбудовування

© М.Г. Находкін, М.І Федорченко, 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

атомів Sb у приповерхневих областях Ge та Si. При відпалі адсорбційних систем Sb/Si характер вбудовування атомів Sb та утворюваних напружень в приповерхневій області (розподіл вбудованих атомів Sb в приповерхневій області) може значно відрізнятись від систем Sb/Ge. Для більш виваженого порівняння адсорбційних систем Sb/Ge та Sb/Si необхідно було дослідити особливості формування раніш ще не досліджуваного нами інтерфейсу атомів Sb з високоіндексною поверхнею Si(113). Її дослідження важливе ще й тому, що згідно літературним даним [1] вона утворює поверхні зі структурами 2x2 без фасетованої структури, добре дюється і може бути використана для керованої сурфактантами гетеро епітаксії Ge на Si [8, 9]. Також порівняння електронних властивостей систем Sb/Ge(113) та Sb/Si(113) необхідне і з точки зору малої придатності Sb як сурфактанта для процесів гетероепітаксії на поверхні Ge(113).

Тому метою цієї роботи було використовуючи методи електронної спектроскопії, провести дослідження зміни електронних властивостей (робота виходу, загин зон, ефективна електронна спорідненість) та зміни надструктури поверхні грані Si(113) при адсорбції на ній атомів Sb та при відпалі цієї адсорбційної системи.

Методика експерименту

Дослідження проводились як і в наших попередніх роботах [3-7] у надвисоковакумній камері з базовим тиском ~ $2\cdot10^{-10}$ тор, яка була оснащена методиками дифракції повільних електронів (ДПЕ), Оже електронної спектроскопії (ОЕС) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС) з енергією квантів у діапазоні 7-10,8 еВ. В вакуумній камері містилась іонна гармата для очищення досліджуваної поверхні Si іонами Ar та система для контрольованого нанесення шарів Bi заданої товщини in situ. Дані ОЕС, ДПЕ та ФЕС дозволяли визначати елементний слад поверхні, її кристалографічну структуру, електронну структуру валентної зони, роботу виходу та величини загину зон.

Зразки Si(113) вирізались із кристалу отриманого методом Чохральського і легованого атомами фосфору (ρ≈10 Ом·см). Після попередньої хімічної обробки зразки очищались в вакуумній камері за допомогою декількох циклів бомбардування іонами Ar та наступного прогріву при ≈900 С на протязі 10 хвилин. Вибраний стандартний метод очистки дозволяв отримувати кристалічні поверхні зразків Si(113) без ознак домішок в спектрах ОЕС та з контрастними картинками ДПЕ, що відповідали надструктурі (3x2).

Потік парів атомів Sb отримувався за допомогою джерела Кнудсена, а ступені покриття поверхонь атомами Sb (Θ_{Sb}) визначались за допомогою спеціально проградуйованих кварцових терезів. Швидкість нанесення атомів Sb вибиралася рівною 0,1 МШ за хвилину. Робота виходу (φ) визначалась, як і в роботі [3], за допомогою співвідношення Ейнштейна при hν = 7,7еВ. Зміна загину зон (ΔY) оцінювалась за зміною положення спектральних особливостей фотоелектронних максимумів sp^3 гібридизованих електронів ФЕС Si, вимірюваних при hν = 10,2 еВ. Зміна ефективної електронної спорідненості (Δη) визначалась за визначенням (Δη = Δφ – ΔY). Похибка при вимірюванні φ та ΔY становила ± 0,01 еВ.

Результати експериментів та їх інтерпретація

Дослідження, виконані за допомогою ДПЕ, дозволили встановити, що очищена та відпалена в умовах надвисокого вакууму атомарно чиста поверхня Si(113) мала чітку картинку дифракційних рефлексів, які свідчили про утворення на поверхні надструктури 3x2, що узгоджується з літературними даними [1].

Вимірювання, проведені за допомогою ФЕС, дозволили отримати інформацію про електронну структуру верха валентної зони та роботу виходу атомарно чистої поверхні Si(113)-3x2. На рис. 1 наведені фотоелектронні спектри (hν=7.7 еВ) верха валентної зони поверхонь Si(113)-3x2 та для порівняння Ge(113)-3x1. З рисунка видно відсутність помітної густини електронних станів впритул до самого рівня Фермі для поверхні Si(113)-3x2 на відміну від поверхні Ge(113)-3x1. Електронні стани розташовані впритул до рівня Фермі є поверхневими і їх відсутність вказує на напівпровідниковий характер електронних станів поверхні Si(113)-3x2 на відміну від поверхні Ge(113)-3x1 де ці стани мають металічний характер.

При напиленні Sb на атомарно чисту поверхню Si(113)-3x2 за допомогою Оже спектроскопії було встановлено, що плівка Sb в

Kyiv National Taras Shevchenko University

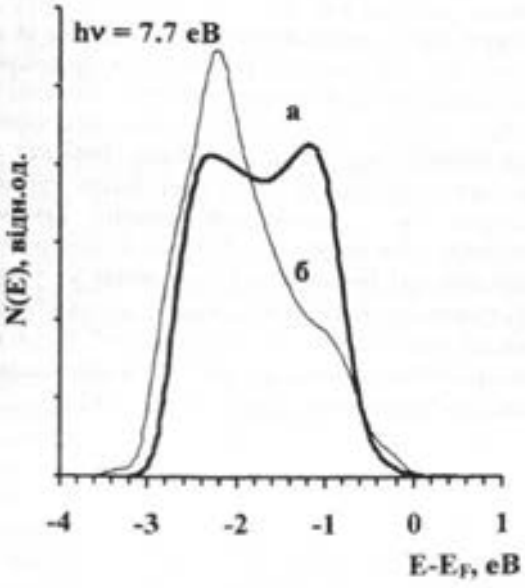


Рис. 1. ФЕС валентної зони поверхонь Si(113)-3x2 (а) та Ge(113)-3x1 (б).

умовах надвисокого вакууму при кімнатній температурі росте за механізмом близьким до механізму Странського-Крастанова, коли після закінчення формування першого моношару ріст плівки має острівцевий характер. Такий механізм росту аналогічний росту плівок Sb на поверхнях Si(100)-2x1 та Si(111)-7x7 [3, 4].

Спостереження за зміною інтенсивностей дифракційних рефлексів на картинах ДПЕ дозволило встановити, що на поверхні Si(113)-3×2 при збільшенні θ_{Sb} в межах $0 \le \theta_{Sb} \le 1$ МШ відбувається поступове зменшення інтенсивності частини дробових дифракційних рефлексів, оскільки відбувається поступова перебудова структури поверхні від початкової надструктури 3×2 до кінцевої 1×1. При подальшому зростанні θ_{Sb} дифракційна картина поступово розмивається і при $\theta_{Sb} > 4$ МШ дифракційні рефлекси взагалі зникають, що можна трактувати як утворення розупорядкованої плівки Sb, так і одночасне розупорядкування приповерхневого шару Si.

При напиленні атомів Sb на поверхню Si(113)-3x2 енергетичний діапазон кривих ФЕС розширюється, що свідчить про зменшення роботи виходу (φ) поверхні з плівкою Sb. На рисунку 2 наведені зміни: φ кристалічної поверхні Si(113)-3x2 (крива а), загину зон поблизу поверхні (крива б) та ефективної електронної спорідненості (крива в) у залежності від θ_{Sb}. Видно, що до $\theta_{Sb} \approx 1$МШ робота виходу зменшується за рахунок як зміни загину зон так і зміни ефективної електронної спорідненості. Зміна загину зон приводить до збільшення

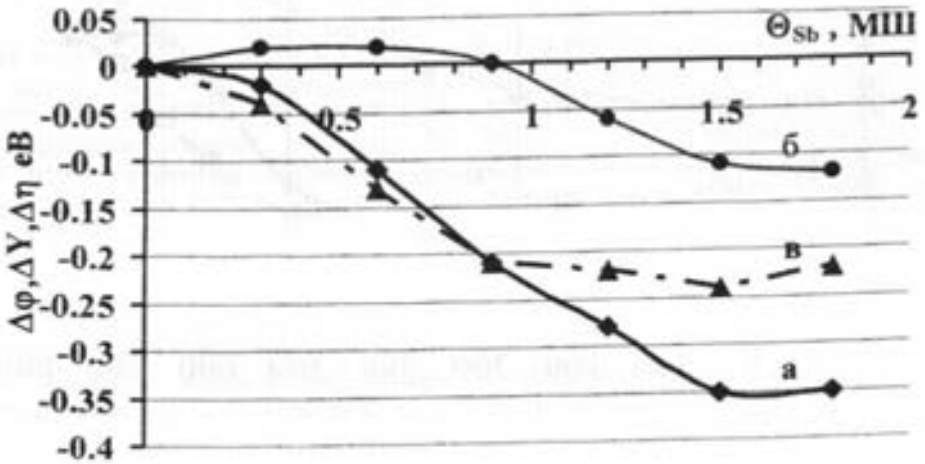


Рис. 2. Залежність зміни роботи виходу Δφ кристалічної поверхні Si(113)-3x2 (крива а), загину зон поблизу поверхні ΔY (крива б) та ефективної електронної спорідненості Δη (крива в) від θ_{Sb}.

Kyiv National Taras Shevchenko University

роботи виходу, а зміна ефективної електронної спорідненості – до її зменшення. Переважаючим фактором впливу на роботу виходу в цьому діапазоні θ_{Sb} є поведінка ефективної електронної спорідненості. Але при $\theta_{Sb} \geq$ 1МШ ефективна електронна спорідненість практично не змінюється, а подальше зменшення роботи виходу відбувається за рахунок зміни загину зон поблизу поверхні. При $\theta_{Sb} \geq$ 1.5 МШ загин зон та ефективна електронна спорідненість перестають змінюватись і величина роботи виходу досягає насичення, при якому робота виходу зменшується на 0.35 еВ по відношенню до атомарно чистої поверхні Si(113)-3x2.

Зміну ефективної електронної спорідненості при адсорбції атомів Sb на поверхні Si(113) можна яснити перерозподілом електронної густини між атомами Sb та атомами Si. У відповідності зі значеннями електронегативностей атомів Si та Sb (за шкалою Олреда – Рохова це відповідно 1.82 та 2.25 [10]). Електронна густина зміщується від атомів Sb до атомів Si і на поверхні утворюється дипольний шар, який зменшує роботу виходу. Зменшення роботи виходу за рахунок зміни ефективної електронної спорідненості можна записати як $\Delta\varphi = \Delta\eta = 4\pi N p_a$, де N – поверхнева густина адатомів; p_a – дипольний момент адатома. Оскільки зміна величини ефективної електронної спорідненості визначається з рівняння $\Delta\eta = \Delta\varphi - \Delta Y$, то вигляд залежності залежить від надійності вимірів зміни величини загину зон ΔY. В той же час потрібно відмітити, що ΔY вимірювалась нами зі спектрів виміряних при hv = 10,2 еВ.

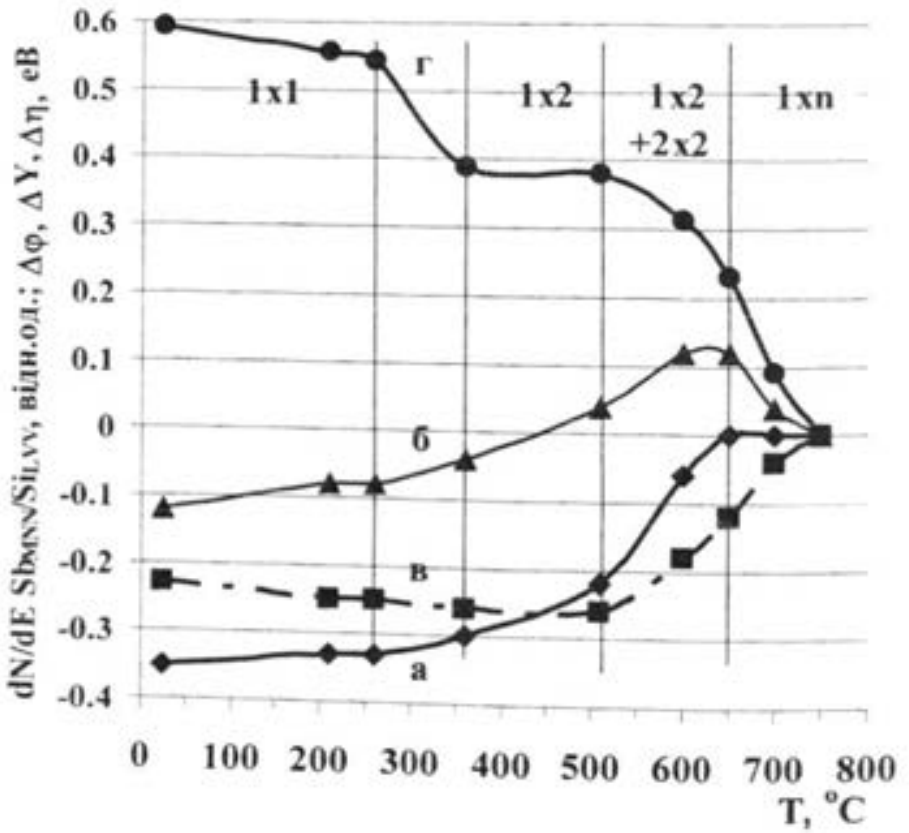


Рис. 3. Порівняння кривих зміни роботи виходу (а), загину зон (б), ефективної електронної спорідненості (в) та термодесорбції атомів Sb (г) для системи Sb/Si(113) при $\theta_{Sb} \approx$ 1.5МШ.

Kyiv National Taras Shevchenko University

При цій енергії квантів світла величина глибини виходу фотоелектронів дорівнює приблизно 1,2 нм [11]. Це означає, що визначені нами значення ΔY можуть бути дещо заниженими. Очевидно, що цей факт може призводити до деякого спотворення визначеної нами залежності $\Delta\eta = f(\theta_{Sb})$.

Залежність загину зон від θ_{Sb} можна пояснити генерацією нових або зниженням вже існуючих донорних або акцепторних поверхневих станів, які впливають на приповерхневий заряд. Загин зон вгору ($\Delta Y>0$) в діапазоні $0<\theta_{Sb}<1$ може бути обумовлений генерацією акцепторних або зниженням донорних поверхневих станів, а загин зон вниз ($\Delta Y<0$) – навпаки зниженням акцепторних або генерацією донорних поверхневих станів. Але оскільки точно невідома абсолютна величина та напрям загину зон на атомарно чистій поверхні Si(113), то і неможливо точно визначити які саме процеси впливають на залежність ΔY від θ_{Sb}.

Визначити механізм зміни ΔY в різних діапазонах зміни θ_{Sb} важко, бо складно визначити напрям загину зон та його величину для атомарно чистої поверхні Si(113)-3x2.

Відпал отриманих при кімнатній температурі інтерфейсів при більш високих температурах приводить до упорядкування приповерхневого шару, десорбції адсорбованих атомів Sb, дифузії їх в об'єм зразка та зміни роботи виходу поверхні. На рисунку 3 наведені результати дослідження зміни роботи виходу $\Delta\varphi$ та її складових (ΔY, $\Delta\eta$) при відпалі інтерфейсу Sb/Si(113), отриманого при кімнатній температурі з $\theta_{Sb}\approx1.5$ МШ. На цьому рисунку наведені ще й дані про співвідношення інтенсивностей оже ліній MNN Sb та LVV Si та дані про структуру поверхні, отримані за допомогою ДПЕ. З рисунка видно, що при збільшенні температури відпалу немонотонно зменшується співвідношення інтенсивностей оже ліній Sb та Si. Це може вказувати на десорбцію атомів Sb з поверхні та/або їх дифузію в об'єм. З рисунка видно існування різних фазових структур поверхні при різних температурах відпалу поверхні з характерними для них значеннями θ_{Sb} та роботи виходу. В діапазоні температур відпалу 210– 260С після остигання зразків до кімнатної температури можна було побачити рефлекси ДПЕ, які відповідають поверхневій структурі 1x1. Ця структура характеризується $\theta_{Sb}\approx1.3$ МШ та роботою виходу ≈4.42 еВ, практично такою ж як і робота виходу системи з кількома шарами атомів Sb. В діапазоні температур відпалу 360–510С реалізується надструктура 1x2 з $\theta_{Sb}\approx1.0$ МШ та роботою виходу 4.5 еВ. При прогріві системи Sb/Si до температур 650–700С утворюються надструктури, рефлекси яких складно ідентифікувати на звичайному дифрактометрі (1x3 та 1x4) з роботою виходу, що дорівнює роботі виходу атомарно чистої грані Si(113)-3x2 – 4.75 еВ та зі значенням $\theta_{Sb}\approx0.5$ МШ. Основним чинником, який впливає на збільшення роботи виходу φ при збільшенні температури до 510С є зміна загину зон поблизу поверхні. В діапазоні температур 510-750С зміну роботи виходу визначають як зміна загину зон, так і зміна ефективної електронної спорідненості. При відпалі системи до 650С, коли на поверхні залишається лише біля ½ моношару (або ще менше) атомів Sb, значення ΔY виявляється на 0.11 еВ більшим, ніж для атомарно чистої поверхні Si(113)-3x2. Але робота виходу φ стає такою як у атомарно чистої поверхні Si(113)-3x2. Зміна загину зон ΔY у діапазоні температур відпалу 650-750С не впливає на зміну роботи виходу так як її зміна компенсується зміною ефективної електронної спорідненості $\Delta\eta$.

З рисунка 3 видно, що зміна $\Delta\eta$ пов'язана із зміною кількості накопичених поблизу із зміною кількості атомів Sb. В той же час зміна ΔY поверхні атомів Sb. В той же час зміна ΔY поверхні атомів Sb. В той же час зміна ΔY очевидно пов'язана зі змінами поверхневої надструктури, яка в свою чергу обумовлена способами вбудовування атомів Sb в приповерхневу область Si(113). В раніш зроблених дослідженнях [8,9] було встановлено, що у відпаленій системі Sb/Si(113) атоми Sb знаходяться в приповерхневій області в місцях із досить значною енергією зв'язку, що може ускладнити використання Sb як сурфактанта на поверхні Si(113). Тому потребує додаткового дослідження факт рівності робіт виходу відпаленої до температури 650С адсорбційної системи Sb/Si(113) в приповерхневому шарі якої знаходиться ще досить велика кількість накопиченого Sb з роботою виходу атомарно чистої грані Si(113)-3x2.

На відміну від раніш досліджених нами адсорбційних систем Sb/Si(100) та Sb/Si(111) в системі Sb/Si(113) нам вдалося встановити значний вплив зміни загину зон в залежності від характеру вбудовування атомів Sb в приповерхневу область Si. Для більш повного порівняння цих трьох адсорбційних систем в

Kyiv National Taras Shevchenko University

подальших дослідженнях необхідно більш детально вивчити особливості зміни складових роботи виходу для адсорбційних систем Sb/Si(111) та Sb/Si(100).

Висновки

1. Відпрацьовано методику отримання атомарно чистих поверхонь Si(113)-3x2, досліджено структурні та електронні властивості атомарно чистої поверхні Si(113)-3x2 та системи Sb/Si(113) методами ФЕС, ОЕС та ДПЕ.

2. Встановлено, що при кімнатній температурі плівки Sb на Si(113) ростуть за механізмом Странського-Крастанова.

3. Показано, що адсорбція Sb призводить до зменшення роботи виходу системи Sb/Si(113). Це відбувається за рахунок зменшення ефективної електронної спорідненості поверхні та за рахунок зміни загину зон поблизу поверхні.

4. При різних температурах відпалу системи Sb/Si(113) утворюються поверхневі фази 1x1 (Θ_{Sb} ≈1,3 МШ), 1x2 (Θ_{Sb} ≈1,0 МШ), 1xn (n=3–4, Θ_{Sb} ≈0.5 МШ) з різними значеннями роботи виходу та її складових – загину зон та ефективної електронної спорідненості. .

Список використаних джерел

1. Siebert, M Sb-induced reconstructions on Si(113): Adatoms as the key elements [Text]/ M. Siebert, Th. Schmidt, J. I. Flege, and J. Falta// Phys.Rev.B,– 2005.– **72**, P 045323
2. Hofman, K.B. Surfactant mediated epitaxy of Ge/Si heterostructures for device applications [Text] /K. B. Hofman, Martin Kammner Dirk Reinking Michael Horn-von Hoegen, //Journal of Electronic Materials.–1999.- **28**, N.7.-P.1018-1028
3. Находкін, М.Г. Залежність роботи виходу поверхні Si(001) від ступені покриття її вісмутом [Текст]/ М.Г.Находкін, М.І. Федорченко // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. –2004.– Випуск № 4, С.3733-378.А.
4. Находкін, М.Г. Адсорбція Sb на Si(111)7x7 та Si(100)2x1 [Текст] / Находкін М.Г., Федорченко М.І Адсорбція Sb на Si(111)7x7 та Si(100)2x1 //Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2005.-№4.-С. 302-311
5. Находкін, М.Г. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) [Текст]/ М.Г.Находкін, М.І. Федорченко // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. –2006.– Випуск № 4, С.323-332
6. Fedorchenko, M Formation of the Sb/Ge(100) interface / Fedorchenko M., Lepiavko B., Nakhodkin M. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.- 2009.-вип. 3. -С.264-268.
7. Находкін, М.Г. Формування інтерфейсу Sb/Ge(113) / Находкін М.Г, Федорченко М.І. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.- 2010.-вип. 4. -С.323-332.
8. Da¸browski, J. Surface reconstruction suggests a nucleation mechanism in bulk: Sb/Si(113) and {113} planar defects [Text] / J. Da¸browski, H.-J. Mussig, G. Wolff, S. Hinrich // Surface Science –1998.– **411**.–P. 54-60
9. An, K.S. One dimentional electronic structure of the Sb-decorated Si(113) 2x2 surface [Text] / K.-S. An, J.R. Ahn, Y.K. Kim, C.C. Hwang, C.Y. Park, T. Okuda // Surface Science –2005.– **583**.–P. 199-204
10. Оллред, А Взаимосвязь электроотрицательности и строения элементов [Текст]/ А. Оллред, Е.В.Рохов// Ж.Неорганической Химии.–1958.-**5**, №6.-С.264-272.
11. Wagner L.F., Photoemission study of the effect of bulk doping and oxygen exposure on silicon surface states [Text]/ Wagner L.F., Spicer W.E. // Phys.Rev.-1974.-**B9**. P.1512-1515.

Надійшла до редколегії 21.08.2012р.

Kyiv National Taras Shevchenko University

СУЧАСНА ФІЗИКА

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 519.9

Боровий М.О.[1], д. ф.-м. н., доцент
Гололобов Ю.П.[2], д. ф.-м. н., професор
Сальник А.В.[1*], аспірант

Фотоіндуковані зміни параметрів елементарної комірки кристалів пруститу в діапазоні температур 100 – 300 К

Методом прецизійної рентгенівської дилатометрії досліджено температурні залежності параметрів a(T) та c(T) елементарної комірки кристалів пруститу в інтервалі температур (100 – 300) К, як у темновому режимі, так і при лазерному опроміненні. Експериментально виявлено існування двох температурних діапазонів ΔT_1= (220 – 300) К і ΔT_2 = (100 – 170) К, в яких значення коефіцієнту теплового розширення α_c відрізняються утричі. Вперше експериментально спостерігалося фотоіндуковане стрибкоподібне зростання параметру c елементарної комірки при T_p=(145 – 147) К, що може свідчити про існування в кристалах пруститу фотоіндукованого фазового переходу першого роду при даній температурі.

Ключові слова: прустит, параметри комірки, фазовий перехід, фотоіндуковані явища

M. O. Borovoy, Dr. Sc.
Yu. P. Gololobov, Dr. Sc.
A. V. Salnik, PhD stud.

Photoinduced changes of unit cell parameters of proustite crystals in temperature region 100 – 300 K

The temperature dependences of the unit cell parameter a(T) and c(T) of proustite crystal were obtained by X-ray dilatometry method with high precision in the temperature range (100 – 300) K in the dark mode and during laser irradiation. It was found the existence of two temperature ranges ΔT_1 = (220 – 300) K and ΔT_2 = (100 – 170) K, where the coefficient of thermal expansion α_c differed almost in three times. First experimental observation of photoinduced stepwise increasing of the parameter of the unit cell c was at temperature T_p=(145 – 147) K, that may indicate about existence of photoinduced phase transition of the first order in proustite crystals at this temperature.

Key Words: proustite, unit cell parameters, phase transition, photoinduced effects

[*]E-mail: alina.salnik@gmail.com
[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
[2]Національний транспортний університет, Київ, Україна

Кристали пруститу Ag_3AsS_3 є перспективними матеріалами нелінійної оптики, що обумовлює активне дослідження їх оптичних характеристик, електропровідності і кристалічної структури в широкому діапазоні температур – від гелієвих до 600 К [1]. При кімнатній температурі прустит належить до нецентросиметричного класу тригональної сингонії (просторова група C^6_{3v}) та має дві формульні одиниці в елементарній комірці [2]. Пониження температури кристалу пруститу супроводжується структурними фазовими перетвореннями (ФП) при температурах 56 К (зміна симетрії $C_{3v} \rightarrow C_3$) та 24 К ($C_s \rightarrow C_1$) [2,3]. Крім того, було зареєстровано ще два ФП (II роду при T = 60,5 К, I роду при T = 49,5 К) та існування в області між цими ФП неспіврозмірної фази [4]. Суттєво, що ситуація змінюється при оптичному опроміненні пруститу. Зокрема, на основі даних по комбінаційному розсіюванню та розсіюванню Мандельштама-Брілюена було зроблено висновок про існування в області температур (200 – 210) К ще одного ФП з наступною схемою структурних перетворень: $C_{3v} \rightarrow C_s$ (ФП 2-го роду, T_0 = 210 К), $C_s \rightarrow C_1$ (подвоєння комірки, ФП 2-го роду, T_1 = 56 К), $C_s \rightarrow C_1$ (ФП 1-го роду,

© Боровий М. О., Гололобов Ю. П., Сальник А. В., 2012

Представлено: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Kyiv National Taras Shevchenko University

T_2 = 24 K) [2,5,6]. Однак, в нашій роботі [7] аномалії на температурних залежностях швидкості розповсюдження повздовжніх ультразвукових хвиль вздовж основних кристалографічних напрямків опромінених зразків пруститу (випромінювання гелій-неонового лазера) спостерігались лише при температурі 150 K.

Таким чином, існуючі дані про вплив оптичного опромінення на фізичні характеристики кристалів пруститу достатньо суперечливі. Крім того, представлені в літературі результати вивчення структури кристалів пруститу при температурах T < 300 K не є повними, оскільки відсутні прецизійні значення параметрів елементарної комірки a і c навіть при відсутності оптичного опромінення. Тому в даній роботі методом рентгенівської дилатометрії досліджені температурні залежності параметрів елементарної комірки $a(T)$ і $c(T)$ кристалів пруститу в інтервалі температур 100 K < T < 300 K як при лазерному опроміненні, так і без нього.

Методика експерименту

Рентгенівські дифрактограми монокристалів Ag_3AsS_3 були отримані з використанням дифрактометру ДРОН-4-07 (випромінювання Fe $K\alpha_{1,2}$). Для вивчення залежностей $a(T)$ і $c(T)$ використовувалися монокристали пруститу, в яких площини (00l) і (h00) були виведені на фізичну поверхню. Для отримання залежності $c(T)$ реєструвався рефлекс (006), а у випадку $a(T)$ – рефлекс (10.0). Максимуми сканувалися з кроком $\Delta(2\theta)$=0,02°, час накопичення імпульсів в точці 2 с. При розділенні $K\alpha_{1,2}$-дублету використовувалися функції Фойгта, які апроксимували компоненти $K\alpha_1$ і $K\alpha_2$. Похибка визначення параметрів a і c при таких експериментальних умовах не перевищувала 0,002 Å.

Зразки розміщувалися в стандартній низькотемпературній камері УРНТ-180. Температура зразка підтримувалася з точністю до 0,5 K з використанням терморегулятора ВРТ-2 і вимірювалася мідь-константановою термопарою. Оптичне опромінювання зразків в процесі охолодження і нагрівання виконувалось за допомогою лазера MGL 500 мВт (λ = 532 нм), потужність випромінювання на зразку складала 40 мВт.

Обговорення результатів

Типові температурні залежності $a(T)$, що були отримані при охолодженні зразків, представлені на рис. 1: *а* – при відсутності лазерного опромінення, *б* – за умови лазерного опромінення. Як видно, залежності $a(T)$ близькі до лінійних, а значення параметру a при опроміненні та без нього практично збігаються. Водночас, на обох графіках в області температур T=(170 – 200) K спостерігається слабка зміна кута нахилу залежності $a(T)$, так що при T > 200 K кут нахилу виявляється меншим, ніж при T < 170 K. Відзначимо, що залежності $a(T)$, які були отримані в умовах нагрівання, практично не відрізняються від наведених вище.

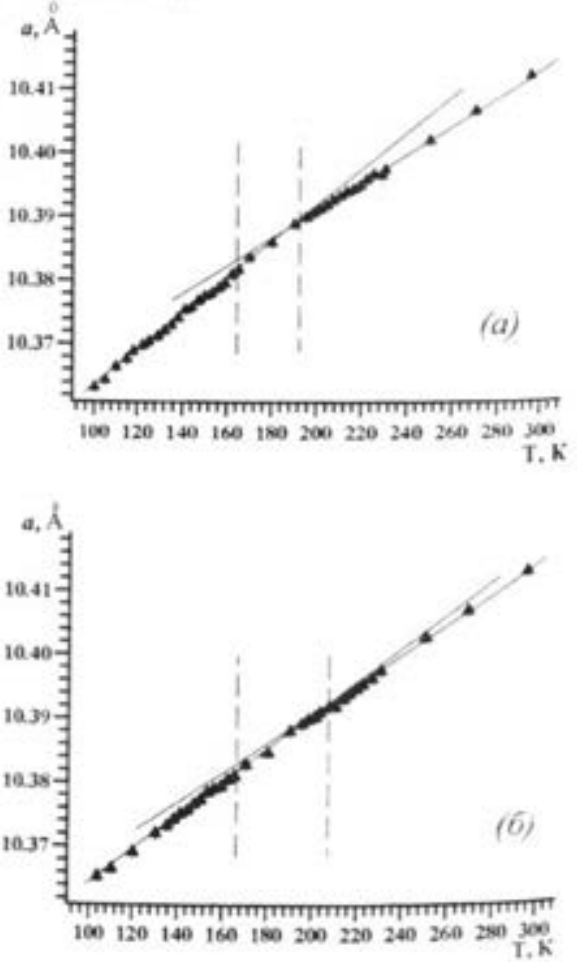


Рис. 1. Температурні залежності параметру $a(T)$ елементарної комірки пруститу: *а* – без опромінення; *б* – при лазерному опроміненні

Kyiv National Taras Shevchenko University

Аналогічно на рис. 2а і 2б наведені залежності $c(T)$ як без оптичного опромінення, так і при лазерному опроміненні зразка (режим охолодження). Варто відмітити, що у порівнянні з рис.1 залежності $c(T)$ мають більш складний характер. Перш за все, виділяються дві області температур з суттєво відмінними кутами нахилу $c(T)$: діапазон ΔT_1 = (220 – 300) К, в якому параметр c взагалі слабко змінюється з температурою, і ΔT_2 = (100 – 170) К, де кут нахилу вже суттєвий. В області температур (170 - 220) К кут нахилу залежності $c(T)$ монотонно змінюється. Отже, коефіцієнт теплового розширення кристалу вздовж вісі C $\alpha_c = \partial c / \partial T$ в двох температурних діапазонах ΔT_1 та ΔT_2 виявився істотно різним: $\alpha_c(\Delta T_1) = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ Å/К; $\alpha_c(\Delta T_2) = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ Å/К.

Відзначимо, що у відомій роботі [1] параметри a і c у діапазоні температур ΔT = (100 – 300) К визначалися із значно більшою експериментальною похибкою, тому зміна кута нахилу залежності $c(T)$ при переході через область температур (170–220) К не спостерігалась.

Звертає на себе увагу той факт, що в інтервалі температур (170 – 220) К залежності $c(T)$ як у випадку опромінених, так і затемнених зразків практично збігаються. Однак при температурі T<170 К спостерігається їх важлива відмінність. А саме, для зразків при темновому режимі охолодження в інтервалі температур (100 - 170) К параметр c монотонно зростає зі зменшенням температури за лінійним законом. В той же час, для зразків, які в процесі охолодження опромінювалися лазером, при температурі T_p = (144 – 146) К спостерігається зростання параметру c на величину $\Delta c \approx$ (0,002 – 0,003) Å. Такий стрибок значень параметру елементарної комірки є характерним для систем, в яких відбувається фазовий перехід першого роду. Природа виявленої фотоіндукованої зміни

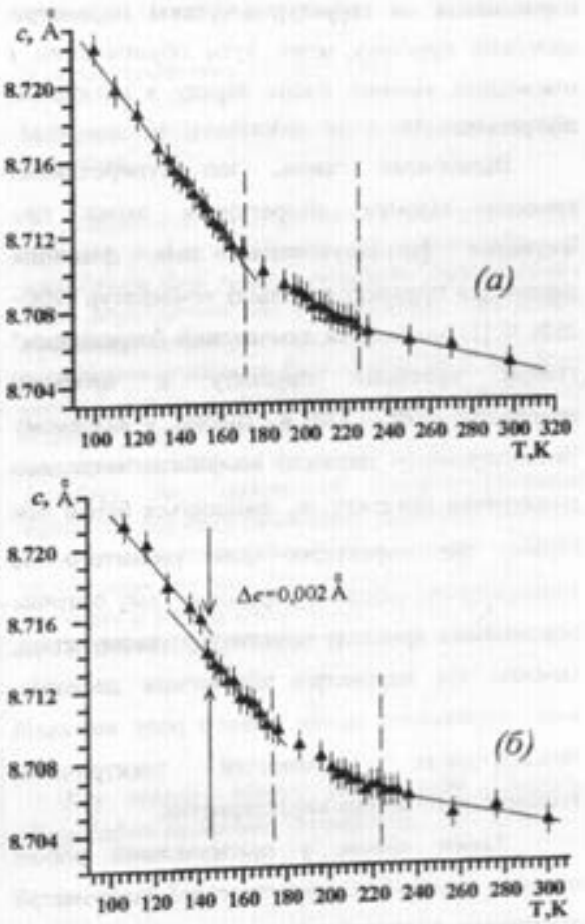


Рис. 2. Температурна залежність параметра $c(T)$ елементарної комірки пруститу: $а$ – без опромінення; $б$ – при лазерному опроміненні

параметру c може бути пов'язана з прямими процесами фотостимульованої міграції іонів Ag^+ по доступним кристалографічним позиціям в елементарній комірці (глибина потенціальної ями для Ag^+ в елементарній комірці не перевищує ΔU=(0,7 – 1,0) еВ [1]). Крім того, можна прийняти до уваги і той факт, що енергія фотонів лазерного випромінення $\hbar\omega = 2{,}38$ еВ перевищує енергію краю поглинання у пруститі ($E_g = 2{,}1$ еВ). Відповідно, таке випромінення стимулює генерацію основних носіїв заряду, суттєво збільшуючи їх концентрацію. Тому вплив достатньо інтенсивного оптичного

Kyiv National Taras Shevchenko University

опромінення на структурно-чутливі параметри кристалів пруститу може бути обумовленим і взаємодією вільних носіїв заряду з катіонною підграткою.

Відзначимо також, що суперечливий характер відомих літературних даних про існування фотоіндукованих змін фізичних параметрів пруститу в області температур (200–210) К [1] може бути зумовлений "перехідним" станом кристалів пруститу в інтервалі температур (170 – 220) К. Дійсно, у вказаному температурному діапазоні коефіцієнт теплового розширення пруститу α_c змінюється більш ніж втричі, що характерно для розмитого за температурою фазового переходу. Тому оптичне опромінення кристалу пруститу у такому стані, залежно від параметрів підсистеми дефектів, може спричиняти появу різного роду аномалій температурних залежностей електричних, теплових та оптичних характеристик.

Таким чином, у представленій роботі методом прецизійної рентгенівської дилатометрії досліджено температурні залежності параметрів елементарної комірки $a(T)$ та $c(T)$ кристалів пруститу в інтервалі температур (100 – 300) К як в темновому режимі, так і при лазерному опроміненні. Експериментально виявлено існування двох температурних діапазонів ΔT_1 = (220 – 300) К і ΔT_2 = (100 – 170) К, в яких значення коефіцієнту теплового розширення α_c пруститу майже втричі. Вперше експериментально спостерігалося фотоіндуковане стрибкоподібне зростання параметру c елементарної комірки при T_p = (144 – 146) К, що може свідчити про існування в кристалі пруститу фотоіндукованого фазового переходу першого роду при даних температурах.

Список використаних джерел

1. *Schonau K. A., Derfern S. A. T.* High-temperature phase transitions, dielectric relaxation, and ionic mobility of proustite, Ag3AsS3, and pyrargyrite, Ag3SbS3 // Journal of applied physics – 2002. – V. 92, № **12**, P.7415-7424.
2. *Смоленский Г. А., Синий И. Г., Кузьминов Е. Г., Годовиков А. А.* Оптические фононы и мягкая мода в прустите при фазовых переходах // ФТТ – 1979 – Т. **21**, № 8, С.233-2341.
3. *Смоленский Г. А., Синий И. Г., Прохорова С. Д., Кузьминов Е. Г., Годовиков А. В.* Новый фазовый переход в прустите // Кристаллография – 1982 – Т. **27**, № 1, С.140-145.
4. *Бондарь А.Б., Вихнин В.С., Рябченко С.М., Ячменев В.Е.* Несоразмерная фаза в области фазового перехода второго рода в прустите.// ФТТ. – 1983. Т.25, № 9. – С.2602–2609.
5. *Кот Л. А., Прохорова С. Д., Сандлер Ю.М., Синий И. Г., Флеров И. Н.* Фотоиндуцированный фазовый переход в прустите // ФТТ – 1983 – Т. **28**, № 5, С.1535-1537.
6. *Шаурен Я., Тейлор К. Н. Р.* Исследование фотоиндуцированного фазового перехода в прустите Ag_3AsS_3 // ФТТ – 1986 – Т. **28**, № 9, С. 2604-2607.
7. *Гололобов Ю. П.* О фотоиндуцированном фазовом переходе в кристаллах Ag_3AsS_3 // ФТТ – 1999 – Т.**41**, №4, С.702-704.

Надійшла до редколегії 06.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 536.96; 538.953

Гаврюшенко Д.А., д. ф.-м.н., проф.

Вплив радіаційного опромінення на структуру конденсованих систем

Проведено теоретичне дослідження впливу радіаційного опромінення постійної потужності на особливості структурних характеристик рівноважних рідинних систем із застосуванням фундаментальних рівноважних рівнянь Боголюбова, які було записано для випадку стаціонарного стану. Стан рідини під опроміненням, який є нерівноважним стаціонарним, розглядався як збурення рівноважного. Оскільки цей нерівноважний стан характеризується збуреним розподілом за імпульсами, то було отримано систему інтегро-диференціальних рівнянь для визначення основної структурної характеристики рідинних систем – парної функції розподілу. Розв'язок цієї системи дозволяє отримати зсув характеристичної температури розподілу Максвелла

Ключові слова: парна функція розподілу, рівняння Боголюбова, радіаційне опромінення

D.A. Gavryushenko, Dr. Sci., Prof.

Influence of irradiation on condensed matter structure

Theoretical investigations of the influence of constant power irradiation on particularities of equilibrium fluid systems structural characteristics have been carried out by Bogolubov equilibrium equations written for stationary state. The non-equilibrium stationary fluid system state has been carried out in consideration as perturbation of stationary one. As this non-equilibrium state is usually characterized by perturbed distribution on impulses the system of integral-differential equations has been obtained to determine the main structural characteristics of fluid systems – binary distribution function. The solution of the system let us to get a shift of the characteristical temperature of the Maxwell distribution.

Key words: binary distribution function, Bogolubov equations, irradiation

e-mail: dg@univ.kiev.ua

Створення ядерних енергетичних установок нового покоління вимагає подальшого розвитку радіаційної фізики й радіаційного матеріалознавства. Насамперед, це зумовлено фізичними процесами, що відбуваються в таких установках, і, як наслідок, використанням якісно інших конструкційних матеріалів. Особливе місце серед ядерних реакторів нового покоління займають рідкосольові ядерні реактори, паливом для яких є радіоактивний розплав, а саме: хімічні сполуки радіоактивного елементу (урану або плутонію) із фтором, розчинені в розплаві неорганічних солей (Li, Na, KF й ін.) [1].

Розплави фторидних солей, що циркулюють через активну зону рідкосольових ядерних реакторів, опромінюються потужними потоками нейтронів, електронів, γ-квантів та уламків розпаду. Взаємодія радіаційного випромінювання з атомами розплаву викликає протікання великої кількості різних процесів, наслідком яких є зміна фізичних і фізико-хімічних властивостей розплаву, зміна характеру його взаємодії з речовиною твердотільних конструкцій ядерної енергетичної установки. В результаті таких процесів можуть змінюватися характеристики конструкційних матеріалів, і, як можливий наслідок, умови їх експлуатації.

В рідкосольових ядерних реакторах тепло генерується прямо в розплавленій солі, яка одночасно є і паливом, і теплоносієм, тому важливо детально дослідити особливості процесів теплопередачі та інших процесів переносу в таких системах, адже одною з головних переваг таких систем повинна бути повільна реакція на зростання температури. Також важливо знати тиск парів розплавлених солей та їх радіаційну стабільність [2].

Крім того, часто радіаційному опроміненню піддаються різні біологічні системи. Протягом багатьох років вивчається вплив іонізуючого опромінення на живі організми, тканини, клітини, тощо. Проте в цих дослідженнях не

Представлено: акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

© Гаврюшенко Д.А., 2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

приділяється достатньої уваги впливу радіаційного опромінення саме на рідини, які містяться в біологічних об'єктах, хоча цей вплив може бути суттєвим.

Радіаційне опромінення конденсованого середовища призводить до помітної зміни рівноважних термодинамічних властивостей рідинних систем. При радіаційному ж опроміненні в рідинах порушується термодинамічна рівновага, і відбувається перебудова структури рідини. Проте питання детального аналізу релаксаційних процесів та визначення їх внеску до динамічних значень термодинамічних параметрів залишається дуже складним і потребує подальшого вивчення.

В загальному випадку, структурні характеристики конденсованих систем в стаціонарному стані вичерпно описуються парною функцією розподілу $F_2\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)$, де $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ – радіус-вектори положень центрів структурних одиниць (молекул, іонів, вакансій тощо). Знання цієї функції дозволяє описувати не лише структурні властивості конденсованого середовища (число найближчих сусідів, середню відстань між молекулами, характерний радіус кореляції та ін.), а також теплофізичні властивості конденсованої системи, як рівноважні, так і нерівноважні. Існує багато методів визначення парної функції розподілу: експериментальні, теоретичні та методи комп'ютерного моделювання. Переважна більшість цих методів дозволяє визначити цю функцію в рівноважному стані.

Під дією радіаційного опромінення конденсована система переходить до нерівноважного стану. Це, зокрема, пов'язано з тим, що радіаційне опромінення порушує розподіл Максвелла молекул за швидкостями. При цьому в системі внутрішнє виробництво ентропії, яке дорівнює зменшенню ентропії в результаті процесів опромінення.

Постає питання, як змінюється при цьому основна структурна характеристика конденсованого середовища – парна функція розподілу, яка є функцією лише просторових координат, а не швидкостей. Строгий статистичний опис термодинамічного стану рідини можна провести на основі рівняння Ліувілля. Однак, як відомо, рівняння Ліувілля є зворотним за часом, і в такому вигляді його не можна застосувати до опису незворотних процесів, що відбуваються в рідинах. Боголюбовим М.М. були розроблені найбільш систематичні методи побудови відповідних кінетичних рівнянь [3]. Вводячи поняття s-частинкових функцій розподілу, і використовуючи рівняння Ліувілля, він отримав ланцюжок зв'язаних рівнянь для цієї функції.

Для теоретичного розв'язку нашої задачі застосуємо фундаментальний метод кінетичних рівнянь Боголюбова. З цією метою використаємо друге рівняння ланцюжка Боголюбова для нерівноважної функції розподілу $F_2\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_2,t\right)$, яка залежить від просторових координат $\vec{r}_1,\vec{r}_2$, імпульсів $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ та часу t [3]:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial F_2}{\partial \vec{r}_1}\frac{\vec{p}_1}{m_0}+\frac{\partial F_2}{\partial \vec{r}_2}\frac{\vec{p}_2}{m_0}-$$
$$-\frac{\partial F_2}{\partial \vec{p}_1}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_1-\vec{r}_2\,|\right)}{\partial \vec{r}_1}-$$
$$-\frac{\partial F_2}{\partial \vec{p}_2}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_1-\vec{r}_2\,|\right)}{\partial \vec{r}_2}= \qquad (1)$$
$$=\rho\int d\vec{r}_3 d\vec{p}_3\left[\frac{\partial F_3}{\partial \vec{p}_1}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_1-\vec{r}_3\,|\right)}{\partial \vec{r}_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F_3}{\partial \vec{p}_2}\frac{\partial \varphi\left(|\,\vec{r}_2-\vec{r}_3\,|\right)}{\partial \vec{r}_2}\right],$$

де $F_3\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,t\right)$ – нерівноважна потрійна функція розподілу, яка залежить від просторових координат $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$, імпульсів $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3$ та часу t, $\varphi\left(|\,\vec{r}_i-\vec{r}_j\,|\right)$ – потенціал взаємодії структурних елементів, які знаходяться в точках $\vec{r}_i,\vec{r}_j$ відповідно, $\rho=N/V$ – чисельна густина рідини, m_0 – маса структурного елементу.

Очевидно, що в рівноважному випадку рівняння (1) повинно зводитись до відомого рівняння для рівноважної парної функції розподілу $F_2\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)$, за допомогою якої обчислюються рівноважні термодинамічні властивості конденсованої системи. Справді, в рівноважному випадку функцію $F_2\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_2,t\right)$ можна подати у вигляді добутку парної функції розподілу за координатами $g_2\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)$ та парної функції розподілу за імпульсами $f_2\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)$.

Для доведення цього використаємо рівняння (1) у рівноважному випадку, тобто коли

Kyiv National Taras Shevchenko University

$\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$, та два рівняння ланцюжка Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона (ББГКІ) для функцій $g_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$:

$$\frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1} + \frac{1}{kT} g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_1} - \\ - \frac{\rho}{kT} \int d\vec{r}_3 g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|)}{\partial \vec{r}_3} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2} + \frac{1}{kT} g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_2} - \\ - \frac{\rho}{kT} \int d\vec{r}_3 g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|)}{\partial \vec{r}_3} = 0. \quad (3)$$

Помножимо рівняння (2) на $\frac{\vec{p}_1}{m_0} f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$, а рівняння (3) на $\frac{\vec{p}_2}{m_0} f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ та додамо їх, врахувавши, що $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2) = \int d\vec{p}_3 f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$. В результаті отримаємо наступне рівняння

$$\frac{f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{m_0}\left(\vec{p}_1 \frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1} + \vec{p}_2 \frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2}\right) + \\ + \frac{f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2) g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{m_0 kT} \times \\ \times\left(\vec{p}_1 \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_1} + \vec{p}_2 \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_2}\right) - \\ - \frac{\rho(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{m_0 kT} \int d\vec{r}_3 d\vec{p}_3 f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3) g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) \times \\ \times \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|)}{\partial \vec{r}_3} = 0. \quad (4)$$

Очевидно, що отримане рівняння (4) з урахуванням факторизації рівноважних функцій $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ та $f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$, співпадає з рівнянням (1) у випадку $\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$.

Розглянемо рідинну систему, що знаходиться під дією радіаційного опромінювання від джерела з постійною потужністю. Очевидно, що в цьому розподіл Максвелла за імпульсами зміниться на інший розподіл, який визначається енергетичним спектром радіаційного опромінення. З часом, завдяки сталій величині флюєнсу радіаційного випромінювання, система переходить до стаціонарного стану.

Легко зрозуміти, що у випадку стаціонарного стану рівняння (1) перетворюється в суму двох рівнянь, кожне з яких є рівнянням ланцюжка ББГКІ у випадку нерівноважного стану:

$$\frac{\vec{p}_1}{m_0} f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2) \frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1} - \\ - g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \frac{\partial f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{\partial \vec{p}_1} \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_1} - \\ - \rho \int d\vec{r}_3 d\vec{p}_3 g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) \times \\ \times \frac{\partial f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)}{\partial \vec{p}_1} \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|)}{\partial \vec{r}_1} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\vec{p}_2}{m_0} f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2) \frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2} - \\ - g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \frac{\partial f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{\partial \vec{p}_2} \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_2} - \\ - \rho \int d\vec{r}_3 d\vec{p}_3 g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) \times \\ \times \frac{\partial f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)}{\partial \vec{p}_2} \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|)}{\partial \vec{r}_1} = 0. \quad (6)$$

Інтегруючи будь-яке з цих рівнянь за $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2$, та враховуючи співвідношення $\int d\vec{p}_3 f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3) = f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$, отримаємо рівняння ББГКІ у випадку нерівноважного стаціонарного стану, яке можна записати, ввівши ефективну температуру стаціонарного стану T_{ref}, у вигляді:

$$kT_{ref} \frac{\partial g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1} + g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_1} + \\ + \rho \int d\vec{r}_3 g_3(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) \frac{\partial \varphi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|)}{\partial \vec{r}_1} = 0, \quad (7)$$

де kT_{ref} визначається співвідношенням:

$$kT_{ref} = - \frac{\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\vec{p}_1}{m} f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\partial f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{\partial \vec{p}_1}}. \quad (8)$$

Вираз (8) дозволяє визначити ефективну температуру системи в загальному випадку. Але у випадку, коли джерела випромінювання

Kyiv National Taras Shevchenko University

неперервно і рівномірно розподілені в об'ємі системи, функції розподілу $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ та $f_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$ стають парними функціями своїх аргументів. Тоді визначення ефективної температури за допомогою формули (8) приводить до невизначеності типу $\frac{0}{0}$. Для обчислення температури в цьому випадку, розглянемо наступну процедуру. Спочатку у виразі (8) обчислимо інтеграл за $\vec{p}_2$, використовуючи можливість факторизації функції розподілу за імпульсами $f_2(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=f_1(\vec{p}_1)f_1(\vec{p}_2)$:

$$kT_{ref}\frac{\partial f_1(\vec{p}_1)}{\partial \vec{p}_1}=-\frac{\vec{p}_1}{m_0}f_1(\vec{p}_1), \quad (9)$$

де $f_1(\vec{p})$ – унарна функція розподілу за імпульсами. Беручи до уваги, що $f_1(\vec{p})$ – парна функція від $\vec{p}$, тобто $f_1(\vec{p})=\psi(p^2)$, і, відповідно, $\frac{\partial f_1(\vec{p})}{\partial \vec{p}_1}=2\vec{p}\psi'(p^2)$, після інтегрування за $\vec{p}_1$ отримаємо вираз, в якому не виникає згаданої вище невизначеності:

$$kT_{ref}=-\left(2m\int d\vec{p}_1\psi'(p_1^2)\right)^{-1}. \quad (10)$$

У стаціонарному стані структурні характеристики системи, що знаходиться під опроміненням від джерела з постійною потужністю, описуються фундаментальними інтегро-диференціальними рівняннями статистичної рівноважної теорії рідин за ефективної температури T_{ref}, яка в загальному випадку визначається виразом (8), а у випадку просторо-однорідного радіаційного опромінення сталої потужності – виразом (10).

Отже, можна зробити наступний висновок: для визначення зміни структурних характеристик конденсованої системи під дією радіаційного опромінення треба мати детальну інформацію щодо зміни розподілу Максвелла за імпульсами під дією радіаційного опромінення, щоб ідентифікувати коефіцієнти при невідомих функціях розподілу і, відповідно, обчислити значення ефективної температури T_{ref}.

Відомо, що опромінення твердих тіл призводить до порушення структури кристалічної гратки (точкові дефекти та дислокаційні петлі, ближнє переупорядкування та ін.). Якщо розглядати рідинну систему в рамках квазікристалічної моделі рідини, то стає зрозумілим, що радіаційне опромінення призводить до порушення ближнього порядку рідини, який описується парною функцією розподілу [4]. Таким чином, запропонована нами теорія дозволяє описати цей ефект з фундаментальної точки зору.

Отже, у стаціонарному стані структурні характеристики системи, що знаходиться під опроміненням від джерела з постійною потужністю, описуються фундаментальними інтегро-диференціальними рівняннями статистичної рівноважної теорії рідин за ефективної температури T_{ref}. Задача знаходження парної функції розподілу в однокомпонентній рідині в стаціонарному стані зводиться до розв'язку одного інтегро-диференціального рівняння, яке дає змогу описати зміну структурних характеристик рідини у випадку, коли відома інформація щодо зміни функції розподілу Максвелла по швидкостям під дією радіаційного опромінення.

Список використаних джерел

1. *Новиков В.М., Игнатьев В.В., Федулов В.И., Чередников В.Н.* Жидкосолевые ЯЭУ: перспективы и проблемы. – М: Энергоатомиздат, 1990. – 192 с.
2. *Бэнуни С.А., Барашенков В.С., Жамкочян В.М. и др.* Перспективные электроядерные системы // Физика ЭЧАЯ. – 2003. – Т.34, №.4. – С. 977-1032.
3. *Боголюбов Н.Н.* Избранные труды. Т. 2: Проблемы динамической теории в статистической физике. – К.: Наукова думка, 1970. – С.99-196.
4. *Зеленский В.Ф., Неклюдов И.М., Черняева Т.П.* Радиационные дефекты и распухание металлов. – К.: Наукова думка, 1988. – 296 с.

Надійшла до редколегії 12.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 577.32+535.34

Драпіковський М.А.,студент бакалавр,
Заболотний М.А.,канд.фіз.мат.наук,
Барабаш Ю.М.,канд.хім.наук,
Куліш М.П.,доктор фіз.мат.наук,
Дмитренко О.П.,канд.фіз.мат.наук,

Кінетика фотоіндукованих електронних переходів в наноструктурах бактеріальних реакційних центрів

Висока ефективність реакцій фотостимульованого переносу електрона (ПЕ) в біологічних системах, в тому числі в структурі реакційних центрів, це привертає увагу багатьох дослідників. Аналіз основних факторів, визначаючих з швидкість таких реакцій, важливий як у фундаментальному плані, так і з точки зору створення штучних систем накопичення і перетворення енергії. Встановлено, що ПЕ в біологічних системах відбувається у вигляді послідовного ПЕ в структурі білків між металовмісними центрами або органічними донорно-акцепторними групами на відстані 5-25 Å.

Досліджено кінетику електронного транспорту в бактеріальних реакційних центрах (РЦ). Досліджено процеси релаксації та фотоіндуковані структурні зміни в молекулярних комплексах РЦ Rhodobacter spharoides у процесі внутрішньомолекулярного переносу електронів. Представлено результати експериментального дослідження залежності мікрошвидкостей переходу між донором та акцептором від інтенсивності та часу засвітки РЦ та теоретичного аналізу релаксаційних кривих за допомогою вейвлет-перетворень.

Ключові слова: реакційний центр, електронний транспорт, фулерени.

*E-mail:*drapikovskyi.maksym@gmail.com

Drapikovskyi M.A., student,
Zabolotny M.A., Ph.D.,
Barabash Y.M., Ph.D.,
Kulish M.P.Dr.Sci.,Prof.,
Dmytrenko O.P.Ph.D.Ass.,

Investigation of the kinetics of photoinduced electronic transitions in nanostructures of bacterial reaction centers

The high efficiency of electron transfer reactions of Photo-stimulated (ET) in biological systems, including the structure of reaction centers attracted attention of many researchers. Analysis of the main factors determining the speed of such reactions is important both in fundamental terms, and in terms of creating artificial systems, storage and energy conversion. Found that ET in biological systems occurs as series of ET in the structure of proteins between the metal centers or organic donor-acceptor groups at a distance of 5-25 Å. In this regard, series of experiments related to TE in the structure of proteins. The kinetics of electron structure of proteins. The kinetics of electron transport in bacterial reaction centers (RC). The transport in bacterial reaction centers (RC). The processes of relaxation and photoinduced structural changes in molecular complexes RC Rhodobacter spharoides in the process of intramolecular electron transfer. The results of experimental research depends on microspeed transition between donor and acceptor on the intensity and illumination time RC and theoretical analysis of relaxation curves using wavelet transforms.

Key words: reaction center, electron transport, fullerene.

Нам відомо безліч фотосинтезуючих організмів. Проте, особливий інтерес викликають бактерії, вони мають відносно простий фотосинтезуючий апарат. Пурпурні бактерії є чи не єдині живі мікроорганізмами, окрім рослинних, які здатні засвоювати світлову енергію та перетворювати її в інші види, зберігати та передавати її на досить великі відстані фактично без втрат. Пурпурні бактерії досліджуються понад 40 років. Вони визначають процеси фотосинтезу в усіх біоструктурах. Дозволяють забезпечити розділення фотогенерованих пар носіїв зарядів з імовірністю близькою до 1. Тому їх використовують в сонячних батареях та наноелектроніці [1]. Визначаючими в каскаді бактеріальних фотосинтетичних процесів є первинні процеси: поглинання кванта світла, міграція енергії у світлозбірному комплексі, розділення зарядів в фотореакційному центрі,

© Драпіковський М.А., Заболотний М.А., Барабаш Ю.М., і ін. 2012

Представлено: акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

Kyiv National Taras Shevchenko University

електронний транспорт, спряжений з ним переніс протонів і інших іонів через мембрану[2].

Система первинних процесів має надзвичайно важливу властивість, що відрізняє її від інших біологічних систем. Система "вмикається" світлом, і її можна тестувати з допомогою дельта-подібних (лазерний спалах) чи прямокутних (включення постійного світла) імпульсів. Важливим є і та обставина, що з хроматофорів фотосинтезуючих бактерій можна виділити біохімічними методами окрему частину - бактеріальні реакційні центри (РЦ), при цьому виділена частина фотосистеми зберігає здатність до поглинання світла та світлоіндукованого розділення зарядів. Вперше про такий комплекс було сказано Емерсоном та Арнольдом у 1932 році. Дюйзенс у 1952 році навів спектральний доказ його наявності у бактерії [3].

На сьогодні відомі декілька типів РЦ, які відрізняються природою й спектральними властивостями первинного донора електрона і природою вторинного донора та акцептора електрона. Вперше такий комплекс був виділений на початку 70-х з пурпурових фотосинтетичних бактерій виду Rhodobacter sphaeroides [4].

Реакційні центри пурпурних фотосинтетичних бактерій

Тепер детальніше розглянемо реакційний центр. РЦ являє собою білок, що складається з трьох поліпептидних ланцюгів і має у своєму складі ряд пігментів типу хлорофілу. Молекулярная маса білка більше 135 · 103 дальтон і складається він відповідно з більш ніж 104 атомів. При порушенні квантом світла димера бактеріохлорофілла електрон переноситься з його порушеної рівня послідовно на мономер бактериохлорофілла, феофетин і первинний акцептор - хінон, опиняючись таким чином за времяок оло 200 пс на протилежній сторона мембрани. Утворений атіон-радикал бактеріохлорофілла P+ відновлюється електронами, локалізованними на гемах цитохрому з, який в бактеріях Rhodopseudomonas утворює міцний комплекс з глобул реакційного центру. В результаті з високим квантовим виходом здійснюється трансмембранний перенос електронів з підвищенням їх потенціалу, котрий претворюється надалі в хімічну енергію.

Розглянемо фотосинтетичний РЦ. Його задача - переносити фотозбуджені електрони на іншу сторону мембрани, і, тим самим, створювати той електричний потенціал, на якому працює фотосинтез.

Рис.1[2] Фотосинтетичний РЦ. Субодиниці L і M зв'язують фотосинтетичні пігменти - хлорофіли (червоні з жовтими іонами магнію у центрі), феофітіни (темно-сині) і два хінони (фіолетові). Цитохром містить чотири гема (чорно-сірі, з оранжевими йонами заліза всередині).

Кінетика реакцій першого порядку для РЦ

$$A \underset{k_{21}}{\overset{k_{12}}{\rightleftarrows}} B,$$

A - стан РЦ коли електрон знаходиться на донорі, B - стан РЦ коли електрон знаходиться акцепторі.

Двохрівнева модель кінетики електронного транспорту РЦ з перемінними в часі коефіцієнтами, можна зобразити у вигляді схеми (рис.1.), 1 і 2 відповідно стани на донорі та акцепторі.

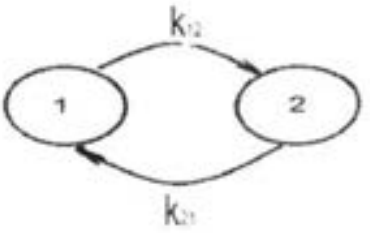


Рис.2 Схема, що описує процес переходу електрона з донора на акцептор і акцептора на донор.

Мікрошвидкості переходу електрону з донора на акцептор і з акцептора на донор позначимо, через k_{12} і k_{21}. На цьому прикладі вперше стикаємось з процесом в якому зміна концентрації компонентів складається з

Kyiv National Taras Shevchenko University

швидкості двох процесів. Позначаючи швидкості, можна записати для зміни концентрації c_A:

$$\frac{dc_A}{dt} = k_{12}c_A - k_{21}c_B \quad (1)$$

Так як

$$c_A + c_B = c_A^0 \quad (2)$$

(В принципі реакція може вивчатися в умовах, коли в початковий момент часу присутні дві компоненти, обмежимось випадком коли $c_B^0 = 0$), то можна привести до вигляду:

$$\frac{dc_A}{dt} = (k_{21} + k_{12})c_A - k_{12}c_A^0 \quad (3)$$

Перепишемо у вигляді

$$\frac{dc_A}{(k_{21}+k_{12})c_A - k_{12}c_A^0} = dt \quad (4)$$

і проінтегрувавши від 0 до t:

$$\frac{1}{(k_{21}+k_{12})}\ln\frac{k_{12}c_A^0}{(k_{21}+k_{12})c_A - k_{12}c_A^0} = t \quad (5)$$

Запишемо балансні рівняння для концентрації на донорі та акцепторі

$$c_A = c_A^0 + \frac{k_{21}}{(k_{21}+k_{12})c_A - k_{12}c_A^0}c_A^0 e^{-(k_{21}+k_{12})t} \quad (6)$$

Підставляючи в **(5)** в **(2)** , будемо мати рівняння кінетичної кривої для C_B:

$$c_B = \frac{k_{12}}{k_{21}+k_{12}}c_A^0\left[1 - e^{-(k_{21}+k_{12})t}\right] \quad (7)$$

Вирази дозволяють при відомих k^+і k^- розрахувати концентрації c_A і c_B при визначеному часі t. З допомогою **(5)** визначають час, необхідний для проведення реакції. В сукупності ці три вирази дають вирішення прямої задачі реакції що описується рівняннями першого порядку.

Із **(6)** і **(7)** слідує, що з збільшенням часу (тобто при $t \to \infty$) величина c_A і c_B прямує до граничних значень: $c_A^\infty = \frac{k_{12}}{k_{21}+k_{12}}c_A^0$

$$c_B^\infty = \frac{k_{21}}{k_{21}+k_{12}}c_A^0 \quad (8)$$

Розглянемо один з альтернативних поглядів при якому мікрошвидкості постійні. Для цього запишемо, ще раз балансні рівняння у спрощеному вигляді:

$$\frac{dc_A}{dt} = -k_{12}c_A + k_{21}c_B. \quad (9)$$

$$\frac{dc_B}{dt} = -k_{21}c_B + k_{12}c_A. \quad (10)$$

рівняння, що відповідають зміні концентрації.

Запишемо рівняння системи в спокої:

$$c_A + c_B = 1. \quad (11)$$

Розглянемо систему, що відповідає схемі на (рис.7), тобто систему з двох станів, що мають постійні мікрошвидкості k_{12} і k_{21}

$$c_A = 1 - c_B \quad (12)$$

$$c_B = 1 - c_A \quad (13)$$

$$\frac{dc_A}{dt} = -k_{12}c_A + k_{21}(1 - c_A) \quad (14)$$

звідси ми одержимо наступний вираз

$$\frac{dc_A}{dt} = -k_{12}c_A + k_{21} - k_{21}c_A = -c_A(k_{12} +) + k_{12} \quad (15)$$

Оскільки система з сталими коефіцієнтами не описує в повній мірі процес, що відбувається, то змінні коефіцієнти можна вирахувати наступним чином виходячи з балансних рівнянь.

Аналіз окислення:

$$\frac{dc_A}{dt} = -k_{12}c_A + k_{21}c_B \quad (16)$$

початкове балансне рівняння при t=0, тобто початковий момент часу, звідси отримаємо вираз:

$$\frac{dc_A(0)}{dt} = -k_{12}(0)c_A(0) + k_{21}(0)c_B(0) \quad (17)$$

в початковий момент часу $c_B(0) = 0$, тоді

$$k_{12}(0) = -\frac{\frac{dc_A(0)}{dt}}{c_A(0)} \quad (18)$$

$k_{12} = \alpha I$, тобто від часу не залежить (I - інтенсивність, α - коефіцієнт, що дорівнює ефективному перерізу), тобто мікрошвидкість залежить k_{12} залежить від інтенсивності освітлення. Тоді

$$\frac{dc_A(0)}{dt} = -k_{12}c_A + k_{21}c_B \quad (19)$$

$k_{12} = \alpha I = k_{12}(0)$

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$k_{12}(0) = -\frac{\frac{dc_A(t)}{dt}}{c_A(0)} = k_{12} \quad (20)$$

Підставимо в рівняння (19) рівняння (20)

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{\frac{dc_A(t)}{dt}}{c_A(0)} c_A(t) + k_{21}(t)(1 - c_A) \quad (21)$$

$$\frac{dc_A}{dt} - \frac{\frac{dc_A(t)}{dt}}{c_A(0)} c_A(t) = k_{21}(t)(1 - c_A) \quad (22)$$

$$k_{21}(t) = \frac{\frac{dc_A}{dt} - \frac{\frac{dc_A(t)}{dt}}{c_A(0)} c_A(t) = k_{21}(t)}{(1 - c_A)} \quad (23)$$

Розглянемо формулу

$$c_A = c_A(t) = \frac{k_{21}}{k_{12}+k_{21}} + \frac{k_{12}}{k_{12}+k_{21}} e^{-(k_{12}+k_{21})t} \quad (24)$$

тут декременти, тобто коефіцієнти при експоненті несуть наступний вклад:

розглянемо $e^{-(k_{12}+k_{21})t}$ сюди вклад несуть тільки К1 коефіцієнти з таблиці фітування, К2 і К3 вклад давати не можуть.

$\frac{k_{21}}{k_{12}+k_{21}}$ це повільна складова рівняння, що описує процес, тобто коефіцієнти К2 і К3 тут

$k_{12} \gg k_{21}$, тому вклад дає тільки чисельник k_{21}

$$c_B = c_B(t) = 1 - \frac{k_{21}}{k_{12}+k_{21}} + \frac{k_{12}}{k_{12}+k_{21}} e^{-(k_{12}+k_{21})t} \quad (25)$$

Дикременти K_1 K_2 - відрізняються один від одного на порядок. Експонента з найбільшим коефіцієнтом описує електронний транспорт, k_{21} - характеризує структурні зміни.

Експерементальна установка

При фотоокисленні первинного донора (димера бактеріохлорофіла) РЦ переходять у довготривалий стан з розділеними зарядами, тобто з електроном, який перенесений на вторинний хінонний акцептор. Темнова релаксація такого стану відбувається за секунди і більше. Кінетика таких процесів реєструється зміною у спектрі поглинання смуги близько 865 нм. Для вимірювання абсорбційних змін використовувався двопроменевий програмно-апаратний комплекс:

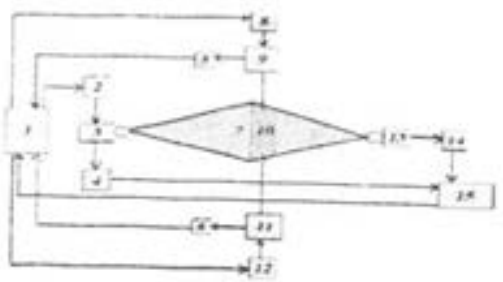


Рис.3 Блок-схема установки: 1-ПК, 2-канал формування $I_{оп}$, 3-система з світлодіодами, 4-канал вимірювання $I_{оп}$, 5,6-канал вимірювання $I_{(0,1)}$, 7-фокусуюча лінза, 8,12-канал формування $I_{(0,1)}$, 9,11-набір світлодіодів, 10-кювета, 13-фотоприймач з підсилювачем, 14-детектор з підсилювачем, 15-канал попередньої обробки.

Комплекс, створений на базі ПК IBM з вбудованою платою E-1050 системи збору цифрової й аналогової інформації, містить у собі три окремих модулі розміром 15x15x10 см. Він дозволяє вимірювати оптичне поглинання розчинів у діапазоні величин 0-1± 0,002 на довжині хвилі 870±30 нм. Особливістю даного комплексу є використання зондувального світла низької інтенсивності (0,3мкВт/см^2), модульованого частотою 5 кГц, а також застосування додаткового оптичного каналу для підсвічування розчинів. Це підсвічування приводить до вицвітання спектральної лінії на даній довжині хвилі досліджуваних розчинів. Вона здійснюється на цій же довжині хвилі і може регулюватися в діапазоні інтенсивностей від 0 до 5 мВт/см^2 відповідно до програмного забезпечення експерименту. Причому, збуджуюче (два промені, напрямлені на зразок з двох протилежних сторін) і тестуюче світло падають на кювету з розчином перпендикулярно один до одного. Як джерело зондувального і збуджуючого імпульсів світла використовується набір 10 світлодіодів з максимальною потужністю до 10 мВт кожного. Комплекс складається з оптичного блоку і блоку попередньої обробки сигналів з цифровою індикацією результатів вимірювання (Рис.2.1). Він дозволяє проводити дослідження в автономному режимі під керуванням ПК без особистої участі оператора. За допомогою цього

Kyiv National Taras Shevchenko University

комплексу були отримані залежності зміни коефіцієнта оптичного поглинання РЦ фотосинтезуючих бактерій Rb. Sphaeroides від інтенсивності збуджуючого світла, що дозволило виявити особливості електрон-конформаційної взаємодії в системі фотореакційних центрів.

Опромінення зразка проводиться прямокутними імпульсами світла різної тривалості. Максимальна інтенсивність світла I_{max}= 3-5 мВт/см^2. Інтенсивність світла регулюється. Крок дискретизації змінюється. Фаза збудження та початкова фаза релаксації вимірюється з кроком 0.01 секунди, далі крок змінюється (0.1-1 секунда) в залежності від умов тривалості запису.

Вейвлет аналіз

Вейвлет перетворення сигналів є узагальненням спектрального аналізу. Вейвлети - узагальнена назва сімейств математичних функцій певної форми, локальних в часі і по частот, в яких усі функції отримані з однієї базисної шляхом її зсуву і розтягів по часовій осі.

Вейвлети - локалізовані функції, які конструюються з одного материнського вейвлету $y'(t)$ шляхом операції зсуву по часу *(b)* та зміни часового масштабу *(a)*: $\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi(\frac{(t-b)}{a})$, (a,b) $\in$ R, $\psi(t) \in L^2(R)$, де множник $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ забезпечує незалежність норми функції від масштабуючого числа *'a'*. Неперервне (інтегральне) вейвлет- перетворення сигналу $s(t) \in L^2(R)$, яке застосовується для якісного частотно- часового аналізу, за змістом відповідає перетворенню Фур'є з зміною гармонічного базису $\exp(-j\omega t)$ на вейвлетний $\Psi(\frac{(t-b)}{a})$:

$$W(a,b)=(s(t), \Psi_{ab}(t))=\frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)(\frac{(t-b)}{a})dt,$$

(a,b) $\in$R,

Вейвлетний масштабно-часовий спектр *W(a,b)* на відміну від Фур'є - спектру є функцією двох аргументів: частотного масштабу вейвлета *'a'* (в одиницях, обернених частот), та часовому зміщенню вейвлета по сигналу *'b'* (в одиницях часу), при цьому параметри *'a'* та *'b'* можуть приймати будь-які значення у межах області визначення [26].

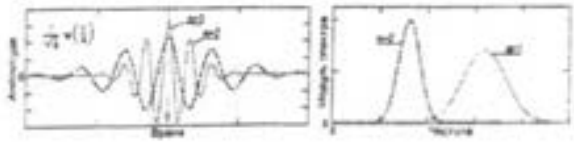


Рис.4 наведено приклади вейвлет функцій двох масштабів.

$$\Psi_{морле}(t,a,b)=\frac{-1.766}{\sqrt{\pi}} \frac{t-b}{a} exp\left[-(\frac{(t-b)}{a})^2\right] [23]$$

$$\Psi_{мексг}(t,a,b)=\frac{1.081}{\sqrt{\pi}}\left\{exp\left[-(\frac{(t-b)}{a})^2\right]-2(\frac{(t-b)}{a})^2 exp\left[-(\frac{(t-b)}{a})^2\right]\right\} [23]$$

Власний базис функціонального простору утворюється шляхом масштабних перетворень та зсувів породжуючого вейвлету $\psi(t)$: $\Psi(a,b,t)=|a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left[\frac{(t-b)}{a}\right]$, a,b$\in$ R, a$\neq$ 0 Вейвлет-перетворення дає сімейства спектрів масштабних коефіцієнтів *'a'* стиснення, розтягнення: $C(a,b)= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)|a|^{-\frac{1}{2}}\Psi\left[\frac{(t-b)}{a}\right]dt$. За рахунок зміни масштабу, вейвлети здатні виявляти відмінності на різних частотах, а за рахунок зсуву b проаналізувати властивості сигналу в різних точках на всьому досліджуваному часовому інтервалі. Спектр C(a,b) однорідного сигналу є поверхнею в тривимірному просторі. Способи візуалізації спектру можуть бути різними. Найбільш поширений спосіб - проекція на площину ab з ізолініями (ізорівнями), що дозволяє прослідкувати зміни коефіцієнтів на різних масштабах по часу, а також виявити картину локальних екстремумів цих поверхонь, так званий "скелет" структури процесу, що аналізується. При широкому діапазоні масштабів застосовуються логарифмічні координати.

Вибір конкретного виду та типу вейвлетів залежить від сигналу і задач аналізу. Вибір типу вейвлету вносить певну суб'єктивність дослідника в методику дослідження сигналів, але в той же час дає нові можливості при пошуку найбільш ефективних та оптимальних методів обробки сигналів та отримання з них необхідної інформації. Тому для вибору оптимального вейвлету необхідно провести тестування кривих різними типами вейвлетів [26].

Отримані результати та обговорення

Kyiv National Taras Shevchenko University

У роботі використовувались ізольовані білково-пігментні комплекси РЦ, виділені на кафедрі біофізики Московського державного університету з фотосинтетичних мембран клітин Rhodobacter sphaeroides за допомогою детергентів двох типів (холат натрія і Тритон 100). Для забезпечення довготривалої стабільності параметрів РЦ використовувався водний розчин 0,01 М натрій-фосфатного буфера с pH 7.2 і добавкою 0,05% детергенту. Вимірювальна кювета мала розміри 3 × 5 × 2,5 см при товщині стінок 1мм.

Досліджувався електронний транспорт при фотозбудженні і релаксації РЦ фотосинтетичних бактерій при різних режимах фотоактивації зразка: 1) при однаковій тривалості (90 с), але дискретно зміній інтенсивності фотозбудження (від 0,2 до 6,2 мВт/см^2), 2) при заданій інтенсивності фотозбуджуючого світла (I= 6,2 мВт/см^2) з різним часом фотоактивації - від 10 до 100 секунд.). Були отримані результати зміни поглинання розчинів з часом при освітленні за допомогою установки, що зображена на рис.7.

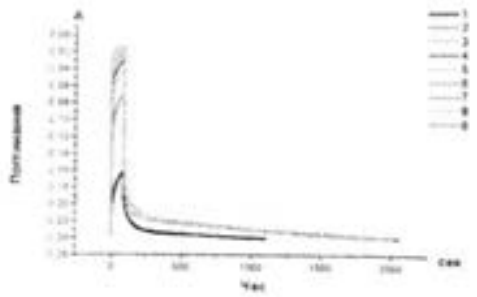


Рис.5 Кінетика зміни оптичної густини при різній інтенсивності: Інтенсивність I: 1-100, 2-500, 3-900, 4-1300, 5-1700, 6-2100, 7-2500, 8-2900 9-3270 у.о (700у.о.=20Вт/м^2), 90с.

Процедура фітування відбувається наступним чином. Показник k_i підбирається в межах від 0 до ∞ таким чином, щоб середньоквадратичне відхилення фітуючої кривої від експериментальної було мінімальним. Відповідним чином визначається значення вагового передекспоненційного множника. Знайдені значення фіксуються, і проводиться процедура знайдення показників другої експоненти. В, свою чергу, результати фітування для двох експонент використовуються для наступної. Процедура закінчується, коли на черговому кроці відхилення більше за мінімальне.

Програма, написана для виконання цієї процедури, сама визначає кількість експонент. В нашому випадку використовувалися 3 експоненти. Отримані дані приведені в таблицях 3.1-3.2 нижче.

Як видно з (Рис.5.) графіків кінетики просвітлення та потемніння розчину залежить від того з якою інтенсивністю ми світимо. При збільшенні інтенсивності кінетика відновлення йде повільніше, що може свідчити про вплив ефектів поляризації на процеси електроного внутрішньомолекулярного транспорту.

Результати, отримані для різних значень експозиції, були оброблені за спеціальною процедурою фітування. Коефіцієнт оптичного поглинання можна розкласти на певну кількість експонент за формулою:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-k_i t},$$

де A_i – ваговий множник, k_i – характерний показник експоненти в с$^{-1}$.

Таблиця 1

Кінетика відновлення: час – 90с, інтенсивність 0,2 - 6,2 мВт/см^2.

Інтенсивність	K1	Вага1	K2	Вага2	K3	Вага3
100	0.8224	0.8224	0.4457	0.026	0.3862	0.0026
500	0.9085	0.9085	0.557	0.0351	0.263	0.0012
900	0.9268	0.9268	0.5896	0.0331	0.2413	0.0012
1300	0.936	0.936	0.6017	0.0327	0.2295	0.0012
1700	0.936	0.936	0.6138	0.0315	0.2237	0.0013

Таблиця 2

Кінетика окислення: час – 90с, інтенсивність 0,2 - 6,2 мВт/см^2.

Інтенсивність	K1	Вага1	K2	Вага2	K3	Вага3
100	0.8995	0.1633	0.0276	0.2006	0.000101	0.6428
500	1.6019	0.5458	0.0288	0.2256	0.000101	0.2328

Kyiv National Taras Shevchenko University

900	2.3149	0.6781	0.0276	0.1658	0.000101	0.1202
1300	3.1201	0.7028	0.0271	0.128	0.000101	0.0707
1700	4.1638	0.6613	0.0279	0.1041	0.000101	0.044

З отриманих даних видно, що декремент першої експоненти на три порядки більший від декременту третьої експоненти. Тобто він відповідає за процеси, які відбуваються в РЦ з набагато більшими швидкостями. В зв'язку з цим, ми можемо розділити кінетику оптичного поглинання на дві частини: швидку та повільну. Швидка характеризує лише електронний транспорт, а повільна – електронний транспорт, що обумовлений повільними конформаційними змінами РЦ. Це також видно з рівнянь (24) і (25).

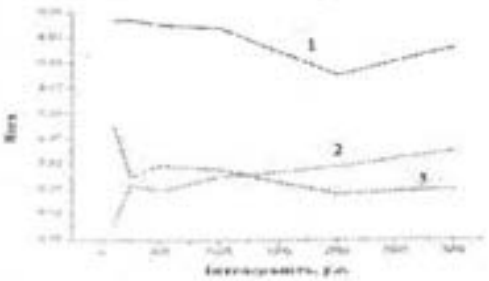


Рис.6 Співвідношення вагових множників експонент (1,2,3 відповідно вагові множники).

Тобто на графіку кінетика відновлення після фотозбудження з різною інтенсивністю світла. Вагові множники експонент відображають які процеси переважають за різних умов освітлення.

З Рис.6 видно, що ваговий множник першої експоненти після освітлення з більшою інтенсивністю трохи зменшується, а третьої навпаки – збільшується. Тобто електронний транспорт, що зумовлений конформаційними змінами переважає після фотозбудження світлом з більшою інтенсивністю і відповідно кількість РЦ, що піддались конформаційним змінам зростає зі збільшенням інтенсивності .

Як видно з Рис.6. кінетика просвітлення та потемніння розчину залежить від того скільки часу ми світимо. Видно, що зі збільшенням часу експозиції відновлення поглинання відбувається повільніше. Це можна пояснити тим, що при зростанні тривалості освітлення електрон довше знаходиться на Q_B, і йому стає все складніше повернутися на донор.

Результати, отримані для різних значень часу експозиції, також були оброблені за спеціальною процедурою фітування. Результати отриманих даних наведені в таблицях 3-4.

Таблиця 3

Кінетика окислення: час 10 – 100с , інтенсивність 6,2 мВт/см^2.

Час,с	K1.	Bara1	K2	Bara2	K3	Bara3
10	30.5	0.7287	2.8814	0.1113	0.000101	0.0717
20	30.2	0.725	2.6875	0.1144	0.0103	0.0619
30	30.5	0.7393	2.7144	0.1069	0.0157	0.0629
40	30.2	0.7437	2.5826	0.097	0.0152	0.0694
50	30.8	0.7426	2.7144	0.0997	0.0157	0.0724

Таблиця 4

Кінетика відновлення: час 10 – 100с , інтенсивність 6,2 мВт/см^2.

Час, с	K1.	Bara1	K2	Bara2	K3	Bara3
10	0.44	1.3814	0.0061	0.0537	0	0
20	0.41	1.2943	0.0044	0.1004	0.000101	0.0028
30	0.41	1.2044	0.0108	0.1096	0.0017	0.0569
40	0.4	1.1399	0.0148	0.1244	0.0016	0.0824
50	0.4	1.0938	0.018	0.1324	0.0016	0.1075

Ваговий множник першої експоненти (Рис.7) після тривалішого освітлення зменшується, а третьої навпаки – збільшується. Отже, кількість РЦ, що зазнають конформаційних змін зростає при збільшенні часу фотозбудження. Тобто переважає електронний транспорт, що зумовлений конформаційними змінами.

Kyiv National Taras Shevchenko University

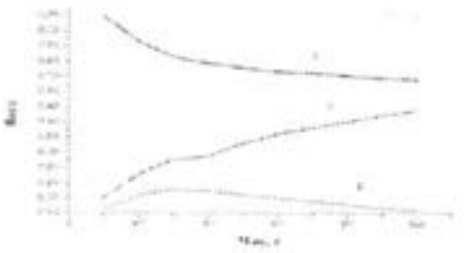
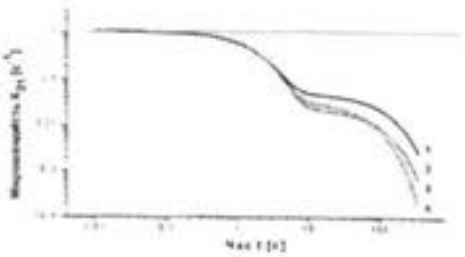


Рис.7 Співвідношення вагових множників експонент (1,2,3 ваговий множник відповідно) кінетики відновлення після різної тривалості фотозбудження.

Розглянемо кінетику переходу електрону з донора на акцептор і з акцептора на донор. Тобто графіки залежності k_{12} і k_{21} (мікрошвидкостей



переходу електрона).

Рис.8 Кінетика зміни мікрошвидкості переходу електрона з акцептора на донор в залежності від часу. Кольорами позначено різні інтенсивності засвітки 1-100, 2-1200, 3-1300, 4-2900 у.о. (700у.о.=20Вт/м^2).

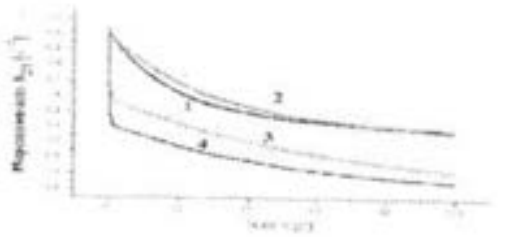


Рис.9 Кінетика мікрошвидкостей при окисленні при різних тривалостях освітлення, кольорами позначено різні інтенсивності 1-100, 2-1200, 3-1300, 4-2900 у.о. (700у.о.=20Вт/м^2). Червоний графік - просвітлення.

З Рис.8 і Рис.9 можна побачити, що з збільшенням інтенсивності світла швидкість повернення електрона з акцептора на донор збільшується не дивлячись на те, що з збільшенням інтенсивності швидкість релаксації всієї системи зменшується.

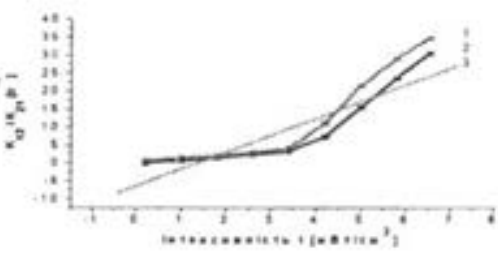


Рис.10 Графік залежності 1-k_{12}, 2-k_{21} від інтенсивності освітлення. 3-лінійна апроксимація, 1 є відфітованою кривою.

З Рис.9 бачимо (графік 3) пряму, котра була б коли $k_{12}=al$, тобто булоб чтале, але оскільки ми одержали криву, то це свідчить, що коефіцієнт не сталий і потрібно переходити до моделей з мультистанами. Співпадіння 1 і 2 кривих (крива 2 відфітована), дає можливість приписати фізичний зміст коефіцієнту k_{12}.

Коефіцієнти при фітуванні (які були занесені в таблиці 1-4) мають наступний фізичний зміст К1-відображає кінетику електронного транспорту, коли структурних змін немає, коефіцієнти К2 і К3 - відображають структурні зміни і повертаємось до рішення з сталими коефіцієнтами.

На представлених графіках зміни оптичної густини (Рис.5) ми виділяють дві складові швидку та повільну. Дослідження показують, що повільна пов'язана з конформаційними змінами в білкових молекулах при розділенні зарядів. З аналізу релаксаційної кривої можна оцінити зміну структури параметра, який для даного об'єкта є різницею енергетичних рівнів. Так як електрон попадає на бактеріофеофетін, а потім за 10^{-10}с. на хінон, а повільна компонента як правило складає 1-100 с, то вона характеризує час переходу електрона з хінона назад. Цей час визначається різницею рівнів між Q_a-Q_b і закидання електрона здійснюється термоактивним процесом. Це відбувається тому, що ми працюємо з фотосинтетичними центрами, які отримані з нативних (живих) клітин в процесі їх детергування. Коли повернення бактеріофіла у вихідне положення можливе тільки при поверненні електрона з хінону на бактеріохлорофіл. Іншого шляху просто немає. В нативному стані електрон надходить з цитохрому. Ця особливість дещо спрощує схему дослідження і виключає необхідність

Kyiv National Taras Shevchenko University

дослідження інших процесів електронної взаємодії.

Деформація протеїну розглядається як зміна різниці енергетичних рівнів між Q_a-Q_b. Цій величині приписується роль структурної змінної. Вибір такої позиції зумовлений і тим, що нам і досі не вдається зафіксувати розміщення функціональних груп в процесі електронного транспорту. При проведенні досліджень була підтверджена залежність густини оптичного поглинання від часу експонування та інтенсивності збуджуючого світла. Також була відмічена властивість чіткого контролю початкового стану розчину. Це обумовлено наявністю пам'яті розчину на світлове збудження. Справа в тому, що при поверненні електрона з бактеріохлорофілу спостерігається залишкова різниця в рівнях.

Повільна динаміка зміни поглинання розчину при його освітленні може бути зв'язана з конформаційними змінами, що проходять в протеїні при електронному транспорті. З Рис.9-11 ми бачимо явний вплив на мікрошвидкості переходу електрона між Q_a та Q_b інтенсивності засвітки на часу експозиції.

Вейвлет аналіз отриманих результатів

Для перевірки фітованих кривих і для аналізу характерних особливостей кривих кінетики K_{21} було застосовано вейвлет аналіз. У результаті проведеного аналізу було виявлено, що для дослідження експериментальних кривих релаксації РЦ найбільш підходить комплексний Морле.

$$\Psi_{Morlet}(t,a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\exp\left(-iz(\frac{t-b}{a})\right)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\exp\left(-(\frac{t-b}{a})^2\varepsilon\right)\right] [26]$$

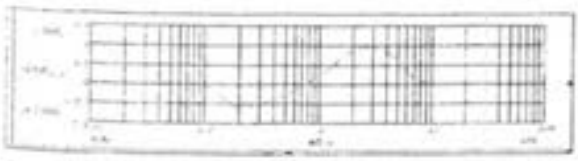


Рис.11 Вейвлет-спектр Morlet декрементів тестових кривих при відновленні.

З Рис.11. ми можемо бачити, що якщо закон декремента кривої показав, що наша крива має "сходинки", що відповідають змінам функціональної залежності декремента цієї кривої. Вейвлет спектр у місцях зміни залежності декремента має чітко виражені піки.

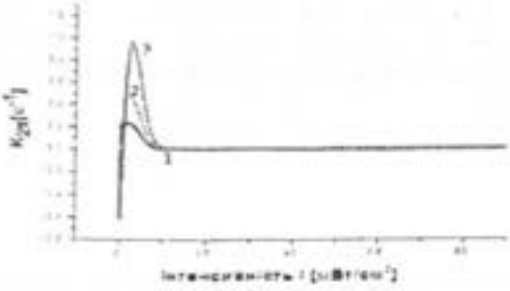


Рис.12 Вейвлет-пектр релаксаційних кривих РЦ. Інтенсивність світла I 1-900, 2-1300, 3-1700 у.о. (700у.о.=20Вт/м^2).

Аналіз експериментальних кривих (Рис.12) показує, що існує певна часова залежність k(t), так як вейвлетні спектри релаксаційних кривих мають виражені особливості. Вейвлет аналіз виявляє особливості експериментальних кривих релаксації, які залежать від інтенсивності та часу експозиції. Він показує що відновлення і поглинання розчинів РЦ є нестаціонарним у часі процесом. Тобто, можемо зробити припущення, що експоненти в релаксаційних кривих не діють одночасно, а включаються почергово. Пік на вейвлетних спектрах говорить про те, що спочатку після виключення світла існує швидкий канал релаксації, але він швидко вигорає, тобто він є закінченням дії швидкого каналу. Далі вмикається повільний канал релаксації.

Якісні відмінності вейвлетних спектрів залежно від інтенсивності свідчать про якісні зміни стану фотоцентрів.

Висновки

1. Кінетика мікрошвидкостей переходу електрону з донора на акцептор і з акцептора на донор розчинів РЦ *Rhodobacter sphaeroides*, залежить від часу та інтенсивності освітлення. При збільшенні часу чи інтенсивності процеси відновлення йдуть повільніше, що може свідчити про вплив ефектів поляризації на процеси електронного внутрішньомолекулярного транспорту.

2. Отримані залежності оптичного поглинання та кількісні параметри кінетики окислення реакційних центрів при різних режимах фото збудження дозволили розділити кінетику оптичного поглинання на дві частини: швидку та повільну. Швидка характеризує лише електронний транспорт, а повільна – електронний транспорт та повільні конформаційні зміни в РЦ.

Kyiv National Taras Shevchenko University

3. Вейвлет аналіз виявляє особливості експериментальних кривих релаксації, які залежать від інтенсивності та часу експозиції. Він показує що відновлення і поглинання розчинів РЦ є нестаціонарним у часі процесом. Тобто, можемо зробити припущення, що експоненти в релаксаційних кривих не діють одночасно, а включаються почергово. Якісні відмінності вейвлетних спектрів залежно від часу експозиції свідчать про якісні зміни стану фотоцентрів.

4. При виключенні збуджуючого світла значення оптичного поглинання розчину повертається у вихідний стан, що доводить те, що фотоіндуковані зміни в молекулярному комплексі РЦ – оборотні.

5. Якісне співпадіння кінетики окисления з фітованими спектрами відновлення РЦ при їх освітленні, підтверджує зв'язок між електронним транспортом та конформаційними змінами в РЦ

Список літератури

1. Шайтан К.В. Конформационная подвижность белка с точки зрения физики // Соросовский образовательный журнал – 1999. - №5. - С. 8 – 13.
2. Рубин А.Б. Биофизика // Москва,Высш. школа-1997.-Т.1.- 320С.; Т.2.-303С.
3. Alden R.G., Parson W.W., Chu Z.T., Warshel A.W. The reaction center of photosynthetic bacteria: structure and dynamics // M.-E. Michel-Beyerle – 2005. - P. 105—115.
4. Шайтан К.В. Молекулярна біологія // Москва-2002.-Т. 26- С. 264-284; 2004. - Т. 28-С. 670-678.
5. Петров Э. Г. Фізика перенесення зарядів в біосистемах // Київ, Наукова думка – 2004. - 245 С.
6. Deisenhofer J., Epp O., Miki K., Huber R. Structure of the protein subunits in the photosynthetic reaction center of Rhodopseudomonas viridis at 3Å resolution // Nature – 2005. – Vol.318 - P. 618–624.
7. Gousha.A., Kpoustina M., Kharkyanen. V. Dynmics Process of Photosynthetic Reaction Centers // J. Phys. Chem. – 2007.- № 38 – P.7612 – 7619.
8. Olson J.M., Trornber J.P. Membrane Proteins in Energy Transduction // New York: Marcel Dekker. - 1999. - P. 279-340.
9. Шайтан К.В. Каким образом электрон движется по белку // Соросовский образовательный журнал – 1999 - №3- С. 55 – 62.
10. Барабаш Ю.М., Заболотный М.А., Соколов Н.И., Харкянен В.Н. Исследование фотоиндуцированных изменений в протеине реакционных центров бактерий RB Sphaeroides штамм-26 методом голографической интерферометрии // Київ: Сучасні інформаційні та енергозберігаючі технології, SIET9-OS - 2001. - Вип.9. - С. 388-391.
11. Гроберг А.Ю., Хохлов А.Р. Физика в мире полимеров // Москва: Наука - 1999. - 206 С.
12. W.Schuman, M.Dubas Holographic Interferometry // Springer-Verlag Berlin Heidelberg Nev York – 1999. - 189 P.
13. Gousha A. O., Kharkyanen V. N., Scott G. N., Alfred R., Holzwarth A. R. Self- regulation phenomena in bacterial reaction centers // Biophysical Journal. - 2000. - P.1237-1252.
14. Мастеров В.Ф. Физические свойства фуллеренов // Соросовский образовательный журнал – 2003. - №1 – С.92 – 99.
16. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены // Успехи физических наук, Москва – 2002. – Т.293, №2 - С.33-60.
17. Kratschmer W., Fostiropoulos K., Huffman D. Dusty Objects in the Universe // Phys. Rev. Letters - 2002. - P. 89.
18. Demchenko A.P. A Model for Unidirectional Photoinduced Charge Separation // Physics of the Alive – 2006. - Vol.4 ,№1 – P.73 – 82.
19. Coxd.M. et al . Fullerenes // Washington: Am. Chem. Soc. Publ., - 2002.- Vol.481 - P. 117.
20. Ajie H. et al. Trapping conformational intermediate states in the reaction center protein from photosynthetic bacteria / / J. Phys. Chem. V. 94. P. 8630
21. Вест Ч. Голографическая интерферометрия // Москва - 1998 г.– 504С.
22. Кукушкин А.К., Тихонов А.Н. Лекции по биофизике фотосинтеза // М.: МГУ - 1999. - 320 С.
23. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. - 1996. - Т.166, № 11. -С. 1145-1170.
24. *Чуи К* Введение в вэйвлеты. — М.: Мир, 2001.
25. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике — Изд. 2-е перераб. и доп. — М.: СОЛОН- Пресс, 2004. - 400 с.
26. Барабаш Ю.М., Заболотный М.А., Серденко Т.В., Кшнякіна С.І. Застосування вейвлет-перетворень до вивчення кінетики електронного транспорту в бактеріальних реакційних центрах// Вісник Київського університету,серія: фізико-математичні науки УДК 577.32 - 2009. - Вип.9. - С. 388-391.

Надійшло до редакції 13.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 535.34; 535.37

Єшенко О.А.*, д.ф.м.н., доц.

Просторова та поляризаційна анізотропія збудження поверхневих плазмонних поляритонів у масивах паралельних металевих нанодротів

Досліджено спектри екстинкції масиву паралельних нанодротів Au діаметром 27 нм і довжиною 9 мкм в Al_2O_3-матриці для різних кутів падіння θ. У спектрах спостерігалися дві смуги, зумовлені збудженням поперечної та поздовжньої (поляритонної) поверхневих плазмонних мод нанодроту. Виявлено, що найбільш ефективне збудження поверхневих плазмонних поляритонів має місце при $\theta = 35^0$. Показано, що кутові залежності спектрального положення та півширини смуги екстинкції, зумовленої збудженням поздовжньої моди, є немонотонними з екстремумами при $\theta = 35^0$. Отримані кутові залежності інтерпретовано як результат збудження аксіальних та неаксіальних поверхневих плазмон-поляритонних власних мод нанодроту, який функціонує як плазмонний резонатор.

Ключові слова: поверхневі плазмонні поляритони, нанодроти золота, спектри екстинкції, плазмонний резонатор.

O. A. Yeshchenko*, Dr. Sci., Assoc. Prof.

Spatial and polarization anizotropy of surface plasmon polaritons excitation in array of parallel metal nanowires

Extinction spectra of the array of parallel Au nanowires of diameter 27 nm and length 9 μm in alumina were studied at various incidence angles θ. Two bands originating from the transversal and longitudinal (polariton) surface plasmon modes of the nanowire were observed in the spectra. It was revealed that at $\theta = 35^0$ the most efficient excitation of surface plasmon polaritons occurs. The angle dependences of the wavelength and bandwidth of the extinction band of longitudinal mode were obtained to be non-monotonic with maxima at $\theta = 35^0$. These dependences were rationalized as the result of excitation of axial and unaxial surface plasmon polariton eigenmodes in the nanowire acting as plasmonic cavity.

Key words: surface plasmon polaritons, gold nanowires, extinction spectra, plasmonic cavity.

*E-mail: yes@univ.kiev.ua

Вступ

Масиви паралельних металевих наноциліндрів та нанодротів характеризуються високою оптичною анізотропією, що робить оптичні характеристики таких масивів високочутливими до кута падіння та поляризації збуджуючого світла [1–7]. Концентрація поля поверхневими плазмонами на нанорозмірних масштабах приводить до підсилення локального поля, що дозволяє керувати процесами взаємодії світла з речовиною та суттєво посилювати нелінійнооптичні процеси поблизу поверхні металевих наноструктур. Слід зауважити, що все зростаюча швидкість і зменшення розмірів електронних схем зустрінуть принципові обмеження в найближчому майбутньому. Інтеграція електроніки з оптикою є перспективною, оскільки оптичні компоненти можуть забезпечити дуже високу пропускну здатність. Проте, просте зменшення розмірів звичайних оптичних елементів до нанометрового масштабу не є можливим внаслідок існування дифракційної межі, яка перешкоджає створенню реальних нанорозмірних оптичних елементів.

Як відомо, на границях розділу метал–діелектрик можуть збуджуватись і поширюватись вздовж них поверхневі електромагнітні хвилі, які пов'язані з колективними коливаннями вільних електронів у металі, так званими поверхневими плазмонними поляритонами (ППП). Збудження ППП світлом, їх направлене поширення вздовж границі розділу і перетворення їх назад у світло є процесами, які характеризуються великим інтересом дослідників в сенсі їх використання для передачі та обробки світлових сигналів на нанорозмірному рівні. Проте, високомініатюрні оптичні пристрої вимагають латерального обмеження світловодних структур [8,9]. Для виконання цієї вимоги були запропоновані кілька

© О.А. Єшенко, 2012

Представлено: д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Kyiv National Taras Shevchenko University

концепцій. Новіков і Марадудін [10] запропонували канальні поляритони, тобто ППП, локалізовані у вузькій канавці на плоскій металевій поверхні. Ебессен та ін. [11] реалізували ідею пропускання світла через субхвильові (менші, ніж довжина хвилі світла) отвори в металевих плівках для збудження ППП та спостерігали емісію світлового пучка з малою кутовою розбіжністю з нанорозмірних щілин та циліндричних отворів [12]. Направлене поширення світлових хвиль вздовж лінійного ланцюжка металевих наночастинок було запропоновано в [13,14], використання золотої стрічки як хвилевода для ППП доповідалося в [15], а можливість направленого поширення світла, необмеженого дифракційною межею, полем ППП в золотих нанодротах була показана в [16–18]. Оскільки для всіх цих систем на основі використання ППП зменшення перерізу хвилеводу не обмежене половиною довжини хвилі світла, вони являють собою багатообіцяючу альтернативу діелектричним оптичним хвилеводам. Таким чином, існує значний інтерес до фундаментальних властивостей збудження та поширення ППП в нанорозмірних металевих структурах, наприклад, в масивах паралельних металевих нанодротів.

У даній статті представлено результати досліджень залежності оптичних спектрів екстинкції масиву паралельних нанодротів золота (діаметр – 27 нм, довжина – 9 мкм) в Al_2O_3-матриці від кута падіння та поляризації збуджуючого світла. Отримані залежності для смуги, пов'язаної з поздовжньою плазмонною модою, свідчать, що ППП є власними модами золотих нанодротів, які працюють як плазмонні резонатори, в яких можливе збудження як аксіальних, так і неаксіальних плазмонних мод в залежності від кута між напрямком збуджуючого світлового пучка та віссю нанодротів.

Зразки та геометрія експерименту

Досліджувані нанокомпозитні зразки являють собою паралельні золоті нанодроти, інкорпоровані в Al_2O_3-матрицю. Зразки було виготовлено методом анодного травлення Al_2O_3, при якому утворювались паралельні нанорозмірні в поперечному перерізі пори, в які потім шляхом вакуумного напилення вводилося золото. Було виконано СЕМ досліджуваних зразків за допомогою скануючого електронного мікроскопу JEOL JSM-6700F. СЕМ-зображення було отримано з поперечного сколу зразків. Одне з отриманих типових зображень подано на рис. 1(а). Результати СЕМ підтверджують утворення в Al_2O_3 системи строго паралельних (орієнтованих) нанодротів Au. Осі нанодротів Au є перпендикулярними до поверхні зразка. Діаметр нанодротів – 27 нм, їх середня довжина – 9 мкм, відстань між нанодротами – 80 нм.

Рис. 1(б) демонструє геометрію експериментів з вимірювання спектрів екстинкції досліджуваних нанодротів золота в Al_2O_3-матриці. Збуджуючий пучок поляризований лінійно з кутом поляризації ϕ між вектором напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ та площиною падіння, що містить падаючий, відбитий, заломлений промені та нормаль до поверхні зразка (площина рисунку 1(б)). Зауважимо, що нормаль до поверхні паралельна до осі дротів $\mathbf{z}$, тобто кут падіння θ рівний куту між хвильовим вектором падаючого пучка $\mathbf{q}$ у повітрі та віссю нанодроту $\mathbf{z}$. На рис. 1 (б) $\mathbf{E}_S$ – S-компонента напруженості електричного поля падаючого пучка ($\phi = 90^0$), $\mathbf{E}_{P\parallel}$ і $\mathbf{E}_{P\perp}$ – проекції P-компоненти ($\phi = 0^0$) $\mathbf{E}$ на вісь і діаметр дроту відповідно.

Спектри екстинкції отримувались зі спектрів пропускання $T(\lambda)$ та відбивання $R(\lambda)$ як $-\ln\left[T(\lambda)/(1-R(\lambda))\right]$, тобто екстинкція падаючого світла була зумовлена поглинанням та розсіянням світла нанодротами золота. Галогенна лампочка розжарювання використовувалася як джерело світла при вимірюванні спектрів пропускання та відбивання в діапазоні 370 – 1200 нм. При спектральних вимірюваннях використовувався одинарний гратковий спектрометр МДР–3.

Кутові залежності спектрів екстинкції нанодротів *Au*: експериментальні результати

Спектри екстинкції масиву паралельних нанодротів золота в Al_2O_3-матриці були досліджені в залежності від кута поляризації ϕ та кута падіння θ збуджуючого пучка. Спектри були виміряні при кімнатній температурі. Виміряні спектри екстинкції подано на рис. 2 та 3. Спектри містять дві плазмонні смуги позначені як T (високоенергетична смуга) та L (низькоенергетична смуга). Як відомо, спектри екстинкції металевих наноциліндрів та нанодротів зумовлені збудженням в них поперечних та поздовжніх поверхневих плазмо-

Kyiv National Taras Shevchenko University

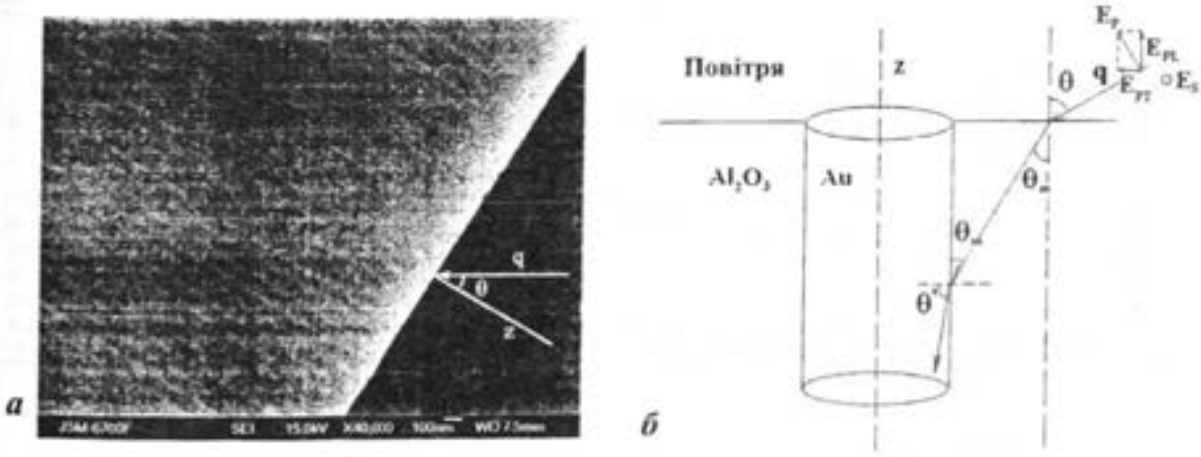


Рис. 1. (а) – СЕМ-зображення масиву паралельних нанодротів *Au* в Al_2O_3-матриці. Діаметр нанодроту – 27 нм, середня довжина – 9 мкм, відстань між дротами – 80 нм. (б) – геометрія оптичних експериментів. Осі нанодротів перпендикулярні до поверхні зразка. **z** – вісь нанодроту, **q** – хвильовий вектор збуджуючого світлового пучка у повітрі, θ – кут падіння (рівний куту між збуджуючим пучком і віссю дроту), $\mathbf{E}_S$ – S-компонента напруженості електричного поля падаючої пучка, $\mathbf{E}_{PL}$ і $\mathbf{E}_{PT}$ – проекції P-компоненти **E** на вісь і діаметр нанодроту відповідно.

нів (ПП) та/або поверхневих плазмонних поляритонів (ППП) [1–3]. Поперечні ПП – колективні коливання вільних електронів, перпендикулярні до осі нанодроту (наноциліндру), а поздовжні ПП – коливання вздовж осі. У видовжених наночастинок, до яких належать нанодроти та наноциліндри, частота поперечної ПП-моди (Т-моди) є вищою, ніж частота поздовжньої L-моди. Зауважимо, що в S-поляризації ($\phi = 90^0$) вектор **E** збуджуючого світла перпендикулярний до осі нанодроту. Тому, в S-поляризації поздовжня мода не збуджується. При зменшенні кута ϕ проекція **E** на вісь дроту збільшується як $\cos^2\phi$, а тому ефективність збудження L-моди відповідно збільшується. Отже, інтенсивність низькоенергетичної смуги поздовжніх ПП має бути рівною нулю в S-поляризації та має зростати при зменшенні ϕ, досягаючи максимуму в P-поляризації. У той же час, проекція **E** на радіус дроту є ненульовою при будь-якій поляризації. Тому, високоенергетична смуга поперечних ПП має спостерігатися при будь-якій поляризації. Таким чином, з рис. 2, можна зробити висновок, що низькоенергетична L-смуга пов'язана з поздовжньою плазмонною L-модою. Відповідно,

високоенергетична Т-смуга пов'язана з поперечною плазмонною Т-модою.

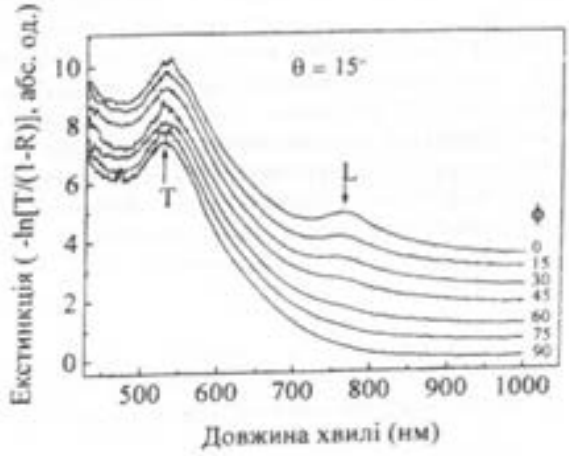


Рис. 2. Спектри екстинкції масиву паралельних нанодротів *Au* в Al_2O_3-матриці в залежності від кута поляризації ϕ збуджуючого світла. Кут падіння $\theta = 15^0$.

Kyiv National Taras Shevchenko University

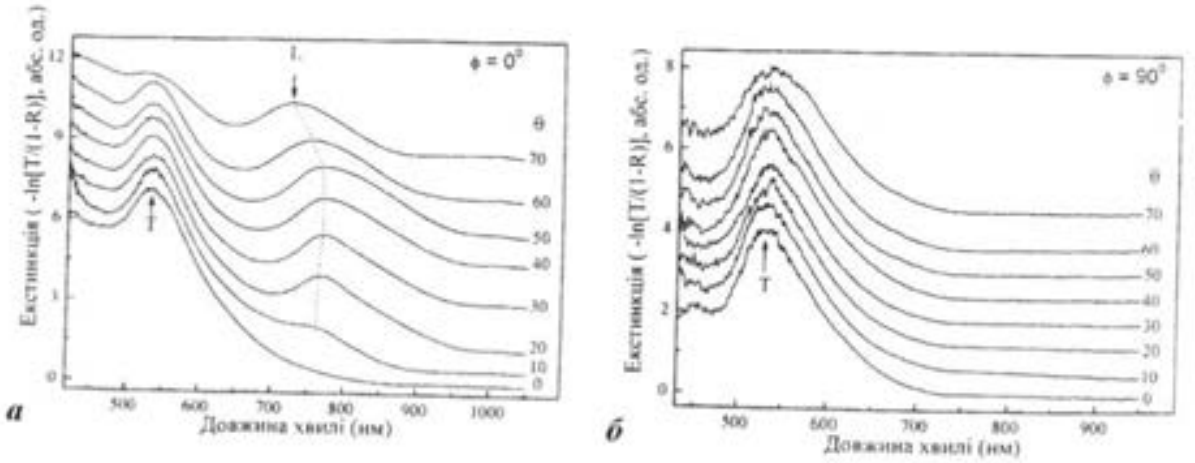


Рис. 3. Спектри екстинкції масиву паралельних нанодротів *Au* в Al_2O_3-матриці в залежності від кута падіння збуджуючого світла (кут між хвильовим вектором світла в повітрі **q** та віссю дроту **z**). (*а*) – спектри в Р-поляризації та (б) – в S-поляризації.

Поведінку спектрів екстинкції золотих нанодротів в залежності від кута падіння θ, що дорівнює куту між хвильовим вектором світла в повітрі та віссю нанодротів, демонструє рис. 3. Як було сказано вище, L-смуга поздовжньої ПП-моди відсутня в S-поляризації, у спектрі при цьому присутня тільки Т-смуга поперечної ПП-моди (рис. 3(б)). У Р-поляризації в спектрі присутні обидві L- і Т-смуги (рис. 3(а)). L-смуга відсутня в Р-поляризації при $\theta = 0^0$, оскільки при цьому збуджуючий пучок поширюється вздовж осі нанодроту, і проекція **E** на вісь дроту дорівнює нулю, а отже поздовжня мода не збуджується. При збільшенні кута θ проекція **E** на вісь дроту збільшується і, відповідно, ефективність збудження L-моди збільшується, що приводить до збільшення інтенсивності L-смуги, що й спостерігається експериментально (рис. 3(а)). Розклад повного спектру екстинкції на три базисні спектральні лоренцівські контури (L- та Т-смуги та високоенергетична смуга, пов'язана з міжзонними переходами у золоті) дозволив нам отримати залежності спектральних характеристик L- та Т-смуг (інтегральної інтенсивності, положення та півширини) від кута θ. Отримані кутові залежності зображено на рис. 4.

Видно, що в S-поляризації інтенсивність поперечної Т-смуги не залежить від θ. Це має місце, оскільки в такій поляризації вектор **E** збуджуючого світла перпендикулярний до осі нанодроту, а отже проекція **E** на радіус дроту є постійною при зміні θ. З іншого боку, в Р-поляризації інтенсивність Т-смуги суттєво зменшується при збільшенні θ. Оскільки проекція **E** на радіус дроту: $E_T = E(\sin\phi + \cos\theta\cos\phi)$, то інтенсивність поперечної Т-смуги має характеризуватися наступною кутовою залежністю $I_T \propto (\sin\phi + \cos\theta\cos\phi)^2$, що в Р-поляризації дає $I_T \propto \cos^2\theta$. Така залежність і спостерігається експериментально (рис. 4(а)). У Р-поляризації експериментальна залежність інтенсивності поздовжньої L-смуги від θ є немонотонною (рис. 4(а)). $I_L(\theta)$ різко зростає при малих θ ($\theta \le 30^0$), досягає максимуму при θ = 35° – 40°, а далі зменшується при вищих θ. Проте, виходячи з очевидної залежності $I_L \propto (\sin\theta\cos\phi)^2$, що працює для наноциліндрів та коротких ($l < \lambda/2$) нанодротів, у Р-поляризації ($\phi = 0^0$) для інтенсивності L-смуги має спостерігатися монотонне зростання при збільшенні θ за законом $I_L \propto \sin^2\theta$. Таким чином, має місце очевидна розбіжність між експериментальним результатом та теоретичними міркуваннями, звичними для наноциліндрів та коротких нанодротів. Нижче буде показано, що така розбіжність є наслідком сильної кутової залежності ефективності збудження ПП поляритонів у нанодроті. Цей ефект обговорено в наступному параграфі.

Kyiv National Taras Shevchenko University

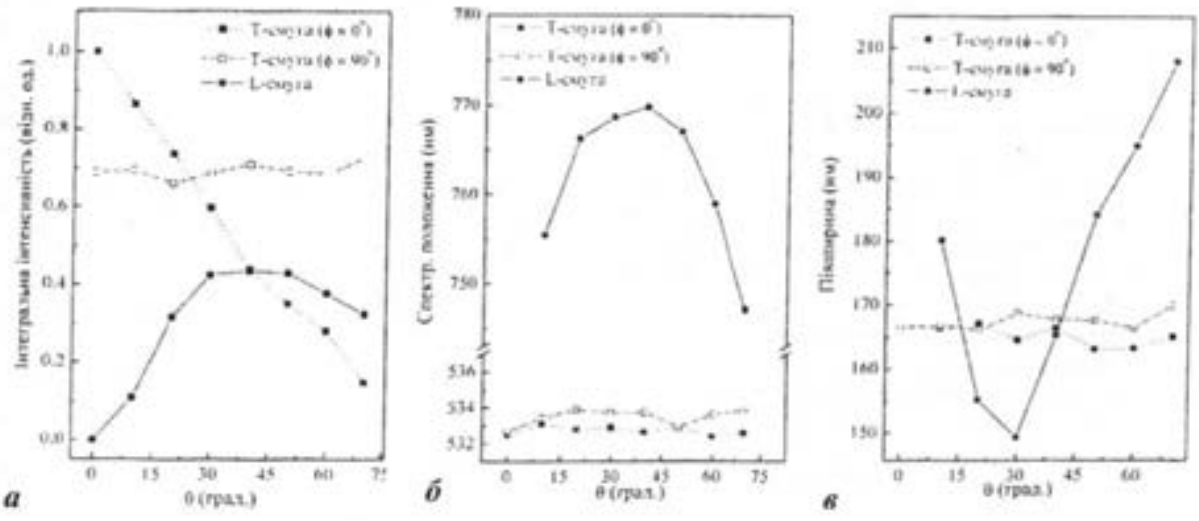


Рис. 4. Залежності спектральних характеристик L-смуги поздовжньої та T-смуги поперечної ПП-мод від кута θ. (а) – залежності інтегральних інтенсивностей смуг, (б) – спектральних положень смуг, (в) – півширин смуг.

Експериментальні залежності спектрального положення плазмонних T та L-смуг від кута θ представлено на рис. 4(б). Положення поперечної T-смуги не залежить від θ в обох S та P-поляризаціях, що є цілком очікуваним. У той же час, L-смуга демонструє суттєвий та P-поляризаціях, що є цілком очікуваним. У той же час, L-смуга демонструє суттєвий немонотонний зсув при зміні θ. Дійсно, при малих кутах $0 < \theta < 40^\circ$ вона демонструє червоний зсув при збільшенні θ, а при великих кутах $\theta > 40^\circ$ спостерігається блакитний зсув (рис. 3(а), 4(б)). Такий немонотонний кутовий зсув смуги поздовжньої ПП-моди є досить цікавим та незвичним, якщо порівнювати з результатами інших груп дослідників [2,3,5], які спостерігали тільки блакитний зсув смуги L-моди в металевих наноциліндрах та нанодротах при збільшенні θ. Характер залежностей півширини T та L-смуг від кута θ є подібним до залежностей спектрального положення цих смуг. Дійсно, півширина поперечної T-смуги не залежить від θ в обох P та S-поляризаціях, що є цілком очікуваним. У той же час, півширина поздовжньої L-смуги демонструє немонотонну поведінку в залежності від θ. При менших кутах ($0 < \theta < 30^\circ$) ця смуга звужується при збільшенні θ, а при більших кутах – розширюється. Аналогічно залежності спектрального положення L-смуги, спостережувана немонотонна кутова залежність півширини цієї смуги є також досить незвичною, якщо порівнювати її з результатами інших дослідників [2,3,5], які спостерігали тільки розширення смуги плазмонних L-моди зі збільшенням θ в металевих наноциліндрах та нанодротах. Ми обговорюємо причину немонотонних кутових залежностей положення та півширини L-смуги в наступному розділі.

Поздовжні поверхневі плазмонні поляритони в нанодротах *Au*: обговорення

Добре відомо, що в металевих наноциліндрах при збільшенні відношення їх довжини до діаметру частота дипольної поздовжньої ПП-моди зменшується, що приводить до сильного червоного зсуву відповідної смуги екстинкції, а частота поперечної моди залежить від цього відношення набагато слабше [1,3,19]. Для досліджених нами золотих нанодротів (діаметр $d = 27$ нм, середня довжина $L = 9$ мкм) енергія дипольної поздовжньої ПП-моди має бути в далекому ІЧ-діапазоні (близько 11 мкм). У той же час, в довгих порівняно з довжиною хвилі збуджуючого світла металевих нанодротах ($L \geq \lambda$) поздовжні ПП-моди уже не мають характеру локалізованих поверхневих плазмонів таких, як в наночастинках малих порівняно з довжиною хвилі ($d << \lambda$). Поздовжні моди в

Kyiv National Taras Shevchenko University

довгих нанодротах мають характер поверхневих плазмонних поляритонів (ППП), що поширюються вздовж осі нанодроту [2,6–9,20]. Частоти поздовжніх ППП знаходяться в оптичному та близькому ІЧ діапазонах, будучи дещо нижчими ніж частоти локалізованих поперечних ПП-мод. Ці ППП являють собою поверхневі електромагнітні хвилі, локалізовані поблизу поверхні нанодроту. Поширюючись вздовж осі нанодроту, ППП можуть відбиватися від його кінців. Накладання прямої та відбитої поляритонної хвиль приводитиме до утворення поляритонних стоячих хвиль в металевому дроті, який при цьому діятиме як плазмонних резонатор [9]. Таким чином, ППП-стоячі хвилі мають бути власними модами такого нанодроту – резонатора. Для таких власних мод має виконуватись умова [5]

$$k_z = \frac{m\pi + \psi}{L}, \qquad (1)$$

де k_z – хвильовий вектор стоячої хвилі, L – довжина нанодроту, ψ – стрибок фази хвилі при її відбиванні від кінця нанодроту, m – ціле число. Таким чином, ППП у металевих нанодротах мають описуватися теорією електромагнітних хвиль в оптичних резонаторах. Проаналізуємо наші кутові експериментальні залежності спектрів екстинкції нанодротів *Au* в рамках теоретичної моделі стоячих ППП-хвиль, що існують в нанодроті – резонаторі.

Падаючи на поверхню зразка під кутом θ, що також дорівнює куту між хвильовим вектором фотона у повітрі та віссю нанодроту, світловий пучок проходить в Al_2O_3-матрицю під кутом заломлення $\theta_m = \arcsin(\sin\theta/n_m)$, де n_m – показник заломлення матриці (рис. 1(б)). Потім, падаючи на границю розділу матриця–золото, світловий пучок збуджує ППП, що поширюється вздовж осі нанодроту (вісь **z**). Відомо (див., наприклад [21]), що ефективність перетворення фотона в поверхневий поляритон, тобто ефективність збудження поляритона, суттєво залежить від кута падіння фотона на границю розділу діелектрична матриця – метал. Існує певне значення кута падіння, при якому ефективність набуває максимального значення. При куті найбільш ефективного збудження поверхневого поляритона (так званому куті псевдо-Брюстера) модуль відношення амплітудних коефіцієнтів відбивання у S та P-поляризаціях $|r_S/r_P|$ набуває максимального значення, оскільки збуджений поверхневий поляритон є ТМ-хвилею, тобто хвилею, що має P-поляризацію.

Розглянемо заломлення збуджуючої світлової хвилі, що падає з матриці на бокову поверхню золотого нанодроту відповідно до теорії, представленої в [21]. Оскільки золото є середовищем з загасанням, то кут заломлення θ' в золоті буде комплексним:

$$\theta' = \theta'_1 + i\theta'_2 = \arcsin\left[\frac{\sin\theta_m}{\tilde{N}}\right], \qquad (2)$$

де $\tilde{N} = \tilde{n}/n_m$ – комплексний відносний показник заломлення золота відносно Al_2O_3, $\tilde{n} = n - i\kappa$ – комплексний показник заломлення золота. Виходячи з закону Снеліуса (2) та виразів для амплітудних коефіцієнтів відбивання Френеля

$$r_P = -\frac{\mathrm{tg}(\theta' - \theta_m)}{\mathrm{tg}(\theta' + \theta_m)} \quad \text{та} \quad r_S = -\frac{\sin(\theta' - \theta_m)}{\sin(\theta' + \theta_m)}, \qquad (3)$$

Отримаємо

$$\frac{r_P - r_S}{r_P + r_S} = -\frac{\sin\theta_m \tan\theta_m}{\left(\tilde{N}^2 - \sin^2\theta_m\right)^{1/2}} \approx -\frac{\sin\theta_m \mathrm{tg}\theta_m}{\tilde{N}}, \qquad (4)$$

де $\sin^2\theta_m$ мале порівняно з $\tilde{N}^2$. Оскільки відношення r_S/r_P – комплексне, воно може бути представлене як

$$\frac{r_S}{r_P} = \mathrm{tg}(\delta)\exp(-2i\varphi). \qquad (5)$$

Тому, отримаємо

$$n = -n_m \frac{\sin\theta_m \mathrm{tg}\theta_m \cos(2\delta)}{1 - \sin(2\delta)\cos(2\varphi)} \quad \text{та} \qquad (6а)$$

$$\kappa = n_m \mathrm{tg}(2\delta)\sin(2\varphi)n. \qquad (6б)$$

З виразу (6б) отримаємо

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{-\sin(2\varphi) + \left[\sin^2(2\varphi) + \kappa^2/n^2\right]^{1/2}}{\kappa/n}. \qquad (7)$$

Отже, з виразів (5) і (7) маємо

Kyiv National Taras Shevchenko University

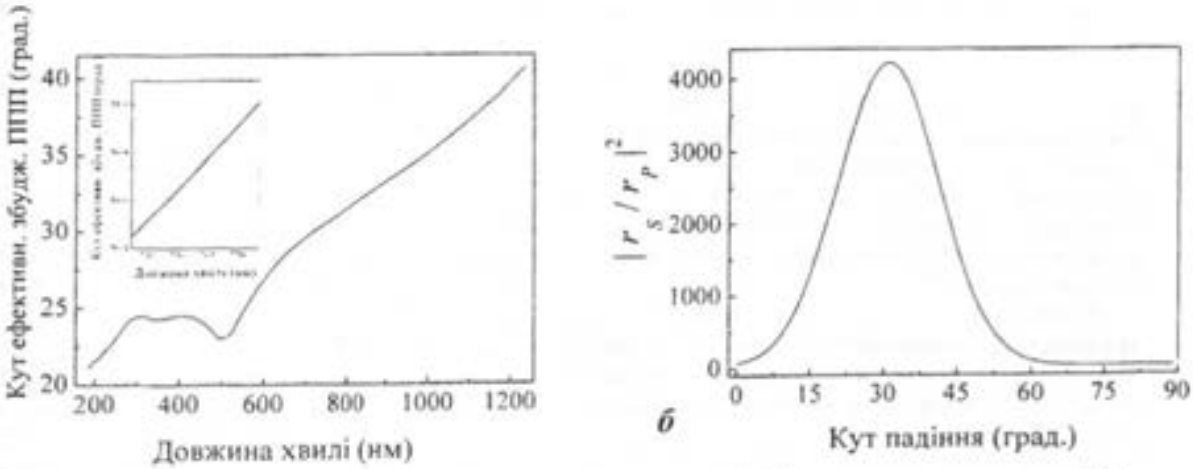


Рис. 5. (а) – розрахована спектральна залежність кута падіння $\bar{\theta}(\lambda)$, при якому має місце найбільш ефективне збудження ППП. Вставка демонструє дану залежність для спектральної області, в якій в експериментальних спектрах спостерігається L-смуга поздовжніх ППП. (б) – розрахована залежність квадрату модуля відношення амплітудних коефіцієнтів відбивання в S та P-поляризаціях (ефективність збудження ППП) від кута падіння $|r_S/r_P|^2(\theta)$. У розрахунках були використані табличні оптичні константи золота з [22].

$$\left|\frac{r_S}{r_P}\right|_{max} = \mathrm{tg}\delta_{max} = \frac{1+\left(1+\kappa^2/n^2\right)^{1/2}}{\kappa/n}, \qquad (8)$$

де $2\varphi = -\pi/2$. Нарешті, підставляючи (8) в (6а), отримаємо кут псевдо-Брюстера для падіння пучка світла на границю розділу матриця – золото $\bar{\theta}_m$, при якому модуль відношення $|r_S/r_P|$ матиме максимум, що відповідає максимуму ефективності збудження ПП-поляритона в золотому нанодроті

$$\sin\bar{\theta}_m \mathrm{tg}\bar{\theta}_m = \frac{\left(n^2+\kappa^2\right)^{1/2}}{n_m} = \frac{|\tilde{n}|}{n_m}. \qquad (9)$$

Беручи $\bar{\theta}_m$ з формули (9) та використовуючи закон Снеліуса для заломлення пучка світла на границі розділу повітря – Al_2O_3, отримаємо кут падіння світла на поверхню зразка $\bar{\theta}$, при якому матиме місце найбільш ефективне збудження ППП в золотому нанодроті

$$\bar{\theta} = \arcsin\left(n_m \sin\bar{\theta}_m\right). \qquad (10)$$

Використовуючи міркування, наведені вище, та табличні дані для оптичних констант золота, взяті з [22], ми розрахували спектральну залежність кута падіння $\bar{\theta}(\lambda)$ та залежність квадрату модуля відношення амплітудних коефіцієнтів відбивання в S та P-поляризаціях (ефективність збудження ППП) від кута падіння $|r_S/r_P|^2(\theta)$, які подано на рис. 5. З рис. 5(а) видно, що у спектральному діапазоні 747 – 770 нм, в якому в експериментальних спектрах спостерігається L-смуга, пов'язана з поздовжніми ППП, кут найефективнішого збудження ППП $\bar{\theta}$ знаходиться у дуже вузькому інтервалі значень: 30,5 – 30,9^0. Розрахунки кутової залежності відношення $|r_S/r_P|^2$, що характеризує ефективність збудження ППП в нанодроті (рис. 5(б)) свідчать про існування максимуму для кутів падіння близько 30 – 40^0. Таким чином, теоретичні розрахунки вказують на те, що найбільш ефективне збудження ППП в нанодротах золота в Al_2O_3-матриці має відбуватися при кутах між напрямком збуджуючого світлового пучка у повітрі і віссю нанодроту близько 35^0.

Зауважимо, що, як було сказано в попередньому параграфі, усі особливості (екстремуми) в кутових залежностях

Kyiv National Taras Shevchenko University

спектральних характеристик L- смуги, пов'язаної з поздовжньою ППП-модою, виникають при кутах падіння $30^\circ \le \theta \le 40^\circ$. Виходячи з цього факту, можна зробити висновок, що спостережувана немонотонність кутових залежностей інтегральної інтенсивності, положення та півширини L-смуги є наслідком існування сильної кутової залежності ефективності збудження ППП в нанодротах з максимумом на 35°.

Повернемося до експериментальної залежності інтегральної інтенсивності L-смуги від θ. З рис. 4(а) видно, що швидке зростання інтенсивності зі збільшенням θ відбувається при кутах менших, ніж $\theta \approx 35^\circ$. При більших кутах спостерігається зменшення інтенсивності L-смуги з ростом θ, проте, це зменшення є повільнішим ніж зростання при малих кутах. Кутова залежність інтенсивності L-смуги має бути наступною: $I_L(\theta) \propto W(\theta)\sin^2\theta$, де $W(\theta)$ – залежна від θ ефективність збудження ППП. Як було сказано вище: $W(\theta) \propto |r_s/r_p|^2(\theta)$. $W(\theta)$ має максимум при $\theta \approx 35^\circ$. Таким чином, при $\theta < 35^\circ$ збільшення I_L є душе швидким внаслідок як збільшення $\sin^2\theta$, так і збільшення $W(\theta)$. При $\theta > 35^\circ$ $\sin^2\theta$ продовжує рости, у той час як ефективність $W(\theta)$ зменшується (див. рис. 5(б)). Внаслідок цього залежність $I_L(\theta)$ має бути або немонотонною з максимумом при $\theta \approx 35^\circ$, або при $\theta > 35^\circ$ має спостерігатися сповільнення росту $I_L(\theta)$. Як ми бачимо, експериментально спостерігається саме перший випадок, а саме – немонотонна залежність $I_L(\theta)$ з максимумом при $\theta = 35^\circ$ (рис. 4 (а)). Таким чином, для довгих ($L >> \lambda/2$) металевих нанодротів залежність інтенсивності поздовжньої L-смуги екстинкції від θ відрізняється від відповідної залежності для наноциліндрів та коротких ($L < \lambda/2$) нанодротів, для яких має місце залежність $I_L(\theta) \propto \sin^2\theta$. Як ми показали, ця відмінність є наслідком сильної немонотонної кутової залежності ефективності збудження ППП в металевих нанодротах.

Як було зауважено вище, оскільки нанодріт діє як плазмонний резонатор, стоячі поздовжні ПП-поляритони має бути власними модами цього резонатора. Як відомо, різні моди характеризуються різними за величиною втратами (загасанням) [21,23]. Найменшими втратами характеризуються аксіальні моди, неаксіальні моди мають вищі втрати. Враховуючи, що ефективність збудження ППП в досліджуваних нанодротах *Au* має максимум при куті падіння $\theta = 35^\circ$, логічно припустити, що моди з найменшими втратами збуджуються найбільш ефективно. Таким чином, найбільш імовірно, що при кутах падіння близьких до 35°, у нанодротах збуджуються аксіальні поздовжні ППП-моди. Ці моди поширюються чітко вздовж осі нанодроту. У свою чергу, логічно припустити, що при кутах падіння менших та більших ніж 35° в нанодроті – резонаторі збуджуються неаксіальні моди. Неаксіальні ППП поширюються під деякими ненульовими кутами до осі нанодроту.

Проаналізуємо експериментальні залежності спектрального положення та півширини поздовжньої L-смуги від кута падіння θ (рис. 4(б,в)). Частоти власних мод резонатора з циліндричною симетрією визначаються за формулою [23]

$$\nu_{npl} = \nu_0\left[n + \frac{2p + l + 1}{\pi}\arccos^{1/2}(g_1 g_2)\right], \quad (11)$$

де $\nu_0 = c/2L$, n – аксіальний індекс, p і l – радіальний та азимутальний індекси відповідно, g_i і g_2 – параметри резонатора: $g_i = 1 - L/b_i$ (b_i – радіуси кривизни кінців нанодроту, які діють як дзеркала резонатора). З формули (11) видно, що аксіальні моди з аксіальним індексом $n \neq 0$ та індексами $p = l = 0$ мають нижчі частоти порівняно з відповідними неаксіальними модами з тими самими значеннями n та ненульовими індексами $p \neq 0$ і $l \neq 0$. Таким чином, частота збудження аксіальних ППП-мод в золотому нанодроті має бути нижчою, ніж частоти відповідних неаксіальних мод. Оскільки при куті падіння $\theta = 35^\circ$ у досліджуваних золотих нанодротах збуджуються аксіальні ППП-моди, а при менших та більших кутах збуджуються неаксіальні моди, при збільшенні θ L-смуга має зсуватися в червоний бік при $\theta < 35^\circ$ та в блакитний бік при $\theta > 35^\circ$. Саме така кутова залежність положення L-смуги і спостерігається експериментально (див. рис. 3(а) та 4(б)).

Як ми зауважили вище, аксіальна мода з певним індексом n характеризується меншим загасанням ніж відповідні неаксіальні моди з тим самим значенням n, але відмінними значеннями

Kyiv National Taras Shevchenko University

індексів $p \neq 0$, $l \neq 0$. Дійсно, втрати моди циліндричного резонатора з певними значеннями індексів p і l визначаються як [21]

$$\alpha_{pl} = 8x_{pl}\frac{\delta(m+\delta)}{\left[(m+\delta)^2+\delta^2\right]^2}, \qquad (12)$$

де $\delta = 0{,}824$, x_{pl} – p-й нуль функції Бесселя $J_l(x)$, $m = (8\pi N)^{1/2}$, а $N = a^2/\lambda L$ – число Френеля резонатора (a – радіус дзеркала резонатора). Таким чином, вищим неаксіальним модам (модам з більшими значеннями l і p) відповідають більші значення x_{pl}, а отже, згідно з (12) – вищі втрати. Отже, чим вищі втрати, тим сильніше загасання плазмових коливань вільних електронів, що приводить до розширення плазмонної L-смуги. Таким чином, півширина L-смуги має бути мінімальною при куті падіння $\theta = 35^\circ$, при якому в нанодроті збуджуються аксіальні ППП-моди з найнижчими втратами. Відповідно, при збільшенні θ L-смуга має звужуватися при $\theta < 35^\circ$ та розширюватися при $\theta > 35^\circ$. Саме така кутова залежність півширини L-смуги і спостерігається експериментально (див. рис. 3(а) і 4(в)).

Висновки

Було досліджено спектри екстинкції масиву паралельних нанодротів золота (діаметр – 27 нм, довжина – 9 мкм) в Al_2O_3-матриці. Отримані спектри демонструють двокомпонентну структуру. Встановлено, що низькоенергетична T-смуга є результатом збудження в нанодротах *Au* локальних поперечних (по відношенню до осі нанодроту) поверхневих плазмонів. Високоенергетична L-смуга зумовлена збудженням поздовжніх поверхневих плазмонних поляритонів, що поширюються у нанодроті.

Поперечна T-смуга спостерігається при довільній поляризації збуджуючого світлового пучка. Її інтегральна інтенсивність описується звичною залежністю $I_T \propto (\sin\phi + \cos\theta\cos\phi)^2$, де ϕ – кут поляризації збуджуючого світла відносно площини падіння, θ – кут між хвильовим вектором збуджуючого світлового пучка у повітрі та віссю нанодроту. Спектральне положення та півширина T-смуги не залежать від ϕ та θ. Поздовжня L-смуга відсутня в S-поляризації ($\phi = 90^\circ$) та має найвищу інтенсивність в P-поляризації ($\phi = 0^\circ$). Виявлено, що L-смуга характеризується сильними немонотонними кутовими (від кута θ) залежностями її спектральних характеристик з екстремумами при $\theta \approx 35^\circ$. При $\theta \approx 35^\circ$ інтегральна інтенсивність L-смуги має максимум, довжина хвилі – максимум, а півширина – мінімум.

Показано, що такі кутові залежності зумовлені збудженням в нанодротах золота поздовжніх поверхневих плазмонних поляритонів, які є власними модами нанодроту, що діє як плазмонний резонатор. Виконано теоретичні розрахунки залежності ефективності збудження поздовжніх плазмонних поляритонів від кута θ. Розрахунки вказують на існування максимуму ефективності збудження поляритонів при $\theta = 35^\circ$. При цьому куті має місце збудження аксіальних мод нанодроту-резонатора, у той час як при менших та більших кутах θ відбувається збудження неаксіальних мод. Аксіальні поляритонні моди мають нижчі частоти та нижче загасання при поширенні в нанодроті, у той час як неаксіальні моди – вищі частоти та вище загасання. Використана теоретична модель нанодроту золота як плазмонного резонатора повністю узгоджується з експериментальними кутовими залежностями спектральних характеристик поздовжньої плазмонної L-смуги.

Автор висловлює подяку д.ф.м.н., професору Дмитруку І.М. за цікаві та плідні обговорення результатів досліджень, що лягли в основу цієї роботи.

Список використаних джерел

1. *Zong R. – L.* Synthesis and optical properties of silver nanowire arrays embedded in anodic alumina membrane / R. – L. Zong, J. Zhou, Q. Li [et al.] // Journal of Physical Chemistry B. – 2004. – Vol. 108. – P. 16713–16716.
2. *Atkinson R.* Anisotropic optical properties of arrays of gold nanorods embedded in alumina / R. Atkinson, W. R. Hendren, G. A. Wurtz [et al.] // Physical Review B. – 2006. – Vol. 73. – P. 235402–1–235402–8.
3. *Evans P.* Optical transmission properties and electric field distribution of interacting 2D silver nanorod arrays / P. Evans, R. Kullock, W. Hendren [et al.] // Advanced Functional Materials. – 2008. – Vol. 18. – P. 1075–1079.

Kyiv National Taras Shevchenko University

4. *McMillan B.* Reflectance and electrolyte electroreflectance from gold nanorod arrays embedded in a porous alumina matrix / B. McMillan, L. Berlois, F. Cruickshank [et al.] // Journal of Electroanalytical Chemistry. – 2007. – Vol. 599. – P. 177–182.
5. *Kullock R.* Polarization conversion through collective surface plasmons in metallic nanorod arrays / R. Kullock, W. R. Hendren, A. Hille [et al.] // Optics Express. – 2008. – Vol. 16. – P. 21671–21681.
6. *Schider G.* Plasmon dispersion relation of Au and Ag nanowires / G. Schider, J. R. Krenn, A. Hohenau [et al.] // Physical Review B. – 2003. – Vol. 68. – P. 155427–1–155427–4.
7. *Schaich W. L.* Optical resonances in periodic surface arrays of metallic patches / W. L. Schaich, G. Schider, J. R. Krenn [et al.] // Applied Optics. – 2003. – Vol. 42. – P. 5714–5721.
8. *Vesseur E. J. R.* Direct observation of plasmonic modes in Au nanowires using high–resolution cathodoluminescence spectroscopy / E. J. R. Vesseur, R. de Waele, M. Kuttge [et al.] // Nano Letters. – 2007. – Vol. 7. – P. 2843–2846.
9. *Ditlbacher H.* Silver Nanowires as Surface Plasmon Resonators / H. Ditlbacher, A. Hohenau, D. Wagner [et al.] // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 95. – P. 257403–1–257403–4.
10. *Novikov I.V.* Channel polaritons / I. V. Novikov, A. A. Maradudin // Physical Review B. – 2002. – Vol. 66. – P. 035403–1–035403–13.
11. *Ebbesen T. W.* Extraordinary optical transmission through sub–wavelength hole arrays / T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi [et al.] // Nature. – 1998. – Vol. 391. – P. 667–669.
12. *Lezec H. J.* Beaming light from a subwavelength aperture / H. J. Lezec, A. Degiron, E. Devaux [et al.] // Science. – 2002. – Vol. 297. – P. 820–822.
13. *Quinten M.* Electromagnetic energy transport via linear chains of silver nanoparticles / M. Quinten, A. Leitner, J. R. Krenn [et al.] // Optics Letters. – 1998. – Vol. 23. – P. 1331–1333.
14. *Maier S. A.* Observation of near–field coupling in metal nanoparticle chains using far–field polarization spectroscopy / S. A. Maier, M. L. Brongersma, P. G. Kik [et al.] // Physical Review B. – 2002. – Vol. 65. – P. 193408–1–193408–4.
15. *Lamprecht B.* Surface plasmon propagation in microscale metal stripes / B. Lamprecht, J. R. Krenn, G. Schider [et al.] // Applied Physics Letters. – 2001. – Vol. 79. – P. 51–53.
16. *Krenn J. R.* Non-diffraction-limited light transport by gold nanowires / J. R. Krenn, B. Lamprecht, H. Ditlbacher [et al.] // Europhysics Letters. – 2000. – Vol. 60. – P. 663–669.
17. *Voisin C.* Ultrafast electron dynamics and optical nonlinearities in metal nanoparticles / C. Voisin, N. Del Fatti, D. Christofilos [et al.] // Journal of Physical Chemistry B. – 2001. – Vol. 105. – P. 2264–2280.
18. *Barnes W. L.* Surface plasmon subwavelength optics / W. L. Barnes, A. Dereux, T. W. Ebbesen // Nature. – 2003. – Vol. 424. – P. 824–831.
19. *Солимено С.* Дифракция и волноводное распространение оптического излучения / С. Солимено, Б. Крозиньяни, Д. Ди Порто // М. – Мир. – 1989. – 662 с.
20. *Johnson P. B.* Optical constants of the noble metals / P. B. Johnson, R. W. Christy // Physical Review B. – 1972. – Vol. 6. – P. 4370–4379.
21. *Демтрёдер В.* Лазерная спектроскопия: Основные принципы и техника эксперимента / В. Демтрёдер // М. – Наука. – 1985. – 607 с.

Надійшла до редколегії 29.05.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2012, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

Лерман Л.Б., к.т.н., ст. н. с.,*)
Породько Л. В., аспірант**).

Лазерний нагрів твердого тіла в умовах конвективного теплообміну

Розглянуто теплові ефекти, обумовлені лазерним опроміненням поверхні твердого тіла в умовах конвективного теплообміну з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у твердому тілі. Для розв'язання одновимірного нестаціонарного неоднорідного рівняння теплопровідності застосовано кінцеве інтегральне перетворення. Розглянута допоміжна задача Штурма-Ліувілля, розв'язки якої визначають власні числа і систему ортогональних функцій, за якими і виконується інтегральне перетворення. Отримано розрахункові формули для різних форм імпульсів при дії випромінювання.

Ключові слова: лазерне випромінювання, гіперболічне рівняння теплопровідності, кінцеве інтегральне перетворення.

L.B. Lerman, Ph. D.*),
L.V. Porodko, PhD stud.**).

Laser heating of solid in the conditions of convection heat exchange

Thermal effects, stipulate for the laser irradiation of solid surface in the conditions of convection heat exchange taking into account terminal velocity of propagation of heat in a solid, are considered. For the solution of one-dimensional, nonstationary, nonhomogeneous equation of heat conductivity finite integral transformation is used. The auxiliary Shturm-Liuvill task, the solutions of which determine proper numbers and system of orthogonal functions which integral transformation is executed on, is considered. Design formulas are got for the different forms of impulses at the action of radiation.

Keywords: laser radiation, hyperbolic equation of heat conductivity, finite integral transformation.

*)E-mail: llerman@yandex.ru, *E-mail: lilphys@mail.ru

Вступ

Лазерне випромінювання з успіхом застосовується при наукових дослідженнях і в різноманітних галузях техніки. Унікальні властивості випромінювання лазерів, такі, як монохроматичністю, когерентність, мале просторове розходження пучка і можливість при фокусуванні отримувати дуже високу густину енергії забезпечують широке застосування лазерів. Взаємодія лазерного випромінювання з твердим тілом призводить до його просторово-неоднорідного нагрівання, внаслідок чого виникають процеси тепло - масопереносу між різними ділянками. В роботі із різноманітних фізичних ефектів, таких як: деформування кристалічної грати, виникнення поверхневих періодичних структур, руйнування поверхні тіла докладно розглянуто теплові ефекти.

Ця робота продовжує дослідження, розпочаті в роботах [1–8]. В цих роботах розглядалися температурні поля, що створюються системою джерел, або інтерференційною картиною, яка виникає при використанні системи дзеркал. В обох випадках отримуємо одновимірну або двовимірну періодичні задачі для параболічного рівняння теплопровідності [9–10]. Додатково в роботі [8] враховано кінцеву швидкість поширення тепла. Для ізотропних тіл закон, що узагальнює класичний закон Фур'є, запропонував А.В. Ликов [9] як гіпотезу о кінцевих швидкостях поширення тепла и маси для тепло - та вологопереносу в капілярно-пористих тілах. Застосування цього рівняння є природним при дії короткодіючих імпульсів лазерного випромінювання (час дії імпульсу 10^{-13} - 10^{-12} с), коли теплова енергія не встигає поширитись на значну відстань від зони дії лазерного проміння.

На відміну від робіт [2–7], де на поверхні тіла приймалися умови теплоізоляції, в цій статті на поверхні приймаються умови теплообміну за законом Ньютона. Розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності із врахуванням кінцевої швидкості поширення тепла побудовано за допомогою метод кінцевих інтегральних перетворень [10, 11], теорія якого була розроблена Н.С. Кошляковим [10]. Подальший розвиток теорія кінцевих інтегральних перетворень отримала в роботах Е.М. Карташова [12–19]. Застосування цього методу дозволяє отримати звичайні диференціальні рівняння з часовою змінною і використати інтеграл Дюамеля для довільної форми імпульсу.

В цій роботі на прикладі одновимірного гіперболічного рівняння теплопровідності викладено методику визначення просторово-часового

© Лерман Л.Б., Породько Л. В., 2012

Представлено: акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

Kyiv National Taras Shevchenko University

розподілу температурних полів та швидкостей нагріву твердих тіл і, зокрема їх поверхні, під дією імпульсного лазерного випромінюванням для різних форм імпульсів. Розв'язана допоміжна задача Штурма-Ліувілля, побудований аналітичний розв'язок для довільної форми імпульсу. З цього розв'язку отримані розрахункові формули для миттєвого імпульсу, який описується д- функцією, для імпульсу тривалої дії, який описується функцією Хевісайда, і для періодичних миттєвих імпульсів. Приведено приклади чисельних розрахунків.

1. Постановка задачі.

Розглядається плоский нескінчений у двох напрямках шар (пластина), який по координаті z має товщину $h = z_1 - z_0$ (див. рис. 1). Розмір h будемо визначати глибиною проникнення лазерного випромінювання. Наприклад, при ослаблені енергії в e разів, будемо мати

$$h = \frac{l}{\sqrt{\varepsilon}\mathrm{tg}\delta} = \frac{2\pi c_l}{\omega\sqrt{\varepsilon}\mathrm{tg}\delta}, \qquad (1)$$

де l – довжина хвилі, $\varepsilon = \varepsilon'$ – дійсна частина діелектричної проникності, $\mathrm{tg}\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ – тангенс діелектричних втрат, ε'' – уявна частини комплексної діелектричної проникності, c_l – швидкість світла в вакуумі, ш – кругова частота.

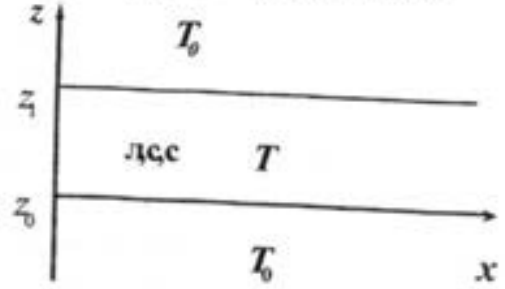


Рис. 1. Рорахункова схема задачі

Припускається, що теплофізичні характеристики не залежать від температури та координати. Нестаціонарне одновимірне рівняння теплопровідності з внутрішніми джерелами можна записати в одному із виглядів

$$\gamma_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{c\rho} f(z,t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\chi}\left[\gamma_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t}\right] = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} f(z,t),$$

$$0 < z < z_1,\ 0 < t < \infty, \qquad (1)$$

де T – температура, t – час, $\chi = \lambda/(c\rho)$ – коефіцієнт температуропровідності (λ – коефіцієнт теплопровідності, c – питома теплоємність, с – густина), $w = \sqrt{\chi/\gamma_p}$ – швидкість поширення теплової хвилі, γ_p – час релаксації теплового потоку, x, y, z – декартові координати, $f(z,t)$ – функція джерел..

На межі $z = z_0$ приймемо, що температура є сталою у будь-який момент часу, тобто

$$T\big|_{z=z_0} = T_1\big|_{z=z_0} = T_0, \qquad (2)$$

а на межі $z = z_1$ приймемо умови конвективного теплообміну з середовищем

$$\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial z} + \alpha\left(T - T_0\right)\right]_{z=z_1} = 0, \qquad (3)$$

де б – коефіцієнт теплообміну (обрано знак «+», оскільки відбувається охолодження [9]).

Внаслідок лінійності задачі можна ввести температуру $T^* = T - T_0$, що рівнозначно тому, що $T_0^* = 0$. Отже рівняння (1) зберігають свій вигляд (зірочку не пишемо), а умови (2), (3) набувають вигляду

$$T\big|_{z=z_0} = T_1\big|_{z=z_0} = 0, \qquad (4)$$

$$\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial z} + \alpha T\right]_{z=z_1} = 0. \qquad (5)$$

Для нестаціонарної задачі потрібно задати початкові умови, які приймемо нульовими

$$T\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (6)$$

Функція джерел може бути довільною.

Для побудови розв'язку цієї задачі скористаємося методом кінцевих інтегральних перетворень [2 – 10], для чого потрібно побудувати ядро перетворення і знайти власні числа.

2. Задача на власні значення.

Для визначення ядра інтегрального перетворення $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(z)$ розв'яжемо задачу Штурма – Ліувілля, яка в даному випадку має вигляд

$$\frac{d^2\mathfrak{A}}{dz^2} = -\eta\mathfrak{A},\ з > 0, \qquad (7)$$

$$\mathfrak{A}(0) = 0, \qquad \lambda\mathfrak{A}'(z_1) + \alpha\mathfrak{A}(z_1) = 0. \qquad (8)$$

У рівності (7) з – власне число, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(z)$ – власна функція, штрих означає похідну по z.

Загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд

Kyiv National Taras Shevchenko University

$$\mathfrak{A} = A\cos(\sqrt{\eta}z) + B\sin(\sqrt{\eta}z), \quad (9)$$

а його похідна

$$\mathfrak{A}' = -A\sqrt{\eta}\sin(\sqrt{\eta}z) + B\sqrt{\eta}\cos(\sqrt{\eta}z). \quad (10)$$

Для визначення власних чисел використовуємо однорідні умови (6). На межі $z = 0$ згідно з граничною умовою знаходимо

$$\mathfrak{A}(0) = A = 0, \quad (11)$$

Тому розв'язок набуває вигляду

$$\mathfrak{A}(z) = B\sin(\sqrt{\eta}z), \ \mathfrak{A}'(z) = B\sqrt{\eta}\cos(\sqrt{\eta}z). \quad (12)$$

На межі $z = z_1$ за умови (8) маємо рівняння

$$B\left[\lambda\sqrt{\eta}\cos(\sqrt{\eta}z_1) + \alpha\sin(\sqrt{\eta}z_1)\right] = 0. \quad (11)$$

З умови існування нетривіального розв'язку знаходимо рівняння для визначення власних чисел

$$\lambda\sqrt{\eta}\cos(\sqrt{\eta}z_1) + \alpha\sin(\sqrt{\eta}z_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\eta} = -\operatorname{tg}(\sqrt{\eta}z_1). \quad (12)$$

З загальної теорії задач Штурма-Ліувілля випливає, що трансцендентне рівняння (12) має зчисленну кількість коренів, які в порядку зростання позначимо через η_n ($n = 1,2,3,\ldots$, і нуль, як неважко бачити, не є власним значенням). Позначимо $\xi = \sqrt{\eta}z_1 \Rightarrow \eta = \xi^2 / z_1^2$ і перепишемо рівняння (12) відносно ξ у стандартному вигляді

$$\frac{\lambda}{\alpha z_1}\xi = -\operatorname{tg}(\xi). \quad (13)$$

Власні числа η_n пов'язані з коренями рівняння (13) співвідношенням $\eta_n = \xi_n^2 / z_1^2$, а власні функції $\mathfrak{A}_n$, які відповідають власним числам η_n, мають вигляд

$$\mathfrak{A}_n(z) = \sin\left(\sqrt{\eta_n}z\right). \quad (14)$$

Квадрат норми власної функції визначається інтегралами

$$\|\mathfrak{A}_n\|^2 = \int_0^{z_1}\mathfrak{A}_n^2(z)dz = \int_0^{z_1}\sin^2\left(\sqrt{\eta_n}z\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{z_1}\left[1 - \cos\left(2\sqrt{\eta_n}z\right)\right]dz = \frac{z_1}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\eta_n}z_1)}{4\sqrt{\eta_n}}. \quad (15)$$

Отже система власних функцій побудована. Така система має властивість ортогональності і повноти в проміжку $[0, z_1]$.

3. Розв'язання нестаціонарного неоднорідного рівняння.

Далі застосовуємо звичайний прийом при використанні кінцевих інтегральних перетворень [11]. Для цього помножимо рівняння (9) на власну функцію $\mathfrak{A}_n$ і проінтегруємо отриманий вираз в проміжку від 0 до z_1. Позначимо образи функцій наступним чином

$$T_n^F(t) = \int_0^{z_1}T(z,t)\mathfrak{A}_n(z)dz,$$

$$f_n^F(t) = \int_0^{z_1}f(z,t)\mathfrak{A}_n(z)dz. \quad (16)$$

Будемо мати

$$\gamma_\rho\frac{\partial^2 T_n^F(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T_n^F(t)}{\partial t} =$$

$$= \chi\int_0^{z_1}\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}\mathfrak{A}_n(z)dz + \frac{1}{c\rho}f_n^F(z,t). \quad (17)$$

Проінтегруємо інтеграл в (17) двічі за частинами і отримаємо

$$\int_0^{z_1}\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}\sin\left(\sqrt{\eta_n}z\right)dz = \sin\left(\sqrt{\eta_n}z_1\right)\frac{\partial T(z_1,t)}{\partial z} -$$

$$-\sqrt{\eta_n}T(z_1)\cos\left(\sqrt{\eta_n}z\right) - \eta_n T_n^F. \quad (18)$$

З граничних умов (3) знаходимо

$$\frac{\partial T(z_1,t)}{\partial z} = \frac{\alpha}{\lambda}T(z_1,t),$$

і тоді

$$\sin\left(\sqrt{\eta_n}z_1\right)\frac{\partial T(z_1,t)}{\partial z} - \sqrt{\eta_n}T(z_1,t)\cos\left(\sqrt{\eta_n}z_1\right) =$$

$$-\frac{T(z_1,t)}{\lambda}\left[\lambda\sqrt{\eta_n}\cos\left(\sqrt{\eta_n}z_1\right) + \alpha\sin\left(\sqrt{\eta_n}z_1\right)\right] = 0$$

внаслідок рівняння для визначення власних чисел (12).

Отже після застосування інтегрального перетворення до рівняння (1) матимемо в просторі зображень звичайне диференціальне рівняння з часовою змінною

$$\gamma_\rho\frac{d^2 T_n^F(t)}{dt^2} + \frac{dT_n^F(t)}{dt} + \chi\eta_n T_n^F(t) = \frac{1}{c\rho}f_n^F(t) \quad (19)$$

з початковими умовами

$$T_n^F(0) = 0, \ \frac{d}{dt}T_n^F(0) = 0. \quad (20)$$

Розв'язок задачі дається інтегралом Дюамеля для функції джерел довільного вигляду

$$T_n^F(t) = \frac{1}{c\rho}\int_0^t h_n(t-\tau)f_n^F(\tau)d\tau =$$

$$\frac{1}{c\rho}\int_0^t h_n(t)f_n^F(t-\tau)d\tau \quad (21)$$

де $h_n(t-\tau)$ – це нормальна реакція на одиничний імпульс [20].

Kyiv National Taras Shevchenko University

Для його знаходження достатньо розв'язати однорідне рівняння (штрих означає похідну за часом)

$$\gamma_p h_+''(t) + h_+'(t) + \chi \eta_n h_+(t) = 0 \quad (22)$$

за спеціальних початкових умов [6]

$$h_+(0) = 0;\ h_+'(0) = 1/\gamma_p; \quad (23)$$

Розв'язок задачі (22), (23) має вигляд

$$h_+(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-4\gamma_p\chi\eta_n}}\left(e^{\zeta_n^{(1)}t} - e^{\zeta_n^{(2)}t}\right), \quad (24)$$

де $\zeta_n^{(1)}$, $\zeta_n^{(2)}$ – корені характеристичного рівняння, які визначаються за формулою

$$\zeta_n^{(1)\wedge(2)} = \frac{1}{2\gamma_p}\left[-1 \mp \sqrt{1-4\gamma_p\chi\eta_n}\right]. \quad (25)$$

$$T(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|\mathfrak{A}_n(z)\|^2}T_n^F(t)\mathfrak{A}_n(z) = -\frac{1}{c\rho}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1-4\chi\gamma_p\eta_n}}\left(e^{\zeta_n^{(1)}t} - e^{\zeta_n^{(2)}t}\right)f_n^F(t-\tau)d\tau\right]\frac{\mathfrak{A}_n(z)}{\|\mathfrak{A}_n(z)\|^2}. \quad (26)$$

Отже задача зводиться до обчислення інтегралів із змінною границею для конкретної функції джерел і підсумовування ряду.

4. Розв'язки для конкретних форм імпульсів.

Представимо функцію джерел у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної

$$f(z,t) = f_1(z)f_2(t). \quad (27)$$

Для функції $f_1(z)$ будемо вважати, що ця залежність зображує згасання енергії при проникненні випромінювання вглиб тіла. У простішому випадку її можна представити у вигляді

$$f_1(z) = J_0(1-R)e^{-\kappa z}, \quad (28)$$

де J_0 – інтенсивність випромінювання на поверхні, R – коефіцієнт віддзеркалення зовнішнього випромінювання, κ – коефіцієнт згасання енергії при проникненні вглиб тіла.

Функція $f_2(t)$ задає часову залежність внутрішніх джерел і може набувати різного вигляду. Розглянемо далі деякі конкретні випадки.

Як перший приклад приймемо функцію джерел у вигляді дії миттєвого імпульсу. З використанням д - функції, коли $f_2(t) = \delta(t)$, запишемо функцію джерел у вигляді

$$f(z,t) = J_0(1-R)e^{-\kappa z}\delta(t), \quad (29)$$

Спочатку знайдемо образ цієї функції у просторі зображень. Для цього обчислимо інтеграл

$$\int_0^h e^{-\kappa z}\sin\left(\sqrt{\eta_n}z\right)dz = \frac{\exp(-\kappa z_1)}{\kappa^2+\eta_n}\times,$$

В просторі зображень розв'язок побудовано.

Тепер, повертаючись в простір оригіналів, будемо мати формальний розв'язок для довільної функції джерел, який визначається рядом

$$\times\left[\sqrt{\eta_n} - \kappa\sin(\sqrt{\eta_n}z_1) - \sqrt{\eta_n}\cos(\sqrt{\eta_n}z_1)\right], \quad (30)$$

і тоді

$$f_n^F(t) = J_0(1-R)\frac{\exp(-\kappa z_1)}{\kappa^2+\eta_n}\times,$$

$$\times\left[\sqrt{\eta_n} - \kappa\sin(\sqrt{\eta_n}z_1) - \sqrt{\eta_n}\cos(\sqrt{\eta_n}z_1)\right]\delta(t) \quad (31)$$

Із врахуванням фільтруючих властивостей д - функції розв'язок (26) набуває вигляду

$$T(z,t) = -\frac{J_0(1-R)}{c\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(-\kappa z_1)}{\kappa^2+\eta_n}\frac{\mathfrak{A}_n(z)}{\|\mathfrak{A}_n(z)\|^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{\left[\sqrt{\eta_n} - \kappa\sin(\sqrt{\eta_n}z_1) - \sqrt{\eta_n}\cos(\sqrt{\eta_n}z_1)\right]}{\sqrt{1-4\chi\gamma_p\eta_n}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t\left(e^{\zeta_n^{(1)}(t-\tau)} - e^{\zeta_n^{(2)}(t-\tau)}\right)\delta(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= -\frac{J_0(1-R)}{c\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\zeta_n^{(1)}t} - e^{\zeta_n^{(2)}t}\right)\frac{\exp(-\kappa z_1)}{\kappa^2+\eta_n}\frac{\mathfrak{A}_n(z)}{\|\mathfrak{A}_n(z)\|^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{\left[\sqrt{\eta_n} - \kappa\sin(\sqrt{\eta_n}z_1) - \sqrt{\eta_n}\cos(\sqrt{\eta_n}z_1)\right]}{\sqrt{1-4\chi\gamma_p\eta_n}}\right\}. \quad (32)$$

Як другий приклад приймемо функцію джерел у вигляді імпульсу тривалої дії, який будемо описувати функцією Хевісайда $H(t)$. Тоді будемо мати

$$\int_0^t\left(e^{\zeta_n^{(1)}(t-\tau)} - e^{\zeta_n^{(2)}(t-\tau)}\right)H(\tau)d\tau =$$

$$= H(t)\left[\frac{1}{\zeta_n^{(1)}}\left(1-e^{\zeta_n^{(1)}t}\right) - \frac{1}{\zeta_n^{(2)}}\left(1-e^{\zeta_n^{(2)}t}\right)\right], \quad (33)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

і розв'язок набуває вигляду

$$T(z,t)=-\frac{J_0(1-R)}{c\rho}H(t)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-e^{\zeta_n^{(1)}\gamma}}{\zeta_n^{(1)}}-\frac{1-e^{\zeta_n^{(2)}\gamma}}{\zeta_n^{(2)}}\right]\times$$
$$\times\left\{\frac{\left[\sqrt{\eta_n}-\kappa\sin(\sqrt{\eta_n}z_1)-\sqrt{\eta_n}\cos(\sqrt{\eta_n}z_1)\right]}{\sqrt{1-4\chi\gamma_p\eta_n}}\right\}\frac{\mathfrak{A}_n(z)}{\|\mathfrak{A}_n(z)\|^2}. \quad (34)$$

Як третій приклад розглянемо функцію джерел, інтенсивність якої періодично змінюється у часі. Функцію $f_2(t)$ представимо у вигляді

$$f_2(t)=\sum_{j=1}^{m}\delta[(t-(j-1)\tau], \quad (35)$$

де ϕ – період включення джерел. В цьому випадку розв'язок із врахуванням отриманої вище рівності (32) матиме вигляд

$$T(z,t)=-\frac{J_0(1-R)}{c\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{A}_n(z)}{\|\mathfrak{A}_n(z)\|^2}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(e^{\zeta_n^{(1)}(j-1)\gamma}-e^{\zeta_n^{(2)}(j-1)\gamma}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\sqrt{\eta_n}-\kappa\sin(\sqrt{\eta_n}z_1)-\sqrt{\eta_n}\cos(\sqrt{\eta_n}z_1)}{\sqrt{1-4\chi\gamma_p\eta_n}}\right]$$

Отже розв'язок задачі для гіперболічного рівняння теплопровідності в мовах теплообміну побудовано як для довільної часової залежності лазерного імпульсу так і для трьох конкретних функцій. Для довільної форми імпульсу аналітично інтеграли знайти не завжди можливо і виникає необхідність чисельного обчислення інтегралів із змінною часовою границею на необмеженому проміжку. Відповідний оригінальний алгоритм викладено в наступному розділі.

Слід зауважити, що знайдені розв'язки можливо застосовувати і для умов випромінювання після лінеаризації співвідношень закону Стефана-Больцмана. В цьому разі змінюється тільки значення коефіцієнту теплообміну $б$. Оскільки така процедура може привести до значних похибок при великих значеннях різниці температур, то слід відслідковувати зміну температури на поверхні у часі, обрати відповідний часовий проміжок і замінити початкові умови на знайдений розподіл температур в кінці цього проміжку.

Висновки

Розроблено ефективний метод розрахунку теплових полів при дії просторово-періодичної системи джерел лазерного випромінювання для різних граничних умовах на поверхні твердого тіла. Для параболічних та гіперболічних рівняння теплопровідності із застосуванням кінцевих інтегральних перетворень побудовано нові аналітичні розв'язки відповідних задач і отримані нові зручні розрахункові формули.

У випадку теплоізоляції зовнішньої поверхні розв'язано двовимірну і одновимірну періодичні задачі і з формул двояко-періодичної задачі отримано розв'язок для одновимірної періодичної задачі.

Список використаних джерел

1 *Grechko L.G., Bila R.V., Semchuk O.Yu., Willander M., and Karlsteen M.* Features of transport phenomena's in magnetic semiconductors with laser-induced periodic nanostructures // Materials Science & Engineering C. - 2007. - V.27. - P.1360-1363

2 L.B. Lerman Thermal effects caused interaction of powerful laser radiation of condensed matter / O.Yu.Semchuk, L.G. Grechko, M. Willander, M. Karlsteen // J. Optoelect. Adv. Mat. – 2010. – V.12, No. 3. – P. 586-588.

3 Лерман Л.Б. Періодичні структури, індуковані на поверхні твердих тіл інтерференцією лазерних пучків. Теплові ефекти / А.П. Шпак , Л.Г. Гречко, Л.Ю. Куницькая ,О.Ю. Семчук // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2007. –. Т. 5, № 3. – С. 683 – 718.

4 *Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Семчук О.Ю., Люценко М.О., Куницька Л.Ю.* Індуковані лазерними пучками поверхневі періодичні структури // Вісник Київського університету. Серія: фіз.- мат. науки. – 2007. - № .3. –С. 282-289.

Kyiv National Taras Shevchenko University

5 *Горбик П.П., Гречко Л.Г., Семчук А.Ю., Лерман Л.Б., Куницкая Л.Ю.* Лазер – индуцированные периодические поверхностные структуры в твердых телах // Химия, физика и технология поверхности. – 2007. – Вып 13. – С. 34 – 47.

6 *Гречко Л.Г., Семчук А.Ю, Лерман Л.Б., Породько Л.В.* Просторовий та часовий розподіл температури на поверхні твердого тіла, викликаний одномірною лазерінтерференційною картинкою // Вісник Київського університету. Серія: фіз.- мат. науки. – 2011. – № .1. – С. 227- 230.

7 *Демчишин А.Б., Породько Л.В.* Форми отоплення поверхні твердого тіла під дією імпульсного лазерного випромінювання // Успехи физики металлов. – 2011. – № 3. – С. 55-59

8 *Породько Л.В.* / Врахування кінцевої швидкості поширення тепла при лазерному розігріві поверхні твердого тіла / Л.В. Породько, Л.Б. Лерман , О.Ю. Семчук // Хімія, фізика та технологія поверхні. – 2011. – Т.2, № 3. – С. 343–346.

9 *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952. – 392 с.

10 *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. Школа, 1970. – 712 с.

11 *Туголуков Е.Н.* Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований: Учебное пособие. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. Ун-та, 2005. – 116 с.

12 *Карташов Э.М., Любов Б.Я.* Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами: Обзор // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 6. – С. 83–111.

13 *Карташов Э.М.* Метод интегральных преобразований в аналитической теории // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1976. – Т. 14. – № 5. – С. 85–105.

14 *Карташов Э.М., Белоусов В.П.* Расчеты температурных полей в твердых телах // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1983. Т. 21. – № 5. – С. 112–121.

15 *Карташов Э.М.* Аналитические методы решения краевых задач теплопроводности с разнородными граничными условиями на линиях: Обзор // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1986. – № 5. – С. 125–149.

16 *Карташов Э.М.* Аналитические методы смешанных граничных задач теплопроводности: Обзор // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1986. – № 6. – С. 116–129.

17 *Карташов Э.М.* Метод обобщенного интегрального преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с движущимися границами: Обзор // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 495–505.

18 *Карташов Э.М.* Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Известия РАН. Энергетика. – 1993. – № 2. – С. 99–127.

19 *Карташов Э.М.* Расчеты температурных полей в твердых телах на основе улучшенной сходимости рядов Фурье-Ханкеля // Известия РАН. Энергетика. – 1993. – № 3. – С. 106–125.

20 *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

Надійшла до редколегії 10.08.12.

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 621.3.087

Прокопець* В. М., к.ф.м.н., доц.,
Кондратенко С. В. к.ф.м.н., доц.,
Лісова І. О., асп.

Методика вимірювань кінетики фотопровідності напівпровідникових гетероструктур

Часові залежності релаксації фотопровідності напівпровідникових гетероструктур, як правило, мають складний характер та містять багато різних за швидкістю спаду ділянок, які відповідають механізмам рекомбінації через різні рекомбінаційні центри у зразку. У статті запропоновано реалізацію схеми вимірювань, що враховує вказані особливості зразків та не спотворює спектр сигналу, а також наведено результати проведених вимірювань кінетики фотопровідності зразку гетероструктури з германієвими нановістрівцями на окисленій поверхні кремнію.

Ключові слова: кінетика фотопровідності, гетероструктури, Ge нановістрівці.

*E-mail: vadym_pr@univ.kiev.ua

Prokopets* V. M., PhD, assos. prof.,
Kondratenko S. V., PhD, assos. prof.,
Lisova I., PhD student.

Measuring technique of semiconductor heterostructures photoconductivity kinetics

Photoconductivity relaxation time dependences of semiconductor heterostructures usually have complicated behavior and contain areas with different decrease rates, which correspond to the recombination mechanisms through different recombination centers in the sample. Measuring circuit realization, that takes into consideration the mentioned features of the samples and does not distort the signal spectrum, is suggested in the paper. Also, results of photoconductivity kinetics measurements of the heterostructure with Ge nanoislands on the oxidized surface of Si sample are presented.

Key Words: photoconductivity kinetics, heterostructures, Ge nanoislands.

Вступ

Квантоворозмірні структури на основі кремнію і германію використовують при конструюванні напівпровідникових фотоелектронних приладів, зокрема інфрачервоних фотодетекторів, джерел випромінювання та сонячних елементів [2-4]. При дослідженні цих структур доцільно застосовувати кінетичні методи, тому що за їх допомогою можна отримати відомості про енергетичні центри, що впливають на основні характеристики приладів.

Аналіз часових залежностей релаксації фотоструму є ефективним методом дослідження локальних енергетичних рівнів напівпровідникових структур. Використовуючи різні форми та інтенсивності збуджуючого імпульсу на основі попередніх даних моделі зонної структури досліджуваних зразків з кінетики фотопровідності можна отримати значення коефіцієнтів захвату носіїв, величину темнової заселеності, перерізів захвату фотонів, параметри та глибину залягання локальних енергетичних рівнів. [1]

Описана далі методика вимірювань кінетики фотопровідності застосовується при дослідженні зразків Si/Ge гетероструктур з Ge нановістрівцями на окисленій поверхні Si (схематичне зображення на рис. 1).

У досліджуваних Si/Ge гетероструктурах реалізується гетероперехід II типу. У валентній зоні при цьому утворюється потенціальна яма для дірок. Освітлення зразку випромінюванням спричинює зонно-зонні переходи в Si та нановістрівцях Ge (зонна діаграма наведена на рис. 1). Дірки акумулюються у валентній зоні нановістрівців, електрони – поблизу переходу Si/SiOx, тобто нерівноважні дірки та електрони виявляються просторово розділеними. Рекомбінація відбувається через рекомбінаційні центри в області просторового заряду кремнію.

Наявність цих рекомбінаційних центрів відображається у характері часових залежностей релаксації фотопровідності, які складаються з багатьох різних за швидкістю спаду ділянок. Тому для аналізу кожної із складових кривої спаду важливо отримати дані, не спотворені частотними обмеженнями приладів підсилення і реєстрації.

© Прокопець В. М., Кондратенко С. В., Лісова І. О., 2012.

Представлено: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Kyiv National Taras Shevchenko University

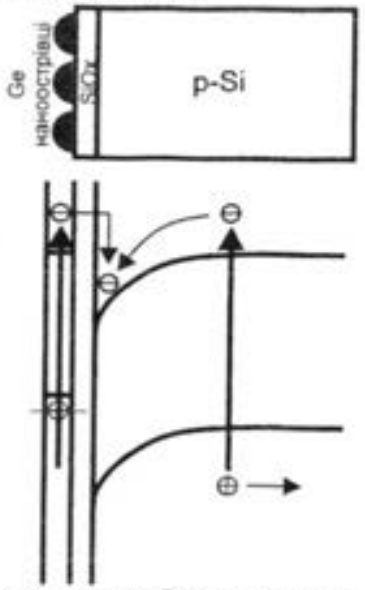


Рис. 1. Схематичне зображення зонної будови зразку Si/Ge гетероструктур з нановістрівцями.

прикладається напруга зміщення, що викликає появу темнового струму. При слабкому сигналі фотопровідності виникає проблема виділення сигналу на фоні великого рівня темнового струму, оскільки використання фільтрів високих частот спотворює спектр сигналу.

Методика вимірювань

Схема експериментальної установки наведена на рис. 2. До зразку (на схемі зразок в термостаті під номером 3) прикладається напруга зміщення за допомогою джерела напруги 4, при цьому через зразок протікає темновий струм, що компенсується джерелом струму 5. Програмований генератор одиночних імпульсів 1 генерує у світлодіоді 2 світловий імпульс заданої тривалості. Наростання або спад сигналу фотопровідності після підсилювача 6 реєструється осцилографом 7, який є синхронізованим з генератором імпульсів. Дані передаються на комп'ютер 8 для подальшої обробки.

Для вимірювання фотопровідності до зразку

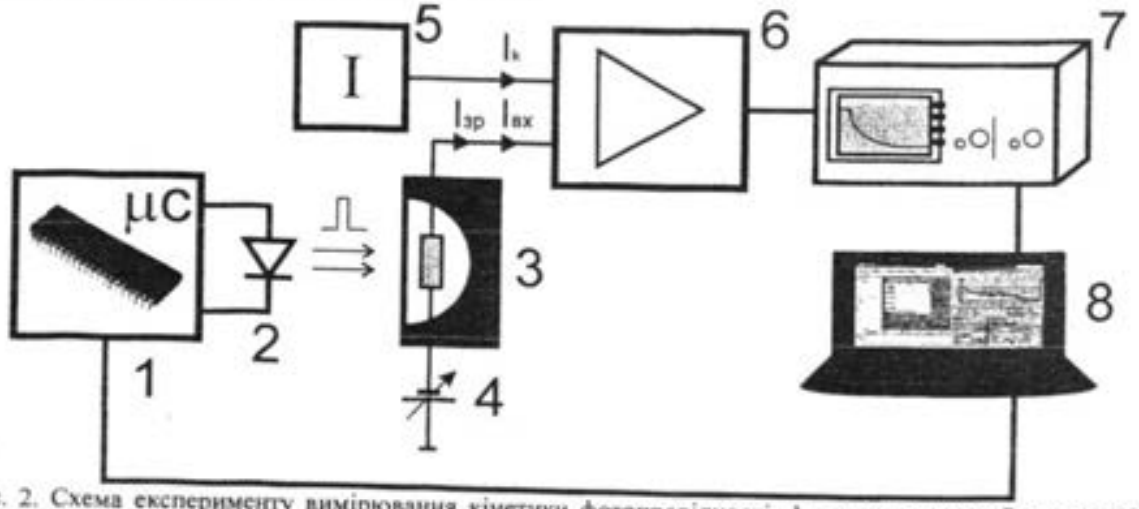


Рис. 2. Схема експерименту вимірювання кінетики фотопровідності. 1 - програмований генератор одиночних імпульсів; 2 – світлодіод; 3 – зразок у термостаті; 4 – джерело напруги; 5 – термостабілізоване джерело струму; 6 – підсилювач; 7 – осцилограф; 8 – комп'ютер.

Програмований генератор одиночних імпульсів 1 створений на базі мікроконтролера ATmega 162. Дозволяє генерувати імпульси тривалістю від 0,1 μс до 256 с та встановлювати струм світлодіоду в межах 1 – 500 мА. Тривалість імпульсу задається за допомогою комп'ютера.

Підсилювач (принципова схема наведена на рис. 3) складається з двох каскадів – суматора-інвертора 1 та неінвертуючого підсилювача 2 [5-6] на базі подвійного операційного підсилювача AD8066 компанії Analog Devices, який має смугу пропускання 145 МГц.

Kyiv National Taras Shevchenko University

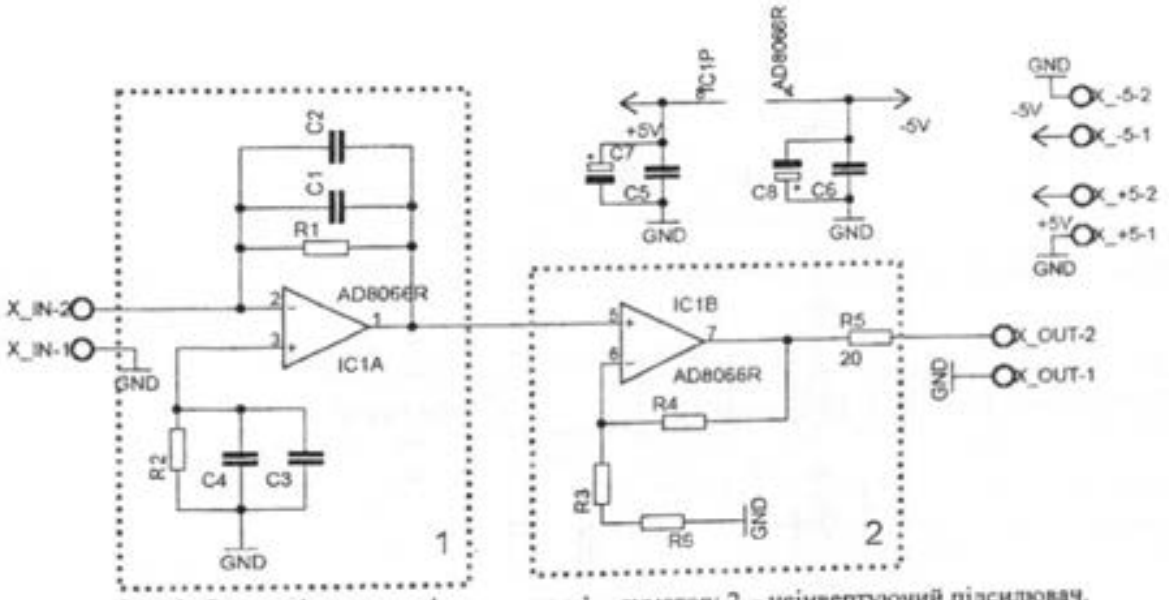


Рис. 3. Схема підсилення фотоструму: 1 – суматор; 2 – неінвертуючий підсилювач.

Використання схеми суматора-інвертора дозволяє застосовувати запропоновану схему експерименту для високоомних зразків без додаткового узгодження за опором із входом приладів реєстрації, оскільки у такої схеми величина вхідного опору близька до нуля.

Струм фотопровідності безпосередньо із зразку подається на вхід суматора. Резистор R1 виконує функції опору навантаження. Зміна опору навантаження R1 відбувається разом із опором R2 так, щоб R1 = R2. Також на вхід подається струм із блоку компенсації темнового струму. Алгебраїчна сума цих струмів підсилюється каскадом 2 і подається на вихід через резистор R5. Зміна коефіцієнту підсилення здійснюється зміною резистору R3. При цьому необхідно враховувати, що збільшення підсилення схеми призводить до звуження частотної смуги пропускання підсилювача.

Блок компенсації темнового струму (принципова схема наведена на рис. 4) побудований за схемою термостабілізованого джерела постійного струму з нескінченно великим вихідним опором [5-6]. Величина струму компенсації змінюється за допомогою резистора R3.

Описана методика була застосована для проведення вимірювань кінетики фотопровідності зразку гетероструктури з германієвими нановістрівцями на окисленій поверхні кремнію.

До зразку була прикладена напруга зміщення 0,2 В. Для реєстрації кінетики фотопровідності зразок освітлювався імпульсом лазерного діоду з довжиною хвилі 940 нм (1,37 еВ) при температурах зразку 77 К – 230 К. Тривалість імпульсу 1 с. Величина опору навантаження R1 = 54 Ом (рис. 3).

На рис. 5 наведено ділянку (2 мс) кінетики фотопровідності зразку.

На цій ділянці часових залежностей можна виділити дві компоненти, які відповідають рекомбінаційним процесам через 2 рекомбінаційні центри, тому залежності було апроксимовано сумою двох експонент:

$$\sigma = \sigma_{01} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right) + \sigma_{02} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_2}\right); \quad (1)$$

Kyiv National Taras Shevchenko University

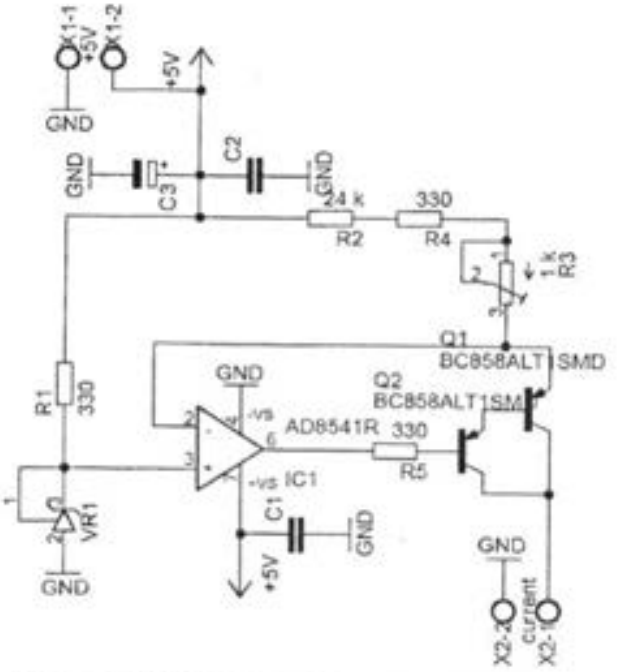


Рис. 4. Схема компенсації темнового струму.

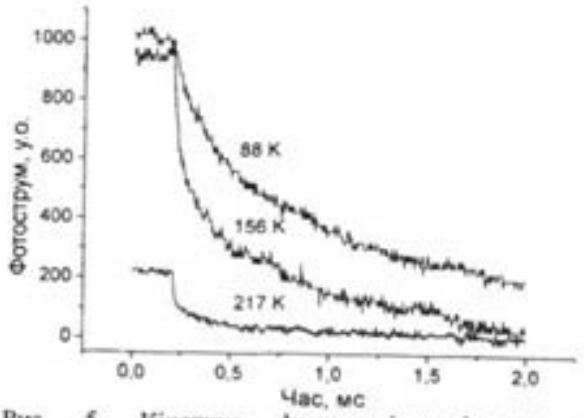


Рис. 5. Кінетика фотопровідності зразку гетероструктури з германієвими нановістрівцями на окисленій поверхні кремнію за температур 88 К, 156 К, 217 К.

Сталі часу τ_1 і τ_2 наведено у таблиці:

Температура, К	τ_1, с	τ_2, с
88	9,96E-05	8,21E-04
156	4,35E-05	7,30E-04
217	3,45E-05	5,71E-04

Висновки

Часові залежності релаксації фотопровідності напівпровідникових гетероструктур, як правило, складаються з багатьох різних за швидкістю спаду ділянок, кількість та характер цих складових залежить від наявності рекомбінаційних центрів у зразку. Для отримання повної інформації про структури необхідно використовувати прилади реєстрації, що не спотворюють частотний спектр сигналу. У статті запропоновано реалізацію схеми вимірювань, що враховує вказані особливості зразків, та наведено результати проведених вимірювань кінетики фотопровідності зразку гетероструктури з германієвими нановістрівцями на окисленій поверхні кремнію.

Список використаних джерел

1. *Лашкарев В. Е., Любченко А. В., Шейнкман М. К.* Неравновесные процессы в фотопроводниках – Киев: Наук. думка, 1981. – с. 75.

2. *Douglas J. Paul.* Si/SiGe heterostructures: from material and physics to devices and circuits.// Semicond. Sci. Technol. 19, №10 R75 (2004).

3. *А. А. Шкляев, М. Ичикава.* Предельно плотные массивы наноструктур германия и кремния.// УФН 178, №2 (2008).

4. *Karl Brunner.* Si/Ge nanostructures. Rep. Prog. Phys. 65 27–72 (2002).

5. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. – М.: Мир, 1998. – 698 с.

6. *Титце У., Шенк К.* Полупроводниковая схемотехніка. – ДМК Пресс, 2008. – 942 с.

Надійшла до редколегії 12.07.2012.

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 535.3

Стащук В.С.., д. ф.-м.н., проф.,
*Стукаленко В.В., к.ф.-м.н., м.н.с.,
Філіпов Я.В., інженер
Стаценко А.О., студент
Полянська О.П., інженер
Чернуха Є.О., студент

Оптичні властивості системи: плівка оксиду алюмінію-мідь

Моделювання оптичних властивостей системи: тонка плівка оксиду алюмінію-масивна мідь виконано з використанням одношарової моделі. В широкій області спектру (λ = 0,2 – 1.2 мкм) проведено порівняння розрахованих та експериментальних кривих дисперсії коефіцієнта відбивання R(λ) масивних мідних дзеркал з нанесеним шаром оксиду. Варіацією оптичних сталих як тонкої плівки оксиду алюмінію, так і основи – масивної міді – досягалась найкраще узгодження розрахованих кривих дисперсії R(λ) з експериментальними.

Ключові слова: тонка плівка, оксид алюмінію, оптичні сталі, коефіцієнт відбивання

Stashchuk V. S., prof. Dr SC.,
Stukalenko V. V., sc. researcher,
Filipov Ya. V., engineer,
Statsenko A.O. student,
Polianska O.P. engineer,
Chernukha Ie.O. student

Optical properties of the aluminium oxide film - copper system.

Modeling of the optical properties of the aluminium oxide film - bulk copper system has been carried out within the single layer model. The calculated and experimental dispersion curves of the reflection coefficient R (λ) for bulk copper mirrors with an oxide layer have been compared in a wide spectral range (λ = 0.2 - 1.2 microns). By varying the optical constants of the oxide film and the bulk copper the best fit of the theoretical an experimental R (λ) curves was achieved.

Key Words: thin film, aluminum oxide, optical constants, reflection coefficient.

*E-mail: stu@univ.kiev.au

Одним із важливих засобів модифікації оптичних властивостей металевих дзеркал є нанесення на їхню поверхню тонких (трохи менших довжини хвилі) діелектричних плівок, стійких до дії зовнішніх чинників [1,2]. Як відомо [3], такі плівки захищають дзеркальну поверхню металу від окислення. Плівки оксидів різного типу на поверхні високопровідних матеріалів (зокрема, міді, алюмінію) не тільки виявляють захисну дію, а і дозволяють формувати певні, наперед задані оптичні властивості дзеркальних поверхонь (зокрема, коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ в широкій області спектра). Крім того, для практичного застосування необхідні дзеркала, які характеризуються високою променевою стійкістю, високою механічною міцністю та твердістю. Отож потрібно знати оптичні характеристики таких дзеркал. Значний інтерес становить також з'ясування впливу шару оксиду алюмінію на дисперсію коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$, зокрема, потрібно виявити, в яких спектральних інтервалах величина $R(\lambda)$ збільшується, а в яких – зменшується порівняно з масивним металевим дзеркалом.

В процесі виготовлення і подальшого застосування плівок важливо знати їхні геометричні та оптичні характеристики, такі як показники заломлення n та поглинання k в широкому спектральному інтервалі, товщину шару оксиду d та оптичні сталі підкладинки. Ефективним методом прогнозування оптичних властивостей складних систем є математичне моделювання із використанням певної моделі. Найпростішою є одношарова модель: плівка оксиду – масивний метал. Зрозуміло, що оптичні сталі як шару оксиду, так і масивного матеріалу, в області формування відбитої хвилі можуть суттєво відрізнятися від значень для масивних оксиду та металу [4,5]. Отож, при застосуванні навіть цієї найпростішої моделі потрібно передбачити можливість варіювання як оптичними, так і геометричними характеристиками вказаних систем.

У даній роботі наведено результати експериментальних досліджень оптичних властивостей масивних дзеркал міді, покритих шаром оксиду алюмінію товщиною від 200 нм до 300 нм в широкому спектральному інтервалі (λ = 0,2 – 1,2 мкм). Математичне моделювання

© Стащук В.С., Стукаленко В.В., Філіпов Я.В., Стаценко А.О., Полянська О.П., Чернуха Є.О. 2012

Представлено: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А

Kyiv National Taras Shevchenko University

базувалося на теоретичних залежностях, які описують дисперсію коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ в моделі: прозора плівка-поглинальна підкладинка [6-8].

Зразки для експериментального дослідження оптичних властивостей являли собою нанесені на керамічну основу електролітичним осадженням шари міді товщиною 0,25 – 0,30 мм, поверхня яких була отримана шляхом алмазного мікроточіння і після цього покривалась шаром оксиду алюмінію різної товщини d = 200-300 нм [9]. Плівка наносилася електронно-променевим методом у вакуумі 0,5 мПа. Товщина покриття вимірювалася за допомогою кварцового товщиноміра. Оптичні властивості отриманих таким способом дзеркал досліджувалися шляхом вимірювання спектрів відбивання $R(\lambda)$ в області λ = 0,2-1,2 мкм та еліпсометричних параметрів Ψ та Δ при різних кутах падіння φ за допомогою лазерного еліпсометра ЛЭФ-3М1. Вимірювання коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ проводилось при різних довжинах хвиль двопроменевим методом за допомогою нестандартної установки, в якій світловий потік за допомогою світлоподільника розділявся на два; в один із каналів встановлювався зразок, а в інший – еталон – кварцова призма повного внутрішнього відбивання. Установка складалася із послідовно встановлених по ходу променя джерел випромінювання, монохроматора, напівпрозорого дзеркала, розташованого під кутом 45^0 до оптичної осі, модулятора оптичного випромінювання, досліджуваного зразка в одному каналі та еталона – в іншому, установочні площини яких розташовані перпендикулярно до оптичної осі пристрою, а також фотоприймального блоку, до складу якого входили два фото помножувачі, та реєструвального пристрою. Модулятор оптичного випромінювання виготовлено у вигляді порожнинного циліндра, в якого вилучено 3/4 частини його бокової поверхні, вісь обертання його збігається з віссю гоніометра Г-5, в центрі якого встановлена напівпрозора кварцова пластинка. Блок фотоприймачів включав фотопомножувачі ФЭУ-39А (λ = 0,2-0,6 мкм) та ФЭУ-62 (λ=0.6-1.2 мкм). В якості диспергуючої системи використано монохроматор типу ДМР-4, який дозволяв вести автоматичну або ручну розгортку потоку випромінювання по спектру в часі таким чином, щоб на індикаторі (комп'ютері) можна було отримати неперервну зміну коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$у вигляді графіка.

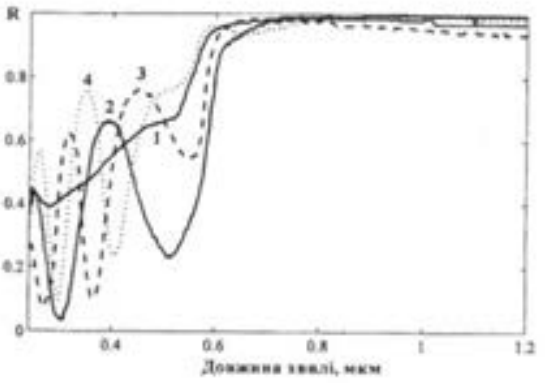


Рис. 1. Експериментальні криві дисперсії коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ масивних мідних дзеркал з нанесеними на них плівками оксиду алюмінію різної товщини: без покриття (1), d = 200 (2), d = 250 (3), d = 300 мкм (4).

Експериментальні спектри відбивання $R(\lambda)$ мідних дзеркал, покритих шаром оксиду алюмінію різної товщини, так і не покритих оксидом, наведено на рис. 1. Видно, що характерною особливістю усіх досліджених зразків є накладання інтерференційних смуг на монотонний хід спектра відбивання $R(\lambda)$ основи (міді). Плівка оксиду на мідній поверхні проявляє просвітлюючу дію, внаслідок чого для певних ділянок спектра коефіцієнт відбивання R зменшується, а для інших – збільшується (до 70-75 %). Наприклад, як показано на рис.1, при товщині покриття d = 300 нм коефіцієнт відбивання $R(\lambda)$ дзеркала досягає максимальних значень поблизу довжин хвиль λ = 250, 350 та 500 нм. Разом з тим, мінімальні значення в певних областях спектра складають близько 10 %, що може бути використано для селекції мод лазера. Із рис. 1 також видно, що величини коефіцієнта відбивання стають близькими до одиниці лише в інфрачервоній області спектру ($\lambda > 0,8$ мкм). При менших довжинах хвиль ($\lambda < 0,6$ мкм) спостерігається різкий спад коефіцієнта відбивання, пов'язаний із початком міжзонних переходів електронів із вершини d-зони міді на рівень Фермі [9]. Максимум поглинання (мінімум відбивання) у міді, як видно з рис. 1, спостерігається в області енергій $h\nu = 4,3 \div 4,7$ еВ ($\lambda = 0,29 \div 0,26$ мкм), де коефіцієнт відбивання R складає приблизно 0, 33.

Слід мати на увазі, що ефект інтерференції крім товщини d залежить також від показника

Kyiv National Taras Shevchenko University

заломлення n_2 шару оксиду, який можна визначити на основі вимірювань еліпсометричних параметрів Δ та ψ при різних кутах падіння φ. Провівши такі дослідження при певних довжинах хвиль заданого діапазону спектру, можна визначити дисперсію показника заломлення самого покриття $n_2(\lambda)$ [6].

На основі відомих співвідношень для випадку: прозора плівка – поглинальна підкладинка [7,8] було проведено розрахунок коефіцієнтів відбивання в одношаровій моделі: плівка оксиду алюмінію–масивна мідь за формулою:

$$R = \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos(\varphi_{23} + 2\gamma)}{1 + \rho_{12}^2\rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos(\varphi_{23} + 2\gamma)},$$

де $\rho_{23} = \dfrac{(n_3 - n_2)^2 + k_3^2}{(n_3 + n_2)^2 + k_3^2}$, $\rho_{12} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$,

$\varphi_{23} = \operatorname{arctg}\dfrac{2n_2k_3}{n_3^2 - n_2^2 + k_3^2}$, $\gamma = 2\pi n_2 d_2/\lambda$, n_1, n_2, n_3 - показники заломлення повітря, плівки оксиду та основи, відповідно, k_3 - показник поглинання основи, λ - довжина хвилі, d – товщина плівки.

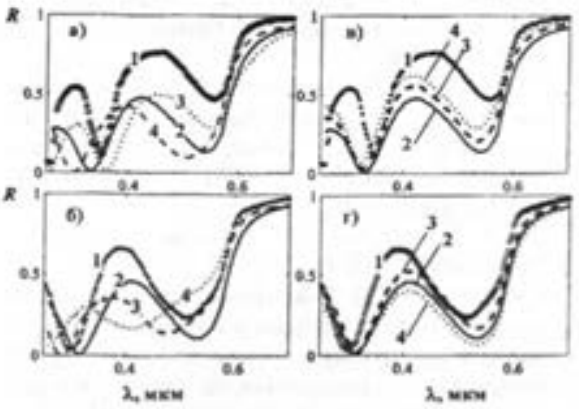


Рис. 2. Дисперсія коефіцієнта відбивання масивних мідних дзеркал покритих шаром оксиду алюмінію. На всіх рис. експеримент – крива 1; розрахунок в одношаровій моделі при варіації одного із параметрів:
а) товщини плівки оксиду d: $d = d_{\text{екс}} = 210$ (2), $d = 230$ (3), $d = 190$ нм (4);
б) показника заломлення оксиду
$n_p = n_{\text{екс}}$ (2), $n_p = 0{,}9n_{\text{екс}}$ (3), $n_p = 0{,}8n_{\text{екс}}$ (4);
в) коефіцієнта поглинання основи:
$k_p = k_{Cu}$ (2), $k_p = 1{,}2k_{Cu}$ (3), $k_p = 1{,}4\,k_{Cu}$ (4);
г) показника заломлення підкладинки (мідь):
$n_p = n_{Cu}$ (2), $n_p = 0{,}8n_{Cu}$ (3), $n_p = 1{,}2n_{Cu}$ (4).

Оскільки у довгохвильовій області спектра хід експериментальних і розрахованих кривих практично співпадає, то на рис. 2 наведено лише фрагменти дисперсійних залежностей коефіцієнта відбивання R в короткохвильовій області спектра ($\lambda = 0{,}2$-$0{,}7$ мкм), які розраховані при варіації одного із параметрів, які характеризують як плівку оксиду, так і основу (масивну мідь). Як видно з рис. 2, хід кривих є чутливим до змін кожного з параметрів, причому, розбіжності між експериментальними і розрахованими кривими можуть як збільшуватися, так і зменшуватися при варіації однієї із характеристик системи. Так, вважаючи в розрахунках, що товщина плівки (рис. 2а) збільшується (зменшується) спостерігаємо зміщення кривої дисперсії (як цілого) в довгохвильову (короткохвильову) область спектру. При зменшенні показника заломлення плівки на 10 % у порівнянні з літературними даними для масивного оксиду алюмінію (рис. 2б) екстремуми на кривих $R(\lambda)$ зміщуються вздовж шкали довжин хвиль, розширюються та зменшуються за величиною. Збільшення коефіцієнта поглинання основи у порівнянні з даними для масивної міді (рис. 2 в) призводить до зміщення усієї кривої $R(\lambda)$ вгору та незначного зміщення екстремумів вздовж шкали довжин хвиль λ. Варіації показника заломлення підкладинки (рис. 2 г) приводять до зміщення кривих вздовж осі ординат при практично незмінних положеннях екстремумів в шкалі довжин хвиль λ.

При моделюванні оптичних властивостей системи: оксид алюмінію-масивна мідь інтервал зміни значень кожної із величин вибирався з фізичних міркувань. На рис. 3 наведені результати моделювання для відносно тонких $d = 200$ нм (а) та товстих товщин плівок оксиду $d = 300$ нм (б). Якщо для відносно тонких плівок зміною кожної із величин оптичних параметрів системи, а також зміною товщини d, можна добитися задовільного узгодження експериментальної та розрахованої кривих $R(\lambda)$, то для порівняно товстих плівок оксиду (починаючи з $d = 260$ нм і більше) не вдається досягти навіть якісного узгодження розрахованих та експериментальних кривих при зміні параметрів системи в розумних межах. Причина таких розбіжностей, на нашу думку, полягає у відмінності між оптичними сталими плівки та чистого металу. Крім того, такі відмінності зумовлені тим, що у вибраній теоретичній

Kyiv National Taras Shevchenko University

моделі межа поділу між оксидом алюмінію і міддю вважається різкою, а в дійсності вона є розмитою.

На основі проведених досліджень встановлено, що зміщення розрахованих кривих $R(\lambda)$ відносно експериментальних зумовлено, в першу чергу, збільшенням показника поглинання підкладини, що може бути пов'язано зі взаємодією матеріалу покриття з матеріалом підкладинки.

Таким чином, нанесення діелектричного покриття оксиду алюмінію Al_2O_3 на поверхню мідних дзеркал, отриманих методом алмазного мікроточіння, приводить в певних областях спектра до збільшення коефіцієнта відбивання R на 20-30%, а в інших - до зменшення цієї величини.

Дисперсію коефіцієнта відбивання дзеркала $R(\lambda)$ в одношаровій моделі можна описати лише якісно навіть при варіації в широких межах

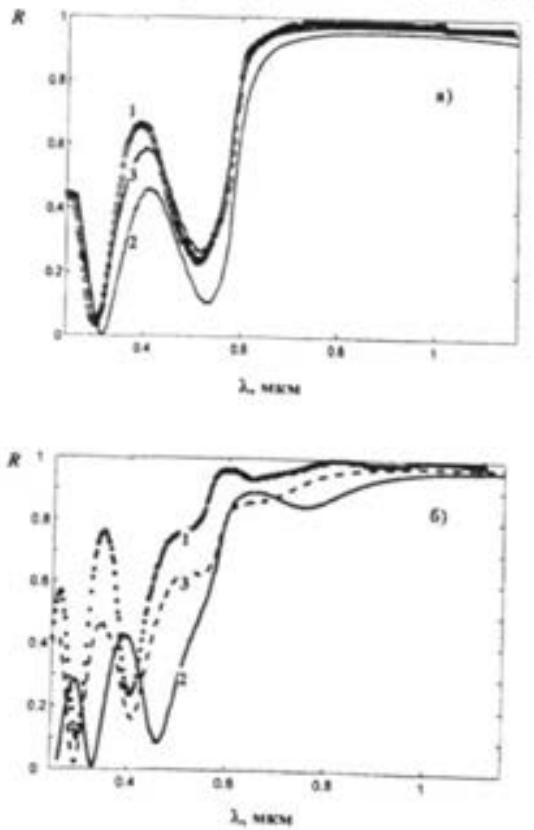


Рис. 3. Дисперсія коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$, експериментальні (1) криві для товщини d =200 нм (а), d = 300 нм (б) і розраховані в одношаровій моделі при: а) d = 200 нм (2), $n_2 = 1{,}02n_{окс}$, $k_3 = 1{,}2k_{Cu}$, $n_3 = 0{,}8n_{Cu}$; б) d_p = 270 нм, $n_2 = 1{,}01n_{окс}$, $k_3 = 1{,}2k_{Cu}$, $n_3 = 0{,}9n_{Cu}$.

оптичних констант плівки і основи, що свідчить про відсутність різкої межі поділу плівка-підкладина.

Отримані результати представляють інтерес при конструюванні резонаторів потужних лазерних систем з використанням високопровідних мідних дзеркал, покритих шаром оксиду алюмінію.

Список використаних джерел

1. *Поперенко Л.В., Шайкевич І. А., Стащук В.С., Одарич В.А.* Діагностика поверхні поляризованим світлом. – К.: ВПЦ «Київський університет». – 2007. – 328 с.
2. *Shamala K.S., Murthy L.C.S. and K Narasimha Rao* Studies on optical and dielectric properties of Al_2O_3 thin films prepared by electron beam evaporation and spray pyrolysis method//Materials Science and Engineering. – 2004. – **B106.** – P. 269-274.
3. Heavens O.S., Smith S. D. Dielectric Thin Films//J. Opt. Soc. Am. –1957. – **47.**–P.469-472.
4. Андреев С.В. Путилин Э.С. Определение оптических постоянных тонких металлических пленок во время их осаждения в вакууме//Оптический журнал. –2008. – **75,** № 4. – С.78-81.
5. *Поперенко Л.В., Стащук В.С.* Фізичні основи матеріалів оптоелектроніки. Оптичні властивості та електронна структура кристалів. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2003 – 142 с.
6. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики.-М.: Наука.-1973.-720 с.
7. *Свиташева С.Н.* О возможности комбинации методов эллипсометрии и спектроинтерферометрии на примере систем $Si-SiO_2$.– Эллипсометрия – метод исследования поверхности. – Новосиб.: Наука, 1983. –С.149-153.
8. *Поперенко Л.В., Стащук В.С.* Основи фізики матеріалів оптотехніки. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011 – 686 с.
9. *Odarich V.A., Staschuk V.S., Poperenko L.V., Filipov Y.V.* Optical characteristics of Al_2O_3 oxide coatings on copper mirrors made by diamond microgrinding //Semiconductor Physics, Quantum Physics, Optoelectronics. – 2003. – **6**, N3. – P.354-356.

Надійшла до редколегії 29.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

УДК 535.36

Якунов А.В., канд. фіз.- мат. наук, доц.
Кузькова Н.В., студ.

Флуктуації інтенсивності світла, розсіяного на супрамолекулярних неоднорідностях у рідинах з водневими зв'язками

Досліджено флуктуації інтенсивності розсіяного світла у рідинах з водневими зв'язками. В експериментальному методі використано принцип характеристичного кутового розподілу для різних типів розсіяння. В даній роботі приведено нові експериментальні докази існування супрамолекулярних неоднорідностей у рідинах з водневими зв'язками. Розглянуто взаємозв'язок між статистичними параметрами флуктуацій і структурними властивостями середовища.

Ключові слова: Розсіяння світла, 1/f флуктуації, супрамолекулярні неоднорідності

A.V. Yakunov, PhD, Assoc. Prof.
N.V. Kuzkova, stud.

Fluctuations of intensity of light scattered by supramolecular inhomogeneities in hydrogen bonded liquids

In this study fluctuations of light scattering in H-bonded liquids has been investigated. Experimental method is used the fact of specific angular distribution for different types of scattering. This work provides new experimental evidences for existence of supramolecular inhomogeneities in H-bonded liquids. Relationship between statistical parameters of fluctuations and structural properties of media is discussed.

Key Words: Light scattering, 1/f fluctuations, supramolecular inhomogeneities

*E-mail: yakunov@univ.kiev.ua

Вступ

Повільні флуктуації інтенсивності розсіяного світла у рідинах, які спостерігалися в ряді експериментів [1-3], свідчать про існування дальньої скорельованості молекулярних коливань, яка формує умови для повільної еволюції та локальної стійкості супрамолекулярних структурних утворень. Спектр потужності зазначених флуктуацій має характерний вигляд $S(f) \sim 1/f^{a}$, де $a \approx 1$. Це дає підстави віднести їх до широкого класу явищ, відомих як «$1/f$-флуктуації», які поширені в природі і представляють значний інтерес для досліджень. Вважається, що $1/f$-флуктуації в конденсованому середовищі зумовлені наявністю певних структурних та функціональних аномалій - метастабільних станів, дефектів, пасток, кластерів, інших неоднорідностей, які мають широкий набір часів життя [4].

Т.Муша та Г.Борбелі у циклі робіт [5-8], застосувавши оригінальну двопроменеву оптичну схему, показали, що розсіяння світла на акустичних фононах супроводжується $1/f$-флуктуаціями інтенсивності, а закон $S(f) \sim 1/f^{a}$ відображає флуктуації енергії фононів. У рідинних системах (вода, розчини електролітів) розсіяння відбувається на фононах, локалізованих на неоднорідностях (кластерах). Можна очікувати, що флуктуації інтенсивності світла відображатимуть характерні особливості таких центрів локалізації і, відповідно, даватимуть додаткову інформацію про супрамолекулярну структуру рідинних систем.

В даній роботі, на основі модифікованої схеми Муші-Борбелі, досліджено флуктуації інтенсивності світла, розсіяного на рідинах з водневими зв'язками: воді, гліцерині та їх бінарних розчинах. Водно-гліцеринові розчини відомі, як гетерогенні системи зі складною ієрархічною структурою та численними аномаліями [9-11].

Методика експерименту та процедура вимірювань

При проходженні світлової хвилі через конденсоване середовище (зокрема, рідину) спостерігається явище вторинного випромінювання. Процеси, які його формують (різновиди розсіяння та люмінесценція) визначають складний характер спектрального та кутового розподілу інтенсивності вторинних хвиль. В загальну картину розсіяння дають внесок: (а) пружне (статичне) розсіяння, що відбувається на стаціонарних неоднорідностях (бульбашках, інорідних частинках тощо), (б) квазіпружне (Релеївське) – на нестаціонарних неоднорідностях, (в) низькочастотне непружне

© Якунов А.В., Кузькова Н.В., 2012

Представлено: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Kyiv National Taras Shevchenko University

(Мандельштам-Бріллюенівське) - на акустичних фононах та (г) високочастотне непружне (Раманівське) – на оптичних фононах.

Відомо [12], що для рідин Раманівське розсіяння та люмінесценція – ізотропні. Пружне та квазіпружне розсіяння на центрах, значно менших за довжину хвилі, – симетричне відносно нормалі до розповсюдження пучка. У загальному випадку, квазіпружне (Релеєвське), а також Мандельштам-Бріллюенівське розсіяння – мають несиметричний кутовий розподіл. Несиметричність виражена тим сильніше, чим більші за розмірами розсіювальні центри.

Виділити внесок розсіяння на значних за розмірами неоднорідностях зпроміж інших видів вторинного випромінювання можна шляхом вимірювання різниці інтенсивностей двох вторинних хвиль, що розповсюджуються під кутами $90° \pm \varphi$ відносно напрямку первинної хвилі.

Схему експериментальної установки, у якій реалізовано дану ідею, показано на Рис.1. Як джерело випромінювання використовувався напівпровідниковий лазер, що працював в квазіодномодовому режимі поблизу довжини хвилі λ = 409 нм. Спектральна ширина основної моди складала $\Delta\lambda \approx 0.02\ nm$. Сусідні моди були на порядок менш інтенсивними, тому їх не враховували. Вихідна потужність лазера становила 60 мВт. Сфокусований лазерний пучок вводився в кювету з рідиною. Використовувались одноразові кювети з поліметилметакрилату, розмірами 10×20×50 мм та товщиною стінок 0,5 мм.

Відстань від краю щілини до лазерного пучка в зразку складала 1мм. Ширина щілини – 0,4 мм. Після проходження через зразок лазерний пучок поглинався пасткою, щоб запобігти поверненню відбитого світла. Розсіяне світло від зразка проходило через щілину та потрапляло на екран з двома круглими отворами (подвійну діафрагму) розташованими на відстані 2 см по обидва боки від оптичної осі. Відстань від щілини до екрана складала 11 см. Отже, з урахуванням геометричних розмірів, кути під якими реєструвався розсіяний сигнал, складали 90±10°. Діаметри отворів (1 см) відповідно до [6] узгоджувались зі спектром випромінювання лазера, коли в заданий тілесний кут потрапляють хвилі, що відповідають головному максимуму, і які розсіяні різними акустичними модами.

Пучки, що пройшли через лінзу (F = 6 см), потрапляли на спеціальний модулятор (частота модуляції – 200 Гц), який почергово пропускав їх на фотоелектронний підсилювач (ФЕП) ФЭУ-62.

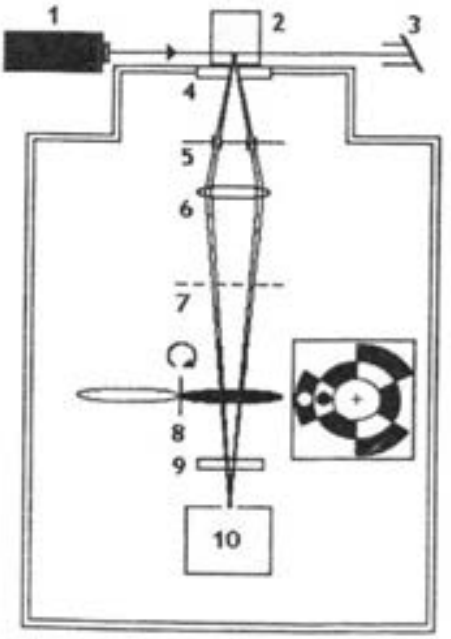


Рис.1 Схема експерименту: 1 – лазер, 2 – зразок, 3 – оптична пастка, 4 – щілина, 5 – екран з двома круглими отворами, 6 – фокусувальний об'єктив, 7 – компенсатор, 8 – модулятор, 9 – фіолетовий фільтр, 10 – ФЕП.

Перед ФЕП встановлювався фіолетовий фільтр 6-ФС-1, який вилучав довгохвильову складову, зумовлену люмінесценцією та Раманівським розсіянням.Різниця інтенсивностей реєструвалась як змінна складова сигналу з частотою модуляції 200 Гц. Для додаткового балансу каналів в оптичну схему вводився спеціальний дисковий компенсатор, який плавно змінював апертуру одного чи іншого пучка. Для налаштування та калібрування установки використовувалась кювета з водним розчином органічного барвника. Реєструвався сигнал люмінесценції, який характеризується ізотропним кутовим розподілом інтенсивності. Концентрація барвника підбиралась із умови, що інтенсивність люмінесценції (I_o^r) приблизно на два порядки перевищувала інтенсивність розсіяння (I_o^r) 80-% водно-гліцеринового розчину.

Kyiv National Taras Shevchenko University

У загальному випадку, навіть при ретельному юстуванні оптичної схеми, два розділених світлових пучки потрапляли на ФЕП несиметрично, що призводило до появи значного диференційного сигналу. За допомогою дискового компенсатора інтенсивності пучків вирівнювались і диференційний сигнал зменшувався на два порядки. За оцінками, компенсація для ізотропного кутового розподілу, тобто відношення $\Delta I^{\beta} / I_0^{\beta}$ у випадку реєстрації сигналу люмінесценції, становила 10^{-4}. При такій компенсації залишковий диференційний сигнал від ізотропного розсіяння (ΔI^{β}) мав би бути нижчим за рівень шумів. У наших експериментах усі сигнали надійно перевищували цей рівень, що свідчило про несиметричність кутового розподілу інтенсивності розсіяння для досліджуваних зразків.

Подальша обробка сигналу здійснювалась за допомогою селективного підсилювача, аналого-цифрового перетворювача (АЦП) та персонального комп'ютера. Час реєстрації одного сигналу складав T = 20 с, частота дискретизації – 22 кГц. Загальна кількість відліків на одну процедуру реєстрації складала $4 \cdot 10^5$. За допомогою перетворення Фур'є для кожного часового ряду було отримано спектр потужності:

$$S(f) \sim \left| \int_0^T U(t) \cdot e^{i \cdot 2\pi f t} dt \right|^2$$

Спектр потужності у низькочастотному діапазоні апроксимувався функцією $S(f) = C / f^{a}$.

Для досліджень використовувалась стандартна дистильована вода для ін'єкцій. На її основі готувалися водні розчини гліцерину з об'ємними концентраціями: 1%, 2%, 5%, 10%, 20%, 40%, 80%. Точність розведення складала 1%. Перед вимірюваннями зразки витримувались не менше однієї доби, щоб уникнути впливу повільної динаміки структуроутворення [13] .

Результати та їх аналіз

На рис.2 показано спектри потужності флуктуацій інтенсивності світла, розсіяного на дистильованій воді та 80% розчині гліцерину. З рисунку видно, що обидва спектри в діапазоні частот 0.1 – 50 Гц описуються функцією $S(f) \sim 1/f^{a}$ причому показник a для двох рідин різний.

Абсолютне значення a оцінювалось з урахуванням власної частотної характеристики усіх складових ланок експериментальної установки. За оцінками, сукупний внесок власних шумів лазера, ФЕП, підсилювача та АЦП може бути представлений як еквівалентний шум зі спектром $S(f) \sim 1/f^{0.7}$, який відображається у спектрі потужності флуктуацій інтенсивності люмінесценції розчину барвника (Рис.2). Із врахуванням цієї мультиплікативної поправки, для води і гліцерину значення a потрапляють в діапазон 1.1 – 1.3, що узгоджується з результатами Т.Муші та Г.Борбелі [6-8]. У чистих однорідних рідинах флуктуації інтенсивності розсіяного світла зумовлені виключно флуктуаціями енергії акустичних

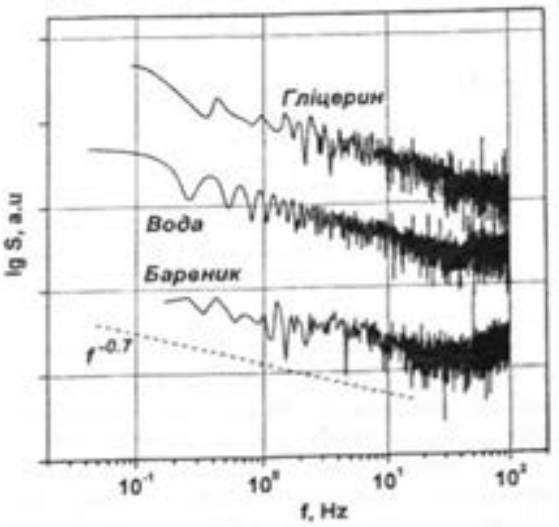


Рис.2 Спектри потужності флуктуацій інтенсивності світла, розсіяного на дистильованій воді та 80% розчині гліцерину, а також інтенсивності люмінесценції розчину барвника.

фононів. Відповідні спектри потужності не мають характеристичних особливостей [8].

В той же час, для широкого ряду рідин, зокрема рідин з водневими зв'язками, експериментально доведено існування так званої супрамолекулярної структури – нанорозмірних областей з особливою, відмінною від оточення, структурою упаковки молекул [13]. В таких середовищах неоднорідності виступають і як центри Релеївського розсіяння, і як центри локалізації акустичних фононів. Відповідно, у флуктуації інтенсивності розсіяного світла дають внесок обидва вище зазначені чинники. Їх різні вагові внески зумовлюють певні відмінності у спектрах потужності.

Kyiv National Taras Shevchenko University

Незважаючи на те, що такі спектри є безструктурними, апроксимація їх функцією $S(f) = C / f^a$ дає два незалежних параметри C та a, які містять інформацію про флуктуації перерізу розсіяння відповідних центрів та флуктуації числа таких центрів в об'ємі

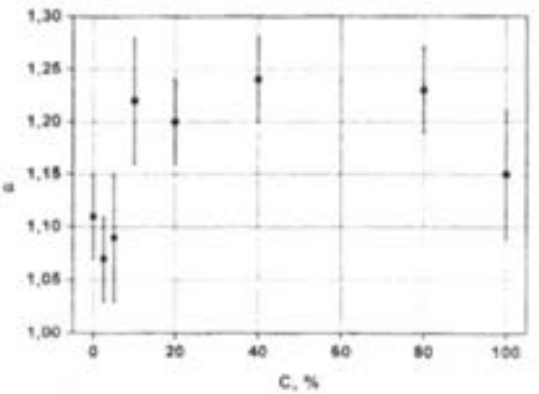


Рис. 3 Залежність показника a від концентрації гліцерину в розчині вода-гліцерин

розсіяння, тобто, про динамічні характеристики супрамолекулярної структури рідини.

На Рис.3 представлено залежність параметра a від концентрації розчину вода-гліцерин, яка має дві характерні області, що відповідають різним структурним фазам: «збідненій» та «збагаченій» [9]. Така концентраційна залежність для водно-гліцеринового розчину узгоджується з даними діелектрометрії [10] та спектроскопії [11], і є характерною для міцелярних систем. Тобто, структура розчину при малих та великих концентраціях однієї зі складових реалізується у формі співіснування матриці-розчинника та нанорозмірних асоціатів іншої рідини.

Висновки

Виміряно низькочастотні флуктуації інтенсивності світла, розсіяного на рідинних системах з водневими зв'язками: дистильованій воді та водно-гліцеринових розчинах з різною концентрацією. Обраховано спектри потужності відповідних часових рядів, які в діапазоні 0.1 – 50 Гц відповідають залежності $S(f) \sim 1/f^a$.

Показано, що параметр a залежить від типу рідини і концентрації розчину. Таку залежність можна пояснити різними внесками процесів, які формують загальну картину низькочастотних флуктуацій.

Залежність параметру a від концентрації узгоджується з відомими аномаліями водно-гліцеринового розчину і підтверджує неелементарну організацію надмолекулярної структури рідинних систем з водневими зв'язками.

Список використаних джерел

1. *Ф.Р.Чернихов.* Сверхмедленные колебания светорассеяния в жидкостях разного типа // Биофизика. -1990. -35(5). -С.717-721.
2. *В.И.Лобышев, Б.Д.Рыжиков, Р.Э.Шихлинская.* Спонтанные и индуцированные внешними электромагнитными полями долговременные переходные процессы в разбавленных водных растворах глицил триптофана и воде // Биофизика. -1998. -43(4). -С.710-715.
3. *Л.А.Булавін, А.В.Якунов, М.М.Білий.* Прояв повільних флуктуацій структури води в спектрах комбінаційного розсіяння світла // Фізика живого. -2005. -13(1). -С.43-50.
4. *B.Weissman.* 1/f noise and other slow, nonexponential kinetics in condensed matter // Reviews of Modern Physics. -1988. -Vol.60(2) -P.537-571.
5. *T.Musha, G.Borbely, S. Minoru.* 1/f Phonon-Number Fluctuations in Quarz Observed by Laser Light Scattering // Phys. Rev. Letters. -1990. -Vol.64(20). -P.2394-2397.
6. *T.Musha, G.Borbely.* 1/f Fluctuations of Phonon Energy in Water // Jpn. J. Appl. Phys. -1992. -Vol.31(3B). -P.370-371.
7. *T.Tohei, T.Musha.* 1/f Fluctuations in LiCl Solution // Jpn. J. Appl. Phys. -1996. -Vol.35(3). -P.1781-1785.
8. *G.Borbeli.* 1/f phonon number fluctuations in pure liquids // Journal on communications. -1995. -Vol.XLVI(2). -P.32-35.
9. *I.I.Adamenko, L.A.Bulavin, V.Ilyin, S.A.Zelinsky, K.O.Moroz.* Anomalous behaviour of glycerol-water solutions // Journal of Mol.Liquids. - 2006. -Vol.127(1-3). -P.90-92.
10. *A.Puzenko, Y.Hayashi, Y.Feldman.* Space and time scaling in glycerol–water mixtures // Non-Crystalline Solids. -2007. -Vol.353. -P.4518-4522.
11. *Л.А.Булавін, М.М.Білий, А.В.Максимов, А.В.Якунов.* Прояв фрактальної структури рідинних систем в коливальних спектрах розчину гліцерин-вода // Доповіді НАН України. -2009(2). -С.73-78.
12. *И.Л.Фабелинский.* Молекулярное рассеяние света //Наука. -1965. -521.
13. *M.Sedlak.* Large-scale supramolecular structure in solutions of low molarmass compounds and mixtures of liquids // J.Phys.Chem.B. -2006. -Vol.110(9). -P.4329-4338.

Надійшла до редколегії 12.06.2012

Kyiv National Taras Shevchenko University

Підписано до друку 05.09.2012.
Формат 70x100 1/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 29,99. Наклад 350 прим.
Зам. № 162.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Есплanадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел./факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail iaa@dstati.kiev.ua

Kyiv National Taras Shevchenko University