



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 2

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2012

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №2, 2012**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, головний редактор;
Хусаїнов Денис Ях'євич, доктор фізико-математичних наук, професор, заступник головного редактора, відповідальний за видання;
Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
Волошин Олексій Федорович, доктор технічних наук, професор;
Гарашенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Сжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Заславський Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, доцент;
Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Кудін Володимир Іванович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
Макарець Микола Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Перестюк Микола Олексійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
Погорілий Сергій Дем'янович, доктор технічних наук, професор;
Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, відповідальний секретар;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмельюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, технічний редактор, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Безушак О.О., Рябухо О.М. Ендоморфізми та спряженість за Сушкевичем у напівгрупі перетворень зліченної множини	7
Добровська І.А., Майборода Р.С. Оцінювання параметрів лінійної регресії з похибками в змінних за допомогою від'ємних ймовірностей	12
Млавець Ю.Ю. $F_\mu(\Omega)$ – простори випадкових величин з експоненціальною функцією μ	19
Рагуліна О.Ю. Оцінки і властивості ймовірності небанкрутства страхової компанії в класичній моделі ризику за умови розміщення капіталу на фінансовому (B,S)-ринку	23
Ревенко Г.О. Інволютивна алгебра, утворена напівгруповою операторів	31
Сахно Л.М. Дослідження інтегралів від квадрату періодограми та їх застосування до статистичного параметричного оцінювання	35
Семенота М.Ф., Джума Л.М. Про (a,d)-антимігнічні розмітки графів	39
Турчин С.В. Посилений закон великих чисел для послідовностей випадкових величин з просторів Орліча	46

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Горошко О.О., Лебедева І.В., Григор'єв С.Ю. Рух гіроскопа зі сферичною опорною поверхнею на горизонтальній площині	51
Григоренко О.Я., Сфімова Т.Л., Власова І.В. Вільні коливання квадратних анізотропних пластин зі змінною товщиною шарів	55
Оксенчук Н.Д. Вплив аустеніт-мартенситного перетворення на напружений стан сталевго диска при імпульсному тепловому опроміненні	59
Штецюк О.Д. Гранична поведінка математичного сподівання повної енергії осцилятора при зовнішньому випадковому збуренні	65

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Антонова І.А. Властивості операторів нерухокої точки в предикатних алгебрах	73
Бичков О.С. Стійкість імпульсних нечітких гібридних автоматів	79
Бомба А.Я., Кузьменко А.П., Гладка О.М. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей	87
Верченко А.П., Сторожук А.І. Аналіз завантаженості дороги за відеопотоком	95
Галкін О.А. Застосування опорно-векторних машин в інтелектуальному аналізі даних	99
Галкіна О.А. Генерація дерев сценаріїв для багатоступеневих стохастичних проблем	105
Галкін О.В., Проватар О.І., Катериноч Л.О., Верес М.М., Заміховський А.А., Концепція адаптивного мовлення та системи автоматичної підготовки контенту	111
Глушко І.М. Розширена (некласична) таблицна алгебра	117
Джалладова І.А., Хусайнова О.С. Деякі проблеми динаміки однієї математичної моделі ринку вільної конкуренції	125
Ивохин Е.В., Аджубей Л.Т. Об одном подходе к моделированию нечетких дискретных динамических систем	130
Карнаух Т.О. Відстані в синтаксичних просторах	134
Крак Ю.В., Сфімов Г.М., Тернов А.С. Технологія аналізу емоційних станів обличчя людини для правильного розуміння жестової мови	140
Крак Ю.В., Кудін Г.І., Шкільнюк Д.В. Удосконалення методів векторного аналізу та гіперплощинної класифікації для розпізнавання елементів дактильної мови	144
Лівінська Г.В. Багатоканальні мережі з періодичним зовнішнім навантаженням	149
Лук'янова О.О. Про прискорення обчислень знаходження структурних інваріантів при компонентному аналізі CN_1 -мереж	155
Ліндер Я.М. Апроксимація максимальної множини практичної стійкості нелінійного диференціального включення з імпульсним впливом	161
Макушенко І.А. Про двокритеріальну оптимізаційну задачу для багатоканальної мережі марковського типу	165

Марченко О.О. Порівняння методів онтологічного семантичного аналізу та алгоритмів латентного семантичного аналізу	169
Машенко С.О. Рівноваги в загальних іграх з нечіткою множиною цілей гравців	175
Мічута О.Р., Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію засоленних ґрунтів в неізотермічних умовах в двовимірному випадку	181
Нагірна А.М., Семенов В.В. Оптимізація вибору програмного забезпечення на основі багатокритеріальних моделей на нечітко заданих комбінаторній множині	188
Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Побудова секвенційних числень чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік однозначних часткових предикатів	194
Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського освітнього стандарту з інформатики та Computer Science 2008	202
Поляков С.А. Операційна семантика OLAP запитів	210
Порхун О.В. Кластеризація текстів за фонічними ознаками з використанням нейронної мережі Кохонена	214
Росада Т.В., Скляр А.В. Властивості слабкоструктурованих даних з багатозначним іменуванням та їх використання	218
Семенов В.В. Модель формування середнього класу на основі індексів поляризації	228
Скобелєв В.В. Автомати на многовидах з алгеброю	234
Тимашов О.О., Зінько П.М. Про автоматизовану систему управління підприємством в реальному часі	239
Тимофєєв В.Г., Проблема виконуваності у композиційно-номінативних логіках кванторно-еквівалентного рівня зі слабкою рівністю	245
Чабанюк Я.М., Горун П.П. Асимптотика стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі усереднення	251
Шатирко А.В. Стабілізація в системах прямого регулювання з запізнюванням за допомогою функціоналів Ляпунова-Красовського	257

РАДІОФІЗИКА

Асламова Л.І., Меленевська Н.В., Мірошніченко Н.С., Грабовська Е.В. Оптимізація режимів роботи цифрових рентгенодіагностичних комплексів для зменшення доз опромінення пацієнтів	263
Веклич А.М., Безпалий О.О., Опанюк І.І., Прибійко Д.С., Борецький В.Ф., Лебідь А.В., Фесенко С.О. Визначення електричних та випромінювальних характеристик електродугового розряду	267
Григорук В.І., Онисько Ю.Т., Слісиченко Ю.А. Субхвильові кварцові волоконні світловоди - створення та застосування	271
Корнієнко М.С., Григорук В.І., Макара В.А., Корнієнко О.М., Шевченко В.Б. Спектральні дослідження станів води і множинних резонансів в нано- і мезопористому кремнію	275
Мойсеєнко В.А. Про збудження магнітостатичних хвиль мікросмужковими антенами	279
Павлюк С.П., Кузьмич Р.Ю. Стабілізація виділеної потужності при протіканні ударного струму крізь напівпровідниковий діод ний кристал	283
Первах Ю.О., Федоров В.В., Особливості розподілу електричного поля в 1-D фотонних кристалах з трьома пів хвильовими резонаторами різної природи	287

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д., Кулініч А.В., Остапчук Ю.Л., Рудніков С.Г. В'язкість розчину ізомасляна кислота - вода поблизу критичної температури розшарування	293
Григор'єв А.М., Королович В.Ф., Кузовков Ю.Г., Маматова Д.О., Мороз К.О. Теплофізичні властивості системи двохатомних частинок, що взаємодіють за допомогою потенціалу Кіхари	295
Лисов В.І., Цареградська Т.Л., Турков О.В., Сасіко Г.В. Вплив кріообробки на термічну стабільність аморфних сплавів	299
Опанюк А.П. Аналіз даних вимірювань параметрів анізотропії ультразвукових швидкостей	303
Охріменко Б.А., Юшко О.О. Вплив деформації молекули SO ₂ на прояв девіації S-O зв'язку	307
Плющай І.В., Макара В.А., Плющай О.І. Спін-поляризований розрахунок електронних спектрів крайової дислокації в кремнії	315

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.53

О.О.Безущак, к.ф.н., доцент,
О.М.Рябухо, к.ф.н., доцент**Ендоморфізми та спряженість за
Сушкевичем у напівгрупі перетворень
зліченної множини**

У роботі характеризуються ендоморфізми напівгрупи перетворень зліченної множини, які визначаються за конструкціями Сушкевича, і описується нове відношення еквівалентності на цій напівгрупі, що узагальнює відношення спряженості.

Ключові слова: ендоморфізм, напівгрупа перетворень, відношення спряженості.

E-mail: rom.olena@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

O.O.Bezushchak, Ph.D., Associate Professor,
O.M.Ryabuh, Ph.D., Associate Professor**Endomorphisms and conjugation after
Sushkevich in the transformations
semigroup of countable set**

Endomorphisms of the transformations semigroup of countable set which are determined after Sushkevich's contractions are considered in this article. It is described the new relation of equivalence on this semigroup which is summarized the relation of conjugation.

Key Words: endomorphism, transformations semigroup, relation of conjugation.

1 Вступ

А.К.Сушкевич був одним з ініціаторів дослідження напівгруп перетворень над нескінченними множинами. Цій проблематиці присвячені, зокрема, його праці [1] – [5] та розділ монографії [1]. А.К.Сушкевич уперше ввів до розгляду напівгрупи ін'єктивних і сюр'єктивних перетворень нескінченних множин, охарактеризував їх основні властивості і показав, яку роль вони відіграють при вивченні будови всієї напівгрупи перетворень ([2], [3], [4]). При цьому у статтях [2] та [3] він розглядає спеціальні розклади бієктивних перетворень злічених множин і показує, як можна їх використовувати при вивченні піднапівгрупової будови напівгрупи всіх перетворень таких множин. Підходи А.К.Сушкевича природним чином розвиваються до впровадження спеціального типу ендоморфізмів і спеціальної спряженості елементів у напівгрупі перетворень зліченної множини, які після його роботи [1] ніким не досліджувалися, оскільки ця робота залишилася мало відомою серед фахівців з теорії напівгруп.

Метою нашої замітки є характеристика ендоморфізмів напівгрупи перетворень зліченної множини, які визначаються за конструкціями Сушкевича, і опис нового відношення еквівалентності на цій напівгрупі, що узагальнює відношення спряженості, задане на ній.

**2 Необхідні визначення та допоміжні
результати**

Ми ототожнюватимемо зліченну множину з множиною натуральних чисел N . Нехай $T(N)$ – напівгрупа всіх (скрізь визначених) перетворень множини N , $In(N)$ – її піднапівгрупа ін'єктивних перетворень, а $Sur(N)$ – піднапівгрупа сюр'єктивних перетворень N . Перетином піднапівгруп $In(N)$ та $Sur(N)$ є, очевидно, симетрична група $S(N)$, а підгрупою, що ними породжується, є вся напівгрупа $T(N)$.

Далі ми скрізь вважатимемо, що композиція (добуток) перетворень із $T(N)$ діє на числа з N зліва направо, тобто для довільних $f, g \in T(N)$ та $x \in N$

$$(f \cdot g)(x) = g(f(x)).$$

У роботі [1] доведено таке твердження:

Лема 1. Для довільної підстановки $f \in S(N)$ існують перетворення $g \in In(N)$ та $h \in Sur(N)$ такі, що має місце рівність

$$f = g \cdot h, \quad (1)$$

причому перетворення g можна вибрати довільним чином, а перетворення h при фіксованому g – кількома способами.

З леми 1 випливає, що для кожної підстановки $f \in S(N)$ існує безліч розкладів вигляду (1). Зокрема, це буде правильно і для тотожної підстановки $e \in S(N)$.

Означення 1. Пару перетворень (g, h) , де $g \in \text{In}(N)$, $h \in \text{Sur}(N)$, назвемо допустимою парою, якщо виконується умова допустимості, а саме

$$g \cdot h = e. \quad (2)$$

Нехай U — множина всіх допустимих пар перетворень із напівгрупи $T(N)$. Тоді множина U має потужність континуум, оскільки перша компонента допустимої пари може бути довільним перетворенням з $\text{In}(N)$, а напівгрупа $\text{In}(N)$ має потужність континуум. Введемо на множині U дію множення згідно з правилом

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_2 \cdot h_1), \quad (3)$$

де $g_1, g_2 \in \text{In}(N)$, $h_1, h_2 \in \text{Sur}(N)$.

Лема 2. Множина U відносно дії множення, визначеної рівністю (3), утворює моноїд.

Доведення. Переконаємося спочатку, що добуток допустимих пар є допустимою парою. Нехай $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in U$, тобто $g_1, g_2 \in \text{In}(N)$, $h_1, h_2 \in \text{Sur}(N)$, причому $g_1 \cdot h_1 = e$ та $g_2 \cdot h_2 = e$. Тоді для пари $(g_1 \cdot g_2, h_2 \cdot h_1)$, що є добутком (g_1, h_1) та (g_2, h_2) , згідно з рівністю (3) маємо:

а) перша її компонента $g_1 \cdot g_2$ є ін'єктивним перетворенням, бо добуток ін'єктивних перетворень — ін'єктивне;

б) друга її компонента $h_2 \cdot h_1$ є сюр'єктивним перетворенням, бо добуток сюр'єктивних перетворень — сюр'єктивне;

в) для компонент $g_1 \cdot g_2$ та $h_2 \cdot h_1$ виконується умова допустимості, оскільки

$$(g_1 \cdot g_2)(h_2 \cdot h_1) = g_1(g_2 \cdot h_2)h_1 = g_1 \cdot h_1 = e.$$

Пара (e, e) є допустимою. Вона відіграє роль нейтрального елемента для дії множення (3). Залишилося пересвідчитися, що так визначена дія множення асоціативна. При цьому маємо з одного боку:

$$\begin{aligned} [(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)] \cdot (g_3, h_3) &= (g_1 \cdot g_2, h_2 \cdot h_1)(g_3, h_3) = \\ &= ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3, h_3 \cdot (h_2 \cdot h_1)), \end{aligned}$$

а з іншого:

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) \cdot [(g_2, h_2) \cdot (g_3, h_3)] &= (g_1, h_1)(g_2 \cdot g_3, h_3 \cdot h_2) = \\ &= (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3), (h_3 \cdot h_2) \cdot h_1). \end{aligned}$$

І оскільки праві частини цих рівностей збігаються, то рівними будуть також і ліві їх частини. Тим самим лему доведено. $\square$

Нагадаємо, що два перетворення $g, h \in T(N)$ називаються спряженими, якщо існує підстановка $u \in S(N)$ така, що має місце рівність

$$g = u^{-1}hu.$$

Відношення спряженості є відношенням еквівалентності на всій напівгрупі $T(N)$. Класи еквівалентності якої називаються класами спряженості.

Лема 3. Перетворення, спряжене до перетворення з $\text{In}(N)$, міститься в $\text{In}(N)$, а перетворення, спряжене до перетворення з $\text{Sur}(N)$, міститься в $\text{Sur}(N)$.

Доведення — безпосередня перевірка.

Відображення φ_u напівгрупи $T(N)$ в себе, що визначене при заданому $u \in S(N)$ рівністю

$$\varphi_u(w) = u^{-1}wu, \quad w \in T(N),$$

називається внутрішнім автоморфізмом $T(N)$. Тоді спряженість елементів $g, h \in T(N)$ означає, що вони належать одній орбіті деякого внутрішнього автоморфізму. Легко видно, що група всіх внутрішніх автоморфізмів напівгрупи $T(N)$ ізоморфна симетричній групі $S(N)$.

Для скінченної множини X класи спряжених елементів напівгрупи $T(X)$ характеризуються в термінах розкладу перетворень на добуток циклів і ланцюгів (див. напр. [6]). Для напівгрупи $T(N)$ характеристика зливається без змін, потрібно лише впровадити поняття нескінченного циклу та нескінченного ланцюга.

3 Ендоморфізми Сушкевича

Нехай $(g, h) \in U$ — деяка допустима пара перетворень. Визначимо відображення $\varphi_{g,h}$ напівгрупи $T(N)$ в себе згідно з правилом

$$\varphi_{g,h}(u) = h \cdot u \cdot g, \quad u \in T(N). \quad (4)$$

Теорема 1. Для довільної допустимої пари $(g, h) \in U$ відображення $\varphi_{g,h}$ є автоморфізмом напівгрупи $T(N)$ в себе.

Доведення. 1). Пересвідчимося, що відображення $\varphi_{g,h}$, визначене рівністю (4), є ендоморфізмом $T(N)$. Оскільки $g \cdot h = e$, то для довільних перетворень $u, v \in T(N)$ маємо такий ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned}\varphi_{g,h}(uv) &= h \cdot uv \cdot g = h \cdot u(g \cdot h) \cdot v \cdot g = (hug) \cdot (hvg) = \\ &= \varphi_{g,h}(u) \cdot \varphi_{g,h}(v).\end{aligned}$$

Отже, $\varphi_{g,h}$ — ендоморфізм.

2) Покажемо, що ендоморфізм $\varphi_{g,h}$ є мономорфізмом, тобто для будь-яких перетворень $u, v \in T(N)$ з нерівності $u \neq v$ випливає нерівність $\varphi_{g,h}(u) \neq \varphi_{g,h}(v)$. Нехай від супротивного існують такі перетворення $u, v \in T(N)$, $u \neq v$, що $\varphi_{g,h}(u) = \varphi_{g,h}(v)$. Тоді має місце рівність $h \cdot u \cdot g = h \cdot v \cdot g$. Множачи цю рівність зліва на перетворення g , а справа — на перетворення h , дістаємо

$$g(h \cdot u \cdot g)h = g(h \cdot v \cdot g)h$$

або при іншому розташуванні дужок

$$(gh) \cdot u \cdot (gh) = (gh) \cdot v \cdot (gh).$$

Оскільки $g \cdot h = e$, то з останньої рівності дістаємо $u = v$, що суперечить припущенню. Теорему доведено. $\square$

Ендоморфізми виду (4) називають ендоморфізмами Сушкевича.

Зауваження. Обернення до мономорфізму $\varphi_{g,h}$ визначається умовою

$$\varphi_{g,h}^{-1}(u) = g \cdot u \cdot h, \quad u \in \text{Im } \varphi_{g,h} \quad (5)$$

(тут символом $\text{Im } f$ позначено образ відображення f). Справді, оскільки для $v \in T(N)$ $\varphi_{g,h}(v) = h \cdot v \cdot g$, а кожен елемент з $\text{Im } \varphi_{g,h}$ має вигляд $\varphi_{g,h}(v)$ для деякого $v \in T(N)$, то отримуємо

$$g \cdot (\varphi_{g,h}(v)) \cdot h = g \cdot hvg \cdot h = v,$$

бо пара (g, h) допустима і $gh = e$. Отже, відображення $\varphi_{g,h}^{-1} : u \rightarrow g \cdot u \cdot h$, $u \in \text{Im } \varphi_{g,h}$, є оберненням до $\varphi_{g,h}$.

Наступне твердження характеризує певні властивості ендоморфізмів Сушкевича.

Теорема 2. 1) Ендоморфізм $\varphi_{g,h}$, де $(g, h) \in U$, буде автоморфізмом напівгрупи $T(N)$ тоді й лише тоді, коли g та h — взаємно обернені підстановки, тобто $g, h \in S(N)$, $g^{-1} = h$.

2) Усі ендоморфізми Сушкевича відносно дві суперпозиції утворюють напівгрупу, яка ізоморфна напівгрупі допустимих пар U з дією множення (3).

Доведення. 1) Нехай ендоморфізм $\varphi_{g,h}$ є автоморфізмом напівгрупи $T(N)$. Це означає, зокрема, що $\varphi_{g,h}$ є сюр'єктивним відображенням, тобто для довільного перетворення $u \in T(N)$ існує перетворення $v \in T(N)$ таке, що $\varphi_{g,h}(v) = u$. Нехай перетворення $h \in \text{Sur}(N)$ не є бієкцією. Тоді існують числа $a_1, a_2 \in N$ такі, що $a_1 \neq a_2$, але $h(a_1) = h(a_2)$. Тому для довільного перетворення $f \in T(N)$ має місце ланцюжок рівностей

$$(h \cdot f)(a_1) = f(h(a_1)) = f(h(a_2)) = (h \cdot f)(a_2).$$

і для перетворення $\varphi_{g,h}(v)$ дістаємо

$$(\varphi_{g,h}(v))(a_1) = (h \cdot v \cdot g)(a_1) =$$

$$= (h \cdot v \cdot g)(a_2) = (\varphi_{g,h}(v))(a_2),$$

тобто $\varphi_{g,h}(v)$ не є бієкцією. Отримали протиріччя. Отже, перетворення h мусить бути бієктивним.

Нехай тепер перетворення g є ін'єктивним. Тоді оскільки $g(N) \subset N$ і для довільного перетворення $f \in T(N)$ виконується включення $(g \cdot f)(N) \subset N$, то перетворення g також має бути бієктивним. Залишилося зауважити, що пара бієктивних перетворень (g, h) буде допустимою тоді й лише тоді, коли $g^{-1} = h$.

Зворотнє твердження є очевидним, бо ендоморфізми Сушкевича визначаються допустимими парами (g, h) , де $g, h \in S(N)$, $g^{-1} = h$, і є внутрішніми автоморфізмами напівгрупи $T(N)$.

2) Композиція ендоморфізмів Сушкевича $\varphi_{g,h} \circ \varphi_{g',h'}$ діє на довільний елемент $u \in T(N)$ таким чином:

$$\begin{aligned}(\varphi_{g,h} \circ \varphi_{g',h'})(u) &= \varphi_{g',h'}(\varphi_{g,h}(u)) = \varphi_{g',h'}(h \cdot u \cdot g) = \\ &= h'(h \cdot u \cdot g)g' = (h'h) \cdot u \cdot (gg') = \varphi_{gg',h'h}(u).\end{aligned}$$

Це означає, що добуток ендоморфізмів Сушкевича знову буде ендоморфізмом Сушкевича, який задається допустимою парою $(gg', h'h)$.

Розглянемо відображення

$$F: (g, h) \rightarrow \varphi_{g,h}, \quad (g, h) \in U. \quad (6)$$

Легко видно, що це відображення визначено коректно і є сюр'єктивним. Покажемо, що воно також є і ін'єктивним, тобто при $(g, h) \neq (g', h')$ отримаємо $\varphi_{g,h} \neq \varphi_{g',h'}$. Справді, нехай для деяких допустимих пар $(g, h), (g', h') \in U$, $(g, h) \neq (g', h')$, маємо $\varphi_{g,h} = \varphi_{g',h'}$. Це означає, що для довільного перетворення $u \in T(N)$ справджується рівність

$$h \cdot u \cdot g = h' \cdot u \cdot g'. \quad (7)$$

Домножимо її зліва на g (ін'єктивне перетворення), а справа на h' (сюр'єктивне перетворення), одержимо

$$g(h \cdot u \cdot g)h' = g(h' \cdot u \cdot g')h'.$$

І оскільки $gh = e$, $g'h' = e$, то звідси дістанемо рівність

$$u \cdot (gh') = (g'h') \cdot u,$$

що виконується при будь-яких $u \in T(N)$. Але наліггрупа $T(N)$ є наліггрупою без центра. Тому рівність $\varphi_{g,h} = \varphi_{g',h'}$ за умови $(g, h) \neq (g', h')$ неможлива. Таким чином, відображення (6) задане коректно і є бієкцією.

Крім того, для довільних допустимих пар $(g, h), (g', h') \in U$ маємо

$$\begin{aligned} F((g, h) \cdot (g', h')) &= F((g \cdot g', h' \cdot h)) = \varphi_{gg', h'h} = \\ &= \varphi_{g,h} \circ \varphi_{g',h'} = F((g, h)) \circ F((g', h')), \end{aligned}$$

тобто відображення F є гомоморфізмом. Отже, із сказаного вище випливає, що F — ізоморфізм, і теорему доведено. $\square$

Наслідок 1. Кожен бієктивний ендоморфізм Сушкевича є внутрішнім автоморфізмом наліггрупи $T(N)$.

Наліггрупу ендоморфізмів Сушкевича наліггрупи $T(N)$ позначимо символом $\text{End}_S T(N)$. Ця наліггрупа містить підгрупу $\text{Int} T(N)$ внутрішніх автоморфізмів $T(N)$. Якщо $\varphi, \psi \in \text{End}_S T(N)$ не є внутрішніми автоморфізмами $T(N)$, то їх суперпозиція $\varphi \circ \psi$ також не буде внутрішнім автоморфізмом.

Покладемо $\text{Sing}(N) = T(N) \setminus S(N)$. Підмножина $\text{Sing}(N)$ є підналіггрупою в $T(N)$. Для довільної непорожньої підмножини $X \subseteq N$

позначимо символом $\text{Sing}(N, X)$ множини тих перетворень $f \in \text{Sing}(N)$, образ $\text{Im} f$ яких міститься в X . Тоді $\text{Sing}(N, X)$ буде підналіггрупою $\text{Sing}(N)$.

Теорема 3. 1) Нехай $\varphi_{g,h} \in \text{End}_S T(N)$ — деякий ендоморфізм Сушкевича, який не є внутрішнім автоморфізмом наліггрупи $T(N)$. Тоді має місце таке включення

$$\varphi_{g,h}(T(N)) \subseteq \text{Sing}(N, \text{Im} g). \quad (8)$$

2) Група $\text{Int} T(N)$ є максимальною підгрупою в наліггрупі $\text{End}_S T(N)$.

Доведення. 1) Нехай $(g, h) \in U$ — така допустима пара, що ендоморфізм $\varphi_{g,h}$ не є внутрішнім автоморфізмом $T(N)$. Пересвідимося спочатку, що образ $\varphi_{g,h}(T(N))$ міститься в $\text{Sing}(N)$, тобто не існує перетворення $u \in T(N)$ такого, що $\varphi_{g,h}(u) \in S(N)$. Припустимо від супротивного, що таке перетворення u існує, і нехай $\varphi_{g,h}(u) = v$, $v \in S(N)$. Останнє означає, що $h \cdot u \cdot g = v$. І позаяк ендоморфізм $\varphi_{g,h}$ не є внутрішнім автоморфізмом, то $h \in \text{Sur}(N) \setminus S(N)$. Тому існує така пара чисел $k, l \in N$, $k \neq l$, що $h(k) = h(l)$. Звідси

$$(h \cdot u \cdot g)(k) = g(u(h(k))) = g(u(h(l))) = (h \cdot u \cdot g)(l),$$

тобто перетворення $h \cdot u \cdot g = v$ не є ін'єкцією. Дістали суперечність, яка й свідчить, що наше припущення було неправильним. Тому для довільних перетворення $u \in T(N)$ та числа $k \in N$ виконується

$$(\varphi_{g,h}(u))(k) = g(u(h(k))) \in \text{Im} g,$$

а отже, включення (8) має місце.

2) Додамо до групи $\text{Int} T(N)$ деякий ендоморфізм Сушкевича $\varphi_{g,h}$ такий, що $\varphi_{g,h} \notin \text{Int} T(N)$. Одиничним елементом моноїда $M = (\text{Int} T(N), \varphi_{g,h})$ є тотожний автоморфізм $e: T(N) \rightarrow T(N)$, де $e(g) = g$ для довільного перетворення $g \in T(N)$. Але M не є групою. Справді, ендоморфізм $\varphi_{g,h}$ визначається допустимою парою $(g, h) \in U$ і не є бієктивним перетворенням, бо інакше (згідно наслідку 1) $\varphi_{g,h}$ належав би групі $\text{Int} T(N)$. Але $\varphi_{g,h}$ є ін'єкцією (теорема 1). Тому об'єднаний ендоморфізм (5) визначений не на всій множині N . Отже, для перетворення $\varphi_{g,h}$ не існує ендоморфізму $\lambda \in \text{End}_S T(N)$, такого що $\lambda \varphi_{g,h} = \varphi_{g,h} \lambda = e$,

і мноюїд M не є групою. Унаслідок довільності вибору ендоморфізма $\varphi_{g,h} \in \text{Int}T(N)$ отримуюмо, що $\text{Int}T(N)$ є максимальною підгрупою напівгрупи $\text{End}T(N)$. Теорему доведено. $\square$

4 Спряженість у сенсі Сушкевича

Використовуючи поняття допустимої пари перетворень можна природним чином визначити нове відношення спряженості елементів у напівгрупі $T(N)$, яке є поглибленням звичайної спряженості, визначеної в п. 2.

Означення 2. Перетворення $f, g \in T(N)$ назвемо спряженими за Сушкевичем (позначимо $f \sim_S g$), якщо існують такі допустимі пари $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in U$, що мають місце рівності

$$f = g_1 \cdot g \cdot h_1, \quad g = g_2 \cdot f \cdot h_2. \quad (9)$$

Теорема 4. Спряженість за Сушкевичем є відношенням еквівалентності на $T(N)$.

Доведення. Пересвідчимось, що спряженість за Сушкевичем $\sim_S$ є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням. Оскільки пара (e, e) є допустимою, то відношення $\sim_S$ є рефлексивним. Якщо $f \sim_S g$, де $f, g \in T(N)$, то існують пари $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in U$ такі, що виконуються рівності (9). А оскільки ці рівності симетричні щодо заміни f та g , то маємо $g \sim_S f$.

Нехай тепер $f \sim_S g$ та $g \sim_S h$. Це означає, що існують допустимі пари $(g_1, h_1), (g_2, h_2)$ та $(g'_1, h'_1), (g'_2, h'_2)$ такі, що

$$f = g_1 \cdot g \cdot h_1, \quad g = g_2 \cdot f \cdot h_2, \quad g = g'_1 \cdot h \cdot h'_1, \quad h = g'_2 \cdot g \cdot h'_2.$$

Звідси отримуємо рівності

$$f = g_1 \cdot g'_1 \cdot h \cdot h'_1 \cdot h_1, \quad h = g'_2 \cdot g_2 \cdot f \cdot h_2 \cdot h'_2.$$

Оскільки $\text{In}(N)$ та $\text{Sur}(N)$ – напівгрупи, то перетворення $g_1 \cdot g'_1, g'_2 \cdot g_2$ містяться в $\text{In}(N)$, а $h'_1 \cdot h_1, h_2 \cdot h'_2$ належать до $\text{Sur}(N)$. Крім того,

$$e = g_1 \cdot h_1 = g_1 \cdot e \cdot h_1 = g_1 \cdot g'_1 \cdot h'_1 \cdot h_1 = e.$$

Аналогічно $g'_2 \cdot g_2 \cdot h_2 \cdot h'_2 = e$, тобто пари $(g_1 \cdot g'_1, h'_1 \cdot h_1)$ та $(g'_2 \cdot g_2, h_2 \cdot h'_2)$ є допустимими. Це означає, що $f \sim_S h$ і відношення $\sim_S$ транзитивне. Таким чином, $\sim_S$ є еквівалентністю. Теорему доведено. $\square$

Зауваження. Кожні два перетворення з $T(N)$, спряжені в звичайному сенсі, будуть спряженими в сенсі Сушкевича. Справді, якщо перетворення $u, v \in T(N)$ є спряженими, то існує підстановка $f \in S(N)$ така, що $u = f^{-1}vf$, а отже, $v = fuf^{-1}$. А тому допустимі пари (f^{-1}, f) та (f, f^{-1}) будуть визначати спряженість перетворень u та v в сенсі Сушкевича. Обернене не є правильним, а саме, із спряженості перетворень у сенсі Сушкевича не випливає їх спряженість у звичайному розумінні. Відповідні приклади можна легко навести.

Отже, задача характеристизації класів спряженості в напівгрупі $T(N)$ або в її піднапівгрупах має самостійний інтерес і, на наш погляд, може зацікавити дослідників з теорії напівгруп перетворень.

Література

1. А.К.Сушкевич, Теория обобщенных групп. Харків – Київ, ДНТБУ, 1937, 176с.
2. А.К.Сушкевич, Исследования о бесконечных подстановках // Записки НО і ІМ ХДУ і Харківського математичного товариства, 18(1940), 27–37.
3. А.К.Сушкевич, Исследования о бесконечных подстановках // Сборник посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. Под. ред.: О.Ю.Шмидта, Б.Н.Делоне, Н.Г.Чуботарева. – Госуд. изд-во Технико-теоретической литературы. – Москва-Ленинград, 1940, 245–255.
4. А.К. Suschkewitch, Über einen merkwürdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen // Записки Харківського Математичного товариства, сер. 4, т.9(1934), 39–44.
5. A.K. Suschkewitch, Über suchungen über verallgemeinerten Substitutionen // Atti del Congresso Internaz. del Matem. t II, Bologna, 1928. p. 147–157.
6. Stephen Lipscomb, Symmetric inverse Semigroups. Math Surveys and Monographs, vol 46, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1996, 167p.

Надійшла до редакції 01.03.2011

УДК 519.21

І. А. Добровська, асп.
Р. Є. Майборода, докт. фіз.-мат. наук, проф.**Оцінювання параметрів лінійної регресії з похибками в змінних за допомогою від'ємних ймовірностей**

За допомогою застосування концепції від'ємних ймовірностей, методу найменших квадратів та методу Монте-Карло побудовано оцінки параметрів лінійної регресії з похибками в змінних. Доведено консистентність та асимптотичну нормальність цих оцінок.

Ключові слова: від'ємні ймовірності, лінійна регресія.

E-mail: dobrira@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Вступ

У даній роботі розглядається задача оцінки параметрів моделі лінійної регресії з похибками у змінних. Ми пропонуємо новий підхід до цієї задачі, що використовує концепцію від'ємних ймовірностей.

У моделі лінійної регресії з похибками у змінних вважається, що "справжні" змінні ξ_j та η_j пов'язані між собою строгою лінійною залежністю:

$$\eta_j = b_0^* + b_1^* \xi_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

але ці змінні спостерігаються з похибками:

$$x_j = \xi_j + \delta_j, \quad y_j = \eta_j + \epsilon_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

де $\{\xi_j, j = \overline{1, n}\}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини (н. о. р. в. в.), $\{\epsilon_j, j = \overline{1, n}\}$ – н. о. р. в. в., $\{\delta_j, j = \overline{1, n}\}$ – н. о. р. в. в.

Потрібно за спостереженнями (x_j, y_j) оцінити b_0^* і b_1^* . Для оцінювання параметрів цієї моделі існує багато методів (див., наприклад, книгу [4]). Застосування звичайного МНК до спостережень (x_j, y_j) призводить до неконсистентних оцінок для b_0^* і b_1^* . Наша робота мотивована методом SIMEX, запропонованим у 1994 році Дж. Куком і Л.А. Стефанським у роботі [5]. У цьому методі до спостережень x_j додаються додаткові похибки δ_j і розглядається оцінка МНК

І. А. Dobrovska, Ph.D. student
R. Y. Mayboroda, Ph.D.**The parameters of linear regression with errors in both variables estimation using negative probabilities**

The concept of negative probabilities, least squares method and Monte Carlo method were used to construct the estimators for linear errors-in-variables model. The consistency and asymptotic normality of obtained estimators is proved.

Key words: negative probabilities, linear regression.

для b_0^* і b_1^* по спостереженням $(x_j + \delta_j, y_j)$. Якби можна було додати похибку δ_j з дисперсією $D\delta_j = -D\epsilon_j$, то така оцінка була б консистентною. Але, без використання від'ємних ймовірностей, від'ємні дисперсії неможливі. Тому Стефанський та Кук запропонували додавати похибки δ_j з різними дисперсіями, а потім екстраполювати отримані оцінки до значення дисперсії $-D\epsilon_j$.

У даній статті ми робимо спробу побудувати консистентні оцінки використовуючи можливість від'ємних ймовірностей, які дозволяють формально розглядати випадкові величини з від'ємними дисперсіями.

Вперше від'ємні ймовірності використав у фізиці Є. Вігнер (1932 р.), який у роботі [9] запропонував функцію, що мала вигляд звичайного ймовірнісного розподілу, але брала від'ємні значення. Інший відомий фізик П. Дірак (1942 р.) у своїй роботі [6] визначив поняття від'ємної енергії. М. Бартлетт (1945 р.) у роботі [3] визначив від'ємні ймовірності математично та логічно. А.Ю. Хренніков (2009 р.) у роботі [7] першим ввів математичну теорію від'ємних ймовірностей, однак, не для дійсних чисел, а в структурі р-адичного аналізу. Граничні теореми для знайомих ймовірнісних мір розглянуті в роботах Ю.П. Студінева [1] та [2].

Далі в статті введено формальне означення від'ємних ймовірностей, розглянуті алгоритми побудови оцінок за їхньою допомогою, а також

доведені теореми про консистентність та асимптотичну нормальність отриманих оцінок. Поведінка оцінок на вибірках помірного обсягу досліджена методами імітаційного моделювання.

1 Ймовірнісний заряд і його властивості

1.1 Визначення поняття ймовірнісного заряду та його основні властивості

Нехай Ω – простір елементарних подій, F – сигма-алгебра випадкових подій. Визначимо поняття ймовірнісного заряду P на просторі (Ω, F, P) .

Означення 1. Будемо казати, що заряд $P: F \rightarrow \mathbb{R}$ є ймовірністю на сигма-алгебрі випадкових подій F , якщо $P(\Omega) = 1$ і $\forall A_n \in F, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$:

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

Випадкові події $A, B \in F$ будемо вважати незалежними, якщо $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Випадкового величиною будемо називати функцію $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, яка є вимірною відносно сигма-алгебри F . Випадкові величини ξ, η – незалежні, якщо $\forall A, B \in B(\mathbb{R})$:

$$P(\xi \in A, \eta \in B) = P(\xi \in A) \cdot P(\eta \in B).$$

Математичне сподівання та дисперсію визначимо стандартним чином, тобто:

$$E\xi = \int x P(dx), D\xi = E(\xi - E\xi)^2.$$

Зрозуміло, що оскільки P – заряд, то дисперсія $D\xi$ може бути від'ємною.

Теорема 1. Якщо випадкові величини ξ, η незалежні на просторі (Ω, F, P) , то $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню у випадку класичного ймовірнісного простору, яке наведене в роботі М.В. Карташова [7].

1.2 Зв'язок ймовірнісного заряду з класичною ймовірністю. Метод Монте Карло

Надалі ми будемо використовувати ймовірнісні заряди, які можна задати щільністю f відносно деякої невід'ємної ймовірнісної міри ρ , тобто

$$P(A) = \int_A f(x) \rho(dx).$$

При цьому, якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то

$$f_{\xi, \eta}(x_1, x_2) = f_{\xi}(x_1) \cdot f_{\eta}(x_2).$$

Нехай $\{\delta_j, j = \overline{1, n}\}$ – н. о. р. в. в. зі щільністю f відносно $\rho, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – борелева функція. Тоді

$$\begin{aligned} Eg(\delta_1, \dots, \delta_n) &= \int g(x_1, \dots, x_n) P(dx_1) \dots P(dx_n) \\ &= \int g(x_1, \dots, x_n) f(x_1) \dots f(x_n) \rho(dx_1) \dots \rho(dx_n). \end{aligned}$$

За посиленням законом великих чисел маємо, що для н. о. р. в. в. $\{\eta_j^i, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, B}\}$ з розподілом ρ має місце збіжність майже напевне (м. н.):

$$\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B g(\eta_1^i, \dots, \eta_n^i) f^i \xrightarrow{B \rightarrow \infty} Eg(\delta_1, \dots, \delta_n),$$

де $f^i = f(\eta_1^i) \dots f(\eta_n^i)$. Це можна використати для наближеного обчислення математичних сподівань за ймовірнісними зарядами, застосовуючи техніку методу Монте Карло.

2 Модель лінійної регресії з похибками в змінних

2.1 Метод оцінювання параметрів регресії

Розглянемо структурну модель лінійної регресії з похибками в змінних (1), (2). Припустимо, додатково, що:

(A1) $\{\xi_j, \epsilon_j, \delta_j, j = \overline{1, n}\}$ – незалежні між собою;

(A2) $E\epsilon_1 = E\delta_1 = 0, D\epsilon_1 = \sigma_{\epsilon}^2, D\delta_1 = \sigma_{\delta}^2,$

$0 < \sigma_{\epsilon}^2, \sigma_{\delta}^2 < \infty;$

(A3) $E\xi_1 = \mu, D\xi_1 = \sigma^2;$

(A4) $\sigma_{\epsilon}^2, \sigma_{\delta}^2$ – відомі, μ, σ^2 – невідомі.

Розглянемо спочатку звичайні функціонали МНК на "справжніх" і спостережних змінних:

$$J_n(b_0, b_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\eta_j - b_0 - b_1 \xi_j)^2,$$

$$J_n^*(b_0, b_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j)^2.$$

Очевидно, що мінімум $J_n(b_0, b_1)$ досягається на справжніх значеннях (b_0^*, b_1^*) та

$$J_n^*(b_0, b_1) = J_n(b_0, b_1) + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (\eta_j - b_0 - b_1 \xi_j)(\epsilon_j - b_1 \delta_j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\epsilon_j - b_1 \delta_j)^2.$$

Використовуючи посилення закон великих чисел, отримаємо наступні збіжності м. н.:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\eta_j - b_0 - b_1 \xi_j)(\epsilon_j - b_1 \delta_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(\eta_1 - b_0 - b_1 \xi_1)(\epsilon_1 - b_1 \delta_1) = 0;$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\epsilon_j - b_1 \delta_j)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(\epsilon_1 - b_1 \delta_1)^2 = \sigma_\epsilon^2 + b_1^2 \sigma_\delta^2 = c(b_1).$$

Отже,

$$|J_n^*(b_0, b_1) - J_n(b_0, b_1) - c(b_1)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

і

$$E J_n^*(b_0, b_1) = E J_n(b_0, b_1) + c(b_1).$$

Тепер додамо до спостережень x_j додаткові похибки δ_j , які задовольняють наступним умовам:

$$(A5) \quad \{\tilde{\delta}_j, j = \overline{1, n}\} - \text{н. о. р. в. в., } E \tilde{\delta}_j = 0;$$

$$(A6) \quad E(\xi_j - \mu) \tilde{\delta}_j = E \epsilon_j \tilde{\delta}_j = E \delta_j \tilde{\delta}_j = 0, \quad i, j = \overline{1, n},$$

причому $D \tilde{\delta}_j = -\sigma_\delta^2$ (це можна зробити, якщо ймовірності на просторі (Ω, F, P) задаються ймовірнісним зарядом P , описаним у 1.1).

Розглянемо функціонал МНК для $(x_j + \delta_j, y_j)$:

$$\bar{J}_n(b_0, b_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1(x_j + \delta_j))^2.$$

Для нього виконується рівність:

$$E \bar{J}_n(b_0, b_1) = E J_n(b_0, b_1) + \sigma_\epsilon^2.$$

Тому можна сподіватися, що точка мінімуму $\bar{J}_n(b_0, b_1)$ є хорошою оцінкою для (b_0^*, b_1^*) .

2.2 Реалізація від'ємних ймовірностей при оцінюванні параметрів регресії

Використовуючи позначення з 1.2, розглянемо в якості розподілу ρ рівномірний на відріжку $[-1; 1]$ розподіл. В цьому випадку функція $f(x)$, як щільність розподілу випадкових величин $\{\tilde{\delta}_j, j = \overline{1, n}\}$, повинна задовольняти наступним умовам:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = 1; \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f(x) dx = 0; \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = -\sigma_\delta^2. \quad (5)$$

Наприклад, можна визначити f як многочлен другого степеня вигляду: $f(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$, де $x \in [-1, 1]$, а коефіцієнти c_0, c_1, c_2 визначаються з умов (3)-(5) і мають вигляд:

$$c_0 = \frac{3}{4}(5\sigma_\delta^2 + 3),$$

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = -\frac{15}{4}(3\sigma_\delta^2 + 1).$$

Застосовуючи міркування пункту 1.2 до функції

$$g(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n) = \bar{J}_n(b_0, b_1),$$

отримаємо, що має місце збіжність м. н.:

$$J_{nB}(b_0, b_1) = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j^i)^2 f^i \xrightarrow{B \rightarrow \infty} E g(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n),$$

де $x_j^i = x_j + \eta_j^i$.

Знайдемо узагальнену оцінку найменших квадратів $\hat{\mathbf{b}}^* = (\hat{b}_0^*, \hat{b}_1^*)^T$ параметра $\mathbf{b}^* = (b_0^*, b_1^*)^T$: $(\hat{b}_0^*, \hat{b}_1^*) = \arg \min J_{nB}(b_0, b_1)$. Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{nB}(b_0, b_1)}{\partial b_0} = 0, \\ \frac{\partial J_{nB}(b_0, b_1)}{\partial b_1} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j^i) f^i = 0, \\ \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j^i) x_j^i f^i = 0. \end{cases}$$

Введемо наступні позначення:

$$K_1^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n x_j^i y_j f^i;$$

$$K_2^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n x_j^i f^i;$$

$$K_3^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (x_j^i)^2 f^i;$$

$$K_4^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n y_j f^i;$$

$$K_5^n = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B f^i.$$

Тоді оцінка $\hat{b}^n$ має вигляд:

$$\hat{b}^n = \begin{pmatrix} \frac{K_1^n K_2^n - K_2^n K_1^n}{(K_2^n)^2 - K_5^n K_5^n} \\ \frac{K_2^n K_3^n - K_3^n K_2^n}{(K_2^n)^2 - K_5^n K_5^n} \end{pmatrix}.$$

2.3 Модифікований метод оцінювання параметрів регресії з використанням ймовірнісних зарядів

Оскільки для довільних $i = 1, \dots, B$ та $j = 1, \dots, n$: $E f(\eta_j^i) = 1$ і η_j^i – незалежні між собою, то функціонал $J_{n,B}(b_0, b_1)$ можна спростити, розглянувши:

$$\bar{J}_{n,B}(b_0, b_1) = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j^i)^2 f(\eta_j^i).$$

Оцінку $\hat{b}^n = (\hat{b}_0^n, \hat{b}_1^n)^T$ параметра b^* отримуюмо шляхом мінімізації функціоналу $\bar{J}_{n,B}(b_0, b_1)$ з системи:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j^i) f(\eta_j^i) = 0, \\ \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j^i) x_j^i f(\eta_j^i) = 0. \end{cases}$$

Позначимо:

$$H_1^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n x_j^i y_j f(\eta_j^i);$$

$$H_2^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n x_j^i f(\eta_j^i);$$

$$H_3^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (x_j^i)^2 f(\eta_j^i);$$

$$H_4^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n y_j f(\eta_j^i);$$

$$H_5^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n f(\eta_j^i).$$

Тоді оцінка $\hat{b}^n$ має вигляд:

$$\hat{b}^n = \begin{pmatrix} \frac{H_1^n H_2^n - H_2^n H_1^n}{(H_2^n)^2 - H_5^n H_5^n} \\ \frac{H_2^n H_3^n - H_3^n H_2^n}{(H_2^n)^2 - H_5^n H_5^n} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

2.4 Консистентність оцінки параметрів регресії

В цьому пункті через P позначатимемо класичну ймовірність.

Теорема 2. Оцінка $\hat{b}^n$ параметра b моделі (1), (2) лінійної регресії з похибками в змінних, визначена формулою (6), є консистентною, якщо виконуються умови (A1)-(A4) і $\sigma^2 > 0$.

Доведення. Для доведення консистентності оцінки $\hat{b}^n$ використаємо нерівність Чебишева, згідно з якою для будь-якого $\epsilon > 0$: $P(|H_1^n - EH_1^n| \geq \epsilon) \leq \frac{DH_1^n}{\epsilon^2}$, і покажемо, що $DH_1^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, i = \overline{1,5}$. Наприклад, для коефіцієнта H_2^n маємо:

$$\begin{aligned} DH_2^n &= \frac{1}{(Bn)^2} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n D x_j^i f(\eta_j^i) = \\ &= \frac{D x_j^i f(\eta_j^i)}{Bn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що дисперсії коефіцієнтів H_3^n, H_4^n та H_5^n прямує до нуля зі зростанням n .

Розглянемо дисперсію коефіцієнта H_1^n :

$$DH_1^n = \frac{1}{(Bn)^2} \sum_{j=1}^n D \left(\sum_{i=1}^B y_j x_i^j f(\eta_j^i) \right) \leq \frac{C^2}{Bn^2} \times$$

$$\sum_{j=1}^n (BDy_j x_j + Dy_j) = \frac{C^2(Dy_1 x_1 + Dy_1)}{Bn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

де $C > 0$; $|f(x)| \leq C$, $x \in [-1, 1]$.

Отже, $H_1^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} EH_1^n$, $i = \overline{1, 5}$ і

$$EH_1^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n Ex_j^i y_j f(\eta_j^i) = b_0^* \mu + b_1^* (\sigma^2 + \mu);$$

$$EH_2^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n Ex_j^i f(\eta_j^i) = \mu;$$

$$EH_3^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n E(x_j^i)^2 f(\eta_j^i) = \sigma^2 + \mu;$$

$$EH_4^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n Ey_j f(\eta_j^i) = b_0^* + b_1^* \mu;$$

$$EH_5^n = \frac{1}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n Ef(\eta_j^i) = 1.$$

Враховуючи (6) і те, що $H_1^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} EH_1^n$, $i = \overline{1, 5}$, маємо:

$$b_0^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{EH_1^n EH_2^n - EH_3^n EH_4^n}{(EH_2^n)^2 - EH_3^n EH_5^n} = b_0^*.$$

$$b_1^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{EH_4^n EH_2^n - EH_1^n EH_5^n}{(EH_2^n)^2 - EH_3^n EH_5^n} = b_1^*.$$

тобто оцінка b^n параметра b є консистентною.

2.5 Асимптотична нормальність оцінки параметрів регресії

Проведемо дослідження асимптотичної нормальності оцінки b^n параметра b . Для цього використаємо теорію узагальнених оцінюючих рівнянь.

Теорема 3. [8] Нехай $X = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ – n -о. р. в. в., $\forall 1 \leq j \leq N$: $\xi_j \in \mathbb{R}^p$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \geq 1$, $d \geq 1$, $\psi: \mathbb{R}^p \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ – оцінююча функція, θ_N – розв'язок оцінюючого рівняння $\sum_{j=1}^N \psi(\xi_j, \theta) = 0$ і виконуються наступні умови:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $\forall t \in \Theta$: $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$ – рівностепенно-неперервна по x в околі θ ;

2) $L = E_{\theta} \left(\frac{\partial \psi^T(\xi, \theta)}{\partial t} \right)_{t=\theta}^d$;

3) $E_{\theta} \psi(\xi_1, \theta) = 0$;

4) $\exists C \text{ const } \psi(\xi_1, \theta) = Q$;

5) $\theta_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \theta$ за ймовірністю.

Тоді $\sqrt{N}(\theta_N - \theta) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} N(0, S)$ і $S = L^{-1} Q (L^{-1})^T$.

Позначимо $b = (b_0, b_1)$. Тоді

$$\frac{\partial \bar{J}_{b,B}(b)}{\partial b} = -\frac{2}{Bn} \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^n (y_j - h_j^i(b)) f(\eta_j^i) \frac{\partial h_j^i(b)}{\partial b},$$

де $h_j^i(b) = b_0 + b_1 x_j^i$, $\frac{\partial h_j^i(b)}{\partial b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_j^i \end{pmatrix}$.

Для оцінюючої функції:

$$\psi(x_j, y_j, b) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \psi_i(x_j, y_j, b),$$

де $\psi_i(x_j, y_j, b) = (y_j - h_j^i(b)) f(\eta_j^i) \frac{\partial h_j^i(b)}{\partial b}$, отримаємо наступне оцінююче рівняння:

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_j, y_j, b) = 0.$$

Перевіримо виконання умов теореми 3. Зазначимо, що в нашому випадку $p = 1$, $d = 2$. Умова 1) очевидно виконується. Виконання умови 3) є наслідком того, що всі $\psi_i(x_j, y_j, b)$ незалежні між собою та $E_b \psi_i(x_1, y_1, b) = (0, 0)^T$, $1 \leq i \leq B$.

Визначимо матрицю L . Враховуючи те, що

$$E_b \frac{\partial \psi_i(x_1, y_1, b)}{\partial b} = -E_b f(\eta_1^i) \frac{\partial h_1^i(b)}{\partial b} \left(\frac{\partial h_1^i(b)}{\partial b} \right)^T =$$

$$- \begin{pmatrix} Ef(\eta_1^i) & Ex_1^i f(\eta_1^i) \\ Ex_1^i f(\eta_1^i) & E(x_1^i)^2 f(\eta_1^i) \end{pmatrix}$$

і $Ef(\eta_1^i) = 1$, $Ex_1^i f(\eta_1^i) = \mu$, $E(x_1^i)^2 f(\eta_1^i) = \sigma^2 + \mu^2$, маємо:

$$L = - \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & \sigma^2 + \mu^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Визначимо матрицю Q :

$$Q = \frac{1}{B^2} \sum_{i=1}^B E_b \psi_i(x_1, y_1, b) (\psi_i(x_1, y_1, b))^T.$$

Позначимо:

$$Q_{11} = \frac{1}{B}(\sigma_e^2 A_1 + b_1^2(\sigma_\delta^2 A_1 + A_2)) + \frac{B^2 - B}{B^2}(\sigma_e^2 + b_1^2 \sigma_\delta^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{1}{B}(\sigma_e^2 \mu A_1 + b_1^2((\sigma_\delta^2 \mu + E\delta_1^3)A_1 + \mu \times A_2)) + \frac{B^2 - B}{B^2} \mu(\sigma_e^2 + b_1^2 \sigma_\delta^2) + b_1^2 E\delta_1^3,$$

$$Q_{22} = \frac{1}{B}(\sigma_e^2((\sigma^2 + \mu + \sigma_\delta^2)A_1 + A_2 + b_1^2((\sigma_\delta^2(\sigma^2 + \mu) + E\delta^4 + 2\mu E\delta^3)A_1 + (6\sigma_\delta^2 + \sigma^2 + \mu)A_2 + A_3)) + \frac{B^2 - B}{B^2}(\sigma_e^2(\sigma^2 + \mu) + \sigma_e^2 \sigma_\delta^2 + b_1^2(\sigma_e^2 \sigma_\delta^2 + 2\mu E\delta^3 + E\delta^4 - (\sigma_\delta^2)^2),$$

де

$$A_1 = E f^2(\eta_1^1) = \frac{c_2^2}{5} + \frac{2c_0 c_2}{3} + c_0^2,$$

$$A_2 = E(\eta_1^1)^2 f(\eta_1^1) = \frac{c_2^2}{7} + \frac{2c_0 c_2}{5} + \frac{c_0^2}{3},$$

$$A_3 = E(\eta_1^1)^4 f(\eta_1^1) = \frac{c_2^2}{9} + \frac{2c_0 c_2}{7} + \frac{c_0^2}{5}.$$

Тоді

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

і, за теоремою 3, має місце наступна теорема.

Теорема 4. Для оцінки $\hat{b}^n$ параметра b моделі (1), (2) лінійної регресії з похибками в змінних, яка визначена формулою (6), при виконанні умов (A1)–(A4) розподіл $\sqrt{n}(\hat{b}^n - b)$ слабо збігається до нормального розподілу з нульовим середнім і коваріаційною матрицею $L^{-1}Q(L^{-1})^T$, де матриці L і Q визначені відповідно формулами (7) і (8).

3 Результати імітаційного моделювання лінійної регресії з похибками в змінних

Перевірка якості отриманих оцінок проводилася за допомогою імітаційного моделювання в середовищі програмної системи Mathematica.

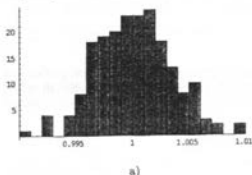
Результати моделювання показали (табл. 1), що при застосуванні модифікованого методу найменших квадратів до оцінювання параметрів лінійної регресії з похибками в змінних (1), (2) при справжніх значеннях параметрів

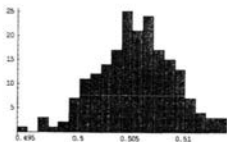
регресії $b_0^* = 1$, $b_1^* = 0.5$, для згенерованих псевдовипадкових величин $\{\xi_j, \epsilon_j, \delta_j, j = \overline{1, n}\}$, які задовольняють умовам (A1)–(A4), таких, що $\xi_j \sim N(1, 1)$, $\epsilon_j \sim N(0, 0.1)$, $\delta_j \sim N(0, 0.5)$ і незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[-1, 1]$ псевдовипадкових величин $\{\eta_j^i, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, B}\}$, зі зростанням значень n і B точність оцінювання покращується, зокрема, зміщення оцінки (b_0, b_1) прямує до нуля. Так, наприклад, при $B = 10$, $n = 1000$ маємо наступні дисперсії оцінок: $D\hat{b}_0 = 1.7485$ і $D\hat{b}_1 = 1.2532$, яким відповідають емпіричні значення (діагональні елементи матриці S): $S_{11} = 1.3801$ і $S_{22} = 0.9103$.

Таблиця 1. Результати моделювання

	n	$B = 1$	$B = 10$	$B = 100$
$E\hat{b}_0 - b_0$	100	-0.2798	-0.0461	-0.0161
	500	-0.0481	-0.0054	-0.0038
	1000	-0.0597	-0.0021	-0.0017
	5000	-0.0071	0.0001	-0.0001
$E\hat{b}_1 - b_1$	100	0.1568	0.0449	0.0153
	500	0.0555	0.0064	0.0024
	1000	0.0598	0.0029	0.0019
	5000	0.0064	-0.0001	-0.0001
$MSE\hat{b}_0$	100	36.3432	0.1029	0.0088
	500	2.1697	0.0036	0.0015
	1000	0.3652	0.0017	0.0007
	5000	0.0021	0.0003	0.0002
$MSE\hat{b}_1$	100	69.4601	0.0902	0.0061
	500	1.3131	0.0025	0.0009
	1000	0.4394	0.0013	0.0005
	5000	0.0017	0.0002	0.0001

Гістограми абсолютних частот для оцінок $\hat{b}_0$ та $\hat{b}_1$ (рис. 1) показують, що розподіли цих оцінок є приблизно нормальними вже при обсягу вибірки $n = 200$.

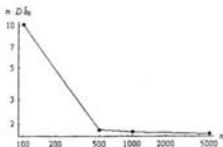




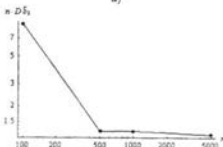
б)

Рис. 1. Гістограми абсолютних частот для оцінок $\hat{b}_0$ (а) та $\hat{b}_1$ (б) при $n = 200$

Як показано на рис. 2, при $B = 10$ емпіричні значення дисперсій оцінок $\hat{b}_0$ та $\hat{b}_1$ досить швидко наближаються до відповідних теоретичних значень $D\hat{b}_0 = 1.7034$, $D\hat{b}_1 = 1.1858$ зі зростанням n .



а)



б)

Рис. 2. Графіки залежності дисперсій оцінок $\hat{b}_0$ (а) та $\hat{b}_1$ (б) від n при $B = 10$

Висновки

У статті шляхом застосування концепції від'ємних ймовірностей, методу найменших квадратів та методу Монте-Карло побудовано оцінки параметрів лінійної регресії з похибками в змінних. Доведено консистентність та асимптотичну нормальність цих оцінок. Імітаційне моделювання в середовищі системи Mathematica підтвердило коректність отриманих оцінок.

Список використаних джерел

1. Студнев Ю. П. О некоторых обобщенных предельных теорем теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения, – 1967, – №. 4.
2. Студнев Ю. П. Предельные теоремы для немонотонных функций распределения // Докл. и сообщ. УжГУ, – 1962, – №. 5.
3. Bartlett M. S. Negative Probability // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., – 1945, – №. 41 – pp.71-73.
4. Cheng C.-L., Van Ness J. Statistical Regression with Measurement Error. – London: Kendal's Library of Statistics, – 1999.
5. Cook J. R., Stefanski L. A. Simulation-extrapolation estimation in parametric measurement error models // Journal of the American Statistical Association, – 1994, – №. 89, – pp. 1314-1328.
6. Dirac P. The Physical Interpretation of Quantum Mechanics // Proc. Roy. Soc. London, – 1942, – pp. 1-39.
7. Khrennikov A. Interpretations of Probability. – Berlin: De Gruyter, – 2009. – 236p.
8. Shao J. Mathematical statistics. – N.Y.: Springer-Verlag, – 2003.
9. Wigner E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev., – 1932, – №. 40, – pp. 749-759.

Надійшла до редакції 10.02.2012

УДК 519.2

Ю.Ю. Млавець, аспірант

 $F_\psi(\Omega)$ – простори випадкових величин з експоненціальною функцією ψ

Досліджуються властивості випадкових величин та процесів з просторів $F_\psi(\Omega)$ з експоненціальною функцією ψ .

Ключові слова: простори Банача випадкових величин, випадкові процеси, моментні норми, мажоруюча характеристика.

E-mail: yura-mlavets@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботі вивчаються простори $F_\psi(\Omega)$ випадкових величин з функцією $\psi(u) = e^{-au^\beta}$. Простори $F_\psi(\Omega)$ були введені в роботі [1], а в [2] вивчалися загальні властивості цих просторів.

2 $F_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 2.1 ([2]). Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \rightarrow \infty$, якщо $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $F_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова $\sup_{u \geq 1} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty$.

Теорема 1 ([1]). Простір $F_\psi(\Omega)$ є простором Банача з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}. \quad (1)$$

Теорема 2 ([2]). Нехай випадкова величина ξ належить простору $F_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}. \quad (2)$$

Теорема 3. Нехай випадкова величина ξ належить $F_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{-au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\},$$

якщо $x > \|\xi\|_\psi$.

Yu. Yu. Mlavets, Postgraduate

 $F_\psi(\Omega)$ – spaces of random variables with exponential function ψ

The properties of random variables and processes from spaces $F_\psi(\Omega)$ are investigated with exponential function ψ .

Key Words: Banach spaces of random variables, random processes, moment norms, majorant characteristic.

Доведення. Дійсно, використовуючи попередню теорему, позначимо, що $b = \frac{\|\xi\|_\psi}{x}$. Мінімум виразу $b^u e^{-au^{\beta+1}}$ набувається в точці $u = \left(\frac{\ln 1/b}{a(\beta+1)} \right)^{1/\beta}$, то, підставляючи значення в (2), отримаємо потрібне.

Означення 2.2 ([2]). Додативно монотонно неспадна послідовність $\kappa(n)$, $n \geq 1$ називається M -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $F_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ з цього простору виконується нерівність

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \right\|_\psi \leq \kappa(n) \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Теорема 4 ([2]). Послідовність

$$\kappa(n) = \sup_{u \geq 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{\beta+1}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \quad (3)$$

є M -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $F_\psi(\Omega)$.**Теорема 5.** Послідовність

$\kappa(n) = \frac{1}{a^\beta} \exp \left\{ S(a, \beta) (\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\}$, де $S(a, \beta) = (\beta a)^{\frac{\beta}{\beta+1}} (\beta^{-1} + 1)$ є M -характеристикою простору $F_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{-au^\beta}$.

Доведення. Використовуючи попередню теорему та знайшовши мінімум виразу $n^{\frac{1}{\beta+1}} e^{a(u+v)^\beta - au^\beta}$, який набуває в точці $v = \left(\frac{\ln n}{a\beta} \right)^{1/\beta+1} - u$ та дорівнює $n^{\frac{\beta}{\beta+1}} e^{a \left(\frac{\ln n}{a\beta} \right)^{1/\beta+1} - au^\beta}$. Підставляючи це значення в (3) і обчисливши супремум, отримаємо шукане.

Означення 2.3 ([2]). Нехай S_k монотонно зростаюча послідовність ($S_k \geq 1$) і $S_k \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$, така що $\psi(u) \rightarrow \infty$ коли $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $F_{S_k, \psi, r}(\Omega)$, якщо виконується умова $\sup_{k \geq r} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty$.

Простори $F_{S_k, \psi, r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k, \psi, r} = \sup_{k \geq r} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)}.$$

Теорема 6 ([2]). Нехай випадкова величина ξ належить простору $F_{S_k, \psi, r}(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leq \inf_{k \geq r} \frac{\|\xi\|_{S_k, \psi, r}^{S_k} (\psi(S_k))^{S_k}}{x^{S_k}}. \quad (4)$$

Теорема 7 ([2]). Послідовність

$$\kappa(n) = \sup_{k \geq r} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{v} + \frac{1}{\psi}} \frac{\psi(S_k + v)}{\psi(S_k)} \quad (5)$$

є M -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $F_{S_k, \psi, r}(\Omega)$.

Означення 2.4 ([2]). Простір Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин має властивість H , якщо існує абсолютна константа C_B , що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ з $B(\Omega)$ виконується умова

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \leq C_B \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2.$$

Теорема 8 ([2]). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $F_\psi(\Omega)$. Тоді, якщо ξ_k – симетричні випадкові величини, де $k \geq \max(r, 2)$ і виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \quad (6)$$

$l = \overline{1, k-1}$, то має місце нерівність

$$\theta_{2,r}^2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2(\xi_i).$$

Якщо відмовитись від умови симетричності, то за умови (6), виконується нерівність

$$\theta_{2,r}^2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq 4 \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2(\xi_i).$$

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \left(1 + \frac{k}{3} \right) \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l,$$

$l = \overline{1, k-1}$, то має місце нерівність

$$\theta_{2,r}^2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2(\xi_i).$$

Лема 1. При $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k-1$ має місце нерівність

$$C_{2k}^{2l} \leq C_k^l \frac{k^k}{l!(k-l)^{k-l}} \quad (7)$$

Доведення. Лема випливає з леми 2.2 з [2], оскільки $\frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-l} + 1 \right) \right\} \leq 1$, $k \geq 2$.

Теорема 9. Розглянемо простір $F_\psi(\Omega)$, де функція $\psi(u)$, $u \geq 1$ така що $\varphi(u) = \frac{\psi(u)}{\psi(1)^2}$ – строго монотонна при $u \geq u_0$. Якщо $u_0 \leq 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість H з константою $C_\psi = 1$, а коли $u_0 > 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість H з константою $C_\psi = S_\psi \cdot S_{\tilde{\psi}}$, де

$$S_\psi = \max \left(1, \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{\psi(u_0)}{\psi(u)} \left(\frac{u}{u_0} \right)^{1/2} \right),$$

$$S_{\tilde{\psi}} = \max \left(1, \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{\psi(u)}{\psi(u_0)} \left(\frac{u_0}{u} \right)^{1/2} \right).$$

Доведення. Спочатку доведемо теорему, коли $u_0 \leq 1$. Перевіримо умову (6). З леми 1 випливає

$$\begin{aligned} C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} &\leq \\ C_k^l \frac{(\psi(2l))^{2l} \cdot (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(2k-2l)^{k-l}} &= \\ C_k^l \frac{(\psi(2k))^{2k}}{(2k)^k} &= \\ C_k^l \frac{(\varphi(2l))^{2l} (\varphi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\varphi(2k))^{2k}}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{(\varphi(2l))^{2l} (\varphi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\varphi(2k))^{2k}} =$$

$$\left(\frac{\varphi(2l)}{\varphi(2k)}\right)^{2l} \left(\frac{\varphi(2k-2l)}{\varphi(2k)}\right)^{2k-2l} \leq 1$$

Отже, функція $\varphi(u)$ монотонно зростає, при $u \geq 1$, то теорема в цьому випадку доведена.

Доведемо теорему у випадку $u_0 > 1$. Розглянемо два простори $F_\psi(\Omega)$ і $F_{\tilde{\psi}}(\Omega)$, де

$$\tilde{\psi}(u) = \begin{cases} \psi(u), & \text{якщо } u \geq u_0; \\ \frac{\psi(u_0)}{u^{1/2}}, & \text{якщо } 1 \leq u < u_0. \end{cases}$$

Оскільки

$$\|\xi\|_\psi = \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right),$$

$$\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u^{1/2}}} \cdot \frac{\psi(u_0)u^{1/2}}{\psi(u)u_0^{1/2}},$$

тоді $\|\xi\|_\psi \leq$

$$S_\psi \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u^{1/2}}}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right),$$

тобто $\|\xi\|_\psi \leq S_\psi \|\xi\|_{\tilde{\psi}}$. Тепер розглянемо

$$\|\xi\|_{\tilde{\psi}} = \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u^{1/2}}}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right).$$

Оскільки

$$\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u^{1/2}}} = \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \cdot \frac{\psi(u)u^{1/2}}{\psi(u_0)u_0^{1/2}},$$

то $\|\xi\|_{\tilde{\psi}} \leq$

$$S_{\tilde{\psi}} \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right),$$

тобто $\|\xi\|_{\tilde{\psi}} \leq S_{\tilde{\psi}} \|\xi\|_\psi$.

Отже, простори $F_\psi(\Omega)$ і $F_{\tilde{\psi}}(\Omega)$ містять один й той же елементи і норми в цих просторах еквівалентні.

Із означення 2.4 маємо, що

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq S_\psi \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{\tilde{\psi}}^2 \leq S_\psi \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2 \leq S_\psi S_{\tilde{\psi}} \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{\tilde{\psi}}^2.$$

Отже, з останньої нерівності випливає твердження теореми.

Зауваження 1. Легко бачити, що $S_\psi \leq \frac{\psi(u_0)}{\psi(u)}$ і $S_{\tilde{\psi}} \leq (u_0)^{1/2}$.

Наслідок 1. Якщо при $u \leq u_0$ функція $\varphi(u)$ монотонно спадає, то $S_\psi = 1$, а $S_{\tilde{\psi}} = \max \left(1, \frac{\psi(1)}{\psi(u_0)} u_0^{1/2} \right)$.

Доведення наслідку очевидне.

Теорема 10. Розглянемо простір $F_\psi(\Omega)$, де функція $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$. Якщо $u_0 \leq 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість Н з константою $C_\psi = 1$, а коли $u_0 > 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість Н з константою $C_\psi = \max \left(1, \frac{e^{-\frac{a}{2\beta}}}{(2a\beta)^{1/2\beta}} \right)$.

Доведення Легко бачити, що для функції $\psi(u) = e^{au^\beta}$ $u_0 = \frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}}$, то із попереднього наслідку справджується твердження теореми.

3 Випадкові процеси

Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ – випадковий процес, $T = (T, \rho)$ – компактний метричний простір, ρ – метрика. Розглянемо $N(u)$ – метричну масивність простору (T, ρ) [2] і $\gamma = \sigma \left(\sup_{t,s \in T} \rho(t,s) \right)$.

Означення 3.1 ([2]). Випадковий процес $X \in F_\psi(\Omega)$, якщо для всіх t випадкова величина $X(t) \in F_\psi(\Omega)$.

Теорема 11 ([2]). Нехай $X(t)$ – сепарабельний процес на (T, ρ) з простору $F_\psi(\Omega)$ і виконується умова $\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h)$, де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Якщо для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z x \left(N \left(\sigma^{-1}(x) \right) \right) dx < \infty$$

та $\sup_{t \in T} |X(t)| \in F_\psi(\Omega)$, то $\left\| \sup_{t \in T} |X(t)| \right\|_\psi \leq B(p)$, де $B(p) = \inf_{t \in T} \|X(t)\|_\psi +$

$$+ \frac{1}{p(1-p)} \int_0^p x \left(N \left(\sigma^{-1}(x) \right) \right) dx,$$

$\kappa(n)$ – мажоруюча характеристика, $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функція до $\sigma(u)$, $p \in (0, 1)$. Також для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконуються нерівність

$$P \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{B^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Теорема 12. Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ – випадковий процес, $\psi(u) = e^{au^\beta}$ і для будь-якого $z > 0$ виконуються умови

$$\int_0^z \frac{1}{e^u} e^{\left\{ S(a, \beta) (\ln(N(\sigma^{(-1)}(u))))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\}} du < \infty$$

та $\sup_{t \in T} |X(t)| \in F_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

виконуються нерівність $P \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq$

$$\exp \left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{1}{B(p)}}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\},$$

$$\text{де } B(p) = \inf_{t \in T} \|X(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)} \times \\ \int_0^p \frac{1}{e^u} \exp \left\{ S(a, \beta) (\ln(N(\sigma^{(-1)}(u))))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\} du.$$

Доведення. Теорема випливає з теорем 3, 5 і 11.

Теорема 13 ([2]). Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$, де $T > 0$ сепарабельний процес з простору $F_\psi(\Omega)$. Нехай для деякого $\omega < 1$ виконуються умови

$$\sup_{|t-s| \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq C \left(\kappa \left(\frac{T}{2u} + 1 \right) \right)^{-1/\omega}.$$

Тоді з ймовірністю одиниця $\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \in F_\psi(\Omega)$ та справджується нерівність

$$\left\| \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \right\|_\psi \leq \inf_{t \in [0, T]} \|X(t)\|_\psi + B(\omega) = \bar{B},$$

де $B(\omega) = \frac{C\omega}{(1-\omega)} \left(\frac{C\omega}{\kappa(\frac{1}{2})} \right)^{(1-\omega)/\omega} \frac{(1+\omega)^{\omega+1}}{\omega^{\omega+1}}$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\bar{B}^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Теорема 14. Нехай виконуються умови попередньої теореми і $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, то $\sigma(h) =$

$$= C \left(\frac{1}{e^a} \exp \left\{ S(a, \beta) \left(\ln \left(\frac{T}{2u} + 1 \right) \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\} \right)^{-1/\omega},$$

$$\text{тоді } \left\| \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \right\|_\psi \leq$$

$$\inf_{0 < t \leq T} \sup_{u \geq 1} \frac{(E|X(t)|^u)^{1/u}}{e^{au^\beta}} + B(\omega) = B_{e^{au^\beta}}.$$

Також для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \\ \exp \left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{1}{B_{e^{au^\beta}}}}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\}$$

Доведення. Теорема випливає з теорем 3, 5 і 13.

4 Висновки

В роботі вивчені випадкові процеси з просторів $F_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$. Знайдено норми випадкових величин, мажоруючу характеристику цих просторів з експоненціальною функцією ψ . Ці результати можна використати для підрахунку кратних інтегралів із заданою точністю і надійністю методом Монте-Карло.

Список використаних джерел

1. С.В. Ермаков, Е.И. Островский Условие непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей, Деп. в ВИНТИ – 1986. – №3752-В.86.0. – 42.
2. Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю. Простори Банаха випадкових величин $F_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Вип. 86. – С. 61-76.

Надійшла до редколегії 04.01.12

УДК 519.21

О. Ю. Рагуліна, аспірант

Оцінки і властивості ймовірності
небанкрутства страхової компанії в
класичній моделі ризику за умови
розміщення капіталу на фінансовому
(B,S)-ринку

Розглядається класична модель ризику, коли страхова компанія розміщує свій капітал на фінансовому (B,S)-ринку, а еволюція ціни ризикового активу описується процесом зі стрибками. Знаходяться оцінки зверху і знизу для ймовірності небанкрутства на нескінченному проміжку часу, досліджуються властивості цієї функції. Оцінка її похідної використовується для виведення співвідношення, що пов'язує точність і надійність наближення ймовірності небанкрутства її статистичною оцінкою.

Ключові слова: ймовірність небанкрутства, класична модель ризику, фінансовий (B,S)-ринок.

E-mail: lena_ragulina@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Вступ

Ймовірність небанкрутства є одним з основних показників платоспроможності страхової компанії, тому її знаходження в тих чи інших моделях становить інтерес.

Найпростішою динамічною моделлю є класична модель ризику [1, 2, 3]. Але отримати аналітичні вирази для ймовірності небанкрутства (банкрутства) навіть у цій моделі вдається дуже рідко, тому виникає необхідність побудови різноманітних апроксимацій, оцінок, асимптотичних зображень. Наприклад, у класичній моделі ризику, якщо виконується умова Крамера для розподілу розмірів страхових вимог (і обов'язково умова додатності прибутку), то для ймовірності банкрутства справедлива експоненціальна оцінка Крамера-Лундберга [1, 2, 3], а в статті [4] показано, що умова Крамера є не тільки достатньою, а й необхідною, для її експоненціального спадання. Асимптотичні зображення ймовірності банкрутства у випадку, коли розподіл розмірів вимог має «важкий хвіст», отри-

E. Yu. Ragulina, Postgraduate Student

Estimates and properties of the survival
probability of an insurance company in
the classical risk model with investments
to the financial (B,S)-market

The classical risk model is considered when an insurance company invests its surplus to the financial (B,S)-market and a price evolution of the risk asset is described with a jump process. Upper and lower estimates are found for the ultimate survival probability, properties of this function are investigated. The estimate of its derivative is used for derivation of relation connecting accuracy and reliability the survival probability approximation with its statistical estimate.

Key Words: survival probability, classical risk model, financial (B,S)-market.

мані в роботах [5, 6].

Використання страховою компанією різноманітних інвестиційних стратегій може суттєво впливати на ймовірність її банкрутства. Наприклад, у статтях [7, 8, 9] показано, що якщо в класичній моделі ризику розподіл розмірів вимог має «важкий хвіст» і страхова компанія вкладає весь капітал у безризиковий актив, асимптотичне зображення ймовірності банкрутства змінюється. У літературі з теорії ризику також неодноразово обговорювалося питання про те, що інвестування капіталу в ризиковий актив може послаблювати платоспроможність страхової компанії не менше, ніж виплати за вимогами [10, 11]. Наприклад, якщо в класичній моделі ризику розміри страхових вимог мають показниковий розподіл, то або при досить великих значеннях початкового капіталу ймовірність банкрутства спадає зі степеневу швидкістю, або банкрутство страхової компанії відбувається з ймовірністю одиниця в залежності від параметрів моделі еволюції ціни ризикового активу [11].

У цій роботі розглядається класична модель ризику за умови, що страхова компанія вкладає весь свій капітал у безризиковий і ризиковий активи, але на відміну від більшості робіт, які передбачають інвестиційну діяльність і в яких еволюцію ціни ризикового активу моделюють за допомогою геометричного броунівського руху (наприклад, [10, 11, 12, 13]), для еволюції ціни акцій використовується модель зі стрибками з роботи [14]. Метою роботи є встановлення оцінок зверху та знизу для ймовірності небанкрутства на нескінченному проміжку часу, дослідження властивостей цієї функції, отримання інтегро-диференціального рівняння для неї і оцінки її похідної, виведення співвідношення, що пов'язує точність і надійність наближення ймовірності небанкрутства її статистичною оцінкою. Відзначимо, що в при отриманні цих результатів використовуються деякі ідеї доведень з робіт [11, 15, 16]. У статті [15] у разі інвестування тільки в безризиковий актив досліджувалися властивості ймовірностей небанкрутства, виводилися інтегро-диференціальні рівняння для них й оцінювалися їхні похідні, а в статті [16] отримані оцінки використовувалися для виведення зазначених вище співвідношень.

1 Оцінки для ймовірності небанкрутства

Вважатимемо, що всі об'єкти, які використовуватимуться далі, визначені на стохастичному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$. У класичній моделі ризику припускається, що страхова компанія має невід'ємний початковий капітал x , отримує премії від клієнтів зі сталою інтенсивністю $c > 0$, а сумарні вимоги, що надійшли на проміжку часу $[0, t]$, утворюють складний пуассонівський процес $N_{cl}(t) = \sum_{i=1}^{N_{cl}(t)} Y_i^{cl}$ (тут $\sum_{i=1}^0 Y_i^{cl} = 0$), де $N_{cl}(t)$ — однорідний пуассонівський процес з параметром $\lambda_{cl} > 0$ ($N_{cl}(0) = 0$), $\{Y_i^{cl}\}_{i=1}^{\infty}$ — послідовність невід'ємних випадкових величин, незалежних й однаково розподілених з функцією розподілу $F_{cl}(y)$ і $MY_i^{cl} = \mu_{cl} < \infty$. Процес $N_{cl}(t)$, який інтерпретується як кількість вимог на проміжку часу $[0, t]$, не залежить від послідовності $\{Y_i^{cl}\}_{i=1}^{\infty}$ їхніх розмірів.

Весь свій капітал страхова компанія розмі-

щує на фінансовому (B,S)-ринку, який складається з двох активів — безризикового B (банківського рахунка) і ризикового S (акція). У момент часу t ціна безризикового активу дорівнює

$$B(t) = B(0)e^{rt}$$

(тут $r > 0$ — відсоткова ставка, $B(0) > 0$ — ціна в момент часу $t = 0$), а ціна ризикового активу —

$$S(t) = S(0)e^{r_{st}t + R_{st}(t)},$$

де $r_{st} > r$, $R_{st}(t) = \sum_{i=1}^{N_{st}(t)} Y_i^{st}$ (тут $\sum_{i=1}^0 Y_i^{st} = 0$), $S(0) > 0$ — ціна в момент часу $t = 0$. Тут $N_{st}(t)$ — однорідний пуассонівський процес з параметром $\lambda_{st} > 0$ ($N_{st}(0) = 0$), величини Y_i^{st} ($i = 1, \infty$) незалежні й однаково розподілені з функцією розподілу $F_{st}(y)$ ($0 < F_{st}(0) < 1$), мають експоненціальні моменти і $MY_i^{st} = 0$. Усі зазначені вище випадкові величини і процеси незалежні.

Позначимо τ_n^{cl} і τ_n^{st} ($n = \overline{0, \infty}$) — моменти n -х стрибків процесів $R_{cl}(t)$ і $R_{st}(t)$ відповідно ($\tau_0^{cl} = 0$, $\tau_0^{st} = 0$), $\theta_n^{cl} = \tau_n^{cl} - \tau_{n-1}^{cl}$ ($n = \overline{1, \infty}$).

Нехай страхова компанія в кожний момент часу розміщує частку α ($0 < \alpha \leq 1$) свого капіталу в ризиковий актив, а частку $1 - \alpha$ — у безризиковий актив. Позначимо $\alpha r_{st} + (1 - \alpha)r = \bar{r}$, а $X_x(t)$ — капітал страхової компанії в момент часу t за умови, що її початковий капітал дорівнює x , тоді еволюція капіталу описується рівнянням

$$X_x(t) = x + \int_0^t (\bar{r} X_x(s) + c) ds + \alpha \sum_{i=1}^{N_{st}(t)} X_x(\tau_i^{st}) e^{Y_i^{st}} - R_{cl}(t). \quad (1)$$

Ймовірність небанкрутства страхової компанії $\varphi(x)$ на нескінченному проміжку часу як функція початкового капіталу x визначається як

$$\varphi(x) = \mathbf{P} \{X_x(s) \geq 0 \ \forall s \geq 0\}.$$

Розглянемо процес з дискретним часом $X_n^x = X_x(\tau_n^{cl})$ ($n = \overline{0, \infty}$), при цьому $X_0^x = x$. Оскільки банкрутство може настати тільки в момент надходження вимоги, то

$$\varphi(x) = \mathbf{P} \{X_n^x \geq 0, n = \overline{1, \infty}\}.$$

Для $n = \overline{1, \infty}$ позначимо

$$\tau_{(n)}^{st} = \begin{cases} \min_i \{ \tau_i^{st} : \tau_i^{st} > \tau_{n-1}^{cl} \} \\ \text{(якщо } \min_i \{ \tau_i^{st} : \tau_i^{st} > \tau_{n-1}^{cl} \} < \tau_n^{cl} \text{)}, \\ \tau_n^{cl} \text{ (якщо } \min_i \{ \tau_i^{st} : \tau_i^{st} > \tau_{n-1}^{cl} \} \geq \tau_n^{cl} \text{)}, \end{cases}$$

$$\tau_{(n)}^{st} = \begin{cases} \max_i \{ \tau_i^{st} : \tau_i^{st} \leq \tau_n^{cl} \} \\ \text{(якщо } \max_i \{ \tau_i^{st} : \tau_i^{st} \leq \tau_n^{cl} \} > \tau_{n-1}^{cl} \text{)}, \\ \tau_n^{cl} \text{ (якщо } \max_i \{ \tau_i^{st} : \tau_i^{st} \leq \tau_n^{cl} \} \leq \tau_{n-1}^{cl} \text{)}. \end{cases}$$

З рівняння (1) випливає, що

$$X_n^x = P_n X_{n-1}^x + Q_n - Y_n^{cl} \quad (n = \overline{1, \infty}), \quad (2)$$

де

$$P_n = e^{\rho \tau_n^{cl}} \cdot \prod_{i: \tau_{n-1}^{cl} < \tau_i^{st} \leq \tau_n^{cl}} (1 - \alpha + \alpha e^{Y_i^{st}}), \quad (3)$$

$$Q_n = \left(\frac{c}{\bar{r}} e^{\rho(\tau_{(n)}^{st} - \tau_{n-1}^{cl})} - \frac{c}{\bar{r}} \right) e^{\rho(\tau_n^{cl} - \tau_{(n)}^{st})} \times$$

$$\times \prod_{i: \tau_{(n)}^{st} \leq \tau_i^{st} \leq \tau_n^{cl}} (1 - \alpha + \alpha e^{Y_i^{st}}) +$$

$$+ \sum_{i: \tau_{n-1}^{cl} < \tau_i^{st} < \tau_n^{cl} < \tau_{(n)}^{st}} \left(\left(\frac{c}{\bar{r}} e^{\rho(\tau_i^{st} - \tau_{n-1}^{cl})} - \frac{c}{\bar{r}} \right) \times \right. \quad (4)$$

$$\times e^{\rho(\tau_n^{cl} - \tau_i^{st})} \cdot \prod_{j: \tau_i^{st} \leq \tau_j^{st} \leq \tau_n^{cl}} (1 - \alpha + \alpha e^{Y_j^{st}}) \Big) +$$

$$+ \left(\frac{c}{\bar{r}} e^{\rho(\tau_n^{cl} - \tau_{(n)}^{st})} - \frac{c}{\bar{r}} \right)$$

(другий доданок в (4) присутній, якщо на $(\tau_{n-1}^{cl}, \tau_n^{cl}]$ є принаймні два стрибки процесу $R_{st}(t)$). Зауважимо, що величини P_n ($n = \overline{1, \infty}$) незалежні й однаково розподілені, величини Q_n ($n = \overline{1, \infty}$) також незалежні й однаково розподілені. Позначимо $P_n^* = \prod_{k=1}^n P_k$, тоді з (2) за індукцією маємо

$$X_n^x = P_n^* x + P_n^* \sum_{k=1}^n \frac{Q_k - Y_k^{cl}}{P_k^*} \quad (n = \overline{1, \infty}). \quad (5)$$

Теорема 1. Якщо еволюція капіталу страхової компанії описується рівнянням (1) за зроблених вище припущень, то знайдуться сталі $b_1 > 0$ і $b_2 > 0$ такі, що при досить великих значеннях початкового капіталу x

$$\varphi(x) \leq 1 - b_1 x^{-b_2}. \quad (6)$$

Доведення. З огляду на (3) і те, що $0 < F_{st}(0) < 1$, для довільної сталої $b_3 \in (0, 1)$

$$0 < P\{P_n \leq b_3\} < 1 \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Звідси випливає, що існують сталі $b_3 \in (0, 1)$, $b_4 > 0$ і $p_1 \in (0, 1)$ такі, що

$$P\{P_n \leq b_3, Q_n - Y_n^{cl} \leq b_4\} = p_1 \quad (n = \overline{1, \infty}), \quad (7)$$

а також сталі $b_5 > 0$ і $p_2 \in (0, 1)$ такі, що

$$P\left\{P_n \leq b_5, Q_n - Y_n^{cl} \leq \frac{-2b_4 b_5}{1 - b_3}\right\} = p_2 \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (8)$$

(оскільки P_n і Q_n можуть набувати скільки завгодно малих додатних значень, а b_5 у (8) можна обрати досить малим додатним).

Для $x \geq b_4(1 - b_3)$ покладемо

$$K(x) = 1 + \left[(\ln(b_4(1 - b_3)) - \ln x) / \ln b_3 \right]$$

(тут і далі $[\cdot]$ позначає цілу частину числа) і визначимо випадкові події

$$B_{K(x)} = \bigcap_{k=1}^{K(x)} \{P_k \leq b_3, Q_k - Y_k^{cl} \leq b_4\}, \quad (9)$$

$$B_{K(x)+1}^* = \{P_{K(x)+1} \leq b_5, \quad (10)$$

$$Q_{K(x)+1} - Y_{K(x)+1}^{cl} \leq -2b_4 b_5 / (1 - b_3)\}$$

(відзначимо, що події $\{P_k \leq b_3, Q_k - Y_k^{cl} \leq b_4\}$ ($k = \overline{1, K(x)}$), $B_{K(x)+1}^*$ незалежні в сукупності).

Помітимо, що якщо відбулася подія $B_{K(x)}$, то з огляду на (5) і (9) маємо

$$X_{K(x)}^x \leq b_3^{K(x)} x + b_4 \sum_{k=1}^{K(x)} b_3^{K(x)-k} < < b_3^{K(x)} x + b_4 / (1 - b_3), \quad (11)$$

а якщо настала подія $B_{K(x)} \cap B_{K(x)+1}^*$, то з (2), (10) і (11) отримаємо

$$X_{K(x)+1}^x \leq b_5 X_{K(x)}^x - \frac{2b_4 b_5}{1 - b_3} <$$

$$< b_5 \left(b_3^{K(x)} x + \frac{b_4}{1 - b_3} - \frac{2b_4}{1 - b_3} \right) =$$

$$= b_5 \left(b_3^{K(x)} x - \frac{b_4}{1 - b_3} \right) < 0 \quad (12)$$

(тобто відбулося банкрутство), оскільки

$$b_3^{K(x)} x \leq e^{\ln b_3 \cdot \frac{\ln(b_4(1-b_3)) - \ln x}{\ln b_3}} x = \\ = b_4(1-b_3) < b_4/(1-b_3).$$

Тоді з (7) і (12) маємо

$$\varphi(x) \leq 1 - P(B_{K(x)} \cap B_{K(x)+1}^*) = 1 - p_2 p_1^{K(x)} \leq \\ \leq 1 - p_2 p_1^{1 + \frac{\ln(b_4(1-b_3)) - \ln x}{\ln b_3}} = 1 - b_1 x^{-b_2},$$

де $b_1 = p_2 p_1^{1 + \ln(b_4(1-b_3))/\ln b_3}$, $b_2 = \ln p_1 / \ln b_3$.

Теорема доведена.

Зауваження 1. З нерівності (6) видно, що при інвестуванні частки капіталу в ризиковий актив ймовірність небанкрутства зростає не швидше степеневі функції при досить великих значеннях початкового капіталу. Зокрема, за виконання умови Крамера для розподілу розмірів страхових вимог і умови додатності прибутку за рахунок основної діяльності така інвестиційна стратегія зменшує ймовірність небанкрутства порівняно з випадком, коли капітал взагалі не інвестується.

Обчислимо тепер математичне сподівання випадкової величини P_1^x :

$$MP_1^x = M \left(e^{x r_1^x} \cdot \prod_{i: 0 < r_1^i \leq r_1^x} (1 - \alpha + \alpha e^{Y_1^i}) \right)^x = \\ = \int_0^{+\infty} \lambda_{cl} e^{(x s - \lambda_{cl}) s} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{cl} s)^j e^{-\lambda_{cl} s}}{j!} \left(M(1 - \alpha + \alpha e^{Y_1^i})^s \right)^j ds = \\ = \lambda_{cl} \int_0^{+\infty} e^{s(-\lambda_{cl} + x s - \lambda_{cl} + \lambda_{cl} M(1 - \alpha + \alpha e^{Y_1^i})^s)} ds = \\ = \frac{\lambda_{cl}}{\lambda_{cl} - \bar{r} z - \lambda_{cl} (M(1 - \alpha + \alpha e^{Y_1^i})^x - 1)}. \quad (13)$$

З (13) видно, що MP_1^x визначено на множині

$$Z^* = \{z : M(1 - \alpha + \alpha e^{Y_1^i})^x < +\infty,$$

$$\lambda_{cl} - \bar{r} z - \lambda_{cl} (M(1 - \alpha + \alpha e^{Y_1^i})^x - 1) > 0\},$$

причому множина Z^* завжди непорожня, оскільки містить точку 0.

Теорема 2. Якщо еволюція капіталу описується рівнянням (1) за зроблених вище припущень та існує стала $z_0 \in (0, 1] \cap Z^*$ така, що

$$\lambda_{cl} \left(M(1 - \alpha + \alpha e^{Y_1^i})^{-z_0} - 1 \right) - \bar{r} z_0 < 0, \quad (14)$$

то знайдеться стала $b_0 > 0$ така, що при всіх додатних значеннях початкового капіталу x

$$\varphi(x) \geq 1 - b_0 x^{-z_0}. \quad (15)$$

Доведення. З (5) видно, що

$$\varphi(x) \geq 1 - P \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{cl}}{P_n^x} > x \right\}, \quad (16)$$

а з умови (14) випливає, що $0 < MP_1^{-z_0} < 1$.

Окрім того, $M(Y_1^{cl})^{z_0} < +\infty$, оскільки $MY_1^{cl} < +\infty$ і $z_0 \in (0, 1]$.

Застосовуючи нерівність Чебишова і використовуючи те, що P_n ($n = \overline{1, \infty}$) незалежні й однаково розподілені, Y_n^{cl} ($n = \overline{1, \infty}$) незалежні й однаково розподілені та незалежні від P_n ($n = \overline{1, \infty}$), а $z_0 \in (0, 1]$, отримаємо

$$P \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{cl}}{P_n^x} > x \right\} \leq \frac{M \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{cl}}{P_n^x} \right)^{z_0}}{x^{z_0}} \leq \\ \leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} M \left(\frac{Y_n^{cl}}{P_n^x} \right)^{z_0}}{x^{z_0}} = \\ = \frac{M(Y_1^{cl})^{z_0}}{x^{z_0}} \sum_{n=1}^{\infty} (MP_1^{-z_0})^n = \\ = \frac{MP_1^{-z_0} M(Y_1^{cl})^{z_0}}{x^{z_0} (1 - MP_1^{-z_0})} = b_0 x^{-z_0},$$

де $b_0 = MP_1^{-z_0} M(Y_1^{cl})^{z_0} / (1 - MP_1^{-z_0})$.

З (16) і (17) випливає оцінка (15).

Зауваження 2. Теорема 2 дає достатню умову прямування ймовірності небанкрутства до одиниці при нескінченному зростанні початкового капіталу.

2 Властивості ймовірності небанкрутства

Властивості монотонності й обмеженості ймовірності небанкрутства випливають із визначення цієї функції. Проте такі властивості, як неперервність і диференційовність не є очевидними і встановлюються в наступній теоремі.

Теорема 3. Функція $\varphi(x)$ є неперервною на проміжку $[0, +\infty)$. Якщо $F_{cl}(y)$ є сумою абсолютно неперервної компоненти $F_{cl}^{ac}(y)$ та дискретної компоненти $F_{cl}^d(y)$, причому точки росту дискретної компоненти $y_1^{cl}, y_2^{cl}, \dots$ такі, що $0 \leq y_1^{cl} < y_2^{cl} < \dots < y_n^{cl} < \dots$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{cl} = +\infty$ (якщо множина таких точок зліченна), то функція $\varphi(x)$ має неперервні похідні на кожному з відрізків $[0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], \dots$, де $x_n = y_n^{cl}$ ($n = \overline{1, \infty}$) (в кінцевих точках маються на увазі односторонні похідні), а в точках $x_1, x_2, \dots$ похідні $\varphi(x)$ не існують у класичному розумінні. Окрім того, $\varphi(x)$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} (\bar{r}x + c)\varphi'(x) &= (\lambda_{cl} + \lambda_{st})\varphi(x) - \\ &- \lambda_{cl} \int_0^x \varphi(x-y) dF_{cl}(y) - \\ &- \lambda_{st} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\left((1-\alpha) + \alpha e^y\right)x\right) dF_{st}(y) \end{aligned} \quad (18)$$

на кожному з проміжків $[0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], \dots$ і для всіх $x \in [0, +\infty)$ справедлива оцінка

$$|\varphi'(x)| \leq (\lambda_{cl} + \lambda_{st})/c. \quad (19)$$

Доведення. З (1) випливає, що капітал страхової компанії $X_x(t)$ до свого першого стрибка дорівнює

$$X_x(t) = (x + c/\bar{r})e^{rt} - c/\bar{r}.$$

Нехай перший стрибок процесу $X_x(t)$ відбувається в момент часу $\tau_1 = s$, де $\tau_1 = \min\{\tau_1^{cl}, \tau_1^{st}\}$, і нехай y — розмір першого стрибка $R_{cl}(t)$ (якщо $\tau_1 = \tau_1^{cl}$) або $R_{st}(t)$ (якщо $\tau_1 = \tau_1^{st}$). До моменту τ_1 банкрутство не настає, а після цього банкрутство не відбудеться тоді і тільки тоді, коли виконується одна з двох умов:

1) $\tau_1 = \tau_1^{cl}$, $y \leq (x + c/\bar{r})e^{rs} - c/\bar{r}$ і банкрутство не відбудеться на проміжку часу $[s, +\infty)$ при початковому капіталі $(x + c/\bar{r})e^{rs} - c/\bar{r} - y$;

2) $\tau_1 = \tau_1^{st}$ і банкрутство не відбудеться на проміжку часу $[s, +\infty)$ при початковому капіталі $((1-\alpha) + \alpha e^y)((x + c/\bar{r})e^{rs} - c/\bar{r})$.

Оскільки $P\{\tau_1 = \tau_1^{cl}\} = \lambda_{cl}/(\lambda_{cl} + \lambda_{st})$, $P\{\tau_1 = \tau_1^{st}\} = \lambda_{st}/(\lambda_{cl} + \lambda_{st})$, то за формулою

повної ймовірності для всіх $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_{cl} + \lambda_{st})s} \left(\lambda_{cl} \times \right. \\ &\times \int_0^{(x + \frac{c}{\bar{r}})e^{rs} - \frac{c}{\bar{r}}} \varphi\left(\left(x + \frac{c}{\bar{r}}\right)e^{rs} - \frac{c}{\bar{r}} - y\right) dF_{cl}(y) + \\ &+ \lambda_{st} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\left((1-\alpha) + \alpha e^y\right) \times \right. \\ &\times \left.\left.\left(x + \frac{c}{\bar{r}}\right)e^{rs} - \frac{c}{\bar{r}}\right)\right) dF_{st}(y) \Big) ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Після заміни змінної інтегрування $(x + c/\bar{r})e^{rs} - c/\bar{r} = u$ (20) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (\bar{r}x + c) \frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{\bar{r}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{\bar{r}u + c} \right)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{\bar{r}} + 1} \times \\ &\times \left(\lambda_{cl} \int_0^u \varphi(u-y) dF_{cl}(y) + \right. \\ &+ \left. \lambda_{st} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\left((1-\alpha) + \alpha e^y\right)u\right) dF_{st}(y) \right) du. \end{aligned} \quad (21)$$

Внутрішні інтеграли в правій частині (21) є неспадними й обмеженими функціями змінної u , тому підінтегральна функція в зовнішньому інтегралі є інтегрованою, а $\varphi(x)$ є неперервною на $[0, +\infty)$ [17, с. 115].

Тепер припустимо, що при $y \in [0, +\infty)$

$$F_{cl}(y) = F_{cl}^{ac}(y) + F_{cl}^d(y),$$

$$F_{cl}^{ac}(y) = \int_0^y f_{cl}(v) dv,$$

а точки росту дискретної компоненти $F_{cl}^d(y)$ задовольняють умови теореми і

$$F_{cl}^d(y_n^{cl} + 0) - F_{cl}^d(y_n^{cl}) = p_n^{cl} > 0 \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Тоді рівність (21) запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (\bar{r}x + c) \frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{\bar{r}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{\bar{r}u + c} \right)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{\bar{r}} + 1} \times \\ &\times (\lambda_{cl} I_1(u) + \lambda_{st} I_2(u)) du, \end{aligned} \quad (22)$$

$$I_1(u) = \int_0^u \varphi(u-y) f_{cl}^{ac}(y) dy,$$

$$I_2(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-\alpha) + \alpha e^y)u) dF_{st}(y),$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = & (\bar{F}x + c)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{p}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{\bar{F}u + c} \right)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{p} + 1} \times \\ & \times \lambda_{cl} \left(\sum_{k: y_k^{cl} < u} p_k^{cl} \varphi(u - y_k^{cl}) \right) du. \end{aligned} \quad (23)$$

Оскільки $\varphi(x)$ неперервна на $[0, +\infty)$, то $I_1(u)$ неперервна при $u \in [0, +\infty)$ [15, с. 86].

Неперервність при $u \in [0, +\infty)$ функції $I_2(u)$ випливає з того, що для всіх u і u_0 з $[0, +\infty)$ та довільних чисел $M_1 < M_2$

$$\begin{aligned} |I_2(u) - I_2(u_0)| \leq & F_{st}(M_1) + (1 - F_{st}(M_2)) + \\ & + \sup_{y \in [M_1, M_2]} \left| \varphi(((1-\alpha) + \alpha e^y)u) - \right. \\ & \left. - \varphi(((1-\alpha) + \alpha e^y)u_0) \right|, \end{aligned}$$

тому можна вибором досить великого за модулем $M_1 < 0$ і досить великого $M_2 > 0$ зробити доданки $F_{st}(M_1)$ і $1 - F_{st}(M_2)$ скільки завгодно малими, а потім зробити третій доданок досить малим при u і близьких до u_0 .

Отже, підінтегральна функція в зовнішньому інтегралі в правій частині (22) неперервна при $u \in [0, +\infty)$, тому $\varphi_1(x)$ диференційовна при $x \in [0, +\infty)$ і

$$\varphi_1'(x) = \frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{\bar{F}x + c} \varphi_1(x) - \frac{\lambda_{cl} I_1(x) + \lambda_{st} I_2(x)}{\bar{F}x + c}. \quad (24)$$

Позначимо $x_n = y_n^{cl}$ ($n = \overline{1, \infty}$) і запишемо (24) у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = & \lambda_{cl} (\bar{F}x + c)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{p}} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{1}{\bar{F}u + c} \right)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{p} + 1} \times \right. \\ & \left. \times \left(\sum_{l=1}^k p_l^{cl} \varphi(u - x_l) \right) du \right) \quad (0 \leq x \leq x_1), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = & \lambda_{cl} (\bar{F}x + c)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{p}} \times \\ & \times \left(\int_x^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{\bar{F}u + c} \right)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{p} + 1} \times \right. \\ & \times \left(\sum_{l=1}^n p_l^{cl} \varphi(u - x_l) \right) du + \\ & + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{1}{\bar{F}u + c} \right)^{\frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{p} + 1} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left(\sum_{l=1}^k p_l^{cl} \varphi(u - x_l) \right) du \right) \right) \\ & (x_n \leq x \leq x_{n+1}, n = \overline{1, \infty}), \end{aligned} \quad (26)$$

причому рівності (26) виконуються при $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

З (25), (26) і неперервності $\varphi(x)$ випливає, що $\varphi_2(x)$ є диференційовною функцією на кожному з відрізків $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, ..., при цьому

$$\varphi_2'(x) = \frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{\bar{F}x + c} \varphi_2(x) \quad (0 \leq x \leq x_1), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2'(x) = & \frac{\lambda_{cl} + \lambda_{st}}{\bar{F}x + c} \varphi_2(x) - \frac{\lambda_{cl}}{\bar{F}x + c} \sum_{l=1}^n p_l^{cl} \varphi(x - x_l) \\ & (x_n \leq x \leq x_{n+1}, n = \overline{1, \infty}). \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, функція $\varphi(x)$ є неперервно диференційовною на кожному з відрізків $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, ... і з (24), (27), (28) випливає, що вона задовольняє інтегро-диференціальне рівняння (18) на кожному з проміжків $[0, x_1]$, $(x_1, x_2]$, ..., $(x_{n-1}, x_n]$, ...

Але оскільки $\varphi(0) > 0$ (це видно, наприклад, з рівності (20)), то з (24), (27), (28) при $n = \overline{1, \infty}$

$$\varphi'(x_n - 0) - \varphi'(x_n + 0) = \frac{\lambda_{cl} p_n^{cl} \varphi(0)}{\bar{F}x_n + c} > 0$$

тобто функція $\varphi(x)$ не є диференційовною в точках $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Оцінка (19) випливає безпосередньо з рівняння (18). Теорема доведена.

3 Статистична оцінка ймовірності небанкрутства

Оберемо довільне досить велике натуральне число K , довільні числа X_0 і X такі, що $0 \leq X_0 < X$. Покладемо $m_0 = [KX_0]$ і

$m = [KX] + 1$. Введемо функцію $\varphi_{K, X_0, X}(x)$, визначену при $x \in [X_0, X]$, таким чином

$$\begin{aligned}\varphi_{K, X_0, X}(x) &= \varphi(X_0) \quad \text{при } x \in [X_0, (m_0 + 1)/K], \\ \varphi_{K, X_0, X}(x) &= \varphi(i/K) \\ \text{при } x &\in [i/K, (i + 1)/K], \quad i = \overline{m_0 + 1, m - 1}, \\ \varphi_{K, X_0, X}(x) &= \varphi((m - 1)/K) \\ \text{при } x &\in [(m - 1)/K, X].\end{aligned}$$

Моделюємо траєкторії процесів $X_{X_0}(t)$, $X_{i/K}(t)$ ($i = \overline{m_0 + 1, m - 1}$) на проміжку $[0, +\infty)$ (насправді на досить великому скінченному проміжку) N разів методом Монте-Карло. В результаті моделювання банкрутство не настане $\nu_{m_0}(n)$ і $\nu_i(N)$ ($i = \overline{m_0 + 1, m - 1}$) разів відповідно. Позначимо через $\varphi_{K, X_0, X}(x)$ статистичну оцінку ймовірності небанкрутства $\varphi(x)$, визначену при $x \in [X_0, X]$ таким чином

$$\begin{aligned}\varphi_{K, X_0, X}(x) &= \frac{\nu_{m_0}(N)}{N} \quad \text{при } x \in [X_0, (m_0 + 1)/K], \\ \varphi_{K, X_0, X}(x) &= \frac{\nu_i(N)}{N} \\ \text{при } x &\in [i/K, (i + 1)/K], \quad i = \overline{m_0 + 1, m - 1}, \\ \varphi_{K, X_0, X}(x) &= \frac{\nu_{m-1}(N)}{N} \\ \text{при } x &\in [(m - 1)/K, X].\end{aligned}$$

Теорема 4. За зроблених вище позначень і припущень для довільних $\varepsilon > 0$, $0 \leq X_0 < X$ і $F_d(y)$, що задовольняє умови теореми 3,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \left\{ \sup_{x \in [X_0, X]} |\varphi(x) - \varphi_{K, X_0, X}(x)| \leq \right. \\ \left. \leq \varepsilon + \frac{\lambda_d + \lambda_{st}}{cK} \right\} \geq 1 - 2(m - m_0)e^{-2N\varepsilon^2}.\end{aligned}\quad (29)$$

Доведення. Беручи до уваги оцінку (19) і теорему Лагранжа про середнє, маємо

$$\sup_{x \in [X_0, X]} |\varphi(x) - \varphi_{K, X_0, X}(x)| \leq \frac{\lambda_d + \lambda_{st}}{cK}. \quad (30)$$

Введемо випадкові події

$$\begin{aligned}A'_{m_0} &= \left\{ |\varphi_{K, X_0, X}(X_0) - \varphi_{K, X_0, X}(X_0)| \leq \varepsilon \right\}, \\ A'_i &= \left\{ |\varphi_{K, X_0, X}(i/K) - \varphi_{K, X_0, X}(i/K)| \leq \varepsilon \right\} \\ (i &= \overline{m_0 + 1, m - 1}).\end{aligned}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо [18, с. 93]

$$\mathbf{P}\{A'_i\} \leq 2e^{-2\varepsilon^2 N} \quad (i = \overline{m_0, m - 1}),$$

тому

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \left\{ \sup_{x \in [X_0, X]} |\varphi_{K, X_0, X}(x) - \varphi_{K, X_0, X}(x)| \leq \varepsilon \right\} = \\ = \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=m_0}^{m-1} A'_i \right\} = 1 - \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{i=m_0}^{m-1} \overline{A'_i} \right\} \geq \\ \geq 1 - \sum_{i=m_0}^{m-1} \mathbf{P}\{\overline{A'_i}\} \geq 1 - 2(m - m_0)e^{-2N\varepsilon^2}.\end{aligned}\quad (31)$$

З огляду на (30), (31) і нерівність трикутника маємо (29). Теорема доведена.

Отже, довільна задана точність наближення досягається вибором досить малого $\varepsilon > 0$ і досить великого натурального K , а при заданій точності необхідна надійність завжди забезпечується вибором досить великої кількості реалізацій N .

Висновки

У роботі розглянута класична модель ризику, коли страхова компанія розміщує капітал на фінансовому (B,S)-ринку, а еволюція ціни ризикового активу описується процесом зі стрибками. Встановлені оцінки зверху і знизу для ймовірності небанкрутства на нескінченному проміжку часу. Досліджені такі властивості ймовірності небанкрутства, як неперервність і диференційовність. Встановлено інтегро-диференціальне рівняння для неї, знайдена оцінка її похідної, яка використовується для виведення співвідношення, що пов'язує точність і надійність наближення цієї функції її статистичною оцінкою. Отримані результати дають можливість страховій компанії приймати рішення щодо своїх інвестиційних стратегій.

Список використаних джерел

1. Мельников А. В. Математика финансовых обязательств: [науч. изд.] / А. В. Мельников, С. Н. Волков, М. Л. Нечаев. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 260 с.
2. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці: [навч. посіб. для студ. економ. та мат. спеціальностей унів.] / М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. — К.: Інформатехніка, 1995. — 380 с.

3. *Эмбрехтс П.* Некоторые аспекты страховой математики / П. Эмбрехтс, К. Клоппельберг // Теория вероятностей и ее применения. — 1993. — Т. 38, вып. 2. — С. 374–416.
4. *Vinogradov O. P.* The Cramer condition is necessary and sufficient for asymptotically exponential decrease of ruin probability / O. P. Vinogradov // Journal of Mathematical Sciences. — 1999. — Vol. 93, No. 4. — P. 609–611.
5. *Von Bahr B.* Asymptotic ruin probabilities when exponential moments do not exist / Bengt von Bahr // Scandinavian Actuarial Journal. — 1975. — No. 1. — P. 6–10.
6. *Embrechts P.* Estimates of the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims / P. Embrechts, N. Veraverbeke // Insurance: Mathematics and Economics. — 1982. — Vol. 1, Issue 1. — P. 55–72.
7. *Kalashnikov V. V.* Estimates of the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims / V. V. Kalashnikov, D. G. Konstantinides // Insurance: Mathematics and Economics. — 2000. — Vol. 27, Issue 1. — P. 145–149.
8. *Konstantinides D. G.* Two-sided bounds for ruin probability under constant interest force / D. G. Konstantinides, Q. H. Tang, G. Sh. Tsitsiashvili // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — Vol. 123, No. 1. — P. 3824–3833.
9. *Sundt B.* Ruin estimates under interest force / Bjørn Sundt, Jozef L. Teugels // Insurance: Mathematics and Economics. — 1995. — Vol. 16, Issue 1. — P. 7–22.
10. *Kalashnikov V.* Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments / Vladimir Kalashnikov, Ragnar Norberg // Stochastic Processes and their Applications. — 2002. — Vol. 98. — P. 211–228.
11. *Frolova A.* In the insurance business risky investments are dangerous / Anna Frolova, Yuri Kabanov, Serguei Pergamenshchikov // Finance and Stochastics. — 2002. — Vol. 6, Issue 2. — P. 227–235.
12. *Андрощук М. О.* Оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії, яка функціонує на BS-ринку / М. О. Андрощук, Ю. С. Мішура // Український математичний журнал. — 2007. — Т. 59, № 11. — С. 1443–1453.
13. *Бондарев Б. В.* Платоспроможність страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S)-ринку / Б. В. Бондарев, Т. В. Жмихова // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2008. — № 4. — С. 99–104.
14. *Бондарев Б. В.* Об одной модели эволюции акции в соответствующей задаче Р. Мертона / Б. В. Бондарев, А. И. Смоляков, Е. В. Степанов // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2004. — № 2. — С. 11–21.
15. *Рагуліна О. Ю.* Про диференційовність ймовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою / О. Ю. Рагуліна // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1–2. — С. 82–116.
16. *Бондарев Б. В.* Применение статистического моделирования для нахождения вероятности неразoreния в классической задаче страхования. I / Б. В. Бондарев, Е. Ю. Орфиняк // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1–2. — С. 161–173.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: [учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов; в 3-х т.] / Г. М. Фихтенгольц. — [7-е изд.] — М.: Наука, 1969. — Т. 2. — 1969. — 800 с.
18. *Ширяев А. Н.* Вероятность: [учеб. для студ. высш. учеб. зав.; в 2-х кн.] / А. Н. Ширяев. — [3-е изд., перераб. и доп.] — М.: МЦНМО, 2004. — Кн. 1: Вероятность-1. — 2004. — 520 с.

Надійшла до редколегії 10.12.2011

УДК 517.983

Ганна О. Ревенко, аспірант

**Інволютивна алгебра, утворена
напівгрупою операторів.**

У роботі розглянуто структуру замкненої інволютивної підалгебри алгебри обмежених операторів у просторі Гільберта, яка утворена сильно неперервною однопараметричною напівгрупою операторів.

Ключові слова: напівгрупа операторів, інволютивна алгебра, діагональний оператор, розкладання одиниці, ортопроектор.

E-mail: revenkoa89@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. ***

Нехай $B(H)$ - алгебра Банаха лінійних обмежених операторів у просторі Гільберта H .

Позначимо через Π однопараметричну напівгрупу операторів $T_\alpha \in B(H)$ ($\alpha \geq 0$), які задовольняють умовам:

$$T_0 = 1, T_\alpha = 0 \quad (\alpha \geq 1),$$

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}, \sup_{\alpha \geq 0} \|T_\alpha\| \leq 1$$

та властивості

$$\forall \alpha, \beta \in [0; 1] \quad (\alpha \geq \beta \Rightarrow T_{\alpha-\beta} = T_\beta^* T_\alpha + T_{1-\beta} T_{1-\alpha}^*). \quad (1)$$

Окрім цього, дану напівгрупу будемо вважати сильно неперервною, тобто $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha x = T_{\alpha_0} x$ ($\alpha_0 \geq 0, x \in H$).

Нехай $\mathcal{A}$ - найменша замкнена інволютивна підалгебра алгебри $B(H)$, яка містить усі T_α ($\alpha \geq 0$). Тоді $\mathcal{A}$ є замиканням унітарної алгебри з утворюючою множиною $\Pi \cup \Pi^*$.

Для будь-якого $\alpha \in [0; 1]$ розглянемо сімейство самоспріжених операторів $P_\alpha = T_\alpha^* T_\alpha$. Тоді користуючись властивістю (1) із заміною $1 - \alpha$ та $1 - \beta$ відповідно на α та β , отримаємо:

$$\forall \alpha, \beta \in [0; 1] \quad (\alpha \geq \beta \Rightarrow P_\alpha P_\beta = T_\alpha^* T_\alpha T_\beta^* T_\beta = T_\alpha^* (T_\alpha - T_{1-\alpha} T_{1-\beta}^*) T_\beta = T_\alpha^* T_\alpha - 0 = P_\alpha).$$

З останнього випливає, що P_α утворює спадну систему ортопроекторів на відрізку $[0; 1]$, при цьому $P_0 = 1, P_1 = 0$.

Для ортопроекторів $E_\alpha = 1 - P_\alpha$ ($\alpha \in [0; 1]$) має місце наступне твердження.

Anna A. Revenko, Postgraduate Student

**Involutive algebra which is formed by the
semigroup of operators**

In this paper we study the structure of closed involutive subalgebra of algebra of bounded operators on Hilbert space which is formed by strongly continuous one-parameter semigroup of operators.

Key words: semigroup of operators, involutive algebra, diagonal operator, expansion of a unit, orthogonal projector.

Лема 1. Система операторів E_α утворює сильно неперервне розкладання одиниці на відрізку $[0; 1]$.

Доведення. Монотонне зростання ортопроекторів E_α та те, що вони комутують один з одним, випливає з наведених властивостей P_α . Доведемо сильну неперервність сімейства P_α ($\alpha \in [0; 1]$).

Візьмемо довільне $x \in H$ і зафіксуємо його. Через неперервність функції $T_\alpha x$ на відрізку $[0; 1]$ вона на цьому відрізку рівномірно неперервна, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_1 > 0$ таке, що

$$\|(T_\beta - T_\alpha)x\| < \varepsilon \quad (|\alpha - \beta| < \delta_1). \quad (2)$$

Візьмемо тепер довільне число $\beta_0 \in [0; 1]$ та зафіксуємо число $\alpha > \beta_0$ з останнього півінтервалу так, щоб $\alpha - \beta_0 < \delta_1/2$. Тоді згідно з (2)

$$\|(T_\alpha - T_{\beta_0})x\| < \varepsilon. \quad (3)$$

При цьому фіксованому α (а отже при фіксованому елементі $T_{1-\alpha}^* x$), використовуючи сильну неперервність сімейства T_α , підберемо число δ так, щоб при $|\beta - \beta_0| < \delta < \alpha - \beta_0 < \delta_1/2$ виконувалися нерівності

$$\|(T_{1-\beta_0} - T_{1-\alpha})T_{1-\alpha}^* x\| < \varepsilon. \quad (4)$$

Тепер при $|\beta - \beta_0| < \delta$, згідно з (1) - (4), отримаємо:

$$\begin{aligned} \|(P_\beta - P_{\beta_0})x\| &= \|(T_\beta^* T_\beta - T_{\beta_0}^* T_{\beta_0})x\| \leq \\ &\leq \|(T_\beta^* T_\beta - T_\beta^* T_\alpha)x\| + \|(T_\beta^* T_\alpha - T_{\beta_0}^* T_\alpha)x\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|(T_{\beta_0} T_{\alpha} - T_{\beta_0}^* T_{\beta_0})x\| \leq \|T_{\beta}^*\| \cdot \|(T_{\beta} - T_{\alpha})x\| + \\
& + \|(T_{\alpha-\beta} - T_{1-\beta} T_{1-\alpha}^*)x - \\
& - (T_{\alpha-\beta_0} - T_{1-\beta_0} T_{1-\alpha}^*)x\| + \\
& + \|T_{\beta_0}^*\| \cdot \|(T_{\alpha} - T_{\beta_0})x\| < \epsilon + \|(T_{\alpha-\beta} - T_{\alpha-\beta_0})x\| + \\
& + \|(T_{1-\beta_0} - T_{1-\beta}) \cdot T_{1-\alpha}^* x\| + \epsilon < 4\epsilon.
\end{aligned}$$

Через довільність $\epsilon > 0$ з останньої нерівності випливає сильна неперервність сімейства P_{α} на півінтервалі $[0; 1]$. Оскільки T_{α} сильно неперервне в точці $\alpha = 1$ та для будь-якого $x \in H$ $\|P_{\alpha} x\| \leq \|T_{\alpha}^*\| \cdot \|T_{\alpha} x\| \leq \|T_{\alpha} x\| \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 1$), то P_{α} сильно неперервне в точці $\alpha = 1$.

З означення сімейства E_{α} тепер випливає його сильна неперервність на відрізку $[0; 1]$. Лему доведено.

Нехай $\theta = \{0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 1\}$ - довільне розбиття відрізка $[0; 1]$ з рангом $r(\theta) = \max_{0 \leq k \leq n} (\alpha_k - \alpha_{k-1})$ та $\Delta_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ ($1 \leq k \leq n$). Нехай $E(\Delta_k) = E_{\alpha_k} - E_{\alpha_{k-1}}$. Тоді $\sum_{k=1}^n E(\Delta_k) = 1$. Для будь-якого оператора $B \in \mathcal{B}(H)$ розглянемо суму

$$d_{\theta}(B) = \sum_{k=1}^n E(\Delta_k) B E(\Delta_k). \quad (5)$$

Визначений рівністю (5) лінійний оператор $d_{\theta} : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ є обмеженим лінійним оператором з нормою $\|d_{\theta}\| = 1$ для будь-якого розкладання одиниці E_{α} ($\alpha \in [0; 1]$).

Дійсно, для будь-якого $x \in H$ через попарну ортогональність ортопроекторів $E(\Delta_k)$ ($1 \leq k \leq n$) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\|d_{\theta}(B)x\|^2 &= \sum_{k=1}^n \|E(\Delta_k) B E(\Delta_k)x\|^2 \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n \|E(\Delta_k)\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot \|E(\Delta_k)x\|^2 \leq \\
&\leq \|B\|^2 \cdot \sum_{k=1}^n \|E(\Delta_k)x\|^2 = \|B\|^2 \cdot \|x\|^2,
\end{aligned}$$

тобто $\|d_{\theta}(B)\| \leq \|B\|$.

Оскільки $d_{\theta}(E(\Delta_1)) = E(\Delta_1)$, то з останньої нерівності випливає, що $\|d_{\theta}\| = 1$.

У випадку якщо існує $\lim_{r(\theta) \rightarrow 0} d_{\theta}(B)x = d(B)x$ ($x \in H$), то оператор $d(B)$ будемо називати діагональною оператора B , а d - діагональним оператором. Очевидно, на своїй області визначення діагональний оператор є обмеженим та

$\|d\| = 1$. Оскільки $d_{\theta}(d_{\theta}(B)) = d_{\theta}(B)$, то d - ідемпотентний оператор ($d^2 = d$).

Зауважимо, що якщо $d(B)$ існує, то для будь-якої послідовності $\theta_n \subset \theta_{n+1}$, $r(\theta_n) \rightarrow 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\theta_n}(B) = d(B)$. Оскільки $d_{\theta}(B)$ комутує з будь-яким своїм оператором $E(\Delta_k)$, то, очевидно, $d_{\theta'}(B)$ ($\theta' \supset \theta$) також комутує з $E(\Delta_k)$. Через останнє зауваження $d(B)$ буде комутувати з $E(\Delta_k)$. Таким чином, $d(B)$ комутує з кожним оператором $E_{\alpha} - E_{\beta}$ ($\alpha \geq \beta$), а тому комутує з усім сімейством E_{α} ($\alpha \in [0; 1]$). Окрім цього, очевидно, якщо B комутує з сімейством E_{α} , то $d(B) = B$.

Теорема. Якщо E_{α} ($\alpha \in [0; 1]$) - сильно неперервне розкладання одиниці та $K \in \mathcal{B}(H)$ - компактний оператор, то його діагональ $d(K) = 0$.

Доведення. Нехай спочатку $A \in \mathcal{B}(H)$ - довільний одновимірний оператор. Тоді існують $a, b \in H$ такі, що $Ax = (x, a)b$ ($x \in H$).

Для будь-якого розбиття θ відрізка $[0; 1]$ та $x \in H$

$$\begin{aligned}
d_{\theta}(A)x &= \sum_{k=1}^n E(\Delta_k) A E(\Delta_k)x = \\
&= \sum_{k=1}^n E(\Delta_k) (E(\Delta_k)x, a)b = \\
&= \sum_{k=1}^n (E(\Delta_k)x, a) E(\Delta_k)b
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
\|d_{\theta}(A)x\|^2 &= \sum_{k=1}^n |(E(\Delta_k)x, a)|^2 \cdot \|E(\Delta_k)b\|^2 \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n \|E(\Delta_k)x\|^2 \cdot \|a\|^2 \cdot \|E(\Delta_k)b\|^2.
\end{aligned}$$

Оскільки функція $E_{\alpha}x$ неперервна на відрізку $[0; 1]$, то вона рівномірно неперервна на ньому. Для будь-якого $\epsilon > 0$ оберемо $\delta > 0$ з умови рівномірної неперервності $E_{\alpha}x$. Тоді при $r(\theta) < \delta$ отримаємо: $\|E(\Delta_k)x\| < \epsilon$ ($1 \leq k \leq n$).

Тепер з останніх нерівностей випливає, що

$$\|d_{\theta}(A)x\|^2 \leq \epsilon^2 \cdot \|a\|^2 \cdot \sum_{k=1}^n \|E(\Delta_k)b\|^2 = \epsilon^2 \cdot \|a\|^2 \cdot \|b\|^2.$$

Останнє означає, що

$$d(A)x = \lim_{r(\theta) \rightarrow 0} d_{\theta}(A)x = 0 \quad (x \in H). \quad (6)$$

Оскільки d – лінійний оператор, то рівність (6) має місце для будь-якого скінченновимірного оператора $A \in B(H)$.

Нехай A – скінченновимірний оператор такий, що $\|K - A\| < \epsilon$. Тоді для будь-якого $x \in H$

$$\begin{aligned} \|d_\theta(K)x\| &\leq \|(d_\theta(K) - d_\theta(A))x\| + \\ &+ \|d_\theta(A)x\| \leq \|d_\theta\| \cdot \|K - A\| \cdot \|x\| + \|d_\theta(A)x\| \leq \\ &\leq \epsilon \cdot \|x\| + \|d_\theta(A)x\|. \end{aligned}$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $r(\theta) \rightarrow 0$, отримаємо, що $\lim_{r(\theta) \rightarrow 0} \|d_\theta(K)x\| \leq \epsilon \cdot \|x\|$.

Звідки через довільність ϵ випливає, що $d(K) = 0$. Теорему доведено.

Позначимо через $\mathcal{D}$ комутативну замкнену підалгебру алгебри $\mathcal{A}$, утворену сімейством ортопроекторів P_α ($\alpha \in [0; 1]$).

Відзначимо, що для будь-яких операторів T_α та T_β алгебра $\mathcal{D}$ комутує з ними в тому значенні, що $T_\alpha \mathcal{D} = \mathcal{D} T_\alpha$ та $T_\beta \mathcal{D} = \mathcal{D} T_\beta$. Дійсно, завдяки (1) встановлюються рівності $P_\beta T_\alpha = T_\alpha P_{\alpha+\beta}$, з яких, очевидно, випливають попередні дві рівності.

Теорема. Алгебра $\mathcal{D}$ топологічно доповнюється в алгебрі $\mathcal{A}$.

Доведення. Згідно з визначенням алгебри $\mathcal{A}$, кожен її елемент є границею в $B(H)$ послідовності елементів виду $\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$, де $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ та A_k – добутки скінченного числа елементів множини $\Pi \cup \Pi^*$. Згідно з властивостями навігрупп Π та Π^* можна вважати, що в добутку A_k кожен два сусідні співмножники належать до різних навігрупп (Π або Π^*).

Згідно з властивістю (1), добуток двох вказаних вище сусідніх співмножників при $\alpha \geq \beta$ має вигляд:

$$T_\alpha T_\beta^* = T_{\alpha-\beta} - T_{1-\alpha}^* T_{1-\beta} = (1 - P_{1-\alpha}) T_{\alpha-\beta}.$$

Переходячи до спряженої рівності та замінюючи в ньому α на β отримуємо, що при $\alpha \leq \beta$ $T_\alpha T_\beta^* = T_{\beta-\alpha}^* (1 - P_{1-\beta})$. Таким чином, при будь-яких $\alpha, \beta \in [0; 1]$ $T_\alpha T_\beta^* \in (\Pi \cup \Pi^*) \mathcal{D} = \mathcal{D} (\Pi \cup \Pi^*)$.

З останніх міркувань випливає, що кожен скінченний добуток A_k є елементом однієї з множин $\mathcal{D}$, $\Pi \mathcal{D}$ або $\Pi^* \mathcal{D}$. Таким чином, алгебра $\mathcal{A}$ є замиканням лінійного простору, утвореного множиною $\mathcal{D} \cup \Pi \mathcal{D} \cup \Pi^* \mathcal{D}$.

Для операторів E_α з леми для будь-якого довільного розбиття θ відрізка $[0; 1]$ при $B \in \mathcal{D}$ отримаємо $d_\theta(B) = B$ (оскільки B комутує з кожним $E(\Delta_k)$). При $B \in \Pi \mathcal{D}$, тобто $B = T_\alpha S$ ($\alpha \in (0; 1)$, $S \in \mathcal{D}$) отримуємо $d_\theta(B) = d_\theta(T_\alpha) S$.

Як було зазначено перед теоремою $P_\beta T_\alpha = T_\alpha P_{\alpha+\beta}$. Звідки через визначення E_α випливає, що $E(\Delta_k) T_\alpha E(\Delta_k) = T_\alpha E(\tilde{\Delta}_k) E(\Delta_k)$, де $E(\tilde{\Delta}_k) = [\alpha_k - 1 + \alpha, \alpha_k + \alpha]$. Якщо тепер $r(\theta) < \alpha$, то всі відрізки Δ_k , відповідні до розбиття θ , не перетинаються з відповідними відрізками $\tilde{\Delta}_k$. Тобто всі доданки суми $d_\theta(B)$ рівні 0 при $r(\theta) < \alpha$. Аналогічно при $r(\theta) < \alpha$ $d_\theta(ST_\alpha^*) = 0$ ($S \in \mathcal{D}$).

Таким чином, узагальнена послідовність лінійних обмежених у сукупності операторів d_θ збігається на множині елементів, лінійні комбінації яких є скрізь щільними в $\mathcal{A}$.

За теоремою Банаха-Штейнгауза отримуємо:

$$\lim_{r(\theta) \rightarrow 0} d_\theta(B) = d(B) \quad (B \in \mathcal{A}).$$

Оскільки d – неперервний проєкційний оператор в $\mathcal{A}$ з $d(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$, то $\mathcal{D}$ топологічно доповнюється в $\mathcal{A}$. Теорему доведено.

Позначимо через $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ підпростори замкненого простору $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$, які є відповідно замкненнями скінчених лінійних комбінацій множин $\{T_\alpha \mathcal{D}\}_{\alpha > 0}$ та $\{T_\alpha^* \mathcal{D}\}_{\alpha > 0}$. Тоді для будь-якого оператора $W \in \mathcal{A} \odot \mathcal{D}$ $W = \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n + D_n + V_n)$ ($U_n \in \mathcal{U}$, $D_n \in \mathcal{D}$, $V_n \in \mathcal{V}$).

Оскільки оператор $1 - d$ є обмеженим, то $W = (1 - d)(W) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - d)(U_n) + (1 - d)(D_n) + (1 - d)(V_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n + 0 + V_n)$. Тобто $U + V$ є скрізь щільним в $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$.

Для довільного фіксованого розбиття θ відрізка $[0; 1]$ та будь-якого оператора $T_\alpha S$ ($\alpha > 0$, $S \in \mathcal{D}$), очевидно,

$$\begin{aligned} T_\alpha S &= \sum_{k,m=1}^n E(\Delta_k) T_\alpha S E(\Delta_m) = \\ &= \left(\sum_{k,m=1}^n E(\Delta_k) T_\alpha E(\Delta_m) \right) S. \end{aligned}$$

Якщо $k > m$, то, як було зазначено вище, $E(\Delta_k) T_\alpha E(\Delta_m) = T_\alpha E(\tilde{\Delta}_k) E(\Delta_m) = 0$. Отже

$$T_\alpha S = \sum_{k \leq m} E(\Delta_k) T_\alpha S E(\Delta_m).$$

З щільності множини скінчених лінійних комбінацій операторів $T_\alpha S$ в $\mathcal{U}$ отримаємо:

$$C = \sum_{k \leq m} E(\Delta_k) C E(\Delta_m) \quad (C \in \mathcal{U}). \quad (7)$$

З (7) випливає, що

$$\left\| C - \sum_{k < m} E(\Delta_k) C E(\Delta_m) \right\| = \\ = \left\| \sum_{k=1}^n E(\Delta_k) C E(\Delta_k) \right\|.$$

Оскільки остання норма прагне до 0 при $r(\theta) \rightarrow 0$, то

$$C = \lim_{r(\theta) \rightarrow 0} \sum_{k < m} E(\Delta_k) C E(\Delta_m) \quad (C \in \mathcal{U}). \quad (8)$$

За теоремою Банаха-Штейнгауза норми операторів ∇_θ , визначених рівністю $\nabla_\theta C = \sum_{k < m} E(\Delta_k) C E(\Delta_m)$, рівномірно обмежені за θ на підпросторі $\mathcal{U}$, тобто

$$\exists M > 0 \forall \theta, C \in \mathcal{U} \quad (\|C\| \leq 1 \Rightarrow \|\nabla_\theta C\| \leq M).$$

Оскільки $\nabla_\theta(ST_\alpha^*) = 0$, то остання умова виконується на скрізь щільній в $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$ множині скінчених лінійних комбінацій елементів множини $(T_\alpha \mathcal{D})_{\alpha > 0} \cup \{DT_\alpha^*\}_{\alpha > 0}$. Через обмеженість ∇_θ (при фіксованому θ) на $B(H)$ остання умова виконується на всій алгебрі $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$, тобто оператори ∇_θ рівномірно обмежені за θ на $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$. Оскільки узагальнена послідовність ∇_θ збігається при $r(\theta) \rightarrow 0$ на скрізь щільній в $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$ множині, то за теоремою Банаха-Штейнгауза вона збігається на всій алгебрі $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$ до деякого обмеженого оператора ∇ . Оскільки $\nabla_\theta^2 = \nabla_\theta$, то $\nabla^2 = \nabla$ та $\nabla \mathcal{U} = \mathcal{U}$, $\nabla \mathcal{V} = \{0\}$. Отже, $\mathcal{U}$

топологічно доповнюється в $\mathcal{A} \odot \mathcal{D}$. Разом з попередньою теоремою тепер отримаємо наступну теорему.

Теорема. Алгебра $\mathcal{A}$ є топологічною прямою сумою алгебр $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}$ та $\mathcal{V}$.

Зауважимо, що з (8) та визначення E_α випливає рівність

$$C = \lim_{r(\theta) \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n E_{\alpha_{m-1}} C E(\Delta_m). \quad (9)$$

Для довільних наборів точок $\xi_k \in \Delta_k$ отримаємо

$$\left\| \sum_{m=1}^n E_{\xi_m} C E(\Delta_m) - \sum_{m=1}^n E_{\alpha_{m-1}} C E(\Delta_m) \right\| \leq \\ \leq \left\| \sum_{m=1}^n E(\Delta_m) C E(\Delta_m) \right\| \rightarrow 0 \quad (r(\theta) \rightarrow 0).$$

Звідки випливає, що вищезазначений оператор $C \in \mathcal{U}$ має трикутний вигляд, тобто

$$C = \int_0^1 E_\alpha C dE_\alpha.$$

Аналогічні представлення було отримано в [1] для компактного оператора Вольтера.

Автор вдячний Димарському Я. М. за постановку задачі та постійну підтримку.

Література

1. Бродский М. О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра / М. С. Бродский. – М.: УМН, Т. XVI, выпуск 1 (97), 1961. – С. 135 – 141.

Надійшла до редколегії 06.11.2011

УДК 519.21

Л.М. Сахно, к.ф.-м.н.

Дослідження інтегралів від квадрату періодограми та їх застосування до статистичного параметричного оцінювання

Встановлено асимптотичну поведінку інтегралів від квадрату періодограми. Введено клас оцінок мінімального контрасту, пов'язаних з такими інтегралами, встановлено їх консистентність та асимптотичну нормальність.

Ключові слова: періодограма, інтеграл від квадрату періодограми, оцінки мінімального контрасту.

E-mail: lyudmyla.sakhno@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Вступ

Розглянемо гауссів стаціонарний випадковий процес $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, з нульовим середнім та спектральною щільністю $f(\lambda)$, $\lambda \in S$, де $S = (-\pi, \pi]$. Нехай процес $X(t)$ спостерігається на відрізку $K_T = [1, T] \subset \mathbb{Z}$. Введемо скінченне перетворення Фур'є

$$d_T(\lambda) = \sum_{t \in K_T} e^{-i\lambda t} X(t), \quad \lambda \in S, \quad (1)$$

та періодограму 2-го порядку

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} |d_T(\lambda)|^2, \quad \lambda \in S. \quad (2)$$

У першому розділі статті досліджується асимптотична поведінка інтегралів

$$J_T(\varphi) = \int_S \varphi(\lambda) I_T^2(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

при $T \rightarrow \infty$, вагова функція $\varphi(\lambda)$ є дійсною, парною, $\varphi(\lambda) f^2(\lambda) \in L_1(S)$. У другому розділі вводяться оцінки мінімального контрасту, що базуються на функціоналі (3), та встановлюються умови їх консистентності та асимптотичної нормальності.

L.M. Sakhno, Ph.D.

Investigation of integrals of squared periodogram and their application for statistical parameter estimation

Asymptotic behavior of the integrals of the squared periodogram is investigated. The class of minimum contrast estimators related to such integrals is introduced, consistency and asymptotic normality of estimators are stated.

Key Words: periodogram, integral of the squared periodogram, minimum contrast estimators.

1 Асимптотичні властивості інтегралів від квадрату періодограми

Розглянемо інтеграли $J_T(\varphi)$, що задаються формулою (3). Введемо наступні умови.

Умова 1. Спектральна щільність $f(\lambda)$ є обмеженою та неперервною.

Умова 2. Вагова функція $\varphi(\lambda)$ є обмеженою та неперервною.

Лема 1. Нехай виконуються умови 1. Тоді

1) якщо функція $\varphi(\lambda)$ задовольняє Умову 2, то при $T \rightarrow \infty$

$$E J_T(\varphi) \rightarrow 2 \int_S \varphi(\lambda) f^2(\lambda) d\lambda;$$

2) якщо функції $\varphi_1(\lambda)$ та $\varphi_2(\lambda)$ задовольняють Умову 2, то при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \text{cov}(J_T(\varphi_1), J_T(\varphi_2)) \\ & \sim \frac{64\pi}{T} \int_S \varphi_1(\lambda) \varphi_2(\lambda) f^4(\lambda) d\lambda; \end{aligned}$$

3) якщо функції $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_k(\lambda)$ задовольняють Умову 2, то при $T \rightarrow \infty$

$$\text{cov}(J_T(\varphi_1), \dots, J_T(\varphi_k)) = O(T^{-1-k}).$$

Доведення. Для доведення використовуються формули для обчислення кумулянтів добуток випадкових величин (див., [7],[1]), а також властивості багатовимірних ядер типу Фейера

$$\Phi_k^T(u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{k-1} T} \prod_{j=1}^k \frac{\sin(Tu_j/2)}{\sin(u_j/2)},$$

$u_i \in S$, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^k u_i = 0$, а саме, той факт, що для неперервної і обмеженої функції $G(u_1, \dots, u_{k-1})$ маємо

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{S^{k-1}} \Phi_k^T(u_1, \dots, u_{k-1}) \quad (4)$$

$$\times G(u_1, \dots, u_{k-1}) du_1 \dots du_{k-1} = G(u_1, \dots, u_{k-1})$$

(див., наприклад, [2],[3],[1]). Розглянемо

$$\begin{aligned} EI_T^2(\lambda) &= \frac{1}{(2\pi T)^2} [2(\text{cum}(d_T(\lambda), d_T(-\lambda)))^2 \\ &+ \text{cum}(d_T(\lambda), d_T(\lambda)) \text{cum}(d_T(-\lambda), d_T(-\lambda))] = \\ &= \frac{2}{(2\pi T)^2} \left\{ \int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma - \lambda) \phi_1^T(-\gamma + \lambda) d\gamma \right\}^2 \\ &+ \frac{1}{(2\pi T)^2} \int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma - \lambda) \phi_1^T(-\gamma - \lambda) d\gamma \\ &\times \int f(\mu) \phi_1^T(\mu + \lambda) \phi_1^T(-\mu + \lambda) d\mu, \end{aligned}$$

$$\text{де } \phi_1^T(\lambda) = \sum_{t=1}^T e^{it\lambda},$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{k-1} T} \prod_{j=1}^{k-1} \phi_1^T(\lambda_j) = \Phi_k^T(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}).$$

Маємо $EJ_T(\varphi) = I_1 + I_2$, де

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int \varphi(\lambda) \left\{ \int f(\gamma) \Phi_2^T(\gamma - \lambda) d\gamma \right\}^2 d\lambda \\ &\rightarrow 2 \int \varphi(\lambda) f^2(\lambda) d\gamma, \quad T \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi T)} \int \varphi(\lambda) \int \int f(\lambda) f(\mu)$$

$$\times \Phi_4^T(\gamma - \lambda, -\gamma - \lambda, \mu + \lambda) d\gamma d\mu d\lambda \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Отже, $EJ_T(\varphi) \rightarrow 2 \int_S \varphi(\lambda) f^2(\lambda) d\lambda$ при $T \rightarrow \infty$.

Аналогічно аналізуємо і старші кумулянти. Зауважимо, що оскільки ми розглядаємо гаусів випадковий процес, в усіх розрахунках з'являтимуться кумулянти і спектральні щільності лише 2-го порядку,

Розглянемо

$$\text{cov}(J_T(\varphi_1), J_T(\varphi_2)) = \frac{1}{(2\pi T)^4} \int_{S^2} \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\beta)$$

$$\times \text{cum}((d_T(\alpha), d_T(-\alpha))^2, (d_T(\beta), d_T(-\beta))^2) d\alpha d\beta.$$

Кумулянт, що стоїть під знаком інтегралу, згідно із формулою для обчислення кумулянтів від добуток випадкових величин (див., наприклад, [7],[1]) можна представити у вигляді суми всіх можливих добуток кумулянтів 2-го порядку вигляду $\prod_{i=1}^4 \text{cum}(d_T(\mu_i), d_T(\nu_i))$, де аргументи $\mu_i, \nu_i \in \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$ обираються відповідно до всіх можливих нерозкладних 2-х елементарних розбиттів таблиці із двома рядками $\{\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\}$ та $\{\beta, -\beta, \beta, -\beta\}$. Нас будуть цікавити випадки, коли маємо $\text{cum}(d_T(\alpha), d_T(-\alpha))$ і $\text{cum}(d_T(\beta), d_T(-\beta))$ у вищезгаданих добутках, саме вони будуть давати основний внесок порядку $\frac{1}{T}$ до коваріації, внесок інших доданків буде меншого порядку. Отже, щоб встановити асимптотику коваріації, досить розглянути доданки, що містять вираз

$$\begin{aligned} &\text{cum}(d_T(\alpha), d_T(-\alpha)) \text{cum}(d_T(\beta), d_T(-\beta)) \\ &\times [\text{cum}(d_T(\alpha), d_T(\beta)) \text{cum}(d_T(-\alpha), d_T(-\beta)) \\ &+ \text{cum}(d_T(\alpha), d_T(-\beta)) \text{cum}(d_T(-\alpha), d_T(\beta))], \end{aligned}$$

їх внесок до коваріації має наступний вигляд:

$$\frac{1}{(2\pi T)^4} \int \int \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\beta)$$

$$\times \int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma - \alpha) \phi_1^T(-\gamma + \alpha) d\gamma$$

$$\times \int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma - \beta) \phi_1^T(-\gamma + \beta) d\gamma$$

$$\times \left[\int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma - \alpha) \phi_1^T(-\gamma - \beta) d\gamma \right.$$

$$\times \left. \int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma + \alpha) \phi_1^T(-\gamma + \beta) d\gamma \right.$$

$$+ \left. \int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma - \alpha) \phi_1^T(-\gamma + \beta) d\gamma \right.$$

$$\times \left. \int f(\gamma) \phi_1^T(\gamma + \alpha) \phi_1^T(-\gamma - \beta) d\gamma \right] d\alpha d\beta$$

$$= \frac{2\pi}{T} \int \int \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\beta)$$

$$\times \int f(\gamma) \Phi_2^T(\gamma - \alpha) d\gamma \int f(\gamma) \Phi_2^T(\gamma - \beta) d\gamma$$

$$\times \int \int f(\gamma) f(\gamma) [\Phi_4^T(\gamma - \alpha, -\gamma - \beta, \gamma + \alpha)$$

$$+ \Phi_4^T(\gamma - \alpha, -\gamma + \beta, \gamma + \alpha)] d\gamma d\gamma d\alpha d\beta.$$

Використовуючи (4) та враховуючи, що таких доданків 16, остаточно знаходимо $\text{cov}(J_T(\varphi_1), J_T(\varphi_2))$

$$\sim \frac{64\pi}{T} \int_S \varphi_1(\lambda) \varphi_2(\lambda) f^4(\lambda) d\lambda \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

Встановимо асимптотичну поведінку кумулянтів порядків $k \geq 3$:

$$\text{cum}(J_T(\varphi_1), \dots, J_T(\varphi_k)) = \frac{1}{(2\pi T)^{k-1}} \times \int_{S_k} \varphi_1(\alpha_1) \dots \varphi_k(\alpha_k) \text{cum}((d_T(\alpha_1), d_T(-\alpha_1))^2, \dots, (d_T(\alpha_k), d_T(-\alpha_k))^2) d\alpha_1 \dots d\alpha_k.$$

Кумулянт під знаком інтегралу можна записати у вигляді суми всіх можливих добутоків кумулянтів 2-го порядку, які можна утворити згідно всіх можливих нерозкладних розбиттів на пари таблиці із k рядками $(\alpha_i, -\alpha_i, \alpha_i, -\alpha_i)$, $i = 1, k$. При цьому максимальне число ядер типу Фейєра, які можна утворити, становитиме $k+1$, а, отже, для цих ядер буде використано $k+1$ множник $\frac{1}{T}$, відповідні інтеграли збігатимуться до скінченних границь згідно з (4). При цьому залишатиметься ще множник $\frac{1}{T^{k-1}(k+1)} = \frac{1}{T^{k-1}}$. Внесок інших доданків буде меншого порядку. Отже, асимптотику для кумулянтів, що описана у п.3) леми 1, встановлено. $\square$

Наступні дві леми є наслідком леми 1.

Лема 2. В умовах п.1) леми 1 при $T \rightarrow \infty$

$$J_T(\varphi) \rightarrow \tilde{J}(\varphi) = 2 \int_S \varphi(\lambda) f^2(\lambda) d\lambda \text{ за ймовірністю.}$$

Нехай $\xi = \{\xi_i\}_{i=1, \dots, m}$ — це гауссів випадковий вектор з нульовим середнім і $E\xi_i \xi_j = w_{ij} = 64\pi \int_S \varphi_i(\lambda) \varphi_j(\lambda) f^4(\lambda) d\lambda$.

Лема 3. Нехай виконуються умови п.3) леми 1. Тоді $T^{1/2}(J_T(\varphi) - EJ_T(\varphi)) \xrightarrow{D} \xi$ при $T \rightarrow \infty$; якщо має місце збіжність $T^{1/2}(EJ_T(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)) \rightarrow 0$, то $T^{1/2}(J_T(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)) \xrightarrow{D} \xi$ при $T \rightarrow \infty$.

Зауваження. Умови, що гарантують збіжність $T^{1/2}(EJ_T(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)) \rightarrow 0$, можна одержати міркуваннями, аналогічними до наведених в [1].

2 Оцінки мінімального контрасту, побудовані за допомогою функціоналів від квадрату періодограми

Нехай ми маємо спостереження гауссового випадкового процесу $\{X(t), t = 1, \dots, T\}$. Розглянемо задачу параметричного оцінювання у наступній постановці.

Розглянемо параметричну сім'ю ймовірнісних мір (розподілів) $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ таку, що: (1) різними значеннями параметра θ відповідають різні ймовірнісні міри P_θ , кожна ймовірнісна міра, згідно із теоремою Колмогорова, відповідає випадковому процесу із певними спектральними щільностями $f(\lambda, \theta)$; (2) для $\theta_1 \neq \theta_2$ $f(\lambda, \theta_1) \neq f(\lambda, \theta_2)$ майже всюди в S відносно міри Лебега.

Умова 3. Спектральна щільність процесу $X(t)$ $f(\lambda) = f(\lambda, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, де Θ — це компакт, а істинне значення параметру $\theta_0 \in \text{int}\Theta$.

Покладемо $\sigma^2(\theta) = \int f(\lambda, \theta) d\lambda$, $\psi(\lambda, \theta) = f(\lambda, \theta)/\sigma^2(\theta)$, і одержимо факторизацію спектральної щільності $f(\lambda, \theta) = \sigma^2(\theta)\psi(\lambda, \theta)$, де $\int \psi(\lambda, \theta) d\lambda = 1$, і введемо наступну умову.

Умова 4. Існують похідні $\nabla_\theta \psi(\lambda; \theta)$, і $\nabla_\theta \int \psi(\lambda; \theta) d\lambda = \int \nabla_\theta \psi(\lambda; \theta) d\lambda = 0$, тобто, можемо змінювати порядок диференціювання та інтегрування.

Умова 5. $\forall \theta \in \Theta$ спектральна щільність $f(\lambda, \theta) > 0$ є обмеженою і неперервною функцією.

Введемо оцінки мінімального контрасту, використовуючи загальний підхід до визначення таких оцінок (див., наприклад, [4], [1]). Розглянемо процес контрасту (або цільову функцію) наступного вигляду

$$U_T(\theta) = \int_S I_T^2(\lambda) \psi(\lambda; \theta)^{-1} d\lambda$$

і визначимо оцінку мінімального контрасту

$$\hat{\theta}_T = \arg \min_{\theta \in \Theta} U_T(\theta).$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови 5. Тоді оцінка $\hat{\theta}_T$ є конзистентною оцінкою параметра θ_0 , тобто, $\hat{\theta}_T \rightarrow \theta_0$ за ймовірністю при $T \rightarrow \infty$.

Доведення. Для встановлення конзистентності використовуємо стандартні міркування (див., наприклад, [4], [1]). Внаслідок леми 2 маємо збіжність за ймовірністю

$$U_T(\theta) \rightarrow U(\theta) = 2 \int_S f^2(\lambda, \theta_0) \psi(\lambda, \theta)^{-1} d\lambda,$$

і ця збіжність в умовах теореми є рівномірною відносно $\theta \in \Theta$ (що встановлюється міркуваннями, аналогічними до наведених у [4], [1]). При цьому

$$U(\theta) - U(\theta_0) = 2\sigma^2(\theta_0) \left[\int \frac{\psi^2(\lambda, \theta_0)}{\psi(\lambda, \theta)} d\lambda - 1 \right]$$

$$= 2\sigma^2(\theta_0) \int \psi(\lambda, \theta) \left(\frac{\psi(\lambda, \theta_0)}{\psi(\lambda, \theta)} - 1 \right)^2 d\lambda \\ = K(\theta_0; \theta) \geq 0,$$

і $K(\theta_0; \theta)$ має єдиний мінімум при $\theta = \theta_0$. $\square$

Умова 6. Функція $\psi(\lambda, \theta)$ двічі неперервно диференційовна в околі точки θ_0 , похідні $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{1}{\psi(\lambda, \theta)}$, $\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \frac{1}{\psi(\lambda, \theta)}$, $i, j = \overline{1, m}$, обмежені та неперервні.

Умова 7. Матриці $S(\theta) = \{s_{ij}(\theta)\}_{i,j=1,\dots,m}$ та $A(\theta) = \{a_{ij}(\theta)\}_{i,j=1,\dots,m}$ є додатно визначеними, де

$$a_{ij}(\theta) = 64\pi \int \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{1}{\psi(\lambda; \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{1}{\psi(\lambda; \theta)} f^4(\lambda) d\lambda, \\ s_{ij}(\theta) = 2 \int f^2(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \frac{1}{\psi(\lambda; \theta)} d\lambda, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови 5-7. Тоді при $T \rightarrow \infty$

$$T^{1/2} (\hat{\theta}_T - \theta_0) \xrightarrow{D} N_m(0, S^{-1}(\theta_0) A(\theta_0) S^{-1}(\theta_0)),$$

де матриці $S(\theta_0)$ та $A(\theta_0)$ визначені в умові 7, а $N_m(\cdot, \cdot)$ позначає m -мірний гауссів вектор.

Доведення. Використовуючи теорему про середнє значення, можемо записати

$$\nabla_{\theta} U_T(\hat{\theta}_T) = \nabla_{\theta} U_T(\theta_0) + \nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T(\theta_T^*) (\hat{\theta}_T - \theta_0),$$

$$\text{де } |\theta_T^* - \theta_0| < |\hat{\theta}_T - \theta_0|$$

$$\nabla_{\theta} U_T(\theta) = \int_S I_T^2(\lambda) \nabla_{\theta}(\psi(\lambda; \theta))^{-1} d\lambda, \\ \nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T = \int_S I_T^2(\lambda) (\varphi_{ij}(\lambda; \theta))_{i,j=\overline{1,m}} d\lambda.$$

де $\varphi_{ij}(\lambda; \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (\psi(\lambda; \theta))^{-1}$. Для достатньо великих T матимемо $\nabla_{\theta} U_T(\theta_0) = -\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T(\theta_T^*) (\hat{\theta}_T - \theta_0)$, а отже, для встановлення асимптотичної нормальності оцінки $\hat{\theta}_T$ досить показати, що при $T \rightarrow \infty$

- 1) $\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T(\theta_T^*) \rightarrow S(\theta_0)$ за ймовірністю;
- 2) $\sqrt{T} \nabla_{\theta} U_T(\theta_0) \xrightarrow{D} N_m(0, A(\theta_0))$.

де матриці $S(\theta_0)$ та $A(\theta_0)$ визначені в умові 7. Тоді матимемо збіжність при $T \rightarrow \infty$ $\sqrt{TS}(\theta_0) (\hat{\theta}_T - \theta_0) \xrightarrow{D} N_m(0, A(\theta_0))$, а отже, і твердження теореми в силу леми Слущкого.

Твердження 1) має місце в силу леми 2, твердження 2) випливає з леми 3 і того факту, що $\int_S f^2(\lambda) \nabla_{\theta}(\psi(\lambda; \theta))^{-1} d\lambda = 0$ (внаслідок умови 4). $\square$

Зауваження. Метод побудови оцінок параметрів спектральної щільності шляхом мінімізації певних функціоналів, що містять квадрати згладжених періодограм, представлено у роботі [5] (див. також посилання, наведені у вказаній роботі). Підхід до побудови оцінок, представлений у даній роботі дещо простіший і зручніший, оскільки не потребує вводити до розгляду згладжені періодограми. Зауважимо також, що цей підхід можна поширити на загальний негауссів випадок, а також для побудови оцінок з використанням інформації про спектральні щільності старших порядків.

3 Висновки

В роботі встановлено асимптотичну поведінку інтегралів від квадрату періодограми для гауссових випадкових процесів. Введено клас оцінок мінімального контрасту, пов'язаних з такими інтегралами, встановлено умови їх консистентності та асимптотичної нормальності.

Список використаних джерел

1. Anh V.V. Minimum contrast estimation of random processes based on information of second and third orders/ V.V. Anh, N.N. Leonenko, L.M. Sakho. // J. Statist. Plan. Infer. – 2007. – Vol. 137. – P. 1302–1331.
2. Bentkus R. On the error of the estimate of the spectral function of a stationary process. / R. Bentkus // Liet. Mat. Rink. – 1972. – № 12. – С. 55 – 71.
3. Bentkus R. Asymptotic normality of an estimate of the spectral function. / R. Bentkus. // Liet. Math. Rink. – 1972. – № 12. – С. 5–18.
4. Guyon X. Random Fields on a Network: Modelling, Statistics and Applications / X. Guyon – Springer, New York. – 1995. – 255 p.
5. Leonenko N.N. On a spectral and bispectral estimator of the parameter of nongaussian data. /N.N. Leonenko, A. Sikorskii and G. Terdik. //Random. Oper. Stoch. Equations. – 1998. – Vol. 6. – P. 159–182.

Надійшла до редакції 6.01.2012 р.

УДК 519.17

Семенюта М.Ф., к.ф.-м.н.
Джума Л.М., к.т.н., доц.

Про (a, d) -антимагічні розмітки графів

Виконано огляд і систематизовано результати, одержані різними авторами з моменту виникнення вершинно-антимагічної розмітки. Проведено узагальнення існуючих задач. Доведено, що повний граф K_{2k+1} є $(k^2(2k+1), 1)$ -антимагічним для $k \geq 1$. Знайдено $(20, 1)$ -VAE розмітку графа K_5 і $(16, 4)$ -VAE розмітку графа K_{13} . Доведено, що граф C_{2k+1} допускає $(3k+4, 2)$ -VAT і $(5k+5, 2)$ -SVAT розмітки.

Ключові слова: вершинно-антимагічна розмітка, вершинно-антимагічна тотальна розмітка, супер вершинно-антимагічна тотальна розмітка.

Semenyuta M.F., PhD
Dzhuma L.M., PhD, Ass. Prof.

On (a, d) -antimagic labelings of graphs

It is review is executed and systematized results of different authors from the moment of origin vertex-antimagic labeling. Generalization of existent tasks is conducted. It is well-proven that complete graph K_{2k+1} is $(k^2(2k+1), 1)$ -antimagic for $k \geq 1$. Found $(20, 1)$ -VAE labeling of graph K_5 and $(16, 4)$ -VAE labeling of graph K_{13} . It is well-proven that graph C_{2k+1} assumes $(3k+4, 2)$ -VAT i $(5k+5, 2)$ -SVAT labeling.

Key Words: vertex-antimagic labeling, vertex-antimagic total labeling, super vertex-antimagic total labeling.

E-mail: marina_semenyuta@mail.ru

Статтю представив д. ф.-м. наук, професор Кириченко В.В.

Вступ

У статті наведено детальний аналіз сучасного стану досліджень в області вершинно-антимагічних реберних розміток графів. На даний час відомо багато різних видів розміток: граціозна, магічна, антимагічна, бімагічна, кардіальна, збалансована, арифметична та інші. Серед них виділяють вершинні, реберні і тотальні. Вони знайшли застосування в кристалографії, теорії кодування, радіолокації, астрономії, проектуванні схем і комунікаційних мереж, керуванні базами даних.

Вважається, що поняття розмітки графа бере початок від Роса, який в 1967 році функцію f назвав β -розміткою графа G , якщо f ін'єкція із множини вершин даного графа в множину $\{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ така, що кожне ребро uv отримує мітку $|f(u) - f(v)|$ і всі мітки ребер різні. Пізніше Голомб застосував для неї термін граціозна. Граціозна розмітка набула популярності у зв'язку з використанням при розв'язанні проблеми Рінгеля про розклад повного графа K_{2n+1} на $2n+1$ підграфи, кожен з яких ізоморфний дереву з n ребрами. Цікаво, що Седякєк ще в 1963 році надрукував статтю про інший вид розмітки графа, названу пізніше магічною і яка має безпосереднє відношення до теорії чисел і даного дослідження.

На основі аналізу сучасної літератури нами виділено три основних напрямки досліджень з даної тематики: визначення необхідних і достатніх умов існування розміток; створення методологій їх породження; визначення та систематизація сфер практичного застосування. Автори публікацій перших двох напрямків, які тісно пов'язані між собою, виділяють загальні властивості певної розмітки та фокусують увагу на окремих класах графів, базуючись на їх характерних ознаках, розробляють методи і алгоритми пошуку розміток. Третій напрямок викликає великий інтерес у зв'язку з аналізом прикладних задач. Наприклад, магічні та реберно-магічні тотальні розмітки, які мають безпосереднє відношення до антимагічних, знайшли застосування в теорії оптимізації, головним чином, в розв'язанні задачі комівояжера; конструюванні секретних кодів; для адресних повідомлень у комунікаційних мережах і кодуванні радарних імпульсів.

Стаття складається з двох розділів. В першому розділі наведені поняття, пов'язані з вершинно-антимагічною реберною розміткою графів, зроблено огляд і підсумовані результати, одержані різними авторами з моменту виникнення цього напрямку досліджень. Нами проведено узагальнення існуючих задач. Доведено, що повний граф K_{2k+1} є

$(k^2(2k+1), 1)$ -антимагічним для $k \geq 1$. Знайдено $(20, 1)$ -VAE розмітку графа K_5 і $(16, 4)$ -VAE розмітку графа $K_{3,3}$. В другому розділі систематизовано та викладено досягнення у тотальній та супер вершинно-антимагічній розмітках. Доведено, що граф S_{2k+1} допускає $(3k+4, 2)$ -VAT і $(5k+5, 2)$ -SVAT розмітки.

1. Вершинно-антимагічна реберна розмітка графа

Нехай граф $G=(V, E)$ є скінченим, неорієнтованим графом без кратних ребер та петель і має множину вершин $V(G)$ та множину ребер $E(G)$. Якщо не вказана їх потужність, то вважатимемо $|V(G)|=p$, $|E(G)|=q$.

Під розміткою f графа G розуміємо відображення множини елементів графа G у множину натуральних чисел. Якщо областю відображення є множина вершин або ребер, то розмітку f називають, відповідно, *вершинною* або *реберною*. Якщо областю відображення є множина $V(G) \cup E(G)$, то f називають *тотальною*. Під сумою міток відповідних елементів графа розуміють вагу певного елемента. Таким чином, вага вершини при реберній розмітці – це сума міток інцидентних їй ребер, а при тотальній – до цієї суми додається мітка вершини. Зупинимося на огляді наукових надбань, присвячених вершинно-антимагічній реберній розмітці графів.

Поняття антимагічного графа введено Хартсфілді і Рингелем в 1989 році. Згідно їх термінології, граф $G=(V, E)$ називають *антимагічним*, якщо кожному його ребру відповідає єдине число із множини $\{1, 2, \dots, q\}$ і кожна вершина одержує вагу, що дорівнює сумі міток ребер, інцидентних даній вершині, причому ваги всіх вершин різні.

Будемо позначати $w(u)$ вагу вершини $u \in V(G)$ графа G при реберній розмітці f : $E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, тоді число $w(u) = \sum_{v \in V(G)} f(u, v)$ – це сума значень $f(u, v)$, що поставлені у відповідність всім ребрам (u, v) інцидентним вершині u .

(a, d) -Антимагічна розмітка графа з'явилася в 1993 році в працях Бодендяка і Волтера як спеціальний випадок антимагічної. Літ, Міллер, Сіманонтак і Сламін таку розмітку назвали (a, d) -вершинно-антимагічною реберною або (a, d) -VAE розміткою. Бодендяк і Валтер застосовували теорію лінійних діафантових

рівнянь і теорію чисел для визначення множини всіх зв'язних (a, d) -антимагічних графів.

Означення 1.1 [1]. (a, d) -VAE розміткою графа $G=(V, E)$ називається бієкція $f: E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, яка породжує відображення $g: V \rightarrow W$, де g – бієкція і $g(V) = W = \{w(u); u \in V\} = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d\}$ – множина ваг вершин, де $a > 0$, $d \geq 0$ – фіксовані цілі числа.

Граф $G=(V, E)$ називають (a, d) -VAE графом, якщо він допускає (a, d) -VAE розмітку.

Якщо для графа G існує (a, d) -VAE розмітка, тоді a – єдине для кожного d

$$a = \frac{2q(q+1) - p(p-1)d}{2p}. \quad (1.1)$$

Крім того, виконуються нерівності

$$a \geq (\delta(\delta+1))/2, \quad (1.2)$$

$$d \leq (\Delta(2q - \Delta + 1) - \delta(\delta+1))/2(p-1), \quad (1.3)$$

де δ , Δ – мінімальна і максимальна степені графа G , відповідно.

Дослідження в даній галузі привели нас до класифікації і узагальнення задач, що ставляться відносно (a, d) -VAE розміток. Сформулюємо ці задачі.

Задача 1. Якщо $G=(V, E)$ є (a, d) -VAE графом, то за яких умов це має місце.

Задача 2. Задано граф $G=(V, E)$. Чи існує (a, d) -VAE розмітка цього графа при певних значеннях a і d ?

Задача 3. Нехай граф $G=(V, E)$ є (a, d) -VAE графом. Визначити функцію f , яка породжує (a, d) -VAE розмітку графа G . Розробити методи (алгоритми) її породження.

Задача 4. Встановити (a, d) -антимагічність графів, які є результатом виконання операцій над даними графами.

У наступних підрозділах цього розділу задачі 1-4 розглядаються для окремих класів графів.

Для розв'язання задач 1, 2 використовують властивості (a, d) -VAE розмітки у відповідності до структури графа G . Основний інструмент розв'язку задачі 3 базується на конструктивному підході. Значну роль також відіграли методи комбінаторної оптимізації, теорій скінчених множин, матриць, лінійних діафантових рівнянь, чисел, груп.

У наступних підрозділах нами зазначено відносно яких типів графів і для яких задач одержані результати.

1.1. (a, d) -VAE розмітка призм та антипризм

У наведених нижче працях ставляться і вирішуються задачі 1-3 для призм і антипризм. При розв'язанні задач 2, 3 основну увагу приділяють опису методик породження (a, d) -VAE розміток.

Узагальнену призму можна визначити, як декартів добуток $C_n \times P_m$.

Призма D_n , $n \geq 3$ – це 3-регулярний граф, який являє собою декартів добуток $C_n \times P_2$.

Боденяк і Валтер припустили, що граф D_n буде $((7n+4)/2, 1)$ -антимагічним при $n \equiv 0 \pmod{2}$, $((5n+5)/2, 2)$ -антимагічним при $n \equiv 1 \pmod{2}$ і $((n+7)/2, 4)$ -антимагічним при непарному $n \geq 7$. Основний результат сформульовано в теоремі 1.2, її доведення безпосередньо випливає із умов (1.1) – (1.3).

Теорема 1.1 [2]. Якщо призма D_n є (a, d) -антимагічним графом, то

$d=1$, $a=(7n+4)/2$ або $d=3$, $a=(3n+6)/2$ для парного n ;

$d=2$, $a=(5n+5)/2$ або $d=4$, $a=(n+7)/2$ для непарного n .

Автори публікації [2] встановили достатність умови теореми 1.2 для $((7n+4)/2, 1)$ і $((3n+6)/2, 3)$, n – парне та $((5n+5)/2, 2)$, n – непарне.

Антипризма A_n , $n \geq 3$ – це регулярний граф степені 4, зокрема A_3 – октаедр.

Антипризма порядку $2n$ складається із зовнішнього циклу $u_1, u_2, \dots, u_n$, внутрішнього циклу $x_1, x_2, \dots, x_n$ і множини ребер (x_i, u_i) та (x_i, u_{i+1}) , $i=1, 2, \dots, n$ (індекси беруться по модулю n). Бака обґрунтував, що для антипризм не існує (a, d) -VAE розміток, крім випадків $(6n+3, 2)$, $(4n+4, 4)$ і $(2n+5, 6)$. Ним також представлені способи побудови $(6n+3, 2)$ -VAE та $(4n+4, 4)$ -VAE розмітки A_n для $n \geq 3$ і $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Міллер, Бака, Лін одержали $(6n+3, 2)$ -VAE і $(4n+4, 4)$ -VAE розмітки A_n для кожного парного n . Вони розглянули випадок $(2n+5, 6)$ і довели, що A_3 не допускає $(11, 6)$ -VAE розмітку, але існує $(2n+5, 6)$ -VAE розмітка для A_4 і A_7 , також висловили припущення, що для $n \geq 4$ антипризма A_n буде мати $(2n+5, 6)$ -VAE розмітку.

Зазначимо, що не розв'язаною залишається задача 3 для призм D_n при $d=4$, $a=(n+7)/2$ для

непарного n ; антипризм A_n при $a=2n+5$, $d=6$ і $a=6n+3$, $d=2$ та $a=4n+4$, $d=4$ для $n \equiv 2 \pmod{4}$ і $n \geq 6$.

1.2. (a, d) -VAE розмітка графа Петерсена

Узагальнений граф Петерсена $P(n, k)$, $1 \leq k \leq n/2$ складається із зовнішнього n -циклу $u_1, u_2, \dots, u_n$ множини n ребер $x_{i, i+k}$, $1 \leq i \leq n$, з індексами взятими за модулем n . Для $k=1$ узагальнений граф Петерсена $P(n, 1)$ є призмою D_n .

Бака довів, що узагальнений граф Петерсена $P(n, k)$ допускає $(a, 1)$ -VAE розмітку тоді і тільки тоді, коли n парне, $n \geq 4$, $k \leq n/2 - 1$ і $a=(7n+4)/2$.

Міллер і Бака встановили для графа Петерсена $P(n, 2)$ його $((3n+6)/2, 3)$ -антимагічність при $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq 8$ і припустили, що $P(n, k)$ є $((3n+6)/2, 3)$ -антимагічним для парних $n \geq 6$ і $2 \leq k \leq n/2 - 1$, $((5n+5)/2, 2)$ -антимагічним для непарних $n \geq 5$ і $2 \leq k \leq (n-1)/2$, $((n+7)/2, 4)$ -антимагічним для непарних $n \geq 7$ і $1 \leq k \leq (n-1)/2$. Перше припущення доведено для $k=3$ в 2008 році [3].

Відносно графа $P(n, 2)$ в 2005 році одержані наступні результати:

$P(n, 2)$ є $((5n+5)/2, 2)$ -антимагічний для $n \equiv 3 \pmod{4}$ і $n \geq 7$;

$P(n, 2)$ є $((3n+6)/2, 2)$ -антимагічний для $n \equiv 2 \pmod{4}$ і $n \geq 10$.

1.3. (a, d) -VAE розмітка деяких видів графів

При дослідженні окремих типів графів Боденяк і Валтер [4] встановили, що наступні з них не є (a, d) -антимагічними: парні цикли; ланцюги парного порядку; зірки; Харарі графи C_3^k і C_4^k ; дерева непарного порядку не менше ніж 5, які мають вершину суміжну трьома або більше кінцевим вершинам; n -арні дерева висоти не менше ніж 2 при $d=1$; граfi K_4 і $K_{3,3}$. Також ними сформульовано і доведено наступні теореми.

Теорема 1.2 [4]. Граф $P_{2n+1}(k, 1)$ -антимагічний; граф $C_{2n+1}(k+2, 1)$ -антимагічний.

Теорема 1.3 [4]. Якщо дерево непарного порядку $2k+1$ ($k \geq 1$) є (a, d) -антимагічним, то $d=1$ і $a=k$.

Теорема 1.4 [4]. Якщо граф K_n ($k \geq 2$) (a, d) -антимагічний, то d непарне і $d \leq 2k(4k-3)+1$; якщо граф K_{n+2} (a, d) -антимагічний, то d парне і $d \leq 2k+1(4k-1)+1$; якщо граф K_{2n+1} ($k \geq 2$) (a, d) -антимагічний, то $d \leq (2k+1)(k-1)$.

Для спеціальних графів, так званих, парашутів, результати їх (a, d) -антимагічності описані в працях Боденяк і Валтер, Лін, Міллер,

Сіменюк і Сламін показали, що коло W_n ($n > 3$) не має (a, d) -антимагічної розмітки.

Іванко і Семанікова довели, що 2-регулярний граф буде супер реберно-магічним тоді і тільки тоді, коли він $(a, 1)$ -антимагічний. Внаслідок цього маємо, що кожний наступний граф s $(a, 1)$ -антимагічним: kC_3 для непарного n ($n \geq 3$); $k(C_3 \cup C_2)$ для парного n ($n \geq 6$); $k(C_4 \cup C_2)$ для непарного n ($n \geq 5$); $k(C_5 \cup C_2)$ для парного n ($n \geq 4$); $k(C_6 \cup C_2)$ для парного m , $m \geq 6$ і непарного n , $n \geq m/2 + 2$.

Наступна теорема дає новий підхід до вирішення проблеми VAE розмічування графів.

Теорема 1.5 (Ковар). Якщо граф G є (a, d) -антимагічним і H одержано із G додаванням довільного $2k$ -фактора, тоді H є (a, d) -антимагічним графом для деякого a_2 .

Наслідок. $(a, 1)$ -Антимагічними є наступні графи:

циркулянтні графи непарного порядку;
2r-регулярні Гамільтонові графи непарного порядку;

2r-регулярні графи непарного порядку $n < 4r$.
Сформулюємо та доведемо наступну теорему.

Теорема 1.6. Повний граф K_{2k+1} ($k^2(2k+1)$, 1)-антимагічний для $k \geq 1$.

Доведення.

Так як граф K_{2k+1} є $2k$ -регулярним Гамільтоновим графом непарного порядку, то згідно наслідку він буде $(a, 1)$ -антимагічним для $k \geq 1$. За формулою (1.1) знаходимо $a = k^2(2k+1)$. Отже K_{2k+1} допускає $(k^2(2k+1), 1)$ -VAE розмітку для $k \geq 1$. Теорему доведено.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$A(G)X=B, \quad (1.4)$$

де $A(G)$ – матриця інцидентності графа G , X – матриця стовпець, складається з міток $x_1, x_2, \dots, x_d$ ребер, B – матриця стовпець, її елементами є числа (ваги вершин): $a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d$. Назвемо систему (1.4) лінійних діафантових рівнянь *характеристичною системою лінійних рівнянь* (скорочено ХСЛР) для графа G . Ця система (вірніше, сімейство її розв'язків) дає універсальний спосіб дослідження графа на (a, d) -антимагічність. Справді, якщо ХСЛР не має жодного розв'язку, то це означає, що граф G не (a, d) -антимагічний. Якщо ж такий розв'язок існує, то йому відповідає (a, d) -антимагічна розмітка графа G , тобто граф G (a, d) -антимагічний, при цьому можливо

існування сімейства (a, d) -антимагічних розміток цього графа.

Згідно теореми 1.6, повний граф K_5 допускає $(20, 1)$ -VAE розмітку. Для її знаходження розв'яжемо систему (1.4), яку запишемо у вигляді розширеної матриці:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 22 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 24 \end{pmatrix}$$

Цю матрицю приведемо до виду:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x_1 & -x_2 & 2x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & 2x_1 & 2x_2 & x_3 & 2x_4 & x_1 & x_2 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & 35 \end{pmatrix}$$

Змінні x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 будуть незалежними, їх виразимо через решту змінних. Нехай $x_5=1$, $x_{10}=9$, тоді $x_4+x_5=6$. Прямим перебором, врахувавши інші рівняння системи, одержимо: $x_2=6$, $x_3=5$, $x_4=8$, $x_1=10$, $x_6=7$, $x_7=2$, $x_8=4$. Визначену $(20, 1)$ -VAE розмітку f для наочності подамо у вигляді матриці з елементами $c_{ij}=0$ і при $i \neq j$ $c_{ij}=f(u_i, u_j)$, якщо $u_i u_j$ – ребро графа K_5 , $i, j=1, 2, 3, 4, 5$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 10 & 7 & 3 \\ 6 & 10 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

В загальному випадку для ХСЛР графа K_{2k+1} , число незалежних змінних буде дорівнювати $2k+1$, змінну x_1 завжди можна вважати рівною 1, не порушуючи загальності. Описаний спосіб породження $(k^2(2k+1), 1)$ -VAE розмітки буде достатньо складно реалізувати при збільшенні порядку повного графа K_{2k+1} . Таким чином, теорема 1.6 дає відповідь до задачі 2, але задача 3 розв'язана лише для частинного випадку.

Бертаульт, Міллер підійшли до проблеми розмітки графів, як до проблеми комбінаторної оптимізації. Розробили загальний алгоритм із визначення чи має граф магічну, антимагічну та (a, d) -антимагічну розмітку. Його реалізація, на даний час, дозволила лише перевірити, що всі дерева порядку менше 10 є супер реберно

магічними і всі графи виду $P_2^t \times P_2^t$ із менше ніж 50 вершинами є антимагічними.

Нікола, Сомасундарам і Вільфред для повних двочасткових графів сформулювали та довели серію наступних теорем.

Теорема 1.7 [5]. Якщо граф $K_{m,n}$ де $m \leq n$ (a, d) -антимагічний, то d дільник $((m-n)(2a+d(m+n-1))) / 4 + dmn/2$. Якщо $m+n$ просте число, то граф $K_{m,n}$ де $n > m > 1$, не (a, d) -антимагічний.

Теорема 1.8 [5]. Якщо граф $K_{n,n+2}$ (a, d) -антимагічний, то d парне і $n+1 \leq d < (n+1)^2/2$. Якщо граф $K_{n,n+2}$ (a, d) -антимагічний і n – непарне, то a парне і d дільник a . Якщо граф $K_{n,n+2}$ (a, d) -антимагічний і n – парне, то d дільник $2a$. Якщо граф $K_{n,n}$ (a, d) -антимагічний, то n, d – парні і $0 < d < n^2/2$.

Теорема 1.9 [5]. Якщо граф G порядку n є ациклічним і (a, d) -антимагічним, то $(a, d) = (2, 2)$ при парному n і $(a, d) = (2, 2)$ або $(a, d) = ((n+3)/2, 1)$ при непарному n .

Теорема 1.10 [5]. Цикл з m висячними ребрами присланими до кожної його вершини буде (a, d) -антимагічним тоді і тільки тоді, коли $m=1$.

Крім цього в [5] представлено декілька результатів по (a, d) -антимагічності гусениць і графів, одержаних присланням кінцевої вершини ланцюга P_n до однієї з вершин циклу C_n . Також висловлено припущення, що для непарного $n \geq 3$ граф $K_{n,n+2}$ буде $((n+1)(n^2-1)/2, n+1)$ -антимагічним.

Розглянемо граф $K_{3,5}$, для нього розв'яжемо задачі 2 і 3. Позначимо $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u_1, u_2, u_3$ вершини даного графа, $w(v_i)$ і $w(u_i)$ – ваги відповідних вершин, де $j=1, 2, 3, 4, 5, i=1, 2, 3$. Знайдемо значення функції $f(u_i, v_j)$, що є розв'язками системи (1.4) з восьми лінійних діафантових рівнянь із 15 невідомими: $f(u_1, v_1)=1, f(u_1, v_2)=12, f(u_1, v_3)=4, f(u_1, v_4)=11, f(u_1, v_5)=8, f(u_2, v_1)=2, f(u_2, v_2)=5, f(u_2, v_3)=14, f(u_2, v_4)=10, f(u_2, v_5)=9, f(u_3, v_1)=13, f(u_3, v_2)=3, f(u_3, v_3)=6, f(u_3, v_4)=7, f(u_3, v_5)=15$. Тому $w(v_1)=16, w(v_2)=20, w(v_3)=24, w(v_4)=28, w(v_5)=32, w(u_1)=36, w(u_2)=40, w(u_3)=44$. Згідно означення 1.1, біскіція функція f буде $(16, 4)$ -VAE розміткою графа $K_{3,5}$. Отже, граф $K_{n,n+2}$ $((n+1)(n^2-1)/2, n+1)$ -антимагічний для $n=3$.

Авторами праці [6] з'ясовано, що однобічно нескінченний ланцюг допускає $(1, 2)$ -VAE розмітку, крім цього 2-регулярний граф G (a, d) -антимагічний тоді і тільки тоді, коли

$|V(G)|=2n+1$ і $(a, d)=(n+2, 1)$. Також ними встановлено, що значення ваг вершин знаходяться між числами $8(\delta+1)/2$ і $\Delta(2q-\Delta+1)/2$ для графа з q ребрами, мінімальним степенем δ , максимальним степенем Δ , який володіє (a, d) -антимагічною розміткою.

2. Вершинно-антимагічна тотальна та супер вершинно-антимагічна тотальні розмітки графів

Бака, Бертаульт, Мак-Дугал, Міллер, Сіменітек, Сламін в [7] ввели поняття (a, d) -VAT графа. Що стосується (a, d) -SVAT розмітки графа, то її введено в [8].

Означення 2.1 [7]. Біскіцію $\alpha: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\}$ називають (a, d) -вершинно-антимагічною тотальною розміткою $((a, d)$ -VAT) графа G , якщо множина ваг всіх вершин графа G , – це множина $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d\}$, де $a > 0, d \geq 0$ – фіксовані цілі числа.

В цьому випадку вагу вершини u позначають $w(u)$ і обчислюють за формулою

$$w(u) = \alpha(u) + \sum \alpha(uv).$$

де сума береться за всіма вершинами v суміжними з u .

Означення 2.2 [7]. (a, d) -Вершинно-антимагічну тотальну розмітку α називають супер (a, d) -вершинно-антимагічною тотальною розміткою $((a, d)$ -SVAT) графа G , якщо $\alpha(V) = \{1, 2, \dots, p\}$ і $\alpha(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$.

Якщо граф G має (a, d) -SVAT розмітку, тоді a єдине для кожного d

$$a = \frac{(p+q)(p+q+1) + q(q+1) + 2pq - (p-1)d}{2p}.$$

Відносно (a, d) -VAT і (a, d) -SVAT розміток ставляться і вирішуються задачі аналогічні до задач 1-4 розділу 1. Нижче наведені результати їх розв'язку для окремих сімейств графів.

Якщо $d=0$, то (a, d) -VAT розмітку називають вершинно-магічною тотальною (VMT). Якщо $\alpha(V) = \{1, 2, \dots, p\}$ і $\alpha(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$, тоді VMT розмітку називають супер вершинно-магічною тотальною (SVMT).

В теоремі 2.1. прослідковується взаємозв'язок супер-магічної і вершинно-антимагічної тотальної розміток, а в теоремі 2.2 вершинно-антимагічної реберної і вершинно-антимагічної тотальної розміток.

Теорема 2.1 [7]. Кожен SVMT граф має $(a, 1)$ -VAT розмітку.

Теорема 2.2 [7]. Якщо $d > 1$, то кожен (a, d) -VAE (p, q) граф має $(a+p+q, d-1)$ -VAT розмітку. Кожен (a, d) -VAE (p, q) граф має $(a+q+1, d+1)$ -VAT розмітку.

Ковар [8] встановив, що кожний $2r$ -регулярний граф із r вершинами допускає $(a, 1)$ -VAT розмітку для $a \in \{(rp+1)(r+1)+rp; r=0, 1, \dots, r\}$. Відносно регулярних графів доведено також наступні теореми.

Теорема 2.3 [7]. Нехай G r -регулярний граф, в якому довільному ребру z поставлено у відповідність мітку 1. Граф G допускає (a, d) -VAT розмітку тоді і тільки тоді, коли $G - \{z\}$ допускає (a', d) -VAT розмітку, де $a' = a - r - 1$.

Теорема 2.4 [9]. Якщо m і $(m-1)(r+1)/2$ додатні цілі числа і G r -регулярний граф, який володіє SVMT розміткою, то mG має $(a, 2)$ -SVAT розмітку. Якщо G 2-регулярний $(a, 1)$ -SVAT граф, то mG має $(m(a-2)+2, 1)$ -SVAT розмітку.

Теорема 2.5 [10]. Якщо регулярний граф G допускає (a, d) -VAE розмітку, то граф $G \in (a+p, d-1)$ -SVAT і $(a+1, d+1)$ -VAT графом.

Теорема 2.6 [10]. Якщо регулярний граф G непарного розміру q має $(a, 1)$ -VAE розмітку, то граф G має $(a', 1)$ -SVAT розмітку, де $a' = a + 2q + (p+1)/2$.

В [11] доведено: C_n допускає (a, d) -SVAT розмітку тоді і тільки тоді, коли $d=0$ або $d=2$ і n непарне, або $d=1$; P_n допускає (a, d) -SVAT розмітку тоді і тільки тоді, коли $d=2$ і $n \geq 3$ непарне або $d=3$ і $n \geq 3$. До відкритих проблем автори віднесли наступні: чи мають графи $K_{n,n}$ і узагальнений граф Петерсена $P(n, k)$ (a, d) -SVAT розмітки для певних значень a, d і n .

Авторами [12] одержано, що узагальнений граф Петерсена $P(n, k)$ має (a, d) -VAT розмітку для випадків:

$n \geq 3, 1 \leq k \leq (n-1)/2$, $(a, d) = (8n+3, 2)$;
непарне $n \geq 5, k=2, (a, d) = ((15n+5)/2, 1)$;
непарне $n \geq 5, k=2, (a, d) = ((21n+5)/2, 1)$;
непарне $n \geq 7, k=3, (a, d) = ((15n+5)/2, 1)$;
непарне $n \geq 7, k=3, (a, d) = ((21n+5)/2, 1)$;
непарне $n \geq 9, k=4, (a, d) = ((15n+5)/2, 1)$ і $(a, d) = ((21n+5)/2, 1)$.

Далі наведено умови існування супер антимагічної розмітки для певних видів графів.

Теорема 2.7 [13]. Нехай G регулярний граф степеня r з r вершинами g ребрами, де r непарне. Якщо G допускає $(a, 1)$ -VAE розмітку, то граф G

допускає супер $(a', 1)$ -VAT розмітку для $a' = r(p+q+1) + (3-p)/2 - a$.

Теорема 2.8 [13]. (a, d) -VAE розмітка графа $G \in (a', d-1)$ -SVAT і $(a'', d+1)$ -SVAT тоді і тільки тоді, коли граф G r -регулярний і $a' = r(p+q+1) - a + p + (1-p)d$ і $a'' = r(p+q+1) - a + 1 + (1-p)d$.

За раніше знайденими VAE розмітками відповідних графів, на основі теорем 2.7, 2.8 в [13] показано, що

граф $C_n \times P_2$ має $((21n+5)/2, 1)$ -SVAT і $((17n+7)/2, 3)$ -SVAT розмітки для непарного n ($n \geq 3$); а також $((19n+6)/2, 2)$ -SVAT і $((15n+8)/2, 4)$ -SVAT розмітки для парного n ($n \geq 4$);

для узагальненого графа Петерсена $P(n, k)$ існують $((23n+4)/2, 0)$ -SVAT і $((19n+6)/2, 2)$ -SVAT розмітки при парному n ($n \geq 4$ і $1 \leq k \leq n/2 - 1$), а також для $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq 8$ граф $P(n, k)$ має $((19n+6)/2, 2)$ -SVAT і $((15n+8)/2, 4)$ -SVAT розмітки.

В якості механізму доведення наступної теореми, яка випливає із попередніх результатів, застосуємо конструктивний підхід.

Теорема 2.9. Цикл $C_{2k+1} \in (3k+4, 2)$ -VAT і $(5k+5, 2)$ -SVAT графом.

Доведення.

Для циклу $C_{2k+1} = (V, E)$ існує $(k+2, 1)$ -VAE розмітка [4]. Нехай вона має вид

$$\delta : E \rightarrow \{1, 2, \dots, 2k+1\}.$$

Тому $W = \{k+2, k+3, k+4, \dots, 3k+2\}$ – множина ваг вершин. Нехай $w_\delta(x_i) = k+1+i$, де $i=1, 2, 3, \dots, 2k+1$ – вага вершини x_i при розмітці δ .

Введемо нову тотальну розмітку λ в C_{2k+1} наступним чином:

$$\lambda(x_i) = 2k+1+i \text{ для } i=1, 2, 3, \dots, 2k+1;$$

$$\lambda(xy) = \delta(xy) \text{ для всіх } xy \in E.$$

Тоді $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 4k+2\}$. Знайдемо ваги вершин.

$$w_\lambda(x_i) = \lambda(x_i) + \sum_{xy \in E} \lambda(x, y) = \lambda(x_i) + w_\delta(x_i) = 3k+2+2i = 3k+4+2(i-1),$$

де $i=1, 2, 3, \dots, 2k+1$.

Ваги вершин утворюють арифметичну прогресію: $3k+4, 3k+4+2, 3k+4+2+2, \dots, 3k+4+2k+2$. Згідно означення 2.1, бієкція λ буде $(3k+4, 2)$ -VAT розміткою графа C_{2k+1} .

Побудуємо відображення α наступним чином:

$$\alpha(x_i) = 2(2k+1) + 1 - \lambda(x_i)$$

для $i=1, 2, 3, \dots, 2k+1$ і всіх $x_i \in V$;

$$\alpha(xy) = 2(2k+1) + 1 - \lambda(xy)$$

для всіх $xy \in E$.

Враховуючи, що C_{2k+1} 2-регулярний граф, для кожної вершини $x \in V$ вагу будемо знаходити за формулою

$$\alpha(x) + \sum_{xy \in E} \alpha(xy) = 3(4k+3) - w_1(x) = 9k+7-2i$$

де $i=1, 2, 3, \dots, 2k+1$.

Звідки, ваги всіх вершини утворюють арифметичну прогресію:

$$5k+5, 5k+5+2, 5k+5+2+2, \dots, 5k+5+2+2k,$$

крім того

$$\alpha(V) = \{1, 2, 3, \dots, 2k+1\},$$

тому

$$w_0(x_i) = 5k+5+2(i-1),$$

$i=1, 2, 3, \dots, 2k+1$.

За означенням 2.2 бієкція α буде $(5k+5, 2)$ -SVAT розміткою графа C_{2k+1} . Теорему доведено.

Висновки. В статті викладено основні поняття та досягнення з (a, d) -VAE, (a, d) -VAT і (a, d) -SVAT розміток графів. Виділено основні напрямки досліджень, проведено класифікацію і узагальнення задач даної тематики. Для графа K_{2k+1} доведено його $(k^2(2k+1), 1)$ -антимігічність, а також побудовано $(20, 1)$ -VAE розмітку графа K_4 і $(16, 4)$ -VAE розмітку графа $K_{3,3}$. З використанням конструктивного підходу знайдено $(3k+4, 2)$ -VAT і $(5k+5, 2)$ -SVAT розмітки графа C_{2k+1} .

Підсумовуючи дослідження, виконані в даній статті, слід підкреслити незникаючий інтерес, зростання публікацій і появу нових понять з теорії розміток графів.

Список використаних джерел

1. Bodendiek R. Arithmetisch antimagische graphen / R. Bodendiek, G. Walther //

Graphentheorie III, BI-Wiss. Verl., Mannheim. – 1993.

2. Bača M. On (a, d) -antimagic prisms / M. Bača, I. Holländer // Ars Combin. – 1998. – Vol. 48. – P. 297-306.

3. Xu X. On (a, d) -antimagic labelings of generalized Petersen graphs $P(n, 3)$ / X. Xu, Y. Yang, Y. Xi, H. Li // Ars Combin. – 2008. – Vol. 86 – P. 23-31.

4. Bodendiek R. On arithmetic antimagic edge labelings of graphs / R. Bodendiek, G. Walther // Mitt. Math. Ges. Hamburg – 1998. – Vol. 17 – P. 85-99.

5. Nicholas T. On (a, d) -antimagic special trees, unicyclic graphs and complete bipartite graphs / T. Nicholas, S. Somasundaram, V. Vilfred // Ars Combin. – 2004. – Vol. 70. – P. 207-220.

6. Sugeng K. A. Super (a, d) -vertex antimagic total labeling on disjoint union of regular graphs / K.A. Sugeng, D.R. Silaban // J. Combin. Math. Combin. Computing. – 2009. – Vol. 71, P. 217-225.

7. Bača M. Vertex-antimagic total labelings of graphs / M. Bača, F. Bertault, J. MacDougall, M. Miller, R. Simanjuntak, Slamir // Discuss. Math. Graph Theory. – 2003. Vol. 23 – P. 67-83.

8. Kovář P. Magic labelings of regular graphs / P. Kovář // AKCE Inter. J. Graphs and Combin. – 2007. Vol. 4 – P. 261-275.

9. Ali G. Super-vertex-antimagic total labelings of disconnected graphs / G. Ali, M. Bača, Y. Lin, A. Semaničova-Feňovčíková // Discrete Mathematics. – 2009. – Vol. 309 – P. 6048-6054.

10. Sugeng K.A. Super antimagic total labeling of graphs / K.A. Sugeng, M. Miller, M. Bača // Utilitas Mathematica. – 2008. – Vol. 76, P. 161-171.

11. Sugeng K. A. Super (a, d) -vertex-antimagic total labelings / K.A. Sugeng, M. Miller, Y. Lin, M. Bača // J. Combin. Math. Combin. Comput. – 2005. – Vol. 55 – P. 91-102.

12. Novotny S. Minimal k -rankings and the rank number of P_n^2 / S. Novotny, J. Ortiz, D. Narayan // Inform. Process. Lett. – 2009. – Vol. 109 – P. 193-198.

13. Sugeng K. A. Super antimagic total labeling of graphs / K.A. Sugeng, M. Miller, M. Bača // Utilitas Mathematica. 2008. – Vol. 76 – P. 161-171.

Надійшла до редколегії 02.10.2011

УДК 519.21

Є.В. Турчин, к.ф.-м.н.

**Посиленний закон великих чисел для
послідовностей випадкових величин з
просторів Орліча**

Отримано посилені закони великих чисел для послідовностей незалежних випадкових величин з простору Орліча та для послідовностей від'ємно залежних φ -субгауссівських випадкових величин.

Ключові слова: посилений закон великих чисел, випадкові величини з простору Орліча.

evgturchyn@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Простори Орліча випадкових величин досліджуються більше тридцять років. Зокрема, для випадкових величин з деяких класів просторів Орліча (просторів субгауссівських, локально субгауссівських і φ -субгауссівських випадкових величин) отримано теореми типу законів великих чисел (див. роботи [1]-[6]).

У даній роботі отримано посилений закон великих чисел для послідовностей випадкових величин з простору Орліча $L_U(\Omega)$, породженого функцією $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$ для $|x| > x_0$, де $\alpha \in (0; 1)$. Установлено закон великих чисел для послідовностей від'ємно залежних φ -субгауссівських випадкових величин.

Отримані результати є аналогами закону великих чисел для локально субгауссівських випадкових величин (див. [4]).

Основні означення, поняття і факти

Означення 1. [7] Неперервна опукла парна функція $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається N-функцією Орліча, якщо вона зростає на $[0; +\infty)$ і виконуються співвідношення

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Означення 2. [7] N-функція φ_1 підпорядкована N-функції φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$), якщо існують сталі $c > 0$ і $x_0 > 0$ такі, що для $x > x_0$ має місце нерівність $\varphi_1(x) < \varphi_2(cx)$.

Ye.V. Turchyn, Ph.D.

**Strong law of large numbers for sequences
of random variables from Orlicz spaces**

There have been proved strong laws of large numbers for sequences of independent random variables from Orlicz spaces and for sequences of negatively dependent φ -sub-Gaussian random variables.

Key Words: strong law of large numbers, random variables from Orlicz space.

Означення 3. [8] Hexaф U — N-функція Орліча. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається така сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує константа $r_\xi > 0$, для якої

$$EU(\xi/r_\xi) < \infty.$$

Відомо (див. [8]), що $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_U = \inf\{r > 0 : EU(\xi/r) \leq 1\}.$$

Означення 4. Казатимемо, що простір Орліча $L_U(\Omega)$ має властивість Н, якщо існує абсолютна константа C_U така, що для будь-якої сім'ї незалежних центрованих випадкових величин $\{\xi_i, i = \overline{1, n}\}$, де $\xi_i \in L_U(\Omega)$, справджується нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_U^2 \leq C_U \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_U^2.$$

У роботі [9] установлено, що властивість Н мають простори $L_U(\Omega)$, де $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$ для $|x| > x_0 > 0$, $\alpha \in (0; 1)$.

Означення 5. [10] Hexaф φ — N-функція Орліча, для якої

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} > 0.$$

Випадкова величина ξ , задана на ймовірнісно-

му просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ називається φ -субгауссівською, якщо $E\xi = 0$ й існує константа $a > 0$ така, що

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp(\varphi(\lambda a)) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Відомо (див. [8]), що простір $Sub_{\varphi}(\Omega)$ φ -субгауссівських випадкових величин, заданих на $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, є банаховим відносно норми

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda \xi\})}{|\lambda|}.$$

Означення 6. [11, 12] Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називаються від'ємно залежними, якщо для довільних $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ мають місце нерівності

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n \{\xi_j \leq x_j\}\right) \leq \prod_{j=1}^n P\{\xi_j \leq x_j\},$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n \{\xi_j > x_j\}\right) \leq \prod_{j=1}^n P\{\xi_j > x_j\}.$$

Нескінченна послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається від'ємно залежною, якщо будь-яка її скінченна підмножина є від'ємно залежною.

Посилені закони великих чисел

Надалі через S_n позначатимемо суму

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Доведемо дві теореми про збіжність з імовірністю 1 для середніх арифметичних S_n/n .

Теорема 1. Нехай $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність незалежних випадкових величин з простору Орліча $L_U(\Omega)$ таких, що $E\xi_n = 0$,

$$\sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_U^2 \leq Cn^{\gamma}, \quad (1)$$

де $\gamma \in (0, 2)$, а N -функція Орліча $U(x)$ така, що $U(x) = \exp\{|x|^{\alpha}\}$ для $|x| > x_0 > 0, \alpha \in (0, 1)$. Тоді

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0\right\} = 1. \quad (2)$$

Доведення. Можна вважати, що всі ξ_n мають невідроджений розподіл. Доведемо для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_n/n| > \varepsilon\} < \infty. \quad (3)$$

Оцінимо $P\{|S_n/n| > \varepsilon\}$. Відомо, що коли випадкова величина $\zeta \in L_U(\Omega)$ і $\|\zeta\|_U > 0$, то має місце нерівність

$$P\{|\zeta| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{U(\varepsilon/\|\zeta\|_U)} \quad (4)$$

(див. [8]). Оскільки для функції $U(x)$ виконується властивість Н, то

$$\|S_n\|_U^2 \leq C_U \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_U^2. \quad (5)$$

З нерівностей (5) і (1) випливає, що

$$\|S_n/n\|_U \leq c'n^{\gamma/2-1} \quad (6)$$

(де c' — константа) і $\|S_n/n\|_U \rightarrow 0$ коли $n \rightarrow \infty$.

Користуючись нерівностями (4) і (6), для достатньо великих n маємо:

$$P\{|S_n/n| > \varepsilon\} \leq \exp\left\{-\left|\frac{\varepsilon}{\|S_n/n\|_U}\right|^{\alpha}\right\} \leq \exp\{-C_1 n^{\beta}\},$$

де C_1 — додатна константа, $\beta = \alpha(1 - \gamma/2) > 0$. І оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-C_1 n^{\beta}\}$$

збігається, то виконується нерівність (3), з якої випливає співвідношення (2). Теорему доведено. $\square$

Аналогічний результат має місце для послідовностей φ -субгауссівських випадкових величин.

Теорема 2. Нехай $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність від'ємно залежних φ -субгауссівських випадкових величин,

$$\sum_{k=1}^n \tau_{\varphi}^2(\xi_k) \leq Cn^{\gamma},$$

де $\gamma \in (0; r)$, $r \in [1; 2]$, функція $\varphi(|x|^{1/r})$ опукла та існує таке $q > 1$, що $\varphi(x) < |x|^q$.

Тоді

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0\right\} = 1.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 1. При цьому було використано нерівність

$$\tau_{\varphi}^p\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \tau_{\varphi}^p(\xi_k)$$

(див. [2]), де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — від'ємно залежні φ -субгауссівські випадкові величини, функція $\varphi(|x|^{1/p})$ опукла, $p \in [1; 2]$.

Висновки

У роботі отримано посилені закони великих чисел для послідовностей:

- незалежних випадкових величин з простору Орліча
- від'ємно залежних φ -субгауссівських випадкових величин.

Автор висловлює вдячність професору Козаченку Юрію Васильовичу за увагу до роботи.

Список використаних джерел

1. Amini M. The strong law of large numbers for negatively dependent generalized Gaussian random variables / M. Amini, H.A. Azarnoosh, A. Bozorgnia // *Stoch. Anal. Appl.* — 2004. — Vol. 22. — No. 4. — P. 893–901.
2. Antonini R.G. Convergence of series of dependent φ -subgaussian random variables / R.G. Antonini, Yu. Kozachenko, A. Volodin // *J. of Mathematical Analysis and Applications.* — 2008. — Vol. 338. — P. 1188–1203.
3. Buldygin V. Asymptotic Behaviour of Linearly Transformed Sums of Random Variables / V. Buldygin, S. Solntsev. — Dordrecht: Kluwer, 1997.
4. Chareka P. Locally sub-Gaussian random variables and the strong law of large numbers / P. Chareka, O. Chareka, S. Kennendy // *Atlantic Electr. J. of Math.* — 2006. — Vol. 1. — No. 1. — P. 75–81.
5. Fakoor V. On the complete convergence of weighted sums for dependent random variables / V. Fakoor, H.A. Azarnoosh // *J. Iran. Stat. Soc.* — 2005. — Vol. 4. — No. 1. — P. 57–64.
6. Fakoor V. Strong convergence of weighted sums for negatively orthant dependent random variables / V. Fakoor, H.A. Azarnoosh // *J. Sci. Islam. Repub. Iran.* — 2006. — Vol. 17. — No. 2. — P. 161–164.
7. Красносельский М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М.А. Красносельский, Я.Б. Рутцкий. — М.: Физматгиз, 1958. — 271 с.
8. Buldygin V.V. Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. — Providence: American Mathematical Soc., 2000. — 258 p.
9. Абжанов Е.А. Моментные нормы в некоторых пространствах Орлича / Е.А. Абжанов, Ю.В. Козаченко // *Теория вероятн. и матем. статист.* — 1989. — Вып. 41. — С. 3–9.
10. Василюк О.І. φ -субгауссові випадкові процеси / О.І. Василюк, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Яценко. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. — 231 с.
11. Block H.W. Some concepts of negative dependence / H.W. Block, T.H. Savits, M. Shaked // *Ann. Probab.* — 1982. — Vol. 10. — No. 3. — P. 765–772.
12. Ebrahimi N. Multivariate negative dependence / N. Ebrahimi, M. Ghosh // *Comm. Statist. Theory Methods.* — 1981. — Vol. 10. — No. 4. — P. 307–337.

Надійшла до редколегії 19.07.2011

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 519.9

Горошко О. О.^{*}, д.ф.-м.н., професор
Лебедєва І. В.^{**}, к.ф.-м.н., доцент
Григор'єв Є. Ю.^{***}, магістр**Рух гіроскопа зі сферичною опорною поверхнею на горизонтальній площині**

Проведено аналіз стійкості гіроскопа зі сферичною опорною поверхнею в околі вертикального положення на горизонтальній площині. Встановлено, що рух гіроскопа складається з переносного руху за інерцією разом з центром мас та прецесії і нутації осі власного обертання. Побудовано критерії стійкості прецесійного та нутаційного рухів.

Ключові слова: гіроскоп, сферична опорна поверхня, прецесійний рух, нутаційний рух.

O.O. Goroshko^{*}, Dr. Sci.(Phys. – Math.), Professor,
I. V. Lebedeva^{**}, Cand. Sci. (Phys. – Math.),
Associate Professor
E. Grigoriev^{***}, M.Sci. (Phys. – Math.)**Motion of a gyroscope with a spherical surface on a horizontal plane**

The stability of a gyroscope with a spherical bearing surface in the vicinity of the vertical position on a horizontal plane was analyzed. It was found out that motion of the gyroscope consists of a transportation motion by inertia together with the center of mass and also of precession and nutation of the proper rotation axis. The criteria of stability of the precessional and nutational motion were designed.

Keywords: gyroscope, spherical surface, precessional and nutational motion.

^{*} E-mail: LebedevaI@ukr.net^{**} E-mail: ujeen@my.ua

Статтю представив член редколегії доктор ф.-м.н., професор, акад. НАНУ Перестюк М.О.

1 Вступ

Розробка навігаційної техніки, систем силової стабілізації орієнтації приладобудування, нових транспортних засобів стимулюють інтенсивний розвиток досліджень з динаміки гіроскопічних систем. Взагалі важко перелічити усі області техніки, у яких виникає необхідність застосування гіроскопічних систем. Складовою частиною сучасних курсів аналітичної динаміки є класичні праці Ейлера, Лагранжа, Пуансо, Софії Ковалевської з дослідження інтегрованих випадків руху твердого тіла. Ці дослідження мають велике евристичне значення, але у прикладних розробках майже не використовуються. Наведемо оцінку класичної теорії гіроскопів К. Магнусом [2]: "Література з класичної теорії гіроскопів присвячена вниктково важкому гіроскопу. Багато зусиль було витрачено на пошук випадків, для яких можлива побудова точних розв'язків рівнянь руху. Проте, якими б не були привабливими для математика досягнуті при цьому результати, необхідно

констатувати, що з фізичної точки зору або з точки зору чисто гіроскопічної техніки вони майже не являють інтересу".

Прикладні роботи з гіроскопії беруть початок від праць Л. Фуко з 1852 року та інтенсивно розвиваються до наших днів. Результати цих досліджень пов'язані з іменами видатних механіків Н.Е.Резалія, М.Шулера, О.М.Крилова, М.С.Жуковського, А.Зомерфельда, Є.І.Ніколаї, О.Ю.Ішлінського, К.Магнуса, Ф.М.Діментберга, Л.Тондала та багатьох інших вчених. Значний внесок у теорію гіроскопічних систем здійснили В.Томсон і П.Тет. Їм належить низка теорем про стійкість гіроскопічних систем та аналіз впливу на них дисипативних сил.

У загальному випадку дослідження руху гіроскопічних систем пов'язане з аналізом нелінійних систем високого порядку і належить до найбільш складних розділів сучасної механіки.

Складний математичний апарат для опису динаміки гіроскопічних систем є своєрідним

бар'єром для оволодіння теорією гіроскопічних систем в інженерній та конструкторській практиці. Тому в інженерних курсах вивчення гіроскопічних явищ обмежується елементарною теорією гіроскопів.

Задачі про рух гіроскопа, опорний кінець якого має форму півсфери малого радіуса, розглядалися Є.Л. Ніколаї [4] за обмежень, накладених на горизонтальні поступальні переміщення. У роботі [4] якісні оцінки руху гіроскопа побудовано в межах прецесійної теорії.

У даній роботі досліджено рух гіроскопа зі сферичною опорою без обмежень на її радіус та на поступальні переміщення по горизонтальній площині.

2 Постановка задачі

Для опису руху осесиметричного гіроскопа на горизонтальній площині застосуємо систему кутів Резаля [3] (рис.1).

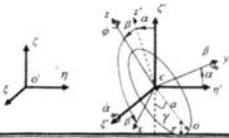


Рис. 1. Осесиметричний гіроскоп зі сферичною опорою на горизонтальній площині

Тут $O\xi\eta\zeta$ – нерухома система координат, пов'язана з горизонтальною площиною, $Oxzyz$ – рухома система координат, пов'язана з гіроскопом, осі якої є головними центральними осями гіроскопа, $O'\xi'\eta'\zeta'$ – рухома система координат, яка рухається поступально разом з центром мас C гіроскопа. Кут α і β задають положення осі гіроскопа, кут $\varphi = \varphi(t)$ – закон його власного обертання. Рух центра мас визначається координатами ξ_c, η_c, ζ_c . Введемо позначення: a – відстань від центра мас C до нижньої точки O осі гіроскопа; r – радіус сферичної опорної поверхні гіроскопа; m – маса гіроскопа; $A = J_{xx} = J_{yy}$ – моменти інерції гіроскопа відносно головних центральних осей Cx, Cy ; $C = J_{zz}$ – момент інерції гіроскопа відносно осі власного обертання Cz (полярний момент інерції).

Проекції кутової швидкості гіроскопа ω на осі рухомої системи координат $Cxzy$

визначаються співвідношеннями [3]:

$$\omega_x = \dot{\alpha} \cos \beta, \quad \omega_y = \dot{\beta}, \quad \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta \quad (1)$$

При малих кутах α і β кінематичні формули (1) для кутів Резаля набувають такого вигляду

$$\omega_x = \dot{\alpha}, \quad \omega_y = \dot{\beta}, \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

Положення гіроскопа на горизонтальній опорній площині визначається шістьма узагальненими координатами $\alpha, \beta, \varphi, \xi_c, \eta_c, \zeta_c$. На рух центра мас наложено геометричну в'язь

$$\zeta_c = r + (a - r) \cos \alpha \cos \beta, \quad (2)$$

яка задає його положення (висоту) над опорною площиною. Таким чином, гіроскоп на горизонтальній площині – система, яка має п'ять степенів вільності. У відповідності до рівняння в'язі (2) на варіації координат накладається обмеження

$$\delta \zeta_c = -(a - r) [\sin \alpha \cos \beta \delta \alpha + \sin \beta \cos \alpha \delta \beta]. \quad (3)$$

Для побудови диференціальних рівнянь руху гіроскопа скористаємося рівняннями Лагранжа другого роду. Кінетична енергія гіроскопа обчислюється за формулою

$$T = \frac{1}{2} (A \omega_x^2 + A \omega_y^2 + C \omega_z^2) + \frac{m}{2} (\xi_c'^2 + \eta_c'^2 + \zeta_c'^2). \quad (4)$$

З урахуванням формул (1) кінетична енергія через узагальнені координати записується так:

$$T = \frac{1}{2} (A \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + A \dot{\beta}^2 + C (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2) + \quad (5)$$

Для визначення узагальнених сил запишемо елементарну роботу активних сил на можливих переміщеннях

$$\delta A = Q_\xi \delta \xi + Q_\eta \delta \eta + Q_\zeta \delta \zeta + M_\alpha \delta \alpha + M_\beta \delta \beta$$

$$+ M_\varphi \delta \varphi. \quad (6)$$

Користуючись співвідношенням (3), виключимо з рівняння (5) варіацію $\delta \zeta_c$. За відсутності сил опору зовнішнього середовища активною силою є сила ваги $Q_\zeta = -mg$. При цьому вираз для елементарної роботи набуває вигляду

$$\delta A = Q_\xi \delta \xi + Q_\eta \delta \eta +$$

$$+ (M_a + (a-r)mg \sin \alpha \cos \beta) \dot{\epsilon}$$

$$+ \alpha +$$

$$(M_g + (a-r)mg \sin \alpha \cos \beta) \dot{\beta}$$

$$+ M_\phi \dot{\epsilon} \phi. \quad (7)$$

Рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (8)$$

з урахуванням (5) і (7) записуються у формі:

$$\begin{aligned} (A \cos^2 \beta + C \sin^2 \beta) \ddot{\alpha} + 2(C-A) \cos \beta \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} + \\ + C \dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta + C \dot{\phi} \sin \beta = (a-r)mg \alpha \cos \beta, \\ A \ddot{\beta} - 2(C-A) \cos \beta \sin \beta \dot{\alpha}^2 - C \dot{\phi} \dot{\alpha} \cos \beta = \\ = (a-r)mg \beta \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} C(\dot{\epsilon} + \dot{\alpha} \sin \beta) = 0, \quad (9)$$

$$m \ddot{x}_c = Q_x, \quad m \ddot{y}_c = Q_y.$$

За відсутності зовнішніх активних сил Q_x, Q_y останні рівняння системи (9) інтегруються в квадратах:

$$m \dot{y}_c = v_{y_c}(0)t + y_c(0), \quad (10)$$

З цих рівнянь випливає, що центр мас рухається в горизонтальному напрямі. Третє рівняння системи (9) має перший інтеграл

$$C(\dot{\phi} + \dot{\alpha} \sin \beta) = H = \text{const}. \quad (11)$$

У випадку малих кутів Резаля α і β рівняння (9) лінеаризуються і набувають вигляду

$$\begin{aligned} A \ddot{\alpha} + C \dot{\phi} \dot{\beta} - (a-r)mg \alpha = 0, \\ A \ddot{\beta} - C \dot{\phi} \dot{\alpha} - (a-r)mg \beta = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$C \dot{\phi} = H. \quad (13)$$

3 Малі коливання гіроскопа на горизонтальній площині

Введемо комплексну змінну $\Phi(t) = \alpha + i\beta$. Система рівнянь (12) згортається у комплексне рівняння

$$A \ddot{\Phi} - iH \dot{\Phi} + (a-r)mg \Phi = 0. \quad (14)$$

Представляючи розв'язок рівняння у формі

$$\Phi(t) = U e^{i\lambda t},$$

дістанемо характеристичне рівняння

$$A \lambda^2 - iH \lambda - (a-r)mg = 0. \quad (15)$$

Корені цього рівняння

$$\lambda = \frac{1}{2A} (H \pm \sqrt{H^2 - 4A(a-r)mg}) \quad (16)$$

є частотами прецесії і нутації гіроскопа.

Оцінимо стійкість руху вертикального гіроскопа в залежності від радіуса опорної сферичної поверхні. На рис.2 зображено гіроскопи з різними радіусами опорної поверхні. Стійкості гіроскопа відповідають дійсні значення коренів $\lambda_{1,2}$. При комплексних значеннях коренів (16) одному з коренів $\lambda_{1,2}$ відповідають згасаючі коливання, другому – нестійкі коливання з амплітудою, що зростає за експоненціальним законом. Розглянемо такі випадки:

1) При $r=0$, тобто при спирахні загостреним кінцем, критерієм стійкості є нерівність

$$H^2 - 4A \Lambda mg > 0, \quad (17)$$

$$\text{або } \phi > \frac{2}{c} \sqrt{\Lambda \Lambda \pi g}.$$

Це класичний критерій стійкості гіроскопа в околі вертикалі.

2) При $0 < r < a$ мас вигляд

$$\phi > \frac{2}{c} \sqrt{\Lambda \Lambda \pi g} \frac{\Lambda \pi g}{\Lambda \pi g}. \quad (18)$$

Тобто зі збільшенням радіуса опорної поверхні гіроскопа зменшується значення швидкості власного обертання, необхідної для реалізації стійкості гіроскопа в околі вертикального положення.

3) При $r=a$ центр мас збігається з радіусом опорної сфери, і частоти прецесії і нутації мають такі значення:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{H}{A}. \quad (19)$$

Наявність нульового кореня частоти прецесії відповідає нестійкості гіроскопа, аналогічно нестійкості сфери на ідеальній площині.

4) При $r > a$ радіус кривизни опорної сфери більший за висоту центра мас над опорною площиною, а частоти прецесії і нутації

$$\lambda = \frac{1}{2A} (H \mp \sqrt{H^2 + 4A(r-a)mg})$$

залишаються дійсними за будь-яких значень швидкості власного обертання ϕ , і рух гіроскопа стійкий.

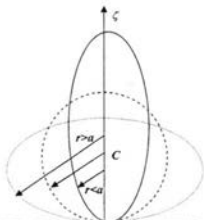


Рис. 2. Радіуси кривизни опорної поверхні

Побудуємо якісну оцінку руху вертикального гіроскопа на ідеальній поверхні. За критерієм стійкості гіроскопа кутова швидкість власного обертання задовольняє умову

$$C^2 \phi^2 - 4A(a-r)mg > 0.$$

Представимо корені рівняння (16) у такій формі

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2A} \left(H \mp \sqrt{H^2 - \frac{4A(a-r)mg}{C^2 \phi^2}} \right).$$

(20)

За великих швидкостей власного обертання гіроскопа доданок $\frac{4A(a-r)mg}{C^2 \phi^2}$ заносять під знак мінус. Застосовуючи відому формулу

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } \varepsilon \ll 1,$$

перепишемо (20) у вигляді

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2A} \left(1 \mp \left(1 - \frac{2A(a-r)mg}{C^2 \phi^2} \right) \right) + O(\phi)$$

(21)

Тут мала величина $O(\phi) \ll 1$. Частота прецесії λ_1 та частота нутації λ_2 за високої швидкості власного обертання прямують до таких значень

$$\lambda_1 = \frac{a-r}{C\phi} mg + O(\phi), \quad \lambda_2 = \frac{C\phi}{A} + O(\phi).$$

(22)

Надійшла до редколегії 11.04.12

З формул (22) випливає, що при малих радіусах $r < a$ гіроскоп здійснює пряму прецесію ($\lambda_1 > 0$). При значеннях радіуса заокруглення $r > a$ гіроскоп здійснює зворотну прецесію ($\lambda_1 < 0$). Нутаційний рух незалежно від величини радіуса заокруглення опорного кінця гіроскопа залишається прямим ($\lambda_2 > 0$).

Висновки

Встановлено такі закономірності руху на ідеально гладенькій площині вертикального гіроскопа зі сферичною опорною поверхнею:

1. За відсутності збурень рух вертикального стоячого гіроскопа представлено сумою переносного руху за інерцією разом з центром мас та прецесійного і нутаційного рухів осі гіроскопа.

2. Побудовано критерії стійкості гіроскопа при різних значеннях радіуса опорної сферичної поверхні в широкому діапазоні.

3. Встановлено, що зі збільшенням радіуса опорної сфери необхідна для стабілізації в околі вертикального положення швидкість власного обертання зменшується.

4. При значенні радіуса опорної сфери, рівному висоті центра мас над опорною поверхнею, настає нестійкість кутового руху, аналогічна нестійкості сфери на ідеальній площині.

5. При радіусах опорної сферичної поверхні, більших за висоту центра мас, прецесійний та нутаційний рухи стійкі для довільних швидкостей власного обертання.

6. При малих значеннях радіуса $r < a$ заокруглення опорного кінця гіроскоп здійснює пряму прецесію з частотою $\lambda_1 > 0$. Для значень $r > a$ радіуса опорного кінця гіроскоп здійснює зворотну прецесію з частотою $\lambda_1 < 0$. Нутаційний рух незалежно від радіуса заокруглення сферичної опорної поверхні залишається прямим: $\lambda_2 > 0$.

Список використаних джерел

1. H.K. Moffatt, Spinning eggs — a paradox resolved, Nature, vol. 416, March 2002. pp. 385 – 386.
2. Магнус К. Гиросокоп. Теория и применение. – М.: Наука, 1972. – 525 с.
3. Горощко О.О. Гироскопичні системи: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 1994. – 116 с.
4. Николай Е. Л. Теория гироскопов. – Л.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 171 с.
5. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 670 с.

УДК 539.3

Олександр Я. Григоренко, д.ф.-м.н., професор,
Тетяна Л.Єфімова, к.ф.-м.н., старший науковий
співробітник,
Інна В. Власова, асистент

Вільні коливання квадратних анізотропних пластин зі змінною товщиною шарів

Досліджуються вільні коливання шаруватих квадратних анізотропних пластин зі змінною товщиною шарів в рамках класичної теорії. Для розрахунку частот застосовано чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації разом з методом покрового пошуку.

Ключові слова: прямокутна анізотропна шарувата пластина, вільні коливання, класична теорія, сплайн – апроксимація.

E-mail: Efimovatl@yandex.ru

Представив академік НАН України, д.ф.-м.н. М.О.Перестюк

1 Вступ

Шаруваті пластини з анізотропних матеріалів знаходять широке застосування в конструкціях різного призначення. Дослідження динамічних характеристик їх вільних коливань є надзвичайно важливим для передбачення поведінки конструкцій під час експлуатації. В науковій літературі є ряд робіт, присвячених дослідженню коливань шаруватих пластин [1], але розглядаються лише пластини з постійною товщиною шарів. У тому випадку, коли товщини шарів змінюються неперервно в певному напрямку, жорсткісні параметри та інерційні члени в рівняннях залежать від координат точки серединної поверхні пластини. Таку пластину можна вважати структурно неперервно неоднорідною. При цьому навіть при шарнірному обпирі всіх торців пластини не вдається розділити змінні.

В даному повідомленні для дослідження вільних коливань тонких анізотропних шаруватих прямокутних пластин зі змінною товщиною шарів в напрямку однієї з координат, в рамках класичної теорії Кірхгофа - Лява застосовується ефективна чисельна методика, яка

Aleksandr Ya. Grigorenko, Dr Sci.

(Phys.-Math.), Professor

Tatiana L. Efimova, PhD (Phys.-Math.), senior researcher,

Inna V. Vlasova, assistant

Natural vibrations of square anisotropic plats with variable thickness of layers

The problem on natural vibrations of square anisotropic plats with variable thickness of layers in framework classical theory is considered. The numerically-analytical method is developed based on using the spline-approximation and the discrete-orthogonalization methods.

Key Words: rectangular anisotropic laminated plats, natural vibration, classical theory, spline-approximation.

базується на використанні сплайн – апроксимації, а також методу дискретної ортогоналізації з методом покрового пошуку [2-4].

2 Постановка задачі

Розглянемо задачу про вільні коливання тонких анізотропних прямокутних пластин ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, -h/2 \leq z \leq h/2$) зі змінною в напрямку однієї з координат товщиною шарів, в рамках класичної теорії Кірхгофа - Лява. В відповідності до неї рівняння коливань запишуться у вигляді [1]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = I_0(x, y) \omega^2 w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_y.$$

В рівняннях (1) w – прогин пластинки, Q_x і Q_y – перерізуючі зусилля, M_x , M_y , M_{xy} – моменти, I_0 – інерційний коефіцієнт, який має вигляд (n – кількість шарів):

$$I_0 = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \rho' dz, \quad (2)$$

де $\rho' (x, y)$ – густина матеріалу i -го шару, ξ_{i-1} та ξ_i – товщинні координати обмежувальної поверхні i -го шару.

Якщо пластина виготовлена з ортотропного матеріалу, причому осі ортотропії пластини повернуті на деякий кут φ навколо осі Oz по відношенню до прямокутної системи координат, пов'язаної з пластиною, то матеріал пластини в системі координат xOy буде мати одну площину пружної симетрії, і для моментів M_x , M_y , M_{xy} будуть виконуватися співвідношення пружності:

$$M_x = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (3)$$

$$M_y = - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),$$

$$M_{xy} = - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),$$

в яких жорсткісні характеристики пластини D_y визначаються за формулами:

$$D_y = \frac{B_y h^3(x, y)}{12}. \quad (4)$$

Жорсткісні коефіцієнти B'_y для матеріалу з поворотом осей ортотропії можна отримати з використанням відповідних жорсткісних коефіцієнтів вихідного ортотропного матеріалу за формулами

$$\begin{aligned} B'_{12} &= B_{12} + (B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + B_{66})) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ B'_6 &= B_6 \cos^4 \varphi + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\ &+ B_6 \sin^4 \varphi; i = 1, 2; j = 3 - i; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} B'_{66} &= B_{66} + (B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + B_{66})) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ B'_{16} &= 0,5(B_{22} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi + \\ &+ (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi) \sin 2\varphi; \\ B'_{26} &= 0,5(B_{22} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi) \cos 2\varphi + \\ &+ (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

З рівнянь (1), (3) отримаємо еквівалентне рівняння відносно прогину пластини:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} +$$

$$\begin{aligned} &+ 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial D_{16}}{\partial y} + \frac{\partial D_{11}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial D_{12}}{\partial y} + 3 \frac{\partial D_{16}}{\partial x} + 2 \frac{\partial D_{66}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial D_{12}}{\partial x} + 3 \frac{\partial D_{16}}{\partial y} + 2 \frac{\partial D_{66}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial D_{22}}{\partial y} + \frac{\partial D_{26}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \quad (6) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 D_{16}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 D_{26}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D_{16}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 D_{26}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ &+ I_0 \omega^2 w = 0. \end{aligned}$$

В даній роботі розглядається жорстке закріплення торців пластини

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = \text{const}, \quad (7)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \text{const}. \quad (8)$$

3 Метод розв'язання

Задачу (6) з відповідними граничними умовами (7), (8) можна розв'язати з використанням методу сплайн - колокації [2-4]. Прогин w задамо у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_i(y), \quad (9)$$

де $w_i(x)$ – шукані функції змінної x ; $\varphi_i(y)$ ($i = 0, N$) – лінійні комбінації В - сплайнів на рівномірній сітці Δ : $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$ з врахуванням граничних умов при $y = 0$ та $y = a$. В рівняння (6) входять похідні по координаті y не вище четвертого порядку, отже можна обмежитися апроксимацією сплайн - функціями п'ятого степеня. Підставляючи вирази (9) в рівняння (6), вимагаємо, щоб отримана система точно виконувалася в $N+1$ точках колокації

$\omega_k \in [0, L]$, $k = \overline{0, N}$ [2-4]. В результаті отримаємо одновимірну крайову задачу, яку можна записати у формі Коші наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Y}}{dx} &= A(x, \omega) \bar{Y}, \\ B_1 \bar{Y} &= \bar{0} \text{ при } x = 0, \\ B_2 \bar{Y} &= \bar{0} \text{ при } x = a, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\bar{Y} = \{\bar{w}, \bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}'''\}$, $\bar{w} = \{w_0, \dots, w_N\}$, A – квадратна матриця порядку $4(N+1) \times 4(N+1)$, B_1 та B_2 – прямокутні матриці граничних умов порядку $2(N+1) \times 4(N+1)$.

Задача на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь (10) з відповідними граничними умовами розв'язувались стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації разом з застосуванням метода покрокового пошуку [1-4].

4 Результати розрахунків

Оцінка точності запропонованої методики та перевірка достовірності отриманих результатів проводилася в роботі [4], де для шарнірно обп'єртої по торцях квадратної ізотропної однорідної пластини сталої товщини проводилося тестування методики для різної кількості точок колокації. Тестування показало хорошу збіжність методу сплайн-колокації при збільшенні кількості точок колокації.

Розв'язувалася задача про вільні коливання трьохшарової квадратної пластини зі стороною a і товщиною h . Розглядалася пластинка з товщиною шарів, що змінюється за лінійним законом $h_i = h_i(x)$, причому $\sum_{i=1}^3 h_i = h$.

Якщо в якості координатної поверхні $o = 0$ обрати середину поверхню, то рівняння поверхонь, що обмежують шари пластини, будуть наступними:

$$\begin{aligned} \xi = \xi_2 &= -\frac{h}{2}, \quad \xi = \xi_2 = \frac{h}{2}, \\ \xi = \xi_1 &= -\frac{h}{2} + \frac{1-2m}{a}x - \frac{h}{2}m, \\ \xi = \xi_1 &= \frac{h}{2} + \frac{1-2m}{a}x + \frac{h}{2}m. \end{aligned}$$

При цьому границі внутрішнього шару симетричні відносно площини $\xi = 0$ (рис.1-3) і при різних значеннях параметра m ($m \in [0, 0.5]$)

об'єм внутрішнього шару залишається незмінним. При $m = 0.5$ внутрішній шар має постійну товщину, що дорівнює $\frac{h}{2}$.



Рис.1. Структура матеріалу пластини при $m \in (0, 0.5)$

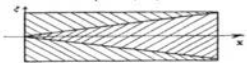


Рис.2. Структура матеріалу пластини при $m = 0$



Рис.3. Структура матеріалу пластини при $m = 0.5$

Зовнішні і внутрішні шари є ортотропними з параметрами $E_{1\text{зовн}}, E_{2\text{зовн}}, G_{12\text{зовн}}, \nu_{1\text{зовн}}, \rho_1$ та $E_{1\text{вн}}, E_{2\text{вн}}, G_{12\text{вн}}, \nu_{1\text{вн}}, \rho_2$ відповідно.

Тоді жорсткісні характеристики пластини будуть визначатися наступним чином:

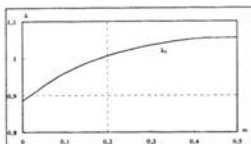
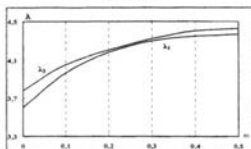
$$D_{\theta} = B_{\text{зовн}} \frac{h^3}{12} (1 - \xi_1^3(x)) + B_{\text{вн}} \xi_1^3(x) \frac{h^3}{12},$$

а інерційний коефіцієнт –

$$I_0 = \rho_{\text{зовн}} h (1 - \xi_1) + \rho_{\text{вн}} h \xi_1^2.$$

Задача розв'язувалася при таких даних: зовнішні шари ізотропні з параметрами: $E = E_0$, $\nu = 0.3$, $\rho = \rho_0$, внутрішній шар ортотропний з параметрами: $E_1 = 0.25E_0$, $E_2 = 0.077E_0$, $G_{12} = 0.029E_0$, $E_0 = 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0.24$, $\rho_2 = \rho_0$. Геометричні параметри пластини обирались такими: $a = 100L_0$, $h = L_0$.

Залежності частотного параметру $\lambda = \frac{\omega^2 \rho_0 L_0^2}{E_0} \cdot 10^4$ від параметра m для перших трьох частот жорстко закріпленої пластини представлено на рис.4,5.

Рис.4. Залежність частотного параметра λ_1 від m .Рис.5. Залежність частотних параметрів λ_1, λ_2 від m .

Відмінність частотних параметрів λ_i для пластини зі сталою товщиною шарів ($m=0.5$) та для пластини з клиноподібним внутрішнім шаром при $m=0$ складає до 19,5% в залежності від номера частоти.

Розв'язувалася задача про вільні коливання трьохшарової квадратної пластини з квадратної пластини з ортотропного матеріалу з вказаними вище параметрами, при чому осі ортотропії внутрішнього шару пластини було повернуто на 45° навколо осі O_o .

Список використаних джерел

1. Григоренко А.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наукова думка, 1986. – 172 с.
2. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Применение метода сплайн - аппроксимации для решения задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины // Прикл. механика. – 2005. – 41, №10. – С.90 – 99.
3. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Власова И.В. Решение задач о свободных колебаниях трапециевидальных пластин методом сплайн-коллокации // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип.7. – С.151-156.
4. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Власова И.В. Власні коливання прямокутних пластин змінної товщини // Вісник Київського університету. – Серія —: фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. №1. – С.35 – 38.

Надійшла до редколегії 20.04.12.

Геометричні параметри пластини обиралися такими: $a=100L_0$, $h=L_0$.

В табл.1 представлено частотні параметри $\lambda = \frac{\omega^2 \rho_0 L_0^2}{E_0} \cdot 10^4$ такої пластини з жорстко закріпленими краями для різних значень параметра m .

Таблиця 1

λ_i	$m=0$	$m=0,25$	$m=0,5$
λ_1	1.981	2.017	2.027
λ_2	3.636	3.630	3.627
λ_3	4.478	4.604	4.641

З результатів, вміщених в таблицю, можна зробити висновок, що для обраного шаруватого матеріалу пластини форма шарів впливає на частотні параметри несуттєво.

5 Висновки

- 1) З використанням розробленої методики, основаної на методі сплайн - колокації досліджено поведінку частотних параметрів квадратних жорстко закріплених пластин з шарами, об'єм яких залишається постійним, а межі яких змінюються за лінійним законом.
- 2) З'ясовано, що форма шарів матеріалу пластини може значно впливати на частотні параметри коливань пластини, як це спостерігається для тришарової пластини з зовнішніми ізотропними та внутрішнім ортотропним шарами.
- 3) Якщо матеріал пластини ортотропний, а осі ортотропії внутрішнього шару повернуто на деякий кут навколо осі O_o , форма шарів впливає на частотні параметри несуттєво.

УДК 539.3

Н. Д. Оксенчук, аспірант

Вплив аустеніт-мартенситного перетворення на напружений стан сталевго диска при імпульсному тепловому опроміненні

В рамках термомеханічної моделі течії та моделі мікроструктурних перетворень розглядається задача про опромінення диска тепловим імпульсом. Досліджується вплив аустеніт-мартенситного перетворення на напружений стан зразка. Дасться кількісна та якісна оцінка впливу мікроструктури на напружений стан диска.

Ключові слова: модель Боднера-Партома, мікроструктурні перетворення, метод скінчених елементів, правило сумішей

N. D. Oksenchuk, PhD student

The influence of the austenite-martensite transformation on the stress state of the steel disk under pulse heat irradiation

Within the framework of the thermomechanical flow model of microstructure transformation the problem of the disk emission by heat pulse is considered. The influence of austenite-martensite transformation on the stress state of a specimen is studied. The qualitative and quantitative estimation of microstructure influence on disk stress state is given.

Key Words: Bodner-Partom model, microstructural transformation, finite-element method, mixture rule

E-mail: term@inmech.kiev.ua

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н. Жук Я. О.

1. Вступ

Розробка технологій імпульсної обробки металевих елементів конструкцій вимагає детальної інформації про термомеханічні процеси, які відбуваються при опроміненні і подальшому охолодженні матеріалу, що може супроводжуватися мікроструктурними перетвореннями (МСП). Врахування МСП дозволяє значно покращити саму технологію.

В роботі [1] розглядається напружено-деформований стан циліндричного тіла із врахуванням лише трансформційних змін об'єму при фазових перетвореннях.

В даній статті досліджується поточний та залишковий напружений стан диска із сталі 35ХМ, який формується під дією термічного імпульсного навантаження. При цьому враховується залежність непружних властивостей матеріалу, зокрема границі течії та тимчасового опору, від мікроструктури при аустеніт-мартенситному перетворенні.

2. Постановка задачі

Постановка осесиметричної задачі в циліндричній системі координат $Oz\varphi$ включає

– співвідношення Коші

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

– рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут u_r, u_φ, u_z – компоненти вектора переміщення; $\epsilon_{rr}, \epsilon_{\varphi\varphi}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}$ – компоненти тензора деформації; $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ – компоненти тензора напружень; ρ – густина матеріалу.

До постановки задачі входить також рівняння теплопровідності (12), яке наведене нижче.

Фізично нелінійна поведінка матеріалу описується уніфікованою моделлю течії Боднера-Партома [2, 3, 4], яка узагальнена на випадок впливу фазового складу матеріалу на його непружні властивості. Модель включає

Параметри моделі та відповідні їм непружкі властивості для кожної з фаз

ξ	$\sigma_{\xi}^f, \text{MPa}$	$\sigma_{\xi}^p, \text{MPa}$	K_{ξ}^f, MPa	K_{ξ}^p, MPa
a	165	190	712	824
$f + p$	827	948	3562	4123
b	900	1032	3877	4489
m	1611	1848	6943	8039

– рівняння адитивності деформації

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{\text{ph}}, \quad i, j = r, z, \varphi, \quad (3)$$

– закон Гука для ізоотропного матеріалу

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad (4)$$

$$\sigma_{ii} = 3K_v(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^{\text{ph}});$$

– закон течії Прандтля-Рейса з умовою непружкої нестисливості для непружкої деформації ε_{ij}^p

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = D_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}[(K - K_0)^2 / 3J_2]^n\right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}^p(0) = 0, \quad \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt}(0) = 0;$$

– рівняння еволюції для параметра ізоотропного зміцнення K

$$\frac{dK}{dt} = m_1(K_1 - K) \frac{dW^p}{dt}, \quad K(0) = 0, \quad (6)$$

де ε_{ij}^e , ε_{ij}^p – непружка і пружна складові тензора деформації, $\varepsilon_{ij}^{\text{ph}}$ – термоструктурна деформація, яка враховує зміну об'єму матеріалу при зміні температури і фазових перетвореннях та визначається через питомі об'єми і концентрації фаз [1, 5, 6], $\varepsilon_{ij}^{\text{ph}} = \varepsilon_{ij}^{\text{ph}} \delta_{ij}$; e_{ij} , s_{ij} – девіатори тензорів напружень та деформації відповідно, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{ii} / 3$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ii} \delta_{ij} / 3$; δ_{ij} – символ Кронекера; n , m_1 , K_0 , K_1 , D_0 – параметри моделі; $\frac{dW^p}{dt} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt}$ – непружка потужність; $J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$ – другий інваріант девіатора тензора напружень; K_v , G – об'ємний модуль та модуль зсуву відповідно; D_0 – граничне значення швидкості непружкої деформації при зсуві,

$$D_0 = 10^8 \text{ c}^{-1}.$$

Параметри моделі K_0 , K_1 визначаються за допомогою лінійного правила сумішей

$$K_0 \rightarrow \bar{K}_0 = K_0^{(\xi)} y_{\xi}, \quad (7)$$

$$K_1 \rightarrow \bar{K}_1 = K_1^{(\xi)} y_{\xi}.$$

Тут y_{ξ} – об'ємні концентрації мікроструктурних фаз, $\xi = f, p, b, m$, відповідно, фериту, перліту, бейніту і мартенситу; $K_0^{(\xi)}$, $K_1^{(\xi)}$ – параметри моделі для відповідних фаз.Параметри моделі $K_0^{(\xi)}$, $K_1^{(\xi)}$, які відповідають за границю течії σ_{ξ}^f та тимчасовий опір матеріалу σ_{ξ}^p , для кожної з фаз ξ наведені в таблиці 1.

Рівняння теплопровідності отримуються на основі термодинаміки.

Нехай ψ_v – складова вільної енергії Гельмгольца, пов'язана із об'ємним деформуванням і теплосмістю матеріалу, приймається у вигляді

$$\psi_v = \frac{1}{2} K_v (\varepsilon_{ii} - 3\varepsilon_{ii}^{\text{ph}})^2 + \int_{T_0}^T dT' \int_{T_0}^{T'} \frac{c_v(T')}{T'} dT', \quad (8)$$

де T – абсолютна температура; c_v – коефіцієнт теплосмістності при постійному об'ємі.

Стандартна термодинамічна процедура, яка заснована на нерівності Клаузіуса–Дюгема [7] призводить до наступних визначаючих рівнянь

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi_v}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi_v}{\partial T}. \quad (9)$$

Перше рівняння (9) з врахуванням (8) співпадає з другим рівнянням (4).

Для ентропії отримуюмо

$$\eta = 3K_v (\varepsilon_{ii} - 3\varepsilon_{ii}^{\text{ph}}) \frac{\partial \varepsilon_{ii}^{\text{ph}}}{\partial T} + \int_{T_0}^T \frac{c_v(T')}{T'} dT'. \quad (10)$$

Рівняння балансу енергії згідно [7] має вигляд

$$T \frac{\partial \eta}{\partial t} = \Delta(k\Delta\theta) + D' + r_s, \quad (11)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності; θ – температура за шкалою Цельсія, $\theta = T - 273^\circ\text{C}$; D' – швидкість дисипації; r_s – задане джерело тепла.

Вираз для D' , отриманий на основі моделі Боднера-Партома, наведено в роботах [8, 9]. Підставляючи (10) в (11) з врахуванням (4), отримуємо рівняння теплопровідності, яке в циліндричній системі координат набуває вигляду

$$c_s \frac{\partial \theta}{\partial t} + T \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_{\theta} \frac{\partial \varepsilon^{\theta, \text{ph}}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial \theta}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial \theta}{\partial z}) - D' = r_s. \quad (12)$$

Другий доданок в лівій частині рівняння (12) відображає температурні ефекти, пов'язані із зміною об'єму внаслідок теплового розширення і зміни об'єму внаслідок мікроструктурних перетворень.

Постановка задачі включає також – початкові умови

$$u_r = \dot{u}_r = 0, \quad u_z = \dot{u}_z = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0; \quad (13)$$

– теплові граничні умови

$$q_r = \begin{cases} q_0 \cos \frac{\pi r}{2r_p} \sin \frac{\pi t}{t_p}; & r \leq r_p, \quad t \leq t_p, \\ 0; & r > r_p, \quad t > t_p, \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} n_r + \frac{\partial \theta}{\partial z} n_z = 0, \quad z = L, \quad 0 < r < R, \\ r = R, \quad 0 < z < L;$$

– механічні граничні умови

$$\sigma_{rr} n_r, \sigma_{rz} n_z = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < R \\ \sigma_{\theta\theta} n_r + \sigma_{zz} n_z = 0, \quad r = R, \quad 0 < z < L, \quad (15)$$

де q_r – тепловий потік, q_0 – параметр теплового потоку; t_p – час дії імпульсу, r_p – радіус теплової плями.

3. Методика і метод розв'язування задачі

В даній роботі вплив МСП враховується через зміну об'єму матеріалу в процесі фазових перетворень і через вплив мікроструктури на непружні властивості матеріалу.

Розрахунок концентрації фаз переохолодженого аустеніту проводиться за допомогою термокінетичної діаграми ТКД [10, 11] та співвідношень для питомих об'ємів фаз. Накопичення концентрації фаз вздовж кривих охолодження в області аустеніт-мартенситного перетворення розраховується за допомогою рівняння Коїстінена-Марбургера [12].

Задача (1) – (15) є суттєво нелінійною і розв'язується чисельно методом покрокового інтегрування за часом. На кожному кроці задача лінеаризується за допомогою метода ітерацій. Рівняння моделі інтегруються неявним методом Ейлера, а рівняння динаміки – за неявним методом Ньютона. Лінеаризовані рівняння теплопровідності та руху розв'язуються за допомогою скінчено-елементної методики. Використовується чотирикутний восьмивузловий ізопараметричний скінчений елемент.

Параметри моделі течії для кожної фази визначались на основі експериментальних даних [10, 13] за методикою, описаною в роботі [14].

4. Результати розрахунків

В якості матеріалу обирається сталь 35ХМА із початковою структурою $a=0$, $b=0,79$, $f+p=0,11$, $m=0,10$. Розрахунки проводились для диска радіусом $R=5 \cdot 10^{-3}$ м і товщиною $h=10^{-3}$ м. Радіус зони опромінення дорівнював $r_p=1,5 \cdot 10^{-3}$ м, тривалість дії імпульсу – $t_p=10^{-8}$ с, параметр теплового потоку – $q_0=2 \cdot 10^8$ кВм/м².

В процесях, що розглядаються при зазначених вище умовах опромінення і охолодження, відбувається лише фазове перетворення аустеніт-мартенсит. Інші мікроструктурні фази не виникають.

Просторовий розподіл фази мартенситу для моментів часу $t=0,2 \cdot 10^{-7}$ с; $t=5 \cdot 10^{-7}$ с ілюструється на рис. 1 – 2. Внаслідок дзвоноподібного розподілу теплового потоку (14) вздовж радіуса цей перехід спочатку відбувається не в центрі диска, а при $r \approx 0,8 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 1). При подальшому

охлажденні відсоток мартенситу в приповерхневій зоні збільшується, поширюючись до центра диска (рис. 2). Під плямою опромінення в центрі диска утворюється область, яка містить лише мартенсит, а весь інший матеріал диска, що не прогрівся вище 790°C має вихідну фазу.

На рис. 3 наведено результати, які показують еволюцію температури та радіального напруження в центральній точці опроміненої

поверхні диска. Тут для напружень суцільна лінія – розрахунок при врахуванні залежності непружних властивостей та змін об'єму від МСП; штрихова лінія – розрахунок із врахуванням залежності лише об'ємних змін від МСП; пунктирна лінія – розрахунок без фазових перетворень. Ці позначення зберігаються на всіх наступних рисунках.

Злами на лініях на початковій стадії $\theta \approx 790^{\circ}\text{C}$ зумовлені мікроструктурним перетворенням вихідна фаза – аустеніт.

Різке зменшення напружень σ_r при $t \geq 3,2 \cdot 10^{-8}\text{c}$ відповідає фазовому перетворенню аустеніт–мартенсит при $\theta < 390^{\circ}\text{C}$. Зменшення напружень при мартенситному перетворенні зумовлене збільшенням об'єму матеріалу у фазі мартенситу.

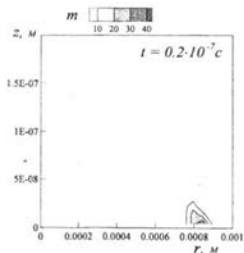


Рис. 1

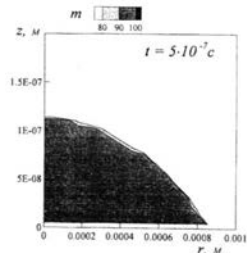


Рис. 2

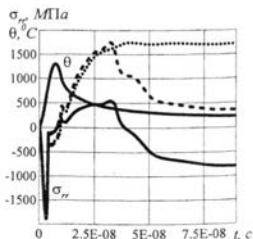


Рис. 3

На рис. 4 – 5 представлена залежність радіальних напружень $\sigma_r(r)$ вздовж радіуса диска. Початок аустеніт–мартенситного перетворення характеризується зломом на суцільній кривій (рис. 4). Завдяки МСП рівень розтягуючих радіальних напружень зменшується, починаючи від $r \approx 0.8 \cdot 10^{-3}\text{m}$, що відповідає результатам рис. 1. Цей процес поширюється в напрямку центра диска і призводить до остаточного формування залишкового стану (рис. 5).

На рис. 5 показано залишкові розподіли радіальних напружень $\sigma_r(r)$. За час

формування залишкового стану приймається $t = 3 \cdot 10^{-7} \text{ c}$. На рис. 5 бачимо, що сумарний ефект МСП (суцільна крива) є якісним з точки зору механіки: замість розтягуючих напружень отримуємо стискаючі – це дозволяє збільшити міцність матеріалу поверхні диска. Зазначимо, що рівень залишкових напружень $\sigma_r(r)$ при розрахунках без фазових перетворень найвищий (пунктирні криві на рис. 3 – 5).

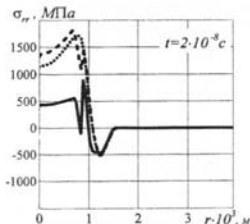


Рис. 4

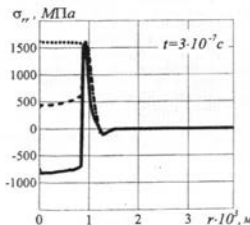


Рис. 5

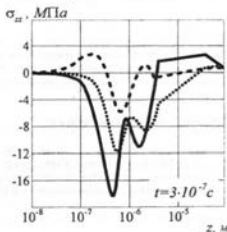


Рис. 6

Цілком інша картина спостерігається на рис. 6, де ілюструються розподіли залишкових напружень $\sigma_z(z)$, які змінюються по товщині диска. Напруження $\sigma_z(z)$ майже на два порядки нижче радіальних, причому вклад МСП несуттєвий.

5. Висновки

В даній роботі на основі зв'язаної задачі термомеханіки з використанням термодинамічно узгодженої теорії непружної поведінки матеріалу досліджено процес розповсюдження хвиль напруження в сталевому диску, опроміненого тепловим імпульсом.

Задачу розв'язано в динамічній постановці із застосуванням скінчено-елементної методики, розвиненої для моделювання зв'язаної термомеханічної поведінки фізично нелінійних матеріалів.

На основі чисельного моделювання досліджено особливості напруженого стану в околі дії імпульсу. Розглянуто мартенситне перетворення та напружений стан диска при імпульсному термічному навантаженні. Встановлено, що при перетворенні аустеніт-мартенсит залишкові розтягуючі напруження в поверхневому шарі матеріалу суттєво зменшуються, або навіть змінюються на стискаючі внаслідок збільшення об'єму матеріалу в мартенситній фазі. Не врахування мікроструктурних перетворень призводить до

суттєво завищених значень залишкових напружень.

Отже, запропонована модель і методика розрахунку мікроструктурних фаз дає змогу надати оцінку залишковому напруженому стану як з врахуванням ефекту об'ємних змін, так і з врахуванням впливу на непружні характеристики матеріалу.

Список використаних джерел

1. Жук Я. О., Сенченко І. К., Л. Я. Васильєва. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – 54, №1. – С. 101–115.
2. Сенченко І. К., Жук Я. А., Табеева Г. А. Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, №4. – С. 53–60.
3. Bodner S.R. Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report) / S.R. Bodner. – Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 2000. – 106 p.
4. Moreno V., Jordan E. H. Prediction of material thermomechanical response with a unified viscoplastic constitutive model // Int. J. of Plast. – 1986. – Vol. 2. – P. 223–245.
5. Юрьев С. Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.
6. Leblond J. B., Mottet G., Devaux J. C. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformation. – I. Derivation of general

relations // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – 34, N 4. – P. 395–409.

7. Трудяк К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М: Мир, 1975. – 592 с.
8. Сенченко І. К., Андрушко Н. Ф. Термические эффекты при импульсном нагружении цилиндра из физически нелинейного материала // Прикл. механика. – 2005. – 41, №8. – С. 66–71.
9. Сенченко І. К., Жук Я. А. Термодинамический анализ одной модели термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1997. – 33, № 2. – С. 41–48.
10. Шоршоров М. Х., Белов В. В. Фазовые превращения и изменения свойств стали при сварке. Атлас. – Москва: Наука, 1972. – 220 с.
11. Попова А. А., Попова А. Е. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – М. – С.: - ГНТИ Машиностр. лит., 1961. – 430 с.
12. Koistinen D. P., Marburger R. E. A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and carbon steels // Acta Metall. – 1959. – Vol. 7. – P. 59–60.
13. Гольденблат И. И., Безухов Н. И., Бажанов И. И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
14. Сенченко І. К. Определение параметров модели Боднера-Партома термовязкопластического деформирования материалов / И. К. Сенченко, Г. А. Табеева // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 2. – С. 64–72.

Надійшла до редколегії ?

УДК 519.9

Стецюк О.Д., аспірант

Гранична поведінка математичного сподівання повної енергії осцилятора при зовнішньому випадковому збуренні

Досліджується поведінка при $t \rightarrow \infty$ математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора з тертям при зовнішньому збуренні процесом типу "дровий шум".

Ключові слова: гармонічний осцилятор, випадкове збурення типу "дровий шум" енергія.

E-mail: yelena.sod@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

Гармонічним осцилятором з тертям називається система, рух якої описується лінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{u}(t) + 2h\dot{u}(t) + k^2u(t) = 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0,$$

де u_0 і $\dot{u}_0$ - початкові положення і швидкість осцилятора, сталі $k > 0$ і h - параметри осцилятора ($2h$ - коефіцієнт тертя).

Рівняння (1) еквівалентне системі диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (-k^2x_1(t) - 2hx_2(t)) \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1(t) = u(t), \quad x_2(t) = \dot{u}(t).$$

У прямокутній системі координат X_1OX_2 стан гармонічного осцилятора з тертям зображується точкою M з координатами $(x_1(t), x_2(t))$, яка рухається по фазовій траєкторії. "Портрет" можливих рухів точки M на фазовій площині X_1OX_2 залежить від знаку величини $h^2 - k^2$ (якщо $k^2 > h^2 > 0$, то це сім'я спіралей, якщо $h^2 = k^2$, сім'я кривих параболічного типу, якщо $h^2 > k^2$, сім'я "парабол") [1].

У даній роботі досліджується поведінка повної енергії у випадках

$$K_1: |h| < k, \quad K_2: |h| > k, \quad K_3: |h| = k,$$

при випадкових збуреннях рівняння (2) вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (-k^2x_1(t) - 2hx_2(t))dt + \int_R f(t, v) \tilde{\nu}(dt, dv) \end{cases} \quad (3)$$

O.D.Stetsiuk, post graduate student

Limiting behaviour of mathematical expectation of Instantaneous Energy of the oscillator that is effected outside by a process of the 'shot noise' type

The behavior of the oscillator with friction as $t \rightarrow \infty$ is investigated in the case where the oscillator is being effect outside by a process of the 'shot noise' type.

Key words: harmonic oscillator, random perturbation of 'shot noise', energy.

де $\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$, $\nu(t, A)$ - пуассонівська міра в R , $M\nu(t, A) = t\Pi(A)$, $f(t, v) = f(t)\varphi(v)$, де $f(t)$ - $2l$ -періодична неспадкова функція, $\forall t \geq 0$ $\int_R M|f(t, v)|\Pi(dv) < \infty$ і $\int_R Mf^2(t, v)\Pi(dv) < \infty$.

Модель гармонічного осцилятора з і без тертя при зовнішньому збуренні процесом типу "білого шуму" розглядалась у роботах [5,9], у роботі [7] розглядалась модель при збуренні пуассонівським процесом.

Теорема 1. Нехай $x(t)$ - розв'язок системи (2). Тоді для $\forall t \geq 0$ мають місце рівності:

1) для K_1 якщо $u_0 \neq 0$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1(t) \cos(\psi_1(t) - \mu_1 t) \\ x_2(t) = kA_1(t) \sin(-\psi_1(t) + \mu_1 t + \theta_1) \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{де } \mu_1 = \sqrt{k^2 - h^2},$$

$$\gamma_1(t) = \int_0^t e^{hs} \sin \mu_1 s \int_R f(s, v) \tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$\gamma_2(t) = \int_0^t e^{hs} \cos \mu_1 s \int_R f(s, v) \tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$A_1(t) =$$

$$e^{-ht} \sqrt{\left(u_0 - \frac{1}{\mu_1} \gamma_1(t)\right)^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0 + \gamma_2(t)}{\mu_1}\right)^2},$$

$$A_1(0) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi_1(t) = \frac{hu_0 + \dot{u}_0 + \gamma_2(t)}{\mu_1 u_0 - \gamma_1(t)},$$

$$\operatorname{tg} \psi_1(0) = \frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1 u_0},$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{h}{\mu_1}.$$

2) для K_2 якщо $u_0 \neq 0$

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{2}A_2(t) \cos(\psi_2(t) - \frac{\pi}{4}) \\ x_2(t) = \sqrt{2}\sqrt{h^2 + k^2}A_2(t) \cos(\psi_2(t) + \theta_2) \end{cases},$$

де $\mu_2 = \sqrt{h^2 + k^2}$,

$$\gamma_1(t) = \int_0^t e^{(h-\mu_2)s} \int_R f(s, v) \tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$\gamma_2(t) = \int_0^t e^{(h+\mu_2)s} \int_R f(s, v) \tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$A_2(t) = \frac{e^{-ht}}{2\mu_2} \sqrt{e^{2\mu_2 t} (\gamma_1(t) + (h + \mu_2)u_0 + \dot{u}_0)^2 + e^{-2\mu_2 t} (-\gamma_2(t) + (-h + \mu_2)u_0 - \dot{u}_0)^2},$$

$$A_2(0) =$$

$$\sqrt{((h + \mu_2)u_0 + \dot{u}_0)^2 + ((-h + \mu_2)u_0 - \dot{u}_0)^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi_2(t) = \frac{e^{-\mu_2 t} (-\gamma_2(t) + (-h + \mu_2)u_0 - \dot{u}_0)}{e^{\mu_2 t} (\gamma_1(t) + (h + \mu_2)u_0 + \dot{u}_0)},$$

$$\operatorname{tg} \psi_2(0) = \frac{(-h + \mu_2)u_0 - \dot{u}_0}{(h + \mu_2)u_0 + \dot{u}_0},$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{h + \mu_2}{-h + \mu_2}.$$

3) для K_3

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-ht} [-\gamma_1(t) + u_0 + t(\gamma_2(t) + hu_0 + \dot{u}_0)] \\ x_2(t) = e^{-ht} [-h(-\gamma_1(t) + u_0) + \\ (1 - ht)(\gamma_2(t) + hu_0 + \dot{u}_0)] \end{cases}$$

де

$$\gamma_1(t) = \int_0^t e^{hs} \int_R f(s, v) \tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$\gamma_2(t) = \int_0^t e^{hs} \int_R f(s, v) \tilde{\nu}(ds, dv).$$

Доведення для K_1 . Фундаментальна матриця розв'язків незбуреної системи (2)

$$X(t) = \frac{e^{-ht}}{\mu_1} \times$$

$$\begin{pmatrix} \cos \mu_1 t & \sin \mu_1 t \\ -h \cos \mu_1 t - \mu_1 \sin \mu_1 t & \mu_1 \cos \mu_1 t - h \sin \mu_1 t \end{pmatrix}.$$

Розглянемо процес

$$y(t) = X^{-1}(t)x(t),$$

тобто процеси

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{ht} [(\mu_1 \cos \mu_1 t - h \sin \mu_1 t)x_1(t) - \\ &\quad \sin \mu_1 t x_2(t)], \\ y_1(0) &= \mu_1 u_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= e^{ht} [(\mu_1 \sin \mu_1 t + h \cos \mu_1 t)x_1(t) + \\ &\quad \cos \mu_1 t x_2(t)], \\ y_2(0) &= hu_0 + \dot{u}_0. \end{aligned}$$

За формулою Іто знайдемо $dy_1(t)$:

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= he^{ht} [(\mu_1 \cos \mu_1 t - h \sin \mu_1 t)x_1(t) - \\ &\quad \sin \mu_1 t x_2(t)]dt + e^{ht} [(-\mu_1^2 \sin \mu_1 t - h\mu_1 \cos \mu_1 t)x_1(t) - \\ &\quad \mu \cos \mu_1 t x_2(t)]dt + e^{ht} [(\mu_1 \cos \mu_1 t - h \sin \mu_1 t)x_2(t) + \\ &\quad k^2 \sin \mu_1 t x_1(t) + 2h \sin \mu_1 t x_2(t)]dt + \\ &\quad \int_R e^{ht} [((\mu_1 \cos \mu t - \\ &\quad h \sin \mu_1 t)x_1(t) - \sin \mu t (x_2(t) + f(t, v)) - \\ &\quad (\mu_1 \cos \mu t - h \sin \mu_1 t)x_1(t) - \sin \mu t x_2(t) + \\ &\quad \sin \mu t f(t, v))] \Pi(dv)dt - \int_R e^{ht} \sin \mu_1 t f(t, v) \tilde{\nu}(dt, dv). \end{aligned}$$

$$dy_1(t) = - \int_R e^{ht} \sin \mu_1 t f(t, v) \tilde{\nu}(dt, dv).$$

Отже, $y_1(t) = -\gamma_1(t) + \mu_1 u_0$.

Аналогічно знаходимо, що $y_2(t) = \gamma_2(t) + hu_0 + \dot{u}_0$.

Отже, маємо розв'язок системи (3)

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-ht} (u_0 \cos \mu_1 t + \frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \sin \mu_1 t) + \\ e^{-ht} (-\frac{1}{\mu_1} \gamma_1(t) \cos \mu_1 t + \frac{1}{\mu_1} \gamma_2(t) \sin \mu_1 t) \\ x_2(t) = e^{-ht} (\dot{u}_0 \cos \mu_1 t + \frac{-k^2 u_0 - h\dot{u}_0}{\mu_1} \sin \mu_1 t) + \\ e^{-ht} [(\frac{h}{\mu_1} \cos \mu_1 t + \sin \mu_1 t) \gamma_1(t) + \\ (-\frac{h}{\mu_1} \sin \mu_1 t + \cos \mu_1 t) \gamma_2(t)] \end{cases} \quad (7)$$

З розв'язку (7) легко отримати запис $i = 1, 2, 3$, розв'язку у вигляді (4).

Аналогічно для K_2 розглянувши процеси

$$y_1(t) = \frac{e^{(h-\mu_2)t}}{2\mu_2} [(h+\mu_2)x_1(t) + x_2(t)],$$

$$y_1(0) = \frac{1}{2\mu_2} [(h+\mu_2)u_0 + \dot{u}_0]$$

та

$$y_2(t) = \frac{e^{(h+\mu_2)t}}{2\mu_2} [(-h+\mu_2)x_1(t) - x_2(t)],$$

$$y_2(0) = \frac{1}{2\mu_2} [(-h+\mu_2)u_0 - \dot{u}_0],$$

і для K_3

$$y_1(t) = e^{ht} [(1-ht)x_1(t) - tx_2(t)], \quad y_1(0) = u_0,$$

$$y_2(t) = e^{ht} [hx_1(t) + x_2(t)], \quad y_2(0) = hu_0 + \dot{u}_0.$$

отримуємо розв'язок (3).

Теорема доведена.

Розглянемо збуджуючий процес, у якому $f(t, v) = f(t)\varphi(v)$, де $f(t)$ - $2l$ -періодична невід'ємна функція. Дослідимо поведінку з часом математичного сподівання повної енергії осцилятора

$$E(t) = \frac{1}{2} (k^2 x_1^2(t) + x_2^2(t))$$

для K_i , $i = 1, 2, 3$, при $u_0 \neq 0$.

Маємо

$$ME(t) = \frac{1}{2} (k^2 Mx_1^2(t) + Mx_2^2(t)). \quad (8)$$

Введемо позначення

$$a_0 = \int_0^{2l} e^{2hs} f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds,$$

$$a_0(t) = \int_0^{t-2l\lfloor \frac{t}{2l} \rfloor} e^{2hs} f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds,$$

$$b_1 = \int_0^{2l} e^{2(h-\mu_2)s} f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds,$$

$$b_2 = \int_0^{2l} e^{2(h+\mu_2)s} f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds,$$

$$c_4 = \int_0^{2l} e^{-2hs} s^i f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds.$$

$$\beta_i(t) = \int_0^t e^{-2hs} s^i f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds,$$

$i = 1, 2, 3$,

$$d = \int_0^{-\frac{1}{2h}} e^{-2hs} s^2 f^2(-s+t-\frac{1}{2h}) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds,$$

$$|d| \leq D > 0.$$

Теорема 2. Нехай $x(t)$ - розв'язок системи (2).

Тоді для $\forall t \geq 0$ мають місце рівності:

1) для K_1 , якщо $h > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ME(t) \geq \frac{1}{\mu_1^2} \frac{e^{-4hl}}{e^{4hl} - 1} a_0 \left(1 - \frac{h}{k}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ME(t) \leq \frac{1}{\mu_1^2} \frac{1}{e^{4hl} - 1} a_0 \left(1 + \frac{h}{k}\right)$$

якщо $h < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2ht} ME(t) \geq$$

$$\frac{1}{2} k^2 \left(u_0^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \right)^2 + \frac{1}{\mu_1^2} \frac{a_0}{1 - e^{4hl}} \right) \left(1 + \frac{h}{k} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2ht} ME(t) \leq$$

$$\frac{1}{2} k^2 \left(u_0^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \right)^2 + \frac{1}{\mu_1^2} \frac{a_0}{1 - e^{4hl}} \right) \left(1 - \frac{h}{k} \right)$$

2) для K_2 , якщо $h > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ME(t) > \frac{1}{4\mu_1^2} \left(h^2 - \sqrt{h^4 + \mu_2^4 - h^2\mu_2^2} \right) \times \\ \left(\frac{b_1 e^{4(h-\mu_2)l}}{e^{4(h-\mu_2)l} - 1} + \frac{b_2 e^{4(h+\mu_2)l}}{e^{4(h+\mu_2)l} - 1} \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ME(t) < \frac{1}{4\mu_1^2} \left(h^2 + \sqrt{h^4 + \mu_2^4 - h^2\mu_2^2} \right) \times \\ \left(\frac{b_1 e^{4(h-\mu_2)l}}{e^{4(h-\mu_2)l} - 1} + \frac{b_2 e^{-4(h+\mu_2)l}}{e^{4(h+\mu_2)l} - 1} \right).$$

якщо $h < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2(h-\mu_2)t} ME(t) \geq$$

$$\frac{1}{4\mu_1^2} \left(h^2 - \sqrt{h^4 + \mu_2^4 - h^2\mu_2^2} \right) \times \\ \left(\frac{b_1}{1 - e^{4(h-\mu_2)l}} + ((h+\mu_2)u_0 + \dot{u}_0)^2 \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{2(h-\mu_2)t} M E(t) \leq \frac{1}{4\mu_1^2} \left(h^2 + \sqrt{h^4 + \mu_2^4 - h^2\mu_2^2} \right) \times \left(\frac{b_1}{1 - e^{4(h-\mu_2)l}} + ((h + \mu_2)u_0 + \dot{u}_0)^2 \right).$$

3) для K_3 , якщо $h > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M E(t) \geq h^2 e^{-1} \left[4l^2 c_0 \frac{-e^{-12hl}}{(e^{-4hl} - 1)^3} + 4lc_1 \frac{e^{-4hl}}{(e^{-4hl} - 1)^2} + c_2 \frac{-1}{e^{-4hl} - 1} - d \right] + a_0 \frac{e^{4hl}}{4(e^{-4hl} - 1)}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M E(t) \leq h^2 e^{-1} \left[4l^2 c_0 \frac{-e^{-12hl}}{(e^{-4hl} - 1)^3} + 4lc_1 \frac{e^{-4hl}}{(e^{-4hl} - 1)^2} + c_2 \frac{-1}{e^{-4hl} - 1} - d \right] + a_0 \frac{2 - e^{-4hl}}{4(e^{-4hl} - 1)}.$$

Якщо $h < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2ht}}{t^2} M E(t) \geq h^2 e^{-1} \frac{a_0 e^{4hl}}{e^{-4hl} - 1} + \frac{1}{2} (1 + h^2) (hu_0 + \dot{u}_0)^2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2ht}}{t^2} M E(t) \leq h^2 e^{-1} \frac{a_0}{e^{-4hl} - 1} + \frac{1}{2} (1 + h^2) (hu_0 + \dot{u}_0)^2$$

Доведення.

Для доведення пункту 1) використаємо явний розв'язок (4). Маємо

$$E(t) = \frac{1}{2} k^2 A_1^2(t) [\cos^2(2\psi_1(t) - \mu_1 t) + \sin^2(2\mu_1 t + \theta_1 - \psi_1(t))],$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k^2 A_1^2(t) [1 - \sin \theta_1 \cos(2\psi_1(t) - 2\mu_1 t - \theta_1)].$$

Оскільки

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{h}{\sqrt{k^2 - h^2}},$$

то

$$\frac{1}{2} k^2 A_1^2(t) \left(1 - \frac{|h|}{k} \right) \leq E(t) \leq$$

$$\frac{1}{2} k^2 A_1^2(t) \left(1 + \frac{|h|}{k} \right).$$

Отже,

$$\frac{1}{2} k^2 M A_1^2(t) \left(1 - \frac{|h|}{k} \right) \leq M E(t) \leq \frac{1}{2} k^2 M A_1^2(t) \left(1 + \frac{|h|}{k} \right) \quad (9)$$

$$M A_1^2(t) = e^{-2ht} \times \left(u_0^2 + \frac{1}{\mu_1^2} M \gamma_1^2(t) + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \right)^2 + \frac{1}{\mu_1^2} M \gamma_2^2(t) \right). \quad (10)$$

Знайдемо $M \gamma_1^2(t) + M \gamma_2^2(t)$.

$$M \gamma_1^2(t) + M \gamma_2^2(t) = \int_0^t e^{2hs} \sin^2 \mu_1 s f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds + \int_0^t e^{2hs} \cos^2 \mu_1 s f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds = \int_0^t e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds.$$

Обраховуємо інтеграл у правій частині рівності. Враховуючи, що $f(t)$ - $2l$ -періодична функція маємо:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds = \\ & \int_0^{2l} e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds + \\ & e^{4hl} \int_0^{2l} e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds + \dots + \\ & e^{4hl[\frac{t}{2l} - 1]} \int_0^{2l} e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds + \\ & e^{4hl[\frac{t}{2l}]} \int_0^{t-2[\frac{t}{2l}]l} e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds = \\ & \sum_{n=0}^{[\frac{t}{2l}]} e^{4hln} \int_0^{2l} e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds = \\ & \frac{e^{4hl[\frac{t}{2l}] - 1}}{e^{4hl} - 1} \int_0^{2l} e^{2hs} f^2(s) \int_R M \varphi^2(v) \Pi(dv) ds + \end{aligned}$$

$$e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} \int_0^{t-2l|\frac{h}{2l}|} e^{2\lambda s} f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds = \\ \frac{e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 + e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} \alpha_0(t).$$

Отже,

$$M\gamma_1^2(t) + M\gamma_2^2(t) = \frac{e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 + e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} \alpha_0(t)$$

Підставимо отримані значення у (9):

$$ME(t) \geq \frac{1}{2} k^2 e^{-2\lambda t} \left(u_0^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{\mu_1^2} \left(\frac{e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 + e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} \alpha_0(t) \right) \right) \left(1 - \frac{|h|}{k} \right), \\ ME(t) \leq \frac{1}{2} k^2 e^{-2\lambda t} \left(u_0^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{\mu_1^2} \left(\frac{e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 + e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} \alpha_0(t) \right) \right) \left(1 + \frac{|h|}{k} \right)$$

Оскільки $a_0 \geq \alpha_0(t) \geq 0$, то

$$ME(t) \geq \frac{1}{2} k^2 e^{-2\lambda t} \left(u_0^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{\mu_1^2} \frac{e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 \right) \left(1 - \frac{|h|}{k} \right), \\ ME(t) \leq \frac{1}{2} k^2 e^{-2\lambda t} \left(u_0^2 + \left(\frac{hu_0 + \dot{u}_0}{\mu_1} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{\mu_1^2} \frac{e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} e^{4\lambda l} - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 \right) \left(1 + \frac{|h|}{k} \right).$$

Звідки і отримуємо твердження теореми 1).

Аналогічні обчислення проводимо для пункту 2).

Для доведення пункту 3) використаємо явний вигляд розв'язку (6). Маємо

$$2ME(t) = M(h^2 x_1^2(t) + x_2^2(t)) = \\ e^{-2\lambda t} [h^2(u_0 + t(hu_0 + \dot{u}_0))^2 + (hu_0 - (1 - ht)(hu_0 + \dot{u}_0))^2 + \\ \int_0^t e^{2\lambda s} (2h^2 s^2 + 2h^2 t^2 - 4h^2 st + \\ 2hs - 2ht + 1) f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds] =$$

$$e^{-2\lambda t} [h^2(u_0 + t(hu_0 + \dot{u}_0))^2 + \\ (hu_0 - (1 - ht)(hu_0 + \dot{u}_0))^2 +$$

$$2h^2 \int_0^t e^{2\lambda s} (s - t + \frac{1}{2h})^2 f^2(s) \times \\ \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds + \\ \frac{1}{2} \int_0^t e^{2\lambda s} f^2(s) \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds] = \\ e^{-2\lambda t} [h^2(u_0 + t(hu_0 + \dot{u}_0))^2 + \\ (hu_0 - (1 - ht)(hu_0 + \dot{u}_0))^2 + \\ 2h^2 I(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 + e^{4\lambda l|\frac{h}{2l}|} \alpha_0(t) \right)].$$

Обчислимо $I(t)$:

$$I(t) = \int_0^t e^{2\lambda s} (s - t + \frac{1}{2h})^2 f^2(s) \times \\ \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) ds = \\ |p = s - t + \frac{1}{2h}| = \\ \int_{-t+\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} e^{2\lambda(p+t-\frac{1}{2h})} p^2 f^2(p+t-\frac{1}{2h}) \times \\ \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) dp = \\ e^{2\lambda t-1} \left[\int_0^{t-\frac{1}{2h}} e^{-2\lambda p} p^2 f^2(-p+t-\frac{1}{2h}) \times \right. \\ \left. \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) dp - \right. \\ \left. \int_0^{-\frac{1}{2h}} e^{-2\lambda p} p^2 f^2(-p+t-\frac{1}{2h}) \times \right. \\ \left. \int_R M\varphi^2(v) \Pi(dv) dp \right] = \\ e^{2\lambda t-1} \left[4l^2 c_0 e^{-4\lambda l} \left(\frac{\left[\frac{t-\frac{1}{2h}}{2l} \right]^2 - \left[\frac{t-\frac{1}{2h}}{2l} \right]}{e^{-4\lambda l} - 1} - \right. \right. \\ \left. \left. \left(\left[\frac{t-\frac{1}{2h}}{2l} \right] - 1 \right) \frac{e^{-4\lambda l} + \left[\frac{t-\frac{1}{2h}}{2l} \right]}{(e^{-4\lambda l} - 1)^2} + \frac{2e^{-4\lambda l}}{(e^{-4\lambda l} - 1)^3} \right) + \right. \\ \left. 4l^2 c_0 \left(\frac{-e^{-4\lambda l}}{(e^{-4\lambda l} - 1)^2} - \frac{e^{-8\lambda l}}{(e^{-4\lambda l} - 1)^3} \right) + \right.$$

$$4lc_1 e^{-4\lambda l} \left[\frac{t - \frac{1}{h}}{2l} \right] \left(\frac{\left[\frac{t - \frac{1}{h}}{2l} \right] - 1}{e^{-4\lambda l} - 1} - \frac{1}{(e^{-4\lambda l} - 1)^2} \right) +$$

$$4lc_1 \frac{e^{-4\lambda l}}{(e^{-4\lambda l} - 1)^2} c_2 \frac{e^{-4\lambda l} \left[\frac{t - \frac{1}{h}}{2l} \right]}{e^{-4\lambda l} - 1} - c_2 \frac{1}{e^{-4\lambda l} - 1} - d$$

Отже,

$$2ME(t) = e^{-2\lambda t} \left[2h^2 I(t) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left(\frac{e^{4\lambda l} \left[\frac{t}{2l} \right] - 1}{e^{4\lambda l} - 1} a_0 + e^{4\lambda l} \left[\frac{t}{2l} \right] a_0(t) \right) + \right.$$

$$h^2 (u_0 + t(hu_0 + \dot{u}_0))^2 +$$

$$\left. (hu_0 - (1 - ht)(hu_0 + \dot{u}_0))^2 \right]$$

З останньої рівності отримуємо твердження теореми 3).

Теорема доведена.

Список використаних джерел

1. Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. Андронов А.А., Хайкин С.Э., Теория колебаний, М. - 1959.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - К.: "Наукова думка". - 1968.

4. Дивич М.Т., Куровський Д.Ю., Ершов А.В. Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії випадкового гармонічного осцилятора // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка. - 2005. - №3. - С. 104-112.

5. Эльсгольд Л.Э. "Дифференциальные уравнения вариационное исчисление М., "Наука 1965, 424 стр.

6. Кулініч Г.Л. Якісний аналіз впливу на гармонічний осцилятор з тертям випадкових збурень типу "білого шуму" вздовж вектора фазової швидкості. // Укр.мат.ж. 1997. Т. 49. №1. С.35-46.

7. Кулініч Г.Л., Бернацкая Ю.В., "О фазовом портрете гармонического осцилятора с трением, возмущенного случайным процессом типа белого шума", Матем. заметки, 68.6 (2000), 862-869

8. Кулініч Г.Л., Куровський Д.Ю., Петрусенко Д.В. Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора при випадковому імпульсному збуренні // Нелінійні коливання. - 2009. - т.12, №3. - С. 299-306.

9. Kulinich G.L. On the limiting behaviors of a harmonic oscillator with random external disturbance// Y.A.M.S.A - 1995. - 8. - P.265-274.

Надійшла до редколегії 08.06.12

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 510.6

Антонова І.А., аспірант

Властивості операторів нерухомої точки в предикатних алгебрах

Рекурсивні та індуктивні методи грають важливу роль в специфікації та верифікації програмних систем. Формалізація таких методів базується на різноманітних операторах нерухомої точки в різних алгебрах. В статті визначаються предикатні алгебри, розглядаються властивості та структури множин нерухомих точок монотонних та неперервних операторів для різних типів частково впорядкованих множин предикатів. Представлені нові нотації операторів T -нерухомих точок та досліджені їх властивості.

Ключові слова: композиційно-номінативні логіки, оператори нерухомої точки, часткові предикати

*E-mail: irine.irine@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Буй Д.Б.

Вступ

Рекурсія широко використовується в різних областях математики та інформатики, зокрема, для специфікації та верифікації програмних та апаратних систем [1, 2, 6]. Традиційними проблемами, що виникають для рекурсивних рівнянь, є проблеми існування та опису всіх можливих розв'язків, зокрема, формулювання умов єдиності розв'язку.

З семантичної точки зору рекурсивне рівняння (з класу, що розглядається) визначає певний оператор Φ над множиною предикатів Pr . В якості розв'язку можна розглядати різноманітні нерухомі точки (НТ) відображення Φ : інфляційну (наповнену) нерухому точку (inflationary fixed point), найбільшу нерухому точку (greatest fixed point), тощо [3, 7, 8, 9]. Але найчастіше використовують оператор найменшої нерухомої точки.

Незважаючи на численні дослідження операторів нерухомої точки (ОНТ), при їх застосуванні в логіці виникають деякі труднощі, що спричинені специфічною семантикою формул, що запропоновані А.Тарським. Ця семантика базується на нотації інтерпретації та не досить алгебраїчна. Крім того, цей підхід орієнтований на класи тотальних функцій і

Antonova I.A., PhD student

Properties of fixed point operators in predicate algebras

Recursive and inductive methods play an important role in software systems specification and verification. Formalization of such methods is based on different fixed point operators in various algebras. In the paper we define predicate algebras and study properties and structures of fixed point sets of monotone and continuous operators for different types of partially ordered sets of predicates. New notions of T -fixed point operators are introduced and their properties are investigated.

Key Words: composition nominative logics, partial predicates, fixed point operators

предикатів та недостатньо задовольняє потребам сучасного програмування та моделювання, для яких характерні непевнота та частковість інформації про предметну область, мінливість та динамічність систем.

Для подолання цієї проблеми використовується композиційно-номінативний підхід, метою якого є побудова ієрархії логік різних рівнів абстракції на методологічній основі, що є спільною з програмуванням. Цей підхід базується на принципах композиційності та номінативності, що є уточненням добре відомого принципу розвитку від абстрактного до конкретного.

Аналіз, проведений в [4, 10, 11, 12], дозволяє стверджувати, що такі нові логіки мають спиратися на часткові предикати над довільними (можливо ієрархічними) класами номінативних даних. Такі дані складаються з пар ім'я-значення. Часткові предикати над номінативними даними з іменами з множини V називаються квазіарними. Нові предикати побудовані з базових за допомогою спеціальних операторів, що називаються композиціями. Відповідно до композиційно-номінативного підходу запропоновані логіки – композиційно-номінативні логіки (КНЛ) [4] – побудовані в

семантико-синтаксичному стилі. Семантичний базис цих логік формує різні алгебри часткових предикатів, які можуть бути визначені на різних рівнях абстракції та загальності. Класи термів таких алгебр можуть розглядатися як множини формул відповідних логік. Аксиоматичні числення для таких логік побудовані і розглянуті в [4]. Наступним кроком розвитку композиційно-номінативних логік є збагачення їх мов рекурсивними визначеннями. Для цього необхідно вивчити властивості операторів нерухомої точки для різних предикатних алгебр, що і зроблено в даній статті.

Алгебри часткових предикатів

Розглянемо деяку множину даних D (D трактується як можливий світ, а його елементи як стани світу), множину часткових предикатів Pr на цій множині даних (предикати трактуються як властивості станів світу та відношення між ними), множину композицій C на множині предикатів.

Пара $AP = (Pr, C)$ – це алгебра часткових предикатів. Алгебри предикатів і їх властивості є основним поняттям КНЛ, апарат таких алгебр пропонується як семантична основа композиційно-номінативних логік. В цьому розумінні КНЛ можна назвати аксіоматичними системами алгебр предикатів.

Нехай $Pr = D \rightarrow Bool$, де $Bool = \{F, T\}$, – множина часткових предикатів, заданих на деякій множині даних D . Нехай $C = Pr^n \rightarrow Pr$ – множина композицій на цих предикатах:

Визначення 1. Під композиційною алгеброю предикатів будемо розуміти пару (Pr, C) , де Pr – множина часткових предикатів, C – множина композицій над предикатами.

Для визначення композицій знадобляться наступні позначення ($P, Q \in Pr, d \in D$):

- $P(d) \downarrow = b$ означає, що предикат P на d визначений зі значенням b ;

- $P(d) \uparrow$ означає, що предикат P на d невизначений.

Інші не визначені поняття розуміються в смислі понять [4, 10, 11, 12].

Різні рівні абстракції визначають різні класи алгебр часткових предикатів: пропозиційний, сингулярний, номінативний.

На пропозиційному рівні дані розглядаються абстрактно, як "чорні" скрині. Базовими композиціями є диз'юнкція $\vee$ та заперечення $\neg$, визначені наступними формулами:

$$(\neg P)(d) = \begin{cases} T, \text{ при } P(d) \downarrow = F; \\ F, \text{ при } P(d) \downarrow = T; \\ \text{невизначене, при } P(d) \uparrow. \end{cases}$$

$$(P \vee Q)(d) = \begin{cases} T, \text{ при } P(d) \downarrow = T \text{ або } Q(d) \downarrow = T; \\ F, \text{ при } P(d) \downarrow = F \text{ і } Q(d) \downarrow = F; \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

На сингулярному рівні дані розглядаються як конкретні "білі" скрині. В цьому випадку є один фіксований клас даних. Відповідні алгебри називаються сингулярними. Алгебри цього рівня додатково забезпечені спеціальними предикатами (нуль-арні композиції), що описують властивості множин даних.

Номінативний рівень є поєднанням перших двох рівнів. Дані розглядаються як "сірі" скрині, що побудовані з "білих" та "чорних" скриньок. Такі дані називаються номінативними та визначені індуктивно з множин імен I та базових значень A . Номінативні дані рангу 1 можуть розглядатися як функції з I в A . Їх клас позначається I^1A . Такі дані називаються іменними множинами та зазвичай представлені у формі $\{v_1 \mapsto a_1, \dots, v_n \mapsto a_n\}$, де $v_1, \dots, v_n, \dots \in I$, $a_1, \dots, a_n, \dots \in A$. Предикати та функції над іменними множинами називаються квазі-арними. Такі класи записуються як Pr^i та Fn^i відповідно.

На відміну від попередніх рівнів, які визначають відносно прості алгебри, номінативний рівень багатше, і може бути декомпонований в кілька підрівнів:

1) Реномінативний рівень. В алгебрі предикатів реномінативного рівня додатково розглядають унарну параметричну композицію реномінації: $R_i^v: Pr^i \rightarrow Pr^i$ (де $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$), що визначена наступною формулою ($d \in I^1A$):

$$R_{\vec{v}}^{\vec{x}}(P)(d) = P(\{v \mapsto a \in d \mid v \notin \{v_1, \dots, v_n\} \} \vee \{v_i \mapsto a_i \mid x_i \mapsto a_i, i \in \{1, \dots, n\}\}).$$

2) Кванторний рівень. В алгебрі предикатів кванторного рівня розглядають такі базові композиції I -квазіарних предикатів: успадковані з реномінативного рівня логічні зв'язки $\neg, \vee, \wedge$ та додатково композицію квантифікації $\exists x$. Остання композиція з параметром $x \in I$ визначається формулою:

$$(\exists x)P(x) =$$

$$= \begin{cases} T, & \text{існує } b \in A: P(dN(x) \mapsto b) \downarrow = T, \\ F, & P(dN(x) \mapsto a) \downarrow = F \text{ для всіх } a \in A, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

3) Функціональний рівень. На цьому рівні додаються можливості для формування нових аргументів для функцій і предикатів. В алгебрі предикатів функціонального рівня розглядають такі базові композиції k -кваріарних предикатів: успадковані з кванторного рівня логічні зв'язки $\neg, \vee, R_x^v$, $\exists x$ та додаткові композиції суперпозиції $S^v: Pr^i \times (Fn^i)^n \rightarrow Pr^i$, де $\vec{v} = v_1, \dots, v_n$:

$$S^{v_1 \dots v_n}(P, g_1, \dots, g_n)(d) = \\ = P(dN[v_1 \mapsto g_1(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)]).$$

4) Функціонально-екваційний рівень. На цьому рівні є можливим встановлювати рівність та нерівність значень. Це можливо завдяки композиції рівності $=$.

5) Ієрархічно-номінативний рівень. На цьому рівні абстракції дані розглядаються як ієрархічні номінативні дані.

На кожному рівні абстракції можуть бути визначені різноманітні класи предикатів. Для номінативного рівня найважливішими класами є еквітонні та повнототальні еквітонні предикати [4]. Еквітонні предикати зберігають свої значення при розширенні даних; повнототальні еквітонні предикати додатково мають бути визначеними при максимальному розширенні даних.

Структури множин нерухомих точок

Розглянемо клас Pr та його властивості. Відношення на множині предикатів задаються через поняття графіку предиката [4, 11, 12].

Визначення 2. Частково-впорядковану підмножину A множини S називають:

1) наведеною підмножиною, якщо для будь-яких двох елементів $a, b \in A$ знайдеться елемент $c \in A$ такий, що $a \leq c$ та $b \leq c$;

2) сумісною вгору підмножиною, якщо для будь-яких двох елементів $a, b \in A$ знайдеться елемент $c \in S$ такий, що $a \leq c$ та $b \leq c$. Будь-яка наведена підмножина є сумісною вгору;

3) сумісною вниз підмножиною, якщо для будь-яких двох елементів $a, b \in A$ знайдеться елемент $c \in S$ такий, що $c \leq a$ та $c \leq b$.

Визначення 3. Частково-впорядкована множина D з частковим порядком $\leq$ –

1) $\Delta\Delta$ -область (сумісно-повна уверх, сумісно-повна верхня напіврешітка), якщо для довільної непорожньої сумісної вгору підмножини $D' \subseteq D$ існує точна верхня границя;

2) Δ -область (повна уверх, повна верхня напіврешітка), якщо для довільної непорожньої підмножини $D' \subseteq D$ існує точна верхня границя;

3) $\forall V$ -область та V -область задаються дуальним способом;

4) $\Delta\Delta/\forall V$ -область (сумісно-повна решітка), якщо множина D є сумісно-повною уверх та униз напіврешіткою;

5) $\Delta/\forall V$ -область (повна частково-впорядкована множина (ПЧВМ)), якщо множина D є сумісно-повною уверх напіврешіткою та повною униз напіврешіткою;

6) $\Delta/\forall V$ -область, якщо множина D є повною уверх напіврешіткою та сумісно-повною униз напіврешіткою;

7) Δ/V -область (повна решітка), якщо для довільної непорожньої підмножини $D' \subseteq D$ існують точні верхня і нижня границі.

Зауваження. Найчастіше $\Delta\Delta/V$ -область називають повною частково-впорядкованою множиною (СРО), $\Delta\Delta$ -область – pre-CPO, а Δ/V -область – повною решіткою. Ми вводимо вказані вище позначення для узагальнення результатів досліджень на дуальний до ПЧВМ випадок.

Для спрощення опису за допомогою скорочення δ -областю будемо описувати один з видів областей, що представлені в визначенні 3. Тобто δ приймає значення з множини $\{\Delta\Delta, \Delta, \forall V, V, \Delta\Delta/\forall V, \Delta\Delta/V, \Delta/\forall V, \Delta/V\}$.

Лема 1. Клас часткових предикатів та клас еквітонних предикатів $Pr \in \Delta\Delta/V$ -областю (ПЧВМ). Клас повнототальних еквітонних предикатів $\in \Delta\Delta/\forall V$ -областю.

Тобто, класи предикатів, що використовуються в КНЛ, представляють області різних типів.

Теорема 1. Композиції $\neg, \vee, \exists x, S^v, R_x^v$ та $=$ монотонні.

Описи структур множин нерухомих точок в цій статті базуються на теоремі Тарського про нерухому точку [13].

Нехай $\varphi: D \rightarrow D$, де D – частково-впорядкована множина.

Визначення 4. Множинами перед-нерухомих точок назвемо:

1) $H = \{x \in D \mid x \leq \varphi(x)\}$ – верхня множина перед-нерухомих точок (pre^- -fixpoint);

2) $L = \{x \in D \mid \varphi(x) \leq x\}$ – нижня множина перед-нерухомих точок (pre^- -fixpoint).

Теорема Тарського гарантує існування і описує структуру області нерухомих точок монотонного відображення на повній решітці [13]. Результати Теорема Тарського можна узагальнити для повних частково-впорядкованих множин та для $\Delta\Delta/\nabla\nabla$ -області. Доведення теорем і лем, описаних нижче, представлені в [12]. Для їх доведення використовуються спеціальні формулювання леми Цорна, що наведене в [5].

Лема 2. Якщо $(D, \leq)$ – $\Delta\Delta$ -область ($\nabla\nabla$ -область), то в D існує максимальний (мінімальний) елемент.

Лема 3. Нехай $(D, \leq)$ – Δ -область (∇ -область), така, що її множина H (L) непорожня, та $\varphi: D \rightarrow D$ – монотонне відображення. Тоді в D є найбільша (найменша) нерухома точка.

Теорема 2. Якщо $\delta \in \{\Delta\Delta/\nabla\nabla, \Delta\Delta/\nabla, \Delta/\nabla\nabla, \Delta/\nabla\}$, то для монотонної функції $\varphi: D \rightarrow D$ на δ -області $(D, \leq)$ множина її нерухомих точок, якщо вона непорожня, є δ -областю.

Зауваження. При $\delta = \Delta/\nabla$ маємо теорему Тарського. Ця теорема може бути розглянута як узагальнення теорема Тарського про нерухома точку. Вона описує структуру множин нерухомих точок для класів предикатів, що використовуються в КНЛ, але не визначає, як побудувати такі нерухома точки.

Неперервні оператори та їх нерухома точка

Визначення 3. Відображення $\varphi: D \rightarrow D$, задане на частково-впорядкованій множині $(D, \leq)$, – неперервне, якщо для будь-якої сумісної вгору множини $\{d_i\}_{i \in I}$ з D виконується рівність:

$$\bigcup_{i \in I} \varphi(d_i) = \varphi\left(\bigcup_{i \in I} d_i\right).$$

Теорема Кнастера-Тарського пропонує конструктивний підхід для знаходження найменшої нерухомаї точки неперервних операторів на повній частково-впорядкованій множині. Він полягає в тому, що для неперервного оператора $\varphi: D \rightarrow D$, визначеного на ПЧВМ, найменша нерухома точка знаходиться

за формулою $\bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi^{(i)}(\perp)$, де $\perp$ – найменший елемент в D .

Теорема 3. Композиції $\vee$, $\neg$, S^T , та $\equiv$ неперервні, а $\exists x$ – не є неперервною.

Визначення 6. Два предикати P та Q T -рівні (рівні в області істинності), якщо вони приймають значення T на одних і тих самих даних:

$$P =_T Q \Leftrightarrow (\text{для всіх } d \in D \\ P(d) \downarrow = T \Leftrightarrow Q(d) \downarrow = T)$$

Відношення T -рівності є відношенням еквівалентності.

Визначення 7. Предикат P T -менший або рівний предикату Q , якщо:

$$P \leq_T Q \Leftrightarrow (P \leq Q \text{ та } P =_T Q).$$

Відношення $\leq_T$ є відношенням часткового порядку.

Визначення 8. Відображення $\varphi: Pr \rightarrow Pr$, задане на частково-впорядкованій множині $(Pr, \leq)$, – T -неперервне (неперервне в області істинності), якщо для будь-якої сумісної вгору множини предикатів $\{P_i\}_{i \in I}$ з Pr виконується нерівність:

$$\bigcup_{i \in I} \varphi(P_i) \leq_T \varphi\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right).$$

Визначення 9. Предикат $P \in Pr$ є T -нерухомою точкою відображення $\varphi: Pr \rightarrow Pr$, якщо $P \leq_T \varphi(P)$.

Теорема 4. Нехай, $\varphi: Pr \rightarrow Pr$ – T -неперервне відображення. Тоді існує T -нерухома точка відображення φ , область істинності якої є найменшою серед областей істинності всіх T -нерухомих точок. Ця точка позначається $T\text{-lfp } \varphi$ та задається наступною формулою:

$$T\text{-lfp } \varphi = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi^{(i)}(\perp_{Pr}).$$

де $\varphi^{(0)}(\perp_{Pr}) = \perp_{Pr}$,

$$\varphi^{(i+1)}(\perp_{Pr}) = \varphi(\varphi^{(i)}(\perp_{Pr})), \dots$$

$$\varphi^{(i+1)}(\perp_{Pr}) = \varphi(\varphi^{(i-1)}(\perp_{Pr})), i < n.$$

Приклад.

Розглянемо наступну рекурсивну T -екзистенційну формулу, що ілюструє теоретичні результати, викладені вище. Знайдемо найменшу

нерухому точку та T -нерухому точку з найменшою областю істинності.

$$\begin{aligned} P(x, y) = & x \geq y \wedge (x \neq y \rightarrow P(x-1, y)) \vee \\ & \vee (\exists a \exists b (a \geq b \wedge \neg P(a, b))) \vee \\ & \vee x \geq y \vee x+1 \neq y \wedge P(x, y-1)) \wedge \perp, \end{aligned} \quad (1)$$

де $x, y \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Побудуємо послідовність:

$$P^{(i)}(x, y) = P(P^{(i-1)}(x, y)), \text{ де } P^{(0)} = \perp.$$

Графік предиката P позначатимемо $gr(P)$.

Знайдемо $P^{(n)}$, що дорівнює супремуму цієї послідовності:

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P^{(i)}, \\ gr(P^{(n)}) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} gr(P^{(i)}). \end{aligned}$$

Для спрощення пояснень введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x \geq y \wedge (x \neq y \rightarrow P(x-1, y)); \\ B &= \exists a \exists b (a \geq b \wedge \neg P(a, b)); \\ C(x, y) &= x \geq y \vee x+1 \neq y \wedge P(x, y-1). \end{aligned}$$

$$1) P^{(0)} = \perp.$$

$$gr(P^{(0)}) = \{\};$$

$$2) gr(P^{(1)}) = \{(k, k, T) \mid k \geq 0\}, \text{ тому що:}$$

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x \geq y \wedge (x \neq y \rightarrow \perp) = \\ &= \begin{cases} T, & \text{при } x = y; \\ F, & \text{при } x < y; \\ \perp, & \text{інакше;} \end{cases} \\ B &= \perp; \\ (B \vee C(x, y)) \wedge \perp &= \perp. \end{aligned}$$

$$3) gr(P^{(2)}) =$$

$$= \{(k, k, T) \mid k \geq 0\} \cup \{(k+1, k, T) \mid k \geq 0\}, \text{ тому що:}$$

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x \geq y \wedge (x \neq y \rightarrow P^{(1)}(x-1, y)) = \\ &= \begin{cases} T, & \text{при } x = y \text{ або } x = y+1; \\ F, & \text{при } x < y; \\ \perp, & \text{інакше;} \end{cases} \\ B &= \perp; \\ (B \vee C(x, y)) \wedge \perp &= \perp. \end{aligned}$$

$$4) gr(P^{(i)}) = \{(k, k, T) \mid k \geq 0\} \cup \dots \cup \{(k+i-1, k, T) \mid k \geq 0\}.$$

Множина визначеності предиката P з кожним кроком нарощується завдяки збагаченню множини визначення його складової частини предиката A . Друга складова – предикат $(B \vee C) \wedge \perp$ залишається незмінним, його результат невизначений.

5) За допомогою теореми 4 знайдемо T -нерухому точку предиката P :

$$P^{(n)}(x, y) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P^{(i)}(x, y) = \begin{cases} T, & x \geq y; \\ \perp, & x < y. \end{cases}$$

Розглянемо наступний предикат послідовності:

$$6) P^{(n+1)}(x, y) = \begin{cases} T, & x \geq y; \\ F, & x+1 = y; \\ \perp, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Область істинності перестала збагачуватися, але почала нарощуватися область хибності. Це відбулося завдяки тому, що предикат B набув значення F та:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x \geq y \wedge (x \neq y \rightarrow P^{(n)}(x-1, y)) = \\ &= \begin{cases} T, & \text{при } x \geq y; \\ F, & \text{при } x < y; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x, y) &= x \geq y \vee x+1 \neq y \wedge P^{(n)}(x, y-1) = \\ &= \begin{cases} T, & x \geq y; \\ F, & x+1 = y; \\ \perp, & \text{інакше.} \end{cases} \end{aligned}$$

7) Наступні обчислення продемонструють, що:

$$P^{(n+1)}(x, y) = \begin{cases} T, & x \geq y; \\ F, & \exists k \in [1, i] (x+k = y); \\ \perp, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тому що:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x \geq y \wedge (x \neq y \rightarrow P^{(n+1)}(x-1, y)) = \\ &= \begin{cases} T, & \text{при } x \geq y; \\ F, & \text{при } x < y; \end{cases} \end{aligned}$$

$$B = F;$$

$$\begin{aligned} C(x, y) &= x \geq y \vee x+1 \neq y \wedge P^{(n+1)}(x, y-1) = \\ &= \begin{cases} T, & x \geq y; \\ F, & \exists k \in [1, i] (x+k = y); \\ \perp, & \text{інакше.} \end{cases} \end{aligned}$$

8) Тоді:

$$\prod_{i \in \omega + \omega} P^{(i)}(x, y) = P^{(\omega + \omega)}(x, y) = \begin{cases} T, & x \geq y; \\ F, & x < y. \end{cases}$$

Розглянутий приклад ілюструє сформульовані результати теореми щодо нерухомих точок. А саме:

– формула (1) є P -екзистенційною формулою;

– оператор, що задається формулою (1), є T -неперервним відображенням;

– T -нерухома точка з найменшою областю істинності досягається на першому граничному ординалі;

– ця точка не є нерухомою точкою, бо апроксимації $\omega+1$, $\omega+2$, ... збагачують область хибності, не змінюючи область істинності;

– "справжня" найменша нерухома точка (вона і максимальна), досягається

апроксимаційним ланцюгом з другим граничним ординалом $\omega+\omega$. Предикат, що визначається так, є всюди визначеним предикатом.

Висновки

В роботі розглянуто застосування операторів побудови нерухокої точки для композиційно-номінативних логік різних рівнів абстракції. Наводяться відповідні теореми щодо подання класів предикатів як ПЧВМ, неперервності та монотонності основних композицій предикатів, існування нерухомих та T -нерухомих точок, замкненості класів предикатів відносно операторів нерухокої точки та властивостей таких операторів. Отримані результати можуть бути застосовані в мовах специфікацій програм.

Список використаних джерел

1. Clarke E. M., Grumberg O., Peled D. Model Checking. – MIT Press, 1999. – 314 p.
2. Schneider K. Verification of Reactive Systems. Formal Methods and Algorithms. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. – 600 p.
3. Davey B. A., Priestley H. A. Introduction to Lattices and Order. Second edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 248 p.
4. Нікітченко М. С., Шкільняк С. С. Основи математичної логіки. – К.: Київський ун-т, 2006. – 246 с.
5. Верещакін Н. К., Шень А. Начала теории множеств. 2-е изд, исправ. – М.: МЦНМО, 2002. – 129 с.
6. Pfeifer H., Dold A., von Henke F. W., Rueb H. Mechanized Semantics of Simple Imperative Programming Constructs. – Technical Report UIB 96-11, Universität Ulm, Fakultät für Informatik, Dec. 1996.
7. Dawar A., Gurevich Y. Fixed point logics // The Bulletin of Symbolic Logic. – 2002. – V. 8, № 1. – P. 65-88.
8. Abiteboul S., Vardi M. Y., Vianu V. Fixpoint Logics, Relational Machines, and Computational Complexity // Proceedings of the 7th IEEE

symposium on structure in complexity theory. – 1992. – P. 30-56.

9. Gradel E., Kreutzer S. Will Deflation Lead to Depletion? On Non-Monotone Fixed Point Inductions // Proceedings of the 18th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS), 2003. – P. 158-167.

10. Нікітченко Н. С. Композиции программ, индуцирующих монотонные функции специального вида // Программирование. – 1987. – № 1. – С. 3-17.

11. Нікітченко М. С., Шкільняк С. С. Композиційно-номінативні логіки еквівентних предикатів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2000. – Вип. 2. – С. 300-314.

12. Нікітченко М. С., Шкільняк С. С., Антонова І. А. Композиційно-номінативні логіки з операторами нерухокої точки // Праці шостої міжнародної науково-практичної конференції по програмуванню УкрПРОГ'2008 (доповідь). – К., 2008. – С. 64-74.

13. Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its application // Pacific J. of Math. – 1955. – V. 5, № 2. – P. 285-309.

Надійшла до редколегії 15.05.12

Бичков О.С., к.ф.-м.наук, доцент

Стійкість імпульсних нечітких гібридних автоматів

В статті розглядаються питання стійкості нового класу неперервно-дискретних систем - лінійних нечітких гібридних автоматів. Отримані достатні умови стійкості, доведено теореми про стійкість та стійкість за частинною змінною. Розглядаються випадки циклічних та довільних перемикань. Дослідження проводяться за допомогою метода функцій Ляпунова.

Ключові слова: метод Ляпунова, стійкість, гібридні автомати, L-стійкість.

*E-mail: bos.klu@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусайнов Денис Ях'євич

Вступ

В запропонованій роботі метод функцій Ляпунова поширюється на нечіткі гібридні автомати з циклічним та довільним перемиканням станів. Стійкість чітких гібридних автоматів визначалась багатьма авторами [1-3]. Для дослідження стійкості пропонується перевіряти умову зменшення функцій Ляпунова на розв'язках автомату. В [4,5] запропоновано підхід, що не вимагає пошуку розв'язків гібридного автомату. Цей підхід розвинуто для дослідження стійкості нечітких імпульсних гібридних автоматів. Нечіткість розглядається у сенсі робіт [6,7].

Основні означення і попередні результати
Введемо такі позначення.

$\| \cdot \|$ - евклідова норма в просторі $\mathbb{R}^d$ (позначення однакоове для всіх d);

$\nabla_f V(y_0) = V'(y_0)f(y_0)$, якщо $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ і $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ або $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$.

Означення 1. Нечітким гібридним автоматом з нечітким перемиканням (НГАНП) називається кортеж

$HA = (Q, Y, PS, g, w, h, Inv, Init, Jump)$, в якому

- Q --- скінченна множина дискретних станів;
- $Y = \mathbb{R}^d$ - множина неперервних станів;
- $PS = (X, 2^X, P)$ - простір можливостей з нормованою мірою можливості;
- $w: \mathbb{R}^+ \times X_s \rightarrow \mathbb{R}^l$ - процес нечіткого блукання на просторі PS ;

**Bychkov A.S., PhD in Math
Stability of impulse fuzzy linear hybrid automata**

The article deals with the stability of a new class of continuous-discrete systems - fuzzy linear hybrid automata. Sufficient conditions of stability are obtained. Stability and stability resistance on the part of variables are proved. The cases of cyclic and random switching are described. Research conducted by the method of Lyapunov's functions.

Key Words: Lyapunov's method, stability, hybrid automata, L-stability

$$g: Q \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad h: Q \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$$

- частково визначені функції, за допомогою яких задається неперервна поведінка автомату під час перебування в дискретному стані; будемо позначати $g_q = y \mapsto g(q, y)$ і $h_q = y \mapsto h(q, y)$;

- $Inv: Q \rightarrow Y \setminus \{\emptyset\}$ - функція, яка задає множину незмінності дискретного стану;

- $Init \subseteq Q \times Y$ - множина початкових станів;

- $Jump: Q \times Y \times X \rightarrow 2^{Q \times Y}$ - відображення, яке задає умову переходу між дискретними станами;

і виконується умова $Inv(q) \subseteq Dom g_q \cap Dom h_q$ для всіх $q \in Q$.

Означення 2. Фазовою орбітою, яка допускається НГАНП HA називається кортеж $\chi = (r, q, y, x)$, в якому $x \in X_s$, $r = (t_i)_{i=0}^N \in HT$, $q: (r) \rightarrow Q$ -

відображення і $y = (y')_{i \in (r)}$ - індексване сімейство неперервних відображень $y': I_i \rightarrow Y$,

таких, що:

- 1) $y'(t) \in Inv(q(i))$ для всіх $t \in [r_i, r_{i+1})$, якщо $i \in (r)$ і крім того, $y'(r'_i) \in Inv(q(i))$, якщо $i = N(r)$ і $r'_i \in U(r)$;

$$2) (q(i+1), y^{i+1}(\tau_{i+1})) \in \text{Jump}(q(i), y'(\tau'_i), x)$$

для всіх $i \in (\tau) \setminus \{N(\tau)\}$;

3) функція y' локально абсолютно неперервна на I_i і задовольняє рівняння $y'(t) = g(q(i), y'(t)) + h(q(i), y'(t))w(t, x)$ для майже всіх $t \in I_i$;

4) $(q(0), y^0(0)) \in \text{Init}$. Зауважимо, що в пункті 3, функції $t' \mapsto g_{q(i)}(y'(t'))$ і $t' \mapsto h_{q(i)}(y'(t'))$ є визначеними на $I_i \setminus \{\tau'_i\}$, оскільки $y'(t) \in \text{Inv}(q(i))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau'_i]$ за пунктом 1.

Розглянемо фіксований НГАНП $HA = (Q, Y, PS, g, w, h, \text{Inv}, \text{Init}, \text{Jump})$.

Позначимо $\text{Orb}(HA)$ - множина фазових орбіт автомату HA , φ_w - функція розподілу процесу нечіткого блукання w .

Означення 3. Стационарним станом HA називається точка $y_* \in Y$, така, що:

1) $\text{Jump}(q, y_*, x) \subseteq Q \times \{y_*\}$ для всіх $q \in Q$ і $x \in X_*$;

2) для кожного $\chi = (\tau, q, y, x) \in \text{Orb}$, такого, що $y^0(\tau_0) = y_*$, усі відображення $y', i \in (\tau)$ є константними і приймають значення y_* . Позначимо $\text{St}(HA)$ - множина стаціонарних станів HA .

Означення 4. Стационарний стан $y_* \in \text{St}(HA)$ називається стійким з рівнем α , де $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ - функція, визначена в околі нуля, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх фазових орбіт $\chi = (\tau, q, y, x) \in \text{Orb}(HA)$, де $y = (y')_{(\tau, \tau)}$ і $\tau = (t_i)_{i \in (\tau)}$, таких, що $|y^0(\tau_0) - y_*| < \delta$ і $P\{x\} > \alpha(\varepsilon)$, виконується умова $|y'(t) - y_*| < \varepsilon$ для всіх $i \in (\tau)$ і $t \in I_i$.

Будемо позначати $\text{St}(HA)$ - множина стаціонарних станів HA .

Позначимо $DF(\mathbb{R}^d)$ - клас усіх частково визначених неперервних функцій $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^*$, які є неперервно диференційовними на внутрішності своєї області визначення.

Для кожної частково визначеної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ позначимо $\text{InfInv}(f)$ частково визначену функцію $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задана умовами

- $g(y) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$, якщо $y \in \mathbb{R}$ і множина $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$ непорожня і обмежена зверху;

- $g(y)$ не визначено в іншому випадку.

Визначимо $HLo(HA, y_*)$ як множину кортежів $(\alpha, (V_q)_{q \in Q}, (v_q)_{q \in Q})$, в яких

- $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ - функція, визначена в околі нуля,

- $(V_q)_{q \in Q}$ - індексоване сімейство функцій класу $DF(\mathbb{R}^d)$,

- $(v_q)_{q \in Q}$ - індексоване сімейство визначених функцій $v_q: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, визначених в околі нуля (включаючи нуль), і виконуються умови, в яких $\psi = \text{InfInv}(\alpha)$:

Lo1) $\{y_*\} \cup O_q \subseteq \text{Dom} V_q$ для всіх $q \in Q$, де O_q - деяка відкрита над множина $\text{Inv}(q)$, і якщо $(q_1, y_1) \in \text{Jump}(q_1, y_1, x)$ для деяких $q_1, q_2 \in Q$, $y_1, y_2 \in Y$ і $x \in X_*$, то $y_1 \in \text{Dom} V_{q_1}$ і $y_2 \in \text{Dom} V_{q_2}$;

Lo2) $v_q(0) = 0$ і $v_q(w) > 0$ для всіх $w \in \text{Dom} v_q \setminus \{0\}$;

Lo3) $V_q(y_*) = 0$ для всіх $q \in Q$;

Lo4) якщо $V_q(y) \leq v_q(w)$ для деяких $y \in \text{Dom} V_q$ і $w \in \text{Dom} v_q$, то $|y_* - y| \leq w$;

Lo5) для всіх елементів $q \in Q$, $x \in X$, $y \in \text{Inv}(q)$, таких, що $P\{x\} \in \text{Dom} \psi$ і $V_q(y_1) > v_q(\psi(P\{x\}))$, визначено виконуватись нерівність

$$\nabla_{x_q} V_q(y) \leq -\frac{1}{\kappa_*} \sqrt{\varphi_*^{-1}(P\{x\})} \nabla_{x_q} V_q(y).$$

Введемо такі позначення

$q_1, q_2 \in Q, u \in (0, 1]$:

$$J(q_1, q_2, u) = \{(y_1, y_2) \mid \exists x \in X : P\{x\} > u \wedge (q_1, q_2) \in \text{Jump}(q_1, y_1, x)\}$$

$$E = \{(q_1, q_2) \in Q \times Q \mid \exists x \in X : P\{x\} > 0 \wedge \exists (y_1, y_2) \exists (q_2, y_2) \in \text{Jump}(q_1, y_1, x)\}$$

Теорема 1. (про стійкість стаціонарних станів циклічних НГАНП) Нехай HA - НГАНП з циклічним перемиканням дискретних станів $q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow \dots \rightarrow q_n \rightarrow q_1$. Нехай для

стаціонарного стану $u, v \in St(HA)$ існує коротке

$$HL = (\alpha, (V_q)_{q \in Q}, (v_q)_{q \in Q}) \in HLo(HA, u, v).$$

Припустимо, що виконуються умови:

- 1) для кожної дуги $(q_1, q_2) \in E$ існує число $\delta_{q_1 q_2} > 0$ і відображення $\mathcal{G}_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ таке, що $\mathcal{G}_{q_1 q_2}(0+) = \mathcal{G}_{q_1 q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ виконуються нерівності

$$-V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u)), \text{ якщо } V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u)),$$

$$-V_{q_2}(y_2) \leq \mathcal{G}_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1)), \text{ якщо}$$

$$V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}] \text{ і } V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u));$$

- 2) $\lambda(q_1 q_2, q_{n-1} q_n, q_1) \leq_{SD} \lambda(q_1)$, тобто має місце s' -умова.

Тоді стаціонарний стан u автомату HA стійкий з рівнем α .

Імпульсні нечіткі гібридні автомати

Доведемо теорему про стійкість стаціонарних станів імпульсних циклічних НГАНП.

Теорема 2. Нехай автомат HA імпульсний, $(V_q)_{q \in Q}$ - сімейство функцій класу $DF_0^*(\mathbb{R}^d, u)$,

таких, що $O_q \subseteq Dom V_q$ для кожного $q \in Q$, де

O_q - деяка відкрита надмножина $Inv(q)$, і для

всіх $q_1, q_2 \in Q$, $y_1, y_2 \in Y$, $x \in X$, таких, що

$(q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)$, виконуються

$y_1 \in Dom V_{q_1}$ і $y_2 \in Dom V_{q_2}$. Нехай $(v_q)_{q \in Q}$ -

сімейство відображень $v_q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, таких, що

$v_q(0) = 0$ і $0 < v_q(w) < V_q(y)$ для всіх $w > 0$ і

$y \in Dom V_q$ таких, що $|y - y'| > w$.

Припустимо, що для всіх $q \in Q$, $x \in X$ і

$y \in Inv(q)$ таких, що $P\{x\} \in Dom \psi$ і

$V_q(y) > v_q(\psi(P\{x\}))$ виконується нерівність

$$\nabla_{q_q} V_q(y) \leq -\frac{1}{\kappa_q} \sqrt{\varphi_q^{-1}(P\{x\})} \|\nabla_{q_q} V_q(y)\|.$$

Також нехай, що для кожної дуги

$(q_1, q_2) \in E$ існує число $\delta_{q_1 q_2} > 0$ і

відображення $\mathcal{G}_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ таке, що

$\mathcal{G}_{q_1 q_2}(0+) = \mathcal{G}_{q_1 q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів

$u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ виконуються нерівності

$$a) V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u)), \text{ якщо } V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u)),$$

$$b) V_{q_2}(y_2) \leq \mathcal{G}_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1)), \text{ якщо}$$

$$V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}] \text{ і } V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u)).$$

Припустимо також, що значення

$d_i(u, v) \in \mathbb{R}^+, i = \overline{1, n}$ визначені для всіх

$(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$ і нерівність

$$d_n(u, v) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\} \text{ виконується для}$$

всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$, де

$$d_1(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_2}(y_2) | (y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u) \wedge \\ \wedge V_{q_1}(y_1) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\} \end{array} \right\};$$

$$d_2(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_3}(y_3) | (y_2, y_3) \in J(q_2, q_3, u) \wedge \\ \wedge V_{q_2}(y_2) \leq \max\{v_{q_2}(\psi(u)), d_1(u, v)\} \end{array} \right\};$$

$$d_3(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_4}(y_4) | (y_3, y_4) \in J(q_3, q_4, u) \wedge \\ \wedge V_{q_3}(y_3) \leq \max\{v_{q_3}(\psi(u)), d_2(u, v)\} \end{array} \right\};$$

...

$$d_n(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_1}(y_1) | (y_n, y_1) \in J(q_n, q_1, u) \wedge \\ V_{q_n}(y_n) \leq \max\{v_{q_n}(\psi(u)), d_{n-1}(u, v)\} \end{array} \right\}.$$

Тоді стаціонарний стан u імпульсного циклічного НГАНП HA стійкий з рівнем α .

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми (1). Доведемо, що

$(\alpha, (V_q)_{q \in Q}, (v_q)_{q \in Q}) \in HLo(HA, u)$. З умови

теореми випливає, що умови Lo1, Lo3, Lo5

виконуються. Умова Lo2 виконується, оскільки

$v_q(w) > 0$ при $w > 0$ і $v_q(0) = 0$. Умова Lo4

виконується, бо за умовою теореми, якщо

$|y - y'| > w$, то $V_q(y) > v_q(w)$.

З умови теореми випливає виконання умови 1 теореми (1).

Перевіримо виконання умови 2 теореми (1).

Оскільки значення $d_i(u, v) \in \mathbb{R}^+, i = \overline{1, n}$

визначені для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$, то для

всіх дуг (q_1, q_2) , маємо

$$(c(q_1) \cdot c(q_2))(u, v) = \sup s((q_1, q_2), u, c(q_2)(u, v)) = d_i(u,$$

де s --- відображення з означення розмітки λ .

Тоді

$$d_s(u, v) = (c(q_1) \cdot c(q_1, q_2) \cdot c(q_2) \cdot c(q_2, q_3) \cdot \dots \cdot c(q_n) \cdot c(q_n, q_1))(u, v) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\}$$

для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$. Звідси

$$\max\{v_{q_1}(\psi(u)), d_s(u, v)\} \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\}, \text{ а}$$

отже $c(q_1)(u, d_s(u, v)) \leq c(q_1)(u, v)$ звідки длявсіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$ виконується

$$\lambda(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n, q_1)(u, v) \leq \lambda(q_1)(u, v).$$

Тоді за визначенням відношення $\leq_{SD}$ (для зафіксованого a $v_{\max}$ і множини D), виконується

$$\lambda(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n, q_1) \leq_{SD} \lambda(q_1).$$

Отже умови теореми (1) виконуються, тому стаціонарний стан u автомату HA стійкий з рівнем α .

Теорему доведено.

Нехай $d' \leq d$ - натуральне число, де d - розмірність простору неперервних станів HA . Нехай $L \in \mathbb{R}^{d \times d}$ - матриця рангу d' . Позначимо ρ_L - псевдометрика на $\mathbb{R}^d$, визначена рівністю $\rho_L(x, y) = (Lx - Ly)^T (Lx - Ly)$.

Означення 5. Стаціонарний стан u , є $St(HA)$ називається L -стійким з рівнем α , де $\alpha: (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ - функція, що визначена в околі нуля, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх фазових орбіт $\chi = (t, q, y, x) \in Orb(HA)$, де $y = (y')_{\alpha(t)}$ і $t = (t_i)_{\alpha(t)}$, таких, що $|y^0(t_0) - u| \leq \delta$ і $P\{x\} > \alpha(\varepsilon)$, виконується умова

$$\rho_L(y'(t), u) \leq \varepsilon \text{ для всіх } i \in (t) \text{ і } t \in I_\varepsilon.$$

Теорема 3. Нехай HA - НГАНП з циклічним перемиканням дискретних станів $q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow \dots \rightarrow q_n \rightarrow q_1$. Нехай для стаціонарного стану u , є $St(HA)$ існує кортеж

$$HL = (\alpha, (V_q)_{q \in Q}, (v_q)_{q \in Q}) \in HLo^1(HA, u).$$

Припустимо, що виконуються умови:

1) для кожного перемикання $q_1 \rightarrow q_2$ існує число

$$\delta_{q_1 q_2} > 0 \text{ і відображення } \mathcal{G}_{q_1 q_2}: [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

таке, що $\mathcal{G}_{q_1 q_2}(0+) = \mathcal{G}_{q_1 q_2}(0) = 0$ і для всіхелементів $u \in Dom \psi$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$

виконуються нерівності

$$V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u)), \text{ якщо } V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u)).$$

$$-V_{q_2}(y_2) \leq \mathcal{G}_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1)), \text{ якщо}$$

$$V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}] \text{ і } V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u));$$

2) $\lambda(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n, q_1) \leq_{SD} \lambda(q_1)$, тобто має місце s' -умова.Тоді стаціонарний стан u автомату HA L -стійкий з рівнем α .Представимо достатні умови L -стійкості з рівнем α нечіткого імпульсного гібридного автомату.Позначимо $HLo^1(HA, u)$ - множина кортежів $(\alpha, (V_q)_{q \in Q}, (v_q)_{q \in Q})$, в яких:- $\alpha: (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ - функція, що визначена в околі нуля;- $(V_q)_{q \in Q}$ - індексоване сімейство функцій класу $DF(\mathbb{R}^d)$;- $(v_q)_{q \in Q}$ - індексоване сімейство функцій $v_q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, визначених в околі нуля (включаючи нуль).

Нехай виконуються умови Lo1, Lo2, Lo3, Lo5 і крім того, така умова (замість Lo4):

Lo4') якщо $V_q(y) \leq v_q(w)$ для деяких $y \in Dom V_q$ і $w \in Dom v_q$, то $|Ly - Ly'| \leq w$.

Теорема 4. (про L -стійкість стаціонарних станів не імпульсних циклічних НГАНП) Нехай автомат HA не імпульсний, $(V_q)_{q \in Q}$ - сімейство функцій класу $DF_0^+(\mathbb{R}^d, u)$, таких, що

 $O_q \subseteq Dom V_q$ для кожного $q \in Q$, де O_q - деякавідкрита надмножина $Inv(q)$, і для всіх $q_1, q_2 \in Q$, $y_1, y_2 \in Y$, $x \in X$, таких, що $(q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)$, виконується

$$y_1 \in Dom V_{q_1} \text{ і } y_2 \in Dom V_{q_2}.$$

Нехай $(v_q)_{q \in Q}$ - сімейство відображень $v_q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, таких, що $v_q(0) = 0$ і $0 < v_q(w) < V_q(y)$ для всіх $w > 0$ і $y \in Dom V_q$.таких, що $|Ly - Ly'| > w$.Припустимо, що для всіх $q \in Q$, $x \in X$ і $y \in Inv(q)$, таких, що $P\{x\} \in Dom \psi$ і

$$V_q(y_1) > v_q(\psi(P\{x\})) \text{ виконується нерівність}$$

$$\nabla_{x_q} V_q(y) \leq -\frac{1}{\kappa_q} \cdot [\varphi_q^{-1}(P\{x\})] \nabla_{y_q} V_q(y).$$

Припустимо, що для кожної дуги $(q_1, q_2) \in E$, $u \in D$ і $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$, таких, що $V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u))$, виконується $V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u))$. Припустимо також, що значення $d_i(u, v) \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{1, n}$ визначені для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$ і нерівність $d_n(u, v) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\}$ виконується для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$, де

$$d_1(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_2}(y_2) | (y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u) \wedge \\ V_{q_1}(y_1) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\} \end{array} \right\};$$

$$d_2(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_3}(y_3) | (y_2, y_3) \in J(q_2, q_3, u) \wedge \\ \wedge V_{q_2}(y_2) \leq \max\{v_{q_2}(\psi(u)), d_1(u, v)\} \end{array} \right\}$$

$$d_3(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_4}(y_4) | (y_3, y_4) \in J(q_3, q_4, u) \wedge \\ \wedge V_{q_3}(y_3) \leq \max\{v_{q_3}(\psi(u)), d_2(u, v)\} \end{array} \right\}$$

$$d_n(u, v) = \sup \left\{ \begin{array}{l} V_{q_n}(y_n) | (y_{n-1}, y_n) \in J(q_{n-1}, q_n, u) \wedge \\ \wedge V_{q_{n-1}}(y_{n-1}) \leq \max\{v_{q_{n-1}}(\psi(u)), d_{n-1}(u, v)\} \end{array} \right\}$$

Тоді стаціонарний стан u , не імпульсного циклічного НГАНП HA є L -стійким з рівнем α .

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми (3). Доведемо, що $(\alpha, (V_q)_{q \in Q}, (v_q)_{q \in Q}) \in HLo^L(HA, u)$. З умови теореми випливає, що умови Lo1, Lo3, Lo5 виконуються. Умова Lo2 виконується, оскільки $v_q(w) > 0$ при $w > 0$ і $v_q(0) = 0$. Умова Lo4 виконується, бо за умовою теореми, якщо $|Ly_i - Ly_j| > w$, то $V_q(y_i) > v_q(y_j)$.

З умови теореми випливає виконання першої нерівності умови 1 теореми (3).

Перевіримо виконання другої нерівності умови 1 теореми (3). Покладемо $\delta_{q_1 q_2} = v_{q_1}(0) > 0$ і визначимо відображення $\delta_{q_1 q_2}: [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ рівністю

$$\delta_{q_1 q_2}(v) = \sup \{V_{q_2}(y) | y \in Dom V_{q_1} \cap Dom V_{q_2} \wedge V_{q_1}(y) \leq v\}.$$

Зауважимо, що це значення визначено, бо $u \in Dom V_{q_1} \cap Dom V_{q_2}$ і скінченне і функція

V_{q_2} локально обмежена, а множина $V_{q_1}(y) \leq v$ обмежена (для $v > 0$) в силу того, що V_{q_1} допускає радіально необмежене продовження. Оскільки $V_{q_1}(y) > 0$ при $y \neq u$, то $\delta_{q_1 q_2}(0) = 0$. Оскільки $\delta_{q_1 q_2}$ монотонна, то значення $\delta_{q_1 q_2}(0+)$ визначено. Перевіримо, що $\delta_{q_1 q_2}(0+) = 0$. Дійсно, $\inf_{\varepsilon > 0} \delta_{q_1 q_2}(v_{q_1}(\varepsilon)) = 0$, оскільки функція V_{q_1} неперервна на своїй області визначення і $V_{q_1}(y_i) = 0$. Але якщо $\delta_{q_1 q_2}(0+) \neq 0$, то $\delta_{q_1 q_2}(0+) > 0$ і тоді $\inf_{\varepsilon > 0} \delta_{q_1 q_2}(v_{q_1}(\varepsilon)) > 0$, бо $v_{q_1}(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$. Отже $\delta_{q_1 q_2}(0+) = 0$.

Якщо $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ для деякого $u \in D$ і $V_{q_1}(y_1) \leq \delta_{q_1 q_2}$, то $y_1 = y_2$, бо автомат не імпульсний, і $y_1 \in Dom V_{q_1} \cap Dom V_{q_2}$. Тому $V_{q_2}(y_2) \leq \delta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$ за визначенням $\delta_{q_1 q_2}$. Перевіримо виконання умови 2 теореми (3). Оскільки значення $d_i(u, v) \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{1, n}$ визначені для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$, то для всіх дуг (q_1, q_2) ,

$$(c(q_1) \cdot c(q_1, q_2))(u, v) = \sup s((q_1, q_2), u, c(q_1)(u, v)) = d_1(u, v),$$

де s - відображення з означення розмітки λ . Тоді

$$d_n(u, v) = (c(q_1) \cdot c(q_1, q_2) \cdot c(q_2) \cdot c(q_2, q_3) \cdot \dots \cdot c(q_{n-1}) \cdot c(q_{n-1}, q_n))(u, v) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\}$$

для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$. Звідси $\max\{v_{q_1}(\psi(u)), d_n(u, v)\} \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\}$, а отже

$$c(q_1)(u, d_n(u, v)) \leq c(q_1)(u, v)$$

звідки для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$ виконується

$$\lambda(q_1, q_2, q_{n-1}, q_n, q_1)(u, v) \leq \lambda(q_1)(u, v).$$

Тоді за визначенням відношення $\leq_{\mathcal{D}}$ (для зафіксованого а $v_{\max}$ і множини D), виконується

$$\lambda(q_1, q_2, q_{n-1}, q_n, q_1) \leq_{\mathcal{D}} \lambda(q_1).$$

Отже умови теореми (3) виконуються, тому стаціонарний стан u , автомату HA є L -стійким з рівнем α .

Теорему доведено.

Теорема 5. (про L -стійкість стаціонарних станів імпульсних циклічних НГАНП) Нехай автомат HA імпульсний, $(V_q)_{q \in Q}$ - сімейство функцій класу $DF_0^w(R^d, Y)$, таких, що $O_q \subseteq \text{Dom } V_q$ для кожного $q \in Q$, де O_q - деяка відкрита надмножина $\text{Inv}(q)$, і для всіх $q_1, q_2 \in Q$, $y_1, y_2 \in Y$, $x \in X$, таких, що $(q_2, y_2) \in \text{Jump}(q_1, y_1, x)$, виконується $y_1 \in \text{Dom } V_{q_1}$ і $y_2 \in \text{Dom } V_{q_2}$.

Нехай $(v_q)_{q \in Q}$ - сімейство відображень $v_q: R^+ \rightarrow R^+$, таких, що $v_q(0) = 0$ і $0 < v_q(w) < V_q(y)$ для всіх $w > 0$ і $y \in \text{Dom } V_q$, таких, що $[Ly, -Ly] > w$. Нехай також для всіх $q \in Q$, $x \in X$ і $y \in \text{Inv}(q)$, таких, що $P\{x\} \in \text{Dom } \psi$ і $V_q(y_1) > v_q(\psi(P\{x\}))$ виконується нерівність

$$\nabla_{y_q} V_q(y) \leq -\frac{1}{\kappa_q} \sqrt{\varphi_q^{-1}(P\{x\})} \left| \nabla_{y_q} V_q(y) \right|$$

Припустимо, що для кожної дуги $(q_1, q_2) \in E$ існує число $\delta_{q_1 q_2} > 0$ і відображення $\mathcal{G}_{q_1 q_2}: [0, \delta_{q_1 q_2}] \rightarrow R^+$ таке, що $\mathcal{G}_{q_1 q_2}(0+) = \mathcal{G}_{q_1 q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ виконуються нерівності $-V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u))$, якщо $V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u))$, $-V_{q_2}(y_2) \leq \mathcal{G}_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$, якщо $V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}]$ і $V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u))$.

Припустимо також, що значення $d_i(u, v) \in R^+$, $i = \overline{1, n}$ визначені для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$ і нерівність $d_n(u, v) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\}$ виконується для всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$, де

$$d_1(u, v) = \sup \left\{ V_{q_2}(y_2) \mid (y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u) \wedge \wedge V_{q_1}(y_1) \leq \max\{v_{q_1}(\psi(u)), v\} \right\}$$

$$d_2(u, v) = \sup \left\{ V_{q_3}(y_3) \mid (y_2, y_3) \in J(q_2, q_3, u) \wedge \wedge V_{q_2}(y_2) \leq \max\{v_{q_2}(\psi(u)), d_1(u, v)\} \right\}$$

$$d_3(u, v) = \sup \left\{ V_{q_4}(y_4) \mid (y_3, y_4) \in J(q_3, q_4, u) \wedge \wedge V_{q_3}(y_3) \leq \max\{v_{q_3}(\psi(u)), d_2(u, v)\} \right\}$$

.....

$$d_n(u, v) =$$

$$= \sup \left\{ V_{q_n}(y_n) \mid (y_{n-1}, y_n) \in J(q_{n-1}, q_n, u) \wedge \wedge V_{q_{n-1}}(y_{n-1}) \leq \max\{v_{q_{n-1}}(\psi(u)), d_{n-1}(u, v)\} \right\}$$

Тоді стаціонарний стан y , імпульсного циклічного НГАНП HA є L -стійким з рівнем α .

Доведення. Доводиться аналогічно.

Лінійні імпульсні гібридні автомати з нечітким довільним перемиканням

Нехай заданий імпульсний гібридний автомат HA з нечітким циклічним перемиканням $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$, з рівняннями $y(t) = A_i y(t)$, $i = \overline{1, 2, \dots, n}$ в локальних станах. Поверхня перемикання $i \rightarrow i \oplus 1$ для кожного індексу i й рівня можливості $u \in [0, 1]$ визначаються як $J(i, i \oplus 1, u) = \{(y_1, y_2) \in R^d \times R^d \mid -\xi_i(u) \leq \leq l_i^T y_1 \leq \xi_i(u), y_2 = R_i y_1\}$ де $i \oplus 1 = i+1$, якщо $i < n$ й $i \oplus 1 = 1$, якщо $i = n$, l_i - вектор нормалі гіперплощини перемикання, $\xi_i(u)$ - функція, що монотонно спадає, обмежена в околі нуля, така, що $\xi_i(1) = 0$, а $R_i \in R^{d \times d}$ - матриця. Таким чином, перемикання може відбуватися на деякій відстані від чіткої площини перемикання й у момент перемикання $i \rightarrow i \oplus 1$ автомат змінює поточний неперервний стан y на $R_i y$.

Будемо позначати $A > 0$ - додатно визначену симетричну матрицю, $A \geq 0$ - додатно напіввизначену симетричну матрицю.

Теорема 6. (про стійкість рівноваги лінійних циклічних ГА з нечітким перемиканням). Припустимо, що існують матриці H_i , $i = \overline{1, 2, \dots, n}$, такі, що $H_i > 0$ й $-A_i^T H_i - H_i A_i \geq 0$, $i = \overline{1, 2, \dots, n}$. Нехай для кожного $u \in D$ існує розв'язок системи зазначених нижче нерівностей (1) -(5) щодо скалярних параметрів $\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n, \{\rho_i\}_{i=1}^n, \kappa$, такий, що

$$\lambda_n (\dots \lambda_2 (\lambda_2 (\lambda_2 \kappa + \mu_1 \xi_1^2(u)) + \mu_2 \xi_2^2(u)) + \mu_3 \xi_3^2(u) \dots) + \mu_n \xi_n^2(u) \leq \kappa$$

- (1) $\psi^2(u)H_i - \kappa I \geq 0$
 (2) $\lambda_i H_i + \mu_i I_i^T - R_i^T H_{i\oplus 1} R_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$
 (3) $\rho_i I - \lambda_i \psi^2(u)H_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$
 (4) $\psi^2(u)H_{i\oplus 1} - \mu_i \xi_i^2(u)I - \rho_i I \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$
 (5) $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \rho_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Тоді нульова траєкторія автомата *НА* стійка з рівнем α .

Доведення. Скористаємося теоремою (2). Визначимо функції Ляпунова V_i для кожного локального стану автомата рівностями $V_i(y) = y^T H_i y, \quad i = 1, 2, \dots, n$, а функції v_i - рівностями $v_i(w) = \lambda_{\min}(H_i)w^2$ для всіх $w \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$, де $\lambda_{\min}(H_i)$ - найменше власне число матриці H_i . Легко перевірити, що функції V_i й v_i задовольняють вимогам теореми (2). Визначимо для кожного переходу $i \rightarrow i \oplus 1$ число $\delta_{i\oplus 1}$ й відображення $\mathcal{G}_{i\oplus 1}: [0, \delta_{i\oplus 1}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ рівностями $\delta_{i\oplus 1} = 1,$

$$\mathcal{G}_{i\oplus 1}(u) = \frac{\lambda_{\min}(R_i^T H_{i\oplus 1} R_i)}{\lambda_{\min}(H_i)} u.$$

$$\text{Тоді } \mathcal{G}_{i\oplus 1}(0) = \mathcal{G}_{i\oplus 1}(0+) = 0.$$

Зафіксуємо $u \in D$. Нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n, \{\rho_i\}_{i=1}^n, k$ розв'язок нерівностей (1)-(5) для даного u , такий, що

$$\lambda_n(\dots \lambda_2(\lambda_2(\lambda_2 \kappa + \mu_1 \xi_1^2(u)) + \mu_2 \xi_2^2(u)) + \dots + \mu_n \xi_n^2(u)) \leq k$$

Припустимо, що індекс $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ і значення $(y_1, y_2) \in J(i, i \oplus 1, u)$ - такі, що $V_i(y_1) \leq v_i(\psi(u))$. Позначимо $j = i \oplus 1$ й покажемо, що $V_j(y_2) \leq v_j(\psi(u))$. З нерівності (3) випливає, що для кожного $z \in \mathbb{R}^d$ виконується $\lambda_j \psi^2(u) z^T H_j z \leq \rho_j z^T z$. Звідси маємо

$$\lambda_j \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_j) \leq \rho_j.$$

Аналогічно з нерівності (4) випливає, що $(\rho_j + \mu_j \xi_j^2(u)) z^T z \leq \psi^2(u) z^T H_j z$ для всіх $z \in \mathbb{R}^d$, звідки $\rho_j + \mu_j \xi_j^2(u) \leq \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_j)$.

Таким чином

$$\lambda_j \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_j) + \mu_j \xi_j^2(u) \leq \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_j).$$

З нерівності (2) випливає, що $\lambda_j y_1^T H_j y_1 + \mu_j y_1^T I_i^T y_1 - y_1^T R_j^T H_{i\oplus 1} R_j y_1 \geq 0$. Звідси

$$\begin{aligned} V_j(y_2) &= y_2^T H_{i\oplus 1} y_2 = y_1^T R_j^T H_{i\oplus 1} R_j y_1 \leq \\ &\leq \lambda_j y_1^T H_j y_1 + \mu_j y_1^T I_i^T y_1 = \\ &= \lambda_j V_i(y_1) + \mu_j (I_i^T y_1)^2 \leq \\ &\leq \lambda_j v_i(\psi(u)) + \mu_j \xi_i^2(u) = \\ &= \lambda_j \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_i) + \mu_j \xi_i^2(u) \leq \\ &\leq \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_{i\oplus 1}) = v_j(\psi(u)). \end{aligned}$$

Таким чином, нерівність $V_j(y_2) \leq v_j(\psi(u))$ доведена.

Припустимо, що $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ й $(y_1, y_2) \in J(i, i \oplus 1, u)$ - такі, що $V_i(y_1) \in [0, \delta_{i\oplus 1}]$ й $V_i(y_1) > v_i(\psi(u))$.

Покажемо, що $V_{i\oplus 1}(y_2) \leq \delta_{i\oplus 1}(V_i(y_1))$. Дійсно,

$$\begin{aligned} V_{i\oplus 1}(y_2) &= y_2^T H_{i\oplus 1} y_2 = y_1^T R_i^T H_{i\oplus 1} R_i y_1 \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(R_i^T H_{i\oplus 1} R_i) y_1^T y_1 \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(R_i^T H_{i\oplus 1} R_i) \frac{y_1^T H_i y_1}{\lambda_{\min}(H_i)} = \delta_{i\oplus 1}(V_i(y_1)). \end{aligned}$$

Перевіримо умови теореми (2), що залишилися.

Для кожного $i = 1, 2, \dots, n$ й $v \geq 0$ визначимо:

$$\begin{aligned} d_i(u, v) &= \sup\{V_{i\oplus 1}(z_2) \mid (z_1, z_2) \in \\ &J(i, i \oplus 1, u), V_i(z_1) \leq \\ &\max\{v, (\psi(u)), d_{i-1}(u, v)\}\} = \\ &= \sup\{z_1^T R_i^T H_{i\oplus 1} R_i z_1 \mid -\xi_i(u) \leq I_i^T z_1 \leq \\ &\leq \xi_i(u), z_1^T H_i z_1 \leq \max\{v, (\psi(u)), d_{i-1}(u, v)\}\}, \end{aligned}$$

де покладемо $d_0(u, v) = v$. Помітимо, що значення $d_i(u, v)$ є визначеними й скінченними, оскільки множини по яких береться точна верхня грань не порожні (містять нуль-вектор) і обмежені.

Зафіксуємо v й доведемо, що $d_n(u, v) \leq \max\{v, (\psi(u)), v\}$.

Як було показано вище, якщо $(y_1, y_2) \in J(i, i \oplus 1, u)$ й $V_i(y_1) \leq v, (\psi(u))$, то $V_{i\oplus 1}(y_2) \leq v_{i\oplus 1}(\psi(u))$. Тому, якщо

$d_i(u, v) \leq v_{i+1}(\psi(u))$ для якогось $i = 0, 1, \dots, n-1$,

то нерівність $d_j(u, v) \leq \max\{v_{j+1}(\psi(u)), v\}$ виконується для всіх $j = i, i+1, \dots, n$ і таким чином, $d_n(u, v) \leq \max\{v, (\psi(u)), v\}$.

Тому розглянемо випадок, коли
 $d_i(u, v) \geq v_{i+1}(\psi(u))$ для всіх $i = 0, 1, \dots, n-1$.

З нерівності (2) випливає, що для всіх
 $i = 1, 2, \dots, n$ й z_1, z_2 , таких, що

$$(z_1, z_2) \in J(i, i \oplus 1, u), V_i(z_1) \leq$$

$$\leq \max\{v_i(\psi(u)), d_{i-1}(u, v)\},$$

виконуються нерівність

$$V_{i+1}(z_2) = z_1^T R_i H_{i+1} R_i z_1 \leq \lambda_i z_1^T H_i z_1 +$$

$$+ \mu_i z_1^T l_i l_i^T z_1 \leq \lambda_i z_1^T H_i z_1 + \mu_i \xi_i^2(u) \leq$$

$$\leq \lambda_i \max\{v_i(\psi(u)), d_{i-1}(u, v)\} + \mu_i \xi_i^2(u).$$

Таким чином,

$$d_i(u, v) \leq \lambda_i \max\{v_i(\psi(u)), d_{i-1}(u, v)\} + \mu_i \xi_i^2(u)$$

. Як було припущено вище, $d_{i-1}(u, v) \geq v_i(\psi(u))$,
 тому

$$d_i(u, v) \leq \lambda_i d_{i-1}(u, v) + \mu_i \xi_i^2(u)$$

для всіх $i = 1, 2, \dots, n$. У такий спосіб одержуємо
 нерівності:

$$d_1(u, v) \leq \lambda_1 v + \mu_1 \xi_1^2(u)$$

$$d_2(u, v) \leq \lambda_2 (\lambda_1 v + \mu_1 \xi_1^2(u)) + \mu_2 \xi_2^2(u)$$

.....

$$d_n(u, v) \leq \lambda_n (\dots \lambda_2 (\lambda_2 (\lambda_1 v + \mu_1 \xi_1^2(u)) +$$

$$+ \mu_2 \xi_2^2(u)) + \mu_3 \xi_3^2(u) \dots) + \mu_n \xi_n^2(u)$$

З нерівності (1) випливає, що
 $\psi^2(u) z^T H_1 z \geq \kappa z^T z$ для всіх z , тому
 $\psi^2(u) \lambda_{\min}(H_1) \geq \kappa$.

Оскільки

$$d_0(u, v) = v \geq v_1(\psi(u)) = \lambda_{\min}(H_1) \psi^2(u), \text{ тоді}$$

$v \geq \kappa$. Маємо, що $d_n(u, \kappa) \leq \kappa$. Через те, що

$t \rightarrow d_n(u, t)$ - афінна функція вигляду $at + b$,

$a, b \geq 0$, одержуємо, що $d_n(u, v) \leq v$.

Таким чином, з теореми (2) випливає, що
 нульова траєкторія HA стійка з рівнем α .

Теорема доведена.

Висновки.

В статті досліджуються властивості нечітких
 гібридних автоматів. Для моделювання
 нечіткості використовується підхід, що базується
 на теорії можливостей. Розглянуті питання про
 стійкість та стійкість за частиною змінних (L-
 стійкість) розв'язків нечітких гібридних
 автоматів з івклічною та довільною зміною
 локальних станів. Зміна станів відбувається при
 досягненні траєкторії певної множини. Доведено
 відповідні теореми.

Список використаних джерел

1. Branicky M. Stability of switched and hybrid systems, in Proc. 33-rd Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, Dec. 1994, p.3498-3503.
2. Daafouz J, Riedinger P. and Jung C. Stability Analysis and Control Synthesis for Switched Systems: A switched Lyapunov function approach //IEEE transactions on automatic control. 2002. V.47, N 11. P.1883-1887.
3. Lin H, Antsaklis P.J. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. V.54. N 2. P. 308-322.
4. Бичков О., Дослідження стійкості тривіальних фазових орбіт гібридних автоматів // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика.-2005.-№6. - с.4-8
5. Бичков О.С. Дослідження стійкості імпульсних гібридних автоматів // Математические машины и системы, 2007, №1. - С. 27-33.
6. Бичков О.С., Колесніков К.С. Побудова (PN)-моделі теорії можливостей // Вісник Київського університету, Сер.: фіз.-мат. науки, №1, 2007. - с. 134-138.
7. Бичков О.С. До теорії можливостей та її застосування // Доповіді НАН України, -№5, - 2007. - с.7-12

Надійшла до редколегії 20.01.12

УДК 519.63.001.57

Андрій Я. Бомба¹, д.т.н., проф.,
Анатолій П. Кузьменко², к.ф.-м.н., доц.,
Олена М. Гладка³
**Синтез числових методів конформних
відображень та сумарних зображень при
модельюванні ідеальних полів для
криволінійних областей**

На основі синтезу числових методів конформних відображень та сумарних зображень розроблено конструктивний підхід до моделювання ідеальних полів для криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, та обчислювальною технологію розв'язування відповідних крайових задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь.

Ключові слова: обернені задачі, конформні відображення, метод сумарних зображень, динамічна сітка, конформний інваріант.

Andriy Ya. Bomba¹, Doctor of Sciences (Technics),
Full Professor,
Anatoliy P. Kuzmenko², Ph.D. (Physics &
Mathematics), Associate Professor,
Olena M. Hladka³
**The Syntheses of the numeric methods
conformal mappings and summary
representations in modeling by ideal fields
for curvilinear domains**

The constructive approach to modeling by ideal fields for curvilinear domains bounded by lines of flow and equipotential lines was developed on the basis of syntheses of the numeric methods conformal mappings and summary representations. The computing technology for decision of the corresponding boundary value problems for elliptical systems of the differential equations was created.

Key words: inverse problems, conformal mappings, summary representations method, dynamic mesh, conformal invariant.

¹ E-mail: abomba@ukr.net ² E-mail: anatoliykp@gmail.com ³ E-mail: viklom@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф. Г.

Вступ. У наш час залишаються актуальними проблеми створення якісних обчислювальних технологій для розрахунків основних кількісних характеристик процесів руху, зокрема, рідин і газів у пористому пласті, заряджених частинок у провідній пластині тощо. Незважаючи на велику кількість розробок у цьому напрямку, існують певні класи задач, для яких використання відомих методів супроводжується значними обчислювальними труднощами. При цьому, мова йде про обчислювальну технологію як про сукупність числових методів і програмних реалізацій для розв'язування задач на комп'ютерних системах. Актуальність запропонованої нижче методики базується на поєднанні сучасних числових методів та ефективного розподілі використовуваних комп'ютерних ресурсів для забезпечення заданої точності розрахунків за умови мінімізації обчислювальних затрат.

В основу підходу покладено ідею синтезу методів сумарних зображень і методів конформних відображень. Чисельно-аналітичні методи сумарних зображень, що описані в роботах Г.М. Положія, І.І. Ляшка, А.А. Глуценка і їх учнів, мають низку переваг. При розв'язанні

задач з використанням методу сумарних зображень більшість невідомих, що входять у різницеву задачу, в рахунок участі не беруть, що забезпечує зменшення обсягу обчислювальної роботи. Зокрема, явний вигляд формул сумарних зображень дає змогу робити вибірковий рахунок, а також уникати накопичення обчислювальних похибок. Ці методи є стійкими і добре адаптованими до комп'ютерної реалізації.

Суттєвим обмеженням методу сумарних зображень є можливість використання його лише для деяких канонічних областей (прямокутників, смуг і напівсмуг, кругових областей тощо) та їх об'єднань. Це обмеження може бути зняте при дослідженні широкого класу модельних задач в областях з криволінійними ділянками границь (ліній течії та еквіпотенціалей) шляхом обернення конформних відображень.

У цій роботі розроблена методика викладена на прикладі, коли дослідження ідеального поля зведено до конформного відображення прямокутника з невідомою висотою (повною витратою) на криволінійну чотирикутну область, обмежену лініями течії та еквіпотенціальними лініями. При цьому, вузли динамічної сітки

розраховуються за формулами сумарних зображень.

Зауважимо, що ідеї синтезу методів конформних відображень і сумарних зображень для подібного класу задач зустрічалися і в інших роботах, зокрема в [1, 2]. Але запропонований там алгоритм містив розв'язання громіздких нелінійних систем, що створювало суттєві труднощі і ставило під сумнів його ефективність. У даній роботі відповідні проблеми вдалося подолати. Варто також зазначити, що в цій роботі формули сумарних зображень вперше застосовані як компонент розроблених в [1, 3] обчислювальних процедур, внаслідок чого отримані їх суттєві вдосконалення. Принципним є те, що при ітераційних наближеннях внутрішніх вузлів динамічної сітки в [1, 2] використовувалися лише навколишні вузли, в результаті чого, в процесі ітерацій (до певного кроку) шукані функції, хоча і ставали все більш "гармонічними", але не комплексно-спряженими. Використання методу сумарних зображень дає можливість в комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив усіх граничних вузлів, котрі в свою чергу "підправляються" (на наступному ітераційному кроці) за допомогою так званих умов ортогональності [3], які є наслідками умов Коші-Рімана і, отже, пришидує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Постановка задачі. Розглянемо задачу знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) у криволінійній чотирикутній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, за крайових умов $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\frac{d\varphi}{dn}|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DA} = 0$ (де

n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, φ_* , φ^* – сталі, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$). Введенням функції течії $\psi = \psi(x, y)$ (див., напр., [1, 3]), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, і заміною останніх двох умов на умови: $\psi|_{AD} = 0$, $\psi|_{BC} = Q$ (де Q – невідома повна витрата), переходимо до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на відповідну область

комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ (при відповідності кутових точок):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z; \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \varphi|_{CD} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q,$$

де $Q = \int_{AB} \frac{dx}{\alpha} + \frac{dy}{\beta}$ – невідома повна витрата.

Дану задачу (наслідуючи методологію, розроблену в [3]) замінімо на обернену до неї, оскільки, по-перше, область комплексного потенціалу G_ω є прямокутником, на відміну від геометрично складної фізичної області G_z , а по-друге, перехід до оберненого відображення автоматично вирішує проблему дискретизації задачі при застосуванні числових методів, дозволяє використати переваги методу сумарних зображень для розв'язання відповідних різницьових задач, будувати динамічну сітку руху речовини, визначити повну витрату Q тощо.

Під терміном "обернення" розумітимемо як перехід від конформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_ω до більш вигідного оберненого відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ так і те, що задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ ($G_\omega \rightarrow G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про розв'язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, крайові умови), адже при постановці крайової (фізичної) задачі в області G_ω невідомими є її параметри (наприклад, повна витрата) [1].

Відповідно до (1) обернену крайову задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (2)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, \\ f_2(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_3(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* \end{cases} \quad (3)$$

при невідомому значенні параметра Q .

Задачу (2)-(3) замінімо (відповідно до [1, 3])

на задачу розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x(\varphi, \psi) = 0$, $\Delta y(\varphi, \psi) = 0$ при крайових умовах (3) і умовах ортогональності ліній течії та сквіпотенціальних ліній на границі області:

$$\begin{cases} \text{grad } \psi(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) \times \\ \quad \times \text{grad } f_1(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \times \\ \quad \times \text{grad } f_2(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \\ \text{grad } \psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \times \\ \quad \times \text{grad } f_1(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \times \\ \quad \times \text{grad } f_4(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Різницевий аналог задачі (2)-(4) отримаємо аналогічно [2, 3]. В області G_ω визначимо рівномірну ортогональну сітку $G'_\omega = \{(\varphi, \psi_j)\}$:

$$\varphi_i = \varphi_* + h_\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = h_\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1};$$

$$h_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad h_\psi = \frac{Q}{n+1}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad \text{де } h_\varphi, h_\psi -$$

кроки відповідно по φ та ψ , $\gamma = \frac{h_\varphi}{h_\psi}$ -

конформний інваріант.

Різницеві аналоги рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ у сітковій області G'_ω запишемо за п'ятиточковою схемою:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \\ \quad + \gamma^2(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \\ \quad + \gamma^2(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$. Ці схеми мають другий порядок апроксимації, їх збіжність та стійкість повністю досліджена в [4].

Крайові умови та умови ортогональності (3), (4) в околі границі області апроксимуємо таким чином:

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \\ f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \\ f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} (4x_{i,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\ + (4y_{i,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \\ (4x_{i,j} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) + \\ + (4y_{i,j} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + \\ + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (7)$$

Формулу для наближеного знаходження конформного інваріанту γ криволінійної області G_ω отримаємо на підставі умови "конформної подібності в малому" відповідних чотирикутників (прямокутників):

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^n \gamma_{i,j}, \quad (8)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}}.$$

Невідому повну витрату Q в процесі ітераційних наближень знаходитимемо за формулою:

$$Q = \Delta \varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}. \quad (9)$$

Обчислення координат внутрішніх вузлів сіткової області G'_ω в процесі ітерацій виконуватимемо за формулами сумарних зображень [5, 6]:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{i,k} \left(\mu'_k a_k + \nu'_k b_k + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 \sum_{r=1}^m \frac{\nu_k^{j-r}}{\mu_k - \nu_k} (p_{r,k} x_{r,0} + p_{n,k} x_{r,n+1}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{i,k} \left(\mu'_k c_k + \nu'_k d_k + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 \sum_{r=1}^m \frac{\nu_k^{j-r}}{\mu_k - \nu_k} (p_{r,k} y_{r,0} + p_{n,k} y_{r,n+1}) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

де елементи матриці $P = \{p_{j,k}\}_{j,k=1}^n$ обчислюються як $p_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{j\pi k}{n+1}$, елементи діагональних матриць $\mu' = [\mu'_k]_{k=1}^n$, $\nu' = [\nu'_k]_{k=1}^n$ визначаються із формул $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\eta_k = 1 + \gamma^2 (1 - \cos \frac{j\pi k}{n+1})$, а довільні сталі a_k, b_k, c_k, d_k знаходяться із умов на ділянках AB і CD границі області. Системи рівнянь для обчислення a_k, b_k, c_k, d_k мають вигляд:

$$\begin{cases} a_k + b_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{0,j} - S_k^{(0)}, \\ \mu_k^{m+1} a_k + \nu_k^{m+1} b_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{m+1,j} - S_k^{*m+1}, \quad k = \overline{1, n}; \\ c_k + d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{0,j} - S_k^{*(0)}, \\ \mu_k^{n+1} c_k + \nu_k^{n+1} d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{n+1,j} - S_k^{*n+1}, \quad k = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де $p_{j,k}^* (j, k = \overline{1, n})$ – елементи матриці P^* , оберненої до P ($P \cdot P^* = E$),

$$S_k^{(0)} = \gamma^2 \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i^k}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{i,0} + p_{n,k} x_{i,n+1}),$$

$$S_k^{*m+1} = \gamma^2 \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i^{m+1-k}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{i,0} + p_{n,k} x_{i,n+1}),$$

$$S_k^{*(0)} = \gamma^2 \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i^k}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{i,0} + p_{n,k} y_{i,n+1}),$$

$$S_k^{*n+1} = \gamma^2 \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i^{n+1-k}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{i,0} + p_{n,k} y_{i,n+1}),$$

$k = \overline{1, n}$.

Алгоритм знаходження розв'язку задачі (5)-(9) побудуємо шляхом поетальної параметризації величини γ (або значення витрати Q), граничних та внутрішніх вузлів сітки G_γ^2 з використанням ідей методу блочної ітерації. А саме, задавши кількість $m \times n$ вузлів розбиття сіткової області G_ω , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень конформності відображення δ_* , початкові наближення

координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{1,n+1}^{(0)}, y_{1,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ та обчисливши методом сумарних зображень (10) відповідні початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, знаходимо за формулою (8) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ конформного інваріанта γ . Далі, уточнюємо координати граничних вузлів (6), (7) (даний граничний вузол на k -ому кроці підправляємо за умов, що фіксованими є два навколишні та відповідні приграничні [1]). Нове наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) знову проводимо за формулами сумарних зображень (10), які, на відміну від сіткових ітераційних методів, дозволяють відразу (за один крок без організації ітераційного процесу) отримати прийнятний розв'язок. Після цього, знову уточнюємо γ та Q за формулами (8) і (9). Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів. Визначимо

величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$

зміщення вузлів на границі за проведену k -ту ітерацію; якщо вона більша за ε , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь конформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимації рівнянь (5):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |\delta_{i,j}^{(1)}|, \quad \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |\delta_{i,j}^{(2)}|,$$

$$\delta_{i,j}^{(1)} = \gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}),$$

$$\delta_{i,j}^{(2)} = \gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}).$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше вважаємо, що задача розв'язана із необхідною точністю.

Побудовані за описаним вище алгоритмом динамічні сітки руху є основою для досліджень інших кількісних характеристик, зокрема, швидкості руху тощо.

Швидкість руху $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$

знаходимо за формулою $\vec{v} = \frac{d\vec{w}}{dz} = 1/\frac{dz}{d\vec{w}}$ [3].

Різницеві формули для обчислення величин швидкості $v_{i,j} = v(x_{i,j}, y_{i,j})$ мають вигляд:

– у внутрішніх вузлах сітки:

$$v_{i,j} = 2 \frac{\Delta\psi}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2},$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \quad j = \overline{1, n};$$

– у граничних вузлах:

$$v_{0,j} = 2 \frac{\Delta\psi}{J_{0,j}} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2},$$

$$J_{0,j} = (x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j}), \quad j = \overline{1, n};$$

$$v_{i,n+1} = \frac{\Delta\psi}{J_{i,n+1}} \sqrt{(x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})^2 + (y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1})^2},$$

$$J_{i,n+1} = (x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})(y_{i,n+1} - y_{i,n}) - (x_{i,n+1} - x_{i,n})(y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1}), \quad i = \overline{1, m};$$

$$v_{m+1,j} = 2 \frac{\Delta\psi}{J_{m+1,j}} \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2},$$

$$J_{m+1,j} = (x_{m+1,j} - x_{m,j})(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j-1}) - (x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j-1})(y_{m+1,j} - y_{m,j}), \quad j = \overline{1, n};$$

$$v_{i,0} = \frac{\Delta\psi}{J_{i,0}} \sqrt{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})^2 + (y_{i+1,0} - y_{i-1,0})^2},$$

$$J_{i,0} = (x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,j} - y_{i,0}) - (x_{i,j} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}), \quad i = \overline{1, m};$$

– у кутових точках області:

$$v_{0,0} = \frac{\Delta\psi}{J_{0,0}} \sqrt{(x_{1,0} - x_{0,0})^2 + (y_{1,0} - y_{0,0})^2},$$

$$J_{0,0} = (x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,0}) - (x_{0,1} - x_{0,0})(y_{1,0} - y_{0,0});$$

$$v_{0,n+1} = \frac{\Delta\psi}{J_{0,n+1}} \sqrt{(x_{1,n+1} - x_{0,n+1})^2 + (y_{1,n+1} - y_{0,n+1})^2},$$

$$J_{0,n+1} = (x_{1,n+1} - x_{0,n+1})(y_{0,n+1} - y_{0,n}) - (x_{0,n+1} - x_{0,n})(y_{1,n+1} - y_{0,n+1});$$

$$v_{m+1,n+1} = \frac{\Delta\psi}{J_{m+1,n+1}} \sqrt{(x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})^2 + (y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1})^2},$$

$$J_{m+1,n+1} = (x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})(y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n}) - (x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})(y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1});$$

$$v_{m+1,0} = \frac{\Delta\psi}{J_{m+1,0}} \sqrt{(x_{m+1,0} - x_{m,0})^2 + (y_{m+1,0} - y_{m,0})^2},$$

$$J_{m+1,0} = (x_{m+1,0} - x_{m,0})(y_{m+1,1} - y_{m+1,0}) - (x_{m+1,1} - x_{m+1,0})(y_{m+1,0} - y_{m,0});$$

Зазначимо, що для розрахунків за формулами сумарних зображень необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (для знаходження n -вимірних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$), тобто систему порядку $4n$, а також обчислити за явними формулами (10) $2m$ n -вимірних векторів $\vec{x}$, $\vec{y}$. Враховуючи, що μ і η – діагональні матриці, розв'язування системи для знаходження $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ рівнозначне обчисленню добутку матриці на вектор. Таким чином, на кожному ітераційному кроці необхідно виконати $\approx 2mt$ операцій. Для порівняння, використання неявної схеми з таким самим шаблоном потребуватиме розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з p -гідиagonalною матрицею, знаходження розв'язків якої, наприклад, методом Гауса потребуватиме $n^2 \times m^2$ операцій.

Менша трудомісткість обчислень і менша кількість ітерацій, за яку досягається необхідна точність (як показали числові розрахунки) дають деяку "економію" комп'ютерних ресурсів, що дозволяє виконувати обчислення для більшої кількості вузлів розбиття області, аніж це було зроблено в [2].

Числові експерименти, проведені для різних конфігурацій та дискретизацій областей G , підтверджують, що запропонована нами обчислювальна схема розв'язування окресленого вище класу задач є швидкозбіжною, економічною стосовно використовуваних комп'ютерних ресурсів (в порівнянні з [2]).

В табл. 1, де через Q^* , δ^* , δ_Q^* , δ_r^* позначено отримані в [2] відповідно повна витрата, нев'язка апроксимацій рівнянь Коші-Рімана, відносна похибка повної витрати і відносна максимальна

похибка значень координат вузлів (δ_Q , δ_T – відповідні останнім отримані нами значення), представлені результати розрахунку для області $G_i^{(1)}$, що обмежена двома дугами концентричних кіл радіусів 1 та ϵ і променями, що виходять з початку координат під кутами 0.1 та 1.1 радіан до осі абсцис при $\varphi_0 = 0$, $\varphi^* = 1$, $\epsilon = 10^{-6}$ (точний

розв'язок відповідної задачі: $x(\varphi, \psi) = e^\varphi \cos(\psi + 0.1)$, $y(\varphi, \psi) = e^\varphi \sin(\psi + 0.1)$).

Результати розрахунку для області $G_i^{(2)} = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 10\pi, 3 + 3\cos \frac{x}{5} \leq y \leq 25 - 7\cos \frac{x}{5} \right\}$ представлені в табл. 2 (iter – кількість ітерацій; тут, як вище і надалі, $\varphi_0 = 0$, $\varphi^* = 1$, $\epsilon = 10^{-6}$) і на рис. 1.

Результати тестового розрахунку для області $G_i^{(1)}$

$n \times m$	Q	Q^*	δ_Q	δ_Q^*	δ_T	δ_T^*	δ	δ^*
12×12	1,00056	0,99596	0,000313	0,00428	0,00623	0,0067	0,00176	0,0075
24×24	1,00042	1,00012	0,000017	0,000126	0,0035	0,0032	0,00125	0,0051
28×28	1,00030	1,00009	0,000053	0,000156	0,0022	0,0024	0,00116	0,0015
30×30	1,00021		0,000039		0,00181		0,00098	
40×40	1,00027		0,000023		0,00169		0,00032	

Таблиця 1

Результати тестового розрахунку для області $G_i^{(2)}$

$n \times m$	iter	iter*	Q	Q^*	δ	δ^*
12×12	42		0,57480		0,00196	
24×24	234	1387	0,56781	0,5538	0,00116	0,0018
28×28	315	1772	0,56632	0,5542	0,00103	0,0014
50×50	4		0,56615		0,00062	

Таблиця 2

Результати тестового розрахунку для області $G_i^{(3)}$

$n \times m$	iter	iter*	Q	Q^*	δ	δ^*
12×12	104		0,70566		0,00814	
24×24	350	815	0,717660,7451	0,00952	0,072	
28×28	459	1046	0,714210,7449	0,00985	0,075	
40×40	870		0,70697		0,01034	

Таблиця 3

Результати тестового розрахунку для області $G_i^{(4)}$

$n \times m$	Q	δ
12×12	1,104875	0,01692
20×20	1,11786	0,01689
24×24	1,08043	0,01326
40×40	1,12004	0,01352

Розроблений алгоритм застосовано також для розрахунку гідродинамічної сітки руху фільтраційної рідини до нескінченної системи горизонтально розміщених дрен [3]. В силу

фрагмент такої системи, а саме – фізичну область $G_i^{(3)}$ (див. рис 2), де $AB = \{z : 0 \leq x \leq l_0, y = h_2\}$, $BC = \{z : f(x, y) = 0\} = \{z : x = l_0, 0 \leq y \leq h_2\} \cup \{z : 0 \leq x \leq l_0, y = 0\} \cup \{z : x = 0, 0 \leq y \leq h_2 - h_1 - r_0\}$, $CD = \{z : x > 0, x^2 + (y - (h_2 - h_1))^2 = r_0^2\}$, $DA = \{z : x = 0, h_2 - h_1 + r_0 \leq y \leq h_2\}$, CD – зовнішній контур довершеної за характером розкриття пласта дрени радіуса r_0 , h_1 та h_2 – відповідно глибина закладання дренажу та до водоупору, $2l_0$ – відстань між дренами. Результати розв'язування задачі у цій області при $r_0 = 1$ м, $h_1 = 11$ м, $h_2 = 13$ м, $l_0 = 20$ м подано у табл. 3, а гідродинамічну сітку руху – на рис. 2.

Зуважимо, що область $G_i^{(3)}$ має складну геометрію, оскільки одна із її граничних ліній течії задається делькома аналітичними співвідношеннями. Лініями Γ на рис. 2 і рис. 3 відокремлені ділянки найбільших за абсолютною величиною нев'язок $\delta_{i,j}^{(1)}$ і $\delta_{i,j}^{(2)}$ (що, з фізичної точки зору, є так званими "застійними" зонами).

Область $G_i^{(4)}$ обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ та параболою $y = x^2 + 1$. Очевидно, що у вершині С (див. рис. 3) порушена умова конформності сітки. Розв'язок задачі у цій області подано у вигляді таблиці розрахункових значень при різних значеннях параметрів

розбиття області (табл. 4), динамічної сітки і поверхні швидкості (рис. 3).

На рис. 4 зображена динамічна сітка і величина швидкості в області $G_z^{(3)} = \{re^{i\theta}; 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Особливістю цієї області є те, що в точках А, В еквіпотенціальні лінії перетинаються з лініями течії під кутом π . Як відомо, швидкість у цих точках теоретично рівна ∞ , відповідно в їх околах мають місце великі похибки в обчисленнях.

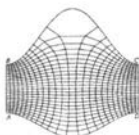


Рис. 1. Динамічна сітка в області $G_z^{(2)}$

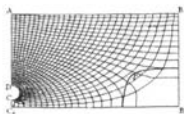


Рис. 2. Гідродинамічна сітка в області $G_z^{(3)}$

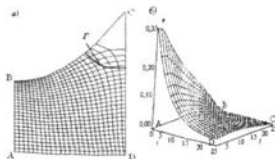


Рис. 3: а) динамічна сітка в області $G_z^{(4)}$; б) поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу

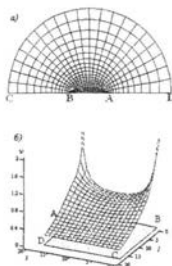


Рис. 4: а) динамічна сітка в області $G_z^{(5)}$, б) поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу

Висновки. Таким чином, на основі синтезу числових методів сумарних зображень та конформних відображень розроблено конструктивний підхід до моделювання ідеальних полів для криволінійних областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціалами, а також створено обчислювальну технологію розв'язування відповідних крайових задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь.

Проведені числові експерименти показали, що при різних значеннях параметрів $n \times m$ розбиття області розрахункові значення величини повної витрати практично співпадають, а це підтверджує обчислювальну стійкість алгоритму.

Покращити несв'язку конформності можна не лише за рахунок збільшення кількості вузлів розбиття. Доцільно також задавати n і m так, щоб виконувалася умова $y=1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

Використання методу сумарних зображень дає можливість при наближенні внутрішніх вузлів у комплексі на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а і усіх граничних і, отже, суттєво пришвидшує

досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Розроблена методика без складнощів може бути адаптована до низки інших більш складних

конфігурацій областей, обмежених лініями течії та екіпотенціалами [7], а також для спеціальних типів шаруватих середовищ [8, 9].

Список використаних джерел

1. Бомба А.Я. Нелинейные обращения краевых задач на конформные отображения с управлением в граничных условиях / А.Я. Бомба // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 4. – С. 80–90.
2. Бомба А.Я. Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, А.П. Кузьменко. // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 16–25.
3. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський – Київ : Наукова думка, 2007. – 308 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616с.
5. Ляшко И.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка, 1973. – 264 с.
6. Положий Г.М. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г.М. Положий. – К: Изд-во КГУ, 1982. – 161с.
7. Кузьменко А.П. Варіант синтезу методу прямих та методу сумарних наближень із декомпозицією області / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко. // IV Міжнародна конференція ім. акад. І. І. Ляшка. Обчислювальна та прикладна математика. Матеріали конференції. – Київ, 2011. – С. 102.
8. Кузьменко А.П. До розв'язування крайових задач для рівнянь параболічного типу / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації. Збірник праць. – Львів: ФМІ, 2010. – С. 40–43.
9. Dilts G.A. Moving-least-squares-particle hydrodynamics ii: conservation and boundaries / G.A. Dilts // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – 48(10). – P. 1503–1524.

Надійшла до редколегії 18.05.12

УДК 004.93

Верченко А.П., с.н.с., к.ф.-м.н.,
Сторожук А.І., студент**Аналіз завантаженості дороги за
відеопотоком**

В статті описано проблему розпізнавання дорожніх заторів за відеопотоком з веб-камери. Розглянуто два підходи: порівняння з фоном та детектор руху, а також можливість їх комбінації. Для програмної реалізації використовувалась бібліотека OpenCV.

Ключові слова: густина дорожнього потоку, комп'ютерне бачення, порівняння з фоном, детектор руху, OpenCV.

A.P. Verchenko, Ph.D (Physics & Mathematics),
A.P. Verchenko, Ph.D (Physics & Mathematics),
A. I. Storozhuk, student**Traffic density analysis from
videostream**

This article contains traffic jam detection method from videostream. There are two algorithms, using which problem was solved – Background Subtraction and Motion Detection. As a result, these two methods merge to give needed result. To implement these methods we use library OpenCV.

Key Words: traffic density analysis, computer vision, background subtraction, motion detector, OpenCV.

E-mail: An.Verchenko@gmail.com, artemstorozhuk@gmail.com

Статтю представив доктор технічних наук Гарашенко Ф.Г.

Вступ. На сьогоднішній день камери відеоспостереження встановлені у різних місцях як будь-якого мегаполіса, так і малих міст та автомагістралей. Наприклад, в місті Стамбул (Туреччина) встановлено близько 500 камер [1], а в Києві їх близько 300. Практично на кожній камері видно дорогу. Тому логічно використовувати їх для аналізу завантаженості дорожнього руху.

Постановка задачі. З глобальної точки зору маємо таку задачу: є камери, що в режимі реального часу знімають певні дороги одного міста. Відзняті кадри транслиуються камерами на сервер. Сервер, отримавши відео-потік від кожної з них, має обробити його і вказати на карті, чи є на даній ділянці дороги затор, чи затор відсутній. Якщо ж затор таки є, то слід вказати його рівень завантаженості за n-бальною шкалою (швидкість руху транспорту на даній дорозі є обернено пропорційною до оцінки завантаженості руху – чим менша швидкість, тим більша оцінка). Також слід зауважити, що всі ці дії повинні виконуватись автономно (тобто без допомоги людини – *unsupervised service*) [1]. Локальна задача заключається в тому, щоб визначити завантаженість дороги за допомогою відео з камери. Аналізувати необхідно саме

відеопотік, а не один знімок з камери, адже, якщо на знімку будуть знаходитись багато авто, то з цього ще не випливає, що на цій дорозі в даний момент велика тягучка – машини можуть просто рухатись з невеликою швидкістю.

Попередня обробка кадру. В кожен момент часу на вхід програмі подається чорно-біле зображення (*grayscale image*), тобто інтенсивність кожного пікселя зображення знаходиться в межах від 0 до 255. Для того, щоб позбавитись шумів на зображенні, використовуються фільтри Гауса (*Gaussian blur*).

Детектор руху. Розглянутий нижче алгоритм в літературі називають „вивняленням руху за допомогою віднімання кадрів” (*Motion detection using frame subtraction*) [2]. Існують також більш потужні алгоритми виявлення руху та оптичного потоку (*optical flow*), такі як алгоритм Лукаса-Канаде (Lucas-Kanade), Хона-Шунка (Horn-Schunck) та інші [2].

Спочатку знаходиться так звана абсолютна різниця двох суміжних кадрів (*absolute frames difference*) за наступною формулою:

$$\forall i, j: 0 \leq i < m, 0 \leq j < n \quad D_{i,j} = |A_{i,j} - B_{i,j}|,$$

де $m \times n$ – розмірність зображення, $X_{i,j}$ – піксель зображення X на позиції (i, j) .



Рис. 1-2 Ліворуч – оригінальний кадр з відео, на якому всі машини є рухомими, а праворуч – зображення, отримане в результаті застосування оператора абсолютної різниці до поточного та попереднього кадрів.

Як видно з Рис. 2, нерухомі пікселі є чорного кольору (це є логічним, оскільки в такій позиції різниця двох пікселів приблизно рівна нулю, а саме нулю відповідає чорний колір), а рухомі – відтінками сірого, а то й взагалі білого. Таким чином, на даному етапі необхідно застосувати операцію взяття порогового значення (*threshold operation*) $R = Tr(A)$:

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1, & A_{i,j} > T \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Константа T задається в налаштуваннях програми, детальний опис усіх налаштувань приведено нижче.

Очевидно, що після застосування цього оператора отримуємо вже однобітне зображення (Рис.3).

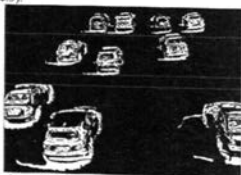


Рис. 3 Зображення, отримане шляхом застосування оператора взяття порогового значення.

Навіть після застосування цього оператора на зображенні можуть бути шуми – малі за розмірами області, які насправді не належать авто. Для того, щоб позбавитись від них, слід послідовно застосувати морфологічні операції відкриття та закриття [2].

Таким чином, на даному етапі вже чітко виділяються контури автомобілів (Рис. 4). Для того, щоб виділити самі внутрішності автомобілів, слід застосувати операцію знаходження випуклої оболонки (*convex hull construction*).



Рис. 4 Результат, отриманий після виділення та заповнення випуклої оболонки.

Порівнювач з фоном. На вхід програми дається зображення фону, тобто зображення, яке не містить автомобілів (див. наприклад Рис.5).

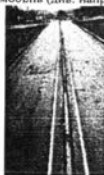


Рис. 5 Одне із можливих зображень фону.

Алгоритм порівняння з фоном відрізняється від попереднього тим, що порівнюються не два сусідні кадри, а поточний з фоном. Всі інші операції залишаються тими ж. Константу T для знаходження порогового значення слід задавати окремо [3].

Налаштування програми. Розглянемо детальніше всі необхідні налаштування програми:

1) На відео може бути як ліва, так і права частина дороги. Тому програмі слід вказати де саме дорога ліворуч та праворуч. Ця інформація краще всього задається двома полігонами (або одним, якщо на відео видно тільки якусь одну дорогу). Такий полігон називають *Polygon of interest (POI)*, див. наприклад Рис.6.



Рис. 6 Зображення, на якому виділені області, які слід аналізувати.

2) Задати фонове зображення для алгоритму *background subtraction*.

3) Як вже було зазначено раніше, програмі слід задати ще дві величини: порогову константу для детектора руху (*motion threshold*) та для порівнювача з фоном (*background threshold*).

4) Задати частоту, за якої слід відправляти вже отримані результати на сервер (*check frequency*).

Поснанання обох алгоритмів. Введемо ще дві операції: $B = X \& Y$ – „побітове і” (*bitwise and*), яка застосовується до двох зображень (X та Y):

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1, & X_{i,j} = 1 \text{ та } Y_{i,j} = 1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

та оператор, який рахує ненульові пікселі на кадрі (*count non-zero*):

$$C = \text{Count}(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{i,j}$$

Після обробки кожного кадру відео маємо два зображення:

1. Зображення M , отримане в результаті алгоритму *motion detection*.

2. Зображення S , отримане в результаті алгоритму *background subtraction*.

Застосовувавши до обох цих кадрів операцію „побітового і”, отримаємо зображення I , яке містить рухомі автомобілі:

$$I = M \& S$$

Зображення M містить всі рухомі об'єкти, а не лише рухомі автомобілі. Наприклад, тіні від машин, які рухаються, також будуть рухомими, але ж вони не є автомобілями. Зображення S , в свою чергу, не містить тіней (на практиці завжди можна виділити такий поріг, що тіні будуть не сильно відрізнятися від кольору асфальту), тому результуюче зображення I зберігає тільки рухомі транспортні засоби.

Тепер постає питання аналізу лівої та правої частин дороги. Для того, щоб це здійснити, необхідні дві однопітові маски (P_L та P_R), які відповідають лівій та правій частинам дороги, кожна з яких містить відповідний (лівий чи правий) білий полігон на чорному фоні (Рис. 7).

Рис. 7 Варіант зображення бітової маски для правої сторони дороги (маска P_R).

Застосовувавши до такої маски та зображення з авто операцію „побітового і”, отримаємо саме ті авто, що знаходяться праворуч чи ліворуч (Рис. 8).



Рис. 8 Знаходження авто на потрібній стороні дороги.

Таким чином отримаємо нові зображення:

Позначення	Формула	Назва
S_L	$P_L \& S$	авто ліворуч
S_R	$P_R \& S$	авто праворуч
M_L	$P_L \& I$	рухомі об'єкти ліворуч
M_R	$P_R \& I$	рухомі об'єкти праворуч

Після чого виконується підрахунок наступних коефіцієнтів.

Коефіцієнти завантаженості доріг

Позначення	Формула	Пояснення
k_{M_L}	$\frac{Count(M_L)}{Count(S_L)}$	густина рухомих об'єктів ліворуч
k_{M_R}	$\frac{Count(M_R)}{Count(S_R)}$	густина рухомих об'єктів праворуч
k_{S_L}	$\frac{Count(S_L)}{Count(P_L)}$	густина авто ліворуч
k_{S_R}	$\frac{Count(S_R)}{Count(P_R)}$	густина авто праворуч

Очевидно, що всі ці коефіцієнти лежать в межах $[0;1]$.

З частотою, вказаною у налаштуваннях, слід знайти середню величину кожного з коефіцієнтів

Список використаних джерел

1. Ozkurt C., Camci F. Automatic traffic density estimation and vehicle classification for traffic surveillance systems using neural networks // Celil Ozkurt and Fatih Camci. – Association for Scientific Research: Mathematical and Computational Applications, Vol. 14, No. 3, 2009. – P. 187–196.

за останній проміжок часу та відправити ці дані на сервер.

Результати. Реалізація цього методу була здійснена за допомогою бібліотеки *Open CV* [4]. Для зчитування вхідних даних використовувалась бібліотека *Jansson* [5], тобто вхідні дані зберігались у форматі *JSON*.

Практика показала, що якщо густина потоку автомобілів більше 20%, а густина машин, що рухаються менше 10%, то можна стверджувати, що тягучка таки є. Але реально для кожної дороги слід підбирати свої параметри оцінки завантаженості трафіку, так само як і налаштування, список яких було вказано раніше.

Остаточні відео-результати проведеного аналізу можна подивитись на наступних Інтернет-сторінках:

- 1) <http://www.youtube.com/watch?v=2zFudEIDmYk>
- 2) <http://www.youtube.com/watch?v=m4herKwkvPk>

2. Bradski G., Kaehler A. Learning OpenCV. – eBook: O'Reilly Media, Inc., 2008. – Chapter 9, 10.
3. Atkociunas E., Blake R., Juozapavicius A., Kazimianec M. Image Processing in Road Traffic Analysis // Nonlinear Analysis: Modeling and Control, 2005, Vol. 10, No. 4 – P. 315–332.
4. Офіційна документація бібліотеки *Open CV*: <http://opencv.willowgarage.com/documentation/cpp/index.html>.
5. Офіційний сайт бібліотеки *Jansson*: <http://www.digip.org/jansson/>

Надійшла до редколегії 15.09.2012.

УДК 519.7

О.А. Галкін, аспірант

Застосування опорно-векторних машин в інтелектуальному аналізі даних

Запропоновано підхід до інтелектуального аналізу даних, що базується на використанні опорно-векторних машин. Двома ключовими елементами у реалізації SVM є методи математичного програмування та функції ядра. Класифікація даних за наявності шумів. Використання регуляризованої гіпотези для уникнення підгонки.

Ключові слова: опорно-векторна машина, функція ядра, гіперплощина, простір ознак.

E-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

Статтю представив: чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Зі збільшенням обсягів даних, що генеруються науковцями, постає гостра необхідність в швидких, точних та надійних алгоритмах для аналізу цих даних. Наукові досягнення в технологіях баз даних, обчислювальних системах та штучному інтелекті, внесли свій вклад в розвиток інтелектуального аналізу даних.

Головною метою інтелектуального аналізу даних (або так званого *визучення даних*) є виявлення закономірностей у даних, що забезпечує краще розуміння процесу генерації даних та надає корисні прогнози. Реальні множини даних часто характеризуються наявністю великої кількості прикладів, надзвичайною незбалансованістю, а також здатністю бути пошкодженими шумом. Відношення між інтелектуальними змінними найчастіше є досить нелінійним. Одним з найсучасніших методів, який був розроблений для вирішення цієї проблеми, є опорно-векторні машини [4]. Опорно-векторна машина була запропонована як потужний інструмент для класифікації та регресії в шумливих та комплексних доменах. Двома ключовими особливостями опорно-векторних машин є *узгадування теорії*, яка призводить до принципового способу вибору гіпотези, та *функції ядра*, які вносять нелінійність в простір гіпотез без явної вимоги використання нелінійного алгоритму [3].

Oleksandr A. Galkin, postgraduate (PhD)

Application of the support vector machines in data mining

Approach is proposed to data mining based on the use of the support vector machines. Two key elements in implementation of SVM are the methods of mathematical programming and kernel functions. Classification of data in the presence of noise. Using of regularized hypothesis to avoid overfitting.

Key words: support vector machine, kernel function, hyperplane, feature space.

Опорно-векторні машини

Опорно-векторна машина (ОВМ) є алгоритмом навчання, що застосовується до вивчення класифікаційних та регресійних правил даних. Такі машини можуть використовуватися для вивчення поліноміальних класифікаторів, радіальних базисних функцій, багатоваріового перцептрона. Двома ключовими елементами у реалізації ОВМ є методи математичного програмування та функції ядра. Усі необхідні параметри знаходяться з розв'язку задачі квадратичного програмування з лінійними обмеженнями рівності та нерівності, а не шляхом розв'язання неопуклої оптимізаційної проблеми без обмежень. Гнучкість функцій ядра дозволяє ОВМ працювати з широким спектром просторових гіпотез [3].

Загалом, у даній статті проводиться детальний аналіз даних для випадку, коли у класів відсутні будь-які шуми. У свою чергу, внеском у розробку теоретичної основи є формальний опис та узагальнення проблеми для випадку нерозділених даних. У такій ситуації, дані знаходяться під дією шумів, тому нашою задачею є побудова такого класифікатора, який би використовував принцип ігнорування певних визначених точок, які неправильно класифікуються у навчанні.

Ми зосередимося на ОВМ для двокласової класифікації, де класами будуть A та B для $y_i = +1, -1$, відповідно. Така класифікація може бути легко розширена для випадку k -класової

класифікації, будуючи при цьому k двокласових класифікатори [15]. Геометрична інтерпретація класифікації опорних векторів (КОВ) полягає у тому, що алгоритм намагається знайти оптимальну розділову поверхню, тобто гіперплощину, яка б знаходилася на однаковій відстані від двох класів. Така оптимальна розділова гіперплощина має багато корисних статистичних властивостей [3].

Максимальне поле гіперплощини

Якщо навчальні дані є лінійно розділними, тоді існує пара (w, b) така, що:

$$\begin{aligned} w^T x_i + b &\geq 1, x_i \in A \\ w^T x_i + b &\leq -1, x_i \in B, \end{aligned} \quad (1)$$

де розв'язок знаходиться за наступним правилом:

$$f_{w,b}(x) = \text{sgn}(w^T x + b) \quad (2)$$

w називається вектором ваги, а b - зміщенням ($-b$ є порогом) [3]. Обмеження-нерівності (1) можуть бути об'єднані наступним чином:

$$y_i(w^T x_i + b) \geq 1, x_i \in A \cup B \quad (3)$$

Дотримуючись загальності, пара (w, b) може бути розрахована так, що:

$$\min_{i=1, \dots, l} |w^T x_i + b| = 1,$$

де дане обмеження визначає множину канонічних гіперплощин в $\mathbb{R}^N$ [3].

Для того, щоб обмежити виразність простору гіпотез, ОВМ здійснює пошук найпростішого розв'язку, що коректно класифікує дані. Отже, навчальна проблема формулюється наступним чином: мінімізувати $\|w\|^2 = w^T w$ при

обмеженнях лінійної роздільності (3). Це еквівалентно максимізації нормалі до гіперплощини між опуклими оболонками двох класів. Дана відстань називається полем. Отже, оптимізаційна проблема є опуклою проблемою квадратичного програмування (КП) [3]:

$$\begin{aligned} \min_{w,b} \Phi(w) &= \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ y_i(w^T x_i + b) &\geq 1, i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки проблема має глобальний оптимум, це означає, що вона має багато локальних оптимумів у випадку навчання, наприклад уникнення нейронної мережі. Перевагою у цьому випадку є те, що параметри КП - обчислювача будуть впливати тільки на час навчання, а не на

якість розв'язку [5]. Ця проблема є розв'язною, але для того, щоб перейти до випадку нероздільності та нелінійності, доцільно розглянути двоїсту проблему. Функцією Лагранжа цієї проблеми є:

$$L(w, b, \Lambda) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^l \lambda_i [y_i (w^T x_i + b) - 1], \quad (5)$$

де $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)^T$ є множниками Лагранжа, по одному для кожної точки даних [3]. Розв'язок цієї задачі квадратичного програмування визначається максимізацією L по відношенню до $\Lambda \geq 0$ та мінімізацією по відношенню до w, b . Диференціюючи по відношенню до w та b , а також встановлюючи похідні рівними 0, отримуємо [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(w, b, \Lambda)}{\partial w} &= w - \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i x_i = 0 \\ \text{та} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial L(w, b, \Lambda)}{\partial b} = - \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = 0$$

Отже, оптимальний розв'язок задається формулою (2) з наступним вектором ваги:

$$w^* = \sum_{i=1}^l \lambda_i^* y_i x_i \quad (7)$$

Підставляючи (6) та (7) в (5), ми можемо записати наступний вираз:

$$F(\Lambda) = \sum_{i=1}^l \lambda_i - \frac{1}{2} \|w\|^2 = \sum_{i=1}^l \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^T x_j, \quad (8)$$

який, записуючи у матричній формі, веде до наступної двоїстої задачі [3]:

$$\max F(\Lambda) = \Lambda^T I - \frac{1}{2} \Lambda^T D \Lambda \quad (9)$$

$$\Lambda \geq 0, \Lambda^T y = 0,$$

де $y = (y_1, \dots, y_l)^T$ та D є симетричною $l \times l$ матрицею з елементами $D_{ij} = y_i y_j x_i^T x_j$.

Необхідно зауважити, що множники Лагранжа є ненульовими лише тоді, коли $y_i (w^T x_i + b) = 1$ - вектори для яких називаються *опорними векторами*, оскільки вони знаходяться найближче до розділової гіперплощини. Оптимальна вага отримується за допомогою (7), а зміщення за допомогою наступної формули:

$$b^* = y_i - w^{*T} x_i, \quad (10)$$

для будь-якого опорного вектора x_i (хоча на практиці безпечніше працювати з усередненням по всіх опорних векторах). Функція рішення задається наступним чином [3]:

$$f(x) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^l y_i \lambda_i^* x^T x_i + b^*\right). \quad (11)$$

Отримання розв'язку часто є доволі рідкісним явищем, оскільки у розв'язку з'являються лише x_i з ненульовими множниками Лагранжа. Це є важливим тоді, коли необхідно класифікувати дані великого розміру, як це часто буває в практичних ситуаціях інтелектуального аналізу даних. Тим не менш, не виключено, що розширення включає в себе більшу частину навчальних даних, що призводить до моделі, яка є дорогою відносно її зберігання та оцінювання. Вирішення цієї проблеми є однією з областей досліджень, що проводяться в ОВМ [3].

Ядро-індуковані простори ознак

Лінійний класифікатор часто може не бути найбільш підходящою гіпотезою для двох класів. ОВМ може використовуватися для вивчення нелінійних функцій рішення, відображаючи спочатку дані в деякий простір ознак вищої розмірності та будуючи розділову гіперплощину в цьому просторі. Позначивши відображення в простір ознак, як [3]:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow H \\ x &\mapsto \phi(x), \end{aligned}$$

функції рішення (2) та (11) будуть записані наступним чином:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sgn}(\phi(x)^T w^* + b^*) = \\ &= \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^l y_i \lambda_i^* \phi(x)^T \phi(x_i) + b^*\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Необхідно зауважити, що вхідні дані з'являються в функціях навчання (9) та рішення (11) тільки у формі скалярних добутків $x^T x_i$, а для функцій рішення (12) лише в формі скалярних добутків $\phi(x)^T \phi(z)$. Відображення даних в H займає багато часу, тому їх зберігання може бути неможливим, наприклад, якщо H є нескінченної розмірності [6]. Оскільки дані з'являються тільки у скалярних добутках, нам потрібна обчислювана функція, що дає значення скалярного добутку в H без явного виконання відображення [3].

Таким чином, введемо наступну функцію ядра:

$$K(x, z) = \phi(x)^T \phi(z). \quad (13)$$

Функція ядра дозволяє будувати оптимальну розділову гіперплощину в просторі H без явного виконання обчислень в цьому просторі. Навчання таке ж, як і в (9) з матрицею D та її елементами $D_{ij} = y_i y_j K(x_i, x_j)$, тобто замість обчислення скалярних добутків, ми обчислюємо значення K . Крім цього, вимагається, щоб K було легко обчислюваною функцією. Наприклад, поліноміальне ядро $K(x, z) = (x^T z + 1)^d$, що відповідає відображенню ϕ в простір, охоплений добутками до розмірності d в $\mathbb{R}^n$. Функція рішення (12) буде виглядати наступним чином:

$$f(x) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^l y_i \lambda_i^* K(x, x_i) + b^*\right), \quad (14)$$

де зміщення задається, як:

$$b^* = y_i - w^T \phi(x_i) = y_i - \sum_{j=1}^l y_j \lambda_j^* K(x_j, x_i), \quad (15)$$

для будь-якого опорного вектора x_i [3].

Єдиною проблемою, що залишилася, є специфікація функції ядра, при чому ядро має бути легко обчислюваним, чітко визначеним та охоплювати досить широкий простір гіпотез. Загальний підхід полягає у визначенні позитивно визначеного ядра, що відповідає таким відомим класифікаторам, як гаусівські радіальні базисні функції, багатошаровий перцептрон або поліноміальний класифікатор. Це є можливим, оскільки теорема Мерсера свідчить, що будь-яке позитивно визначене ядро відповідає скалярному добутку в деякому просторі ознак.

Ядра можуть також бути побудовані для включення знань предметної області. Цей так званий "трик ядра" дає ОВМ велику гнучкість. При відповідному виборі параметрів, ОВМ може розділити будь-яку послідовну множину даних (тобто таку, де точки різних класів не збігаються). Як правило, ця гнучкість може викликати підгонку даних, тобто можна отримати можливість моделювати шум в даних, а також процес генерації даних [9].

Підгонка є однією з основних проблем інтелектуального аналізу даних в цілому, тому багато евристики було розроблено для того, щоб запобігти цьому, в тому числі скорочені дерева рішення, вагові з'єднання, розпад ваги в нейронних мережах та статистичні методи оцінки майбутніх помилок. Простір класифікаторів, що розділяють дані з великим полем, має набагато

менший об'єм, ніж простір всіх класифікаторів. Інтуїтивно, якщо дані можуть бути класифіковані з малою помилкою за допомогою простої поверхні рішення, тоді можна очікувати, що вона може бути узагальнена для неявних випадків [3].

Нероздільні дані

До сих пір ми обмежувалися випадком, коли два класи позбавлені будь-яких шумів. У випадку зашумлених даних, форсування нульової помилки навчання призводить до слабкого узагальнення. Це тому, що навчальний класифікатор встановлює особливості шуму в навчальних даних. Для того, щоб прийняти до уваги той факт, що деякі точки даних можуть бути неправильно класифіковані, введемо вектор слабких змінних $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)^T$, що вимірює кількість порушень на обмеженнях (3).

Проблема може бути записана у наступній формі [3]:

$$\min_{w, b, \Xi} \Phi(w, b, \Xi) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i^k \quad (16)$$

$$y_i(w^T \phi(x_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, l,$$

де C та k задаються заздалегідь. C є параметром регуляризації, який контролює компроміс між максимізацією поля та мінімізацією терміну навчальної помилки. Якщо значення C є занадто малим, тоді недостатня увага буде приділена встановленню підготовки даних. Якщо C є дуже великим, тоді алгоритм буде розсіювати дані. Завдяки статистичним властивостям оптимальної розділової гіперплощини, значення C може обиратися без необхідності контрольної перевірки множини. Якщо $k = 0$, тоді другий доданок буде рахувати кількість навчальних помилок. В цьому випадку, оптимізаційна проблема є NP-повною [10]. Найменше значення, для якого (16) є розв'язною, це $k = 1$. Значення $k = 2$ також використовується, хоча в такому випадку збільшується чутливість до викидів в даних. Якщо ми вибираємо $k = 2$, тоді ми виконуємо регуляризацію найменших квадратів, тобто припускається, що шум в x є нормально розподіленим [3].

В зашумлених доменах важливо знайти надійний класифікатор, тому ми вибираємо $k = 1$. Функцією Лагранжа для цієї проблеми є наступний вираз:

$$L(w, b, \Lambda, \Xi, \Gamma) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + \sum_{i=1}^l \lambda_i [y_i(w^T \phi(x_i) + b) - 1 + \xi_i] - \sum_{i=1}^l \gamma_i \xi_i + C \sum_{i=1}^l \xi_i, \quad (17)$$

де $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)^T$ та $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)^T$ є множниками Лагранжа, що відповідають позитивності слабких змінних. Розв'язком цієї проблеми є сідлова точка функції Лагранжа, що знаходиться при мінімізації L по відношенню до w, Ξ та b , а також при максимізації по відношенню до $\Lambda \geq 0$ та $\Gamma \geq 0$. Диференціюючи по відношенню до w, b та Ξ і фіксуючи результати рівними нулю, ми отримуємо [3]:

$$\frac{\partial L(w, b, \Lambda, \Xi, \Gamma)}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i \phi(x_i) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial L(w, b, \Lambda, \Xi, \Gamma)}{\partial b} = - \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = 0,$$

та

$$\frac{\partial L(w, b, \Lambda, \Xi, \Gamma)}{\partial \xi_i} = C - \lambda_i - \gamma_i = 0. \quad (19)$$

Оптимальна вага знаходиться наступним чином:

$$w^* = \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i \phi(x_i) \quad (20)$$

Підставляючи (18), (19) та (20) в (17), ми отримуємо наступну двоїсту задачу [3]:

$$\max F(\Lambda) = \Lambda^T J - \frac{1}{2} \Lambda^T D \Lambda \quad (21)$$

$$0 \leq \Lambda \leq C, \Lambda^T y = 0,$$

де $y = (y_1, \dots, y_l)^T$ та D є симетричною $l \times l$ матрицею з елементами $D_{ij} = y_i y_j K(x_i, x_j)$. Функція рішення реалізується точно так, як і раніше в (14). Зміщення b^* знаходиться за формулою (15), де x_i є опорним вектором, для якого $0 < \lambda_i < C$. Не існує ніякого доведення, що такий вектор існує, але емпірично це припускається. Якщо для всіх опорних векторів $\lambda = C$, тоді розв'язок є нестійким, оскільки глобальний оптимум не є унікальним. У цьому випадку, оптимальне відхилення може обчислюватися шляхом апеляції до геометрії гіперплощини [3].

Таким чином, ОВМ навчає оптимальну розділову гіперплощину в деякому просторі ознак, за умови ігнорування визначених точок, які неправильно класифікуються у навчання. Навчена гіперплощина, що є розширенням на підмножину навчальних даних, називається також опорним вектором. За рахунок використання відповідної функції ядра, ОВМ може навчати широкий спектр класифікаторів, в тому числі велику множину РБФ мереж та нейронних мереж. Гнучкість ядер не призводить до надмірної підгонки, оскільки простір гіперплощин, що розділяють дані з великим полем, має набагато менший об'єм, ніж простір всіх реалізованих гіперплощин [3].

Практичне застосування

Більша частина дослідницької діяльності в ОВМ пов'язана з зменшенням часу навчання, вибором параметрів та зменшенням розміру моделі. Практично всі існуючі алгоритми для ОВМ масштабуються як $O(1) - O(1^3)$ в числі навчальних прикладів. Більшість емпіричних оцінок алгоритмічного масштабування, як правило, зосереджені на лінійно розділних множинах даних з рідкісними представленнями ознак, що не є характеристикою для проблем інтелектуального аналізу даних в цілому. Більшість досліджень в ОВМ орієнтована на досягнення глобального мінімуму задачі квадратичного програмування (21). З точки зору інтелектуального аналізу даних, це не є необхідним [3].

Існує безліч інших критеріїв зупинки, які можуть використовуватися та повинні бути доступними в загальному призначенні пакету ОВМ для інтелектуального аналізу даних. Вони включають в себе обмеження в часі навчання та відстеження передбачених помилок. Якщо передбачена помилка падає нижче заздалегідь заданої точки, або якщо вона не має тенденцію для зниження, тоді алгоритм може бути зупинений, оскільки знаходження глобального оптимуму буде непотрібним та затратним по часу. Для того, щоб відстежувати передбачену помилку, можна звернутися до статистичної теорії навчання, щоб забезпечити верхню границю на передбаченій помилці "перевірка без одного" [3].

Теорема (Йоахім, 2000) Частота помилки "перевірка без одного" стабільної ОВМ на навчальній множині S , обмежена наступним чином:

$$\sum_{i=1}^l c(f_{S_{\lambda}}(x_i), y_i) \leq \left| \{i : (2\lambda_i R^2 + \xi_i) \geq 1\} \right|,$$

де $f_{S_{\lambda}}$ є розв'язком ОВМ, коли приклад i виключається з навчальної множини S , а R^2 є верхньою границею на $K(x_i, x_i)$, $i = 1, \dots, l$ [3].

Ця величина може бути обчислена з дуже низькими витратами з поточної множини множинок Лагранжа Λ . Помилка "перевірка без одного" $\sum_{i=1}^l c(f_{S_{\lambda}}(x_i), y_i)$ є об'єктивною оцінкою

справжньої помилки. Загалом, обчислення є досить дорогим, але за рахунок статистичних властивостей ОВМ, помилка може бути обмежена легко обчислюваною кількістю.

Ще одним важливим моментом при використанні ОВМ є стиснення даних. У випадку, коли дані є шумливими, кількість ненульових λ може бути значною частиною множини даних. Це призводить до отримання великої моделі, яку дорого зберігати та оцінювати на майбутніх прикладах. Один зі способів уникнути цього, є кластеризація даних та використання кластерних центрів, як скорочене представлення множини даних. Це веде до більш компактної моделі з продуктивністю, близькою до оптимальної [3].

Первинні формулювання (4) та (16) призводять до необхідності дотримання обмеження рівності (6) та (18) при вирішенні двоїстої задачі. Простою поправкою до алгоритму є включення виразу $\frac{1}{2}b^2$ в первинних

формулюваннях. Це позбавляє від необхідності дотримання обмеження рівності, як вимоги, що похідна функції Лагранжа по відношенню до b є нулем, призводить до $b = \alpha^T y$, а матриця D в (9) та (21) має елементи, що визначаються, як $D_{ij} = y_i y_j (K(x_i, x_j) + 1)$. Розв'язок цієї проблеми квадратичного програмування призводить до продуктивності, що є майже ідентичною стандартному формулюванню на широкому діапазоні реальних множин даних [3].

Опорно-векторні машини можуть бути розширені до оцінки регресії, вводячи ε -нечутливу функцію втрат:

$$L^{\varepsilon}(x, y, f) = |y - f(x)|_{\varepsilon}^p = \max(0, |y - f(x)| - \varepsilon)^p,$$

де $p \in \{1, 2\}$. Ця функція втрат вважає помилками лише ті передбачення, які віддалені від навчальних даних на відстань більшу, ніж ε . Більш того, дана функція втрат дозволяє поняттю поля бути перенесеним на випадок регресії, зберігаючи всі корисні статистичні властивості. Регресія опорних векторів також призводить до задачі квадратичного програмування (КП) [3].

Цікавим застосуванням методології ОВМ є виявлення новизни. Мета полягає в тому, щоб знайти найменшу сферу, яка містить певний відсоток даних. Це також призводить до КП. Опорними векторами є точки, що лежать на сфері, а навчальними помилками є викиди, або певні нововведення. Цей метод може також бути узагальнений для просторів ядер для того, щоб забезпечити класифікацію, ієрархію та кластеризацію даних.

ОВМ знаходяться на перетині двох областей досліджень: методи ядра та великі класифікатори поля. Ці методи застосовуються до вибору ознак, аналізу часових послідовностей, реконструкції хаотичних систем та нелінійних головних компонент [3].

Висновки

Опорно-векторна машина була запропонована в якості надійного інструменту для багатьох аспектів інтелектуального аналізу даних, включаючи класифікацію, регресію та виявлення викидів. В статті детально представлена специфікація ОВМ для класифікації даних. ОВМ використовують статистичну теорію навчання для того, щоб знайти регуляризовану гіпотезу, яка б цілком відповідала наявним даним без підгонки. Опорно-векторні машини мають дуже мало вільних параметрів, тому можуть бути оптимізовані за допомогою теорії узагальнення без необхідності окремої перевірки множини під час навчання. ОВМ не відносяться до класу "ще один алгоритм", оскільки вони ґрунтуються на твердій статистичній та математичній основі, що стосується узагальнення та теорії оптимізації. Крім того, було показано, що даний підхід перевершує існуючі методи на широкому спектрі реальних проблем [3]. Опорно-векторні машини не мають можливості вирішити всі відкриті проблеми у досліджуваній області, але, як методи ядра та методи максимального поля, вони сприяють подальшому просуванню та являються важливим інструментом для інтелектуального аналізу даних.

Список використаних джерел

1. Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A., and Stone C.J. Classification and Regression Trees, Chapman & Hall, 1984.
2. Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A., and Stone C.J. Classification and Regression Trees, Chapman & Hall, 1984.
3. Burbidge R. and Buxton B. An Introduction to Support Vector Machines for Data Mining. Computer Science Dep., UCL, 2001.
4. Campbell C. and Ying Y. Learning with Support Vector Machines, Morgan and Claypool, 2011.
5. Cristianini N. and Shawe-Taylor J. An Introduction to Support Vector Machines. Cambridge University Press, 2000.
6. Duda R. and Hart P. Pattern Classification and Scene Analysis. John Wiley & Sons, 1973.
7. Fisher R.A. The use of multiple measurements in taxonomic problems. Annual Eugenics, 7 (Part II): 179-188, 1936.
8. Harrison D. and Rubinfeld D.L. Hedonic prices and the demand for clean air. J. Environ. Economics and Management, 5:81-102, 1978.
9. Hsu C.-W. and Lin C.-J. A simple decomposition method for support vector machines. To appear in Machine Learning, 2001.
10. Kecman V. Learning and Soft Computing - Support Vector Machines, Neural Networks, Fuzzy Logic Systems, the MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
11. Mitchell T. Machine Learning. McGraw-Hill International, 1997.
12. Rosenblatt F. The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain. Psychological Review, 65:386-408, 1959.
13. Smola A.J., Bartlett P.L., Schölkopf B., and Smola A.J. (Eds.). Advances in Large Margin Classifiers. MIT Press, 2000.
14. Suykens Johan A. K., Vandewalle, Joos P. L. Least squares support vector machine classifiers, Neural Processing Letters, vol. 9, no. 3, Jun., 1999.
15. Vapnik V. Statistical Learning Theory. Wiley-Interscience, 1989.

Надійшла до редколегії 20.06.2012

УДК 519.7

О.А. Галкіна, аспірантка

**Генерація дерев сценаріїв для
багатоступеневих стохастичних проблем**

У даній роботі представлено структуру багатоступеневого стохастичного програмування для прийняття рішень в умовах невизначеності з використанням методу генерації дерев сценаріїв. Аналізується багатоступенева оптимізаційна динамічна задача управління портфелем, в якій активи продаються та купуються кожного періоду для того, щоб згенерувати потік доходів та зберегти портфель збалансованим, близьким до тієї ж самої цільової функції.

Ключові слова: портфель, актив, кореляція, коваріація.

E-mail: o.a.galkina@yandex.ru

Статтю представив: чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анисімов А.В.

Велика кількість дисциплін, таких як машинобудування, фінанси, логістика, економіка і т.д., мають багатоступеневі проблеми прийняття рішень, які обумовлені невизначеністю даних. Подібні проблеми відомі як стохастичні програми, і вони надзвичайно складні для вирішення у тому сенсі, що їх цільові функції та обмеження точно не відомі. Більше того, останнім часом мало місце значне збільшення застосувань кількісних методів та фінансового моделювання в управлінні портфелем. Усі інвестори намагаються знайти стратегії розподілу портфеля для зменшення витрат та передбачити продуктивність для того, щоб підтримувати більш стійкі позиції.

У багатоступеневих проблемах прийняття рішень невизначеності, як правило, представлені за допомогою дерев сценаріїв. Цільова функція вибирається у відповідний спосіб для того, щоб показати усі ризики, пов'язані з послідовністю рішень, які повинні бути прийняті. Після цього, проблема може бути представлена у вигляді лінійної або квадратичної проблеми.

У цій роботі багатоступенева динамічна задача оптимізації вирішується за допомогою методу генерації дерева сценаріїв. Активи в заданій проблемі продаються та купуються кожного періоду для того, щоб згенерувати потік

Olga A. Galkina, postgraduate (PhD)

**Scenario tree generation for multi-stage
stochastic problems**

In this work the multistage stochastic programming framework is presented for decision making under uncertainty using the scenario tree generation method. The multi-period dynamic portfolio optimization problem is analyzed in which the assets are bought and sold each period in order to generate an income stream and keep the portfolio balanced, close to the same target function.

Key words: portfolio, asset, correlation, covariance.

доходів та зберегти портфель збалансованим, близьким до тієї ж самої цільової функції.

Динамічна проблема оптимізації портфеля

Основною метою даної роботи є пошук рішення багатоступеневої динамічної задачі оптимізації портфеля. В цьому розділі, аналізуючи математичну модель динамічної задачі оптимізації, будуть використовуватися наступні позначення:

$x_{i,t}$ - сміксть активу i за період часу t

$r_{i,t}$ - дохід з активу i за період часу t

$u_{i,t}$ - кількість активу i купленого/проданого за період часу t

x^w - цільовий портфель

$\bar{r} = E(r_t)$ - середнє значення доходу

p - параметр відхилення

k - плата за проведення транзакції

Розглянемо наступну динамічну систему ([4]):

$$x_{i,t+1} = (1 + r_{i,t})x_{i,t} + u_{i,t}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T \quad (1)$$

Незважаючи на коливання в доходах,

$$E\left[\|x_t - x^{wor}_t\|_1\right] \leq l p, t = 1, \dots, T$$

$$(2) \quad \beta - CVaR = \alpha + \frac{1}{1-\beta} E\left[(Loss - \alpha)^+\right] \quad (9)$$

необхідно, щоб портфель був близьким до цільового портфелю:

$$x_{i,t} \approx x^{wor}_{i,t}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T \quad (3)$$

Бюджетне обмеження може бути визначене наступним чином:

$$E\left[\sum_{i=1}^I x_{i,t}\right] = \sum_{i=1}^I x^{wor}_{i,t}, t = 1, \dots, T \quad (4)$$

Звідси, динамічна система може бути записана у вигляді:

$$\begin{aligned} x_{i,t+1} &= (1 + \bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t} + u_{i,t}) + \\ &+ (r_{i,t+1} - \bar{r}_{i,t+1})(x^{wor}_{i,t} + (x_{i,t} - x^{wor}_{i,t}) + u_{i,t}) \\ \bar{r}_{i,t} &= E(r_{i,t}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x_{i,t} &\approx x^{wor}_{i,t} \\ u_{i,t} &\ll x_{i,t} \end{aligned}$$

та спрощена до наступного вигляду ([4]):

$$\begin{aligned} x_{i,t+1} &= (1 + \bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t} + u_{i,t}) + \xi_{i,t+1} \\ \xi_{i,t+1} &= (r_{i,t+1} - \bar{r}_{i,t+1})x^{wor}_{i,t} \end{aligned} \quad (6)$$

Набір випадкової змінної ξ заданий у вигляді нормального розподілу:

$$\Xi := x^{wor}_t \left[\xi_t \in R^I : (r - k\delta) \leq \xi_t \leq (r + k\delta) \right] \quad (7)$$

Втрати можуть бути визначені як:

$$Loss = \sum_{t=1}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^I u_{i,t} + k \|u_t\|_1 \right] \quad (8)$$

, де $k \in (0,1)$ - плата за проведення транзакції

Задача мінімізації може бути сформульована у вигляді:

$$\begin{aligned} \min_{x,u,\beta} \alpha + \frac{1}{1-\beta} E\left[(Loss - \alpha)^+\right] \\ s.t.: x_{i,t+1} &= (1 + \bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t} + u_{i,t}) + \\ &+ \xi_{i,t+1}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T \\ E\left[\|x_t - x^{wor}_t\|_1\right] &\leq l p, t = 1, \dots, T \\ E\left[\sum_{i=1}^I x_{i,t}\right] &= \sum_{i=1}^I x^{wor}_{i,t}, t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (10)$$

Багатоступенева динамічна проблема оптимізації портфеля

Багатоступенева динамічна проблема оптимізації портфеля може бути представлена у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \min_{x,u,w,\beta,\gamma} \alpha + \frac{1}{1-\beta} E(w) \\ s.t.: w^{(s)} &\geq \sum_{i=1}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^I u_{i,t}^{(s)} + k \left(\sum_{i=1}^I z_{i,t}^{(s)} \right) \right] - \alpha, s = 1, \dots, S \\ w^{(s)} &\geq 0, s = 1, \dots, S \\ x_{i,t+1}^{(s)} &= (1 + \bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t}^{(s)} + u_{i,t}^{(s)}) + \xi_{i,t+1}^{(s)} \\ i &= 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\ E\left[\sum_{i=1}^I y_{i,t}\right] &\leq l p, t = 1, \dots, T \\ y_{i,t}^{(s)} &\geq x_{i,t}^{(s)} - x^{wor}_{i,t}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\ y_{i,t}^{(s)} &\geq x_{i,t}^{(s)} - x_{i,t}^{(s)}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\ E\left[\sum_{i=1}^I x_{i,t}\right] &= \sum_{i=1}^I x^{wor}_{i,t}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T \\ z_{i,t}^{(s)} &\geq u_{i,t}^{(s)}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\ z_{i,t}^{(s)} &\geq -u_{i,t}^{(s)}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \end{aligned} \quad (11)$$

$$, \text{ де } E(w) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S w^{(s)}.$$

Загальне представлення непередбачуваних обмежень заданої моделі за період часу $t = 1, \dots, T+1$ представлено у Таблиці 1.

Таблиця 1.

Обмеження моделі (11) за період часу $t = 1, \dots, T+1$

$t=1$	$t=2$	$t=3$	...	$t=T$	$t=T+1$
$x_{i1}^{(s)} = x_i^{(s)}$ $i = 1, \dots, I$ $s = 1, \dots, S$	$x_{i2}^{(1)} = \dots = x_{i2}^{(s/2)}$, $x_{i2}^{(s/2+1)} = \dots = x_{i2}^{(s)}$ $i = 1, \dots, I$ $s = 1, \dots, S$	$x_{i3}^{(1)} = \dots = x_{i3}^{(s/4)}$ $x_{i3}^{(s/4+1)} = \dots = x_{i3}^{(s/2)}$ $x_{i3}^{(s/2+1)} = \dots = x_{i3}^{(3s/4)}$ $x_{i3}^{(3s/4+1)} = \dots = x_{i3}^{(s)}$ $i = 1, \dots, I$ $s = 1, \dots, S$		$x_{iT}^{(1)} = x_{iT}^{(2)}$ $x_{iT}^{(3)} = x_{iT}^{(4)}$... $x_{iT}^{(s-1)} = x_{iT}^{(s)}$ $i = 1, \dots, I$	Вільна

Генерація дерев сценаріїв

Для того, що розв'язати багатоступеневу динамічну задачу оптимізації портфеля, значення ξ генеруються з нормального розподілу. Набір випадкової змінної ξ заданий нормальним розподілом:

$$\Xi := x_{i,t+1}^T \left[\xi_i \in R^1 : (\bar{r} - k\delta) \leq \xi_i \leq (\bar{r} + k\delta) \right]$$

$$\xi_{i,t+1} = (r_{i,t+1} - r_{i,t+1})x_i^{(s)}$$

Коваріаційна матриця

Маючи кореляційну матрицю, можна визначити матрицю коваріації, використовуючи наступні формули:

$$\rho(x, y) = \text{cov}(x, y) / \text{std}(x) \text{std}(y)$$

$$\text{cov}(x, y) = \rho(x, y) * \text{std}(x) * \text{std}(y)$$

Генерація випадкових змінних

Для того, щоб знайти випадкові змінні, можна вибрати один з наступних методів:

1. Використати стандартну функцію програми MATLAB `mvnrnd`, що повертає матрицю випадкових векторів, вибраних з нормального розподілу з заданим середнім значенням та коваріацією.

2. Застосувати алгоритм знаходження випадкового вектору X , N -розмірного багатовимірного нормального розподілу, з вектором середніх значень μ та коваріаційною матрицею Σ :

Алгоритм:

- Для будь-якої матриці A знайти: $AA^T = \Sigma$. Розклад Холецкого може використовуватися лише коли Σ є позитивно визначеною. В загальному ж випадку, використовується матриця $A = U\Lambda^{1/2}$, отримана зі спектрального розкладу $\Sigma = U\Lambda U^T \ni \Sigma$.
- Припустимо, що $Z = (z_1, \dots, z_N)^T$ - вектор, компоненти якого є N незалежні значення нормального розподілу.
- Необхідний розподіл $X \in \mu + AZ$.

Для генерації змінної z в програмі MATLAB використовується функція `normrnd` та функція `cholcov` для отримання розкладу Холецкого коваріаційної матриці.

Обмеження для побудови дерев сценаріїв

Для того, щоб побудувати дерево сценаріїв, ми накладасмо наступні обмеження на часові періоди $t = 1, \dots, T+1$:

Таблиця 2.

Обмеження на генерацію дерев сценаріїв

$t=2$	$t=3$	...	$t=T$	$t=T+1$
$\xi_{i,j}^1 = \xi_{i,j}^2 = \dots = \xi_{i,j}^{s/2}$	$\xi_{i,j}^1 = \xi_{i,j}^2 = \dots = \xi_{i,j}^{s/4}$		$\xi_1 = \xi_2$	Вільна
$\xi_{i,j}^{s/2+1} = \xi_{i,j}^{s/2+2} = \dots = \xi_{i,j}^s$	$\xi_{i,j}^{s/4+1} = \xi_{i,j}^{s/4+2} = \dots = \xi_{i,j}^{s/2}$		$\xi_3 = \xi_4$	
	$\xi_{i,j}^{s/2+1} = \xi_{i,j}^{s/2+2} = \dots = \xi_{i,j}^{s/2+s/4}$		...	
	$\xi_{i,j}^{s/2+s/4+1} = \xi_{i,j}^{s/2+s/4+2} = \dots = \xi_{i,j}^s$		$\xi_{s-1} = \xi_s$	

Таблиця 3.

Час виконання моделі (11)

Кількість сценаріїв	Розгалуження	Кількість змінних	Час виконання
20	2	221	2 сек./дерево
80	4	881	6 хв./дерево

Реалізація

Генерація дерев та їх оптимізація виконувалися на машині Intel Core 2 Duo 2.4GHz.

Виконання багатоступеневої динамічної проблеми оптимізації портфеля (11) здійснене лінійним програмним розв'язувачем. Бібліотека YALMIP була обрана для реалізації моделі.

В Таблиці 3 наведені результати генерації сценаріїв, використовуючи бібліотеку YALMIP для одного активу на трьох часових періодах. З даної таблиці очевидним є те, що кількість сценаріїв відіграє ключову роль з точки зору часу виконання моделі.

Результати

Дерева сценаріїв, згенеровані для кожного активу моделі (11), представлені відповідно на Рисунках 1,2,3,4, та 5:

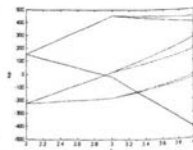


Рис. 1. Дерева сценаріїв для першого активу

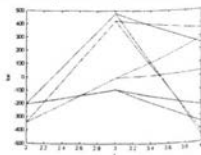


Рис. 2. Дерева сценаріїв для другого активу

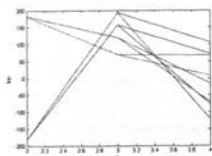


Рис. 3. Древа сценаріїв для третього активу

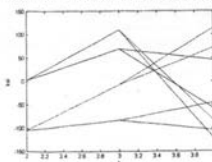


Рис. 4. Древа сценаріїв для четвертого активу

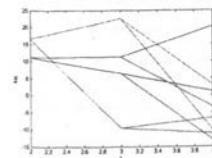


Рис. 5. Древа сценаріїв для п'ятого активу

Графіки прийняття рішень для кожного активу, представлені відповідно на Рисунках 6, 7, 8, 9, та 10:

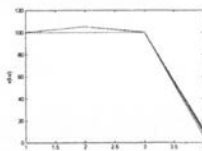


Рис. 6. Графік прийняття рішень для першого активу

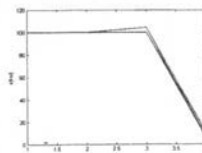


Рис. 7. Графік прийняття рішень для другого активу

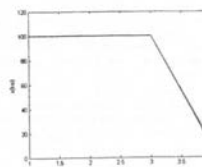


Рис. 8. Графік прийняття рішень для третього активу

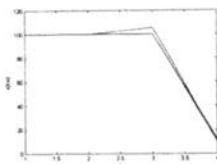


Рис. 9. Графік прийняття рішень для четвертого активу

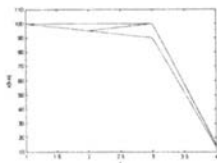


Рис. 10. Графік прийняття рішень для n'яго активу

Висновки

У цій роботі була реалізована та протестована багатоступенева динамічна проблема оптимізації портфеля, використовуючи метод генерації дерев, який є важливою частиною стохастичного програмування. Зважаючи на те, що кількість методів, які застосовуються до даного типу задач досить велика, важливим питанням є вибір саме того методу, який буде працювати краще для даної проблеми, оскільки невдалий метод генерації сценаріїв може зіпсувати результат всієї оптимізації.

Багатоступенева модель оптимізації портфеля вимірюється шляхом тестування з точки зору вартості портфеля, а також процесорного часу, витраченого на створення дерева сценаріїв. Ми протестували модель динамічної оптимізації портфеля та навели результати тестування.

Незважаючи на те, що генерація дерев сценаріїв є досить зручним інструментом для вирішення стохастичних задач, як правило, він призводить до експоненціального зростання розміру проблеми та у деяких випадках такі

проблеми є нерозв'язними для невеликої кількості часових періодів.

Список використаних джерел

1. Boender G.C.E. A hybrid simulation/optimization scenario model for asset/liability management. European Journal of Operational Research, 1997.
2. Fabozzi F. J. Robust portfolio optimization and management, 2007. - p. 17-111.
3. Georghiou A., Wiesemann W., and Kuhn D. Generalized decision rule approximation for stochastic programming via lifting, 2010.
4. Georghiou A., Kuhn D., and Wiesemann W. Decision rule approximations for a dynamic portfolio optimization, 2009.
5. Kaut M. Scenario generation for stochastic programming. Presentation, 2006.
6. Markowitz H.M.. Portfolio selection. J. Finance 7, 1952. - p. 77-91.
7. Palmquist J., Uryasev S., and Krokmal P. Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk objective and Constraints. Dept. of Industrial and Systems Engineering, 2001.
8. Uryasev S. Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications. Financial engineering news, 2000.
9. Uryasev S., Rockafellar R.T. Optimization of conditional value-at-risk. The Journal of Risk, 2(3):21, 2000.
10. L.-Y. YU, X.-D. JI, and S.-Y. WANG. Stochastic Programming models in finance optimization: a survey. AMO – Advanced modeling and optimization, Volume 5, Number 1, 2003.
11. Zanjani M.K., Noureldath M., and Ait-Kadi D. Multi-stage stochastic programming approach for production planning with uncertainty in the quality of raw materials and demand, 2009.

Надійшла до редколегії 20.06.2012

УДК 004.032.6.004.357

О.В.Галкін, канд.фіз.-мат.наук, О.І.Провотар,
доктор фіз.-мат. наук, Л.О.Катеринич, канд. фіз.-
мат.наук, М.М.Верес, канд.фіз.-мат.наук,
А.А.Заміховський

Концепція адаптивного мовлення та системи автоматичної підготовки контенту

Запропоновано реалізацію концепції адаптивного мовлення за допомогою сервера потокового медіа для вирішення проблеми «Останньої милі» - забезпечення достатньої швидкості передачі даних користувачу при використанні сервісів он-лайн трансляції медіа.

Ключові слова: адаптивне мовлення; потокове відео; псевдо потоки

O.Galkin, PhD, O. Provotar, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), L.Katerynych, PhD, M.Veres, PhD, A.Zamihovskiy

The conception adaptive broadcasting and automatic preparing content system.

We proposed the realization of the concept of adaptive broadcast using streaming media server solution for "last mile" - providing sufficient data rate to the user when using online services of broadcast media.

Key words: adaptive broadcasting; streaming video; pseudo streaming.

*E-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua, galkin@unicyb.kiev.ua, veres@ukr.net, katerinich@rambler.ru
Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ

Загальновідомим є той факт, що більшість користувачів мережі Інтернет знають і користуються сервісами онлайн-трансляції медіа. До найбільш популярних можна віднести такі проекти як YouTube та російський аналог RuTube. Але не один із них не враховує проблему «Останньої милі», тобто швидкість передачі каналу користувача фізично не дозволяє програвачу відтворювати та завантажувати медіа контент високої якості який представлений на сторінках відео сервісів. Варіанти вирішення даної проблеми викладені в концепції адаптивного мовлення. На відміну від традиційного мовлення, в процесі відтворення контенту враховується умови в яких знаходиться кінцевий користувач, тобто його поточна пропускання швидкість мережі. Якщо швидкість з'єднання недостатня то якість зображення зменшується і навпаки, якщо є можливість перегляду медіа кращої якості, то відбувається перехід на вищу якість даних. Існує багато варіантів реалізації технології адаптивного мовлення, одною з цікавих є трансляція на сервері потокового медіа двох потоків певного контенту з різними показниками якості та використання

кадрів з потоку вищої якості та нижчої в залежності від умов на стороні клієнта [1]. Не менш цікавим є варіант трансляції контенту використовуючи кодування в реальному часі де зміна показників якості контролюється ключовим кадром, за допомогою якого можливо проводити кодування з будь-якої частини медіа контенту [2]. Але така можливість потребує надто багато ресурсів серверу. Існує також варіант використання специфічного контейнеру для зберігання відеоданих в декількох потоках з можливостями компресії. Даний контейнер має назву MVC (Multiview Video Coding), який входить до набору алгоритмів H.264/AVC, що запатентовані і не доступні для широкого використання [3].

Найвідомішою реалізацією даної ідеї є технологія IIS Smooth Streaming від компанії Microsoft [4]. В основі даної технології використовується сервер Microsoft IIS, а в якості протоколу передачі між клієнтом та сервером використовується протокол HTTP. Для того щоб була можливість організувати адаптивне мовлення на сервері заздалегідь підготовлюються відеоролики з різними

показниками якості, такими як бітрейт та роздільна здатність. За допомогою даної технології вирішена проблема швидкого початку відтворення, з самого початку клієнту передається фрагмент найнижчої якості, який швидко доставляється і починається його відтворення, потім, якщо дозволяє пропускна швидкість каналу, якість збільшується відповідно до апаратних можливостей користувача. Взаємодія між сервером і клієнтом проходить в такій послідовності:

1. Програвач проводить запит до сервера по протоколу HTTP, і запитує відео-фрагмент певної довжини (в більшості випадків це фрагмент довжиною в 2 секунди).
2. На початку відтворення запитується фрагмент найнижчої якості, який швидко доставляється до програвача і починається його відтворення.
3. На основі даних отриманих при передачі першого фрагменту визначаються можливості користувача та наступний фрагмент запитується з врахуванням даних які були отримані при доставці попереднього фрагменту.

Цей процес повторюється постійно поки не буде припинено відтворення медіа-контенту на стороні користувача. Таким чином медіа-контент може відтворюватися в різні моменти часу з різними показниками якості, які залежать від поточних можливостей користувача.

Для даної технології використовується специфічна підготовка медіа-контенту. В результаті кодування отримується набір підготовлених медіа-потоків з різною роздільною здатністю, які упаковані в файл з розширенням «.ismv». Також підготовлюється файл маніфесту (.ism). У файлі маніфесту зберігається інформація про медіа-контент, а також список доступних відео-потоків. На початку відтворення проводиться запит до файлу маніфесту який і надає інформацію про доступні ресурси. Щоб отримати інформацію про наявні ресурси необхідно провести запит до .ism файлу з параметром «Manifest» тобто виду:

«http://.../media.ism/Manifest», у відповідь отримаємо XML-файл з описом доступних відео потоків та їх показників якості, саме на основі цих даних програвач приймає рішення щодо зміни якості зображення в залежності від умов відтворення. Також у файлі маніфесту задається шаблон URL для запиту фрагменту відео-файлу, у більшості випадків використовується даний шаблон «QualityLevels({bitrate})/Fragments(video={start time})». У секції {bitrate} задається показник якості відео-фрагменту, а у секції {start time} позиція відтворення фрагменту.

Таким чином клієнт і сервер знаходяться в постійному зв'язку між собою, що дає можливість реагувати на зміни умов клієнта, а також проводити збір певної статистичної інформації.

На сьогодні відомі декілька варіантів реалізації технології адаптивного мовлення, це Microsoft Smooth Streaming for Silverlight, що згадувалась вище, Apple HTTP Adaptive Streaming for iPhone/iPad та Adobe Dynamic Streaming for Flash. Всі вони мають певну особливість, для їх функціонування необхідно мати спеціалізований сервер для проведення трансляції по протоколу HTTP. Запропонований нижче підхід, дозволить реалізувати технологію адаптивного мовлення без використання спеціалізованих серверів відповідних компаній. В його основі лежить принцип використання технології передачі відео по протоколу RTMP та зміна характеристик відео потоку в залежності від умов користувача, а в подальшому перенесення проміжної обробки на клієнтську сторону за допомогою технології псевдо потоків (англ. *pseudo streaming*). Окрім того, запропонована система також включає програмне забезпечення для автоматичної обробки відео контенту на основі статистичних даних, отриманих від користувачів даного ресурсу.

Опис системи

Основна ідея системи полягає в тому щоб надати користувачеві якісно підготовлений контент для перегляду в режимі он-лайн, зважаючи на пропускну можливість його мережі. Одним із можливих варіантів

реалізації даної ідеї є підготовка відеоматеріалів з різними показниками якості, щоб можливо було передавати контент по мережі без затримок. Зважаючи на проблему «останньої милі» також необхідно контролювати процес відтворення задля того щоб оперативно реагувати на зміну пропускної швидкості каналу мережі.

Система складається з двох частин. Перша частина відповідає за доставку контенту кінцевому користувачеві, контроль за зміною пропускної швидкості мережі та відповідні реагування на ці зміни. Друга частина являє собою програмний комплекс, який створений задля того, щоб полегшити процес додавання нового контенту на сервер та його попередню обробку, також він відповідає за обробку статистичних даних та автоматичну підготовку відеоматеріалів в залежності від потреб користувачів.

Серверна частина написана у вигляді Java Enterprise проекту, з'єднання з базою даних забезпечується за допомогою технології EJB. Під час входу на початкову сторінку проекту відбувається вимірювання пропускної швидкості мережі клієнта, на основі отриманих даних генеруються посилання на контент, який в даний момент знаходиться на сервері. Вибір оптимального варіанту відео файлу проводиться на стороні сервера, servlet на основі отриманих даних проводить підбір розміру файлу, який в даний момент наявний в системі. Якщо не знайдено жодного відео файлу, який задовольнив би потреби користувача, то обирається найближчий, із наявних даних, до отриманого запиту зі сторони користувача. Дані про пропускну спроможність та дату відвідання сайту заносяться до бази даних для подальшої обробки та підготовки відповідних матеріалів. Під час перегляду наданого контенту може виникнути ситуація коли швидкість мережі може змінитись і користувачеві буде некомфортно переглядати обраний матеріал, саме на цю ситуацію орієнтований набір коду який виконується на стороні користувача і відслідковує такого роду зміни. В даній реалізації присутня система перевірки в основі якої лежить відслідковування часу

прогнозованого відтворення в порівнянні з фактичним часом, впродовж якого відбувалося відтворення. Якщо фактичні й прогнозовані результати не збігаються, користувачеві автоматично проводиться зміна контенту на один із тих, що на даний момент наявні в системі, якщо такий матеріал відсутній то зміна не проводиться, а в базу даних додаються дані про необхідність підготовки відео з відповідними показниками якості. Зміна відеороликів «на льоту» є однією із основних проблем відтворення контенту, тому що необхідно приховати сам факт зміни від користувача. Дану проблему можна вирішити лише за рахунок медіа сервера, додавши до нього можливість попереднього завантаження фрагментів даних до початку їх відтворення. У разі використання комерційного варіанту WOWZA Media Server, то тут лише присутня можливість створити додаток до серверу, використовуючи відкрите API для розробників. У випадку Open Source проєктів, таких як Red5 Media Server, залишається лише можливість редагування вихідних кодів та ручного збирання проєкту. Технологія Microsoft IIS Smooth Streaming [4] вирішує дану проблему за рахунок протоколу передачі даних, кожен фрагмент відеоряду відправляється сервером та одночасно відтворюється програвачем на стороні клієнта, у разі отримання інформації про зміну пропускної спроможності просто змінюється наступний пакет на інший в залежності від необхідних показників якості. Отже, повертаючись до аспектів реалізації проєкту, слід відмітити не останню роль програмного забезпечення та його використання. Для збереження інформації про наявний контент необхідно використовувати вискоєфективну базу даних, виходячи з міркувань загальнодоступності інструментарію було обрано СУБД MySQL, яка на даний момент є найдоступнішою та відносно стабільною серед інших Open Source проєктів. Нижче продемонстрована структура бази даних, яка використовується в системі (рис. 1).



Рис.1 Структура бази даних

Як видно із структури БД, основною є таблиця яка містить інформацію про наявні в системі ролики в оригінальному (незжатому) вигляді під назвою "vidorig". Саме звідси веб-інтерфейс отримує інформацію про наявний контент. Таблиця "vidcoded" містить інформацію про кодовані відео ролики, одне з полів яких зв'язане з ключовим полем таблиці оригінальних даних, що дозволяє контролюючим частинам на стороні сервера отримувати достовірну інформацію про наявні розміри та бітрейти варіантів підготовки матеріалів. Не менш важливою є таблиця "lowreq", в якій розміщуються запити на зміну якості відео у процесі його перегляду. Дана таблиця містить у собі ключове поле по якому відбувається зв'язок з даними про оригінальні відео ролики, також присутнє поле, що відповідає за кількість таких запитів та поле зі значенням найнижчого бітрейту загалом по певному ролику. Під час роботи системи автоматичної підготовки матеріалів, дані відсортовуються по кількості запитів і контент з більшим рейтингом обробляється в першу чергу. Для ведення певних статистичних спостережень, а в подальшому і прогнозування певних дій спирається на таблиці "topvideos" та "stats". Перша з них використовується для аналізу популярності певних відео роликів та в

подальшому збільшення їх пріоритету при попередній обробці, в іншій накопичується інформація про пропускну спроможність каналу користувачів ресурсу, на основі цих даних планується проводити аналіз оптимального розміру відео файлу для його комфортного перегляду. В подальшому планується відмовитися від збереження інформації про кодовані відео ролики у базі даних, більш ефективним та зручним буде створення файлу метаданих, що й буде містити всю необхідну інформацію про наявність інформації в системі, також це дозволить зменшити навантаження на сервер бази даних.

Як згадувалося раніше, друга частина проекту відповідає за автоматичну підготовку необхідних матеріалів. Для виконання цих та інших функцій необхідно мати програмний продукт який має можливість перекодування відео файлів з одного формату в інший з використанням необхідних кодеків (англ. CODEC – Coder Decoder). Всім цим вимогам задовольняє безкоштовна Open Source утиліта під назвою FFMpeg (<http://ffmpeg.org>), даний програмний продукт надає користувачеві інтерфейс командного рядка для виконання усіх задач кодування та підтримує ті формати відео, які використовуються для трансляції по мережі.

Під час розробки даної частини проекту було реалізовано програмний інтерфейс до командного рядка FFMpeg. Його основна задача полягає у підготовці командного рядка в залежності від заданих параметрів якості відповідного контенту. В процесі розробки виникла необхідність зчитування метаданих (довжина ролику, бітрейт, розмір файлу, роздільна здатність), для вирішення цієї проблеми було використано також FFMpeg, але в режимі зчитування інформації про файл. Щоб отримати ці дані використовується перенаправлення потоків стандартного вводу/виводу (stdin/stdout) та подальший розбір отриманих даних. Інформація про новий підготовлений контент заноситься до бази даних і стає доступною для використання. У даній частині проекту реалізований прямий доступ до бази даних.

що спрощує передачу інформації між сервером бази даних та даної програми. Програма виконується постійно і з заданим інтервалом перевіряє базу даних на наявність нових запитів, якщо такі присутні, то вона починає підготовку і кодування відповідних відео файлів. Паралельно з потоком в якому проводиться аналіз та обробка, працює потік який обробляє команди користувача. Завдяки цим командам користувачеві надана можливість керування обробкою інформації. Для задоволення потреб користувачів система дозволяє автоматично готувати необхідний матеріал на основі аналізу отриманої статистики. В процесі активності користувача збирається інформація про переглянуті ним відеоролики, пропускну швидкість його Інтернет з'єднання та кількість запитів на зміну якості матеріалу. Отримані дані сортується по спаданню від найпопулярнішого контенту до менш популярного, таким чином готується в першу чергу матеріал який найбільш затребуваний користувачами. Процес підготовки починається відразу після перевірки наявності необхідної інформації в системі, інтервал перевірки задається адміністратором системи в залежності від навантаження.

Доцільно також зупинитися більш детально на функціоналі програми підготовки контенту. Як згадувалося раніше користувачеві надана можливість змінювати параметри виконання під час роботи. Основні операції керування здійснюються за допомогою командного рядка та мають певний синтаксис. Детальний опис команд наведено нижче:

/bwp – виведення інформації про місцезнаходження файлів основного контенту, тобто папки в якій знаходиться відеоматеріал, як кодований так і оригінальний.

/dbh – виведення Інтернет адреси сервера бази даних у вигляді "host:port".

/dbu – відображення назви активного профілю користувача бази даних.

/newdb – за допомогою даної команди користувачеві надається можливість змінювати параметри з'єднання з сервером

баз даних. Команда відпрацьовує в діалоговому режимі і пропонує заповнити поля необхідні для успішного з'єднання, у разі якщо введені дані не відповідають дійсності і неможливо встановити зв'язок, то повертаються параметри попереднього успішного з'єднання. Відповідна процедура повторюється також під час першого запуску програми і не дозволяє запуск основного циклу обробки без успішного під'єднання до бази даних. Саме на етапі роботи з базою даних виникла основна проблема безкоштовного програмного забезпечення, неякісний допоміжні бібліотеки. Справа в тому, що драйвер з'єднання з БД, який розповсюджується у комплекті з СУБД MySQL, абсолютно неможливо використовувати при розробці. Окрім того що некоректно встановлюється з'єднання, яке може бути розірвано без видимих на те причин, відтік оперативної пам'яті є більш ніж помітним, після завершення одного процесу комунікації з базою даних, кількість оперативної пам'яті збільшується на 1 Mb, що у будь-якому випадку є неприпустимим. Після невдалих пошуків з'ясувалося, що дана проблема саме у драйвері, тому було знайдено більш функціональну та стабільну заміну в проекті MySQL++, ознайомитися можна за посиланням <http://tangentsoft.net/mysql++/>.

/currnt – виведення інтервалу затримки при повторній перевірці та підготовці відеоматеріалів.

/chint <interval> – команда для зміни інтервалу перевірки. Значення інтервалу вводиться у форматі "seconds-minutes-hours-days", що допускає введення лише необхідного значення, але в строгому порядку зліва направо.

/exit – завершення роботи основної програми.

/addv – команда використовується для додавання нових відео файлів у систему. Основне її призначення максимально зменшити кількість дій зі сторони користувача. Отже у діалоговому режимі користувачеві пропонуються ввести інформацію про місцезнаходження відео файлу та ім'я яке буде відобразитися у веб

інтерфейсі системи. У автоматичному режимі проводиться внесення відповідної інформації у базу даних та розпочинається позачерговий процес підготовки кодованого відео у найвищій якості яка доступна у налаштуваннях програми. Для отримання всієї інформації використовується декілька допоміжних засобів для попередньої обробки, використовуються такі засоби як отримання інформації з метаданих вихідного відео файлу та внесення її у кодовані файли.

Отримання метаданих з файлу проводиться шляхом запуску утиліти FFmpeg у режимі читування, щоб провести усі необхідні маніпуляції відбувається захоплення вихідного потоку утиліти та його подальший розбір з перетворенням отриманої інформації у необхідну форму. Перекодування проходить за допомогою утиліти FFmpeg, на вхід якої подається підготовлений командний рядок який генерується у автоматичному режимі і включає всю необхідну інформацію як про вхідні дані так і про вихідні.

Заключення

В даній статті було продемонстровано один із варіантів реалізації концепції адаптивного мовлення за допомогою сервера потокового медіа. Ключовою відмінністю даного підходу є те, що для організації адаптивного мовлення не потрібно використовувати спеціалізовані веб-сервери, використання та обслуговування яких потребує значних капіталовкладень.

Також було запропоновано варіант системи автоматичного адміністрування та підготовки медіа контенту на основі аналізу статистичних даних зібраних іншою частиною проекту, яка спрошує

адміністрування та дозволяє раціонально використовувати простір носіїв зберігання інформації. Проте в подальшому планується взагалі відмовитися від використання серверів потокового медіа на користь системи псевдо потоків (англ. *Pseudo streaming*). Дана технологія дозволяє, лише додаванням до веб-серверу спеціалізованого обробника запитів, реалізувати систему відтворення відео з довільної позиції. Завдяки цьому з'являється можливість реалізації концепції адаптивного мовлення без використання допоміжного програмного забезпечення для потокового мовлення.

Список використаних джерел

1. Xiaoyan Sun, Feng Wu, Shipeng Li, Wen Gao, Ya-Qin Zhang "Seamless switching of scalable video bitstreams for efficient streaming"// IEEE Transaction on multimedia, Vol. 6, N.2, 2004, pp 291-303
2. Xiaoyan Sun, Feng Wu, Shipeng Li, Guobin Shen, Wen Gao "Drift-Free Switching of Compressed Video Bitstreams at Predictive Frames"// IEEE Trans. on Circuits Systems for Video Technology. Vol. 16, no. 5, May 2006, pp. 565-576.
3. Xun Guo, Yan Lu, Feng Wu, Wen Gao, Shipeng Li "Free Viewpoint Switching in Multi-view Video Streaming Using Wyner-Ziv Video Coding"// SPIE Visual Communications and Image Processing, VCIP 2006, San Jose, CA, USA, Jan. 2006
4. Microsoft IIS Smooth Streaming technology http://jmvvm.vse.cz/wp-content/uploads/2011/05/t_IIS_Smooth_Streaming_Technical_Overview.pdf

Надійшла до редакції 22.05.12

УДК 004.655

Глушко* І.М., аспірантка

Розширена (некласична) таблицяна алгебра

Узагальнена таблицяна алгебра поповнена новими операціями: операціями внутрішніх і зовнішніх з'єднань, операцією напівз'єднання, зовнішніми множинними операціями, агрегатними операціями. Для задання зовнішніх операцій введено особливий елемент універсального домену NULL.

Ключові слова: реляційні бази даних, таблицяна (реляційна) алгебра, розширена таблицяна алгебра.

*E-mail: glushkoim@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

У монографії [1] розглянуто класичний варіант таблицяної алгебри, а у роботі [2] проведено узагальнення таблицяної алгебри, яке полягає в тому, що під реляцією розуміється довільна множина одноосемних рядків, зокрема, нескінченна. Крім того, кожній таблиці приписується певна схема. Задано основні операції над таблицями. Проте для задоволення потреб мов запитів (зокрема, SQL) класична таблицяна алгебра потребує поповнення її новими операціями, зокрема, операціями внутрішніх і зовнішніх з'єднань, операцією напівз'єднання, зовнішніми множинними операціями, агрегатними операціями.

Операції внутрішнього з'єднання

Усі невизначені тут поняття розуміємо в сенсі роботи [2]. Розглядаємо дві множини: A – множину атрибутів і D – універсальний домен.

Під таблицяною алгеброю нескінченних таблиць розуміємо алгебру $(T, \Omega_{P, \Xi})$, де T – множина усіх таблиць, $\Omega_{P, \Xi} = \{ \cup, \cap, \setminus, \sigma_{p, \xi}, \pi_{X, R}, \otimes_{R_1, R_2}, +_{R_1, R_2}, R_{\xi, \lambda}, -_R \}$ – сигнатура, $p \in P, \xi \in \Xi$; $X, R, R_1, R_2 \subseteq A$; P, Ξ – множини параметрів. Під (узагальненою) таблицею схеми R розуміємо пару $\langle t, R \rangle$, де t –

І.М. Glushko*, postgraduate student

Extending (nonclassical) table algebra

Generalized table algebra is filled up with new operations such as inner and outer joins, semijoin, outer set operations and aggregate operations. The special element NULL is inserted in the universal domain for a define of outer operations.

Key words: relation databases, table (relation) algebra, extending table algebra.

множина (зокрема, нескінченна) рядків схеми R . Позначимо через $T(R) = \{ \langle t, R \rangle \mid t \in P(S(R)) \}$ множину усіх (узагальнених) таблиць схеми R , а через $T = \bigcup_{R \subseteq A} T(R)$ множину всіх таблиць, де $P(X)$ – булеан множини X .

Задамо операції внутрішнього з'єднання.

Під декартовим з'єднанням (Cartesian join) таблиць схем R_1 та R_2 , причому $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, розуміється бінарна параметрична операція вигляду

$$Cj_{R_1, R_2} : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2), \\ \langle t_1, R_1 \rangle Cj_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \{ \langle s \mid \exists s_1 \exists s_2 (s_1 \in t_1 \wedge s_2 \in t_2 \wedge s = s_1 \cup s_2) \rangle, R_1 \cup R_2 \}, \text{ де } \langle t_1, R_1 \rangle \in T(R_1), \\ \langle t_2, R_2 \rangle \in T(R_2).$$

Під внутрішнім природним з'єднанням (inner natural join) таблиць схем R_1 та R_2 розуміється бінарна операція $\otimes_{R_1, R_2}$, значеннями якої є таблиці схеми $R_1 \cup R_2$, що складаються з усіх об'єднань сумісних рядків вихідних таблиць.

Отже, $\otimes_{R_1, R_2} : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$,

$$\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \{ \langle s \mid \exists s_1 \exists s_2 (s_1 \in t_1 \wedge s_2 \in t_2 \wedge s = s_1 \cup s_2) \rangle, R_1 \cup R_2 \}, \text{ де } \langle t_1, R_1 \rangle \in T(R_1), \\ \langle t_2, R_2 \rangle \in T(R_2).$$

Під внутрішнім з'єднанням за атрибутами $A_1, \dots, A_n$ (inner join using $A_1, \dots, A_n$), причому всі $A_1, \dots, A_n$ попарно різні, $n \geq 1$, таблиць схем R_1 та R_2 , де $R_1 \cap R_2 = \{A_1, \dots, A_n\}$, розуміється бінарна

$$\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{A_1, \dots, A_n, R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \left\{ \{s \mid \exists s_1 \exists s_2 \left(s_1 \in t_1 \wedge s_2 \in t_2 \wedge \bigwedge_{i=1}^n s_i(A_i) = s_2(A_i) \wedge s = s_1 \cup s_2 \right), R_1 \cup R_2 \right\},$$

де $\langle t_1, R_1 \rangle \in T(R_1)$, $\langle t_2, R_2 \rangle \in T(R_2)$.

Зауважимо, що при з'єднанні за атрибутами $A_1, \dots, A_n$ перетин схем таблиць-аргументів, взагалі кажучи, виключає перелічені атрибути. Якщо таблиці-аргументи мають ще й інші спільні атрибути, які відрізняються від атрибутів $A_1, \dots, A_n$, то перед з'єднанням їх потрібно перейменувати.

Нехай $p: S \times S \rightarrow \{true, false\}$ – частковий бінарний предикат на множині всіх рядків S , такий, що виконується імплікація $\forall s_1 \forall s_2 ((s_1, s_2) \in \text{dom } p \wedge p(s_1, s_2) = true \Rightarrow s_1 = s_2)$.

$$\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{p, R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \left\{ \{s \mid \exists s_1 \exists s_2 (s_1 \in t_1 \wedge s_2 \in t_2 \wedge p(s_1, s_2) = true \wedge s = s_1 \cup s_2)\}, R_1 \cup R_2 \right\}.$$

Зрозуміло, що пара таблиць $\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle$ належить вказаній області означеності.

Позначимо через $\langle t, R \rangle_1$ першу компоненту пари $\langle t, R \rangle$, тобто множину t . Операція природного з'єднання $\otimes_{R_1, R_2}$ є розширенням довільної іншої операції з'єднання в наступному розумінні: $\langle t_1, R_1 \rangle \underset{R_1, R_2}{Cj} \langle t_2, R_2 \rangle = \langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle$,

$$\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{A_1, \dots, A_n, R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle,$$

$$\left(\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{p, R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle \right)_1 \subseteq \left(\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle \right)_1, \text{ за}$$

$$\langle t_1, R_1 \rangle \times_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \left\{ \{s_1 \mid \exists s_2 (s_1 \in t_1 \wedge s_2 \in t_2 \wedge s_1 = s_2)\}, R_1 \right\},$$

де $\langle t_1, R_1 \rangle \in T(R_1)$, $\langle t_2, R_2 \rangle \in T(R_2)$.

параметрична операція вигляду
 $\otimes_{A_1, \dots, A_n, R_1, R_2}: T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2),$

В мові SQL предикат p задається в термальній формі.

Під внутрішнім з'єднанням за предикатом p (inner join on p) таблиць схем R_1 та R_2 розуміється часткова бінарна параметрична операція вигляду

$$\otimes_{p, R_1, R_2}: T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2),$$

$$\text{dom } \otimes_{p, R_1, R_2} = \{ \langle \langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle \rangle \mid t_1 \times t_2 \subseteq \text{dom } p \}.$$

умови визначення значень операцій у лівих частинах цих двох рівностей та включення.

Задамо операцію напівз'єднання (semi join). Під операцією напівз'єднання двох таблиць схем R_1 та R_2 розуміється бінарна параметрична операція $\times_{R_1, R_2}$, значенням якої є таблиця схеми R_1 , що містить ті рядки першої таблиці, які входять у природне з'єднання вихідних таблиць.

$$\text{Таким чином, } \times_{R_1, R_2}: T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1),$$

Операцію напівз'єднання також можна виразити через операції проєкції та з'єднання:

$$\langle t_1, R_1 \rangle \times_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \pi_{R_1, R_1 \cup R_2} \left(\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle \right).$$

Операції зовнішнього з'єднання

При застосуванні операцій внутрішнього з'єднання можлива втрата інформації, оскільки

рядки однієї таблиці, які не з'єднуються з рядками іншої таблиці, не будуть включені в результуючу таблицю. В тих випадках, коли необхідно врахувати рядки таблиць-аргументів,

які не попали в результат вихідного внутрішнього з'єднання, використовують операції зовнішнього з'єднання.

Для позначення відсутніх значень у результатуючій таблиці використовуються особливий елемент універсального домену $NULL$. Позначимо через s_R^{NULL} константний рядок схеми R , тобто $s_R^{NULL} : R \rightarrow \{NULL\}$.

Існує одна логічна схема задання операцій зовнішнього з'єднання [1]. Нехай $\varphi : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$ – деяка часткова бінарна операція на множині таблиць, причому виконується

$$\{\varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle)\} \subseteq \left(\langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle \right)_1 \quad \text{для}$$

всіх $\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle \in \text{dom } \varphi$. Зауважимо, що операції $C_j : \otimes_{R_1, R_2} \otimes_{R_1, R_2} \otimes_{R_1, R_2} \otimes_{R_1, R_2} \otimes_{R_1, R_2}$ саме такі.

Зафіксуємо таблиці $\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle$ з області означеності операції φ . Тоді таблиця $\langle t_1, R_1 \rangle$ припускає наступне представлення:

$$\langle t_1, R_1 \rangle = \left\langle t_1 \cap t_2, R_1 \right\rangle \cup_{R_1} \left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle, \quad \text{де}$$

$$\left\langle t_1 \cap t_2, R_1 \right\rangle = \left\langle \{s_1 \mid s_1 \in t_1 \wedge \exists s_2 (s_2 \in t_2 \wedge s_1 \cup s_2 \in \{\varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle)\})\}, R_1 \right\rangle,$$

$$\left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle = \left\langle \{s_1 \mid s_1 \in t_1 \wedge \forall s_2 (s_2 \in t_2 \Rightarrow s_1 \cup s_2 \notin \{\varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle)\})\}, R_1 \right\rangle.$$

Іншими словами, рядки з таблиці $\left\langle t_1 \cap t_2, R_1 \right\rangle$ використовуються у формуванні результату з'єднання, а рядки з таблиці $\left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle$ не використовуються. Зауважимо, що таблиця $\left\langle t_1 \cap t_2, R_1 \right\rangle$ є по суті напівз'єднанням таблиць $\langle t_1, R_1 \rangle$ та $\langle t_2, R_2 \rangle$. Представлення таблиці $\langle t_2, R_2 \rangle$ отримаємо, замінивши ролі таблиць $\langle t_1, R_1 \rangle$, $\langle t_2, R_2 \rangle$ у представленні таблиці $\langle t_1, R_1 \rangle$.

Задамо чотири операції зовнішнього з'єднання, індуковані операцією внутрішнього з'єднання φ . Для цього розглянемо наступні природні з'єднання:

$$\begin{aligned} & \left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle \otimes_{R_1, R_2} \left(\{s_R^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \right) = \\ & = \left\langle \left\{ s_1 \cup s_R^{NULL} \mid s_1 \in t_1 - t_2 \right\}, R_1 \cup R_2 \right\rangle, \\ & \left\langle t_2 - t_1, R_2 \right\rangle \otimes_{R_2, R_1} \left(\{s_{R_1}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \right) = \\ & = \left\langle \left\{ s_{R_1}^{NULL} \cup s_2 \mid s_2 \in t_2 - t_1 \right\}, R_1 \cup R_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Під зовнішнім лівим з'єднанням, індукованим операцією φ (outer left join), розуміється часткова бінарна операція вигляду $\varphi_l : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$, де

$$\begin{aligned} \text{dom } \varphi_l &= \text{dom } \varphi, \\ \varphi_l(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle) &= \varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle) \cup_{R_1 \cup R_2} \\ & \cup_{R_1 \cup R_2} \left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle \otimes_{R_1, R_2} \left(\{s_{R_2}^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \right). \end{aligned}$$

Під зовнішнім правим з'єднанням, індукованим операцією φ (outer right join), розуміється часткова бінарна операція вигляду $\varphi_r : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$, де

$$\begin{aligned} \text{dom } \varphi_r &= \text{dom } \varphi, \\ \varphi_r(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle) &= \varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle) \cup_{R_1 \cup R_2} \\ & \cup_{R_1 \cup R_2} \left\langle t_2 - t_1, R_2 \right\rangle \otimes_{R_2, R_1} \left(\{s_{R_1}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \right). \end{aligned}$$

Під повним зовнішнім з'єднанням (outer full join) розуміється часткова бінарна операція вигляду $\varphi_f : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$, де

$$\begin{aligned} \text{dom } \varphi_f &= \text{dom } \varphi, \\ \varphi_f(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle) &= \varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle) \cup_{R_1 \cup R_2} \\ & \cup_{R_1 \cup R_2} \left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle \otimes_{R_1, R_2} \left(\{s_{R_2}^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \right) \cup_{R_1 \cup R_2} \\ & \cup_{R_1 \cup R_2} \left\langle t_2 - t_1, R_2 \right\rangle \otimes_{R_2, R_1} \left(\{s_{R_1}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \right). \end{aligned}$$

Під зовнішнім з'єднанням об'єднанням (union join) розуміється часткова бінарна операція вигляду $\varphi_u : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$, де

$$\begin{aligned} \text{dom } \varphi_u &= \text{dom } \varphi, \\ \varphi_u(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle) &= \\ & = \left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle \otimes_{R_1, R_2} \left(\{s_{R_2}^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \right) \cup_{R_1 \cup R_2} \\ & \cup_{R_1 \cup R_2} \left\langle t_2 - t_1, R_2 \right\rangle \otimes_{R_2, R_1} \left(\{s_{R_1}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \right). \end{aligned}$$

¹ Запис $\{\varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle)\}$ позначає першу компоненту таблиці $\varphi(\langle t_1, R_1 \rangle, \langle t_2, R_2 \rangle)$.

Зовнішні множинні операції

Крім операцій зовнішніх з'єднань виділяють також «зовнішні» версії операцій об'єднання, перетину та різниці [3]. Зовнішні множинні операції застосовуються до таблиць, які мають різні схеми, але деякі атрибути цих схем є однаковими. Так, Кодд [3] задає дані операції, використовуючи поняття близького аналогу,

при уточненні є бінарним відношенням на множинах рядків двох таблиць. Детальний аналіз цього відношення та наведених у [3] прикладів показує, що відношення близького аналогу збігається з відношенням сумісності рядків. Тому при заданні зовнішніх множинних операцій будемо використовувати саме відношення сумісності двох рядків.

Таблиця 1

Прізвище	Ім'я	Група	Факультет	Рік н
Бахов	Семен	МІ-11	Фізико-математичний	1991
Бойко	Іван	МЕз-31	Фізико-математичний	1988
Кайдан	Юлія	ІІІ-16	Історико-правознавчий	1991
Микитюк	Ірина	АН-12	Іноземних мов	1990
Наменко	Аліна	УАЗ-21	Філологічний	1989

Спортсмени

Таблиця 2

Прізвище	Ім'я	Група	Форма навч
Борода	Ігор	ПФ-41	Денна
Бойко	Іван	МЕз-31	Заочна
Кайдан	Юлія	ІІІ-16	Денна
Поданюк	Павло	СІ-11	Денна

Відмінники

Розглянемо дві таблиці $\langle t_1, R_1 \rangle$ і $\langle t_2, R_2 \rangle$, причому $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$. Задамо операції зовнішнього об'єднання, зовнішньої різниці та зовнішнього перетину.

Для всіх операцій схема результатуючої таблиці дорівнює об'єднанню схем таблиць-аргументів.

Під зовнішнім об'єднанням (outer union) таблиць схем R_1 та R_2 , розуміється бінарна параметрична операція вигляду $\bigcup_{R_1, R_2} / ^2: T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$, де

$$\begin{aligned} \langle t_1, R_1 \rangle \setminus \bigcup_{R_1, R_2} / \langle t_2, R_2 \rangle &= \langle \langle t_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle \rangle \bigcup_{R_1, R_2} \left(\langle t_1 - t_2, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle \right) \bigcup_{R_1, R_2} \langle \{s_{R_2 \setminus R_1}^{NULL}, R_2 \setminus R_1\} \cup_{R_1, R_2} \langle t_1, R_1 \rangle \rangle \end{aligned}$$

$$\bigcup_{R_1, R_2} \left(\langle t_2 - t_1, R_2 \rangle \otimes_{R_2, R_1} \langle \{s_{R_1 \setminus R_2}^{NULL}, R_1 \setminus R_2\} \rangle \right), \text{ де}$$

$$\left\langle t_1 - t_2, R_1 \right\rangle = \left\langle t_1 -_{\varphi} t_2, R_1 \right\rangle, \text{ а } \varphi - \text{ операція}$$

внутрішнього природного з'єднання і $\langle t_1, R_1 \rangle \in T(R_1)$, $\langle t_2, R_2 \rangle \in T(R_2)$.

Таким чином, результатуюча таблиця містить рядки, отримані в наслідок усяких об'єднань сумісних рядків таблиць-аргументів і рядки першої та другої таблиць, які не використовуються при формуванні результату з'єднання, поповненні значенням NULL для позначення відсутніх значень.

Операція зовнішнього об'єднання співпадає з операцією повного зовнішнього з'єднання у випадку, коли операція φ є операцією внутрішнього природного з'єднання.

Приклад 1. Розглянемо дві таблиці $\langle \text{Спортсмени}, R_1 \rangle$, де $R_1 = \{\text{Прізвище, Ім'я, Група, Факультет, Рік н}\}$, $\langle \text{Відмінники}, R_2 \rangle$, де $R_2 = \{\text{Прізвище, Ім'я, Група, Форма_навч}\}$ (див. табл. 1 та табл. 2 відповідно).

² Для позначення зовнішніх множинних операцій, як і Кодд, використовуємо знаки $\setminus, /$, при цьому вказуємо ще схеми таблиць-аргументів.

Результатом виконання операції зовнішнього об'єднання даних таблиць є табл. 3 зі схемою $R_1 = \{\text{Прізвище, Ім'я, Група, Факультет, Рік}_n, \text{Форма навч.}\}$.

Для операції зовнішнього об'єднання має місце рівність

$$\langle t_1, R_1 \rangle \setminus \cup_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \langle t_2, R_2 \rangle \setminus \cup_{R_2, R_1} \langle t_1, R_1 \rangle,$$

яка аналогічна до властивості комутативності.

Таблиця 3

Результат зовнішнього об'єднання

Прізвище	Ім'я	Група	Факультет	Рік н	Форма навч
Баков	Семен	МІ-11	Фізико-математичний	1991	NULL
Бойко	Іван	МЕЗ-31	Фізико-математичний	1988	Заочна
Кайдан	Юлія	ІІІ-16	Історико-правознавчий	1991	Денна
Микитюк	Ірина	АН-12	Іноземних мов	1990	NULL
Наменко	Аліна	УАЗ-21	Філологічний	1989	NULL
Борода	Ігор	ПФ-41	NULL	NULL	Денна
Поданюк	Павло	СІ-11	NULL	NULL	Денна

Під зовнішньою різницею (outer difference) параметрична операція вигляду $\setminus \cup_{R_1, R_2} : T(R_1) \times T(R_2) \rightarrow T(R_1 \cup R_2)$, де таблиць схем R_1 та R_2 , розуміється бінарна

$$\begin{aligned} \langle t_1, R_1 \rangle \setminus \cup_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle &= \left\langle t_1, R_1 \setminus \left(t_1 \cap_{R_1, R_2} t_2, R_2 \right) \right\rangle \otimes_{R_1, R_2, R_1} \langle \{s_{R_2 \setminus R_1}^{Null}\}, R_2 \setminus R_1 \rangle = \\ &= \left\langle t_1 -_{R_1, R_2} t_2, R_1 \right\rangle \otimes_{R_1, R_2 \setminus R_1} \langle \{s_{R_2 \setminus R_1}^{Null}\}, R_2 \setminus R_1 \rangle, \end{aligned}$$

де $\langle t_1, R_1 \rangle \in T(R_1)$, $\langle t_2, R_2 \rangle \in T(R_2)$.

Таким чином, результуюча таблиця містить ті рядки першої таблиці, поповненні значенням NULL для позначення відсутніх значень, які не використовуються при формуванні результату з'єднання.

Приклад 2.

Визначити

$$\langle \text{Спортсмени}, R_1 \rangle \setminus \cup_{R_1, R_2} \langle \text{Відмінники}, R_2 \rangle \quad \text{та} \\ \langle \text{Відмінники}, R_2 \rangle \setminus \cup_{R_2, R_1} \langle \text{Спортсмени}, R_1 \rangle.$$

У результаті отримаємо відповідно табл. 4 і табл. 5.

Таблиця 4

Результат зовнішньої різниці таблиць $\langle \text{Спортсмени}, R_1 \rangle, \langle \text{Відмінники}, R_2 \rangle$

Прізвище	Ім'я	Група	Факультет	Рік н	Форма навч
Баков	Семен	МІ-11	Фізико-математичний	1991	NULL
Микитюк	Ірина	АН-12	Іноземних мов	1990	NULL
Наменко	Аліна	УАЗ-21	Філологічний	1989	NULL

Як видно з прикладу 2, для операції зовнішньої різниці, рівність

$$\langle t_1, R_1 \rangle \setminus \cup_{R_1, R_2} \langle t_2, R_2 \rangle = \langle t_2, R_2 \rangle \setminus \cup_{R_2, R_1} \langle t_1, R_1 \rangle \quad \text{не} \\ \text{виконується.}$$

Таблиця 5

Результат зовнішньої різниці таблиць $\langle \text{Відмінники}, R_2 \rangle, \langle \text{Спортсмени}, R_1 \rangle$

Прізвище	Ім'я	Група	Факультет	Рік н	Форма навч
Борода	Ігор	ПФ-41	NULL	NULL	Денна
Поданюк	Павло	СІ-11	NULL	NULL	Денна

Якщо при заданні операції зовнішнього перетину (outer intersection) таблиць $\langle t, R_1 \rangle$ і $\langle t, R_2 \rangle \cap_{R_1, R_2}$ застосувати міркування, використані при заданні попередніх двох зовнішніх множинних операцій, то отримаємо,

Результат зовнішнього перетину

Прізвище	Ім'я	Група	Факультет	Рік н	Форма навч
Бойко	Іван	МЕЗ-31	Фізико-математичний	1988	Заочна
Кайдан	Юлія	ПІ-16	Історико-правознавчий	1991	Денна

Агрегатні операції

Під табличною алгеброю скінченних таблиць розуміємо алгебру $\langle T, \Omega_{F, \Sigma} \rangle$, де T – множина всіх скінченних таблиць. Під таблицею схеми R (даної алгебри) розуміємо пару $\langle t, R \rangle$, де $t \in T(R)^3$ – скінченна множина рядків схеми R . Тоді $T^*(R) = \{\langle t, R \rangle \mid t \in T(R)\}$ – множина усіх скінченних таблиць схеми R , а $T^* = \bigcup_{R \in A} T^*(R)$ – множина всіх скінченних таблиць.

Широко використовуваними агрегатними операціями є Sum , Avg , Min , Max , Count . Для задання агрегатних операцій над таблицями знадобиться поняття мультимножини [1, 4]. Мультимножина α з основою U – це функція вигляду $\alpha: U \rightarrow N^*$, де $N^* = \{1, 2, \dots\}$ – множина натуральних чисел без нуля.

Нехай $\Theta(\alpha)$ – основа мультимножини α , а $2^{\Theta(\alpha)} = \{\alpha \mid \Theta(\alpha) \in 2^{\Theta(\alpha)}\}$ – сім'я всіх мультимножин, основи яких є скінченними підмножинами множини D' ; тут $D' \subseteq D$ – підмножина універсального домену. Доведимося мультимножину α з основою $\{d_1, \dots, d_k\}$ записувати як $\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}$, де n_i – кількість

що дана операція співпадає з операцією внутрішнього природного з'єднання $\otimes_{R_1, R_2}$.

Приклад 3. У результаті застосування операції зовнішнього перетину до таблиць $\langle \text{Спортсмени}, R_1 \rangle$ і $\langle \text{Відмінники}, R_2 \rangle$ отримаємо табл. 6

Таблиця 6

дублікатів (екземплярів) елемента d_i у мультимножині α , $i = 1, \dots, k$.

Нехай Num – числова підмножина універсального домену D , замкнена відносно додавання. Розширимо Num включенням особливого елемента $NULL$, але операцію додавання на випадок, коли хоча б один з аргументів є $NULL$, розширювати не будемо.

Розглянемо таблицю $\langle t, R \rangle \in T^*(R)$ і нехай $A \in R$. Позначимо через α_A – мультимножину, яка містить всі елементи стовпця з атрибутом A таблиці $\langle t, R \rangle$. Тоді $\Theta(\alpha_A) = D_{A, t}$, де $D_{A, t} = \{d \mid \exists s (s \in t \wedge \langle A, d \rangle \in s)\}$ – активний домен атрибута A відносно таблиці $\langle t, R \rangle$.

Для визначення кількості дублікатів елемента d у мультимножині α_A задамо відображення $\varphi: t \rightarrow D_{A, t}$, таке, що $\varphi(s) = s(A)$, де $s \in t$. Тоді кількість дублікатів елемента основи $d \in D_{A, t}$ мультимножини α_A дорівнює $\alpha_A(d) = |\varphi^{-1}(d)|$, де $\varphi^{-1}(d) = \{s \mid s \in t \wedge \varphi(s) = d\}$ – прообраз елемента $d \in D_{A, t}$ відносно відображення φ , а $|X|$ – потужність множини X .

Під операцією агрегування $\text{Sum}_{A, R}$ за атрибутом A (скінченних) таблиць схеми R , $A \in R$, розуміється унарна параметрична операція вигляду $\text{Sum}_{A, R}: T^*(R) \rightarrow T^*({A})$.

³ Множина $T(R)$ розуміється в сенсі монографії [1].

$Sum_{A,R}(\langle t, R \rangle) = (\{\langle A, Sum(\alpha_A) \rangle\}_B(A))$, де $\langle t, R \rangle \in T^*(R)$, $D_{A,R} \subseteq Num$, а Sum^A – функція, що повертає суму значень стовпця з атрибутом A таблиці $\langle t, R \rangle$ (значення можуть повторюватися), які відрізняються від значення $NULL$, крім того, цей стовпець містить лише дані числового типу.

Отже, $Sum: 2_m^{Num} \rightarrow Num$,

$$Sum(\alpha_A) = \begin{cases} NULL, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ NULL, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \{NULL\}; \\ \sum_{d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}} d\alpha(d), & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким чином, $Sum(\emptyset_m) = NULL$, де $\emptyset_m$ – порожня мультимножина, $Sum(\{NULL^n\}) = NULL$, $Sum(\{d_1^n, \dots, d_k^n\}) = \sum_{i=1}^k d_i n_i$, в припущенні, що всі елементи d_i відрізняються від елемента $NULL$. Для випадку порожньої таблиці $\langle t_\emptyset, R \rangle$ маємо $Sum_{A,R}(\langle t_\emptyset, R \rangle) = (\{\langle A, NULL \rangle\}_B(A))$.

Під операцією агрегування $Count_{A,R}$ за атрибутом A (скінченних) таблиць схеми R , $A \in R$, розуміється унарна параметрична операція вигляду $Count_{A,R}: T^*(R) \rightarrow T^*(\{A\})$, $Count_{A,R}(\langle t, R \rangle) = (\{\langle A, Count(\alpha_A) \rangle\}_B(A))$, де $\langle t, R \rangle \in T^*(R)$, а $Count$ – функція, що повертає кількість значень, відрізняються від $NULL$, з урахуванням дублікатів, у стовпці з атрибутом A таблиці $\langle t, R \rangle$, тобто $Count: 2_m^D \rightarrow N$, $Count(\alpha_A) = \sum_{d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}} \alpha_A(d)$; покладається за означенням, що сума порожньої множини доданків дорівнює нулю.

Отже, $Count(\emptyset_m) = 0$, $Count(\{NULL^n\}) = 0$, $Count(\{d_1^n, \dots, d_k^n\}) = n_1 + \dots + n_k$, в припущенні, що всі елементи d_i , $i = \overline{1, k}$, відрізняються від елемента $NULL$. Для випадку порожньої таблиці $\langle t_\emptyset, R \rangle$ маємо $Count_{A,R}(\langle t_\emptyset, R \rangle) = (\{\langle A, 0 \rangle\}_B(A))$.

Під операцією агрегування $Count_{A,R}(\bullet)$ (скінченних) таблиць схеми R розуміється

унарна параметрична операція вигляду $Count_{A,R}(\bullet): T^*(R) \rightarrow T^*(\{A\})$, $Count_{A,R}(\bullet)(\langle t, R \rangle) = (\{\langle A, \langle t, R \rangle \rangle\}_B(A))$, $\langle t, R \rangle \in T^*(R)$. Змістовно операція $Count_{A,R}(\bullet)$ визначає кількість рядків у заданій таблиці. Для випадку порожньої таблиці $\langle t_\emptyset, R \rangle$ маємо $Count_{A,R}(\bullet)(\langle t_\emptyset, R \rangle) = (\{\langle A, 0 \rangle\}_B(A))$.

Припустимо, що множина Num замкнена відносно (часткової операції) ділення $! : Num \times Num \rightarrow Num$. Довизначимо операцію ділення так, що коли перший аргумент дорівнює $NULL$, то функція приймає значення $NULL$. Це пов'язано з тим, що ми будемо здійснювати суперпозиції і замість першого аргументу підставляти значення функції Sum , а замість другого – значення функції $Count$, враховуючи, що функція $Count$ не може дати $NULL$.

Під операцією агрегування $Avg_{A,R}$ за атрибутом A (скінченних) таблиць схеми R , $A \in R$, розуміється унарна параметрична операція вигляду $Avg_{A,R}: T^*(R) \rightarrow T^*(\{A\})$, $Avg_{A,R}(\langle t, R \rangle) = (\{\langle A, Avg(\alpha_A) \rangle\}_B(A))$, де $\langle t, R \rangle \in T^*(R)$, $D_{A,R} \subseteq Num$, а Avg – функція, що повертає середнє арифметичне значення елементів стовпця з атрибутом A таблиці $\langle t, R \rangle$, які відрізняються від значення $NULL$, з урахуванням дублікатів, тобто $Avg: 2_m^{Num} \rightarrow Num$, $Avg(\alpha_A) = \frac{Sum(\alpha_A)}{Count(\alpha_A)}$.

Таким чином, з означення випливають рівності $Avg(\emptyset_m) = \frac{Sum(\emptyset_m)}{Count(\emptyset_m)} = \frac{NULL}{0} = NULL$,

$$Avg(\{NULL^n\}) = \frac{Sum(\{NULL^n\})}{Count(\{NULL^n\})} = \frac{NULL}{0} = NULL,$$

$$Avg(\{d_1^n, \dots, d_k^n\}) = \frac{Sum(\{d_1^n, \dots, d_k^n\})}{Count(\{d_1^n, \dots, d_k^n\})} =$$

$$= \frac{1}{(n_1 + \dots + n_k)} \sum_{i=1}^k d_i n_i, \text{ в припущенні, що всі}$$

елементи d_i , $i = \overline{1, k}$, відрізняються від $NULL$.

Нехай $\leq$ – лінійний порядок на універсальному домені D . Під операцією агрегування $Min_{A,R}$ за атрибутом A (скінченних) таблиць схеми R , $A \in R$, розуміється унарна параметрична операція вигляду $Min_{A,R}: T^*(R) \rightarrow T^*(\{A\})$.

* Операція $Sum_{A,R}$ визначена на скінченних таблицях, а функція Sum – на скінченних мультимножинах чисел.

$Min_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle A, Min(\alpha_A) \rangle \}, \{A\} \rangle$, де атрибутом A таблиці $\langle t, R \rangle$, відмінних від $\langle t, R \rangle \in T^*(R)$, а Min – функція, що повертає значення $NULL$, тобто $Min: 2_m^D \rightarrow D$, найменше значення серед значень стовпця з

$$Min(\alpha_A) = \begin{cases} NULL, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ NULL, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \{NULL\}; \\ \min\{d \mid d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}\}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким чином, $Min(\emptyset_m) = NULL$, операція вигляду $Max_{A,R}: T^*(R) \rightarrow T^*(\{A\})$, $Max_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle A, Max(\alpha_A) \rangle \}, \{A\} \rangle$, де $\langle t, R \rangle \in T^*(R)$, а Max – функція, що повертає найбільше значення серед значень стовпця з атрибутом A таблиці $\langle t, R \rangle$, відмінних від $NULL$, тобто $Max: 2_m^D \rightarrow D$, масмо $Min_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle A, NULL \rangle \}, \{A\} \rangle$.

Під операцією агрегування $Max_{A,R}$ за атрибутом A (скінченних) таблиць схеми R , $A \in R$, розуміється унарна параметрична

$$Max(\alpha_A) = \begin{cases} NULL, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ NULL, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \{NULL\}; \\ \max\{d \mid d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}\}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким чином, $Max(\emptyset_m) = NULL$, універсального домену в даному випадку неістотна.

$Max(\{NULL\}) = NULL$, $Max(\{d_1^*, \dots, d_k^*\}) = \max\{d_1, \dots, d_k\}$, в припущенні, що всі елементи d_i , $i = \overline{1, k}$, відрізняються від значення $NULL$. Випадок порожньої таблиці: $Max_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle A, NULL \rangle \}, \{A\} \rangle$.

Функції Min та Max визначають найменший або найбільший елемент мультимножини α_A серед елементів основи, відмінних від $NULL$, тому порівняльність особливого елемента $NULL$ з рештою елементів

Висновки

У статті задано додаткові операції узагальненої табличної алгебри: операції внутрішніх і зовнішніх з'єднань, операції напівз'єднання, зовнішні множинні операції, агрегатні операції. Для задання зовнішніх операцій введено особливий елемент універсального домену $NULL$.

Список використаних джерел

1. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім «Академперіодика». – 2001. – 198 с.
2. Глушко І.М. Узагальнення класичного результату Кодда-Лакруа-Піротте про еквівалентність реляційної (табличної)

алгебри та відповідних реляційних числень / І.М. Глушко // Фізико-математичні записки: Збірник наукових праць. – Ніжин, 2011. – С. 28-35.

3. Codd E.F. The Relational Model for Database Management: Version 2 / E.F. Codd. – Addison-Wesley, 1990. – 541 p.
4. Петровский А.Б. Пространства множеств и мультимножеств / А.Б. Петровский. – Москва: Издательство УРСС, 2003. – 248 с.

Надійшла до редколегії 02.06.2012

УДК 517.929.4

Джалладова И.А., д.ф.-м.н., проф.,
Хусаїнова О.С., пошукач**Деякі проблеми динаміки однієї
математичної моделі ринку вільної
конкуренції**

Досліджується одна математична модель ринку вільної конкуренції. Модель має вигляд системи двох звичайних диференціальних рівнянь. Досліджено стійкість стану рівноваги. Далі розглянуто модель із запізнюванням. З використанням прямого методу Ляпунова отримано достатні умови асимптотичної стійкості.

Ключові слова: функція Ляпунова, системи із запізнюванням, асимптотична стійкість.

E-mail: olga.davydenko@gmail.com irada-2005@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д. Я.

Вступ

Загалом економічна наука розглядає декілька моделей економічного устрою ринкової економіки в залежності від рівня конкуренції. В [1] визначають такі основні моделі ринку в залежності від рівня конкуренції:

- Чиста монополія.
- Олігополія.
- Монополістична конкуренція.
- Чиста конкуренція.

Основними рисами чистого конкурентного ринку [1] є наступні:

- Дуже велика кількість фірм.
- Стандартизована продукція.
- Відсутній контроль над ціною з боку окремих фірм.
- Вільний вхід та вихід з ринку.
- Нецінова конкуренція майже відсутня.

Сучасні економісти майже не розглядають чистий конкурентний ринок як найбільш ефективний з точки зору суспільства. Наприклад, природні монополії чи нецінова конкуренція олігополістичного ринку можуть давати більшу користь суспільству у порівнянні із іншими типами економічного устрою того чи іншого ринку.

Irada Dzhalladova, full prof., Dr.Sc.,
Irada Dzhalladova, full prof., Dr.Sc.,
Olga Khusainova, competitor for PhD**Some problems of dynamics of one mathematic
model of free competition market**

Subject of research is a mathematic model of free competition market. The model is represented by a system of two simple differential equations. Resistance of equilibrium state is researched. Further on model with delay has been examined. Sufficient conditions of asymptotic resistance have been found using direct method of Lyapunov.

Key Words: function of Lyapunov, systems with delay, asymptotic resistance.

Проблеми стійкості економічних систем представляють собою класичну проблему економічної науки [2]. Дослідження економічних взаємозв'язків проводиться як в межах статичних моделей (приклад, статична модель Леонтьєва), так і досліджується в різних видах динамічних систем (динамічні моделі Кейнса, модель Хікса, динамічна модель Леонтьєва та інші). [2-4].

У великій кількості випадків чистий конкурентний ринок має найбільшу ступінь саморегуляції, що виражається в активній та неперервній ціновій динаміці. Але чистий конкурентний ринок має і деякі недоліки.

Наприклад, «цінові війни», що можуть привести до руйнування ринку як такого та банкрутства його учасників. Тому дослідження стійкості цінової динаміки є важливим та актуальним питанням.

В роботах [5-7] запропоновано оригінальний підхід розробки математичних моделей динаміки ринку вільної торгівлі. Моделі описуються системами звичайних диференціальних рівнянь. Запропонована робота враховує

вплив запізнювання при прийнятті рішень особами, які приймають участь у процесі.

1. Модель ринку вільної торгівлі

У відповідності з принципом незалежності діючих економічних факторів [5], математична модель динаміки ринку вільної торгівлі може бути записана у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = V_j(p_j^*, p_j^0, p_j(t)) + C_j(p_0, p(t)) + D_j(p_j^*, p_j^0, p(t)) + G_j(q_j^0, q(t)), \quad j = \overline{1, n}.$$

Тут $V_j(p_j^*, p_j^0, p_j)$, $p_j > p_j^*$, $j = \overline{1, n}$ функції, що характеризують вплив продавця товару або послуг, $D_j(p_j^*, p_j^0, p_j)$, $p_j < p_j^*$, $j = \overline{1, n}$ функції, що характеризують вплив покупця товару або послуг, $C_j(p_0, p)$, $j = \overline{1, n}$ функції, що характеризують вплив конкуренції, а також дій та протидій учасників конкурентного ринку, $G_j(q_j^0, q, p_j^0, p_j)$, $j = \overline{1, n}$ вплив зовнішніх факторів (держави, що зобов'язує учасників виконувати певні закони та постанови).

Введені наступні позначення [5]:

$p_j(t)$ – ціна одиниці j -го товару в момент часу $t > 0$,

p_j^0 – рівноважна ціна j -го товару,

$q_j(t)$ – кількість одиниць j -го товару, що продається в момент $t > 0$,

q_j^0 – рівноважна кількість одиниць j -го товару,

p_j^* – нижнє граничне значення ціни j -го товару, пов'язане з витратами продавця,

p_j^{**} – граничне значення ціни j -го товару, вище якого покупець відмовляється купувати,

$p_j^* = p_j^* - p_j^0$ – надлишок ціни продавця,

$p_j^* = p_j^* - p_j^0$ – надлишок ціни покупця.

При визначенні припущеннях праві частини диференціальних рівнянь мають вигляд дробово-раціональних функцій і система має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dp_j(t)}{dt} = & - \frac{v_j p_j^* (p_j(t) - p_j^0)}{p_j(t) - p_j^*} - \frac{d_j p_j^* (p_j(t) - p_j^0)}{p_j^{**} - p_j(t)} \\ & - \sum_{i=1, i \neq j}^n c_{ji} p_i^0 \left(\frac{p_j(t) - p_j^0}{p_j^0} - \frac{p_i(t) - p_i^0}{p_i^0} \right) + r_j \times \\ & + r_j \left[p_j(t) \left(1 - e_j \frac{p_j(t) - p_j^0}{p_j^0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j=1, j \neq i}^n e_{ij} \frac{p_j(t) - p_j^0}{p_j^0} \right) - p_j^0 \right], \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.0) \end{aligned}$$

Система (1.0) є нелінійною, отримати її розв'язок в аналітичному вигляді важко навіть для малої розмірності (на площині).

2. Система на площині без запізнювання.

Розглянемо модель на площині, тобто розмірності $n = 2$. Вона має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} = & - \frac{v_1 p_1^* (p_1(t) - p_1^0)}{p_1(t) - p_1^*} - \frac{d_1 p_1^* (p_1(t) - p_1^0)}{p_1^{**} - p_1(t)} \\ & - c_{12} p_2^0 \left(\frac{p_1(t) - p_1^0}{p_1^0} - \frac{p_2(t) - p_2^0}{p_2^0} \right) + \\ & + r_1 \left[p_1(t) \left(1 - e_1 \frac{p_1(t) - p_1^0}{p_1^0} + e_{21} \frac{p_2(t) - p_2^0}{p_2^0} \right) - p_1^0 \right] \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_2(t)}{dt} = & - \frac{v_2 p_2^* (p_2(t) - p_2^0)}{p_2(t) - p_2^*} - \frac{d_2 p_2^* (p_2(t) - p_2^0)}{p_2^{**} - p_2(t)} \\ & - c_{21} p_1^0 \left(\frac{p_2(t) - p_2^0}{p_2^0} - \frac{p_1(t) - p_1^0}{p_1^0} \right) + \\ & + r_2 \left[p_2(t) \left(1 - e_2 \frac{p_2(t) - p_2^0}{p_2^0} + e_{12} \frac{p_1(t) - p_1^0}{p_1^0} \right) - p_2^0 \right] \end{aligned}$$

Позначимо

$$x_1(t) = \frac{p_1(t) - p_1^0}{p_1^0}, \quad x_2(t) = \frac{p_2(t) - p_2^0}{p_2^0}$$

і перетворимо отриману систему двох рівнянь наступним чином

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} = & - \frac{v_1 p_1^*}{p_1^0} \frac{x_1(t)}{x_1(t) + 1 - \frac{p_1^*}{p_1^0}} - \frac{d_1 p_1^*}{p_1^0} \frac{x_1(t)}{\frac{p_1^*}{p_1^0} - 1 - x_1(t)} \\ & - c_{12} (x_1(t) - x_2(t)) + \end{aligned}$$

$$+ r_1[(1-e_1)x_1(t) + e_{12}x_2(t) - e_1x_1^2(t) + e_{12}x_1(t)x_2(t)],$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{v_2 p_2'}{p_2^0} \frac{x_2(t)}{x_2(t)+1} - \frac{d_2 p_2''}{p_2^0} \frac{x_2(t)}{\frac{p_2}{p_2^0} - 1 - x_2(t)} - c_{21}(x_2(t) - x_1(t)) + \quad (1.2)$$

$$+ r_2[(1-e_2)x_2(t) + e_{21}x_1(t) - e_2x_2^2(t) + e_{21}x_1(t)x_2(t)].$$

Позначимо

$$\frac{p_1'}{p_1^0} = \frac{p_1^0 - \bar{p}_1}{p_1^0} = 1 - \frac{\bar{p}_1}{p_1^0} = \bar{p}_1,$$

$$\frac{p_1''}{p_1^0} = \frac{p_1'' - \bar{p}_1''}{p_1^0} = \frac{\bar{p}_1''}{p_1^0} - 1 = \bar{p}_1',$$

$$\frac{p_2'}{p_2^0} = \frac{p_2^0 - \bar{p}_2}{p_2^0} = 1 - \frac{\bar{p}_2}{p_2^0} = \bar{p}_2,$$

$$\frac{p_2''}{p_2^0} = \frac{p_2'' - \bar{p}_2''}{p_2^0} = \frac{\bar{p}_2''}{p_2^0} - 1 = \bar{p}_2'.$$

Отримасмо систему двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з дробово-раціональною нелінійністю

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -v_1 \bar{p}_1 \frac{x_1(t)}{x_1(t) + \bar{p}_1} - d_1 \bar{p}_1 \frac{x_1(t)}{p_1 - x_1(t)} - \\ &- c_{12}(x_1(t) - x_2(t)) + \\ &+ r_1[(1-e_1)x_1(t) + e_{12}x_2(t) - e_1x_1^2(t) + e_{12}x_1(t)x_2(t)] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -v_2 \bar{p}_2 \frac{x_2(t)}{x_2(t) + \bar{p}_2} - d_2 \bar{p}_2 \frac{x_2(t)}{p_2 - x_2(t)} - \\ &- c_{21}(x_2(t) - x_1(t)) + \\ &+ r_2[(1-e_2)x_2(t) + e_{21}x_1(t) - e_2x_2^2(t) + e_{21}x_1(t)x_2(t)]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В цій системі усталена ціна (точка спокою $P_0(p_1^0, p_2^0)$) перенесена в нульовий стан рівноваги $O(0,0)$.

Проведемо дослідження стійкості нульового стану рівноваги. Найбільш простим методом є дослідження стійкості на підставі лінійного наближення. В правій частині системи (1.3) нелінійними є дробово-раціональні члени. Їх розклад в ряд Тейлора з точністю лінійного наближення має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1 + p_1} &= \frac{(x_1 + \bar{p}_1) - \bar{p}_1}{(x_1 + \bar{p}_1)^2} \bigg|_{x_1=0} x_1 + R_1(x_1) = \\ &= \frac{1}{\bar{p}_1} x_1 + R_1(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{p_1 - x_1} &= \frac{\left(\frac{\bar{p}_1}{p_1} - x_1\right) + x_1}{\left(\frac{\bar{p}_1}{p_1} - x_1\right)^2} \bigg|_{x_1=0} x_1 + R_2(x_1) = \\ &= \frac{1}{\bar{p}_1} + R_2(x_1). \end{aligned}$$

Отже, система лінійного наближення має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -[(v_1 + d_1) + c_{12} - r_1(1-e_1)]x_1(t) + (c_{12} + r_1e_{12})x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (c_{21} + r_2e_{21})x_1(t) - [(v_2 + d_2) + c_{21} - r_2(1-e_2)]x_2(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Характеристичне рівняння отриманої системи лінійного наближення має вигляд

$$\begin{vmatrix} -[S_1 - r_1(1-e_1)] - \lambda & (c_{12} + r_1e_{12}) \\ (c_{21} + r_2e_{21}) & -[S_2 - r_2(1-e_2)] - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \lambda^2 + [S_1 + S_2 - r_1(1-e_1) - r_2(1-e_2)]\lambda + \\ &+ \{[S_1 - r_1(1-e_1)][S_2 - r_2(1-e_2)] - \\ &- (c_{12} + r_1e_{12})(c_{21} + r_2e_{21})\} = 0, \\ &S_1 = (v_1 + d_1) + c_{12}, \quad S_2 = (v_2 + d_2) + c_{21}. \end{aligned}$$

Як впливає з критерію Гурвіца (для двовимірних систем) [8], необхідно та достатньо умовою асимптотичної стійкості є додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння. Тому умови стійкості мають вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= S_1 + S_2 - r_1(1-e_1) - r_2(1-e_2) > 0, \\ \Delta_2 &= [S_1 - r_1(1-e_1)][S_2 - r_2(1-e_2)] - \\ &- (c_{12} + r_1e_{12})(c_{21} + r_2e_{21}) > 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Зауваження 1.1. В математичній моделі (1.0) особлива точка (точка спокою або рівноважна ціна) передбачена заздалегідь.

Зауваження 1.2. Умови асимптотичної стійкості, які сформульовані в (1.5), не залежать від особливої точки (рівноважної ціни). Таким чином, довільна наперед вибрана рівноважна ціна буде асимптотично стійкою.

3. Система на площині із запізненням.

Як правило, свої дії продавці та покупці починають проводити після деякого проміжку часу (реакції організму, часу обмірковування та прийняття рішення та інше). Тому більш адекватною є математична модель, що описується диференціально-різницевою

рівняннями (рівняннями з післядією) [9]. На площині вони будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -v_1 \bar{p}_1 \frac{x_1(t)}{x_1(t) + \bar{p}_1} - d_1 \bar{p}_1 \frac{x_1(t)}{p_1 - x_1(t)} - \\ &- c_{12}(x_1(t) - x_2(t - \tau)) + \\ &+ r_1[(1 - e_1)x_1(t) + e_{12}x_2(t - \tau) - e_1x_1^2(t) + \\ &\quad + e_{12}x_1(t)x_2(t - \tau)], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -v_2 \bar{p}_2 \frac{x_2(t)}{x_2(t) + \bar{p}_2} - d_2 \bar{p}_2 \frac{x_2(t)}{p_2 - x_2(t)} - \\ &- c_{21}(x_2(t) - x_1(t - \tau)) + \\ &+ r_2[(1 - e_2)x_2(t) + e_{21}x_1(t - \tau) - e_2x_2^2(t) + \\ &\quad + e_{21}x_1(t - \tau)x_2(t)]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система лінійного наближення має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -[(v_1 + d_1) + c_{12} - r_1(1 - e_1)]x_1(t) + \\ &\quad + (c_{12} + r_1e_{12})x_2(t - \tau) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -[(v_2 + d_2) + c_{21} - r_2(1 - e_2)]x_2(t) + \\ &\quad + (c_{21} + r_2e_{21})x_1(t - \tau) \end{aligned} \quad (2.2)$$

На відміну від системи без запізнювання характеристичне рівняння системи (2.2) має вигляд

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -[S_1 - r_1(1 - e_1)] - \lambda & (c_{12} + r_1e_{12})e^{-\lambda\tau} \\ (c_{21} + r_2e_{21})e^{-\lambda\tau} & -[S_2 - r_2(1 - e_2)] - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 + [S_1 + S_2 - r_1(1 - e_1) - r_2(1 - e_2)]\lambda + \\ &\quad + [[S_1 - r_1(1 - e_1)][S_2 - r_2(1 - e_2)] - \\ &\quad - e^{-2\lambda\tau}(c_{12} + r_1e_{12})(c_{21} + r_2e_{21})] = 0 \end{aligned}$$

і має ліцену кількість коренів. Простих та ефективних критеріїв дослідження знаків дійсних частин квазіполіномів, типу критерію Гурвіча не існує.

Для дослідження стійкості нульового стану рівноваги будемо використовувати метод скінченновимірних функцій Ляпунова з умовою Б.С.Разуміхіна [10]. Як відомо, якщо матриця $A+B$ системи звичайних диференціальних рівнянь без запізнювання

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A+B)x(t), \quad x(t) \in R^n \quad (2.3)$$

асимптотично стійка, то при довільній додатно визначеній матриці C матричне рівняння Ляпунова

$$(A+B)^T H + H(A+B) = -C \quad (2.4)$$

має єдиний розв'язок – додатно визначену

матрицю H . І за функцію Ляпунова береться квадратична форма $V(x) = x^T H x$.

При дослідженні лінійної системи з сталими матрицями та одним сталим запізнюванням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad x(t) \in R^n, \quad \tau > 0 \quad (2.5)$$

мають місце наступні умови асимптотичної стійкості [4].

Теорема 2.1. Нехай матриця $A+B$ системи з запізнюванням (2.5) асимптотично стійка. Тоді при $\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)}{2|HB|(|A| + |B|)\sqrt{\varphi(H)}}, \quad \varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad (2.6)$$

$\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ – екстремальні власні числа відповідних матриць, буде асимптотично стійкою і система з запізнюванням (2.5).

Теорема 2.2. Нехай існує додатно визначена матриця H , при якій виконується нерівність

$$\lambda_{\min}(-A^T H - HA) - 2|HB|(|A| + \sqrt{\varphi(H)}) > 0. \quad (2.7)$$

Тоді система з запізнюванням (2.5) буде асимптотично стійкою при довільному запізнюванні $\tau > 0$.

В запропонованих теоремах вимагається значний «запас асимптотичної стійкості» системи без запізнювання та малі «збурення», що внесені запізнюванням. Позначимо

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

$$a_{11} = -[(v_1 + d_1) + c_{12} - r_1(1 - e_1)],$$

$$a_{22} = -[(v_2 + d_2) + c_{21} - r_2(1 - e_2)],$$

$$b_{12} = (c_{12} + r_1e_{12}), \quad b_{21} = (c_{21} + r_2e_{21}),$$

де c_{11} , c_{12} , c_{22} довільні сталі, які задовольняють нерівностям

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad (2.8)$$

H – розв'язок матричного рівняння Ляпунова (2.4). Тоді рівняння (2.4) буде мати вигляд системи алгебраїчних рівнянь

$$a_{11}h_{11} + b_{21}h_{22} = -\frac{1}{2}c_{11},$$

$$b_{12}h_{11} + (a_{11} + a_{22})h_{12} + b_{21}h_{22} = -c_{12},$$

$$b_{12}h_{21} + a_{22}h_{22} = -\frac{1}{2}c_{22}. \quad (2.9)$$

Її розв'язком буде

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta_0}, \quad h_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_0}, \quad h_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_0}, \\
 \Delta_0 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{21} & 0 \\ b_{12} & a_{11} + a_{22} & b_{21} \\ 0 & b_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}c_{11} & b_{21} & 0 \\ -c_{12} & a_{11} + a_{22} & b_{21} \\ -\frac{1}{2}c_{22} & b_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{12} &= \begin{vmatrix} a_{11} & -\frac{1}{2}c_{11} & 0 \\ b_{12} & -c_{12} & b_{21} \\ 0 & -\frac{1}{2}c_{22} & a_{22} \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{21} & -\frac{1}{2}c_{11} \\ b_{12} & a_{11} + a_{22} & -c_{12} \\ 0 & b_{12} & -\frac{1}{2}c_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Таким чином, при довільних c_{11} , c_{12} , c_{22} , які задовольняють умову (2.8) розв'язавши систему (2.9), отримаємо, згідно з залежністю (2.10), елементи h_{11} , h_{12} , h_{22} матриці H . Обчислюємо екстремальні власні числа матриць H і C

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\max}(H) &= \frac{1}{2} \left\{ (h_{11} + h_{22}) + \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 - h_{12}^2} \right\}, \\
 \lambda_{\min}(H) &= \frac{1}{2} \left\{ (h_{11} + h_{22}) - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 - h_{12}^2} \right\}, \\
 \lambda_{\max}(C) &= \frac{1}{2} \left\{ (c_{11} + c_{22}) - \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 - c_{12}^2} \right\}
 \end{aligned}$$

а також наступні залежності:

$$|A| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{22}^2}, \quad |B| = \sqrt{b_{12}^2 + b_{21}^2},$$

$$\varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)},$$

$$|HB| = \sqrt{(h_{22}b_{21})^2 + (h_{11}b_{12})^2 + (h_{22}b_{21})^2 + (h_{12}b_{12})^2}$$

Використовуючи результати теорем 2.1, 2.2, отримаємо наступні твердження.

1. Якщо існують параметри c_{11} , c_{12} , c_{22} , які задовольняють умову (2.8), при яких виконується нерівність (2.7)

$$\lambda_{\max}(C) - 2|HB|(1 + \sqrt{\varphi(H)}) > 0,$$

то нульовий стан рівноваги системи (2.2) асимптотично стійкий при довільному запізнюванні $\tau > 0$.

2. Якщо параметри c_{11} , c_{12} , c_{22} , які задовольняють умову (2.8), при яких виконується нерівність (2.7), не існують, то нульовий стан рівноваги системи (2.2) асимптотично стійкий при запізнюванні $\tau < \tau_0$, де τ_0 визначено в (2.6)

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\max}(C)}{2|HB|(\sqrt{1 + \sqrt{\varphi(H)}} + \sqrt{\varphi(H)})}.$$

Зауваження 2.1. Як впливає з теорем про стійкість за лінійним наближенням, аналогічні твердження мають місце і для нелінійної системи (2.1). На жаль, питання про оцінку області стійкості нульового стану рівноваги (2.1) при цьому залишається відкритим.

Список використаної літератури

1. Самуельсон Пол, Нордхаус Вільям Д. Економіка. – М.: Бином-КоРус, 1997. – 800 с.
2. Блудова Т.В., Джалладова І.А., Макаренко О.І., Шуклін Г.В. Математична економіка. – К.: КНЕУ, 2009. – 464 с.
3. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Горіщина І.А. Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 320 с.
4. Ляшенко О.І. Математичне моделювання динаміки відкритої економіки. – К., КНУ, 2005. – 315 с.
5. Калитин Б.Г. Математические модели первого порядка конкурентного рынка. – Минск: БГУ, 2012. – 131 с.
6. Калитин Б.С., Трухан Е.В. Устойчивость рынка двух взаимозаменяемых товаров // Вестник Белорусского университета, Сер. I, №2, 2011. – С.91-95.
7. Калитин Б.С., Суш Т.Б. Динамическая модель производства и реализации продукции // Вестник Белорусского университета, Сер. I, №1. – 2012. – С.110-116.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. –
9. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
10. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд-во Киевского университета, 1997. – 236 с.

Надійшла до редколегії 27.06.2012

Ивохин Е.В., канд. физ.-мат. наук, доцент,
Адзубей Л.Т., канд. физ.-мат. наук, доцент

Об одном подходе к моделированию нечетких дискретных динамических систем

Предложен новый подход для моделирования дискретных линейных автономных динамических систем с нечеткими параметрами и начальными условиями на основе определения на каждой итерации вложенной системы интервалов, учитывающих разные уровни определенности. Задача оптимизации, связанная с предложенным подходом, гарантирует минимизацию размера системы интервалов, оценивающих состояния системы для каждого уровня определенности.

Ключевые слова: нечеткое множество, моделирование динамики, разностная система, алгоритм оптимизации

E-mail: ivokhin@univ.kiev.ua

Статью представил доктор физ.-мат. наук, проф. Хусанов Д.Я.

Математические модели, которые описывают реальные системы, обычно нуждаются в информации о точных значениях параметров модели. Однако, на практике точные значения недоступны и, как правило, модели существуют с определенной степенью неопределенности. Следовательно, используются модели с неопределенными параметрами, а иногда и при неопределенных начальных условиях. Если нужно рассмотреть целый спектр возможных результатов, то такую неопределенность следует принимать во внимание. Одним из возможных способов учета неопределенности в параметрах и начальных условиях есть использование нечетких чисел и нечетких арифметических операций для имитационных моделей.

В данной статье сосредоточено внимание на моделировании динамических неопределенных моделей, поведение которых в пространстве состояний описывается нечеткими дискретными линейными стационарными (инвариантными от времени) моделями в виде совокупности нечетких разностных уравнений. Такие нечеткие разностные уравнения можно рассматривать как расширение способов формализации нечетких динамических систем, описываемых моделями с параметрами, ограниченными в интервалах

Ivokhin E.V., Ph.D., associate professor,
Adzhubey L.T., Ph.D., associate professor

On approach for the modelling of the fuzzy discrete dynamic systems

New approach for the modelling of the discrete linear autonomous dynamic systems with fuzzy parameters and initial conditions is offered. It bases on determination on every iteration of the enclosed system of intervals, taking into account the different levels of definiteness. The task of optimization, related to offered approach, guarantees minimization of size of the system of intervals, estimating the states of the system for every level of definiteness.

Key words: fuzzy set, modelling of dynamics, difference system, algorithm of optimization

(известных как «интервальные динамические системы» [1]). Недостатком использования интервалов для моделирования неопределенности является то, что они продуцируют «наихудший случай», не давая информации относительно вероятности отдельного результата. Интервальный подход только рассматривает диапазон всех возможных результатов. Альтернативный подход базируется на представлении неопределенных параметров посредством нечетких чисел с функцией принадлежности. Данный подход, называемый «возможностным подходом», основывается на теории нечетких множеств и представляет собой компромисс между интервальным и вероятностным методами. Значение функции принадлежности можно интерпретировать как вид степени доверия. Значение, равное 1, определяет полное соответствие ситуации, а 0 означает абсолютное несоответствие.

Нечеткое моделирование на основе теории нечетких множеств является одним из возможных способов моделирования функционирования системы в данном случае. Методика нечеткого моделирования была предложена в работе [2], а впоследствии был развит многими исследователями ([3], [4]). В этих исследованиях

неопределенность описывается параметрами, значения которых могут изменяться в каждый момент времени (нестационарные, «изменяемые во времени» параметры) или нет (стационарные, автономные). Методы, работающие с нестационарными параметрами, основываются на одношаговой рекуррентности. С другой стороны очевидно, что при применении автономного подхода для моделирования системы с параметрической неопределенностью результаты могут быть слишком неточными, более того, это может привести к неустойчивому моделированию даже для устойчивых систем. Таким образом, для реализации моделирования необходима методика близкая, с одной стороны, к стационарному подходу, и сохраняющая при этом природу функционирования нечетких динамических систем с неопределенными параметрами.

Таким образом, главной целью этой работы является разработка подхода, базирующегося на применении принципа расширения и концепции α -срезов для покомпонентного формирования множества состояний системы и позволяющего адекватно описывать динамику реальных процессов. Граничные интервалы, связанные с каждым α -срезом нечеткого множества состояний, могут быть определены при решении дополнительных задач оптимизации.

Теория нечетких чисел, основанная Zadeh [5], в настоящее время является хорошо развитой методологией для обработки неопределенности, связанной с неточностью или неоднозначностью. Основная идея нечеткого множества (в дальнейшем обозначаем, как $\tilde{A}$) заключается в том, что каждому элементу $x \in X$ универсального множества X присваивается оценка (мера) принадлежности из $[0,1]$, характеризующая уровень принадлежности элемента к нечеткому множеству.

Определение 1 [5]. Нечетким множеством $\tilde{A}$ на универсальном множестве X называется совокупность пар вида $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, где $x \in X$, а $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$ - функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$.

Нечеткое число является частным случаем нечеткого множества. Это выпуклое нормализованное нечеткое множество, определенное на множестве R вещественных чисел, для которого справедливо существование, по крайней мере, одного вещественного числа со степенью принадлежности 1 и кусочно-непрерывной функции принадлежности.

Множество уровня (так называемый α -срез) определяется в виде обычного множества

$$[\tilde{A}]_{\alpha} = \{x \in X: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \text{ для } \alpha \in [0,1], \quad (1)$$

являющегося компактом. Множество вида

$$[\tilde{A}]_0 = \{x \in X: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\}, \quad (2)$$

определяет носитель нечеткого множества. Таким образом, вещественное нечеткое число $\tilde{A}$, которое однозначно определено с помощью функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ эквивалентно определяется парой $(\underline{a}, \overline{a})$ его нижних и верхних функций, которые представляют экстремальные значения α -срезов. Семейство нечетких множеств на множестве X будем обозначать как F_X .

Нечеткие числа позволяют задавать параметры неопределенности на основе значений уровня принадлежности. Одной из прикладных областей теории нечетких множеств, в которой нечеткие числа играют фундаментальную роль, есть нечеткие уравнения. Это уравнения, в которых параметры (коэффициенты) и переменные являются нечеткими числами, а формулы описывают динамику, используя операции нечеткой арифметики, обобщающие операции арифметики четких чисел.

Zadeh [6] предложил подход, известный как принцип расширения, который определяет использование действительных функций в качестве функций нечетких чисел.

Пусть дано p нечетких множеств $\tilde{A}_i \in F_{X_i}, \dots, \tilde{A}_p \in F_{X_p}$ (с функциями принадлежности, определенными, соответственно, на множествах $X_1, \dots, X_p$) и $f: X_1 \times \dots \times X_p \rightarrow Y$ есть четкая функция. Тогда по принципу расширения нечеткий образ $\tilde{B} \in F_Y$ можно определить как

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) | y \in Y\} \quad (3)$$

где

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_p}(x_p)\}, & \text{если } \exists (x_1, \dots, x_p) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (4)$$

$$\min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_p}(x_p)\}. \quad (5)$$

Принцип расширения определяет метод для оценки нечеткого отображения. Однако, на практике, его применение невозможно, поскольку он требует безграничного числа вычислений. Можно использовать альтернативную формулировку принципа расширения. В частности, если нечеткие множества $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_p$ в принципе расширения

являются нечеткими числами с компактными носителями и функция f непрерывна, то уравнение (4) можно записать в виде

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\{\alpha | y \in [\tilde{B}]_{\alpha}\}, & \text{если } y \in [\tilde{B}]_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (6)$$

где

$$y \in [\tilde{B}]_{\alpha} = \left[\min_{(x_1, \dots, x_p) \in \Omega_0} f(x_1, \dots, x_p), \max_{(x_1, \dots, x_p) \in \Omega_0} f(x_1, \dots, x_p) \right]$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad (7)$$

$$\Omega_{\alpha} = [\tilde{A}_1]_{\alpha} \times \dots \times [\tilde{A}_p]_{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (8)$$

описывают системы интервалов, определяемых α -срезами $[\tilde{A}_1]_{\alpha} \dots [\tilde{A}_p]_{\alpha}$.

К сожалению, даже при условиях использования альтернативной формулировки, вычисления нечетких функций остаются слишком сложной задачей, поскольку нужно решать многочисленные задачи глобальной оптимизации, которые эффективно решаются лишь в случае монотонности целевой функции. Однако, выполнение требования монотонности в пределах целевого диапазона в большинстве случаев априори неизвестно.

Рассмотрим нечеткую дискретную линейную стационарную модель в виде системы

$$\tilde{x}(k) = A(\tilde{\theta})\tilde{x}(k-1) - B(\tilde{\theta})\tilde{u}(k-1), \quad (9)$$

полученную с помощью покомпонентного использования принципа расширения точной системы и считая, что:

- $\tilde{x}(k) \in R^{n_x}$ и $\tilde{u}(k) \in R^{n_u}$ - есть векторы состояния и входа, соответственно, размерности n_x и n_u ;

- $\tilde{\theta} \in (F_{\theta})^{n_{\theta}}$ - есть вектор параметров размерности n_{θ} , значения параметров - нечеткие числа;

- $A(\tilde{\theta})$ и $B(\tilde{\theta})$ - матричные функции, соответственно, размерности $n_x \times n_x$ и $n_x \times n_u$, зависящие от вектора нечетких параметров;

- $\tilde{x}_0 \in (F_{x_0})^{n_x}$ - начальные условия, также заданные нечеткими числами;

- F_R - есть множества нечетких чисел на компактном выпуклом множестве R .

Если нечеткое моделирование системы, заданной уравнением (9) базируется на одношаговом рекуррентном алгоритме, то нечеткое число $\tilde{x}_{k+1}$, которое описывает состояние системы в момент времени $t = k+1$ определяется с использованием нечеткого числа $\tilde{x}_k$ предыдущего состояния системы и нечеткого

числа $\tilde{\theta}$ параметра неопределенности. При этом, отношение между параметрами и состояниями системы в каждый момент времени не сохраняется, так как значение параметра, определенное нечетким числом $\tilde{\theta}$, вычисляется для каждого состояния системы $\tilde{x}_k$ для расчета нечеткого числа $\tilde{x}_{k+1}$ следующего состояния.

Таким образом, рекуррентные схемы, которые определяются в виде одношаговых итераций, в действительности изменяют нечеткие параметры модели во времени. Автономность относительно параметров может быть гарантирована лишь тогда, когда соотношение между параметрами и состояниями сохраняется на каждой итерации. Одним из способов для сохранения этой зависимости есть вывод функциональной зависимости между состояниями и параметрами на каждой итерации, которая будет использоваться при перемещении системы из начального до текущего состояния. В случае дискретной линейной стационарной системы, это соотношение определяется решением уравнения (9) для отдельных значений нечетких параметров $\tilde{\theta}$:

$$x(k) = A^k(\theta)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}(\theta)B(\theta)u(j), \quad (10)$$

в предположении, что параметры стационарны, то есть $\theta(k+1) = \theta(k) = \theta$.

Введем следующие определения:

Определение 2. Нечеткое множество всех возможных состояний динамической системы, заданной уравнением (9) в момент времени k назовем k -тым множеством нечеткой достижимости.

Произвольное k -тое множество достижимости задается нечетким множеством, определенным в результате покомпонентного применения принципа расширения к точной функции, определенной уравнением (10), при условии, что θ , $\tilde{x}_0$ и $\tilde{u}$ - нечеткие числа.

Определение 3. Нечеткой траекторией системы, заданной уравнением (9), для временного интервала $[0, N]$ назовем функцию, которая отображает k в $\tilde{x}(k)$.

Множество нечеткой достижимости, описанное нечетким числом $\tilde{x}(k)$, можно аппроксимировать с помощью покомпонентного применения принципа расширения. Это означает, что каждое $\tilde{x}_i(k)$ для $i=1, \dots, n_x$ может быть получено с помощью покомпонентного применения принципа расширения к уравнению (9).

Определение 4. Множество, полученное в виде α -среза нечеткого множества достижимости динамической системы, заданной уравнением (9) в момент времени k , назовем k -тым множеством α -достижимости.

Аналогично, α -траекторией системы, заданной уравнением (9), является функция, отображающая k в $[\bar{x}_\alpha]_\alpha$.

Замечание. Поскольку используется покомпонентный принцип расширения, полученный α -срез нечеткого множества достижимости в каждый момент времени k описывается следующим нечетким числом:

$$[\bar{x}_\alpha]_\alpha = \left[\min_{\theta \in [\bar{\theta}]_\alpha} x(k, \theta), \max_{\theta \in [\bar{\theta}]_\alpha} x(k, \theta) \right] \quad (11)$$

Таким образом, поведение нечеткой дискретной во времени динамической системы, заданной уравнением (9) и характеризующейся некоторой нечеткой траекторией, может быть «поуровнево» описано с помощью множеств α -достижимости. «Точная траектория» для заданного уравнения (10) определяет систему множеств достижимости дискретной динамической системы со значениями неопределенных параметров, которые выбираются из множества $[\bar{\theta}]_\alpha$.

Следовательно, множество решений нечеткой дискретной системы (9) моделирования динамических процессов можно описать с помощью соответствующих множеств α -достижимости, полученных для системы (10). После определения «точных» множеств достижимости нужно провести аппроксимацию множеств для вычисления нечетких множеств достижимости системы (9).

Для проведения аппроксимации можно предложить несколько различных типов множеств. В данном случае предлагается алгоритм описания

$\bar{x}_\alpha(k)$ в виде α -срезов траектории системы $[\bar{x}(k)]_\alpha$, заданной уравнением (9), которые задаются системами интервалов:

$$[\bar{x}(k)]_\alpha = [\underline{x}_\alpha(k), \bar{x}_\alpha(k)]$$

где $\underline{x}_\alpha(k)$ и $\bar{x}_\alpha(k)$ - покомпонентные решения задач оптимизации

$$\bar{x}_\alpha(k) = \max [A^k(\theta)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}(\theta)B(\theta)u(j)]$$

$$\underline{x}_\alpha(k) = \min [A^k(\theta)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}(\theta)B(\theta)u(j)]$$

при условиях $\theta \in [\bar{\theta}]_\alpha$ и $x(0) \in [\bar{x}(0)]_\alpha$.

С помощью такого подхода получаем точный покомпонентный α -срез $[\bar{x}(k)]_\alpha$ траектории системы, заданной уравнением (9). Учитывая сложность определения глобального оптимума, на практике такие задачи решаются приближенно с наперед заданной точностью. Для улучшения решений задач оптимизации можно применить определенный способ их уточнения. Одним из возможных вариантов такого уточнения является решение указанных задач оптимизации с использованием лишь вершин множеств $[\bar{\theta}]_\alpha$ и $[\bar{x}(0)]_\alpha$. Правда, этот подход обеспечит точное решение только в случае, когда функции состояний монотонны относительно неопределенного параметра $\bar{\theta}$. Таким образом, предложенный выше подход с учетом использования дополнительных точек-вершин интегрируется в каркас метода расширения, который может быть эффективно использован для моделирования поведения нечетких динамических систем.

Список використаних джерел

1. Калмыков С.А., Шоки Ю.И., Юдашеев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.
2. Watanabe S. Modified Concepts of Logic, Probability and Information based on generalized Continuons Characteristic Function // Information and Control, 15 (1969), N1, pp. 22-32.
3. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. Пер. с фр. - М.: Радио и связь, 1990. 288 с.
4. Івахін Є.В., Волчков С.О. Якiснє дослідження динаміки нечітких дискретних систем // Інформаційно-управляючі комплекси і системи. — 2006. — №1. — С. 114-122.
5. Заде Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня: Сборник статей. — М.: Знание, 1974.
6. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control, - Volume 8, -1965. - P. 338-353.

Надійшла до редколегії 05.07.2012

УДК 515.124+510.5

Карнаух Т.О.

T.O. Karnaukh, Ph.D.

Відстані в синтаксичних просторах**Distances in syntax spaces**

Розглядається розширення поняття метрики, що має сенс для просторів синтаксичних моделей.

This paper describes a metric notion extension which is sensible for syntax models spaces.

Key Words: model, distance, semantic equality.

E-mail: tkarnaukh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Для задач інформатики крім класичного поняття метрики [1, с. 48] використовують різноманітні звуження цього поняття, наприклад, ультаметрики з додатковими обмеженнями з [2, с. 35]. Але інколи доцільним виявляється розширити клас функцій, що задають відстані.

У багатьох задачах, наприклад, задачах розпізнавання, виникає проблема оцінки близькості двох об'єктів: реального та ідеального (тобто моделі) або двох ідеальних. При моделюванні реальних об'єктів синтаксичними конструкціями або математичними моделями (останні теж можна віднести до синтаксичних конструкцій, оскільки модель задається синтаксичними засобами: формулами, співвідношеннями, тощо) найчастіше виявляється, що деякі об'єкти можуть мати кілька моделей. У цьому випадку семантична відстань між моделями вже не є метрикою в розумінні [1, с. 48], а тому теорія просторів моделей для таких задач не може розглядатися як теорія класичних метричних просторів. Одним з можливих виходів з цієї ситуації є послаблення вимог до метрики, що задається в просторі моделей, які зазвичай є синтаксичними об'єктами. Саме це й розглядається в даній роботі.

Витоки поняття псевдометрики

Прикладна наука переважно оперує скінченно означеними моделями об'єктів реального світу. При цьому над моделями (зображеннями) об'єктів реального миру виконуються дії (наприклад, обчислення), що моделюють реальні дії, вироблені над реальними об'єктами. Фундаментальною проблемою тут є те, що той самий об'єкт (процес, явище, тощо) може мати декілька синтаксично різних моделей, причому ці моделі є семантично еквівалентними, а тому результати їхньої обробки також повинні бути семантично еквівалентними, тобто не залежати від зображення вхідного об'єкта. Назвемо цю проблему *проблемою сталості результату*.

Перший і найбільш природний метод розв'язання проблеми сталості результату — вимагати від моделі обчислень того, щоб результати обробки семантично еквівалентних зображень задавали той самий об'єкт (були семантично еквівалентні). Дана задача аж ніяк не є тривіальною.

Перехід від довільного вхідного зображення до канонічного представника класу семантично еквівалентних моделей і подальші обчислення над канонічним представником вирішують проблему сталості результату лише для вузького класу задач: у багатьох випадках проблема семантичної еквівалентності є алгоритмічно нерозв'язною (наприклад, не є алгоритмічно розв'язною еквівалентність машини Тьюрінга).

Трохи інший підхід до розв'язання позначеної проблеми полягає в тому, щоб з самого початку ставити умову, щоб на вхід подавалися тільки канонічні представники, а обчислення над неканонічними зображеннями не розглядалися.

Розглянемо, що відбувається у випадку теорії R -перетворювачів, запропонованої Л.П. Лісовиком [3]. R -перетворювач, моделюючи (задаючи) функцію дійсного аргументу, виконує обчислення над ω -словом — нескінченним двійковим зображенням аргументу. Як відомо, деякі числа (двійково-десяткові, що відмінні від нуля) мають два різних зображення, наприклад: $0.5 = (0.1(0))_2 = (0.0(1))_2$. У теорії R -перетворювачів їм відповідають ω -слова $0V10^*$ і $0V01^*$ (символ V позначає роздільник цілої та дробової частини). Перший підхід до розв'язання проблеми сталості результату приводить до такого поняття як реал. Результат останнього підходу — означення функції, заданої R -перетворювачем [3] (зображення вигляду $w1^*$ як можливі вхідні ω -слова не розглядаються).

Отже, у більшості просторів моделей синтаксично різні об'єкти можуть бути

семантично еквівалентні. У багатьох задачах необхідно оцінювати відстань між об'єктами й відповідні простори реальних об'єктів є метричними. Розглянемо, що відбувається при перенесенні метрики з реального простору в простір моделей об'єктів реального простору.

Природно вимагати, щоб синтаксично близькі зображення (моделі) були семантично близькі. Нехай задано метричний простір (X, d_X) реальних об'єктів, простір моделей M і сюр'єктивне відображення $\pi: M \rightarrow X$, що за моделлю відновлює об'єкт. Відстань d_X між моделями можна визначити як семантичну відстань, тобто як відстань між об'єктами, що їх зображують моделі:

$$\forall m_1, m_2 \in M \quad d_X(m_1, m_2) = d_X(\pi(m_1), \pi(m_2)).$$

У просторі M функція d_X задовольняє аксіомі симетрії й нерівності трикутника, однак перша аксіома метрики для неї може не виконуватися: різні зображення в силу семантичної еквівалентності виявляються розташованими на нульовій відстані. Отже, за не взаємно однозначного моделювання d_X метрикою не є.

Такий підхід до відстані між зображеннями використовується, зокрема, у теорії R -перетворювачів, де відстань між зображеннями дійсних чисел визначається як відстань між самими дійсними числами й, по суті, метрикою не є. Саме цей факт приводить до появи поняття частково неперервної функції [3].

Логічні властивості аксіом метрики

Згідно [1, с. 48], відображення $d: X \times X \rightarrow \{0; +\infty\}$, що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X \quad (d(x, y) = 0 \sim x = y), \\ \forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{аксіома симетрії}), \\ \forall x, y, z \in X \quad d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) \\ (\text{нерівність трикутника}), \end{aligned}$$

називається метрикою, а сама пара (X, d) — метричним простором.

Розглянемо деякі логічні властивості метрики. Зазначимо, що побудувати метрику можна в просторі будь-якої потужності, задавши відстань між однаковими об'єктами рівною нулю, а між різними — одиниці.

У [4, с. 378] в означенні метрики відсутня аксіома симетрії. Насправді справедливо наступне твердження.

Теорема 1. Усі три аксіоми метрики є незалежними.

Доведення. Для множини $X = \{0, 1\}^n$ і відста-

ні

$$d_X(w, v) = \|w\|_2 \cdot \|v\|_2 \quad \forall w, v \in X$$

(тут $\|c_1 c_2 \dots c_n\|_2 = \sum_{i=1}^n 2^{-i} c_i$) виконано аксіоми

симетрії й трикутника, але $d_X(0(1), 1(0)) = 0$.

Для множини $X = \{a, b\}$ і відстані d , заданої співвідношеннями:

$$d(a, a) = d(b, b) = 0, d(a, b) = 1, d(b, a) = 2,$$

перша аксіома метрики й аксіома трикутника виконуються, а аксіома симетрії — ні.

Для множини $X = \{a, b, c\}$, і відстані d , заданої співвідношеннями:

$$\begin{aligned} d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0, d(a, b) = 1, \\ d(b, a) = 1, d(a, c) = 1, d(c, a) = 1, \\ d(b, c) = 3, d(c, b) = 3, \end{aligned}$$

виконано всі аксіоми метрики, крім нерівності трикутника.

Поняття псевдометрики

Як зазначалося вище, у просторах моделей буває зручно мати відстань, відповідно до якої різні об'єкти можуть знаходитися на нульовій відстані. Зрозуміло, що така відстань не є метрикою, оскільки не задовольняє першій аксіомі метрики.

Отже, цікавим представляється дослідження того, яка теорія буде отримана при послабленні першої аксіоми метрики

$$\forall x, y \in X \quad ((d(x, y) = 0) \sim (x = y))$$

до такої

$$\forall x \in X \quad d(x, x) = 0.$$

Означення. Відображення $d: X \times X \rightarrow \{0; +\infty\}$, що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad d(x, x) = 0 \quad (\text{аксіома рівності}), \\ \forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{аксіома симетрії}), \\ \forall x, y, z \in X \quad d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) \\ (\text{нерівність трикутника}), \end{aligned}$$

будемо називати *псевдометрикою* в просторі X , а саму пару (X, d) — *псевдометричним простором*. Надалі під *відстанню* між точками простору будемо розуміти метрику або псевдометрику, у залежності від того, який саме простір розглядається.

Теорема 2. Кожна метрика в просторі X є псевдометрикою, але обернене твердження в загальному випадку не виконується.

Доведення першого твердження теореми ви-

пливає безпосередньо з означень. На доведення другого наведемо приклад псевдометрики d , що не є метрикою. Для цього для всіх $x, y \in X$ покладемо $d(x, y) = 0$.

Кратність точок псевдометричного простору.

Фактор-простір

Теорема 3. У псевдометричному просторі (X, d) властивість точок бути на відстані 0 є еквівалентністю.

Доведення. Рефлексивність та симетричність випливають з аксіом рівності та аксіом симетрії відповідно. Перевіримо транзитивність.

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0, d(y, z) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) &\leq 0 \Rightarrow d(x, z) = 0. \end{aligned}$$

Тому відношення $E: x E y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$, є еквівалентністю. Надалі будемо називати еквівалентність E еквівалентністю, індукованою псевдометрикою d .

Кількість $n(x) = \text{card}\{y \mid d(x, y) = 0\}$ точок простору (у нескінченному випадку, звісно, це буде потужність), що знаходяться на нульовій відстані від точки x , назовемо *кратністю точки x* . *Кратністю простору* назвемо найбільшу з кратностей його точок (якщо така існує).

Для метрики з першої аксіом метрики необхідно має виконуватись $\forall x \in X \ n(x) = 1$. Таким чином, метричний простір має кратність 1. Кратність псевдометричного простору, що не є метричним, не може бути менша за 2. Наприклад, кратність псевдометричного простору $(\{0, 1\}^n, d_2)$ у точності дорівнює 2. Має сенс окремо розглядати простори скінченної кратності. Зокрема, додаванням до аксіом псевдометрики аксіом кратності

$$\forall x \in X \ n(x) \leq k$$

можна ввести поняття *k-кратного псевдометричного простору*.

Теорема 4. Точки псевдометричного простору, розташовані на нульовій відстані, мають однакові кратності, тобто

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow n(x) = n(y).$$

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що $n(x) = \text{card}\{x\}_E$, де $x E y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.

Теорема 5. Якщо $d(x_1, x_2) = 0$, то $d(x_1, y) = d(x_2, y)$.

Доведення. З аксіом псевдометрики маємо

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y) = 0 + d(x_2, y) = d(x_2, y).$$

Нерівність $d(x_2, y) \leq d(x_1, y)$ доводиться ана-

логічно. Теорема доведена.

Оскільки $E(x E y \Leftrightarrow d(x, y) = 0)$ є еквівалентністю в псевдометричному просторі X , то маємо право розглядати фактор-простір X/E . Введемо в ньому відстань за правилом: $d([x]_E, [y]_E) = d(x, y)$.

Теорема 6. Відповідність d є функціональною.

Доведення. На доведення твердження теореми достатньо перевірити, що значення $d([x]_E, [y]_E)$ не залежить від вибору представників x, y відповідних класів еквівалентності.

За теоремою 5 якщо $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2) = 0$, то $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$. Звідки маємо шукане твердження. Теорема доведена.

Теорема 7. Фактор-простір $(X/E, d)$ є метричним.

Доведення. Симетричність та нерівність трикутника для відстані d випливає з властивостей псевдометрики d у просторі X . Залишилось перевірити, що

$$\begin{aligned} \forall [x]_E, [y]_E \in X/E \\ ((d([x]_E, [y]_E) = 0) \Rightarrow ([x]_E = [y]_E)). \end{aligned}$$

Якщо $[x]_E = [y]_E$, то за означенням E та властивостями класів еквівалентності маємо $d(x, y) = 0$, а тоді $d([x]_E, [y]_E) = d(x, y) = 0$.

Якщо $d([x]_E, [y]_E) = 0$, то $d(x, y) = 0$, звідки $x E y$. Тепер за властивостями класів еквівалентності маємо $[x]_E = [y]_E$. Теорема доведена.

Псевдометрики та моделювання

Нехай задано метричний простір (X, d_1) реальних об'єктів, простір моделей M і сюр'єктивне відображення $n: M \rightarrow X$, що за моделлю відновлює об'єкт. Відстань d_1 між моделями означимо як семантичну відстань, тобто як відстань між об'єктами, що їх зображують моделі:

$$\forall m_1, m_2 \in M \ d_1(m_1, m_2) = d_1(n(m_1), n(m_2)).$$

Теорема 8. Семантична відстань d_1 у просторі M є псевдометрикою.

Доведення. Цілком очевидно, що для d_1 виконується аксіома рівності (відстань між синтаксично однаковими моделями дорівнює нулю). З симетричності відстані d_1 маємо симетричність функції d_1 :

$$\begin{aligned} d_1(m_1, m_2) &= d_1(n(m_1), n(m_2)) = \\ &= d_1(n(m_2), n(m_1)) = d_1(m_2, m_1). \end{aligned}$$

Також з властивостей метрики d_1 для d_1 виконується нерівність трикутника:

$$d_1(m_1, m_3) = d_1(n(m_1), n(m_3)) \leq$$

$$\leq d_X(n(m_1), n(m_2)) + d_X(n(m_2), n(m_3)) = \\ = d_X(m_1, m_2) + d_X(m_2, m_3).$$

Теорема доведена.

У той же час перша аксіома метрики для семантичної відстані може не виконуватися: різні зображення в силу семантичної еквівалентності виявляються розташованими на нульовій відстані. Отже, за не взаємно однозначного моделювання d_X метрикою не є. В якості приклада можна розглянути раніше згадувані зображення дійсних чисел ω -словами, що є нескінченними двійковими зображеннями чисел.

Приклад. Нехай $X = [0; 1]$, $d_X(x, y) = |x - y|$, $M = \{0, 1\}^\omega$, $n: M \rightarrow X$ означено так:

$$n(m) = \|m\|_2, \text{ де для } m = c_1c_2\dots \in M, c_i \in \{0, 1\},$$

$$\|m\|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} c_i.$$

Тоді $d_S(m_1, m_2)$, де

$$d_S(m_1, m_2) = d_X(n(m_1), n(m_2)) = \|\|m_1\|_2 - \|m_2\|_2\|,$$

є псевдометрикою простору M . (M є простором нескінченних двійкових зображень дійсних чисел з відрізка $[0, 1]$.) З теорії чисел відомо, що деякі дійсні числа мають два двійкових зображення (наприклад, $\|01^\omega\|_2 = \|10^\omega\|_2 = 0.5$), а решта — лише одне. Тому зображення n не є однозначним, а відстань d_S не задовольняє першу аксіому метрики. Отже, простір (M, d_S) є псевдометричним, але не метричним.

У той же час, за теоремою 7 факторпростір $(M/E, d_S)$, де E — еквівалентність, індукована псевдометрикою d_S простору M , є метричним. Більш того, він є ізоморфним метричному простору (X, d_X) , про що свідчить наступна теорема.

Теорема 9. Метричні простори $(M/E, d_S)$ та (X, d_X) ізоморфні.

Доведення. Перевіримо, що $n(\gamma^{-1}(\cdot))$, де $\gamma: M \rightarrow M/E$ — канонічне відображення, є шуканим ізоморфізмом.

Насамперед зазначимо, що

$$n(x) = n(y) \Leftrightarrow d_S(x, y) = d_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in y.$$

Тому E фактично є ядерною еквівалентністю відображення n , звідки $n(\gamma^{-1}(\cdot))$ є бієкцією між M/E та X . Крім того, за означенням d_S

$$d_S([m_1]_E, [m_2]_E) = d_X(n(m_1), n(m_2)).$$

Оскільки $\{m_1\} \in \gamma^{-1}(\{[m_1]_E\})$ та $n(x) = n(y) \Leftrightarrow x \in y$, то

$$n(\gamma^{-1}([m_1]_E)) = n(m_1), n(\gamma^{-1}([m_2]_E)) = n(m_2),$$

звідки

$$d_S([m_1]_E, [m_2]_E) = d_X(n(\gamma^{-1}([m_1]_E)), n(\gamma^{-1}([m_2]_E))).$$

Теорема доведена.

Отже, для псевдометричного простору моделей (M, d_S) , побудованого за простором реальних об'єктів (X, d_X) , у метриці простору $(M/E, d_S)$ відстань між класами моделей збігається з відстанню між відповідними реальними об'єктами в просторі (X, d_X) .

У випадку простору моделей M доречно розрізнити синтаксичну та семантичну відстані. В якості синтаксичної відстані можна розглядати метрику (або псевдометрику) d простору моделей, що відображає ступінь однаковості зображень. Як зазначалося вище, семантична відстань може будуватися як відстань між відповідними реальними об'єктами і використовуватися у вигляді псевдометрики d_S . Але семантична та синтаксична відстані між моделями мають узгоджуватися між собою. Як вказувалося раніше, синтаксично близькі об'єкти повинні бути близькі семантично, тому для пари (d_S, d) доречно вимагати виконання обмеження

$$\forall x, y \in M \quad d_S(x, y) \leq f(d(x, y)),$$

де функція узгодження $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ неперервна в деякому околі нуля, причому $f(0) = 0$. Остання вимога гарантує, що синтаксично рівні об'єкти мають бути семантично рівними.

У випадку існування такої функції f відстані d_S і d будемо називати узгодженими.

Приклад. Нехай $X = [0; 1]$, $d_X(x, y) = |x - y|$, $M = \{0, 1\}^\omega$, $n: M \rightarrow X$ означено як $n(m) = \|m\|_2$ та $d_S(m_1, m_2) = d_X(n(m_1), n(m_2)) = \|\|m_1\|_2 - \|m_2\|_2\|$.

Для простору $M = \{0, 1\}^\omega$ можна ввести метрику d :

Для $a = a_1a_2\dots$, $b = b_1b_2\dots$, де $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, покладемо

$$d(a, b) = 1/n, \text{ де } n \text{ таке, що } a_n \neq b_n, \\ a_1a_2\dots a_{n-1} = b_1b_2\dots b_{n-1}, \text{ якщо } a \neq b, \\ d(a, b) = 0, \text{ якщо } a = b.$$

Не важко перевірити, що так означена функція d є метрикою простору $\{0, 1\}^\omega$, при цьому вона оцінює саме «однаковість» зображень дійсних чисел, тобто синтаксичну відстань між зображеннями. Чим синтаксично ближчі зображення, тим більш семантично близькі об'єкти вони задають. На підтвердження останньої тези достат-

ньо розглянути функцію $f(x) = x$ як функцію узгодження між семантичною та синтаксичною відстанями.

Зауваження. У теорії булевих функцій однаковість досконалих диз'юнктивних нормальних форм над фіксованим алфавітом змінних розглядають з точністю до набору елементарних кон'юнкцій, а однаковими вважаються елементарні кон'юнкції з однаковим набором літералів. Тобто, наприклад, для комутативних та асоціативних операцій синтаксичну рівність можна оцінювати з точністю до застосувань законів комутативності та асоціативності. Тоді синтаксична відстань теж буде тільки псевдометрикою, але не метрикою (в нашому прикладі в просторі булевих формул над певним алфавітом змінних).

Границі послідовності та неперервність функцій у псевдометричних просторах

Цікаво розглянути, що зміниться з поглядом математичного аналізу при переході від метричного простору до псевдометричного, а також, що залишиться в силі.

Границя послідовності точок

Як і у випадку класичного метричного простору, будемо казати, що послідовність $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точок простору X сходиться до точки $x \in X$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

Теорема 10. Якщо послідовність $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точок простору X має кілька різних границь, то всі попарні відстані між ними рівні 0.

Доведення. Нехай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0.$$

Тоді

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y).$$

Переходячи в отриманих нерівностях до границі при $n \rightarrow \infty$, одержуємо $d(x, y) = 0$, що й потрібно було показати. Теорема доведена.

Неперервність функцій

Нехай дано два метричних простори реальних об'єктів (X, d_x) і (Y, d_y) , а також два псевдометричних простори (M_x, d_x) і (M_y, d_y) , в яких псевдометрика відповідає семантичній еквівалентності їхніх моделей (а тому й позначена як метрика відповідного простору). Нехай d_{x1} і d_{y1} задають узгоджені (з d_x і d_y) синтаксичні відстані в просторах M_x і M_y , тобто синтаксично близькі елементи є близькими й семантично.

У класичному випадку поняття неперервного

відображення метричного простору розглядається щодо метрики [1, с. 51]. Трохи узагальнено означення. Будемо казати, що функція $f \in (d_1, d_2)$ -неперервною в точці x_0 простору Z , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Z \\ (d_1(x_0, x) < \delta \rightarrow d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon).$$

Таким чином, (d_{x1}, d_{y1}) -неперервність відповідає класичній неперервності відображень метричних просторів. З точки зору алгоритмічних пристроїв це абсолютно природне поняття: синтаксично близькі входи повинні перетворюватися в синтаксично близькі об'єкти. Тут варто помітити, що перенесення неперервного відображення $f_M: M_X \rightarrow M_Y$ у простір реальних об'єктів $f: X \rightarrow Y$ за правилом $f(x) = f_M(n'(x))$, де відображення n' за елементом відновлює деяку його модель, може приводити до того, що відображення f втратить неперервність (відносно метрик d_x і d_y) у точках, що мають кілька моделей.

Якщо розглядати теорію R -перетворювачів [3], то задана R -перетворювачем словарна функція $\epsilon \in (d_{x1}, d_{y1})$ -неперервною (синтаксично близькі входи переробляються в синтаксично близькі виходи). Крім того, введено в роботі [3] поняття частково неперервної функції відповідно (d_{x1}, d_{y1}) -неперервності. Оскільки семантична та синтаксична відстані d_y та d_{y1} узгоджені, то (d_{x1}, d_{y1}) -неперервне відображення ϵ й (d_{x1}, d_y) -неперервним. Для неперервності відображення $f: X \rightarrow Y$ необхідно вимагати (d_x, d_{y1}) -неперервності для f_M .

(d_x, d_y) -неперервне в точці відображення $f_M: M_X \rightarrow M_Y$ псевдометричних просторів будемо називати псевдонеперервним у точці.

Властивості псевдонеперервних відображень

Для спрощення викладення далі розглядатимемо псевдонеперервне відображення f із псевдометричного простору (X, d) у псевдометричний простір (Y, d) . Аналогічно класичному аналізу, будемо казати, що функція f має псевдограницю a в точці x_0 , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Z (d(x_0, x) < \delta \rightarrow d(a, f(x)) < \varepsilon).$$

і позначати це так $a \in \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ — множина всіх псевдограниць функції f у точці x .)

Теорема 11. $a, b \in \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow d(a, b) = 0$.

Доведення. Справедливість твердження випливає з того, що

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, f(x)) + d(f(x), b) =$$

$$= d(a, f(x)) + d(b, f(x)) \rightarrow 0 \text{ за умови } x \rightarrow x_0.$$

Теорема доведена.

Теорема 12. Якщо $a \in \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $d(a, b) = 0$, то $b \in \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Доведення. За умови $x \rightarrow x_0$ маємо

$$0 \leq d(b, f(x)) \leq d(b, a) + d(a, f(x)) = d(a, f(x)) \rightarrow 0,$$

що завершує доведення теореми.

Таким чином, якщо псевдонеперервна функція має кілька псевдограниць у точці, те всі вони еквівалентні (відстань між ними дорівнює 0). І кожна з еквівалентних точок є псевдограницею, якщо такою є хоча б одна.

Крім того, слід зазначити, що, аналогічно класичному математичному аналізу, означення псевдонеперервності й псевдограниці по Гейне еквівалентні наведеним тут означенням по Коші (відповідні доведення мають місце й у випадку псевдометричного простору).

Висновки

Псевдометрики та узгоджені відстані можуть використовуватися в задачах розпізнавання. Під час розпізнавання найчастіше за все приходиться ототожнювати деякі варіації зображення об'єкта, що розпізнається, а тому фактично використовується псевдометрика. Крім того, задачу розпізнавання можна формулювати як задачу оцінки від-

стані між реальним об'єктом та об'єктом, що зображено або задано моделлю, у просторі реальних об'єктів. А ця задача плавно переходить у задачу перевірки моделі об'єкта, що перевіряється, на відповідність моделі зрізця. (Наприклад, можна ставити задачу визначення ідентичності (близькості) двох об'єктів за алгоритмами їх розпізнавання/обчислення.) А для таких задач корисні узгоджені відстані d_s та d .

Для деяких класів алгоритмічних моделей синтаксичну відстань d оцінити набагато простіше, ніж семантичну. У розглянутому прикладі з простором Σ для різних елементів синтаксична відстань є обчислюваною за скінченний час. Водночас з цим, семантична відстань у загальному випадку може не бути алгоритмічно обчислюваною, а тому не може ефективно використовуватися в алгоритмах розв'язання задач розпізнавання чи класифікації. Тому для таких задач за наявності узгоджених синтаксичної та семантичної відстаней за оцінкою синтаксичної відстані можна робити висновки про семантичну близькість і в такий спосіб розв'язувати задачі розпізнавання та класифікації.

Подальшу серію робіт з цієї тематики планується присвятити формалізації методик оцінки величини відстані за умови неможливості обчислити дану характеристику алгоритмічно.

Список використаних джерел

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин — М.: Наука, 1976. — 544 с.
2. Хренников А. Ю. Моделирование процессов мышления в р-адических системах координат / А.Ю. Хренников // М.: Физматлит, 2004. — 296 с.
3. Лисовик Л. П. Логические свойства частично непрерывных функций / Л.П. Лисовик // Тр. ин-та математики СО АН СССР. — Математическая логика и алгоритмические проблемы. Н.: Наука, 1989. — Т. 12. — С. 39-72.
4. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн — М.: Наука, 1973. — 832 с.

Надійшла до редколегії 21.06.12

Крак Ю.В., д.ф.-м.н., проф.; Єфімов Г.М., к. т. н., ст.викладач; Тернов А.С., м.н.с.

Технологія аналізу емоційних станів обличчя людини для правильного розуміння жестової мови

Розглянуто задачу аналізу мімічних проявів в контексті задачі аналізу жестової мови. Запропоновано інформаційну технологію для автоматичного визначення довільного емоційного стану конкретної людини, як опуклої комбінації деяких базових станів.

Ключові слова: інформаційна технологія, аналіз мімічних проявів, жестова мова, простір мімічних ознак емоційних станів, B-сплайн апроксимація.

Iu.V.Krak, Prof.; G.M.Efimov, PhD in Tech, A.S.Ternov, junior researcher.

Iu.V.Krak, Prof.; G.M.Efimov, PhD in Tech, A.S.Ternov, junior researcher.

The technology of analysis of emotional states on a human face for proper sign language interpretation

The problem of analyzing facial expressions as a task in the context of sign language meaning are observed. The information technology for automatically definition of arbitrary emotional state of a specific person as a convex combination of some his basic states is proposed.

Key Words: information technology, analysis sign language, space of mimic features, B-spline approximation.

E-mail: yuri.krak@gmail.com, anton.ternov@gmail.com,
Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Хусаїнов Деніс Ях'євич

Вступ

В останні роки невербальна поведінка людини стала предметом інтенсивних досліджень. Так, наприклад, при комунікації на українській жестовій мові (УЖМ) нечуючі люди використовують декілька мовних засобів – жести, міміку та артикуляцію [1]. Міміка, крім свого базового призначення – вираження емоцій і зовнішнього прояву психічних станів людини – в жестовій мові використовується також для передачі експресії, інтонації, різних граматичних конструкцій, які неможливо передати мануальними жестами. Тому аналіз міміки емоцій при відтворенні жестової мови є важливою віхою в розумінні сенсу жестикуляції і надає можливість правильно ідентифікувати внутрішній стан та відношення людини до повідомлення [2].

Проведені дослідження дозволили запропонувати своєрідні «формули» деяких мімічних виразів. Тим самим був зроблений не тільки важливий крок на шляху строгого експериментального дослідження відображення експресії, але й була поставлена проблема диференційованості сприйняття міміки обличчя.

У представленому дослідженні формальна психологічна модель емоцій, запропонована у [3], розширена для синтезу та аналізу мімічних проявів емоційних станів людини. Отримані результати можуть бути використанні для моделювання інтелектуальної діяльності людини, застосування в системах штучного інтелекту, як складові при розробці алгоритмів і програмно-апаратних засобів для систем комп'ютерного розпізнавання та відтворення (синтезу) зорових образів, а також для створення високоінтелектуальних мультимедійних технологій і засобів для систем штучного інтелекту.

В [4] вперше запропоновано для моделювання міміки емоційних станів людини використовувати лінійну опуклу комбінацію деяких базових станів. В ході цих досліджень було отримано 21 характеристичну ознаку-комбінації яких утворює базис мімічних виразів емоцій. Тобто, мімічні вирази емоцій (E_m) були представлені у вигляді вектора:

$$E_m = (\mu_1, \dots, \mu_{21}), i = \overline{1, 8}, \quad (1)$$

де $\mu_i \in [0; 1]$ – характеристична мімічна ознака (при $\mu_i = 0$ – немає ознаки, а при $\mu_i = 1$ вплив ознаки максимальний).

Набір 8-ми векторів, утворює базис (B_θ , де $i=1,21, j=1,8$) простору мімічних проявів емоційних станів.

У запропонованій в [4] моделі базис простору мімічних ознак емоційних станів будується на основі апріорного досвіду експериментатора, вимагає певної кваліфікації і, відповідно, дає неоднозначний результат – констатація одного і того ж емоційного м'язового прояву у різних людей розрізняється. Для того, щоб перейти від феноменологічного визначення характеристик мімічних ознак до певної їх формалізації, у [5] запропоновано власну модифікацію методу моделей, які деформуються. В якості параметричних кривих, для виділення характерних ознак рис обличчя, запропоновано використати моделі, які задаються з допомогою нерівномірних раціональних базисних сплайнів – NURBS-кривих [6]:

В рамках проведених досліджень була побудована модель, яка складається з гнучких шаблонів – NURBS-кривих. Виходячи з того, що опорні точки NURBS-кривої однозначно визначають саму криву – до розгляду брались тільки вектори опорних точок. Для побудови базису були використані наступні вектори опорних точок.

Для цілей автоматичного деформування контурних моделей запропоновано апроксимацію B-сплайн кривих [6]. Відомо, що при $w_i = 1$ NURBS-крива зводиться до B-сплайн кривої. Ця проста властивість випливає з ідентичності опорних точок (P_i) в однорідній формі і рівності знаменника 1. Беручи до уваги, що при моделюванні гнучких шаблонів приймалося $w_i = 1$, то для спрощення апроксимації було здійснено перехід до B-сплайн кривих.

Задача B-сплайн апроксимації є задачею підгонки B-сплайн кривої з K опорними точками $p = [p_0, \dots, p_{K-1}]^T$ до точкової кривої $d = [d_0, \dots, d_{M-1}]^T$, де $M > K$ (зазвичай $M \gg K$) для значень параметра $u_0, \dots, u_{M-1}$. Така задача апроксимації приводить до перевизначеної системи лінійних рівнянь:

$$N \cdot p = d, \quad (2)$$

де $N_i(u)$ – B-сплайн базисна функція.

Одним з шляхів отримання рішення перевизначеної системи лінійних рівнянь (4) є: $N^T N \cdot p = N^T \cdot d$, звідки

$$p = (N^T N)^{-1} \cdot N^T d, \text{ при } \det(N^T N) \neq 0 \quad (3)$$

Для застосування B-сплайн апроксимації потрібно вміти отримувати на зображенні точкові криві $d = [d_0, \dots, d_{M-1}]^T$, які відповідають потрібним контурам, з тим, щоб далі застосувати перетворення (5-7). Існують багато технологій для отримання на зображенні точкових кривих $d = [d_0, \dots, d_{M-1}]^T$, які відповідають контурам брів, очей та роту. В основному вони базуються на отриманні контуру зображення, як різкої границі між елементами зображення (з допомогою згортки, аналізу кольору тощо) з наступною скелетизацією (отриманням контуру одиничної товщини).

Для аналізу мімічних виразів емоцій запропонована наступна цілісна інформаційна технологія [4,5]:

- 1) для конкретної людини отримуємо множину із восьми фотографічних зображень обличчя, на якому відтворена мімічна реакція на ситуації які відповідають базовим емоціям: радість, горе, надія, страх, задоволення, гнів, інтерес, зневага;
- 2) у відповідному програмному забезпеченні нормуємо фотографічні зображення (по відстані між центрами очей);
- 3) за допомогою відомих технологій оконтурення та скелетизації зображень, отримуємо контури наступних частин обличчя: зморшки в області чола, брови, верхні повіки, нижні повіки, зморшки «гусячі лапки» біля зовнішніх кутків очей, зморшки під повіками, рот, зморшки від носа до кутків губ;
- 4) використовуючи гнучкі шаблони у вигляді NURBS-кривих [5] та B-сплайн апроксимацію, отримуємо множину опорних точок NURBS-кривої для шаблонів, які характеризують кожну з восьми базових емоцій (таблиця 1):

$p_i^{1,e} = [x_i^{1,e}, y_i^{1,e}]^T, i = 0,4, e = 1,8$ – шаблон лівої брови для 8-ми емоційних станів;

$p_i^{2,e} = [x_i^{2,e}, y_i^{2,e}]^T, i = 0,5, e = 1,8$ – шаблон лівої верхньої повіки для 8-ми емоційних станів;

$p_i^{3,e} = [x_i^{3,e}, y_i^{3,e}]^T, i = 0,5, e = 1,8$ – шаблон лівої нижньої повіки для 8-ми емоційних станів;

$p_i^{4,e} = [x_i^{4,e}, y_i^{4,e}]^T, i = 0,16, e = 1,8$ – шаблон губ для 8-ми емоційних станів;

та для опису зморшок отримаємо деякі характеристичні мімічні ознаки (таблиця 1):

$\mu^{(e)} = [\mu_1^{(e)}, \mu_2^{(e)}, \mu_3^{(e)}, \mu_4^{(e)}, \mu_{15}^{(e)}, \mu_{21}^{(e)}]^T$, $e = \overline{1,8}$ - характеристичні мімічні ознаки (таблиця 1);

5) з восьми отриманих множин опорних точок NURBS-кривих (шаблонів) та вектора характеристичних мімічних ознак для зморшок побудуємо базис емоційних станів (В) конкретної людини:

$$B = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} & \dots & \mu^{(8)} \\ p^{1,(1)} & \dots & p^{1,(8)} \\ p^{2,(1)} & & p^{2,(8)} \\ p^{3,(1)} & & p^{3,(8)} \\ p^{4,(1)} & & p^{4,(8)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$p^{j,(k)} = \begin{bmatrix} p_0^{j,(k)} \\ \vdots \\ p_{n_j}^{j,(k)} \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1,4}, \quad k = \overline{1,8}$$

$n_1 = 4, n_2 = 5, n_3 = 5, n_4 = 16$

В подальшому, для аналізу будь-якого зображення обличчя цієї людини: повторимо пункти 1)-4) для зображення довільної емоції та отримаємо вектор:

$$b = [\mu^{(e)}, p^{1,(e)}, p^{2,(e)}, p^{3,(e)}, p^{4,(e)}]^T, \quad p^{j,(e)} = [p_0^{j,(e)}, \dots, p_{n_j}^{j,(e)}]^T, \quad (5)$$

$$j = \overline{1,4}, n_1 = 4, n_2 = 5, n_3 = 5, n_4 = 16$$

Розкладемо його по побудованому базису В (8):

$$B^T B \cdot x = B^T \cdot b, \text{ звідки } x = (B^T B)^{-1} \cdot B^T b,$$

за умови

$$\det((B^T B)^{-1}) \neq 0 \quad (6)$$

Коефіцієнти розкладу $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ будуть вказувати на конкретний вклад кожної з восьми базових емоцій у довільну емоцію b .

Результати моделювання. За умови переходу від феноменологічного опису емоцій до ситуацій, у яких емоції виникають, була створена множина фотографічних зображень базових емоцій. З отриманих зображень виділялися, описаними вище способами, необхідні для подальшої обробки контури (брови, очі, губи тощо). На рис. 1 контури правої брови представлені у вигляді точкової кривої. На графіку видно, що положення отриманих контурів правої брови відповідають опису міміки емоцій. Тобто видно, що для емоцій задоволення та радості особливого прояву міміки немає, для емоцій горя та надії –

внутрішні кутики підняті дотопи, а для емоції страху – брова піднята та зведена.

До точкових контурів застосовувалися перетворення (2-3) для отримання множин керуючих точок NURBS-кривих.

З восьми отриманих множин опорних точок NURBS-кривих (шаблонів) та вектора характеристичних мімічних ознак для зморшок був побудований базис (4) емоційних станів (В) конкретної людини.

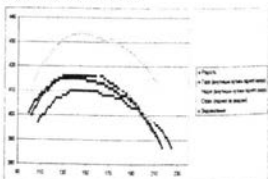


Рис. 1. Графік точкових кривих правої брови для деяких емоцій

Аналогічним чином, з фотографічного зображення довільної емоції, що відтворює ситуацію, у якій виникає відчуття провини, був побудований відповідний вектор b (5).

Застосовуючи перетворення (6) було проведено розклад отриманого вектора b по базису В.

Для емоційного стану «провина» були отримані наступні коефіцієнти опуклої комбінації базових станів:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.7, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0.3, \alpha_6 = 0,$$

$$\alpha_7 = 0, \alpha_8 = 0, \sum_{i=1}^8 \alpha_i = 1$$

де α_i - відповідають наступним емоційним станам: радість, горе, надія, страх, задоволення, гнів, інтерес та зневага. Згідно [3], стан, який складається з комбінації задоволення ($\alpha_2 = 0.3$) та горя ($\alpha_5 = 0.7$) відповідає емоції «провина».

Таким чином можна аналізувати міміку, що відповідає виразу експресії (емоціонального забарвлення) в жестовій мові.

Системи нотації. Для можливості подальшого поширення зазначеного підходу на множину всіх мімічних станів в українській жестовій мові, необхідно буде додатково визначити набір граматичних мімік жестової мови. Іншими словами визначити набір

базових емоцій для реалізації модальних форм, запитальних конструкцій та інших лексико-семантичних і граматичних значень присутніх в жестовій мові.

Для цього було проаналізовано існуючі системи нотації, які безпосередньо чи опосередковано використовуються для опису структурних елементів жестової мови беручи до уваги міміку: SignWriting [7], Hamburg Notation System (HamNoSys) [8], Facial action coding system (FACS) [9]. Принципи подання інформації о мімічних проявах в усіх системах різні, тому для якісного порівняння згаданих систем нотації, дослідження проводились в два етапи: 1) аналізувались текстові описи елементів знакових систем, з метою формування спільного для всіх систем набору класів по зонам обличчя; 2) проводилося розбиття елементів систем на елементарні подання, що дало змогу визначити мінімальний набір компонент подання міміки. Результати структурного порівняння систем нотації за кількістю елементів мімік по області та типу їх дії наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Класи мімічних ознак в HamNoSys, SignWriting и FACS

Ознака	FACS	SW	HNS
Брови	5	7	4
Повіки	5	10	13
Щоки	4	6	13
Ніс	4	4	3
Губи	14	28	35
Язик	3	8	17
Зуби	2	7	9
Щелепа	3	2	4
Інше	8	12	-
Разом	34	84	98

В області подання мімік жестової мови по області і типу дії HamNoSys виявилась більш повною, тому за основу формального подання граматичних мімік УЖМ в подальшому дослідженні буде використано гамбурзьку систему нотації.

Висновки. В роботі запропонована математична модель та цілісна інформаційна технологія для автоматичного визначення довільного емоційного стану конкретної людини, як опуклої комбінації деяких базових станів. Для цього, з допомогою математичної моделі та відповідного програмного забезпечення, створюється базовий простір емоційних станів конкретної людини. Для побудови базису простору емоційних станів

використовуються гнучкі шаблони контурів основних зон обличчя. Гнучкі шаблони подані у вигляді NURBS-кривих. Налаштування шаблону на точковий контур конкретного зображення проходить з допомогою B-сплайн апроксимації, розв'язуючи перевищену неоднорідну систему лінійних рівнянь.

Подальші дослідження спрямовані на побудову системи аналізу мімічних проявів, включаючи також розпізнавання міміки, під час відтворення жестової мови, зокрема, на отримання характеристики мімічних ознак для аналізу динаміки актуальних переживань людини.

Список використаних джерел

1. Кудьбіда С.В. Українська жестова мова як природна знакова система // Збірник наукових праць «Жестова мова й сучасність»: К.: Педагогічна думка, 2009. – С. 218-239.
2. Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, О.В. Бармак [та ін.]. Інформаційна технологія для моделювання української мови жестів // Штучний інтелект. – 2009. №3. – С. 186-197.
3. Леонтьев В.О. Классификация эмоций. – Одесса: ИИЦ, 2002. – 84 с.
4. Крак Ю.В., Бармак О.В., Єфімов Г.М. Синтез мімічних виразів емоцій на основі формальної моделі // Штучний інтелект. – 2007. №2. – С. 159-165.
5. Крак Ю.В., Бармак О.В., Єфімов Г.М. Використання контурних моделей для побудови базису простору мімічних виразів емоцій // Ж.: Штучний інтелект. – 2007. №4. – С. 288-296.
6. Piegl, Les and Tiller, Wayne. The NURBS Book, 2nd Edition. – Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1996. – 846 p.
7. Sutton V. Lessons in SignWriting. Center for Sutton Movement Writing, 2002. – 195 p.
8. Interface Definitions, ViSiCAST Deliverable D5-1./ [Hanke T., Langer G., Metzger C. et al] – Hamburg, Institute of German Sign Language and Communication of the Deaf, 2002. – 74 p.
9. Miller F. P. Facial Action Coding System. / Miller F. P., Vandome A. F., McBrewster J. – Beau Bassin, International Book Marketing Service Ltd, 2011. – 80 p.

Надійшла до редколегії 22.04.12.

Крак Ю.В. д. ф.-м. н., проф.
Кудін Г.І., к. ф.-м. н., доц.
Шкільнюк Д.В., аспірант

Удосконалення методів векторного аналізу та гіперплощинної класифікації для розпізнавання елементів дактильної мови

Об'єктом дослідження є дактильна мова, яка використовується для спілкування нечуючими людьми або людьми з пониженням слухом. Метою дослідження є розробка та реалізація алгоритмів розпізнавання дактилем жестової мови. В роботі розглядається застосування методів контурного аналізу для задачі розпізнавання, а також використання методів гіперплощинної кластеризації векторів ознак жестів.

Ключові слова: дактильна мова, контурний аналіз, розпізнавання жестів.

E-mail: yuri.krak@gmail.com, dimonshk@gmail.com
Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Хусаїнов Денис Як'євич.

Вступ

Дактильно-жестова мова є основним засобом комунікації нечуючих людей як між собою, так і з іншими людьми. Дана мова в кожного народу своя, хоча інформація, яка передається через жести в різних народів у багатьох випадках має однакову або схожу інтерпретацію. Складним і незроз'язаним питанням є визначення співвідношення та взаємозв'язку словесної мови та мови жестів. Тому, виникає необхідність у дослідженні та створенні систем для синтезу і аналізу жестової мови у формах і видах зрозумілих і доступних для загалу.

Метою даної роботи є удосконалення методів контурного аналізу до задач ідентифікації елементів дактильної мови, а також використання методів гіперплощинної класифікації для розпізнавання елементів дактилем. (тут і далі під дактилемою будемо розуміти букву дактильної абетки, яка відображається певним положенням пальців руки людини і функціонально аналогічна букві звичайної абетки). Запропоновано ряд алгоритмів для ідентифікації окремих елементів жестів, в яких використовується

Iu. V. Krak, PhD in Math., Prof.
Iu. V. Krak, PhD in Math., Prof.
G.I. Kudin, PhD in Math.
D.V. Shkilnjuk, post graduate student

An improvement of vector's analysis and hiperplane classification methods for elements of dactyl language recognition

Object of developing is a dactyl language, which is used for communication by deaf people and people with reduced hearing. The aim of the investigation is to develop and implement algorithms for dactyl recognition of sign language. This paper considers the application of contour analysis for pattern recognition elements-finger sign language and the use of methods of separation feature vectors gestures hyper plane.

Keywords: dactyl language, contour analysis, recognition of gestures.

контурний аналіз. Даний підхід надає можливість правильно розпізнавати дактилем і уникнути певних труднощів при розпізнаванні дактилем коли рука людини знаходиться на різних фокусних відстанях. Використовуючи методи контурного аналізу до області точок, що належать руці в процесі відображення дактильно-жестової мови, отримуються дескриптори, що визначають векторний простір ознак букв алфавіту, в якому кожна буква відтворюється пальцями рук. Запропоновані нові методи для побудови класифікатора дактилем, який в умовах реального спілкування однозначно розпізнає відповідне зображення.

1. Застосування контурного аналізу для ідентифікації елементів дактильної мови

Контур – це границя об'єкта, сукупність точок (пікселів), які відділяють об'єкт від фону[1]. В контурному аналізі границя об'єкта кодується у послідовність, яка складається з комплексних чисел [2-4]. На контур фіксується точка, яка називається початковою точкою. Далі контур обходить (наприклад – за годинниковою стрілкою), і кожен вектор

зміщення записується комплексним числом $a + ib$. Тут a – зміщення точки по осі X , b – зміщення по осі Y . Зміщення береться відносно попередньої точки.

В силу фізичної природи тривимірних об'єктів, їх контури завжди замкнуті і не допускають самоперетини [1]. Це дозволяє однозначно визначити шлях обходу контуру (з точністю до напрямку – за чи проти годинникової стрілки). Останній вектор контуру завжди приводить до початкової точки.

Кожен вектор контуру будемо називати елементарним вектором. А саму послідовність комплексно-значних чисел – вектор-контуром. Вектор-контур будемо позначати великими грецькими буквами, а їх елементарні вектори – малими грецькими буквами.

Таким чином, вектор-контур R довжини k можна позначити як: $R = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$.

Відзначимо, що використання такого кодування зводить операції над контуром до операцій над вектором комплексних чисел, які мають хороші математичні властивості в порівнянні з іншими способами кодування. Комплексне кодування близьке до двовимірного кодування, де контур визначається як сукупність елементарних векторів, поданих своїми двовимірними координатами. Різниця у тому, що операція скалярного добутку для векторів і для комплексних чисел різні і саме ця обставина надає перевагу методам контурного аналізу.

Наведемо важливі в подальших дослідженнях властивості контурів:

- Сума елементарних векторів контуру дорівнює нулю оскільки елементарні вектори приводять до початкової точки.
- Вектор-контур не залежить від паралельного перенесення вихідного зображення, тобто цей спосіб кодування інваріантний зміщенню вихідного контуру.
- Поворот зображення на визначений кут рівносильний повороту кожного елементарного вектора на той самий кут.
- Зміна початкової точки призводить до циклічного зсуву вектора-контуру. Оскільки елементарні вектори кодуються відносно попередньої точки, то при зміні початкової точки послідовність елементарного вектора буде така ж, але першим елементарним вектором буде той, який починається в початковій точці.

- "Зміна масштабу вихідного зображення визначається як множення кожного вектора контуру на масштабний коефіцієнт.

Скалярним добутком контурів R і N називається таке комплексне число:

$$\eta = (R, N) = \sum_{n=0}^{k-1} (\gamma_n, \nu_n) \quad (1.1)$$

де k – розмірність вектора-контуру, γ_n – n -й елементарний вектор контуру R , ν_n – n -й елементарний вектор контуру N , а (γ_n, ν_n) – скалярний добуток комплексних чисел, обрхоується наступним чином:

$$(a + ib, c + id) = (a + ib, c - id) = ac + db + i(bc - ad). \quad (1.2)$$

Відзначимо, що в контурному аналізі допускається скалярний добуток тільки вектор-контурів однакової розмірності. Тобто кількість елементарних векторів у контурах має співпадати.

Скалярний добуток звичайних векторів і скалярний добуток комплексних чисел відрізняються. Якщо перемножити елементарні вектори як прості вектори, то їх скалярний добуток мав би наступний вигляд:

$$((a, b), (c, d)) = ac + bd. \quad (1.3)$$

Порівнявши (1.3) з (1.2), можна зробити висновок, що:

- Результатом скалярного добутку векторів є дійсне число. А результатом добутку комплексних чисел – комплексне число.
- Дійсна частина скалярного добутку комплексних чисел співпадає з скалярним добутком відповідних векторів. Тобто комплексний добуток включає в себе векторний скалярний добуток.

В лінійній алгебрі скалярний добуток дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними. Це означає, що два перпендикулярні вектори завжди будуть мати нульовий скалярний добуток, колінеарні ж вектори – навпаки, будуть давати максимальне значення скалярного добутку.

Ці властивості добутку дозволяють використовувати його як міру близькості векторів. Чим він більший – тим менший кут між векторами, тим «ближче» вони один до одного. Для перпендикулярних векторів – він

зменшуватися до нуля, а далі стає від'ємним для векторів, напрямлених у різні сторони.

Введемо ще один термін – нормований скалярний добуток:

$$\eta = \frac{(R, N)}{|R||N|}, \quad (1.4)$$

де $|R|$ і $|N|$ – норми (довжини) контурів, які рахуються наступним чином:

$$|R| = \left(\sum_{n=0}^{k-1} |r_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

Нормований скалярний добуток в просторі комплексних чисел також є комплексним числом. При цьому, одиниця – це максимально можливе значення модуля нормованого скалярного добутку (це випливає з нерівності Коші-Буняковського: $|ab| \leq |a||b|$), і вона досягається тільки якщо

$$R = \mu N, \quad (1.6)$$

де μ – будь-яке комплексне число.

При множенні комплексних чисел, їх модулі (довжини) перемножуються, а аргументи (кути) – додаються. Це означає що контур μN – це контур N , але повернутий і масштабований. Масштаб і поворот визначається комплексним числом μ .

Отже, модуль нормованого скалярного добутку досягає максимального значення – одиниці, тільки тоді, коли контур R є тим же контуром N , але повернутий на деякий кут і масштабований на певний коефіцієнт. Відзначимо, що модуль нормованого скалярного добутку є інваріантним до переносу, обертання і масштабування контурів. Якщо є два однакових контури, то їх нормовані скалярні добутки завжди дають одиницю, не залежно від того, де контури знаходяться, який їх кут повороту і масштаб. Аналогічно, якщо контури різні, то їх нормовані скалярні добутки будуть строго менші одиниці.

Модуль визначає міру схожості контурів, а аргумент нормованого скалярного добутку – дає кут повороту контурів відносно один одного.

До недоліків такого представлення слід віднести проблему вибору початкової точки. Рівність (1.6) досягається тільки якщо

початкові точки контурів – співпадають. Якщо ж контури однакові, але відлік елементарного вектора починається з іншої початкової точки, то модуль нормованих скалярних добутків таких контурів не буде рівним одиниці.

Введемо взаємкореляційну функцію двох контурів у вигляді:

$$\tau(m) = (R, N^{(m)}), m = 0, \dots, k-1, \quad (1.7)$$

де $N^{(m)}$ – контур, отриманий з N шляхом циклічного зсуву його елементарного вектора на m елементів.

Значення взаємкореляційної функції показують наскільки схожі контури R і N , якщо зсунути початкову точку N на m позицій. Взаємкореляційна функція визначена на всій множині цілих чисел, але оскільки циклічний зсув на k призводить до початкового контуру, то взаємкореляційна функція є періодичною, з періодом k . Тому важливо знати значення цієї функції тільки в межах від 0 до $k-1$.

Знайдемо величину, яка має максимальний модуль серед значень взаємкореляційної функції:

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{\tau(m)}{|R||N|} \right), m = 0, \dots, k-1. \quad (1.8)$$

З визначень нормованого скалярного добутку і взаємкореляційної функції, зрозуміло, що $\tau_{\max}$ є мірою схожості двох контурів, інваріантною до переносу, масштабування, повороту і зсуву початкової точки.

При цьому модуль $|\tau_{\max}|$ показує степінь схожості контурів, і досягає одиниці для однакових контурів, а аргумент $\arg(\tau_{\max})$ дає кут повороту одного контуру відносно іншого.

Введемо поняття автокореляційної функції як взаємкореляційної функції для якої $N = R$. По суті – це скалярний добуток контуру самого на себе при різних зсувах початкової точки:

$$v(m) = (R, R^{(m)}), m = 0, \dots, k-1. \quad (1.9)$$

Для швидкого пошуку шаблону необхідно ввести деякий дескриптор, який характеризує форму контуру. При цьому, близькі між собою контури повинні мати близькі дескриптори. Достатньо тільки порівняти дескриптори, і

якщо вони будуть близькі – тільки в цьому випадку обчислювати взаємкореляційну функцію.

В роботах [5,6] описано методи сегментації для визначення області точок, що належать кисті руки людини.

Застосуємо методи контурного аналізу до області точок, що належать руці. У результаті роботи отримаємо дескриптори. Для більш якісного розпізнавання застосуємо методи гіперплоскостної віддільності до простору дескрипторів.

2. Синтез класифікаторів засобами псевдообернення.

Припускається, що належність певної кількості досліджуваних об'єктів до того чи іншого класу відома, тобто до якого з класів відносяться вектори навчальної вибірки $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ у просторі ознак. Тоді доцільно розглянути послідовно такі постановки задач:

- визначити умови лінійної віддільності кінцевої множини точок у багатомірному просторі;

- визначити умови лінійної полюсної віддільності точок $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ на два класи;

- при неможливості лінійної віддільності точок перевірити умови кусково-лінійної їх віддільності;

- визначити оптимальну по товщині кусково-лінійну або нелінійну смугу віддільності точок $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ на два класи;

- впорядкувати координати точок $x_i(j)$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n}$, $x_m(j) = 1$

відповідно до їх впливу чи на розміри (товщини) лінійної оптимальної смуги чи на критерій лінійної полюсної роздільності;

- сформулювати правило заміни слабозвпливаючих (неінформативних) координат вектора ознак на більш інформативні з множини конкуруючих ознак;

- згенерувати суперпозицію оптимальних перетворень координат вектора ознак з метою досягнення умов оптимальної полюсної роздільності точок у новому просторі ознак.

2.1. Умови й оптимізація лінійної віддільності точок від початку координат у просторі ознак

Задача розглядається у рамках умов існування розв'язку системи лінійних

алгебраїчних рівнянь відносно вектора $a \in R^m$
 $x^T(j)a = y_j$, $y_j \geq \Delta$, $j = \overline{1, n}$, при деяких $\Delta > 0$ і значеннях y_j .

Тоді при фіксованому $\Delta > 0$ необхідна і достатня умова існування розв'язку цієї задачі з використанням операції псевдообернення матриць буде мати вигляд

$$\min_{y \in D(\Delta)} y^T Z(X) y = y^T(\Delta) Z(X) y, (\Delta) = 0,$$

де $X = (x(1) : \dots : x(n)) = (x_{(1)} \dots x_{(n)})^T$,

$$Z(X) = I_n - X^* X^T,$$

$$D(\Delta) = \{y : y = (y_1, \dots, y_n)^T, y_j \geq \Delta, j = \overline{1, n}\}.$$

При цьому шуканий вектор a прийматиме наступне значення

$$a(\Delta) = (X^T)^* y(\Delta).$$

Товщина смуги δ , що відокремлює множину точок $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ від початку координат, буде дорівнювати величині

$$y_* = \delta = \sqrt{y^T(\Delta) R(X) y(\Delta)}^{\frac{1}{2}},$$

де $R(X) = X^* (X^T)^*$.

Без обмеження загальності можна покласти $\Delta = 1$, $y_*(1) = y_*$. Отже, максимальна товщина смуги досягається при значеннях $y_{opt} = \arg \min_{y \in D} y^T R(X) y$, $a_{opt} = (X^T)^* y_{opt}$, де

$$D = \{y : y^T Z(X) y = y^T Z(X) y_* = 0\} \text{ для всіх } e_j^T y \geq 1, j = \overline{1, n}.$$

При неможливості лінійної віддільності точок доцільно перевірити умови кусково-лінійної віддільності[9].

2.2. Умови й оптимізація лінійної полюсної відокремлюваності двох класів точок

Використовуючи вище приведені умови лінійної віддільності точок у R^m для задачі лінійної полюсної відокремлюваності двох класів точок у просторі ознак одержимо як умови існування розв'язку такої задачі, так і засіб одержання самого розв'язку[8].

Нехай відомо, що для послідовності точок $x(j)$ у просторі ознак R^m

$$x(j) \in R^m, x(j) = (x^T_1(j) \dots x^T_m(j))^T,$$

$x_m(j) = 1, j = \overline{1, n}$ точки $x(i_k), k = \overline{1, n_1}$ належать першому класу, а точки $x(j_s), s = \overline{1, n_2}$ - другому класу. Тоді лінійна полосна віддільність цих класів розуміється, як існування такого вектора $a \in R^n$, для якого

$$\begin{aligned} a^T x(i_k) &\geq 1, \quad k = \overline{1, n_1}, \\ a^T x(j_s) &\leq -1, \quad s = \overline{1, n_2}. \end{aligned}$$

Умова лінійної полосної віддільності приймає наступний вигляд

$$\min_{y \in D} y^T Z(X)y = 0,$$

$$D = \{y: e_k^T y \geq 1, e_s^T y \leq -1, k = \overline{1, n_1}, s = \overline{1, n_2}\},$$

а значення вектора a визначається оптимально в процесі максимізації товщини розділяючої полоси

$$y_{opt} = \arg \min_{y \in D_1} y^T R(X)y,$$

$$\text{де } D_1 = \{y: y^T Z(X)y = 0\} \cap D.$$

Оптимальне значення вектора a

$$a_{opt} = (X^T)^{-1} y_{opt}.$$

При побудові класифікатора алфавіту дактилем жестової мови з використанням методів контурного аналізу задачу розглянули лише в рамках лінійної полосної відокремлюваності, тому умови кусково-лінійної віддільності, алгоритмів оптимальної суперпозиції нелінійних перетворень у просторі ознак тут не приводяться.

3. Результати чисельних експериментів

Були проведені чисельні експерименти по класифікації дактилем жестової мови з використанням алгоритму полосної класифікації на основі методів псевдообернення. Досліджувалися дактилями української абетки жестової мови в 4-мірному просторі векторів ознак сформованих за допомогою методу контурного аналізу. В результаті отримані гіперплощини роздільних полос а також полоси, в яких знаходилися вектори ознак кожної дактилему.

В середньому ширина полос, в яких знаходилися вектори букв складала 3,5 - 4,5 одиниць віддалі. В той час як ширина полоси роздільності складала 1,0 - 1,2 одиниць віддалі, що свідчить про ефективність такого

підходу до розпізнавання дактилем української жестової мови.

Висновки

Алгоритми оптимального синтезу лінійних систем класифікації алфавіту дактильно-жестової мови з використанням методів контурного аналізу дозволяють розв'язувати задачу класифікації залишаючись в рамках лінійної моделі. Поряд з цим не виключена можливість покращення роботи класифікатора, використовуючи алгоритми кусково-лінійної віддільності, синтезу нелінійних перетворень в просторі векторів ознак [7,8]. Подальші дослідження будуть спрямовані на збільшення інформативних ознак для опису дактилем і розробки алгоритмів нелінійної класифікації.

Список використаних джерел

1. Фурман Я.А. Введение в контурный анализ / Я. А. Фурман, А. В. Кревецкий, А. К. Пердеев, и др. Под ред. Я. А. Фурмана. - 2-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 592с.
2. Интернет-ресурс:
<http://www.codeproject.com/Articles/196168/Contour-Analysis-for-Image-Recognition-in-C>.
3. Интернет-ресурс:
<http://habrahabr.ru/post/118486/#b1>.
4. Интернет-ресурс:
<http://blogs.msdn.com/b/rucoding4fun/archive/2012/01/17/quot-contour-analysis-for-image-recognition-in-c-quot.aspx>.
5. Крак Ю.В. Технологія розпізнавання елементів дактильно-жестової мови / Ю.В.Крак, Д. В.Шкільнюк // Штучний інтелект. - 2009. - № 3. - С. 564-572.
6. Крак Ю.В. Аналіз елементів дактильно-жестової мови / Ю.В. Крак, Д.В. Шкільнюк // Штучний інтелект. - 2010. - №3 -С.322-328.
7. Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П. Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации. // Кибернетика и системный анализ. - 2007. - №3. С. 47-57.
8. Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П. Оптимизация синтеза гиперплоскостных кластеров и нейрофункциональных преобразований в системах классификации сигналов // Кибернетика и системный анализ. - 2008. - №6. С. 50-58.
9. Кириченко Н.Ф., Кудин Г.И. Анализ и синтез систем классификации сигналов средствами возмущений псевдообратных и проекционных операций // Кибернетика и системный анализ. - 2009. - №4. - С. 124-134.

Надійшла до редколегії 06.06.2012

Лівінська Г.В., асист.

Багатоканальні мережі з періодичним зовнішнім навантаженням

Розглядаються багатоканальні стохастичні мережі. Ззовні на кожен вузол мережі надходить пуассонівський потік вимог з інтенсивністю, яка є періодично змінною функцією часу. У перевантаженому режимі функціонування розвинуто апроксимативний метод дослідження процесу обслуговування. Граничний процес представлено у вигляді багатовимірної дифузії.

Ключові слова: багатоканальна стохастична мережа, перевантажений режим, гаусівська апроксимація.

G. V. Livinska, Ass.
G. V. Livinska, Ass.**Multichannel networks with periodic external load**

The multichannel stochastic networks are considered. From the outside on each node of the network a Poisson input flow of calls arrives. And its rate is a periodically varying function of time. At overloaded regime an approximate method of studying the service process is developed. The limit process is represented as a multidimensional diffusion.

Key words: multichannel stochastic network, overloaded regime, Gaussian approximation.

*E-mail: livinskaav@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Заславський В.А.

1. Вступ

Основна математична модель, котра вивчається в роботі, являє собою мережу масового обслуговування, що складається з " r " вузлів обслуговування. На вхід мережі потрапляє неоднорідний пуассонівський потік вимог з інтенсивністю $\lambda(t)$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ – ведуча функція пуассонівського потоку. Вимога, що надійшла до мережі, з імовірністю p_{oi} , $i = 1, 2, \dots, r$, надходить на обслуговування в i -ий вузол. Кожен із " r " вузлів функціонує як багатоканальна стохастична система. При надходженні вимоги в таку систему одразу починається її обслуговування. Час обслуговування в i -му вузлі показниково розподілений з параметром μ_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Після завершення обслуговування в i -му вузлі вимога з імовірністю p_i переходить для обслуговування в j -ий вузол та з ймовірністю $p_{oi+1} = 1 - \sum_{j=1}^r p_{ij}$ залишає

мережу, $P = \|p_{ij}\|$ – матриця маршрутизації мережі. Додаткові вузли з номерами "0" та " $r+1$ " інтерпретуються як "вхід" і "вихід" з мережі відповідно.

Згідно системі позначень, котра прийнята в теорії стохастичних мереж, описану вище модель будемо позначати символом $[M, |M| \infty]^r$.

Мережі такого типу актуальні при моделюванні процесів обробки інформації в мережах передачі даних та системах мобільного зв'язку [1, 2], при дослідженні параметрів треккової іонізації в треккових камерах [3], у фармакокінетиці [4] та інших сферах.

Процесом обслуговування вимог в мережі типу $[M, |M| \infty]^r$ будемо називати r -вимірний процес $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$, де $Q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$ – кількість вимог в i -му вузлі в момент часу t . Наша головна мета – вивчити асимптотичну поведінку процесу $Q(t)$, $t \geq 0$, коли інтенсивність $\lambda(t)$ являє собою функцію часу, що періодично змінюється. Така поведінка зовнішнього навантаження часто зустрічається на практиці.

2. Квазіергодичний розподіл для процесу обслуговування

Припустимо, що $\lambda(t)$ – періодична з періодом T функція:

$$\lambda(nT + \theta) = \lambda(\theta) \text{ для } n = 1, 2, \dots \text{ та } 0 \leq \theta < T.$$

Тоді $Q(t)$, $t \geq 0$, є неоднорідним ланцюгом Маркова в множині станів $(N^*)^r$, $N^* = \{0, 1, \dots\}$, з періодичними інфінітезимальними характеристиками. Застосуємо метод генератрис для знаходження квазіергодичного розподілу (див. [5], ст. 141) процесу $Q(t)$, $t \geq 0$.

Нехай $Q'(0) = (Q_1(0), \dots, Q_r(0)) = i' = (i_1, \dots, i_r)$ та

$$\Phi(z, t) = E_{z_1}^{(t, 0)} \times \dots \times z_r^{(t, 0)} = \sum_{k_1, \dots, k_r} z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r} P\{Q'(t) = (k_1, \dots, k_r)\},$$

$$|z_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, r, z = (z_1, \dots, z_r),$$

– багатовимірний генератриса вектора $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$. Тоді генератриса $\Phi_0(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(z, tT + \theta)$, $0 \leq \theta < T$, квазіергодичного розподілу має наступний вигляд.

Теорема 1. Якщо $\lambda(t)$ – періодична з періодом T функція, спектральний радіус матриці P строго менший за 1, то для будь-якого $\theta \in [0, T)$

$$\Phi_0(z) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^r (1-z_i) \hat{\rho}_i(\theta)\right\}, \quad (1)$$

$$\text{де } \hat{\rho}_i(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r P_{ij}(mT + \theta) \int_0^T P_{ji}(mT + u) \lambda(T - u + \theta) du,$$

$$P(t) = \|P_{ij}(t)\| = \exp\{\Delta(\mu)(P - I)t\}.$$

$\Delta(\mu) = \|\mu, \delta_{ij}\|$, $I = \|\delta_{ij}\|$ – одинична матриця.

Наведений результат являє собою наслідок особливих властивостей пуассонівського потоку вимог, котрі дозволяють представити $\Phi(z, t)$ через параметри мережі.

Лема 1. Генератрису $\Phi(z, t)$ можна представити у вигляді

$$\Phi(z, t) = \prod_{i=1}^r \left[1 - \sum_{j=1}^r (1-z_j) \rho_{ji}(t) \right] \exp\left\{-\sum_{j=1}^r (1-z_j) \rho_j(t)\right\}, \quad (2)$$

$$\text{де } \rho_j(t) = \sum_{i=1}^r P_{ij}(t) \int_0^t P_{ji}(t-u) \lambda(u) du.$$

Доведення. Обслуговування окремо взятої вимоги у вузлах $[M, |M| \infty]$ -мережі проходить незалежно від інших вимог. Для того, щоб конструктивно задати процес обслуговування, розглянемо ланцюг Маркова $x(t)$, $t \geq 0$, в множині станів $\{1, 2, \dots, r, r+1\}$, котра задається інфінітезимальними характеристиками

$$a_{ij} = \begin{cases} -\mu_i(1-p_{ii}), i = j = 1, 2, \dots, r; \\ \mu_i, p_{ij}, i \neq j, i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, r, r+1; \\ 0, i = r+1, j = 1, 2, \dots, r, r+1; \end{cases}$$

та початковим розподілом $p'(0) = (p_1(0), \dots, p_{r+1}(0))$. Якщо $p_i(0) = 1$, то відповідного ланцюга ми будемо позначати $x^{(i)}(t)$. Стан “ $r+1$ ” для ланцюга $x(t)$ є

поглинаючим. Перехідні ймовірності $P\{x(t) = j / x(0) = i\} = P\{x^{(i)}(t) = j\}$, $i, j = 1, \dots, r$, співпадають з $p_{ij}(t)$.

Трасекторія вимоги від моменту надходження в мережу через i -ий вузол і до моменту виходу з неї може бути описана ланцюгом $x^{(i)}(t)$, при цьому поглинання в стані “ $r+1$ ” інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

З ланцюгом Маркова $x^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, r$, пов'яжемо два сімейства X та Γ незалежних r -вимірних випадкових векторів

$$X = \{x'_h(t) = (x'_{1h}(t), x'_{2h}(t), \dots, x'_{rh}(t)), j = 1, \dots, r; h = 1, 2, \dots\},$$

$$\Gamma = \{\gamma'_h(t) = (\gamma'_{1h}(t), \gamma'_{2h}(t), \dots, \gamma'_{rh}(t)), j = 1, \dots, r; h = 1, 2, \dots\}.$$

причому їх розподіл залежить від індексу i та не залежить від індексу h . Сімейства X та Γ також незалежні між собою. Якщо e_0 – r -вимірний вектор, що складається з 0, e_j – r -вимірний вектор, j -та компонента якого дорівнює 1, а решта дорівнюють 0, то вектор $x'_h(t)$ набуває значення e_j з ймовірністю $p_{ij}(t)$ та значення e_0 з ймовірністю $p_{i, r+1}(t)$. Аналогічно, вектор $\gamma'_h(t)$ набуває значення e_i з ймовірністю $\frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^t p_{ij}(t-u) \lambda(u) du$ та значення e_0 з ймовірністю

$$\frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^t p_{i, r+1}(t-u) \lambda(u) du.$$

Нехай тепер $v_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, – кількість вимог, котрі надійшли ззовні в i -ий вузол мережі за час t . Очевидно, що $v_i(t)$ є пуассонівським потоком з інтенсивністю $p_{i0} \lambda(t)$. Використовуючи зв'язок пуассонівського потоку з порядковими статистиками (див., напр., [6], ст. 54), знаходимо, що розподіл $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$ співпадає з розподілом вектора

$$\sum_{j=1}^r \sum_{h=1}^v x'_h(t) + \sum_{j=1}^r \sum_{h=1}^{v_{r+1}(t)} \gamma'_h(t). \quad (3)$$

Оскільки сума до випадкового індексу переходить в суперпозицію генератрис, то з представлення (3) одразу отримуємо (2). Лему доведено.

На завершення цього розділу зауважимо, що в умовах теореми 1 квазіергодичний розподіл для $[M, |M| \infty]$ -мережі має мультиплікативну форму. Очевидно, умова, що накладається на

спектральний радіус матриці маршрутизації, означає те, що мережа є відкритою. Така форма ергодичного розподілу добре відома для стохастичних мереж, для яких процес обслуговування вимог може бути описаний однорідним ланцюгом Маркова ([7], гл. 3).

3. Процес обслуговування в умовах великого навантаження

В цьому розділі для багатоканальних мереж з періодичним вхідним потоком, котрі функціонують в умовах критичного навантаження, розвинуто апроксимативний метод дослідження. Суть його полягає в тому, що багатовимірний стрибкоподібний процес обслуговування апроксимується неперервним гаусівським процесом. Для обґрунтування апроксимації доведено відповідну функціональну граничну теорему, що дає можливість використовувати цей результат для розрахунку характеристик якості роботи стохастичної мережі. В свою чергу, спираючись на алгоритми розрахунку функціоналів якості, можна ставити та розв'язувати задачі по оптимальному керуванню параметрами мережі (див., напр., [8]).

Режим критичного навантаження для $[M_r | M | \infty]^r$ -мережі з періодичним вхідним потоком означає, що інтенсивності обслуговування у вузлах мережі залежать від "n" (номера серії) таким чином, що виконується умова:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n\mu_i(n) = \mu_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

В контексті умови 1) розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - q^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

$$\text{де } q^{(n)}(nt) = (q_1^{(n)}(nt), \dots, q_r^{(n)}(nt)),$$

$$q_j^{(n)}(nt) = \sum_{i=1}^r p_{ij} \int_0^{nt} p_v^{(n)}(nt-u) \lambda_i(u) du, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$p_v^{(n)}(t) \quad - \quad \text{елементи матриці}$$

$$P^{(n)}(t) = [p_v^{(n)}(t)]_{v=1}^r = \exp\{\Delta(\mu^{(n)})(P - I)t\},$$

$$\mu^{(n)} = (\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_r^{(n)}),$$

$\Delta(x) = [\delta_{ij} x_j]_{i,j=1}^r$ – діагональна матриця з вектором $x' = (x_1, \dots, x_r)$ на головній діагоналі.

Для того, щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$, ми введемо два незалежних гаусівських процеси $\xi^{(i)}(t) = (\xi_1^{(i)}(t), \dots, \xi_r^{(i)}(t)), \quad i = 1, 2.$

Процес $\xi^{(i)}(t)$ визначається середніми значеннями

$$E\xi^{(i)}(t) = 0$$

та кореляційними матрицями

$$R^{(i)}(t) = E\xi^{(i)}(t)\xi^{(i)T}(t) - E\xi^{(i)}(t)E\xi^{(i)T}(t) = \int_0^t P(u)\Delta(\bar{\lambda})P(u)du,$$

$$R^{(i)}(s, t) = E\xi^{(i)}(s)\xi^{(i)T}(t) - E\xi^{(i)}(s)E\xi^{(i)T}(t) = R^{(i)}(s)P(t-s),$$

$$s < t, \text{ де } \bar{\lambda}' = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r), \quad \bar{\lambda}_i = p_{ii} \int_0^t \lambda_i(u) du.$$

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$

$$E\xi^{(2)}(t) = 0,$$

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t [\Delta(\bar{\lambda}')P(u) - P'(u)\Delta(\bar{\lambda}')P(u)]du,$$

$$R^{(2)}(s, t) = R^{(2)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Наступна теорема дає апроксимацію для процесу обслуговування при критичному навантаженні в мережі.

Теорема 2. Нехай для $[M_r | M | \infty]^r$ -мережі виконується умова 1), спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший за 1, та в початковий момент часу мережа порожня:

$Q^{(n)}(0) = (0, \dots, 0)$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Перед тим, як доводити теорему, отримаємо ряд додаткових результатів.

Лема 2. Нехай $v(t)$ – неоднорідний пуассонівський процес з генератрисою $\Lambda(t)$, для якої виконується умова:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \Lambda(t) = \lambda > 0. \quad (4)$$

Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $W^{(n)}(t) = n^{-1/2}(v(nt) - \Lambda(nt))$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до вінерівського процесу $W(t)$ з нульовим зносом та коефіцієнтом дифузії λ .

Доведення. Збіжність скінченновимірних розподілів процесу $W^{(n)}(t)$ до $W(t)$ впливає з того, що для будь-якого натурального N та моментів часу $0 < t_1 < \dots < t_N$ характеристична

функція сумісного розподілу $v(t_1, \dots, v(t_N))$ дорівнює

$$E \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i x(t_i) \right\} = \prod_{i=1}^N \exp \{ [\Lambda(t_i) - \Lambda(t_0)] \exp(t_i \sum_{m=1}^N \lambda(m)) - 1 \} \cdot$$

де $(s(1), \dots, s(N)) \in R_N$, $t_0 = 0$.

Тепер для того, щоб довести збіжність в рівномірній топології, достатньо перевірити виконання умови

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_1, \dots, t_N \in [t_0, t_0 + \delta]} P \{ |W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)| > \varepsilon \} = 0 \quad (5)$$

з [9] (ст. 493).

Згідно з нерівністю Чебишева

$$\sup_{t_1, \dots, t_N \in [t_0, t_0 + \delta]} P \{ |W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)| > \varepsilon \} \leq \varepsilon^{-2} \sup_{m \in [1, N]} [n^{-1} \Lambda(n(t_2 + h)) - n^{-1} \Lambda(n t_1)]$$

З умови (4) випливає, що для будь-якого $0 < \delta < T$

$$\sup_{m \in [1, N]} [n^{-1} \Lambda(n(t_2 + h)) - n^{-1} \Lambda(n t_1)] \leq n^{-1} \Lambda(n(\delta + h)) \leq (\lambda + \varepsilon_n) \delta + h$$

та

$$\sup_{m \in [1, N]} [n^{-1} \Lambda(n(t_2 + h)) - n^{-1} \Lambda(n t_1)] \leq \lambda h + (2T + h) \varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Звідси знаходимо

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_1, \dots, t_N \in [t_0, t_0 + \delta]} P \{ |W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)| > \varepsilon \} \leq \lambda \delta \varepsilon^{-2}.$$

Оскільки $\delta > 0$ довільне, то умову (5) виконано.

Лему доведено.

Умова (4) виконується для неоднорідного пуасонівського потоку з періодичною

інтенсивністю $\lambda(t)$ для $\lambda = \int_0^T \lambda(u) du$. Дійсно

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{\int_0^t \lambda(u) du}{t} = \frac{\int_{[t]_T} \lambda(u) du + \int_0^{[t]_T} \lambda(u) du}{[t]_T + \{t\}_T} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda,$$

де $[t]_T = \max \{n \in \mathbb{Z} : nT \leq t\}$, $\{t\}_T = t - [t]_T$, $\mathbb{Z}$ – множина цілих невід'ємних чисел.

Таким чином, лема 2 може бути застосована до пуасонівських потоків $v_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$ (кількість вимог, що надійшли ззовні в i -ий вузол мережі). Через $W_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, будемо позначати незалежні вінерівські процеси з нульовим зносом та коефіцієнтом дифузії λ_i відповідно. Згідно лемі 2 вони апроксимують вхідні потоки $v_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Для $W'(t) = (W'_1(t), \dots, W'_r(t))$ нам буде потрібен такий результат.

Лема 3. Скінченновимірні розподіли

$\int_0^t dW'(u) P(t-u)$ співпадають зі скінченновимірними розподілами гаусівського процесу $\xi^{(1)}(t)$.

Це твердження являє собою частинний випадок лемми 1 з [10].

Випадковий вектор $(X'_n(t))' = (X'_n(t), \dots, X'_n(t))$ будемо розглядати як r -вимірний випадковий процес, траєкторія якого розвивається з плином часу та будується по траєкторії ланцюга Маркова $X_n^{(1)}(t)$, як було визначено раніше. Оскільки розподіли $X_n^{(1)}(t)$ ($X_n^{(1)}(t)$) від n не залежать, то цей індекс будемо опускати, коли буде йти мова про розподіли.

Для довільного натурального N та $z'(i) = (z_1(i), \dots, z_r(i))$, $i = 1, 2, \dots, N$, $|z(i)| \leq 1$, через $\Phi^{(m)} = \Phi^{(m)}(z(1), \dots, z(N), t_1, \dots, t_N)$, $m = 1, 2, \dots, r$, будемо позначати сумісну генератрису векторів $\chi^m(t_1), \dots, \chi^m(t_N)$, $0 < t_1 < \dots < t_N$, $\Phi' = (\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(r)})$.

Лема 4. Для довільного $N = 1, 2, \dots$ та $0 < t_1 < \dots < t_N$

$$\Phi = \hat{1} + \sum_{i=1}^N P(\Delta_i) \Delta[z(1)] \dots P(\Delta_{i-1}) \Delta[z(i-1)] P(\Delta_i) \Delta[z(i+1) - \hat{1}], \quad (6)$$

де $\hat{1}$ – r -вимірний вектор, що складається з одиниць; $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ ($t_0 = 0$), $i = 1, 2, \dots, N$.

Доведення (6) можна отримати методом математичної індукції за параметром N .

Доведення теореми 1.

Проаналізуємо поведінку при $n \rightarrow \infty$ одновимірних розподілів процесу $\xi^{(1)}(t)$, $t \geq 0$.

При фіксованій траєкторії процесу $\bar{v}'(t) = (v_1(t), \dots, v_r(t))$ розподіл $Q(t)$ співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^{[t]_T} X_n^m(t - \tau_k^m),$$

де τ_k^m – момент надходження k -ї вимоги в m -ий вузол мережі.

Враховуючи цей факт, а також формулу (6) для $N=1$, генератрису $\Phi(z, t)$, $z' = (z_1, \dots, z_r)$, $|z| \leq 1$, вектора $Q(t)$ можна представити у вигляді

$$\Phi(z, t) = E \prod_{m=1}^r \prod_{k=1}^{[t]_T} [1 - p_n^m(t - \tau_k^m) \chi(z - \hat{1})], \quad (7)$$

де $p_m^*(\tau) = (p_{m1}(\tau), \dots, p_{mr}(\tau))$ – m -ий рядок матриці $P(\tau)$.

Нехай $\varphi^{(n)}(s)$, $s' = (s_1, \dots, s_r) \in R_r$ – характеристична функція $\xi^{(n)}(t)$. З урахуванням (7) можна записати

$$\varphi^{(n)}(s) = E e^{i s' x^{(n)}} = \exp\{-in^{-1/2} q^{(n)}(nt)s\} \times \\ \times E \exp\left\{\sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^{n^{1/2}} \ln[1 - p_m^{(n)}(nt - \tau_k) \chi(e^{n^{-1/2} s'_m} - 1)]\right\},$$

де $(e^{n^{-1/2} s'_m})' = (e^{n^{-1/2} s_{m1}}, \dots, e^{n^{-1/2} s_{mr}})$.

Позначимо через $(s^2)' = (s_1^2, \dots, s_r^2)$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{-in^{-1/2} q^{(n)}(nt)s\} \times \\ \times E \exp\left\{\sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^{n^{1/2}} \left[-\frac{1}{2} p_m^{(n)}(nt - \tau_k) s'_m - \frac{1}{2} p_m^{(n)}(nt - \tau_k) s'_m + \frac{1}{2} p_m^{(n)}(nt - \tau_k) s'_m - \frac{1}{2} p_m^{(n)}(nt - \tau_k) s'_m\right]\right\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{-in^{-1/2} q^{(n)}(nt)s\} E \exp\left\{in^{-1/2} \int_0^{n^{1/2}} d\tau' (\pi) P(t - \tau') s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} n \int_0^{n^{1/2}} d\tau' (\pi) P(t - \tau') s^2 + \frac{1}{2} n \sum_{m=1}^r \int_0^{n^{1/2}} d\tau' (\pi) p_m^{(n)}(t - \tau') p_m^{(n)}(t - \tau') s^2\right\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} n \int_0^{n^{1/2}} d\tau' (\pi) P(t - \tau') s^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} n \sum_{m=1}^r \int_0^{n^{1/2}} d\tau' (\pi) p_m^{(n)}(t - \tau') p_m^{(n)}(t - \tau') s^2\right\} E \exp\left\{i \int_0^{n^{1/2}} dW^{(n)}(t) P(t - \tau') s\right\},$$

де

$$\bar{\Lambda}(t) = (\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_r(t)) = (p_{01}(t), \dots, p_{0r}(t)),$$

$$W^{(n)}(t) = (W_1^{(n)}(t), \dots, W_r^{(n)}(t)),$$

$$W_h^{(n)}(t) = n^{-1/2} (v_h(nt) - \Lambda_h(nt)), \quad h = 1, 2, \dots, r.$$

Використовуючи твердження лем 2, 3, знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(s) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^t P(u) du s^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \int_0^t p_m(u) p_m(u) du - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} s' \int_0^t P'(u) \Delta(\bar{\Lambda}) P(u) du s\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^t [s' \Gamma(u) s - P(u) \Delta(\bar{\Lambda}) P(u) du - \frac{1}{2} s' \int_0^t P'(u) \Delta(\bar{\Lambda}) P(u) du] du\right\}.$$

Граничний вираз являє собою характеристичну функцію $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$. Таким чином, збіжність одновимірних розподілів доведено.

Аналогічно перевіряється збіжність N -вимірних розподілів для $N \geq 2$.

Збіжність скінченновимірних розподілів можна посилити до збіжності $\xi^{(n)}(t)$ в рівномірній

топології. Для цього потрібно використати збіжність нормованого вхідного потоку $W^{(n)}(t)$ до $W(t)$ в рівномірній топології та представлення процесу обслуговування як суми процесів індикаторного типу на вхідному потоці (див. [10]).

Теорему доведено.

Зауважимо, що частина $\xi^{(1)}(t)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями вхідного потоку, а $\xi^{(2)}(t)$ – часу обслуговування.

4. Граничний процес як багатовимірна дифузія

В одновимірному випадку для гаусівських процесів існує критерій в термінах необхідності та достатності для перевірки Марковської властивості ([11], ст. 115). Основна умова цього критерію, якщо його виписати в термінах кореляцій, співпадає з характеристичною властивістю для показникової функції та достатньо зручна для перевірки на практиці. В багатовимірному випадку ситуація ускладнюється та загального критерію немає. Наведемо з роботи [12] один варіант достатніх умов марковості для r -вимірних гаусівських процесів і застосуємо цей критерій до граничних процесів з попередніх розділів.

Розглянемо r -вимірний гаусівський процес $\xi^*(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t))$ з нульовими середніми значеннями

$$E \xi_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

та кореляційними матрицями

$$R(t) = E \xi^*(t) \xi^{*'}(t) - E \xi^*(t) E \xi^{*'}(t),$$

$$R(s, t) = E \xi^*(s) \xi^{*'}(t) - E \xi^*(s) E \xi^{*'}(t), \quad s < t.$$

Теорема 3 ([12]). Нехай для гаусівського процесу $\xi(t)$ виконуються умови:

a) для деякої матриці A та всіх $0 \leq s < t$

$$R(s, t) = R(s)P(t - s), \quad P(t) = \exp(At);$$

в) матриці $R(t)$, $R(t) - P'(t - s)R(s)P(t - s)$, $0 \leq s < t$, неособливі.

Тоді $\xi(t)$ є Марковським процесом, причому умовний розподіл $P(\xi(t) \in B | \xi(s) = x)$, $B \in \mathcal{B}_r$ (σ -алгебра борелівських підмножин R_r) є гаусівським з вектором середніх значень $P'(t - s)x$ та кореляційною матрицею $R(t) - P'(t - s)R(s)P(t - s)$.

Множина G_r гаусівських процесів, для яких виконуються умови теореми 3 і в представленні а) матриці однакові (дорівнюють A), задовіль-

няє умові замкненості: лінійна комбінація двох незалежних процесів з G_A належить G_A . Таким чином, як наслідок з теореми 3 ми отримуємо такий цікавий факт: сума двох незалежних марковських G_A -процесів є марковським процесом.

Зауважимо, що багатовимірний процес Ориштейна-Уленбека ([6], ст. 166) задовольняє умові а).

Застосуємо тепер критерій марковості, котрий дає теорема 3, до граничного гаусівського процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Наслідок 1. Якщо матриця P незвідна, то $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ являє собою r -вимірний дифузійний процес з вектором переносу $A(x) = A'x$ і матрицею дифузії $B(t) = \Delta[\tilde{A}'P(t)] - A'\Delta[q(t)] - \Delta[q(t)]A$, де

$$A = \Delta(\mu)(P - I),$$

$$q'(t) = (q_1(t), \dots, q_r(t)) = \tilde{A}' \int_0^t P(u) du.$$

Якщо через $R(t)$, $R(s, t)$, $s < t$, позначити відповідні кореляційні матриці процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$, то для них будуть виконуватися умови теореми 3 при $A = \Delta(\mu)(P - I)$ та $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ буде Марковським дифузійним процесом. Вектор переносу та матриця дифузії визначається видом умовного розподілу $P(\xi(t) \in B / \xi(s) = x)$, $B \in \mathcal{B}_r$.

Таким чином, теорема 2 належить до результатів по дифузійній апроксимації переважання систем і мереж масового обслуговування. В цьому сенсі вона узагальнює результати розділу 4.2 роботи [13] на випадок вхідних пуасонівських потоків з інтенсивністю, що періодично змінюється.

Представлення граничного процесу у вигляді багатовимірної дифузії є привабливим в тому, що дифузійний процес визначається своїми локальними характеристиками і при аналізі функціоналів від нього можна використовувати розвинутий апарат Марковських дифузійних процесів. Однак поряд з цим є втрати, оскільки тепер граничний процес не відображає в деталях структуру дограничного процесу обслуговування.

Список використаних джерел

1. Massey, W.A., Whitt, W. A stochastic model to capture and time dynamics in wireless communication systems. // Probab. Engin. and Inform. Sci. – 1994. – 8. – p. 541-569.
2. Massey, W.A., Whitt, W. Networks of infinite-

server queues with nonstationary Poisson input. // Queuing Systems. – 1993. – 13. – p. 183-250.

3. Dvarecenskij, A., Kylyukina, L.A., Ososkov, G.A. On a problem of the busy-period determination in queues with infinitely many servers / A. Dvarecenskij, L.A. Kylyukina, G.A. Ososkov // J. Appl. Probab. – 1984. – 21. – p. 201-206.
4. Matis, J., Wehrly, T.E. Generalized stochastic compartmental models with Erlang transit times / J. Matis, T.E. Wehrly, // J. Pharmac. Biopharm. – 1990. – 18. – p. 589-607.
5. Коваленко, И.Н., Сарманов, О.В. Краткий курс теории случайных процессов / И.Н. Коваленко, О.В. Сарманов. – Киев: Вища школа, 1978.
6. Коваленко, И.Н., Кузнецов, Н.Ю., Шуренков, В.М. Случайные процессы / И.Н. Коваленко, Н.Ю. Кузнецов, В.М. Шуренков. – Киев: Наукова думка, 1983.
7. Walrand, J. An Introduction to Queuing Networks. / J. Walrand. – Moscow: Mir. – 1993. – ISBN 5-03-002015-2.
8. LEBEDEV, E.A., MAKUSHENKO, I.A. 2007. Risk optimization for multi-channel stochastic network. Kyiv: National Library of Ukraine.
9. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. / И.И. Гихман, А.В. Скороход – Москва: Наука, 1971. – Том 1. – 664 с.
10. Лебедев С.О. Одна граничная теорема для стохастических сетей та її застосування / С.О. Лебедев // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2003. – Вип. 68. – С. 74-85.
11. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. / В. Феллер, – Москва: Мир, 1984. – Кн. 2. – 1984. – 752 с.
12. Лебедев С.О. Про марківську властивість багатовимірних гаусівських процесів / С.О. Лебедев // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2001. – № 4. – С. 287-291.
13. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели / В.В. Анисимов, Е.А. Лебедев. – Киев: Либідь, 1992. – 208 с.

УДК 004.021: 004.312.4: 004.421.6: 004.414.2

Лук'янова О.О.*, к.ф.-м.н.

Про прискорення обчислень знаходження структурних інваріантів при компонентному аналізі CN_1 -мереж

Розглядається одне з розширень формалізму мереж Петрі – компонентна мережа Петрі з інгібіторними дугами (CN_1 -мережа). Визначається ряд понять, пов'язаних із структурою і функціонуванням CN_1 -мережі. Пропонується аналіз структурних властивостей CN_1 -мережі проводити за допомогою фундаментального рівняння. Дасться оцінка швидкості обчислень знаходження структурних інваріантів при моделюванні досліджуваної системи CN_1 -мережою.

Ключові слова: мережа Петрі, діофантові рівняння, компонента мережа Петрі, матриця інцидентності, інваріанти, верифікація.

*E-mail: lukyanovaea@mail.ru

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

Розробка нових засобів і методів моделювання та аналізу поведінкових можливостей розподілених систем є актуальною задачею, особливо у зв'язку зі зростанням складності сучасних систем, що досліджуються.

Компонентна мережа Петрі (CN -мережа), яка є розширенням стандартного формалізму мереж Петрі, становить мережу Петрі, в якій місця і переходи можуть бути різних типів: місця, переходи, складові компоненти (компоненти-місця, компоненти-переходи) [1, 2]. Функціонування такої мережі розглядається в двох аспектах: функціонування CN -мережі при миттєвому виконанні складових компонент і окремий розгляд внутрішньої роботи складових компонент CN -мережі [3]. Застосування моделі реальних складних систем і об'єктів у вигляді компонентної мережі Петрі дозволяє розв'язувати такі проблеми моделювання складних систем, як розміри моделі і адекватність отриманої моделі досліджуваної системи. Зменшення розмірів моделі при моделюванні CN -мережами здійснюється через виділення в детальній (базовій) моделі системи

Lukyanova E.A., PhD

On Acceleration of Calculations of Estimation of Structural Invariants for CN_1 -Network Component Analysis

One of expansions of formalism of Petri Nets is examined – a componental Petri Net with inhibitory arcs (CN_1 -net). A number of concepts, related to the structure and functioning of CN_1 -net is determined. The author suggests to conduct analysis of structural properties of CN_1 -net by means of fundamental equalization. The estimation of calculation speed of finding of structural invariants is given at the modelling of the investigated system by CN_1 -net.

Key words: Petri Net, Diophantine equations, componental Petri Net, matrix incidence, invariants, verification.

однакових або однотипних складових компонент. Виділення складових компонент в детальній моделі, що проектується, починається ще при аналізі вихідної складної системи: виділяються групи однакових або однотипних процесів, які в процесі побудови моделі неодноразово уточнюються і оформлюються у вигляді блоків складових компонент. Використання при побудові моделі інгібіторних дуг [4] дає можливість скоротити розміри моделі системи через можливе зменшення місць і переходів мережі та появи додаткової можливості виділення складових компонент CN -мережі.

Метою даної роботи є установлення та демонстрація можливостей застосування інгібіторних дуг при моделюванні систем CN -мережами.

1. Основні визначення

Визначення 1. Мережа Петрі – трійка $N = (P, T, F)$, де P – скінченна множина вершин-місць, T – скінченна множина вершин-переходів, $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ – відношення, що задає дуги, які з'єднують місця і переходи.

Визначення 2. Компонентна мережа Петрі (CN -мережа) – орієнтований граф, що описується п'ятіркою:

$$CN = (P, T, F, W, M_0),$$

де P – скінченна множина місць, що складається із підмножин P_1 і P_2 (P_1 – скінченна множина компонент-місць, P_2 – скінченна множина місць, що розуміється в звичайному сенсі місць мереж Петрі, які залишилися після виділення компонент-місць); T – скінченна множина переходів, що складається з підмножин T_1 і T_2 (відповідно множина компонент-переходів і множина переходів, яка розуміється в звичайному сенсі переходів мереж Петрі, що залишилися після виділення компонент-переходів), $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ – відношення інцидентності між місцями і переходами, $W: F \rightarrow N \setminus \{0\}$ – функція кратності дуг, M_0 – початкова розмітка мережі.

Визначення 3. Компонента-місце – трійка $Cr = (N, X, Y)$, де N – мережа Петрі, $X \subseteq P$, $Y \subseteq P$ – відповідно множини її початкових і заключних місць, причому $X \cap Y = \emptyset$, $P \setminus (X \cup Y)$ – множина внутрішніх місць. Вхідні і вихідні місця не мають відповідно вхідних і вихідних дуг: $\forall p \in X: {}^*p = \emptyset$, $\forall p \in Y: p^* = \emptyset$. При цьому сама компонента Cr , як елемент CN -мережі, має вхідні і вихідні дуги, є умовою, що визначає можливість настання події – спрацювання переходу CN -мережі та становить місце CN -мережі.

Визначення 4. Компонента-перехід Ct – трійка $Ct = (N, U, V)$, де N – мережа Петрі, $U \subseteq T$, $V \subseteq T$ – відповідно множини її початкових і заключних переходів, які не мають відповідно вхідних і вихідних дуг і $U \cap V = \emptyset$. Компонента Ct , як елемент CN -мережі, має вхідні і вихідні дуги, є подією та становить перехід CN -мережі.

Таким чином, компонента-місце Cr – ділянка мережі детальної моделі, яка моделює деякий однотипний процес детальної моделі досліджуваної системи, що починається та закінчується місцем (місцями). Компонента-перехід Ct – ділянка мережі детальної моделі, яка моделює деякий однотипний процес, що починається та закінчується переходом (переходами).

2. Компонентна мережа Петрі з інгібіторними дугами

Інгібіторна дуга мережі Петрі – дуга, що забезпечує можливість перевірки місця мережі на відсутність фішки. Інгібіторна дуга забороняє спрацювання переходу, якщо у вхідному місці, пов'язаному з переходом інгібіторною дугою, знаходиться фішка.

Визначення 5. Компонентна мережа Петрі з інгібіторними дугами (CN_I -мережа) – орієнтований граф, що описується парою:

$$CN_I = (CN, F_I),$$

де CN – компонентна мережа Петрі, F_I – відношення інцидентності між місцями і переходами CN -мережі (незалежно від їх типів), що є інгібіторними, F_I – підмножина множини F дуг виду (p_i, t_j) .

Використовуючи відношення інцидентності F , функцію кратності дуг W і враховуючи факт наявності інгібіторних зв'язків ($F_I \subseteq F$), введемо для CN_I -мережі функцію інцидентності $I: (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow N$, яку позначимо так:

$$I(x, y) = \begin{cases} n, & \text{якщо } (x, y) \in (F \setminus F_I) \wedge W(x, y) = n, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \in F_I, x \in P, y \in T, \\ & W(x, y) = 1; \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin F. \end{cases}$$

Присвоювання функції $I(p_i, t_j)$ значення 0, а не 1 при наявності інгібіторного зв'язку обґрунтовується тим, що хоча відповідний зв'язок в моделі існує, але рух фішки не здійснюється. Перехід, зв'язаний з місцем інгібіторною дугою, спрацює, не віднімаючи фішку у місце.

Функція інцидентності дозволяє задати CN_I -мережу в матричній формі. Для цього за допомогою значень $I(t_j, p_i)$ і $I(p_i, t_j)$ будуються цілочисленні елементи

$$a_{ij} = I(t_j, p_i) - I(p_i, t_j)$$

матриці A – матриці інцидентності CN_I -мережі. Коефіцієнти a_{ij} задають зміни в CN_I -мережі при спрацюванні переходу t_j ($t_j \in T$) і становлять число фішок, які переміщуються.

змінюються й додаються в місце p_i ($p_i \in P$) при спрацюванні переходу t_j .

Теорема 1. Рівняння

$$A \cdot x = d, \quad (1)$$

де A – матриця інцидентності, $d = M_k - M_0$, M_0 , M_k – відповідно початкова і кінцева розмітки CN_1 -мережі забезпечує структурний аналіз CN_1 -мережі. При цьому рівняння (1) є фундаментальним рівнянням CN_1 -мережі.

Доведення. Відповідно до [5] рівняння (1) становить систему лінійних діофантових рівнянь (СЛДР). Матриця цієї СЛДР є матрицею інцидентності CN_1 -мережі. Користуючись [5, 6], отримаємо, що розв'язками цієї системи будуть вектори рахунку спрацювань допущених послідовностей переходів CN_1 -мережі. Згідно з [5], у випадку досконалості розмітки M_k з розмітки M_0 система (1) завжди має розв'язок.

Якщо в (1) $M_0 = M_k$, то отримаємо систему лінійних однорідних діофантових рівнянь (СЛОДР)

$$A \cdot x = 0, \quad (2)$$

розв'язок x якої є послідовністю спрацювань переходів CN_1 -мережі, яка зберігає розмітку, а значить є T -інваріантом CN_1 -мережі.

Розв'язок у СЛОДР

$$A^T \cdot y = 0 \quad (3)$$

описує множину місць CN_1 -мережі з такими розмітками, які залишаються в певному сенсі незмінними в процесі функціонування CN_1 -мережі, тобто є S -інваріантом CN_1 -мережі.

За допомогою T - і S -інваріантів досліджуються структурні властивості мережі Петрі [5]. У досліджуваному випадку – властивості CN_1 -мережі. ■

Обчислення T - і S -інваріантів CN_1 -мережі проводиться за допомогою техніки формального аналізу структурних властивостей CN -мереж, що базується на методах лінійної алгебри [5, 7, 8] з використанням TSS-алгоритму [7, 9] і компонентного аналізу [1, 3].

3. Приклади моделювання задач CN -і CN_1 -мережами

На рис. 1 показано модель задачі про п'ять філософів, яка реалізована CN -мережею [1].

Ця задача є системою процесів, паралельних, взаємодіючих і конкуруючих за доступ до загальних неподільних ресурсів. Кожен з філософів виконує сім дій: входить в їдальню, бере ліву виделку, бере праву виделку, їсть, кладе ліву виделку, кладе праву виделку, виходить із їдальні.

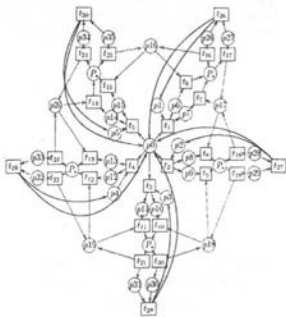


Рис. 1. CN -мережа, що моделює задачу про п'ять філософів, де P_i – компонента-місце

Дана CN -мережа містить один тип однакових складових компонент – компоненту-місце P_i , що показана на рис. 2.



Рис. 2. Компонента-місце P_i в CN -мережі, яка моделює задачу про п'ять філософів

Компонента-місце P_i , моделює наступний процес: i -й філософ тримає в руках ліву і праву виделки, їсть, закінчує їсти і готовий покласти ліву, праву виделку.

Наявність в моделі місця P_0 з чотирма фішками вирішує проблему дедлока. Наявність місць P_{16} , P_{17} , P_{18} , P_{19} , P_{20} забезпечує в моделі

взаємне виключення використання виделок двома сусідніми філософами. Проблема вічного очікування і змови сусідів вирішується через реалізацію в моделі необхідних дій окремого філософа P_i перш, ніж він знову буде претендувати на виделку.

Модель цієї ж задачі у вигляді CN_i -мережі показана на рис. 3. Модель, що пропонується, містить вже два типи складових компонент: компоненту-місце P_i і компоненту-перехід $T_{..}$.

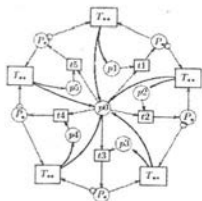


Рис. 3. CN_i -мережа, що моделює задачу про п'ять філософів, де P_i і $T_{..}$ складові компоненти

Компонента-перехід $T_{..}$, що показана на рис. 4, б, моделює процес взяття P_i правої виделки, прийому їжі, повернення лівої, правої виделки, виходу з їдальні. Компонента-місце P_i , що показана на рис. 4, а, моделює умови перебування філософа в їдальні і взяття ним лівої виделки.

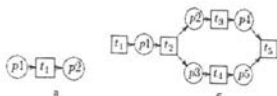


Рис. 4. Складові компоненти CN_i -мережі, що моделює задачу про п'ять філософів:
а) компонента-місце P_i ; б) компонента-перехід $T_{..}$

Введені інгібіторні дуги є індикаторами того, що правий столовий прилад вільний. Цим в моделі забезпечується неможливість одночасного використання однієї і тієї ж виделки двома філософами, які обідають.

Подані моделі задачі про п'ять філософів враховують всі можливі варіанти поведінки філософів і здійснюють синхронізацію їх незалежних дій.

На рис. 5 і рис. 7 показано моделі тупикової залізничної станції (ЗС) з двома вхідними коліями і п'ятьма внутрішніми коліями – відповідно CN_i і CN_j -мережами.

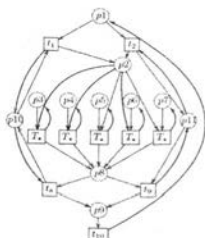


Рис. 5. CN_i -мережа, яка моделює ЗС, де T^* – компонента-перехід

Модель, що показана на рис. 5, містить один тип однакових складових компонент – компонента-перехід T^* , представлений на рис. 6.



Рис. 6. Компонента-перехід T^* в CN_i -мережі, яка моделює ЗС

Компонента T^* (рис. 6) моделює процес прибуття й відправлення поїзда з i -ї колії станції. Компонентою T^* і місцем p_i ($i = 3, 4, \dots, 7$) в цій моделі реалізуються паралельні процеси системи – функціонування однієї колії ЗС.

На рис. 5 переходи t_1 і t_8 (t_2 і t_9) моделюють вхід і вихід поїздів зі станції по одній із колій.

Місця P_{10} і P_{11} забезпечують виключення конкуренції для поїздів на вході і виході зі станції, місця P_1 , P_8 – відповідно умови наявності поїздів для входу і виходу зі станції.

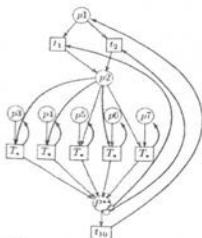


Рис. 7. CN_1 -мережа, яка моделює ЗС, де T^* і P^{**} – складові компоненти

Компонентна мережа Петрі з інгібіторними дугами для ЗС, що показана на рис. 7, містить раніше виділену компоненту-перехід T^* (рис. 6) і компоненту-місце P^{**} (рис. 8).



Рис. 8. Компонента-місце P^{**} для CN_1 -мережі, що моделює ЗС

Моделі тупикової ЗС з двома вхідними колами і п'ятьма внутрішніми колами, які представлені у вигляді CN - і CN_1 -мереж, відображають оптимальність технологічного процесу функціонування станції і раціональне, безпечне, варіативне, нескінченне використання ресурсів станції.

4. Порівняльний аналіз моделей

Наведені в роботі як приклади для моделювання CN - і CN_1 -мережами системи невеликі, але навіть на моделях таких невеликих за розмірами систем видно, що в процесі моделювання систем CN_1 -мережами розміри

отриманих моделей значно скоротилися. Скорочення розмірів моделі – результат використання в CN -мережі інгібіторних дуг. Інгібіторні дуги, правильно імітуючи дії філософів в задачі про п'ять філософів і рух поїздів для ЗС, дозволили зменшити кількість місць і переходів у відповідних CN -мережах. Це відбулося, по-перше, через можливість самої інгібіторної дуги (здійснення перевірки розмітки місця на нуль), по-друге, в результаті використання в CN -моделі інгібіторних дуг з'явилася можливість виділити додаткову складову компоненту P^{**} (рис. 8) у моделі ЗС і додаткові однакові складові компоненти (рис. 4) в моделі задачі про п'ять філософів. Тим самим, використання інгібіторних дуг сприяло відіб'ється на матриці інцидентності мережі, тобто дасть можливість побудови матриці інцидентності меншої розмірності. Так, матриця інцидентності базової моделі Петрі задачі про п'ять філософів має розмірність 56×35 , матриці інцидентності CN - і CN_1 -моделі цієї ж задачі мають відповідно розмірності 36×30 і 11×10 . Для моделі ЗС: матриця інцидентності базової моделі Петрі має розмірність 16×20 , матриця інцидентності CN -мережі – 11×10 , матриця інцидентності CN_1 -мережі – 8×8 .

5. Обсяг задіяної дискретної інформації, оцінка прискорення обчислень

Розглянемо елементи матриці інцидентності як акумульовану дискретну інформацію, що задіється в процесі знаходження структурних інваріантів (T - і S -інваріантів) мережі. Тоді маємо, що при використанні моделі досліджуваної системи у вигляді CN -мережі і, тим більше, CN_1 -мережі отримуємо вагомое зменшення обсягу задіяної дискретної інформації.

Так, навіть для невеликої системи – задачі про п'ять філософів – коефіцієнт стиснення k задіяної дискретної інформації при моделюванні CN_1 -мережею в порівнянні з моделюванням базовою моделлю Петрі дорівнює 17,8. При моделюванні CN -мережею в порівнянні з моделлю Петрі маємо зменшення обсягу задіяної дискретної інформації в 1,8 рази, при порівнянні CN_1 -моделі і CN -моделі коефіцієнт стиснення дорівнює 10. Для моделей ЗС маємо відповідно наступні коефіцієнти стиснення: в першому випадку – $k = 5$, у другому – $k = 2,9$, у третьому – $k = 1,7$.

Оцінимо прискорення обчислень при знаходженні структурних інваріантів в процесі компонентного аналізу CN - і CN_1 -мереж.

Для знаходження T - і S -інваріантів CN - (CN_1)-мережі згідно з [1, 3] і теоремою (1) необхідно знайти рішення відповідних СЛОДР (2) і (3) для CN - (CN_1)-мережі, встановити живучість для компонент-переходів CN - (CN_1)-мережі (знайти позитивні цілочисленні рішення відповідних СЛОДР (2) для компонент-переходів) і встановити сумісність СЛНДР (систем лінійних неоднорідних діофантових рівнянь), відповідних компонентам-місцям CN - (CN_1)-мережі, згідно з алгоритмом перевірки властивостей складної системи, запропонованим в роботі [10]. При цьому, дослідження складових компонент проводяться тільки для одного представника із груп однакових (однотипних) складових компонент з найменшим числом однакових паралельних процесів [3].

Нехай n і m – відповідно кількість рядків і стовпчиків матриці інцидентності базової моделі Петрі, а r_1 і r_2 – відповідно максимальна кількість рядків і стовпчиків серед матриць інцидентності CN - (CN_1)-мережі і її складових компонент. Тоді обчислення при знаходженні T - і S -інваріантів CN - (CN_1)-мережі прискорюються, як мінімум, у n/r_1 і m/r_2 разів відповідно.

Так, для задачі про п'ять філософів при знаходженні T -інваріантів її CN_1 -моделі замість рішення системи з 56-ю рівняннями достатньо розв'язати систему з 11-ма, з 5-ма та з 2-ма рівняннями. Отож, при знаходженні T -інваріантів для CN_1 -моделі задачі про п'ять філософів, отримаємо прискорення обчислень, як мінімум, у 5 разів. Для S -інваріантів – у 3,5 рази.

Висновок

Використання в CN -моделях складних систем інгібіторних дуг продуктивно відбилося на матриці інцидентності отриманої CN_1 -моделі – дало можливість побудови матриці інцидентності меншої розмірності, що природно вплинуло на скорочення обсягу роботи і забезпечило виграш у часі при верифікації. Зменшення кількості невідомих і кількості рівнянь у відповідних СЛОДР (2), (3) і СЛНДР відібрається на кількості перевірок, а, значить, часі роботи алгоритму TSS із знаходження інваріантів моделі, що

досліджується. Навіть моделювання невеликих систем, що розглядалися у роботі, дозволило оцінити економію обсягу задіяної дискретної інформації при використанні CN - і CN_1 -моделей і отримати прискорення обчислень при знаходженні інваріантів досліджуваної моделі.

Список використаних джерел

1. Лукьянова Е.А. О компонентном анализе параллельных распределенных систем // ТВИМ. – 2011. – № 2. – С. 71–81.
2. Лукьянова Е.А. О структурных элементах компонентной сети Петри // Проблемы программирования. – 2012. – № 2-3. – С. 25–32.
3. Лукьянова Е.А., Дереза А.В. Исследование однотипных структурных элементов CN -сети в процессе компонентного моделирования и анализа сложной системы с параллелизмом // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 6 (подано до друку).
4. Котов В.Е. Сети Петри. – М.: Наука, 1984. – 160 с.
5. Мурата Т. Сети Петри: Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР – 1989. – т. 77, № 4. – С. 41–85.
6. Esparza J., Melzer S. Verification of Safety Properties Using Integer Programming: Beyond the State Equation // Formal Methods in System Design. – 2000. – № 16. – Р. 159–189.
7. Крытый С.Л. О некоторых методах решения и критериях совместности линейных диофантовых уравнений в области натуральных чисел // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 4. – С. 12–36.
8. Крытый С.Л. Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в целочисленных областях // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 2. – С. 3–17.
9. Чугаенко А.В. О реализации TSS алгоритма // Управляющие системы и машины. – 2007. – № 3. – С. 26–32.
10. Лук'янова О.О., Дереза А.В. Про автоматичну систему аналізу деяких властивостей алгоритмічних схем // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2011. – № 1. – С. 163–168.

Надійшла до редколегії 12.06.2012

УДК 519.718.2

Ліндер Я.М., асп.,

**Апроксимація
практичної
диференціального
включення з імпульсним
впливом.**

У статті одержано співвідношення для наближення точок з розширеного фазового простору, у яких багатозначне векторне поле розв'язків диференціального включення дотикається до границі фазових обмежень. Розроблено алгоритми для побудови множин сильної та слабкої практичної стійкості диференціальних включень з імпульсним впливом.

Ключові слова: диференціальне включення, практична стійкість, системи з імпульсним впливом.

Y.M. Linder*, grad. student,

Approximation of the maximum set of practical stability of nonlinear differential inclusion with impulse impact.

In the paper formulas for finding the points of the extended phase space, in which set-valued vector field of solutions of differential inclusion touches the border of phase constraints were got. The algorithms for constructing sets of strong practical stability of differential inclusions with impulse impact using points of contact were obtained.

Key Words: differential inclusion, practical stability, systems with impulse impact

*E-mail: yaroslav.linder@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ. У ряді прикладних задач виникає необхідність у визначенні параметрів динамічної системи, при яких розв'язок буде належати фазовим обмеженням на деякому часовому інтервалі [1-4]. У роботі [1] вивчаються властивості максимальної множини початкових умов для сильної та слабкої стійкості лінійних диференціальних включень, наведені методи апроксимації та побудови таких множин.

У випадку нелінійних диференціальних включень оптимальна за включенням множина не обов'язково є опуклою. У такому випадку для знаходження максимальних множин практичної стійкості доцільно застосовувати точки дотику.

У статті отримано умови належності точки, що лежить на границі фазових обмежень, до множини точок дотику. Розроблено алгоритми побудови множин сильної та слабкої практичної стійкості на основі точок дотику.

Будемо використовувати такі позначення: T – знак транспонування; $\text{conv}(R^n)$ – сукупність всіх непорожніх компактних множин з R^n ; $\text{conv}(R^n)$ – сукупність всіх непорожніх опуклих компактів з R^n ; $K_a(a)$ – замкнена куля радіусом ε з центром в точці a ; $\Delta(F)$ – трубка відображення F ; $c(A, \psi)$ – опорна функція множини $A \subset R^n$; $m(A, \psi)$ – функціонал

Мінковського множини $A \subset R^n$; $\alpha(A, B)$ – метрика Хаусдорфа.

Розглянемо диференціальне включення з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} \in F_i(x, t), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (1)$$

$$x(\tau_i) \in G_i(x(\tau_{i-1})), i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad (2)$$

де $x \in R^n$ – вектор фазових координат, $(x, t) \in D$,

D – область в R^{n+1} . Крім того, для кожного

$i \in \{1, 2, \dots, N\}$ відображення $F_i: D \rightarrow \text{conv}(R^n)$

задовольняє основним умовам на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$,

$\tau_0 = t_0$, $\tau_N = T$, тобто множина його значень

непорожня, обмежена, замкнена і опукла, а саме відображення напівнеперервне зверху за t [5].

Також існують неперервні додатні функції $L_i(t)$

такі, що $\alpha(F_i(u, t), F_i(v, t)) \leq L_i(t) \|u - v\|$, якщо

$(u, t), (v, t) \in D$. Відображення $G_i: R^n \rightarrow \text{conv}(R^n)$

неперервні для всіх $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$,

компактнозначне відображення $\Phi: [t_0, T] \rightarrow$

$\text{conv}(R^n)$ напівнеперервне зверху за t .

Позначимо $X(t, x_0, t_0)$ – множина досяжності

диференціального включення (1), (2), яка

відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$. На

кожному відрізьку $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ введемо

функції $\tilde{x}_i(t, x_0, t_0) = x(t, x_0, t_0)$ для всіх $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$.

$\tilde{X}_i(\tau_i, x_0, t_0) = \lim_{t \rightarrow \tau_i^-} X(t, x_0, t_0)$, які назвемо

розширеними розв'язками диференціального включення (1), (2). Введемо також відображення $\tilde{X}_i(t, x_0, t_0) = X(t, x_0, t_0)$ для всіх $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, а у точках τ_i $\tilde{X}_i(\tau_i, x_0, t_0) = \limsup_{t \rightarrow \tau_i^-} X(t, x_0, t_0)$, які назвемо розширеними множинами досяжності диференціального включення (1), (2).

Означення 1. Точка (x, t) називається точкою сильного дотику диференціального включення (1), (2) з фазовими обмеженнями, що задаються відображенням $\Phi(t)$, якщо справджуються умови:

1. Точка (x, t) лежить на трубі відображення $\Phi(t)$;

2. Для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує точка $(x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0) \in K_\varepsilon(x, t) \cap \Gamma(\Phi(t))$ така, що $t_\varepsilon^0 \in [\tau_{i-1}, t_\varepsilon)$ (або, якщо $t_\varepsilon = \tau_{i-1}$, $(x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0) = (x, t_\varepsilon)$), графік розширеної множини досяжності $\tilde{X}_i(t, x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$ задачі Коші диференціального включення (1), (2) з початковими умовами $(x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$ лежить всередині фазових обмежень та хоча б один розширений розв'язок задачі Коші $\tilde{X}_i(\tau_i, x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$ диференціального включення (1), (2) з початковими умовами $(x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$ або перетинається з множиною $\Delta(\Phi(t))$ у одній точці (x, t) , або лежить на трубі фазових обмежень на інтервалі $[t_\varepsilon - \varepsilon, t_\varepsilon + \varepsilon] \cap [\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Означення 2. Точка (x, t) називається точкою слабого дотику диференціального включення (1), (2) з фазовими обмеженнями $\Phi(t)$, якщо справджуються умови:

1. Точка (x, t) лежить на трубі відображення $\Phi(t)$;

2. Для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує точка $(x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0) \in K_\varepsilon(x, t) \cap \Gamma(\Phi(t))$ така, що $t_\varepsilon^0 \in [\tau_{i-1}, t_\varepsilon)$ (або, якщо $t_\varepsilon = \tau_{i-1}$, то $(x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0) = (x, t_\varepsilon)$), та хоча б один розширений розв'язок $\tilde{X}_i(\tau_i, x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$ задачі Коші диференціального включення (1), (2) з початковими умовами $(x_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$ лежить всередині фазових обмежень і перетинається з множиною $\Delta(\Phi(t))$ лише у одній точці (x, t) , або лежить на трубі фазових обмежень на інтервалі $[t_\varepsilon - \varepsilon, t_\varepsilon + \varepsilon] \cap [\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Нехай задана неперервно диференційовна за своїми аргументами визначальна функція фазових обмежень $m(x, t): R^{n+1} \rightarrow R^1$ така, що

$$\Phi(t) = \{x: m(x, t) \leq 1\}.$$

Знайдемо точки на границі множини $\Phi(t)$, які не виводять нас за межі множини фазових обмежень у силу диференціального включення (1), (2). Для цього потрібно, щоб справджувалась умова

$$\begin{aligned} \max_{\frac{d}{dt} \in F(x, t)} \frac{dm(x, t)}{dt} &= \max_{\frac{d}{dt} \in F(x, t)} \left(\frac{\partial m(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) = \\ &= \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} + \max_{\psi \in F(x, t)} \left(\frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \psi \right) = \\ &= \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} + c \left(F(x, t), \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} + c \left(F(x, t), \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \right), \\ \psi_{\max} &= \text{Arg max}_{\psi \in F(x, t)} \left(\frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \psi \right). \end{aligned}$$

Пара (x, τ_i) є точкою сильного дотику, якщо

$$m(x, \tau_i) = 1, \Psi(x, \tau_i) \leq 0, \Psi(x + \varepsilon \psi_{\max}, \tau_i + \varepsilon) \leq 0. \quad (3)$$

У випадку $m(x, \tau_i^-) = 1$ пара (x, τ_i^-) є точкою сильного дотику, якщо

$$\Psi(x, \tau_i^-) \geq 0, \Psi(x - \varepsilon \psi_{\max}, \tau_i^- - \varepsilon) \geq 0. \quad (4)$$

Пара (x, t) є точкою сильного дотику, якщо

$$\begin{cases} m(x, t) = 1, \Psi(x, t) = 0, \\ \Psi(x + \varepsilon \psi_{\max}, t + \varepsilon) \leq 0, \\ \Psi(x - \varepsilon \psi_{\max}, t - \varepsilon) \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогічно, для знаходження точок слабого практичного дотику одержуємо

$$\begin{aligned} \min_{\frac{d}{dt} \in F(x, t)} \frac{dm(x, t)}{dt} &= \min_{\frac{d}{dt} \in F(x, t)} \left(\frac{\partial m(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) = \\ &= \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} + \min_{\psi \in F(x, t)} \left(\frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \psi \right) = \\ &= \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} - c \left(F(x, t), \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \Omega(x, t) &= \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} - c \left(F(x, t), \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \right), \\ \psi_{\min} &= \text{Arg min}_{\psi \in F(x, t)} \left(\frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \psi \right). \end{aligned}$$

Пара (x, τ_i) є точкою слабого дотику, якщо

$$m(x, \tau_i) = 1, \Omega(x, \tau_i) \leq 0, \Omega(x + \varepsilon \psi_{min}, \tau_i + \varepsilon) \leq 0. \quad (6)$$

У випадку $m(x, \tau_i^-) = 1$ пара (x, τ_i^-) є точкою слабого дотику, якщо

$$\Omega(x, \tau_i^-) \geq 0, \Omega(x - \varepsilon \psi_{min}, \tau_i^- - \varepsilon) \geq 0. \quad (7)$$

Пара (x, t) є точкою слабого дотику, якщо

$$\begin{cases} m(x, t) = 1, \Omega(x, t) = 0, \\ \Omega(x + \varepsilon \psi_{min}, t + \varepsilon) \leq 0, \\ \Omega(x - \varepsilon \psi_{min}, t - \varepsilon) \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Нехай праву частину та імпульсні впливи диференціального включення (1), (2) можна представити у вигляді

$$F_i(x, t) = f_i(x, t) + D_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$G_i(x) = g_i(x(\tau_i^-)) + H_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, N-1\},$$

де $f_i(x, t): D \rightarrow R^n$ – неперервні функції,

$g_i(x): R^n \rightarrow R^n$ – взаємно однозначні неперервні

функції, $D_i: D \rightarrow \text{conv}(R^n)$ – неперервні за t

відображення, $H_i: R^n \rightarrow \text{conv}(R^n)$ – опуклі

компакти. Тоді можна запропонувати алгоритм

для обчислення максимальної за включенням

множини сильної практичної стійкості

диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in f_i(x, t) + D_i(t), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (9)$$

$$x(\tau_i) \in g_i(x(\tau_i^-)) + H_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, N-1\}. \quad (10)$$

Алгоритм 1. Обчислення оптимальної множини сильної практичної стійкості включення (9), (10).

1. Вводимо сітку $\alpha \subset [0, T]$ та $\beta \subset \partial\Phi(t)$.

2. Для всіх точок $(x, t) \in (\alpha, \beta)$ перевіряємо

одну з умов (3), (4), (5) в залежності від того, чи

t знаходиться всередині інтервалу $[\tau_{i-1}, \tau_i]$,

$i \in \{1, 2, \dots, N\}$ чи на одному з його кінців. Якщо

умова виконується, то включасмо точку (x, t) до

множини точок дотику Λ .

3. Для кожної точки $(x, t_i) \in \Lambda$ знаходимо

розв'язок $\tilde{x}(t)$ рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x, t), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (11)$$

$$x(\tau_i) = g_i(x(\tau_i^-)), \quad i \in \{1, 2, \dots, N-1\} \quad (12)$$

з початковими умовами $x(t_i) = x_i$.

3. Для кожної точки $(x, t_i) \in \Lambda$ на інтервалі

$[t, T]$ будемо пучок розв'язків у прямому

часовому напрямку, розв'язуючи сукупність

диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x, t) + \frac{x - \tilde{x}(t)}{m(D_i(t), x - \tilde{x}(t))}, \quad (13)$$

$$t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$x(\tau_i) = g_i(x(\tau_i^-)) + \frac{x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i)}{m(H_i, x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i))}, \quad (14)$$

$i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ з початковими умовами

$$x(t_i) = x_i + \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \omega_i \in K_\delta(0), \quad \delta \ll 1. \quad (15)$$

4. Для всіх точок $(x, t_i) \in \Lambda$ на інтервалі

$[t_0, t_i]$ знаходимо сукупність розв'язків

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x, t) - \frac{x - \tilde{x}(t)}{m(D_i(t), x - \tilde{x}(t))}, \quad (16)$$

$$t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$x(\tau_i^-) = g_i^{-1} \left(x(\tau_i) - \frac{x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i)}{m(H_i, x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i))} \right), \quad (17)$$

$i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ з початковими умовами (15).

Якщо всі розв'язки сукупності диференціальних

рівнянь (13), (14) лежать всередині фазових

обмежень $\Phi(t)$ на часовому відрізку $[t, T]$, і

хоча б один розв'язок $x(t, x_i, t_i)$ сукупності

(16), (17) лежить всередині $\Phi(t)$ на відрізку

$[t_0, t_i]$, то формуємо переріз $X(t_0, x_i, t_i)$, множини

траєкторій $x(t, x_i, t_i)$ у момент часу $t = t_0$.

5. Вилучимо з множини Λ всі точки (x, t_i) ,

для яких не сформовані перерізи. Нехай кількість

точок у множині Λ дорівнює s . Для кожної

точки $(x, t_i) \in \Lambda$, для якої сформований переріз

$X(t_0, x_i, t_i)$, шукаємо n найближчих точок

$\{x^k, t_i^k\} \in \Lambda$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ і для тих комбінацій

множин $\{X(t_0, x_i, t_i), X(t_0, x^k, t_i^k)\}$, $k \in N_j$,

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$, які попарно не перетинаються,

обчислюємо множини

$$M_j^i = \text{co} \left\{ \bigcup_{k \in N_j} X(t_0, x^k, t_i^k) \bigcup X(t_0, x_i, t_i) \right\},$$

де $N_j = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$. Сформуємо об'єднання

$$X(t_0, \Lambda) = \left\{ \bigcup_{(t_i, x_i) \in \Lambda} X(t_0, x_i, t_i) \right\} \bigcup \left\{ \bigcup_{j=1}^n M_j^i \right\}.$$

6. Представимо множини $R^n \setminus X(t_0, \Lambda)$ у

вигляді об'єднання скінченної кількості

обмежених замкнених однозв'язних множин

$\tilde{G}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ та необмеженої однозв'язної

$$\text{множини } F. \text{ Тоді } R^n \setminus X(t_0, \Lambda) = \left\{ \bigcup_{i=1}^l \tilde{G}_i \right\} \bigcup F.$$

7. Максимальна за включенням множина сильної практичної стійкості включення (9), (10)

має вигляд $G_* = \bigcup_{i=1}^l \hat{G}_i$. Кінець алгоритму.

Для побудови множини слабкої практичної стійкості необхідно для кожної точки дотику знайти всі розв'язки включення (9), (10), що проходять через цю точку і лежать всередині фазових обмежень. Тому відшукування множини I_* для нелінійного диференціального включення є складнішою проблемою, ніж знаходження G_* .

Алгоритм 2. Обчислення оптимальної множини слабкої практичної стійкості включення (9), (10).

1. Вводимо сітку по $\alpha \in [0, T]$ та $\beta \in \partial F(t)$.

2. Для всіх точок $(x, t) \in (\alpha, \beta)$ перевіряємо одну з умов (6), (7), (8) в залежності від того, чи t знаходиться всередині інтервалу $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, чи на одному з його кінців. Якщо відповідна умова виконується, то включаємо сукупність (x, t) до множини точок дотику Λ .

3. Для кожної точки $(x_i, t_i) \in \Lambda$ знаходимо пучок всіх розв'язків диференціального включення (9), (10), що проходять через точку (x_i, t_i) і лежать всередині фазових обмежень. Знаходимо переріз цього пучка $X(t_0, x_i, t_i)$ у момент часу $t = t_0$.

4. Введемо позначення

$$X(t_0, \Lambda) = \bigcup_{(x_i, t_i) \in \Lambda} X(t_0, x_i, t_i).$$

Представимо множину $R^n \setminus X(t_0, \Lambda)$ у вигляді об'єднання скінченної кількості обмежених замкнених однозв'язних множин $\tilde{I}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ та необмеженої однозв'язної множини F . Тоді

$$R^n \setminus X(t_0, \Lambda) = \left\{ \bigcup_{i=1}^l \tilde{I}_i \right\} \cup F.$$

5. Максимальна за включенням множина слабкої практичної стійкості включення (9), (10) матиме вигляд

$$I_* = \left\{ \bigcup_{i=1}^l \tilde{I}_i \right\} \cup X(t_0, \Lambda).$$

Кінець алгоритму.

Приклад. Застосуємо алгоритм 1 для знаходження максимальної за включенням множини сильної практичної стійкості диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in Q(x, t) + K_{0.2}(0), t \in [0, 1] \quad (18)$$

де $Q(x, t) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \sin(2x_1) + 1 \end{pmatrix}$. Визначальна функція фазових обмежень має вигляд

$$m(x, t) = \frac{x^2 + y^2 - 2 \cos(2x + 2y)}{4}.$$

За допомогою алгоритму 1 була одержана апроксимація множини G_* , яка є двозв'язною множиною (рис. 1), хоча множина фазових обмежень однозв'язна для всіх $t \in [0, 1]$.

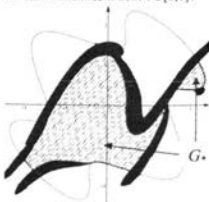


Рис. 1. Апроксимація множини G_* .

Список використаних джерел

1. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Київ: Наук. думка, 1985. – 304 с.
3. Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Критерій практичної стійкості для динамічних систем з імпульсним впливом // Вісник. Кібернетика. – 2002. – вип. 3. – С. 35-37.
4. Линдер Я. Н., Пічкур В. В. Оптимальные множества практической устойчивости дифференциальных включений с многозначным импульсным воздействием // Кибернетика и вычислительная техника. 2011. – Вып. 166. – С. 15-24.
5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения // Нелинейный анализ и нелинейные дифф. уравнения. – М.: Физматлит, 2003. – С. 265-288.

Надійшла до редколегії 18.05.2012

УДК 519.21

Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

Про двокритеріальну оптимізаційну задачу для багатоканальної мережі марковського типу

Статтю присвячено перспективному напрямку теорії стохастичних систем, пов'язаному з вивченням мереж із керованими параметрами. Досліджено характеристики процесу накопичення прибутку для багатоканальних стохастичних мереж. В явному вигляді, через параметри моделі знайдені цільові функції оптимізаційної задачі і показано, що вони є лінійними відносно контрольованих параметрів.

Ключові слова: оптимальне керування, процес обслуговування, інформаційний потік, генераторна, інтегральне рівняння.

*E-mail: iamak@ukr.net

Статтю представив д. т. н. проф. Заславський В.А.

Аналіз та синтез інформаційно-обчислювальних мереж, сучасних мереж мобільного зв'язку вимагає розв'язку оптимізаційних задач для стохастичних мереж. Загальну класифікацію типів постановок оптимізаційних задач і методів їх розв'язування дано у монографіях В.М. Глушкова [1] (розд. 5,6) та Л. Клейнрока [2]. Головними є задачі розподілу інформаційних потоків, вибору пропускних спроможностей та топологічної структури мережі. Повнота розв'язку цих задач залежить від керуючих розподілів мережі, складності алгоритму маршрутизації та виду функцій вартості. Сучасний стан досліджень в цій області представлено в роботах [3], [4].

Тема даної роботи пов'язана з проблемою оптимального поділу між вузлами мережі зовнішнього навантаження. Її можна віднести до загальних вище оптимізаційних задач першого типу. У роботі для багатоканальних стохастичних мереж марковського типу розглянуто задачу оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі як середній прибуток від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку.

Розглянемо мережу обробки інформації, яка складається з r -ї однотипних вузлів обробки

І.А. Makushenko, Ph.D.

About two-criterion optimization problem for multi-channel network of Markov type

The article is devoted to perspective direction of queuing theory connected with investigation of queuing systems and networks with controlled parameters. For multi-channel stochastic networks the characteristics of accumulative process of income are investigated. The goal functions of optimization problem are found via system parameters in explicit form. It is shown that the goal functions are linear over controlled parameters.

Key Words: optimal control, service process, information flow, generating function, integral equation.

інформації. На вузли обробки інформації надходить один зовнішній загальний пуассонівський потік інформаційних пакетів $\nu(t)$ інтенсивності λ . Пакет, що надійшов на вхід мережі, з ймовірністю

$h_i, i = 1, 2, \dots, r$ ($h_i \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i = 1$) надходить для

обробки в i -ий вузол, який представляє собою багатоканальну стохастичну систему. При надходженні пакету у таку систему зразу починається його обробка. Час обробки розподілений за показниковим законом з параметром μ , для вузла i . Після завершення обробки в i -ому вузлі пакет з ймовірністю p_i надходить для обробки в j -ий вузол та з ймовірністю $p_{r+1} = 1 - \sum_{i=1}^r p_i$ залишає мережу.

Зручно ввести " $r+1$ " вузол та інтерпретувати його як вихід з мережі обробки інформації.

Мережі такого типу будемо позначати через $[M | M | \infty]$.

Процесом обробки інформації у $[M | M | \infty]$ -мережі будемо називати вектор $X^*(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_r(t))$, i -та компонента якого $X_i(t)$ приймає значення $0, 1, \dots$ і дорівнює

числу інформаційних пакетів, що знаходяться на обробці у i -ому вузлі у момент часу $t \geq 0$. У подальшому будемо вважати, що у початковий момент часу мережа порожня, тобто $X'(0) = (X_1(0), X_2(0), \dots, X_r(0)) = (0, 0, \dots, 0)$.

На процесі $X(t), t \geq 0$ визначимо адитивний функціонал $S'(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_r(t))$, де $S_i(t), i = 1, 2, \dots, r$ - число пакетів, обробка яких завершилася в i -ому вузлі за час t . Оскільки $S(t)$ визначає сумарний прибуток від роботи мережі на проміжку $[0, t]$, то процес $S(t), t \geq 0$ будемо називати процесом накопичення прибутку. Через $S(t, z), z' = (z_1, z_2, \dots, z_r), |z| \leq 1$ позначимо багатовимірну генератрису вектора $S(t)$.

Для аналізу задачі оптимального розподілу зовнішнього навантаження в класі $[M|M|\infty]$ -мереж важливим є наступний результат.

Лема. Для генератрис $S(t, z)$ справедливе подання

$$S(t, z) = \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^r h_i \int_0^t [1 - \varphi_i(u, z)] du \right\}, \quad (1)$$

де генератрис $\varphi_i(t, z), i = 1, 2, \dots, r$ є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi_i(t, z) &= e^{-\mu_i t} + \\ &+ z_i \mu_i \int_0^t \left[\sum_{j=1}^r p_{ij} \varphi_j(t-u, z) + p_{i,r+1} \right] \times e^{-\mu_i u} du, \quad (2) \\ i &= 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Доведення:

Доведення леми базується на моделюванні процесу обробки інформаційних пакетів у мережі гіллястим процесом Беллмана-Харріса ([5]) з $2r+1$ типами частинок $T_0, T_1, \dots, T_r, T_{r+1}, \dots, T_{2r}$. Кожна з частинок типу T_i має випадкову тривалість життя τ^i з функцією розподілу $P\{\tau^i \leq t\} = G^i(t)$, причому

$$G^0(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0, \quad G^i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}, t \geq 0, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, r,$$

$$G^i(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t \geq 1, \end{cases} \quad i = r+1, \dots, 2r. \quad (4)$$

У кінці свого життя частина типу T_i перетворюється у сукупність частинок $(a_0, a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_{2r+1})$ типів $T_0, T_1, \dots, T_r,$

$T_{r+1}, \dots, T_{2r+1}$ нульового віку, які будемо називати безпосередніми нащадками. Генератрис безпосередніх нащадків однієї частинки типу T_i мають вигляд

$$f^0(z) = z_0 \prod_{j=1}^r z_j h_j, \quad (5)$$

$$f^i(z) = z_{r+i} \left(\sum_{j=1}^r p_{ij} z_j + p_{i,r+1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (6)$$

$$f^i(z) = z_i, \quad i = r+1, \dots, 2r. \quad (7)$$

Співвідношення (3) – (7) повністю задають процес Беллмана-Харріса.

Перейдемо до постановки оптимізаційної задачі.

Якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} MS_i(t)$, то будемо позначати їх через $m_i, i = 1, 2, \dots, r$. Очевидно, що m_i залежить від параметрів $[M|M|\infty]$ -мережі: $h' = (h_1, h_2, \dots, h_r), \lambda, \mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r), P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^r$. У подальшому будемо вважати, що λ, μ, P є заданими, а вибір вектора h знаходиться в нашому розпорядженні. Таким чином $m_i = m_i(h), i = 1, 2, \dots, r$. Аналогічно, якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{cov}(S_i(t), S_j(t))$, то будемо позначати їх через $V_{ij} = V_{ij}(h), i, j = 1, 2, \dots, r$.

Нехай $C_i, i = 1, 2, \dots, r$ - прибуток від обробки одного пакету в i -ому вузлі. Тоді важливе значення має наступна двокритеріальна оптимізаційна задача

$$M(h) = \sum_{i=1}^r C_i m_i(h) \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$V(h) = \sum_{i,j=1}^r C_i V_{ij}(h) C_j \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^r h_i = 1, h_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r. \quad (10)$$

Розв'язок $h^* = (h_1^*, h_2^*, \dots, h_r^*)$ оптимізаційної задачі (8) – (10) представляє собою таке керування вхідним потоком, яке одночасно максимізує середній прибуток від роботи мережі та мінімізує ризик досягнення цього прибутку. Для того, щоб знайти цей розв'язок, необхідно подати функціонали $M(h), V(h)$ через

параметри $[M|M|\infty]^r$ - мережі. Для цих цілей служить наступна теорема.

Теорема. В класі стохастичних мереж типу $[M|M|\infty]^r$ при умові, що спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, цільові функції $M(h)$, $V(h)$ є лінійними і мають вид

$$M(h) = \lambda H' A C, \quad (11)$$

$$V(h) = \lambda \sum_{\alpha, \beta=1}^r C_{\alpha\beta} \left\{ \delta_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^r h_i A'_i + \right. \\ \left. + H' [(I - P)^{-1} I_{\alpha} P (I - P)^{-1} e_{\beta} + \right. \\ \left. + (I - P)^{-1} I_{\beta} P (I - P)^{-1} e_{\alpha}] C_{\beta} \right\}, \quad (12)$$

$$\text{де } A = [A'_i]_{i=1}^r = (I - P)^{-1}, \quad C' = (C_1, C_2, \dots, C_r),$$

$I = [\delta_{\alpha\beta}]$ - одинична матриця, e_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, r$ - r -вимірний вектор, у якого компонента з номером α дорівнює 1, а інші дорівнюють 0;
 $I_{\alpha} = [\delta_{\alpha\beta}]_{\beta=1}^r$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$ - матриця розміром $r \times r$, у якій діагональний елемент з номером α дорівнює 1, а інші елементи дорівнюють 0.

Доведення:

Доведемо формулу (11). Для цього введемо позначення

$$MS_i(t) = A_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Диференціюємо рівняння (1) по змінній z_i , $i = 1, 2, \dots, r$ і підставляючи $z = (1, 1, \dots, 1)$ приходимо до

$$A_j(t) = \lambda \sum_{i=1}^r h_i \int_0^t A'_i(u) du, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (13)$$

$$\text{де } A'_i(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i(t, z)}{\partial z_j} \right|_{z=1}, \quad \hat{i} = (1, \dots, 1).$$

Таким чином $A_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, r$ подається через функції $A'_i(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$. Для того, щоб для останніх одержати систему рівнянь, продиференціюємо співвідношення (2) по змінній z_j , $j = 1, 2, \dots, r$ і підставимо $z' = (1, \dots, 1)$. Тоді, як

наслідок (2), маємо систему інтегральних рівнянь для функцій $A'_j(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$

$$A'_j(t) = \delta_{ij} \mu_i \int_0^t e^{-\mu_i u} du + \\ + \mu_i \sum_{k=1}^r \int_0^t p_{ik} A'_k(t-u) e^{-\mu_i u} du. \quad (14)$$

Нехай

$$A'_j(s) = \int_0^{\infty} A'_j(t) e^{-st} dt, \quad s \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r,$$

перетворення Лапласа функцій $A'_j(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$.

Тоді з (14) випливає, що $A'_j(s)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ задовольняє систему рівнянь

$$A'_j(s) = \frac{1}{s} \delta_{ij} \mu_i \frac{1}{s + \mu_i} + \\ + \frac{\mu_i}{s + \mu_i} \sum_{k=1}^r p_{ik} A'_k(s), \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (15)$$

Введемо матриці

$$A(s) = [A'_i(s)]_{i=1}^r, \quad \Delta(G(s)) = \left[\delta_{ij} \frac{\mu_i}{s + \mu_i} \right]_{i,j=1}^r,$$

$$\Delta(G(0)) = I = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^r.$$

Тоді систему (15) можна подати у вигляді

$$A(s) = \frac{1}{s} \Delta(G(s)) + \Delta(G(s)) P A(s). \quad (16)$$

Тоді з системи (16) знаходимо

$$A(s) = \frac{1}{s} [I - \Delta(G(s)) P]^{-1} \Delta(G(s)). \quad (17)$$

З співвідношення (17), скориставшись наслідком з тауберової теореми для перетворення Лапласа ([6], стор. 211-212), маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A'_j(u) du \Big|_{z=1} = (I - P)^{-1}. \quad (18)$$

З співвідношень (13) і (18) одержуємо (11). Щоб довести формулу (12) введемо функції

$$D_{ij}^{\alpha}(t) = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \varphi_i(t, z) \Big|_{z=1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r.$$

Тоді при $i \neq j$ з (1) знаходимо

$$MS_i(t)S_j(t) = \lambda \sum_{k=1}^r h_k \int_0^t D_{ij}^k(u) du + MS_i(t)MS_j(t). \quad (19)$$

Як наслідок (19), будемо мати

$$\text{cov}(S_i(t), S_j(t)) = \lambda \sum_{k=1}^r h_k \int_0^t D_{ij}^k(u) du. \quad (20)$$

З співвідношення (2) випливає, що функції $D_{\alpha\beta}^k(t)$, $k, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, r$ задовольняють системі інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^k(t) = & \sum_{j=1}^r \mu_j \int_0^t p_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}^j(t-u) e^{-\rho_{\alpha\beta} u} du + \\ & + \delta_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^r \mu_j \int_0^t p_{\alpha\beta} A_{\beta}^j(t-u) e^{-\rho_{\alpha\beta} u} du + \\ & + \delta_{\beta} \sum_{j=1}^r \mu_j \int_0^t p_{\alpha\beta} A_{\alpha}^j(t-u) e^{-\rho_{\alpha\beta} u} du. \end{aligned} \quad (21)$$

Нехай $D_{\alpha\beta}^k(s) = (D_{\alpha\beta}^1(s), \dots, D_{\alpha\beta}^r(s))$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, r$, $A_{\alpha}^k(s) = (A_{\alpha}^1(s), \dots, A_{\alpha}^r(s))$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$ – r -вимірні вектори, що складаються з перетворень Лапласа. Тоді розв'язок системи інтегральних рівнянь (21) у термінах перетворень Лапласа буде мати вигляд

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}(s) = & \frac{1}{s} (I - \Delta(G(s))P)^{-1} I_{\alpha} \Delta(G(s)) \times \\ & \times P(I - \Delta(G(s))P)^{-1} I_{\beta} \bar{\Delta}(s) + \\ & + \frac{1}{s} (I - \Delta(G(s))P)^{-1} I_{\beta} \Delta(G(s)) \times \\ & \times P(I - \Delta(G(s))P)^{-1} I_{\alpha} \bar{\Delta}(s). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (D_{\alpha\beta}^1(t), \dots, D_{\alpha\beta}^r(t)) &= \lim_{s \rightarrow 0+} s D_{\alpha\beta}(s) = \\ &= (I - P)^{-1} I_{\alpha} P(I - P)^{-1} e_{\beta} + (I - P)^{-1} I_{\beta} P(I - P)^{-1} e_{\alpha}, \end{aligned}$$

то, як наслідок з тауберової теореми для перетворень Лапласа, маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t D_{\alpha\beta}^1(u) du, \dots, \frac{1}{t} \int_0^t D_{\alpha\beta}^r(u) du \right) = \quad (22)$$

$$= (I - P)^{-1} I_{\alpha} P(I - P)^{-1} e_{\beta} + (I - P)^{-1} I_{\beta} P(I - P)^{-1} e_{\alpha}.$$

Співвідношення (12) випливає з (20), (22) і при $i \neq j$ теорему доведено. При $i = j$ доведення проводиться аналогічно. Додатковий доданок у правій частині (15) виникає за рахунок того, що

$$MS_i^2(t) = \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} S(t, z) \Big|_{z=\bar{1}} + \frac{\partial}{\partial z_i} S(t, z) \Big|_{z=\bar{1}}.$$

Теорему доведено.

З теореми можна зробити висновок, що цільові функції $M(h)$, $V(h)$ оптимізаційної задачі (8) – (10) є лінійними відносно контрольованих параметрів. Таким чином двокритеріальна оптимізаційна задача максимізації середнього прибутку та мінімізації величини ризику може бути розв'язана стандартними методами багатокритеріальної оптимізації (див., наприклад, [7]), які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв.

Список використаних джерел

1. Сети ЭВМ / Под редакцией академика В.М. Глушкова. – М.: Связь, 1977. – 279 с.
2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
3. Вишневский М.В. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
4. Лебедев С.О., Махушенко Л.А. Оптимізація ризику для багатоканальних стохастичних мереж: Навчальний посібник. – К.: НБУВ, 2007. – 65 с.
5. Ватутин В.А. Критический ветвящийся процесс Белмана-Харриса с иммиграцией и несколькими типами частиц // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21, №2. – С. 447-454.
6. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 244 с.
7. Волкович В.Л., Волошин А.Ф., Заславский В.А., Ушаков И.А. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / Под ред. Михалева В.С. – К.: Наукова думка, 1993. – 312 с.

Надійшла до редколегії 14.06.12

УДК 681.3

Олександр О. Марченко, к.ф.-м.н., доц.

Oleksandr O. Marchenko, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Порівняння методів онтологічного семантичного аналізу та алгоритмів латентного семантичного аналізу

Comparison of methods for ontological semantic analysis and latent semantic analysis algorithms

Метою даної роботи є порівняльний аналіз двох основних сучасних напрямів інтелектуальної обробки текстів природною мовою – експліцитних методів семантичного аналізу текстової інформації та методів латентного семантичного аналізу. Основна увага в роботі приділена суттєвим нюансам алгоритмів, їх перевагам та слабким місцям, а також перспективі можливості поєднання або спільного застосування технік даних напрямів для розв'язання задач комп'ютерної лінгвістики.

The article presents a comparative analysis of two main directions of intellectual natural language text processing. There are explicit methods for semantic analysis of textual information and methods of latent semantic analysis. The main attention is focused on important nuances of algorithms, their advantages and weaknesses, as well as possible merger or joint use of both techniques for solving the problems of computational linguistics.

Ключові слова: комп'ютерна лінгвістика, семантичний аналіз текстів природною мовою, латентний семантичний аналіз.

Key words: computational linguistics, semantic analysis of natural language text, latent semantic analysis.

E-mail: rozenkrans@yandex.ua

Статтю представив чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

На сьогоднішній день найбільш актуальними та перспективними напрямками серед методів аналізу та інтелектуальної обробки текстової інформації широко визнано два найактивніше застосованих зараз підходи – алгоритми семантичного аналізу на основі онтологічних баз знань та алгоритми латентного семантичного аналізу. Основною задачею цих методів є визначення та побудова смислової структури вхідного природномовного тексту у вигляді певного формального запису (фрейму[1], семантичної мережі у деякому представленні[2], онтологічного запису представлення значення тексту – text meaning representation (TMR)[3] або в якійсь іншій формі). Два вищезгадані напрями суттєво відрізняються у підходах та методах розв'язання цієї задачі.

Експліцитні методи семантичного аналізу або алгоритми онтологічного семантичного аналізу інтенсивно використовують лінгвістичні бази знань на всіх етапах текстуального аналізу. Перед виконанням функцій семантичного аналізу виконуються послідовно етапи токенизації,

лексико-морфологічного аналізу та синтаксичного аналізу[4]. Результати блоку синтаксичного аналізу – синтаксична структура вхідного тексту з розібраними лексемами, які вже розміщені морфологічними маркерами і розміщені у вузлах синтаксичних дерев виведення речень вхідного тексту, – є входом блоку семантичного аналізу. Як під час виконання цих попередніх етапів лінгвістичного аналізу, де йшло активне використання лексико-морфологічної бази даних(флексні таблиці привил словозміни) та синтаксичної бази даних(таблиці граматик), так під час семантичного аналізу алгоритм інтенсивно використовує семантичну онтологічну базу знань, яка окрім суто лінгвістичних даних містить знання про оточуючий світ та відомості з певних проблемних областей (ПО). Задача блоку семантичного аналізу – на основі вхідної синтаксичної структури тексту побудувати семантичну структуру тексту. Ця задача також в свою чергу складається з декількох підзадач – подолання мовної полісемії (тобто переходу від

слів до їх семантичних значень, втілених у концептах-вершинах онтологічного графу семантичної бази знань), побудови семантичних графів окремих речень вхідного тексту та інтеграції цих окремих графів в об'єднану семантичну структуру вхідного тексту[5] (цей етап напруму пов'язаний з такими класичними задачами комп'ютерної лінгвістики, як *розв'язання анафори та розпізнання сутностей тексту*). Після цього отримана семантична структура може бути використана для ефективного розв'язання цілого ряду прикладних задач інтелектуальної обробки тексту.

Латентно-семантичний аналіз (Latent Semantic Analysis, LSA) - це метод обробки природномовної інформації, що аналізує взаємозв'язок між колекцією документів і термінами, які в них зустрічаються, та зіставляє деякі фактори (тематики) всім документам і термінам. В основі методу латентно-семантичного аналізу лежать принципи факторного аналізу, зокрема, виявлення латентних зв'язків досліджуваних явищ чи об'єктів. При класифікації та кластеризації документів цей метод використовується для виявлення контекстнозалежних значень лексичних одиниць за допомогою статистичної обробки великих корпусів текстів.

Латентний семантичний аналіз використовує техніку частотного та імовірного аналізу для обробки текстів або текстових корпусів з ціллю побудови матриць сумісного вживання слів, що можуть інтерпретуватися як певні семантичні мережі у матричному представленні. Для пониження розмірності матриць представлення та виявлення семантичних властивостей та зв'язків застосовуються спеціальні матричні перетворення - невід'ємна матрична факторизація (NMF).

Латентний семантичний аналіз успішно застосовується для задач пошуку релевантних документів, визначення семантичної схожості слів і текстів. Перевагою даного підходу над іншими методами визначення текстової структури є його здатність ефективно обробляти короткі тексти.

Порівняльний аналіз експліцитного семантичного напруму та латентного семантичного підходу робитимемо через співставлення їх алгоритмів розв'язання задачі кластеризації текстів природною мовою.

Кластеризація текстів методом семантичного онтологічного аналізу

На вхід алгоритму подається множина текстів природною мовою. Алгоритм має розбити множину текстів на тематичні кластери. Кількість та склад тематичних напрямків заздалегідь невизначені. Кластеризація документів по темах відбувається на основі порівняння їх семантичних структур. Тому перед виконанням кластеризації необхідно виконати семантичний аналіз кожного тексту вхідної множини. Для кожного тексту мають бути виконані наступні етапи аналізу:

- 1) Токенізація (виділення лексем, структуризація тексту на речення та абзаци).
- 2) Морфологічний аналіз (визначення нормальної форми слів та їх морфологічних характеристик).
- 3) Синтаксичний аналіз (побудова дерев синтаксичного виведення речень тексту).
- 4) Семантичний аналіз (генерація семантичної мережі, що складається з вузлів-понять тексту та зв'язків-відношень між ними).

Після цього в системі виконується процедура порівняння семантичних мереж текстів. В одній кластер поміщаються тексти із подібними семантичними структурами. Критерій подібності може бути сформульований різним чином, наприклад:

- відносна кількість спільних вузлів-концептів більша ніж пороговий рівень, який фіксує що перетин множин понять двох текстів є значним відносно об'ємів обох документів;
- значна відносна кількість спільних вузлів-концептів які з'єднані в обох структурах тими самими зв'язками-відношеннями;
- наявність відносно великих ізоморфних або квазі-ізоморфних підграфів у семантичних мережах двох документів, де об'єм підграфів є незначно меншим від об'ємів семантичних мереж документів.

Коли критерій оцінки подібності зафіксовано, сама процедура кластеризації зазвичай реалізується алгоритмом центроїдів (K-means and K-medoids)[6, 7].

Серед переваг даного методу необхідно зазначити високу точність, достатню гнучкість та надійність роботи при обробці текстових

документів. Виконання всіх етапів лінгвістичного аналізу гарантують ефективне вирішення проблем омонімії, синонімії, анафори, метонімії та інших класичних задач комп'ютерної лінгвістики.

Однак потужність даного підходу, що обумовлена використанням великих лінгвістичних онтологічних баз знань, нажалю, обмежується обсягами їх даних по мові та предметним областям. Окрім того наявність людського фактору при складанні баз не гарантує відсутності помилок, які негативно впливають на якість роботи системи.

Необхідність виконання всіх етапів лінгвістичного аналізу зумовлює відповідне зростання алгоритмічної складності семантичного методу обробки текстів. Але треба зазначити, що для розв'язання певних задач комп'ютерної лінгвістики немає потреби застосовувати повний потужний цикл аналізу тексту, а доцільно виконувати спрощені процедури розбору тексту, які мають значно меншу алгоритмічну складність та при цьому якість результатів майже не погіршується.

Також заслуговує окремої уваги вибір критерію подібності семантичних структур текстів. Якщо перший та другий із запропонованих варіантів за обчисленням є простими рішеннями, то третій є нР-повним через необхідність пошуку ізоморфних або квазі-ізоморфних підграфів у двох семантичних мережах. Тому ефективність роботи алгоритму напівпрям буде залежати від того, наскільки адало буде підібрана евристична пошуку ізоморфних підграфів.

Кластеризація текстів методом латентного семантичного аналізу

Формально, для заданого набору з m текстових документів метою кластеризації за темами є знаходження такого поділу документів на групи, щоб документи з одного кластеру мали спільну тему. Важливо відзначити, що список тем, не є відомим до початку процесу кластеризації. Таким чином, цей процес може бути розцінений як автоматична категоризація документів та виділення тем із них.

Традиційні методи кластеризації документів часто засновані на векторно-частотній моделі (Vector Space Mode - VSM). В цій моделі документ представляється як вектор частот слів. Нехай $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ - набір слів з усіх

документів. Тоді частотний вектор X_i документа d_i формується як $X_i = \{x_{i1}, \dots, x_{in}\}$, причому $x_{ij} = f_{ij} \log \frac{m}{c_j}$, де f_{ij} позначає частоту терміну t_j у документі d_i . Кількість документів в яких присутній терм t_j , позначається як c_j .

Таким чином, VSM використовує слова, як міру схожості документів. Після введення такої моделі очевидним чином визначаються метрики на частотних векторах, наприклад: косинусна відстань або Евклідова метрика. Таким чином, завдяки представленням документів у термінах лінійної алгебри, до них можуть бути застосовані традиційні методи кластеризації.

Одним з основних недоліків VSM, є припущення, що слова є статистично незалежними між собою. Однак, це часто не виконується для реальних текстів. Теми, концепції та семантика є ключовими ознаками документу. Для отримання таких особливостей з текстів були розроблені спеціальні методи, відомі під загальною назвою "виділення ознак" (feature extraction). Метою таких методів є виділення основних концепцій (або тем) текстів, та представлення документів у вигляді їх комбінацій. Ці методи успішно застосовуються у задачах обробки природномовних текстів, таких як кластеризація документів, знаходження семантичної відстані та багато інших.

Матричні розклади, такі як сингулярний розклад матриці (відомий під назвою «латентний семантичний аналіз») або невід'ємний матричний розклад (невід'ємна матрична факторизація, NMF), використовуються в якості основи даних методів.

Загалом, NMF є розкладом (або факторизацією) матриці V в добуток двох матриць W і H . Причому, на елементи матриць V , W та H накладаються додаткове обмеження невід'ємності. Потрібно зазначити, що такий розклад не є обов'язково унікальним і матриці W та H не повинні бути ортогональними.

Ця факторизація матриць стала популярною після публікації статті Лі та Суна [8]. В цій роботі було запропоновано два алгоритми побудови невід'ємного розкладу матриці.

В цій статті використовується оригінальний метод Лі і Суна, ще відомий під назвою «мультипликативні правила оновлення». В якості цільової функції використовується норма Фробеніуса.

У області обробки природномовних текстів NMF зазвичай застосовується до TD-матриці. Кожен рядок матриці TD відповідає одному документу, а кожен стовпець матриці відповідає одному слову. Якщо задано m документів і загальна кількість слів у них рівна n , то розмір TD матриці V рівний m на n . NMF використовується для розкладу матриці V у добуток двох матриць W і H з розмірами m на k і k на n відповідно, де зазвичай $k \ll \min(m, n)$. Наприклад, k може бути встановлено в значення очікуваної кількості кластерів. Часто параметр k називають - «кількість ознак».

Інтуїтивно, параметр k може бути пояснений наступним чином: TD матриця V («документи на слова») розкладається у добуток двох матриць. Матриця W пов'язує «документи» і «ознаки», а матриця H пов'язує «ознаки» і «слова». Тому, як впливає з властивостей добутку матриць, кожен документ представляється у вигляді лінійної комбінації виділених ознак. Після цього, традиційні методи кластеризації можуть бути застосовані до рядків матриці W .

В цілому повний процес кластеризації виглядає наступним чином:

1. Побудувати TD-матрицю V
2. Нормалізувати стовпці матриці V
3. Застосувати NMF: $V = WH$
4. Побудувати кластеризацію на основі матриць W і H

NMF, як засіб обробки природної мови, має кілька переваг над іншими методами виділення ознак. По-перше, матриці W і H мають тільки невід'ємні елементи, що робить процес їх інтерпретації у термінах обробки природної мови простішим і більш інтуїтивним. По-друге, стовпці W не повинні бути ортогональними, а отже виділені теми можуть мати спільні риси, що є досить звичайним для реальних документів.

Алгоритм NMF

Наведемо алгоритм NMF, що був запропонований Лі та Сунюм. У якості цільової функції використовується норма Фробеніуса, що записується так:

$$\min_{W, H} \|V - WH\|_F^2 \quad (1),$$

причому елементи матриць W та H повинні бути невід'ємними.

Для такої цільової функції, та для двох початкових матриць W_0 і H_0 , NMF алгоритм складається з ітераційного виконання двох кроків:

$$1. (H_k)_{i,j} = (H_{k-1})_{i,j} \times \frac{(W_{k-1}^T V)_{i,j}}{(W_{k-1}^T W_{k-1} H_{k-1})_{i,j}} \quad (2),$$

$$2. (W_k)_{i,j} = (W_{k-1})_{i,j} \times \frac{(V H_{k-1}^T)_{i,j}}{(W_{k-1} H_{k-1} H_{k-1}^T)_{i,j}} \quad (3),$$

На практиці, кроки алгоритму повторюються доки не буде досягнута нерухома точка або не буде виконана максимальна кількість ітерацій. Лі та Сун довели дві основні властивості цього алгоритму: по-перше, цільова функція є монотонно спадною під час застосування правил, по-друге, матриці W і H стають постійними, тільки у випадку досягнення стаціонарної точки цільової функції. Крім того, важливо зазначити, що цей метод знаходить тільки локальні мінімуми, а не глобальні. Також, важливо ще раз зазначити, що такий розклад не є унікальним.

Розглянемо ще один варіант реалізації цього підходу. Взагалі, латентний семантичний аналіз LSA базується на ідеї двофакторного аналізу, який застосовується у випадку, коли є два різні типи набори випадкових величин (властивостей), які представляються один через інший. Тобто документи - це випадкові величини, що розподілені у просторі слів-термів, а слова-терми - у просторі документів.

Вважається, що два терми семантично схожі, якщо їх потрапляння у різні документи корелюються. Аналогічно, два документи семантично схожі або, інакше кажучи, належать до однієї тематики, якщо їх набори термів корелюються. Даний підхід значно кращий за стандартну косинусну міру між вектор-документами, яка не може врахувати випадковий характер розподілу термів у документах і семантичну схожість термів.

LSA використовує сингулярний розклад (Singular Value Decomposition, SVD)[9] матриці терми-документи для відображення терм-векторів і документ-векторів у прихований «тематичний» простір меншої розмірності, ніж ранг матриці терми-документи. Взагалі, даний прихований простір не має чіткої інтерпретації, він відображає приховані параметри, від яких

залежить розподіл термів у документах. Але можна з деякими обмовками вважати його простором тем. Тож, декомпозиція має наступний вигляд:

$$A = T \times S \times D^T \quad (4),$$

(t × d) (t × m) (m × m) (m × d)

де знизу підписано розмірність матриць: t – кількість термів, d – кількість документів, m – кількість прихованих просторів(тем). A – матриця терми-документи, T – представлення термів у прихованому просторі, S – матриця сингулярних значень, має діагональний вигляд, відповідає за необхідні перемасштабування вимірів, D – представлення документів у прихованому просторі.

Для визначення семантичної схожості текстів з вихідної колекції потрібно обчислити DS^2D^T . Для визначення схожості документів, що не представлені в колекції, потрібно спочатку отримати представлення нового документу q. Спочатку документ розбивається на терми, і обраховується центроїд відповідних терм-векторів з матриці $A = A_q$, потім обчислюється представлення цього тексту у прихованому просторі документів (структурно – рядок матриці D):

$$D_q = A_q TS^{-1} \quad (5)$$

Тепер цей вектор можна порівняти з іншими векторами матриці D, або з представленням іншого документу, якого немає в колекції.

Хоча LSA не дає чіткого представлення тем (на відміну від Latent Dirichlet Allocation – LDA[10]), він дає змогу обробляти документи малого розміру (LDA в цьому випадку може схити через обмаль статистичної інформації). Додатковими методами обробки отриманих в результаті декомпозиції матриць (наборів векторів) можна отримати текстуальне представлення тематик (перелік найвагоміших слів). Це можна зробити в результаті кластеризації документів вихідної колекції на основі їх семантичної схожості (відстаней), наприклад, різними варіантами методу k-Medoids. Тоді можна говорити про міру належності нового документу до певного

кластеру, як про міру належності до певної тематики.

Методи LSA є найкращими для виявлення латентних залежностей усередині множини текстів. Вони можуть бути застосованими як з навчанням, так і без навчання. Окрім усіх очевидних переваг даного напрямку в методах латентного семантичного аналізу існують також і деякі недоліки. Проблеми полісемії та омонімії вирішуються лише частково. При збільшенні обсягу вхідних даних відбувається значне зниження швидкості обчислення.

Висновки

Прованалізувавши два найпотужніші підходи в області аналізу та інтелектуальної обробки текстів природною мовою, можна зробити висновок, що дуже перспективними мають бути ті дослідження в комп'ютерній лінгвістиці, в яких застосовуються методи обох напрямів. В такому випадку переваги цих методів взаємно компенсують їх недоліки.

Використання елементів експліцитного семантичного аналізу в алгоритмах LSA може значно підвищити точність обробки текстів за рахунок ефективного вирішення проблем омонімії, метонімії, анафори та інших лінгвістичних неоднозначностей.

Методи латентного семантичного аналізу (LSA) за допомогою частотної статистичної обробки ефективно виявляють приховані залежності між лексичними одиницями всередині текстових корпусів. Тому вони можуть успішно використовуватися в системах автоматизованої побудови та наповнення онтологічних семантичних баз знань для пошуку нових концептів-понять та знаходження семантичних зв'язків-відношень між вузлами-концептами у корпусах текстів, які складаються для навчання онтологій.

Список використаних джерел

1. Marvin Minsky A framework for representing knowledge [Електронний ресурс] / Marvin Minsky // MIT AI Laboratory Memo 306. – June, 1974. – Електронна адреса статті: <http://web.media.mit.edu/~minsky/papers/Frames/frames.html>.
2. N. D. Roussopoulos A semantic network model of data bases/ N. D. Roussopoulos. — Department of Computer Science, University of Toronto. – TR No 104. – 1976.
3. Sergei Nirenburg and Victor Raskin Ontological Semantics/Sergei Nirenburg, Victor Raskin. – Cambridge: The MIT Press, 2004. – 442 с.
4. А.В. Анисимов, А.А. Марченко Система обработки текстов на естественном языке/ А.В. Анисимов, А.А. Марченко// Искусственный интеллект. – №4. – 2002. – С. 157-163.
5. А.В. Анисимов, А.А. Марченко, А.О. Никоненко Алгоритмічна модель асоціативно-семантичного контекстного аналізу текстів природною мовою/ А.В. Анисимов, А.А. Марченко, А.О. Никоненко// Проблеми програмування. – № 2-3. – 2008. – С.379-384.
6. Steinhilber H. Sur la division des corps matériels en parties / Steinhilber H. // Bull. Acad. Polon. Sci. – 1956. – Cl. III vol IV. – С. 801—804.
7. Stuart Lloyd Least square quantization in PCM's. [Електронний ресурс] / Stuart Lloyd // IEEE Transactions on Information Theory. – vol. IT-28. – № 2. – 1982. – Електронна адреса статті: http://www.nt.tuwien.ac.at/fileadmin/courses/389075/Least_Squares_Quantization_in_PCM.pdf
8. D.D. Lee and H. S. Seung Algorithms for Non-Negative Matrix Factorization [Електронний ресурс] /D.D. Lee and H. S. Seung // NIPS. – 2000. – Електронна адреса статті: <http://hebb.mit.edu/people/seung/papers/nmfconverge.pdf>.
9. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery Singular Value Decomposition [Електронний ресурс] / William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery. // Numerical Recipes in C. — 2nd edition. — Cambridge: Cambridge University Press. – 1988-1992. – Електронна адреса статті: <http://www.haoli.org/nr/bookcpdf/c2-6.pdf>
10. David M. Blei, Andrew Y. Ng, Michael I. Jordan Latent Dirichlet Allocation [Електронний ресурс] / D.M.Blei, A.Y.Ng, M.I.Jordan// JMLR. – 3(Jan): 993–1022. – 2003. – Електронна адреса статті:<http://jmlr.csail.mit.edu/papers/volume3/blei03a/blei03a.pdf>.

Надійшла до редколегії 17.06.2012

Машченко С.О., д. ф.-м. н., доц.

Рівноваги в загальних іграх з нечіткою множиною цілей гравців

Розглядається загальна гра, в якій ціль кожного гравця задана нечіткою множиною чітких відношень переваги. Для її формалізації використовується операція об'єднання нечіткої множини чітких відношень, результатом якої є нечітке відношення типу 2. Уведено поняття нечіткої рівноваги. Досліджені її властивості.

Ключові слова: рівновага за Нешем, нечітке відношення типу 2, нечітка множина, прийняття рішень, нечітка інформація.

Mashchenko S.O., D. Sci (Phys-Math.), Ass. Prof.

Equilibriums in general games with the fuzzy set of players purposes

The general game in which the purpose of every player is set by the fuzzy set of clear preference relations is considered. For its formalization the operation of union of clear relations fuzzy set is used. The fuzzy relation of type 2 is its result. The offered notion of the fuzzy equilibrium. The explored its properties.

Keywords: Nesh's equilibrium, the fuzzy relation of type 2, the fuzzy set, a decision making, the fuzzy information.

E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Загальні ігри, що задані відношеннями переваги гравців, є узагальненням ігор, в яких цілі гравців описуються функціями їх виграшу. З одного боку, таке узагальнення дозволяє аналізувати конфліктні ситуації у разі неможливості побудови функцій виграшу (корисності) гравців. З іншого боку, воно дозволяє глибше зрозуміти суть конфлікту, шляхи його розв'язання і принципи оптимальності, які використовуються.

У багатьох реальних конфліктах процес прийняття рішень може бути ускладнений тим, що кожен гравець може порівнювати ситуації гри не за одним відношенням переваги, а за деякою сукупністю таких відношень, які будемо називати критеріальними. Більше того, може бути так, що на момент гри гравець не може чітко вказати, які саме з критеріальних відношень переваги характеризують його ціль, а задан лише задати їхню деяку підмножину.

У цій роботі розглядається загальна гра, в якій ціль кожного гравця задана нечіткою множиною чітких відношень переваги.

Нехай $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина з n гравців, X_i - множина стратегій гравця $i \in N$. Гравець $i \in N$ може порівняти будь-яку пару ситуацій x, y з множини ситуацій $X = \prod_{i \in N} X_i$ евклідового простору E за критеріальними відношеннями переваги: $R_j^i \subseteq X \times X$, $j \in L_i$, де $L_i = \{1, 2, \dots, l_i\}$ - множина їх індексів, l_i - їх кількість. Ці

відношення переваги можна розуміти як певні критерії, за якими гравець порівнює ситуації гри з точки зору досягнення своєї цілі. Гравці, вибираючи свої стратегії, прагнуть того, що б склалася наскільки можливо більш переважна для кожного ситуація гри за усіма критеріальними відношеннями переваги. Відношення переваги $R_j^i, j \in L_i, i \in N$, в цій роботі розглядаються у досить широкому сенсі, як нестрогі впорядкування, тобто бінарні повні відношення, які використовуються для цільової орієнтації гравця.

Якщо б кожен гравець $i \in N$ чітко узяв собі, що його ціль полягає у виборі стратегії, яка утворить "найкращу" ситуацію саме за множиною L_i відношень переваги (критеріїв)

R_j^i , то ми б одержали вже відому [1] загальну багатоцільову гру в нормальній формі $(X_i, \{R_j^i\}_{j \in L_i}; i \in N)$. Розв'язання цієї гри

засноване на її зведенні до класичної загальної гри G у нормальній формі $(X_i, R_i; i \in N)$ шляхом агрегації критеріальних відношень переваги $\{R_j^i\}_{j \in L_i}$ гравця $i \in N$ в агреговане відношення переваги R_i одним із двох способів: об'єднанням

критеріальних відношень переваги $R_i = \bigcup_{j \in L_i} R_j^i$

або їх перетином $Q_i = \bigcap_{j \in L_i} R_j^i$. Вибраний спосіб

агрегації критеріальних відношень переваги визначає властивості та методи знаходження

рівноваги гри G . Як показано в [2], найбільш конструктивний спосіб відповісти на запитання про існування гри G полягає в тому, щоб показати, що для кожного $i \in N$ існує стратегія σ_i гравця i , яка гарантує йому певну вигоду. Якщо це так, то гра G має рівновагу.

Іноді гравці $i \in N$ не можуть чітко вказати, які критеріальні відношення переваги $R'_i, j \in L_i$, характеризують їхню ціль, але можуть задати деяку нечітку підмножину $\tilde{L}_i \subseteq L_i$ цих відношень. У цьому випадку виникає гра в нормальній формі $(X, (R'_i)_{i \in N}; i \in N)$ з нечіткими множинами цілей (індексів критеріальних відношень переваги) гравців $\tilde{L}_i, i \in N$.

Позначимо $\eta_i: L_i \rightarrow [0,1]$ функцію належності нечіткої підмножини $\tilde{L}_i$ відношень переваги $R'_i, j \in L_i$, які характеризують ціль гравця $i \in N$. Тоді загалом його ціль може бути заданою об'єднанням $\tilde{R}_i = \bigcup_{j \in L_i} R'_i$ нечіткої множини $\tilde{L}_i$ чітких відношень $R'_i, j \in L_i$. Згідно з [3] це відношення є нечітким відношенням типу 2, тобто значення його функції належності утворюють нечіткі множини.

Таким чином, перед нами постає задача знаходження рівноваги гри $\tilde{G}$ у нормальній формі $(X, (\tilde{R}_i)_{i \in N})$ з цілями гравців, які задані нечіткими відношеннями типу 2 $\tilde{R}_i, i \in N$.

Нехай $r'_i: X \times X \rightarrow \{0,1\}$ - характеристична функція належності відношення R'_i (тобто $xR'_iy \Leftrightarrow r'_i(x,y)=1, \forall x,y \in X, j \in L_i, i \in N$).

Для ситуацій $x,y \in X$ та $i \in N$ позначимо:

$$\begin{aligned} I_i^{PO}(x,y) &= \{j \in L_i \mid \exists k \in L_i: \\ & (r'_i(x,y), \eta_i(k)) > (r'_i(x,y), \eta_i(j))\} \end{aligned} \quad (1)$$

- множину тих індексів критеріальних відношень переваги, які не покращуються зі збільшенням характеристичних функцій $r'_i(x,y)$ відношень $R'_i, j \in L_i$, та функції належності $\eta_i(j)$ нечіткої підмножини $\tilde{L}_i$;

$$\tilde{\eta}_i(x,y,j) = \begin{cases} \eta_i(j), & j \in I_i^{PO}(x,y), \\ 0, & j \notin I_i^{PO}(x,y), \end{cases} \quad (2)$$

- функцію належності нечіткої підмножини множини L_i з носієм $I_i^{PO}(x,y)$.

Об'єднанням нечіткої множини $\tilde{L}_i$ нечітких

відношень $R'_i, j \in L_i$, відповідно до [3] будемо називати $\tilde{R}_i = \bigcup_{j \in L_i} R'_i$ - нечітке відношення типу

2, яке визначене на множині X , та задається трійками $(x,y, \tilde{r}'_i(x,y,z))$, де

• $\tilde{r}'_i: X \times X \times Z \rightarrow [0,1]$ - нечітке відображення, яке виконує роль нечіткої функції належності та визначене таким чином:

$$\tilde{r}'_i(x,y,z) = \max_{j \in L_i} \{\eta_i(x,y,j) \mid r'_i(x,y) = z\}, \quad (3)$$

якщо $\exists j \in L_i: r'_i(x,y) = z$, та

$$\tilde{r}'_i(x,y,z) = 0 \quad (4)$$

у протилежному випадку;

• $x,y \in X$ - ситуації гри;

• z - елемент універсальної множини $Z = \{0,1\}$ значень відображення належності

$\tilde{r}'_i(x,y,z)$ нечіткого відношення $\tilde{R}_i$ типу 2.

Конструктивно побудувати функцію належності $\tilde{r}'_i(x,y,z)$ дозволяє наступна теорема.

Позначимо $K_i = \{k \in L_i \mid \eta_i(k) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)\}$.

Теорема 1. Нехай $R'_i, j \in L_i$, - чіткі відношення, які задані на множині X відповідними характеристичними функціями $r'_i(x,y), x,y \in X, j \in L_i; \eta_i(j), j \in L_i$, - функції належності нечіткої підмножини $\tilde{L}_i$. Для того, щоб нечітке відношення $\tilde{R}_i$ типу 2, яке задане функцією належності $\tilde{r}'_i(x,y,z): x,y \in X; z \in \{0,1\}$, було об'єднанням нечіткої множини $\tilde{L}_i$ відношень $R'_i, j \in L_i$, тобто, $\tilde{R}_i = \bigcup_{j \in L_i} R'_i$ необхідно й достатньо, щоб для $x,y \in X$:

$$\tilde{r}'_i(x,y,1) = \begin{cases} \max_{j \in L_i} \eta_i(j), & \exists j \in L_i: r'_i(x,y)=1, \\ 0, & r'_i(x,y)=0, \forall j \in L_i, \end{cases} \quad (5)$$

$$\tilde{r}'_i(x,y,0) = \begin{cases} \max_{j \in L_i} \eta_i(j), & r'_i(x,y)=0, \forall j \in K_i, \\ 0, & \exists j \in K_i: r'_i(x,y)=1, \end{cases}$$

Доведення. Для початку покажемо, що формули (3), (4) еквівалентні наступній:

$$\tilde{r}'_i(x,y,z) = \begin{cases} \max_{j \in I_i^{PO}(x,y,z)} \eta_i(j), & P_i^{PO}(x,y,z) \neq \emptyset, \\ 0, & P_i^{PO}(x,y,z) = \emptyset, \end{cases} \quad (6)$$

де для $\forall x, y \in X \quad \forall z \in \{0, 1\}$

$$P_i^{PO}(x, y, z) = \{j \in L_i \mid z = r_i^j(x, y) = \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y), \eta(j) = \max_{r_i^k(x, y) \geq r_i^j(x, y)} \eta(k)\}. \quad (7)$$

Визначимо, що з (2)-(4) випливає, що $\tilde{r}_i^j(x, y, z) =$

$$= \begin{cases} \max_{j \in L_i^{PO}(x, y)} \{\eta(j) \mid r_i^j(x, y) = z\}, & r_i^j(x, y) = z, \\ 0, & r_i^j(x, y) \neq z, \end{cases} \quad (8)$$

$x, y \in X, \quad z \in \{0, 1\}$. Тому, для доведення еквівалентності (3), (4) та (6) достатньо показати, що (8) еквівалентно (6), (7). Отож, покажемо, що

$$L_i^{PO}(x, y) = \{j \in L_i \mid r_i^j(x, y) = \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y), \eta(j) = \max_{r_i^k(x, y) \geq r_i^j(x, y)} \eta(k)\}, x, y \in X. \quad (9)$$

Нехай для $x, y \in X, \quad j \in L_i$, виконується наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} r_i^j(x, y) &= \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y), \\ \eta(j) &= \max_{r_i^k(x, y) \geq r_i^j(x, y)} \eta(k). \end{aligned} \quad (10)$$

Припустимо супротивне, що $j \notin L_i^{PO}(x, y)$. Тоді згідно (1) $\exists l \in L_i$, для якого справедливі нерівності: або $r_i^j(x, y) > r_i^l(x, y), \eta(l) \geq \eta(j)$, або $r_i^j(x, y) \geq r_i^l(x, y), \eta(l) > \eta(j)$.

У першому випадку, звідси випливає, що $r_i^j(x, y) > \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y)$. У другому випадку, одержимо $\eta(l) > \max_{r_i^k(x, y) \geq r_i^j(x, y)} \eta(k)$. В обох

випадках получасмо суперечність з (10).

Нехай $j \in L_i^{PO}(x, y)$. Припустимо супротивне, що справедливе $r_i^j(x, y) < \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y)$ або $\eta(j) < \max_{r_i^k(x, y) \geq r_i^j(x, y)} \eta(k)$.

У першому випадку робимо висновок, що $\exists l \in L_i$, для якого $\eta(l) \geq \eta(j), r_i^l(x, y) > r_i^j(x, y)$.

Тоді $(r_i^j(x, y), \eta(j)) > (r_i^l(x, y), \eta(l))$ і за (1) $j \in L_i^{PO}(x, y)$. Аналогічно у другому випадку,

$\exists k \in L_i$, що $r_i^k(x, y) > r_i^j(x, y), \eta(k) \geq \eta(j)$. Тоді $(r_i^k(x, y), \eta(k)) > (r_i^j(x, y), \eta(j))$ і за (1) $j \in L_i^{PO}(x, y)$. Таким чином, отримали

суперечність і має місце (9). Звідси випливає $P_i^{PO}(x, y, z) = L_i^{PO}(x, y) \cup \{j \in L_i \mid r_i^j(x, y) = z\}$.

Тоді формула (8) еквівалентна (6), (7), а тому формули (3), (4) та (6) є еквівалентними.

Тепер для доведення теореми достатньо показати еквівалентність (5) та (6).

Для початку запишемо (7) для $z=1$ у двох можливих випадках. Спочатку нехай $r_i^j(x, y) = 0, \forall j \in L_i$. Тоді за (5) $\tilde{r}_i^j(x, y, 1) = 0$. З іншого боку, з (7) випливає, що $P_i^{PO}(x, y, 1) = \emptyset$ і тоді за (6) $\tilde{r}_i^j(x, y, 1) = 0$.

У другому випадку, нехай $\exists j \in L_i : r_i^j(x, y) = 1$.

Визначимо за (6) значення $\tilde{r}_i^j(x, y, 1)$. Для цього відповідно до (7) побудуємо множину:

$$P_i^{PO}(x, y, 1) = \{j \in L_i \mid 1 = r_i^j(x, y) = \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y), \eta(j) = \max_{r_i^k(x, y) \geq r_i^j(x, y)} \eta(k)\}.$$

Покажемо, що виконується $L_i^{PO}(x, y, 1) = \text{Arg} \max_{r_i^j(x, y) = 1} \eta(j)$. Позначимо через

$$\eta_i^*(x, y) = \max_{r_i^j(x, y) = 1} \eta(j).$$

Якщо $j \in \text{Arg} \max_{r_i^j(x, y) = 1} \eta(j)$, то $\eta(j) = \eta_i^*(x, y)$ та $\max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y) =$

$$= \max\left\{\max_{\eta(l) \geq \eta_i^*(x, y)} r_i^l(x, y), \max_{\eta(l) > \eta_i^*(x, y)} r_i^l(x, y)\right\} = \max\{1, \max_{\eta(l) > \eta_i^*(x, y)} r_i^l(x, y)\} = 1 = r_i^j(x, y).$$

Звідси очевидно, що $j \in P_i^{PO}(x, y, 1)$.

Тепер навпаки, нехай $j \in P_i^{PO}(x, y, 1)$. Тоді $1 = r_i^j(x, y) = \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y)$ та $\eta(j) = \eta_i^*(x, y)$.

Звідси $j \in \text{Arg} \max_{r_i^j(x, y) = 1} \eta(k)$, тоді за (6)

$\tilde{r}_i^j(x, y, 1) = \eta_i^*$, а тому формули (5), (6) є еквівалентними для $z=1$. Далі запишемо (7) для $z=0$ у двох можливих випадках. Позначимо $\eta_0^* = \max_{j \in L_i} \eta(j)$. Нагадаємо, що множина $K_i = \{k \in L_i \mid \eta(k) = \max_{j \in L_i} \eta(j)\}$. Спочатку нехай

$r_i^j(x, y) = 0, \forall j \in K_i$. Тоді за (5) $\tilde{r}_i^j(x, y, 0) = \eta_0^*$.

Визначимо значення $\tilde{r}_i^j(x, y, 0)$ за формулою (6).

Для цього побудуємо за (7) множину: $P_i^{PO}(x, y, 0) = \{j \in L_i \mid 0 = r_i^j(x, y) = \max_{\eta(k) \geq \eta(j)} r_i^k(x, y), \eta(j) = \max_{r_i^k(x, y) \geq r_i^j(x, y)} \eta(k)\}$.

Тоді $\eta(j) = \max_{k \in K_i} \eta(k) = \eta_0^*$ і $0 = r_i^j(x, y) =$

$$= \max_{k \in K_i} r_i^k(x, y) = 0. \quad \text{Звідси за (6) } \tilde{r}_i^j(x, y, 0) = \eta_0^*.$$

У другому випадку, нехай $\exists j \in K_i : r_i^j(x, y) = 1$. Тоді за (5) $\bar{r}_i(x, y, 0) = 0$. Визначимо значення $\bar{r}_i(x, y, 0)$ згідно з (6). Для цього за (7) побудуємо множину $P_i^{PO}(x, y, 0) = \{j \in L_i \mid 0 = r_i^j(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n_i(j)} r_i^k(x, y), \eta_i(j) = \max_{k \in L_i} \eta_i(k) = \eta_i^*\} = \{j \in K_i \mid 0 = r_i^j(x, y) = \max_{k \in K_i} r_i^k(x, y) = 1\} = \emptyset$. Звідси за формулою (6) $\bar{r}_i(x, y, 0) = 0$, а тому формули (5), (6) є еквівалентними для $z = 0$. Теорему доведено.

Перейдемо до формалізації поняття нечіткої рівноваги гри $\tilde{G}$ у нормальній формі $(X_i, \bar{R}_i; i \in N)$ з цілями гравців, які задані нечіткими відношеннями типу 2. Для цього узагальнимо на цей випадок поняття рівноваги за Нешем [1] загальної гри G в нормальній формі $(X_i, R_i; i \in N)$ з цілями гравців, що задані звичайними відношеннями переваги.

Нагадаємо, що за [1] NE - множина рівноваг за Нешем загальної гри G представляється у вигляді $NE = \bigcap_{i \in N} BR_i$, де

$$BR_i = \{x \in X \mid (y_i, x_{N \setminus i}) \bar{P}_i x, \forall y_i \in X_i, i \in N,$$

а $P_i = R_i \setminus R_i^{-1}$ - асиметрична частина R_i , $i \in N$. Відмітимо, що тут використовується загальноприйняте в теорії ігор позначення вектора $x_{N \setminus i} = (x_j)_{j \in N \setminus \{i\}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Нехай $\bar{R}_i$ - нечіткі відношення переваги гравця $i \in N$ (як показано вище типу 2), яке задається нечітким відображенням з функцією належності $\bar{r}_i(x, y, z)$, $x, y \in X$, $z \in [0, 1]$. Побудуємо для гравця $i \in N$ нечітку множину (позначимо її ND_i) ситуацій x , які не домінуються за відношенням $S_i = \bar{R}_i \setminus \bar{R}_i^{-1}$ (яке є асиметричною частиною $\bar{R}_i$) іншими ситуаціями $(y_i, x_{N \setminus i})$, що отримані з ситуації x зміною цим гравцем своєї стратегії x_i на іншу $y_i \in X_i$, тобто $ND_i = \{x \in X \mid (y_i, x_{N \setminus i}) \bar{S}_i x, \forall y_i \in X_i\}$.

Відображення належності нечіткого відношення типу 2 $S_i = \bar{R}_i \setminus \bar{R}_i^{-1} = \bar{R}_i \cap \bar{R}_i^{-1}$, яке буде асиметричною частиною відношення переваги $\bar{R}_i$, відповідно до операцій над нечіткими множинами типу 2, задається функцією

$$s_i(x, y, z) = \max_{\substack{z_1, z_2 \in [0, 1], \\ z = \min\{z_1, z_2\}}} \min\{\bar{r}_i(x, y, z_1), \bar{r}_i(y, x, 1 - z_2)\}.$$

Виразимо $s_i(x, y, 0) = \max\{\min\{\bar{r}_i(x, y, 0), \bar{r}_i(y, x, 1)\}, \min\{\bar{r}_i(x, y, 0), \bar{r}_i(y, x, 0)\}, \min\{\bar{r}_i(x, y, 1), \bar{r}_i(y, x, 1)\}\}$ у термінах критеріальних відношень переваги гравця $i \in N$ за допомогою формул (5). Для цього розглянемо наступні випадки.

Припустимо, що $r_i^j(x, y) = 0$, $\forall j \in L_i$. Тоді в силу повноти критеріальних відношень переваги гравців R_i^j , $j \in L_i$, одержимо $r_i^j(y, x) = 1$, $\forall j \in L_i$. Звідси за (5) $\bar{r}_i(x, y, 0) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)$, $\bar{r}_i(x, y, 1) = 0$, $\bar{r}_i(y, x, 0) = 0$, $\bar{r}_i(y, x, 1) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)$. Тому $s_i(x, y, 0) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)$.

Припустимо, що $r_i^j(y, x) = 0$, $\forall j \in L_i$. Тоді в силу повноти критеріальних відношень переваги гравців R_i^j , $j \in L_i$, одержимо $r_i^j(x, y) = 1$, $\forall j \in L_i$. Звідси за (5) $\bar{r}_i(x, y, 1) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)$, $\bar{r}_i(x, y, 0) = 0$, $\bar{r}_i(y, x, 1) = 0$, $\bar{r}_i(y, x, 0) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)$. Тому $s_i(x, y, 0) = 0$.

Припустимо, що $\exists j \in L_i : r_i^j(x, y) = 1$ та $\exists k \in L_i : r_i^k(y, x) = 1$. Тоді цілком зрозуміло, що $\bar{r}_i(x, y, 1) = \max\{\eta_i(j) \mid j \in L_i, r_i^j(x, y) = 1\}$ і також $\bar{r}_i(y, x, 1) = \max\{\eta_i(k) \mid k \in L_i, r_i^k(y, x) = 1\}$. Нагадаємо позначення $K_i = \{k \in L_i \mid \eta_i(k) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)\}$ та розглянемо наступні випадки.

У першому випадку, нехай $r_i^j(y, x) = 0$, $\forall j \in K_i$. Тоді в силу повноти критеріальних відношень переваги гравців R_i^j , $j \in L_i$, одержимо $r_i^j(x, y) = 1$, $\forall j \in K_i$. Тому $\bar{r}_i(x, y, 0) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)$, $\bar{r}_i(y, x, 0) = 0$. Звідси маємо $s_i(x, y, 0) = \max\{\max_{\substack{j \in (j, x) = 1}} \eta_i(k), 0, \min\{\max_{\substack{j \in (x, j) = 1}} \eta_i(j), \max_{\substack{j \in (j, x) = 1}} \eta_i(k)\}\}$. Оскільки $\max\{a, \min\{a, b\}\} = a$, то остаточно вийде $s_i(x, y, 0) = \max_{\substack{j \in (j, x) = 1}} \eta_i(k)$.

У другому випадку, нехай $r_i^j(x, y) = 0$, $\forall j \in K_i$. Тоді в силу повноти критеріальних відношень переваги гравців R_i^j , $j \in L_i$, маємо $r_i^j(y, x) = 1$, $\forall j \in K_i$. Тому $\bar{r}_i(y, x, 0) = \max_{j \in L_i} \eta_i(j)$, $\bar{r}_i(x, y, 0) = 0$. Тоді вийде $s_i(x, y, 0) = \max\{0, 0,$

$\min\{\max_{i \in I, j \in J} \eta_i(k), \max_{i \in I, j \in J} \eta_j(j)\}$. Оскільки має місце $r_i^*(y, x) = 1, \forall j \in K_i$, то $\max_{i \in I, j \in J} \eta_i(k) \geq \max_{i \in I, j \in J} \eta_j(j)$. Тому $s_i(x, y, 0) = \max_{i \in I, j \in J} \eta_i(k)$.

У третьому випадку, нехай $\exists j \in K_i$: $r_i^*(x, y) = 1$ та $\exists k \in K_j$: $r_j^*(y, x) = 1$. Тоді $\tilde{r}_i(y, x, 0) = 0, \tilde{r}_j(x, y, 0) = 0$. Тому $s_i(x, y, 0) = \max\{0, \min\{\max_{i \in I, j \in J} \eta_i(j), \max_{i \in I, j \in J} \eta_j(k)\}\}$.

Оскільки за умовою $\exists j \in K_i$, для якого $r_i^*(x, y) = 1$, то $\max_{i \in I, j \in J} \eta_i(k) = \max\{\eta_j(j) | j \in L_i\}$.

Тому $s_i(x, y, 0) = \max_{i \in I, j \in J} \eta_i(k)$.

З розглянутих вище випадків очевидно, що

$$s_i(x, y, 0) = \begin{cases} \max_{i \in I, j \in J} \eta_i(j), & \exists j \in L_i: r_i^*(y, x) = 1, \\ 0, & r_i^*(y, x) = 0, \forall j \in L_i. \end{cases} \quad (11)$$

Логічно було б визначити множину ND , виходячи з таких міркувань.

Оскільки величина $s_i(x, y, 0)$ є ступінь, з якою ситуація y не домінується x , то при фіксованій змінній $y \in X$ функцію $s_i(y, x, 0)$ можна вважати функцією належності нечіткої множини всіх ситуацій x , які не домінуються ситуацією y . Звідси випливає, що підмножина ситуацій, кожна з яких не домінується жодною з ситуацій множини X , може бути заданою функцією належності $\min_{j \in J} s_j(y, x, 0), x \in X$. Таким чином,

отримавмо, що нечітка множина ND , задаватиметься функцією належності $\mu_i: X \rightarrow [0, 1]$ такого вигляду

$$\mu_i(x) = \min_{j \in J, i} s_j((y_i, x_{N_i}), x, 0), x \in X. \quad (12)$$

Значення $\mu_i(x)$ можна розуміти як "ступінь недомінованості" ситуації $x \in X$ для гравця $i \in N$ жодною іншою (y_i, x_{N_i}) , яка отримана іншою ним своєї стратегії x_i на іншу $y_i \in X_i$. Ідея множини $FE = \bigcap_{i \in N} ND_i$, яка складатиметься з ситуацій недомінованих за нечіткими відношеннями $S_i, i \in N$, приводить до наступного означення.

Нечітку множину з функцією належності

$\mu: X \rightarrow [0, 1]$ вигляду $\mu(x) = \min_{i \in N} \mu_i(x), x \in X$,

будемо називати множиною нечітких рівноваг гри $\tilde{G}$ і позначати FE . Множину $\text{supp}(FE) = \{x \in X | \mu(x) > 0\}$ назвемо носієм FE .

Встановимо зв'язок множин: FE - нечітких рівноваг гри $\tilde{G}$ та NE - рівноваг Неша гри G .

Теорема 2. Носій $\text{supp}(FE)$ множини нечітких рівноваг гри $\tilde{G}$ співпадає з множиною NE рівноваг за Нешем загальної гри G .

Доведення. Нехай $x \in NE$. Припустимо супротивне, що $x \notin \text{supp}(FE)$. Тоді за означенням $\exists i \in N: \mu_i(x) = 0$. Звідси за формулою (12) $\exists j \in X_i$, що $\min_{j \in J, i} s_j((y_i, x_{N_i}), x, 0) = 0$. Тому за (11)

$r_i^*(x, (y_i, x_{N_i})) = 0, \forall j \in L_i$. Тоді виконуються відношення $x\tilde{R}_i^*(y_i, x_{N_i}), \forall j \in L_i$. Звідси $x\tilde{R}_i(y_i, x_{N_i})$. Тому, в силу повноти відношення R_i , одержимо $(y_i, x_{N_i})P_i^*x$. Тоді $x \in BR_i$ і $x \in NE$. Маємо суперечність і $NE \subseteq \text{supp}(FE)$.

Нехай $x \in \text{supp}(FE)$. Припустимо супротивне, що $x \notin NE$. Тоді за означенням $\exists i \in N$, для якого $x \notin BR_i$. Це означає, що $\exists y_i \in X_i$, для якого $(y_i, x_{N_i})P_i^*x$. Тому $x\tilde{R}_i(y_i, x_{N_i})$. Звідси випливає, що $x\tilde{R}_i^*(y_i, x_{N_i}), \forall j \in L_i$, що означає $r_i^*(x, (y_i, x_{N_i})) = 0, \forall j \in L_i$. Звідси за формулою (11) $s_i((y_i, x_{N_i}), x) = 0$. Тому за (12) $\mu_i(x) = 0$. Тоді за означенням $x \notin \text{supp}(FE)$. Одержали суперечність. Таким чином, $\text{supp}(FE) \subseteq NE$, а тому і $\text{supp}(FE) = NE$. Теорему доведено.

Оскільки гравців, як правило, цікавить вибір якоїсь єдиної ситуації гри, яка могла б стати основою стабільної угоди між ними, то їм варто вибрати нечітку рівновагу x^* з максимальним ступенем недомінованості $\mu(x^*)$. Ці міркування приводять до наступного поняття.

Ситуацію $x^* \in X$ назвемо максимізуючою нечіткою рівновагою гри $\tilde{G}$, якщо $\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x)$.

Неважко перевірити, що для загальної гри $\tilde{G}$ завжди існує максимізуюча нечітка рівновага.

Дійсно, за означеннями $\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) = \max_{x \in X} \min_{i \in N} \min_{j \in J, i} s_j((y_i, x_{N_i}), x, 0)$.

З формули (11) нескладно побачити, що для

$\forall x \in X \quad \forall i \in N \quad \forall y_i \in X_i$ функція $s_i((y_i, x_{N \setminus i}), x, 0)$ приймає скінченну множину. Звідси випливає, що завжди існує $\max_{x \in X} \min_{i \in N} \min_{y_i \in X_i} s_i((y_i, x_{N \setminus i}), x, 0)$.

Слід відмітити, що хоча максимізуєча нечітка рівновага x^* існує завжди, але може бути так, що $\mu(x^*) = 0$. Тому розглянемо наступну теорему.

Теорема 3. Нехай $\eta_i(j) \neq 0, \forall i \in N$. Якщо ситуація x^* задовольняє умові

$$\mu(x^*) = \max_{x \in X} \min_{i \in N} \min_{y_i \in X_i} \max_{r_i^j((y_i, x_{N \setminus i}), x) = 1} \eta_i(j) \quad (13)$$

то вона є максимізуєчою нечіткою рівновагою гри $\tilde{G}$, причому $\mu(x^*) > 0$.

Якщо x^* є максимізуєчою нечіткою рівновагою гри $\tilde{G}$, то вона задовольняє (13).

Доведення. Розглянемо задачу

$$\mu(x) = \min_{i \in N} \min_{y_i \in X_i} \max_{r_i^j((y_i, x_{N \setminus i}), x) = 1} \eta_i(j). \quad (14)$$

Позначимо Q множину її розв'язків. Для доведення теореми достатньо показати $Q = \text{supp}(FE)$.

Нехай $x \in Q$, а значення i, y_i^*, j^* задовольняють (14). Покажемо, що $x \in NE$.

З (14) випливає, що $\eta_i(j^*) \geq \eta_i(j), \forall j \in M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i}))$, де $M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) = \{j \in L_i \mid r_i^j(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) = 1\}$. Причому

$$M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) \supseteq M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})), \quad (15)$$

$\forall x \in X, \forall k \in N, \forall y_k \in X_k$. Розглянемо випадки.

1. Припустимо $M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) = N$. Тоді $r_i^j(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) = 1$ для $\forall j \in L_i$. Оскільки $M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) \supseteq M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i}))$ для $\forall k \in N, \forall y_k \in X_k$, то $r_i^j(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) = 1$ для $\forall k \in N, \forall j \in L_i, \forall y_k \in X_k$. Тому $xR_k^j(y_k, x_{N \setminus k})$ для $\forall k \in N, \forall j \in L_i, \forall y_k \in X_k$. Звідси $xR_k(y_k, x_{N \setminus k})$ для $\forall k \in N, \forall y_k \in X_k$. Тоді, в силу повноти відношення $R_k = \bigcup_{j \in L_k} R_k^j$, одержимо $(y_k, x_{N \setminus k}) \bar{P}_k x$ для $\forall k \in N, \forall y_k \in X_k$. Звідси випливає, що $x \in BR_k$ для $\forall k \in N$, а тому $x \in NE$.

2. Нехай $M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) \subset N$. Припустимо супротивне, що $x \in NE$. Тоді $\exists k \in N: x \in BR_k$. Звідси $\exists y_k \in X_k: (y_k, x_{N \setminus k}) \bar{P}_k x$. В силу

асиметричності відношення $\bar{P}_k$, відношення переваги $R_k = \bar{P}_k^{-1}$, тому $x \bar{R}_k^j(y_k, x_{N \setminus k})$. Оскільки $R_k = \bigcup_{j \in L_k} R_k^j$, то $x \bar{R}_k^j(y_k, x_{N \setminus k})$ для $\forall j \in L_k$, тобто

$r_k^j(x, (y_k, x_{N \setminus k})) = 0, \forall j \in L_k$. Звідси одержимо $M_i(x, (y_i^*, x_{N \setminus i})) = \emptyset$, що суперечить (15). Тому $x \in NE$. Таким чином, $Q \subseteq NE$.

Нехай $x \in NE$. Покажемо, що $x \in Q$. Якщо $x \in NE$, то за означенням $x \in BR_k$ для $\forall k \in N$. Тому для $\forall k \in N, \forall y_k \in X_k$ має місце $(y_k, x_{N \setminus k}) \bar{P}_k x$. Звідси, в силу асиметричності відношення $\bar{P}_k$, відношення переваги $R_k = \bar{P}_k^{-1}$, тому $xR_k(y_k, x_{N \setminus k})$. Оскільки $R_k = \bigcup_{j \in L_k} R_k^j$, то

$\exists j \in L_k: xR_k^j(y_k, x_{N \setminus k})$, тобто для $\forall k \in N, \forall y_k \in X_k \exists j \in L_k: r_k^j(x, (y_k, x_{N \setminus k})) = 1$. Звідси за (11) $s_i(x, y, 0) = \max\{\eta_i(j) \mid r_i^j((y_i, x_{N \setminus i}), x) = 1\}$ для $\forall k \in N, \forall y_k \in X_k$. Таким чином, за означенням нечіткої рівноваги і формулою (14) получимо, що x задовольняє (14). Звідси $x \in Q$.

Таким чином, $Q \supseteq NE$, тому $Q = NE$. Тоді за теоремою 2 $Q = \text{supp}(FE)$. Теорему доведено.

У закінченні слід відмітити, що на відміну від класичних ігор з функціями виграшу гравців, у загальних іграх, які задані відношеннями переваги гравців, множина рівноваг за Нешем може бути достатньо "об'ємною". Тому виникає серйозна проблема вибору єдиної рівноваги, яка може бути успішно розв'язаною у рамках підходу, який був запропонованим в цій роботі.

Список використаних джерел

1. Кирута А.Я. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах (вероятностный подход) / Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б.; отв. ред. Н.Н. Воробьев. – Л.: Наука, 1980. – 167 с.
2. Машенко С.О. Багатоцілові ігри у відношеннях переваги гравців / С.О. Машенко // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4. – С. 135 – 140.
3. Машенко С.О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия / С.О. Машенко // Кибернетика и вычислительная техника. – 2010, вып. 159. – С. 19 – 29.

Надійшла до редколегії 19.04.12.

УДК 627.324.2/3-532.72

Мічута О.Р., аспірант,
Власюк А.П., д.т.н., професор,
Мартинюк П.М., к.ф.-м.н., доцент.**Математичне моделювання впливу
хімічної суфозії на фільтраційну
консолідацію засолених ґрунтів в
неізотермічних умовах в двовимірному
випадку**

Вдосконалено математичну модель
консолідації ґрунтів з урахуванням їх
засоленості та неізотермічних умов.
Використано кінематичну граничну умову на
верхній рухомій межі масиву засоленого ґрунту
з урахуванням хімічної суфозії. Чисельний
розв'язок відповідної двовимірної крайової
задачі знайдено безсітковим методом
радіальних базисних функцій. Проведено ряд
чисельних експериментів. Досліджено вплив
хімічної суфозії на розподіл надлишкових
напорів в засоленому масиві ґрунту та на
просідання верхньої межі ґрунту в
неізотермічних умовах.

Ключові слова: консолидація, хімічна суфозія,
неізотермічні умови, безсітковий метод
радіальних базисних функцій.

*E-mail: michuta@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ. Основна мета досліджень задачі
фільтраційної консолидації полягає у
прогнозуванні просідання верхньої межі ґрунту
під впливом прикладеного зовнішнього
навантаження або його (ґрунту) власної ваги.
Основи класичної теорії фільтраційної
консолідації ґрунтів викладено в роботах [16, 9].
В роботі [5] вперше звернули увагу на
можливість значного впливу переносу солей на
розподіл надлишкових напорів в масиві ґрунту,
який консолидується. В роботах [6, 8] дані
дослідження набули подальшого розвитку. Крім
того, було враховано вплив неізотермічних умов.
В роботах [1, 2] досліджено консолидацію ґрунтів
в умовах солепереносу з урахуванням
релаксационних ефектів.

Засоленість ґрунту ускладнює процес
будівництва, оскільки деформації споруд можуть
проявлятися як в процесі зведення будівель, так і

O.R. Michuta, PhD student,
O.R. Michuta, PhD student,
A.P. Vlasjuk, Doctor of science, prof.,
P.M. Martyniuk, PhD, assoc. prof.**Mathematical modeling of filtration
consolidation and chemical erosion of saline
soils in nonisothermal conditions in two-
dimensional case**

Mathematical model of consolidation of saline
soil in nonisothermal conditions has been improved.
Kinematic boundary condition for moving the top of
the array of saline soils including chemical erosion
has been used. The numerical solution of
corresponding two-dimensional boundary value
problems has been found by radial basis functions
method. The influence of chemical erosion on the
excess heads in array of saline soil in
nonisothermal conditions was explored.

Key words: consolidation, chemical erosion, non-
isothermal conditions, meshless method of radial
basis functions.

при їх експлуатації [11, 12, 15]. Це пояснюється,
тим що засолені ґрунти володіють специфічними
фізико-хімічними властивостями, які змінюються
в результаті зволоження, в процесі
виготовування солей та при зміні теплового
стану.

Якщо засолений ґрунт перебуває в стані
фільтраційної консолидації, то просідання ґрунту
можливе не лише за рахунок розсіювання
надлишкових напорів, але і за рахунок
розчинення солей. В роботах [6, 8] побудовано
математичні моделі консолидації ґрунтів в умовах
впливу тепло-солепереносу. Однак впливу
хімічної суфозії в цих роботах не враховано. Це і
є ціллю даної статті.

**Математична модель процесу
фільтраційної консолидації.** Враховуючи
результати робіт [6-8], математичну модель
двовимірної задачі фільтраційної консолидації
засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії

в неізотермічних умовах під впливом прикладеного зовнішнього навантаження інтенсивністю $q(x)$ (рис. 1) можна описати наступною крайовою задачею:

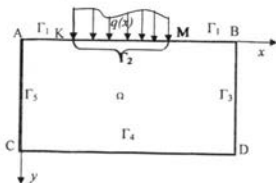


Рис. 1. Фільтраційна консолідація засоленого масиву ґрунту в двовимірному випадку

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \times \\ \times \nabla \cdot [K_s(c, T, N) \nabla h - K_s(c) \nabla c - K_T \nabla T] + (1) \\ + \frac{\varepsilon(1+e)(1+\xi)}{2\gamma p_s a} \left(\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot (D \nabla c) + \nabla \cdot (D_T \nabla T) - (u, \nabla c) = n \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (k \nabla T) - \rho_s (u, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_m (C_m - c) N^a, \quad (4)$$

$$u = -K_s(c, T, N) \nabla h + K_s(c) \nabla c + K_T \nabla T, \quad (5)$$

$$h(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = C_0(x, y),$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad N(x, y, 0) = N_0(x, y), \quad (6)$$

$$(u, n)_{\Gamma_2} = (u, n)_{\Gamma_4} = 0, \quad h(x, y, t)_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_4} = 0, \quad c(x, y, t)_{\Gamma_2} = C_1, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_5} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad (9)$$

$$T(x, y, t)_{\Gamma_2} = T_1, \quad T(x, y, t)_{\Gamma_1} = T_2,$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{(0)}^t \frac{1}{(\rho_s - (1+e)N)(1+e)} \times \\ \times \left(\frac{2\gamma p_s a}{1+\xi} \frac{\partial h(x, z, t)}{\partial t} - \gamma_m (1+e) \times \right. \\ \left. \times (C_m - c(x, z, t)) N^a(x, z, t) \right) dz, \quad (10)$$

$$\text{де } \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma, \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^5 \Gamma_i, \quad \bigcap_{i=1}^5 \Gamma_i = \emptyset, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$t \in (0; t_0]$. Тут використані такі позначення: h – надлишковий напір; c – концентрація солей в рідкій фазі; N – концентрація солей у твердій фазі; T – температура; n – пористість ґрунту; e – коефіцієнт пористості; ρ_s – густина солей у твердій фазі; c_p – питома теплоємність порового розчину; c_T – об'ємна теплоємність ґрунту; C_m – концентрація граничного насичення в рідкій фазі; γ_m – коефіцієнт швидкості масообміну; $K_{sj}(c, T, N) = \{k_{sj}(c, T, N)\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) фільтрації; $K_s(c) = \{k_{sy}(c)\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу; $K_T = \{k_{Ty}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу; $D = \{D_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) хімічної дифузії; $D_T = \{(D_T)_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) термодифузії; $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) теплопровідності; $u = (u_1; u_2)$ – вектор швидкості фільтрації соляового розчину; α – коефіцієнт засолення, що залежить від характеру засолення солей у твердій фазі. Для об'ємного засолення ґрунту, при якому солі у вигляді кристаліків дискретно розсіяні в об'ємі ґрунту, $\alpha = 1/2$. При $\alpha = 0$ масо плівкове, поверхнєве засолення [3]. Параметр ε набуває значення 0, якщо наявність солей не враховується і 1 якщо наявність солей враховується. [6].

Оскільки швидкість руху твердих частинок ґрунту значно менша за швидкість фільтрації, то в узагальненому законі Дарсі-Герсегованова (5) знехтувано швидкістю руху твердої фази ґрунту. Чисельне розв'язання крайової задачі (1)–(10) знайдено методом радіальних базисних функцій [8, 18, 19]. Для цього покрито замикання $\bar{\Omega}$ області вузловими точками (x_j, y_j) , $j = 1, \bar{z}$. Наближені розв'язки крайової задачі (1)–(10) шукаємо у вигляді

$$h(x, y, t) \approx h_s(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\bar{z}} h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_s), \quad (11)$$

$$c(x, y, t) \approx c_s(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\bar{z}} c_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_c), \quad (12)$$

$$T(x, y, t) \approx T_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^n T_j(t) \varphi_j(r_j, e_T), \quad (13)$$

$$N(x, y, t) \approx N_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^n N_j(t) \varphi_j(r_j, e_N), \quad (14)$$

де $e_k > 0$, $e_C > 0$, $e_T > 0$, $e_N > 0$ – параметри форми; $\varphi_j(r_j, e)$ – радіальні базисні функції; $h_j(t)$, $c_j(t)$, $N_j(t)$, $T_j(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу; $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, $j = \overline{1, n}$.

Покриємо замикання області $\overline{\Omega}$ колокаційними точками (x_i, y_i) , $i = \overline{1, s}$, де s^Ω – множина номерів точок, які лежать в області Ω ; s^{Γ_j} – множина номерів точок, які лежать на відповідних частинах Γ_j , $j = \overline{1, 5}$, межі Γ , $s = \bigcup_{j=1}^5 s^{\Gamma_j} \cup s^\Omega$. Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad j = \overline{1, n}, i = \overline{1, s}, s \geq n.$$

Підставляючи (11)–(14) в рівняння (1)–(4), початкові умови (6) та граничні умови (7)–(9), і використовуючи метод колокації в точці [4], отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $H(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^n$, $C(t) = \{c_j(t)\}_{j=1}^n$,

$$N(t) = \{N_j(t)\}_{j=1}^n, \quad T(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^n;$$

$$M^{(0)} \frac{dH(t)}{dt} + L^{(0)}(C(t), N(t), T(t))H(t) = K^{(0)} \frac{dN(t)}{dt} + S^{(0)} \frac{dC(t)}{dt} + S^{(0)}C(t) + R^{(0)}T(t) + F^{(0)}, \quad (15)$$

$$M^{(2)} \frac{dC(t)}{dt} + L^{(2)}(C(t), N(t), T(t))C(t) = K^{(2)} \frac{dN(t)}{dt} + R^{(2)}T(t) + F^{(2)}, \quad (16)$$

$$M^{(1)} \frac{dT(t)}{dt} + L^{(1)}(C(t), N(t), T(t))T(t) = F^{(1)}, \quad (17)$$

$$M^{(4)} \frac{dN(t)}{dt} = L^{(4)}(C(t), N(t)), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(0)} H_0(t) &= \tilde{F}^{(0)}, \quad \tilde{M}^{(2)} C_0(t) = \tilde{F}^{(2)}, \\ \tilde{M}^{(1)} T_0(t) &= \tilde{F}^{(1)}, \quad \tilde{M}^{(4)} N_0(t) = \tilde{F}^{(4)}, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$M^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{k, n}, \quad \tilde{M}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{k, n},$$

$$\tilde{F}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^k, \quad L^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{k, n}, \quad k = \overline{1, 4};$$

$$S^{(0)} = \{s_{ij}^{(0)}\}_{i=1, j=1}^{n, n}, \quad S^{(1)} = \{s_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{n, n},$$

$$R^{(k)} = \{r_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{n, n}, \quad K^{(k)} = \{k_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{n, n},$$

$$k = \overline{1, 2}; \quad F^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^k, \quad k = \overline{1, 3};$$

$$m_{ij}^{(0)} = -\varphi_j(r_j, e_k), \quad m_{ij}^{(2)} = -\varphi_j(r_j, e_C),$$

$$m_{ij}^{(1)} = -c_T \varphi_j(r_j, e_T), \quad i \in s^\Omega;$$

$$m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_j, e_N), \quad i = \overline{1, s},$$

$$k_{ij}^{(0)} = \frac{\varepsilon e(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma p, a} \varphi_j(r_j, e_N)$$

$$k_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_j, e_N), \quad i \in s^\Omega;$$

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \frac{(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (K_k(c, N, T) \nabla \varphi_j(r_j, e_k)) & i \in s^\Omega, \\ K_k(c, T, N) \frac{\partial \varphi_j(r_j, e_k)}{\partial y}, & i \in s^{\Gamma_2} \cup s^{\Gamma_4}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_j, e_k)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_3} \cup s^{\Gamma_5}, \\ \varphi_j(r_j, e_k) & i \in s^{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \nabla \cdot (D \nabla \cdot \varphi_j(r_j, e_C)) - (u, \nabla \cdot \varphi_j(r_j, e_C)) & i \in s^\Omega, \\ \varphi_j(r_j, e_C) & i \in s^{\Gamma_2}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_j, e_C)}{\partial y}, & i \in s^{\Gamma_1} \cup s^{\Gamma_4}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_j, e_C)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_3} \cup s^{\Gamma_5}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \nabla \cdot (a \nabla \cdot \varphi_j(r_j, e_T)) - \rho c_p (u, \nabla \cdot \varphi_j(r_j, e_T)) & i \in s^\Omega, \\ \varphi_j(r_j, e_T) & i \in s^{\Gamma_1} \cup s^{\Gamma_2}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_j, e_T)}{\partial y}, & i \in s^{\Gamma_4}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_j, e_T)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_3} \cup s^{\Gamma_5}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(4)} = \gamma_n \left(\sum_{j=1}^n C_j(t) \varphi_j(r_j, e_C) - C_n \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^n N_j(t) \varphi_j(r_j, e_N) \right), \quad i = \overline{1, s};$$

$$s_{ij}^{(0)} = -\frac{\varepsilon n(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma p, a} \varphi_j(r_j, e_C), \quad i \in s^\Omega,$$

$$f_i^{(2)} = C_i, \quad i \in s^{\Gamma_2}; \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} T_i, & i \in s^{\Gamma_3}, \\ T_2, & i \in s^{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$s_y^{(i)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (K_C(c) \nabla \cdot \varphi_y(r_y, \varepsilon_C)) & i \in s^0, \\ K_C(c) \frac{\partial \varphi_y(r_y, \varepsilon_C)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_2} \cup s^{\Gamma_4}; \end{cases}$$

$$r_y^{(i)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla (K_T \nabla \varphi_y(r_y, \varepsilon_T)) & i \in s^0, \\ K_T \frac{\partial \varphi_y(r_y, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_2} \cup s^{\Gamma_4}; \end{cases}$$

$$r_y^{(2)} = \nabla \cdot (D_T \nabla \cdot \varphi_y(r_y, \varepsilon_T)) \quad i \in s^0;$$

$$\tilde{f}_i^{(1)} = H_0(x, y, \lambda) \quad \tilde{f}_i^{(2)} = C_0(x, y, \lambda)$$

$$\tilde{f}_i^{(3)} = T_0(x, y, \lambda) \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(x, y, \lambda)$$

$$i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, z}.$$

Відмітимо наступне. Якщо при деякому набору індексів коефіцієнт будь-якої матриці в задачі Коші (15)-(19) згідно вищенаведених формул не визначений, то він покладається рівним нулю. Для дискретизації рівнянь (15)-(17) по часу можна використати лінеаризовану повністю неявну різницеву схему [6, 8].

Для дискретизації системи нелінійних диференціальних рівнянь (18) в часі використасмо метод Ньютона [13]

$$M^{(i)} \frac{N^{(i+1)} - N^{(i)}}{\tau} = \alpha L^{(i)}(C^{(i)}, N^{a-i}(t_k)) \times \\ \times (N^{(i+1)}(t) - N^{(i)}(t)) + L^{(i)}(C^{(i)}, N^a(t_k))$$

Оскільки за умовою кількість колокаційних точок є більшою за кількість вузлових точок, то отримана після дискретизації задачі Коші (15)-(19) СЛАР є перевизначеною. Для її розв'язання можна використати метод найменших квадратів [10].

В процесі консолідації розміри області Ω змінюються. Тому на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову (10), згідно якої маємо

$$\frac{y^{(i+1)} - y^{(i)}}{\tau} =$$

$$= - \int_{y^{(i)}}^l \frac{1}{\left(\rho_s - (1+e) \sum_{j=1}^z N_j^{(i+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right) (1+e)} \times$$

$$\times \left(2\gamma \rho_s a \left(\sum_{j=1}^z \frac{H_j^{(i+1)} - H_j^{(i)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon_s) \right) - \right.$$

$$\left. - \gamma_m (1+e) \left(C_m - \sum_{j=1}^z C_j^{(i+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_C) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{j=1}^z N_j^{(i+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right)^a \right) dm,$$

де τ - крок по часу; $(x, y^{(i)})$ - координати деякої точки області консолідації при $t = t^{(i)}$; $(x, y^{(i+1)})$ - координати даної точки на наступному часовому шарі. Змінна інтегрування m пробігає вертикальний відрізок від початкового положення точки $y^{(i)}$ до нижньої межі $y = l$ масиву ґрунту.

Початковий розподіл надлишкових напорів $h_0(x, y)$ залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай маємо довільний закон розподілу навантаження $q(x)$. Початкове значення надлишкового напору для точки, що лежить в області прикладання навантаження, визначасмо за формулою [9]

$$h_0(x, y) = \frac{q(x)}{\gamma} + h_p,$$

де h_p - значення напору в точці (x, y) до прикладання навантаження.

Для довільної точки $X = (x, y)$ області консолідації Ω , що не належить до області прикладання навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначасмо за формулою [9]

$$h_0(X) = \frac{\Theta(X)}{2\gamma},$$

де $\Theta(X)$ - сума головних напружень у точці X і

$$\Theta(X) = \int_0^h \frac{2q(\xi)}{\pi} \frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} d\xi,$$

$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$; $[l_1, l_2]$ - відрізок прикладання навантаження.

Результати чисельних експериментів.

Розглянемо двохвимірну задачу фільтраційної консолидації шару засоленого глинистого ґрунту прямокутної форми довжиною $l=2l$ м, товщиною $b=10$ м з такими вхідними даними:

$$n = 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha = 0.5, \quad a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н},$$

$$\rho_s = 2000 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad C_m = 350 \text{ г} / \text{з},$$

$$D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба},$$

$$D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2 / \text{доба}, \quad \gamma = 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2),$$

$$\gamma_m = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1},$$

$$K_{\eta 11} = K_{\eta 22} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), \quad C_1(t) = C_m,$$

$$\xi = 0.75, \quad T_1(t) = 50^\circ \text{С},$$

$$K_{\sigma 12} = K_{\sigma 21} = 0 \text{ м}^2 / (\text{кг} \cdot \text{доба}),$$

$$c_p = 4.2 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{град}),$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}),$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}),$$

$$c_T = 2137 \text{ кДж} / (\text{м}^3 \cdot \text{град}),$$

$$K_{\eta 11} = K_{\eta 22} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot \text{град}),$$

$$K_{\eta 12} = K_{\eta 21} = 0 \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot \text{град}),$$

$$N_0(x) = 240 \left(-\left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40.$$

$$T_1(t) = 17 + 13 \cos \left(\frac{\pi t}{180} \right), \quad C_0(t) = \begin{cases} C_m, & y = 0, \\ 8 \text{ г} / \text{з}, & y \neq 0; \end{cases}$$

$$T_0(t) = \begin{cases} T_1, & y = 0, \\ 4^\circ \text{С}, & y \neq 0. \end{cases}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладалася рівним $0.002 \text{ м} / \text{доба}$. Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах і температури знаходили за формулою [6, 14]

$K_h(c, N, T) = k_0(c, T) e^{-\gamma_m \frac{N}{C_m}}$. Для апроксимації залежності $k_0(c, T)$ використовувався метод РБФ з експериментальними даними, взятими із монографії [6].

На верхній межі ґрунту на відріжку КМ прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 20 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{м}^2 \cdot \text{доба}^2$.

Кількість вузлових точок покладалася рівною 121, а колокаційних – 484. Крок по часу $\tau = 30 \text{ діб}$. Кількість часових проміжків 12. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій.

При вказаних даних були знайдені значення напору, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультіквадратичної

РБФ $\varphi(r) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ і побудовані відповідні графіки (рис. 2–6).

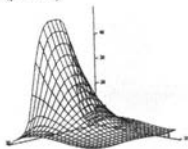


Рис. 2. Розподіл температури ($t = 270 \text{ діб}$, $K_h = K_h(c, N, T)$)

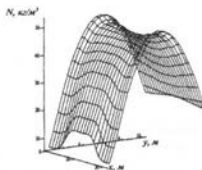


Рис. 3. Розподіл концентрації солей у твердій фазі ($t = 270 \text{ діб}$, $K_h = K_h(c, N, T)$)

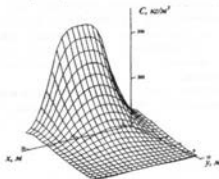
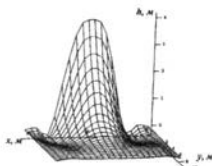
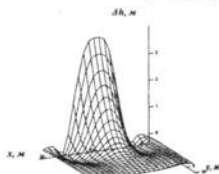


Рис. 4. Розподіл концентрації солей у рідкій фазі ($t = 270 \text{ діб}$, $K_h = K_h(c, N, T)$)

Рис. 5. Розподіл надлишкових напорів
($t = 270$ діб, $K_h = K_h(c, N, T)$)Рис. 6. Різниця розподілів надлишкових напорів
засоленого і незасоленого ґрунту при
врахуванні просідання ($t = 270$ діб,
 $K_h = K_h(c, N, T)$)Величина максимального просідання верхньої межі ґрунту при $t = 330$ діб

Таблиця

№	Параметри	Величина просідань ґрунту			
		$K_h = K_h(c, N, T)$			$K_h = const$
			за рахунок зміни напорів	за рахунок хімічної суфозії	
1	$\varepsilon = 1$	55 см	39 см	16 см	55,1 см
2	$\varepsilon = 0$	40,6 см	40,6 см	-	40,6 см
3	Ізотермічний режим	50,3 см	34,5 см	15,8 см	55,1 см

Концентрація солей у рідкій фазі з часом збільшується, а в твердій зменшується (рис. 3, 4). В околі верхньої межі (поза областю прикладення навантаження) ґрунт переходить в переущільнений стан (напори стають меншими нуля). Це пояснюється урахуванням явищ хімічного та термічного осмосів. Просідання ґрунту найбільше в області прикладення навантаження.

Порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні факторів просідання та засоленості ґрунту бачимо, що напори розсіюються повільніше, аніж у випадку незасоленого ґрунту (рис. 6). Це пояснюється залежністю $K_h(c, N, T)$. Концентрація солей у рідкій фазі $c(x, y, t)$ стає більшою за 60 г/л і коефіцієнт фільтрації різко зменшується.

Надлишкові напори розсіюються швидше при врахуванні неізотермічних умов на верхній межі і просідання ґрунту є більшим, аніж у випадку іотермічних умов (див. табл., експерименти №1 та 3, де величини просідань становлять 55 та 50,3 см відповідно).

Величина просідань збільшується при врахуванні цього фактору неізотермічних умов,

як при $K_h = K_h(c, N, T)$ так і при $K_h = const$ (див. табл., експерименти №1 та 2, де величини просідань стають 55 та 40,6 см відповідно). Як видно з експерименту №1 (див. табл.), просідання за рахунок хімічної суфозії становить 29,1% від загального просідання, а за рахунок зміни надлишкових напорів – 70,9 %. Отже, просідання за рахунок впливу хімічних факторів на засоленних ґрунтах є значним і нехтувати їм не можна.

Отже, в процесі фільтраційної консолідації і наявності хімічної суфозії в неізотермічних умовах здійснюється значне вигулювання сольового комплексу, яке сприяє порушенню структури та стійкості ґрунту, зменшенню його міцності, внаслідок чого відбувається суфозійне осідання поверхні ґрунту і виникають значні деформації будівель, що розміщені на них.

Висновки. В статті побудовано математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту із врахуванням хімічної суфозії в неізотермічних умовах. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено безсітковим методом, що базується на методі колокацій в точці з використанням

якості базисних радіальних функцій. Для відшукування чисельного розв'язку відповідної крайової задачі розроблено алгоритм. Здійснено програмну реалізацію алгоритму. При проведенні та аналізі чисельних експериментів виявлено суттєвий вплив хімічної суфозії на

процес просідання ґрунту та на розподіл надлишкових напорів. В подальшому планується дослідження тривимірної задачі консолідації засолених ґрунтів.

Список використаних джерел

- Булавацький В.М. Системний похід к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В.М. Булавацький, В.В. Скопечский // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №6. – С. 71-79.
- Булавацький В.М. Математичне моделювання динаміки консолідаційних процесів з урахуванням релаксаційних ефектів / В.М. Булавацький, В.В. Скопечский // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №6. – С. 59-66.
- Веригин Н.Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н.Н. Веригин, С.В. Васильев, В.С. Саркисян, Б.С. Шержуков. – М.: Недра, 1977. – 271с.
- Власова Е. А. Приближенные методы математической физики / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувиркин // М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 700 с.
- Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масо переносу солей / А. П. Власюк, О.В. Жеребить // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва. – 1998. – Вип.1. Част.1. – С. 40-43.
- Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВіП, 2008. – 416 с.
- Власюк А. П. Числові розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засоленних ґрунтів в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. Р. Фурсович // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 197-204.
- Власюк А. П. Чисельне розв'язання задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепломасопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВіП, 2010. – 277 с.
- Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. – М.: Высшая школа, 1991. – 447 с.
- Исаев В.И. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Труды Ин-та математики и механики. – 2008. – Т.14, №1. – С. 41-60.
- Мустафаев А. А. Расчёт суффозионной осадки сооружений на засоленных грунтах с использованием центробежного моделирования / А. А. Мустафаев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1984. – № 3. – С. 26-29.
- Петрухин В. П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В. П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 120 с.
- Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
- Тугай А. М. Визначення динаміки зміни рівнів води свердловин при їх кольтатації сполуками заліза / А. М. Тугай // Вісник Рівненського державного технічного ун-ту. – 2002. – №1(14). – С. 107-115.
- Ухов С. Б. Механика грунтов, основания и фундаменты / С. Б. Ухов. – М.: АСВ, 1994. – 525 с.
- Флорин В. А. Основы механики грунтов Т.2. / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 560 с.
- Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. В 2т. Т.2. / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 544 с.
- Least - squares collocation meshless method / X. Zhang, X. - H. Liu, K. - Z. Song, M. - W. Lu // Int. J. Numer. Methods Engin. – 2001. – Vol. 51. – Pp. 1089 - 1100.
- Liu X. Radial point collocation methods for solving convection - diffusion problems / X. Liu // J. Zhejiang Univ. SCIENCE A. – 2006. – Vol. 7(6). – Pp. 1862-1875.

Надійшла до редколегії 06.06.2011

УДК 519.8

Нагірна А.М., ст. викл.,
Семенов В.В., аспірант**Оптимізація вибору програмного
забезпечення на основі багатокритеріальних
моделей на нечітко заданій комбінаторній
множині**

Побудовано математичну модель оптимального вибору програмного забезпечення у вигляді багатокритеріальної задачі на нечітко заданій комбінаторній множині сполучень. Розроблено підходи до знаходження Парето-оптимальних розв'язків, побудовано та обґрунтовано алгоритми генерування сполучень з урахуванням лексикографічного порядку, звуження допустимої комбінаторної множини, відкидання неоптимальних розв'язків та за кількістю домінуючих критеріїв.

Ключові слова: комбінаторна множина, нечітка множина, багатокритеріальні задачі, векторний критерій, Парето-оптимальні розв'язки.

*E-mail: hunt.semen@gmail.com, vpn2006@rambler.ru

Статтю представив доктор техн. наук, професор Гаращенко Ф.Г.

Сучасний ринок програмного забезпечення представляє собою широкий спектр вибору необхідних програм, які б забезпечували повну автоматизацію роботи фахівця. Якісні і кількісні показники програмного забезпечення формуються не лише на задоволенні потреб користувача-замовника на рівні інтерфейсу і виконуваних операцій, а й з точки зору специфічних якостей програміста-фахівця. Перед спеціалістами в області програмування: програміста, керівника проекту чи наукового працівника виникає ряд задач, найважливішими з яких є створення умов, необхідних для програмування за замовленнями проектами, визначення норм початкових мовилок, кількісна оцінка мов програмування і ефективності модульності, обґрунтування методу вимірювання відмінностей між програмами, написаними спеціалістами і програмістами-початківцями. При проектуванні програмного забезпечення не допустимі прості підходи на відміну від більшості галузей матеріального

Nagima A.M., senior teacher,
Semenov V.V., PhD student**Optimization of choice of software is on the
basis of models of multi criteria on the fuzzy
combinatorial set**

In the article the mathematical model of optimum choice of software is built as a multicriterial problem on a fuzzy combinatorial set of combinations. Approaches to finding of Pareto-optimum solutions are developed, algorithms of building of combinations taking into account a lexicographic order, narrowing of feasible combinatorial set, castings aside of unoptimum solutions and on the amount of dominant criteria are developed and grounded.

Key words: combinatorial set, fuzzy set, problems of multicriteria, vectorial criterion, Pareto-optimum solutions.

виробництва, оскільки економічні показники проекту нелінійно залежать від об'єму робіт, а при обчисленні трудомісткості допускається велика похибка.

Сучасні комплексні системи оцінки характеристик проектів створення програмного забезпечення можуть розв'язувати такі задачі:

- попередня, постійна і підсумкова оцінки економічних параметрів проекта: трудомісткість, тривалість, вартість;
- оцінка ризиків за проектом: ризик порушення термінів та невиконання проекту, ризик збільшення трудомісткості на етапах налагодження і супроводження проекту та ін.;
- прийняття оперативних управлінських рішень. На основі відслідкування певних характеристик проекту можна своєчасно попередити виникнення небезпечних ситуацій та усунути наслідки непередбачених проектних рішень [1].

© А.М. Нагірна, В.В. Семенов, 2012

Характеристики складності програми прийнято ділити на три основні групи:

- характеристики розміру програм;
- характеристики складності потоку керування програм;
- характеристики складності потоку даних програм.

Характеристики першої групи базуються на визначенні кількісних даних і відрізняються відносною простотою. Найбільш відомими характеристиками оцінок розміру програм є метрики Холстеда. Основою метрики є чотири вимірювальні характеристики: число унікальних операторів програми (словник операторів), число унікальних операндів програми (словник операнд), загальне число операторів в програмі, загальне число операндів в програмі, які дозволяють розраховувати оцінки: словник програми, довжина програми, об'єм програми, складність програми тощо. Метрики Холстеда виникли в 70-роках минулого століття і на даний момент вимагають деякої адаптації до сучасної ситуації, оскільки вона не дозволяє визначити потенційний об'єм програми з урахуванням її інтерфейсної частини, наприклад графічного інтерфейсу операційної системи [1]. Але на даний момент не існує єдиної методики визначення потенційного об'єму робіт над інтерфейсною частиною сучасних програм.

Метрики програмного забезпечення грають роль рекомендаційних характеристик і строго керуватися ними неможливо, оскільки при розробці програмного забезпечення, при максимізації чи мінімізації певних показників характеристик можлива втрата ефективності роботи програми. У загальному вигляді застосування метрик дозволяє керівництву проєктів і підприсств вивчити складність створеного чи створюваного проєкту, оцінити об'єм роботи, стилістику створюваної програми і зусилля, затрачені кожним розробником для реалізації того чи іншого рішення. З практичної точки зору метрики застосовуються в програмних продуктах, які призначені для відслідковування і детального протоколювання всієї інформації, що супроводжує проєкт. Наприклад ClearCase забезпечує найбільш тісну інтеграцію як з продуктами самої компанії Rational (Rose, SoDA, ClearQuest, Requisite PRO) так і з продукцією компанії Microsoft (Visual C++, Visual Basic).

Програма надає повну інформацію про метричні характеристики програмного забезпечення, але не дозволяє оптимізувати процес

вибору, тому доцільно використати моделі багатокритеріальної оптимізації, де критеріями якості вважатимемо метричні функціонали, що відповідають певним характеристикам.

Особливість багатокритеріальних задач, як способу моделювання, полягає в тому, що в умовах багатокритеріальності вибір оптимального розв'язку здійснюється із множини непокрашуваних альтернатив. Задача знаходження цієї множини має велике практичне і теоретичне значення, оскільки потужність множини альтернатив дуже велика, що робить задачу прийняття рішення досить складною.

В [2] дано математичне формулювання і наведено аксіоматичне обґрунтування відомого ще з XIX в. принципу Еджворта-Парето для випадку чіткого відношення переваги особи, що приймає рішення. При виборі найкращих рішень в економіці, техніці та інших областях людської діяльності у тих випадках, коли необхідно враховувати відразу кілька цільових функцій (критеріїв) даний принцип є основним. Звичайно він не універсальний, а справедливий лише при розв'язанні певного (хоча і досить широкого) класу задач багатокритеріального вибору. За межами цього класу його застосування або ризиковане, або взагалі неприпустиме.

На даний момент в менеджменті, економіці, в фінансовій діяльності, в теорії штучного інтелекту та ін. широко використовують задачі з урахуванням нечітких границь як у цільових функціях, так і в обмеженнях, заданих на комбінаторних множинах. Дані задачі нечіткого вибору є узагальненими задачами чіткого вибору. Тому дослідження таких задач є актуальним з практичної і теоретичної точки зору. У роботах [3-5] розглянуто багатокритеріальні задачі за умов нечіткої заданої інформації про цільові функції та допустиму область задачі, а в [6-8] задачі на комбінаторних. Розглянемо задачу, що поєднує вищезазначені.

Побудуємо багатокритеріальну математичну модель, яка забезпечить оптимальний вибір програмного забезпечення із множини запропонованих на основі оптимізації метрик коду та використання математичного апарату теорії нечітких множин.

Математична модель оптимізації вибору програмного забезпечення

Розглянемо корпоративну інформаційну систему (KIC) підприємства. Клас програмних засобів, що реалізуються KIC, називається CASE-системами. В результаті нової лінії виробництва

необхідно створити нове програмне забезпечення певної CASE-системи. Керівництву потрібно вибрати один із представлених програмних проєктів, врахувавши складність програмного забезпечення, оцінку об'єму робіт, стилістику та зусилля, затрачені кожним розробником для реалізації певного рішення. Для кількісної характеристик коду програмного забезпечення скористасмося деякими показниками метрики Холстеда. Нехай представлені програмні засоби визначаються як можливі альтернативи $a_1, \dots, a_n$. Згідно метрик Холстеда введемо наступні показники: n_1 – число унікальних операторів програми (словник операторів), n_2 – число унікальних операндів програми (словник операндів), N_1 – загальне число операторів в програмі, N_2 – загальне число операндів в програмі, n_1', n_2' – відповідно теоретичні числа унікальних операторів і операндів. Позначимо $n = n_1 + n_2$ – словник програми, $N = N_1 + N_2$ – довжина програми, $n' = n_1' + n_2'$ – теоретичний словник програми. Введемо критерій оптимізації вибору програмного забезпечення:

$f_1 = n_1 \log_2(n_1) + n_2 \log_2(n_2)$ – теоретична довжина програми,

$f_2 = N \cdot \log_2 n$ – об'єм програми,

$f_3 = (2n_1)(n_2 N_2)$ – рівень якості програми, що ґрунтується на параметрах реальної програми без урахування теоретичних параметрів.

Для побудови математичної моделі розглянемо нечітку множину

$\tilde{A} = \{a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1), \dots, a_q, \mu_{\tilde{A}}(a_q)\}$, де $a_j \in \{1, 0\}$, $j \in N_q$.

Розглянемо нечітку множину сполучень $C(\tilde{A})$

елементів $a = (a_{i1}, \mu_{\tilde{A}}(a_{i1}), \dots, a_{in}, \mu_{\tilde{A}}(a_{in}))$ з

нечіткою заданою множиною $\tilde{A}$.

Введемо змінну: $x_i = 1$, якщо i – програмне забезпечення вибирається для певної CASE системи, $x_i = 0$, у протилежному випадку.

Математична модель задачі має вигляд:

$\max \{F(x) | x \in \tilde{X}\}$, $F(x) = (-f_1(x), -f_2(x), f_3(x))$.

Нехай X – універсальна множина альтернатив і $\mu_X: X \rightarrow [0, 1]$ – задана нечітка підмножина допустимих альтернатив, Y – універсальна множина оцінок альтернатив з множини X і $\mu_Y: Y \times Y \rightarrow [0, 1]$ – задане на

множині Y нечітке відношення переваги. Вибори альтернатив оцінюються нечіткими значеннями заданої нечіткої функції шіф $\phi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$. Задача полягає в раціональному виборі альтернатив на основі інформації, заданої в описаній вище формі. Надалі опишемо параметри задачі у формі нечітких множин, де крім задання множини можливих значень параметрів, у модель вводиться додаткова інформація у вигляді функцій належності цих нечітких множин. Дані функції можна розглядати як спосіб наближеного відображення експертом в агрегованому вигляді наявного в нього неформалізованого представлення про реальну величину даного параметру. Значення функції належності можна розуміти як вагові коефіцієнти, які експерт приписує різним можливим значенням цього параметра.

Під максимізацією будемо розуміти вибір нечіткої підмножини R з нечіткої множини $\tilde{X}$, якій відповідає найбільше значення, як векторної функції F , так і функції належності $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечіткій множині альтернатив. Ці альтернативи в задачах багатокритеріальної оптимізації залежно від способу їх порівняння називаються ефективними (оптимальними за Парето), слабо ефективними (за Слейтером), строго ефективними (за Смейлом) і відповідно позначаються:

$P(F, \tilde{X})$, $Sl(F, \tilde{X})$, $Sm(F, \tilde{X})$.

Нагадаємо, що альтернатива $x^* \in \tilde{X}$ називається ефективною, якщо не існує іншої альтернативи $x \in \tilde{X}$ такої, що: $F(x) \geq F(x^*)$, $\mu_{\tilde{X}}(x) \geq \mu_{\tilde{X}}(x^*)$ і хоча б одна нерівність строга; слабо ефективною, якщо $\exists x \in \tilde{X}: F(x) > F(x^*)$, $\mu_{\tilde{X}}(x) > \mu_{\tilde{X}}(x^*)$ і строго ефективною, якщо $\exists x \in \tilde{X}: x \neq x^*, F(x) \geq F(x^*), \mu_{\tilde{X}}(x) \geq \mu_{\tilde{X}}(x^*)$.

З означень випливає справедливості включень $Sm(F, \tilde{X}) \subset P(F, \tilde{X}) \subset Sl(F, \tilde{X})$. Вхідну задачу $Z(F, X)$ представимо у вигляді $(l+1)$ -критеріальної задачі: $F(x) \rightarrow \max, \mu_{\tilde{X}}(x) \rightarrow \max, x \in \tilde{X}$.

Для описаної математичної моделі $l=3$, де l – число критеріїв. Отже, під розв'язком задачі з нечіткою множиною альтернатив розуміємо нечітку множину з функцією належності:

$\mu(x) = \{\mu_{\tilde{X}}(x) | x \in P(F, \tilde{X}) \vee 0 | x \in P(F, \tilde{X})\}$.

Таким чином, нечітка підмножина розв'язків буде містити в собі ті і тільки ті альтернативи універсальної множини X , які визначають

значення векторної функції $F(x)$ й функції належності $\mu_x(x), x \in X$, що не покращуються одночасно.

Розробка методів розв'язання поставленої задачі в умовах нечіткої визначеності потребує знання й використання результатів операцій знаходження суми, добутку, мінімуму й максимуму нечітких величин.

Під нечітким числом будемо розуміти нечітку множину з областю визначення у вигляді інтервалу дійсної осі R^1 . Множину всіх нечітких чисел, визначених на R^1 , позначимо $\tilde{R}^1$. Нехай x і y – два нечітких числа з носіями $S_x = (a_1, a_2)$ й $S_y = (b_1, b_2)$, $a_2 > a_1, b_2 > b_1$, $g: R^1 \times R^1 \rightarrow R^1$ – деяка функція. Позначимо $\otimes$ – одну із чотирьох арифметичних операцій: $+$, $-$, $\cdot$, $/$; $g(a, b) = a \otimes b$. Тоді відповідно до принципу узагальнення нечітке число $D = g(x, y)$ визначається функцією належності

$$\mu_D(z) = \sup_{\substack{g(a,b)=z \\ a \in S_x, b \in S_y}} \min\{\mu_x(a), \mu_y(b)\} \quad (1)$$

Формула (1) визначає результат арифметичної операції $\otimes$ над нечіткими числами x та y . Якщо $g(\cdot)$ – функція не двох, а n аргументів, то принцип узагальнення формулюється аналогічно до формули (1).

При порівнянні двох нечітких величин необхідно дати означення рівності цих величин.

Означення 1. Дві нечіткі величини (два числа) $(x_1, \mu_1(x_1))$ і $(x_2, \mu_2(x_2))$ будемо вважати рівними, якщо $x_1 = x_2$ і $\mu_1(x_1) = \mu_2(x_2)$.

Означення 2. Якщо виконується умова $x_1 \geq x_2$, $\mu_1(x_1) \geq \mu_2(x_2)$ і одна із цих нерівностей строга, то нечітка величина $(x_1, \mu_1(x_1))$ більше нечіткої величини $(x_2, \mu_2(x_2))$.

Алгоритм генерування сполучень з урахуванням лексикографічного порядку

Розглянемо множину $A' = \{1, 2, \dots, n\}$. Сполучення без повторень із n елементів по r – це r -елементні підмножини множини A' . Оскільки порядок запису елементів множини неістотний, то будемо у кожному сполученні записувати елементи у порядку зростання. Отже, сполучення $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ розглянемо як рядок чисел $a_1 a_2 \dots a_r$, причому $a_1 < a_2 < \dots < a_r$. Покажемо, як за даним сполученням знайти

наступне відповідно до лексикографічного порядку. Припустимо, що $n=5$ та $r=3$. Якщо можна збільшити останню цифру, то так і будемо робити. Тому, якщо маємо рядок 123, то його можна замінити на 124. Якщо маємо 125, то останнє число збільшити не можна. Тому переходимо до наступного справа числа і дивимось, чи можна його збільшити. У даному випадку це можна зробити: потрібно замінити 2 на 3. Проте ми прагнемо побудувати найменший рядок із тих, які більші від 125. Тому збільшимо останнє змінне число на 1 і запишемо результат у наступну позицію. Отже, перші два числа 1 та 3, тому наступний рядок 134. Припустимо, що с рядок 145. Останнє і передостаннє числа збільшити не можна. Але перше число збільшити можна, тому 1 збільшимо до 2. Щоб зробити рядок мінімальним, останні числа візьмемо 3 та 4, у результаті отримаємо рядок 234.

Якщо починати справа, то значення останнього числа буде найбільшим можливим, якщо воно дорівнює $n-r+r=n$. Якщо останнє число – найбільше можливе, то попереднє число буде найбільшим можливим, якщо воно дорівнює $n-r+(r-1)$ або $n-r+1$, де $i=r-1$ є позицією цього числа. У загальному випадку значення кожного i -го числа буде найбільшим можливим, якщо числа праворуч – найбільші можливі, і це значення дорівнює $n-r+i$. Проглядаємо рядок справа наліво і визначаємо, чи дорівнює значення i -го величині $n-r+i$. Перше значення, яке не задовольняє цю умову, можна збільшити. Нехай, наприклад, це значення дорівнює m і є на j -му місці. Збільшимо m на 1, а значення кожного елемента, що стоїть після j -го, дорівнює значенню попереднього елемента плюс 1. На підставі наведених міркувань сформулюємо наступний алгоритм.

Алгоритм 1 побудови лексикографічно наступного сполучення.

1. Знайти перший справа у рядку елемент a_i , такий, що $a_i \neq n-r+i$.
2. Для знайденого елемента виконати присвоєння $a_i := a_i + 1$.
3. Для $j = j+1, i+2, \dots, r$, виконати $a_j := a_j + j - i$ (або, що є тим самим, $a_j := a_{j-1} + 1$).

Твердження. Не існує сполучення, яке водночас більше від $a_1 a_2 \dots a_r$, але менше від побудованого за алгоритмом 1. Тобто,

побудоване сполучення дійсно лексикографічно наступне за даним сполученням $a_1 a_2 \dots a_n$.

Доведення. Рядок чисел, який зображає лексикографічно наступне сполучення, відрізняється від рядка, що зображає дане сполучення в позиції i , оскільки в позиціях $i+1, i+2, \dots$ є максимально можливі числа. Отже, $a_i + 1$ – найменше можливе число, яке можна записати у позицію i , щоб отримати сполучення, більше від даного. Тоді $a_i + 2, \dots, a_i + r - 1$ є найменшими можливими числами, які можна записати у позиції від $i+1$ до r .

Зауваження. Для побудови всіх C_n^r сполучень з множини $A' = \{1, 2, \dots, n\}$ починаємо з найменшого сполучення $123 \dots n$ і послідовно $C_n^r - 1$ разів виконуємо алгоритм побудови лексикографічно наступного сполучення.

Метод розв'язання задачі

Для розв'язання даної багатокритеріальної задачі на нечіткій заданій множині сполучень скористаємося методом вибору за кількістю домінуючих критеріїв. Правило вибору R за даним методом виходить з взаємні співвідношення типу «більше» й «менше» між оцінками альтернатив і не враховує величини різниць оцінок. Нехай задано множину сполучень $C(\tilde{A})$ елементів $a = (a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1), \dots, a_n, \mu_{\tilde{A}}(a_n))$ із нечітко заданої множини $\tilde{A}$. Позначимо $q((a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)), (a'_1, \mu_{\tilde{A}}(a'_1)))$ – число критеріїв, за якими альтернатива $(a'_1, \mu_{\tilde{A}}(a'_1))$ строго переважає альтернативу $(a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1))$. Нехай $Q(C(\tilde{A})) =$

$$= \max_{(a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)) \in C(\tilde{A})} q((a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)), (a'_1, \mu_{\tilde{A}}(a'_1))) \quad \text{і} \quad \text{визначимо величину}$$

$$Q = \min_{(a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)) \in C(\tilde{A})} Q(a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)). \quad \text{Тоді за}$$

правилом вибору R , яке розглядається, вибираються альтернативи, які відповідають величині Q – домінуючому показнику множини $C(\tilde{A})$. Основні властивості методу полягають у наступному: $R(C(\tilde{A})) = R(P(C(\tilde{A})))$, тобто вибір за цим методом з усієї множини альтернатив і вибір з множини ефективних альтернатив –

співпадають; $R(C(\tilde{A})) \subseteq P(C(\tilde{A}))$, отже, метод вибирає ефективні альтернативи.

Слід зауважити, якщо

$q((a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)), (a'_1, \mu_{\tilde{A}}(a'_1)))$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива $(a'_1, \mu_{\tilde{A}}(a'_1))$ сильно переважає альтернативу $(a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1))$, то цей метод вибирає слабо ефективні альтернативи.

Алгоритм розв'язання задачі

Алгоритм складається із двох частин. У першій частині здійснюється звуження допустимої множини сполучень при врахуванні обмежень багатокритеріальної задачі. Зіслі другої частини полягає у відшукуванні й ефективних розв'язків, так і слабо ефективних.

1. Звуження допустимої області розв'язків.

Розглянемо задачу $Z(F, X)$, що містить додаткові лінійні обмеження, які утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ вигляду: $D = \{x \in R^n \mid Bx \leq d\}$, де $d \in R^m$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $b_{ij} \in R^1$. Допустима множина $\tilde{X}$ має вигляд $\tilde{X} = C(\tilde{A}) \cap D$.

1. Додамо почленно відповідні коефіцієнти всіх нерівностей обмежень, утвориться загальне обмеження вигляду: $\langle b', x \rangle \leq d'$, де $d' = \sum_{i=1}^m d_i$.

$$b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n), \quad b'_j = \sum_{i=1}^m b_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

2. Упорядкуємо за неспаданням коефіцієнтів обмеження $\langle b', x \rangle \leq d'$.

3. Упорядкуємо елементи множини $C(\tilde{A})$.

4. Перевіримо виконання загального обмеження, утвореного в пункті 2. Застосовуючи твердження знаходимо сполучення, які відповідає максимальному значенню даного обмеження при цьому сполученні. Якщо воно задовольняє обмеження, то всі інші сполучення лексикографічно менші від даного, задовольняють загальне обмеження. У протилежному випадку слід взяти наступне сполучення з упорядкованої лексикографічно множини сполучень, яке менше за попереднє. Після перевірки обмеження нова утворена множина або дорівнює попередній, або має меншу потужність, тобто звужується.

5. Перевіримо перше обмеження, згідно умови задачі аналогічно пункту 4. Якщо при

підстановці у перше обмеження максимального сполучення нерівність виконується, то всі інші сполучення, упорядковані лексикографічно з множини A' теж будуть задовольняти нерівність.

Якщо при підстановці у перше обмеження умова не виконується, то виберемо менше сполучення за попереднє, упорядковане в лексикографічному порядку, згідно алгоритму 1.

6. Перевірка наступних обмежень задачі здійснюється аналогічно пункту 5.

7. Процес відкидання сполучень із загальної множини A' відбувається доки не перевіриться останнє обмеження із множини $Bx \leq d$.

8. Здійснивши перевірку всіх обмежень, новоутворена множина A' є допустимою множиною, де необхідно шукати оптимальні розв'язки, тобто $X = A'$.

II. Знаходження множини Парето-оптимальних розв'язків.

Знаходимо множину Парето-оптимальних векторів $P(Y)$ [9].

Нехай множина можливих векторних оцінок $F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)\} = Y$ складається із скінченного числа l елементів і має вигляд: $Y = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(i)}\}$, де $f_i(x) = y_i, i = 1, \dots, l$.

Для побудови множини Парето, треба кожний з векторів $y^{(i)} \in Y$ (векторну оцінку) порівняти із будь-яким іншим вектором $y^{(j)} \in Y$ за відношенням $\geq$. Якщо для деякої пари векторів нерівність $y^{(i)} \geq y^{(j)}$ виконується, то вектор $y^{(j)}$ за визначенням не може бути Парето-оптимальним. У кінцевому результаті прийдемо до множини Парето.

Алгоритм 2

1. Нехай $P(Y) = Y, i = 1, j = 2$. $P(Y)$ – так звана поточна множина Парето-оптимальних векторів, яка на початку роботи алгоритму співпадає із множиною Y , а наприкінці складе шукану множину Парето-оптимальних векторів, утворену із Y послідовним видаленням завідомо неоптимальних векторів.

2. Перевіримо виконання нерівності $y^{(i)} \geq y^{(j)}$. Якщо вона справедлива, то перейдемо до пункту 3. У протилежному випадку переходимо до пункту 5.

3. Видалимо з поточної множини векторів $P(Y)$ вектор $y^{(j)}$, оскільки він не є Парето-оптимальним. Перейти до пункту 4.

4. Перевіримо виконання нерівності $j < N$.

Якщо вона має місце, то покладемо $j = j + 1$ й повернемося до пункту 2. У протилежному випадку – перейдемо до пункту 7.

5. Перевіримо справедливості нерівності $y^{(i)} \geq y^{(j)}$. Якщо вона істинна, перейдемо до пункту 6. Інакше – повернемося до пункту 4.

6. Видаляємо з поточної множини векторів $P(Y)$ вектор $y^{(j)}$ і переходимо до пункту 7.

7. Перевіримо виконання нерівності $i < N - 1$. У випадку її істинності покладемо $i = i + 1, j = i + 1$ та повернемося до пункту 2. Якщо $i \geq N - 1$, то обчислення закінчені. Множина Парето-оптимальних векторів побудована.

Робота виконана за фінансової підтримки ДФФД (договір № Ф41/196-2012)

Список використаних джерел

- Холстед М.Х. Начала науки о программах. М.: Финансы и статистика, 1981. – 128 с.
- Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
- Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др. / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312с.
- Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208с.
- Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, и др. – М.: Радио и связь, 1989. – 304с.
- Сергиенко И.В., Каспишская М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: – Наук. думка, 1981. – 287 с.
- Семенова Н.В., Колескина Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. – К.: Наук. думка, 2009. – 266 с.
- Семенова Н.В., Колескина Л.М., Нагірна А.М. Багатокритеріальні задачі лексикографічної оптимізації на нечіткій множині альтернатив // Доповіді НАН України. – 2010. – № 6. – С. 42–51.
- Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002. – 144 с.

Надійшла до редколегії 04.06.2012

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н., доц.**Побудова секвенційних числень чистих
першопорядкових композиційно-
номінативних логік однозначних
часткових предикатів**

Для чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік однозначних часткових предикатів побудовано секвенційні числення. Семантичною основою такої побудови є властивості відношення логічного наслідку для множин формул. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

E-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Дана робота присвячена дослідженню синтаксичних властивостей чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік (КНЛ) часткових предикатів. КНЛ – це програмно-орієнтовані логічні формалізми, збудовані на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу [1]. На базі цього підходу розроблено [2] низку різноманітних логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності. КНЛ базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень, – квазіарних відображеннях. Поява таких логік зумовлена наявністю принципових обмежень класичної логіки предикатів, які ускладнюють її використання в інформатиці й програмуванні. КНЛ досліджувались, зокрема, в роботах [2–5]. В даній роботі для чистих першопорядкових КНЛ однозначних квазіарних предикатів (КНЛ кванторного рівня) пропонуються числення секвенційного (генцевського) типу. Такі числення будуються на основі властивостей відношення логічного наслідку для множин формул мови логіки. Характерна їх особливість – використання спеціальних секвенційних форм елімінації кванторів з розгалуженням. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти.

M.S.Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor, S.S.Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Ass. Professor.
M.S.Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor, S.S.Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Ass. Professor.

Sequent calculi construction for pure first-order composition-nominative logics of single-valued partial predicates

Sequent calculi for pure first-order composition-nominative logics of single-valued partial predicates are constructed. Such calculi are semantically based on properties of logical consequence relation for sets of formulas. The soundness and completeness theorems for these calculi are proved.

Key words: logic, predicate, logical consequence, sequent calculus.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2–5].

1. Секвенції. Базові секвенційні форми

Під секвенціями звичайно розуміють [6] об'єкти вигляду $\Gamma \rightarrow \Delta$, де Γ та Δ – скінченні послідовності формул, $\rightarrow$ – символ, що не входить до алфавіту мови логіки. Замість $\rightarrow$ будемо використовувати символ $\vdash$. Секвенційні числення будуються так: секвенція $\Gamma \vdash \Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Для секвенції $\Gamma \vdash \Delta$ формули $\Phi \in \Gamma$ (зліва від $\vdash$) будемо називати T -формулами, а формули $\Psi \in \Delta$ (справа від $\vdash$) – F -формулами.

В цій роботі трактуємо секвенції як множини, а не послідовності формул, що дає змогу не вводити структурні [6] секвенційні форми. Окрім того, беручи до уваги можливість виділення означених та неозначених [3, 4] предметних імен (це істотно для елімінації кванторів), при такому виділенні секвенції відмічаємо множинами цих імен.

Таким чином, секвенція – це об'єкт вигляду $\Gamma, N \vdash \Delta$, де диз'юнктні $W, N \subseteq V$ – це множини означених та неозначених предметних імен.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Це поняття уточнюється по-різному в різних варіантах числень. В загальному випадку логіки квазіарних предикатів маємо такс.

Базова умова замкненості секвенції задається тривіально:

$\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{U}} \vdash \Delta$ замкнена, якщо існує формула Φ така, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Введемо додаткову умову U -замкненості секвенції в даній вершині секвенційного дерева.

$\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{U}} \vdash \Delta$ U -замкнена, якщо існує пара формул $R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} A \in \Gamma$ та $R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} A \in \Delta$ таких, що $R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} A$ та $R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} A$ мають однакові U -неозначувані форми [3, 4].

При інтерпретаціях, де усі імена U не мають значення, формули $R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} A$ та $R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} A$ задають один і той же предикат.

Якщо секвенція $\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{U}} \vdash \Delta$ U -замкнена, то для довільної моделі мови $\mathcal{A}$ маємо $\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{U}} \models \Delta$.

Зокрема, якщо $\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{U}} \vdash \Delta$ U -замкнена, то маємо $\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{U}} \models \Delta$ для довільних $X \subseteq V$: $X \cap U = \emptyset$.

Семантичним властивостям відношення $\models$ зіставимо їх синтаксичні аналоги – секвенційні форми. Це правила виведення секвенційних числень. В запропонованих численнях використовуємо спеціальні секвенційні форм з розгалуженням для елімінації кванторів $\exists$ у правій частині секвенції. Такі форми параметризовані за множинами виділених означених та неозначених імен, вони мають скінченну кількість засновків (відповідно до множини означених імен).

Секвенційні форми записуватимемо у вигляді $\frac{Y}{\mathcal{U}}$ або $\frac{Y_1 \dots Y_n}{\mathcal{U}}$.

Секвенції над ризико називають *засновками*, під ризико – *висновками*.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева із скінченням розгалуженням, вершинами якого є секвенції. Дамо індуктивне визначення секвенційного дерева.

1) Секвенція Σ утворює тривіальне дерево з єдиною вершиною Σ , яка є коренем дерева.

2) Нехай α – секвенційне дерево з коренем Σ , $\frac{Y}{\mathcal{U}}$ – секвенційна форма. Тоді $\frac{\alpha}{\mathcal{U}}$ – секвенційне дерево з коренем Ω .

3) Нехай α – секвенційне дерево з коренем Σ , $\beta_1, \dots, \beta_n$ – секвенційні дерева з коренями $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, $\frac{Y_1 \dots Y_n}{\mathcal{U}}$ – секвенційна форма. Тоді $\frac{\alpha}{\mathcal{U}}$ – секвенційне дерево з коренем Ω .

Секвенційне дерево замкнене, якщо кожен його лист (кінцева вершина, відмінна від кореня) –

замкнена секвенція. Тривіальне секвенційне дерево замкнене, якщо це замкнена секвенція.

Секвенційне дерево з коренем Σ називають деревом секвенції Σ .

Секвенція Σ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ . Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції Σ .

Секвенція X – *наступник* секвенції Y у дереві δ з коренем Σ , якщо в дереві δ існує шлях $\Sigma = \Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots, \Sigma_m, \dots$ такий, що $X = \Sigma_n$ та $Y = \Sigma_m$.

Беручи до уваги відомі [3–5] семантичні властивості $RT_{\vdash}$, $RT_{\vdash}$, $\Phi N_{\vdash}$, $\Phi N_{\vdash}$, $R\exists R_{\vdash}$, $R\exists R_{\vdash}$, $RR_{\vdash}$, $RR_{\vdash}$, $R\forall_{\vdash}$, $R\forall_{\vdash}$, $R\forall_{\vdash}$, $R\forall_{\vdash}$, $\neg_{\vdash}$, $\neg_{\vdash}$, $\vee_{\vdash}$, $\vee_{\vdash}$ відношення $\models$ логічного наслідку для множин формул, вводимо відповідні базові секвенційні форми – синтаксичні аналоги цих властивостей.

$$\begin{array}{ll} RT_{\vdash} \frac{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Gamma \vdash \Delta}{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Gamma \vdash \Delta} & RT_{\vdash} \frac{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Delta}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Delta} \\ \Phi N_{\vdash} \frac{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Gamma \vdash \Delta}{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Gamma \vdash \Delta} & \Phi N_{\vdash} \frac{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Delta}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Delta} \end{array}$$

Для форм $\Phi N_{\vdash}$ та $\Phi N_{\vdash}$ умова: $u \in V(A)$.

$$\begin{array}{ll} R\exists R_{\vdash} \frac{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\exists x A), \Gamma \vdash \Delta}{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\exists x A), \Gamma \vdash \Delta} & R\exists R_{\vdash} \frac{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\exists x A), \Delta}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\exists x A), \Delta} \end{array}$$

Для форм $R\exists R_{\vdash}$ та $R\exists R_{\vdash}$ умова: $x \in (U)$.

Наведені нижче форми $R\exists p_{\vdash}$ та $R\exists p_{\vdash}$ є окремим випадком форм $R\exists R_{\vdash}$ та $R\exists R_{\vdash}$:

$$\begin{array}{ll} R\exists p_{\vdash} \frac{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta}{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\exists x A), \Gamma \vdash \Delta} & R\exists p_{\vdash} \frac{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\exists x A), \Delta} \end{array}$$

Секвенційні форми типів RT , ΦN , $R\exists R$, $R\exists p$ назвемо *допоміжними*.

$$\begin{array}{ll} RR_{\vdash} \frac{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} \circ_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}(A), \Gamma \vdash \Delta}{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A)), \Gamma \vdash \Delta} & RR_{\vdash} \frac{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}} \circ_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}(A), \Delta}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A)), \Delta} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} R\neg_{\vdash} \frac{\neg R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Gamma \vdash \Delta}{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\neg A), \Gamma \vdash \Delta} & R\neg_{\vdash} \frac{\Gamma \vdash \neg R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A), \Delta}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(\neg A), \Delta} \end{array}$$

$$R\vee_{\vdash} \frac{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A) \vee R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(B), \Gamma \vdash \Delta}{R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A \vee B), \Gamma \vdash \Delta}$$

$$R\vee_{\vdash} \frac{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A) \vee R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(B), \Delta}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{A}}^{\mathcal{U}}(A \vee B), \Delta}$$

$$\vdash \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \quad \neg \vdash \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

$$\vee \vdash \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \quad \vee \vdash \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

Застосування наведених вище секвенційних

форм не змінює множини виділених означених та неозначених імен. Це не так для форм елімінації кванторів. Такі форми базуються на наступних семантичних властивостях (див. також [5]).

Нехай $z \in nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ та z тотожно строго неістотне, тоді при $z \in X$ масмо:

$$\exists x(\Gamma \vdash) \exists x\Phi, \Gamma_{x \vdash} \vdash \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \Gamma_{\{x\} \cup x \vdash} \vdash \Delta \Leftrightarrow R_x^z(\Pi), \Gamma_{\{x\} \cup x \vdash} \vdash \Delta;$$

Нехай $z \in nm(\Gamma, \Delta, R_x^z(\exists x\Pi))$, z тотожно строго неістотне, $x \in \{\bar{u}\}$. Тоді при $z \in X$ масмо:

$$\exists R_{x \vdash}(\exists x\Pi), R_x^z(\exists x\Pi), \Gamma_{x \vdash} \vdash \Delta \Leftrightarrow R_x^z(\exists x\Pi), \Gamma_{\{x\} \cup x \vdash} \vdash \Delta.$$

Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини. Тоді масмо (тут $x \in \{\bar{u}\}$):

$$Br\exists \vdash \Gamma_{A, W \cup U} \vdash \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \text{для кожної } Y \subseteq Z \Gamma_{A, W \cup U \cup (A \cap Z \cap Y)} \vdash \Delta, \exists x\Phi, R_{Y_1}^x(\Pi), \dots, R_{Y_n}^x(\Pi), \dots, \text{ де всі } y_i \in W \cup U.$$

$$Br\exists R \vdash \Gamma_{A, W \cup U} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x\Pi) \Leftrightarrow \text{для кожної } Y \subseteq Z \Gamma_{A, W \cup U \cup (A \cap Z \cap Y)} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x\Pi), R_{Y_1}^{w,x}(\Pi), \dots, R_{Y_n}^{w,x}(\Pi), \dots, \text{ де всі } y_i \in W \cup U.$$

При $Z = \emptyset$ масмо нерозгалужені $\exists s \vdash \exists R s$:

$$\exists s \vdash \Gamma_{A, W \cup U} \vdash \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{A, W \cup U} \vdash \Delta, \exists x\Phi, R_{Y_1}^x(\Pi), \dots, R_{Y_n}^x(\Pi), \dots;$$

$$\exists R s \vdash \Gamma_{A, W \cup U} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x\Pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{A, W \cup U} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x\Pi), R_{Y_1}^{w,x}(\Pi), \dots, R_{Y_n}^{w,x}(\Pi), \dots.$$

Тут всі $z_i \in W$ та $x \in \{\bar{u}\}$.

Нехай $Z \subseteq V$. Тоді масмо (тут $x \in \{\bar{u}\}$):

$$Br\exists f \vdash \Gamma_A \vdash \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \text{для кожної непорожньої } Y \subseteq Z \text{ масмо } \Gamma_{A, Y \cup (Z \cap Y)} \vdash \Delta, \exists x\Phi, R_{Y_1}^x(\Pi), \dots, R_{Y_n}^x(\Pi), \dots, \text{ (тут всі } y_i \in Y) \text{ та } \Gamma_{A, \{y\} \cup Z} \vdash \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Pi), \text{ де } i$$

тотожно строго неістотне, $i \in nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$;

$$Br\exists R f \vdash \Gamma_A \vdash \Delta, R_x^z(\exists x\Pi) \Leftrightarrow \text{для кожної непорожньої } Y \subseteq Z \text{ масмо}$$

$$\Gamma_{A, Y \cup (Z \cap Y)} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x\Pi), R_{Y_1}^{w,x}(\Pi), \dots, R_{Y_n}^{w,x}(\Pi), \dots,$$

(тут всі $y_i \in Y$) та $\Gamma_{A, \{y\} \cup Z} \vdash \Delta, R_y^z(\exists x\Pi), R_{y_j}^{w,x}(\Pi)$, де

i тотожно строго неістотне, $i \in nm(\Gamma, \Delta, R_x^z(\exists x\Pi))$.

Вводимо два види форм елімінації кванторів: елімінації квантора під реномінацією ($\exists R$ -форми) та елімінації зовнішнього квантора ($\exists$ -форми).

Форми елімінації кванторів $\exists x$ у лівій частині:

$$\exists R \vdash \frac{R_x^z(A), \Gamma_{\{x\} \cup W \cup U} \vdash \Delta}{R_x^z(\exists x A), \Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta} \quad \exists \vdash \frac{R_x^z(A), \Gamma_{\{x\} \cup W \cup U} \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta}$$

Тут W та U – множини виділених означених та

неозначених імен.

Для $\exists R \vdash$ ім'я $x \in \{\bar{u}\}$, ім'я z тотожно строго неістотне та $z \in nm(\Gamma, \Delta, R_x^z(\exists x\Pi))$; для $\exists \vdash$ ім'я z тотожно строго неістотне та $z \in nm(\Gamma, \Delta, \exists x A)$.

Форми $\exists R \vdash$ та $\exists \vdash$ є синтаксичними аналогами семантичних властивостей $\exists R_{x \vdash} \vdash$ та $\exists_{x \vdash} \vdash$. Будемо їх називати $\exists_L$ -формами.

Врахування множин виділених означених та неозначених імен при елімінації $\exists x$ у правій частині секвенцій дає параметризовані багатозасновкові секвенційні форми $\exists R \vdash$ та $\exists \vdash$. При їх запису використасмо квадратні дужки для того, щоб вказати засновки для різних розподілів імен на означені та неозначені.

$$\exists R \vdash \frac{[\Gamma_{W \cup U \cup (U \cap X \cap Y)} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x A), \{R_{y_j}^{w,x}(A)\}_{z \in W \cup U} \vdash \exists x \Gamma]}{\Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x A)} \\ \exists \vdash \frac{[\Gamma_{W \cup U \cup (U \cap X \cap Y)} \vdash \Delta, \exists x A, \{R_y^x(A)\}_{z \in W \cup U} \vdash \exists x \Gamma]}{\Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta, \exists x A}$$

Тут W та U – множини виділених означених та неозначених імен, X – множина "нових" імен, ще не розподілених на означені й неозначені.

У випадку $X = \emptyset$ масмо однозасновкові форми $\exists R s \vdash$ та $\exists s \vdash$:

$$\exists R s \vdash \frac{\Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x A), \{R_{y_j}^{w,x}(A)\}_{z \in W}}{\Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x A)} \\ \exists s \vdash \frac{\Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta, \exists x A, \{R_y^x(A)\}_{z \in W}}{\Gamma_{W \cup U} \vdash \Delta, \exists x A}$$

Для випадку, коли у висновку множини означених та неозначених імен ще не виділені, масмо форми $\exists R f \vdash$ та $\exists f \vdash$.

$$\exists R f \vdash \frac{Y \quad \Gamma_{\{y\} \cup X} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x A), R_{y_j}^{w,x}(A)}{\Gamma \vdash \Delta, R_x^z(\exists x A)}, \text{ де } \Sigma - \text{це}$$

$$[\Gamma_{Y \cup (X \cap Y)} \vdash \Delta, R_x^z(\exists x A), \{R_{y_j}^{w,x}(A)\}_{z \in Y} \vdash \Sigma \cap Y \cap X]$$

$$\exists f \vdash \frac{O \quad \Gamma_{\{y\} \cup X} \vdash \Delta, \exists x A, R_y^x(A)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}, \text{ де } \Xi - \text{це}$$

$$[\Gamma_{Y \cup (X \cap Y)} \vdash \Delta, \exists x A, \{R_y^x(A)\}_{z \in Y} \vdash \Xi \cap Y \cap X]$$

Для $\exists R f \vdash$ ім'я i тотожно строго неістотне та $i \in nm(\Gamma, \Delta, R_x^z(\exists x\Pi))$; для $\exists R \vdash$ ім'я i тотожно строго неістотне та $i \in nm(\Gamma, \Delta, \exists x A)$.

Форми $\exists R \vdash$, $\exists \vdash$, $\exists R s \vdash$, $\exists s \vdash$, $\exists R f \vdash$, $\exists f \vdash$ є синтаксичними аналогами семантичних властивостей $Br\exists R$, $Br\exists$, $\exists R s$, $\exists s$, $Br\exists R f$, $Br\exists f$. Будемо їх називати $\exists_R$ -формами.

Форми типів RR , $R \vdash$, $\neg$, $\vee$, а також форми $\exists R \vdash$, $\exists \vdash$, $\exists R \vdash$, $\exists \vdash$, $\exists R s \vdash$, $\exists s \vdash$, $\exists R f \vdash$, $\exists f \vdash$.

$\exists\text{-}\neg$, віднесемо до основних базових форм.

Секвенційні числення логік одозначених квазі-арних предикатів із наведеними вище базовими секвенційними формами назвемо *QC-численнями*.

2. Побудова секвенційного дерева

Опишемо процедуру побудови секвенційного дерева для заданої секвенції Σ . Вона орієнтована на скінченні й злічені секвенції.

Для загального випадку логіки квазіарних предикатів треба враховувати той факт, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому при інтерпретаціях формул необхідно явно вказувати множини означених та неозначених імен. В процедурі побудови секвенційного дерева ця особливість проявляється при формуванні прикладів для F -формули вигляду $\exists xF$ та $R_y^x(\exists x\Omega)$ за допомогою $\exists\text{-}$ форм: приклади можуть відповідно мати тільки вигляд $R_y^x(\Omega)$ та $R_{y,x}^x(\Omega)$, де $\text{im}'x, y$ – означене.

Таким чином, при застосуванні $\exists\text{-}$ форм треба перебрати всі можливі випадки розподілу наявних предметних імен на означені й неозначені. Це реалізуємо за допомогою форм $\exists R\text{-}$, $\exists\text{-}$, $\exists R\text{-}$, $\exists\text{-}$, параметризованих за множинами виділених означених та неозначених імен: якщо $\exists\text{-}$ форма застосовується вперше на етапі, нехай у вершині Ξ до F -формули вигляду $\exists xF$ чи $R_y^x(\exists x\Omega)$, то для Ξ є будуватися скінченна кількість вершин "сестер", які є безпосередніми предками Ξ та відрізняються лише множинами означених імен та відповідними множинами прикладів вигляду $R_y^x(\Omega)$ чи $R_{y,x}^x(\Omega)$.

Процедура побудови дерева для секвенції Σ починається з кореня дерева. Таку процедуру розіб'ємо на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул.

На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає: до списку доступних формул додаємо по одній зі списку T -формул та списку F -формул. Якщо в секвенції немає недоступних T -формул чи F -формул (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку.

На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (або єдина T -формула чи F -формула, якщо один зі списків порожній).

Перед побудовою дерева зафіксуємо деякий список TN (нескінченний) totallyно строго неістинних імен ("нових" імен) такий, що імена із

TN не зустрічаються у формулах секвенції Σ .

Із кожною вершиною дерева пов'язуємо множину наявних та множини означених предметних імен. Множина наявних імен – це множина імен усіх формул, які доступні на шляху від кореня до даної вершини. Множина означених імен явно виділяється лише на шляхах, де були хоч раз застосовані $\exists\text{-}$ форми чи $\exists R\text{-}$ форми, при цьому гарантовано означеними є totallyно строго неістинні імена, введені формами $\exists\text{-}$, $\exists R\text{-}$, $\exists R\text{-}$, $\exists\text{-}$ на шляху від кореня до даної вершини.

Незамкнена вершина-секвенція *фінальна*, якщо до неї вже незастосована жодна секвенційна форма, або якщо кожне застосування до неї секвенційної форми не вводить нових формул (відмінних від формул на шляху до неї від кореня). Останнє означає ситуацію повторення незамкненої секвенції – стабілізацію на даному шляху.

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі $k+1$ перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенції).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, отримано замкнену секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції Σ перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією. Поява фінальної секвенції Ω сигналізує про негативне завершення процедури побудови дерева та про наявність в ньому шляху (від кореня Σ до даної Ω), всі вершини якого незамкнені – незамкненого шляху.

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ наступним чином.

(1) Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ .

(2) До кожної активної формули застосовуємо відповідну основну секвенційну форму; це робимо так, як описано нижче.

В процесі застосування основних форм усуваємо (при наявності) тотожні перейменування та пари імен реномінації за неістинним чи квантифікованим верхнім іменем, застосовуючи належну кількість разів форми типу RT , ΦN , $R\exists R$, $R\exists R$.

Спочатку виконуємо (якщо це можливо) всі $\exists\text{-}$ форми. Кожне застосування такої форми додає нове totallyно неістинне ім'я z до множини означених імен вершини, таке z беремо як перше незадіяне на даному шляху від кореня ім'я зі списку TN . Ім'я z гарантовано означене, додаємо його до множин наявних та означених імен (далі для кожної доступної F -формули вигляду $\exists xF$ чи

$R_{\exists}^{\bar{x}}(\exists x \Pi)$ додамо приклад $R_{\exists}^x(\Pi)$ чи $R_{\exists}^{\bar{x},x}(\Pi)$.

Після цього до кожної з решти активних формул застосуємо відповідну форму – одну з форм типів RR , $R\neg$, Rv , $\neg$, v . Вони не змінюють множини наявних та означених імен.

Далі застосуємо $\exists_{\bar{x}}$ -форми. Це робимо так.

1. Нехай Z – множина наявних імен вершини, причому множини означених та неозначених імен ще не виділені. Це означає, що застосувань форм елімінації квантора на шляху від кореня дерева до даної вершини ще не було, першим таким застосуванням буде $\exists_{\bar{x}}$ -форма. Застосовуючи $\exists R \neg$ (до $R_{\exists}^{\bar{x}}(\exists x \Pi)$) чи $\exists \neg$ (до $\exists x \Phi$), із даної вершини будемо скінченне розгалуження дерева. Для цього розглядаємо всі можливі розподіли імен Z на означені (утворюють $Y \subseteq Z$) та неозначені (утворюють $Z \setminus Y$). Для кожної $Y \subseteq Z$ будемо безпосереднього предка даної вершини-секвенції, додаючи приклади вигляду $R_{\exists}^{\bar{x},x}(\Pi)$ чи $R_{\exists}^x(\Pi)$ для кожного $x \in Y$. При цьому для вершини-предка із $Y = \emptyset$ беремо (зі списку TN) нове тотально строго неістотне t (не гарантує збереження відношення логічного наслідку) і додаємо приклад вигляду $R_{\exists}^x(\Pi)$ чи $R_{\exists}^{\bar{x},x}(\Pi)$; для такої

вершини-предка t – означене, Z – множина неозначених, $\{t\} \cup Z$ – множина наявних імен.

2. Нехай $W \cup U \cup X$ – множина наявних імен вершини, де $W \neq \emptyset$ – множина означених, U – неозначених, $X \neq \emptyset$ – множина нерозподілених імен.

Якщо на шляху від кореня дерева до даної вершини $\exists_{\bar{x}}$ -форма застосовується вперше, проте на шляху вже були застосування $\exists_L$ -форм, то в даній вершині виділено множини W означених імен (вони тотально неістотні гарантовано означені), $U = \emptyset$, X – множина всіх інших наявних імен, вони ще не розподілені на означені та неозначені.

Якщо маємо перше на етапі застосування $\exists_{\bar{x}}$ -форми, проте на шляху від кореня до даної вершини застосування $\exists_{\bar{x}}$ -форм вже були, то X – множина імен нових доступних формул, доданих на початку етапу (від початку етапу можливе розширення множини означених імен $\exists_L$ -формами).

В обох випадках маємо застосування до F -формули $R_{\exists}^{\bar{x}}(\exists x \Pi)$ чи $\exists x \Phi$ форми $\exists R \neg$ чи $\exists \neg$. Розглядаючи всі можливі розподіли імен X на означені (утворюють $Y \subseteq X$) й неозначені (утворюють $X \setminus Y$), для кожної $Y \subseteq X$ будемо безпосереднього предка даної вершини, додаючи в ньому приклади вигляду $R_{\exists}^{\bar{x},x}(\Pi)$ чи $R_{\exists}^x(\Pi)$ для кожного $x \in Y \cup U$.

3. Нехай маємо не перше застосування на етапі

$\exists_{\bar{x}}$ -форми. Тоді в даній вершині виділено множини $W \neq \emptyset$ означених та U неозначених імен, нерозподілених імен немає, множиною наявних імен вершини є $W \cup U$. Застосовуючи до F -формули $R_{\exists}^{\bar{x}}(\exists x \Pi)$ чи $\exists x \Phi$ однозасновкову форму $\exists R \neg$ чи $\exists \neg$, добудуємо єдиного безпосереднього предка даної вершини-секвенції, додаючи приклади вигляду $R_{\exists}^{\bar{x},x}(\Pi)$ чи $R_{\exists}^x(\Pi)$ для кожного $x \in W$.

Зауважимо, що при повторному застосуванні до даної F -формули $\exists_{\bar{x}}$ -форми ми фактично додаємо лише приклади для нових означених на даному етапі імен, адже для означених на попередніх етапах імен такі приклади вже додані попередніми застосуваннями $\exists_{\bar{x}}$ -форм.

Після виконання основної секвенційної форми (відмінної від форм RT , ΦN , $R\exists R$, $R\exists p$) утворені нею формули пасивні, до цих формул на даному етапі основні форми вже не застосовні. Всі повторні F -формули та T -формули у секвенціях усуваємо.

При появі замкненої секвенції до неї вже не застосовна жодна форма, і процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

- 1) Процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.
- 2) Процедуру завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево.
- 3) Процедура не завершується, маємо нескінченне секвенційне дерево. За лемою Кеніга [6] нескінченне дерево зі скінченим розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях.

Отже, у випадках 2) і 3) у дереві існує незамкнений шлях ρ , всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінається на шляху ρ і стане доступною.

3. Коректність та повнота QC -числень

Нехай секвенція $\Gamma \vdash \Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево.

Із наведеної вище процедури побудови секвенційного дерева випливає, що для кожної його вершини $\Lambda \vdash K$ з множинами означених імен W та неозначених імен U справджується $\Lambda_{\bar{x},x} \vdash K$ для кожної моделі мови A .

Для листів дерева це випливає з визначень замкненої та U -замкненої секвенції.

Збереження секвенційними формами зазначеного вище відношення логічного наслідку (від засновків до висновків) виконується для допоміжних форм типу RT , ΦN , $R\exists R$, $R\exists p$ та основних форм типу типу RR , $R\neg$, Rv , $\neg$, v . Це випливає із відпо-

відних властивостей типу RT , ΦN , $R\exists R$, RR , $R\neg$, $R\vee$, $\neg$ для відношення $\models$.

Для $\exists$ -форм та $\exists R$ -форм збереження відповідних відношень логічного наслідку від засновку до висновку впливає з властивостей $\exists R_{\neg, \neg}$ та $\exists R_{\neg, \neg}$.

Для форм $\exists R$ - та $\exists$ -такі збереження гарантується властивостями $B\exists R$ та $B\exists$, для форм $\exists R$ - та $\exists$ -такі властивостями $\exists R$ та $\exists$, для форм $\exists R$ - та $\exists$ -такі властивостями $B\exists R$ та $B\exists$.

Таким чином, для побудованого QC -числення справджується теорема коректності.

Теорема 1. Нехай $\Gamma \vdash \Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Доведення повноти QC -числень базується на методі модельних (хітківських) множин [7, 2].

Нехай $H = (L, R)$ – пара множин формул із виділеною множиною $W \subseteq \text{nm}(L \cup R)$ означених імен; тоді $U = \text{nm}(L \cup R) \setminus W$ – множина її неозначених імен. Така пара $H = (L, R)$ модельна, якщо виконуються наступні умови.

НС) Для кожної примітивної формули Φ неможливо $\Phi \in L$ та $\Phi \in R$.

НСУ) Не існує пари примітивних формул вигляду

$R_x^t A \in L$ та $R_y^t A \in R$ таких, що $R_x^t A$ та $R_y^t A$ мають однакові U -неозначувані форми.

НRT) Якщо $R_{x,x}^t(1) \in L$, то $R_x^t(1) \in L$;

якщо $R_{x,x}^t(1) \in R$, то $R_x^t(1) \in R$.

НFN) Якщо $R_{x,x}^t(1) \in L$ та $u \in v(\Phi)$, то $R_x^t(1) \in L$;

якщо $R_{x,x}^t(1) \in R$ та $u \in v(\Phi)$, то $R_x^t(1) \in R$.

НRR) Якщо $R_x^t(\exists x 1) \in L$, то $\exists x \Phi \in L$;

якщо $R_x^t(\exists x 1) \in R$, то $\exists x \Phi \in R$.

НRR) Якщо $R_{x,y}^t(\exists x 1) \in L$, то $R_x^t(\exists x 1) \in L$;

якщо $R_{x,y}^t(\exists x 1) \in R$, то $R_x^t(\exists x 1) \in R$.

НRR) Якщо $R_x^t(R_y^t(1)) \in L$, то $R_x^t \circ R_y^t(1) \in L$;

якщо $R_x^t(R_y^t(1)) \in R$, то $R_x^t \circ R_y^t(1) \in R$.

НRR) Якщо $R_x^t(\neg 1) \in L$, то $\neg R_x^t(1) \in L$;

якщо $R_x^t(\neg 1) \in R$, то $\neg R_x^t(1) \in R$.

НRR) Якщо $R_x^t(1 \vee 1) \in L$, то $R_x^t(1) \vee R_x^t(1) \in L$;

якщо $R_x^t(1 \vee 1) \in R$, то $R_x^t(1) \vee R_x^t(1) \in R$.

НRR) Якщо $\neg \Phi \in L$, то $\Phi \in R$; якщо $\neg \Phi \in R$, то $\Phi \in L$.

НRR) Якщо $\Phi \vee \Psi \in L$, то $\Phi \in L$ або $\Psi \in L$;

якщо $\Phi \vee \Psi \in R$, то $\Phi \in R$ та $\Psi \in R$.

НRR) Якщо $\exists x \Phi \in L$, то існує $u \in W$: $R_x^t(1) \in L$;

якщо $\exists x \Phi \in R$, то $R_x^t(1) \in R$ для всіх $u \in W$.

НRR) Якщо $R_x^t(\exists x 1) \in L$, то $R_{x,y}^t(1) \in L$ для деякого $u \in W$;

якщо $R_x^t(\exists x 1) \in R$, то $R_{x,y}^t(1) \in R$ для всіх $u \in W$.

Для $HR\exists R$ та $HR\exists$ очевидна умова: $x \in \{u\}$.

Теорема 2. Нехай ρ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, L та R – множини всіх T -формули та F -формули секвенції цього шляху. Тоді існують модель мови $A = (I, \models)$ та $\delta \in {}^I A$ такі:

1) $\Phi \in L \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$; 2) $\Phi \in R \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$.

Доведення. Нехай W – множина усіх означених предметних імен, що фігурують у формулах шляху ρ . Застосування секвенційних форм на шляху ρ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна неспривітна формула, що зустрічається на шляху ρ , рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою. Усі секвенції шляху ρ незамкнені, тому виконуються умови НС та НСУ – умови коректності модельної пари множин.

Переходи від нижчої вершини шляху до вищої виконуються згідно з секвенційними формами QC -числення. Такі переходи індукують відповідні пункти визначення модельної пари множин. Покажемо це для форм елімінації кванторів (для інших секвенційних форм це очевидно).

Нехай $\exists x \Phi \in L$, тоді на деякому кроці виведення на шляху ρ до T -формули $\exists x \Phi$ була застосована $\exists$ -форма, яка дала приклад – T -формулу $R_x^t(1)$. Тоді $R_x^t(1) \in L$, причому у означенні, тому $u \in W$. Отже, $R_x^t(1) \in L$ для деякого $u \in W$.

Нехай $R_x^t(\exists x 1) \in L$, тоді на деякому кроці виведення на шляху ρ до T -формули $R_x^t(\exists x 1)$ була застосована $\exists R$ -форма, яка дала приклад – T -формулу $R_{x,y}^t(\exists x 1)$. Тоді $R_{x,y}^t(1) \in L$, таке у означенні, тому $u \in W$. Отже, $R_{x,y}^t(1) \in L$ для деякого $u \in W$.

Нехай $\exists x \Phi \in R$; тоді при активізації цієї F -формули до відповідної вершини-секвенції додаються, згідно відповідної $\exists R$ -форми ($\exists R$ -, $\exists R$ - чи $\exists R$ -), її приклади – F -формули $R_x^t(1)$ – для кожного означеного в такій вершині імені u . Таким чином, якщо $\exists x \Phi \in R$, то $R_x^t(1) \in R$ для всіх $u \in W$.

Нехай $R_x^t(\exists x 1) \in R$; тоді при активізації цієї F -формули до відповідної вершини-секвенції додаються, згідно відповідної $\exists R$ -форми ($\exists R$ -, $\exists R$ - чи $\exists R$ -), її приклади – F -формули $R_{x,y}^t(1)$ – для

кожного означеного в цій вершині імені y . Отже, якщо $R_y^{\bar{v}}(\exists x11) \in R$, то $R_{x,y}^{\bar{v},x}(11) \in R$ для всіх $y \in W$.

Таким чином, $H = (L, R)$ – модельна пара.

Нехай W – множина усіх означених предметних імен, що фігурують у H . Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деяку ін'єктивну $\delta \in {}^W A$ з $\text{im}(\delta) = W$. Така A дублює множину W .

Задамо значення базових предикатів на δ та на іменних множинах вигляду $r_{\frac{v}{x}}(\delta)$.

Якщо $p \in L$, то задамо $p_A(\delta) = T$;

якщо $p \in R$, то задамо $p_A(\delta) = F$.

Якщо $R_y^{\bar{v}}(p) \in L$, то задамо $p_A(r_{\frac{v}{y}}(\delta)) = T$;

якщо $R_y^{\bar{v}}(p) \in R$, то задамо $p_A(r_{\frac{v}{y}}(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів задаємо довільним чином, беручи до уваги такі обмеження: для всіх $d, h \in {}^W A$ таких, що $d \Vdash \neg v(p) = h \Vdash \neg v(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$. Це гарантує, що імена $y \in v(p)$ строго неістинні для p_A .

Значення базових предикатів задані однозначно. Справді, неоднозначність означає: для деяких $r_{\frac{v}{x,z}}^{\bar{v},x}$ та $r_{\frac{v}{x,y}}^{\bar{v},x}$ маємо $r_{\frac{v}{x,z}}^{\bar{v},x}(\delta) = r_{\frac{v}{x,y}}^{\bar{v},x}(\delta)$, $R_{x,z}^{\bar{v},x}(p) \in L$, $R_{x,y}^{\bar{v},x}(p) \in R$. Тоді $R_{x,z}^{\bar{v},x}(p) \in L$ дає $p_A(r_{\frac{v}{x,z}}^{\bar{v},x}(\delta)) = T$, водночас $R_{x,y}^{\bar{v},x}(p) \in R$ дає $p_A(r_{\frac{v}{x,y}}^{\bar{v},x}(\delta)) = F$. Згідно $r_{\frac{v}{x,z}}^{\bar{v},x}(\delta) = r_{\frac{v}{x,y}}^{\bar{v},x}(\delta)$ маємо $p_A(r_{\frac{v}{x,z}}^{\bar{v},x}(\delta)) = p_A(r_{\frac{v}{x,y}}^{\bar{v},x}(\delta))$ – суперечність. Таким чином, значення базових предикатів визначені коректно.

Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з побудовою модельної пари H .

Для формул формул вигляду $R_x^{\bar{v}}(p)$ і атомарних формул твердження 1) та 2) теореми випливають із визначення значень базових предикатів.

Доведемо крок індукції для тверджень 1) та 2).

Нехай $R_{x,z}^{\bar{v},x}(11) \in L$. За HRT тоді $R_x^{\bar{v}}(11) \in L$. За припущенням індукції $(R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = T$, звідки $(R_{x,z}^{\bar{v},x}(11))_A(\delta) = T$.

Нехай $R_{x,z}^{\bar{v},x}(11) \in R$. За HRT тоді $R_x^{\bar{v}}(11) \in R$. За припущенням індукції $(R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = F$, звідки $(R_{x,z}^{\bar{v},x}(11))_A(\delta) = F$.

Нехай $R_{x,z}^{\bar{v},x}(11) \in L$ та $y \in v(\Phi)$. Згідно НФН маємо $R_x^{\bar{v}}(11) \in L$. За припущенням індукції $(R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = T$, звідки $(R_{x,z}^{\bar{v},x}(11))_A(\delta) = T$.

Нехай $R_{x,z}^{\bar{v},x}(11) \in R$ та $y \in v(\Phi)$. Згідно НФН

маємо $R_x^{\bar{v}}(11) \in R$. За припущенням індукції $(R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = F$, звідки $(R_{x,z}^{\bar{v},x}(11))_A(\delta) = F$.

Нехай $R_y^{\bar{v}}(\exists x11) \in L$. Згідно HR $\exists$ р тоді $\exists x\Phi \in L$. За припущенням індукції $(\exists x\Phi)_A(\delta) = T$, звідки $(R_y^{\bar{v}}(\exists x11))_A(\delta) = T$.

Нехай $R_y^{\bar{v}}(\exists x11) \in R$. Згідно HR $\exists$ р тоді $\exists x\Phi \in R$. За припущенням індукції $(\exists x\Phi)_A(\delta) = F$, звідки $(R_y^{\bar{v}}(\exists x11))_A(\delta) = F$.

Нехай $R_{x,y}^{\bar{v},x}(\exists x11) \in L$. Згідно HR $\exists$ R маємо $R_x^{\bar{v}}(\exists x11) \in L$. За припущенням індукції тоді $(R_x^{\bar{v}}(\exists x11))_A(\delta) = T$, звідки $(R_{x,y}^{\bar{v},x}(\exists x11))_A(\delta) = T$.

Нехай $R_{x,y}^{\bar{v},x}(\exists x11) \in R$. Згідно HR $\exists$ R маємо $R_x^{\bar{v}}(\exists x11) \in R$. За припущенням індукції тоді $(R_x^{\bar{v}}(\exists x11))_A(\delta) = F$, звідки $(R_{x,y}^{\bar{v},x}(\exists x11))_A(\delta) = F$.

Нехай $R_x^{\bar{v}}(R_y^{\bar{v}}(11)) \in L$. Згідно HRR маємо $R_x^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{v}}(11) \in L$. За припущенням індукції тоді $(R_x^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = T$, звідки $(R_x^{\bar{v}}(R_y^{\bar{v}}(11)))_A(\delta) = T$.

Нехай $R_x^{\bar{v}}(R_y^{\bar{v}}(11)) \in R$. Згідно HRR маємо $R_x^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{v}}(11) \in R$. За припущенням індукції тоді $(R_x^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = F$, звідки $(R_x^{\bar{v}}(R_y^{\bar{v}}(11)))_A(\delta) = F$.

Нехай $R_x^{\bar{v}}(\neg 11) \in L$. Згідно HR $\neg$ $\neg R_x^{\bar{v}}(11) \in L$. За припущенням індукції тоді $(\neg R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = T$, звідки $(R_x^{\bar{v}}(\neg 11))_A(\delta) = T$.

Нехай $R_x^{\bar{v}}(\neg 11) \in R$. Згідно HR $\neg$ $\neg R_x^{\bar{v}}(11) \in R$. За припущенням індукції тоді $(\neg R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = F$, звідки $(R_x^{\bar{v}}(\neg 11))_A(\delta) = F$.

Нехай $R_x^{\bar{v}}(11 \vee 11) \in L$. Згідно HR $\vee$ маємо $R_x^{\bar{v}}(11) \vee R_x^{\bar{v}}(11) \in L$. За припущенням індукції тоді $(R_x^{\bar{v}}(11) \vee R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = T$, тому $(R_x^{\bar{v}}(11 \vee 11))_A(\delta) = T$.

Нехай $R_x^{\bar{v}}(11 \vee 11) \in R$. Згідно HR $\vee$ маємо $R_x^{\bar{v}}(11) \vee R_x^{\bar{v}}(11) \in R$. За припущенням індукції тоді $(R_x^{\bar{v}}(11) \vee R_x^{\bar{v}}(11))_A(\delta) = F$, тому $(R_x^{\bar{v}}(11 \vee 11))_A(\delta) = F$.

Нехай $\neg \Phi \in L$. Згідно H $\neg$ тоді $\Phi \in R$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta) = F$, звідки $(\neg \Phi)_A(\delta) = T$.

Нехай $\neg \Phi \in R$. Згідно H $\neg$ тоді $\Phi \in L$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta) = T$, звідки $(\neg \Phi)_A(\delta) = F$.

Нехай $\Phi \vee \Psi \in L$. За H $\vee$ маємо $\Phi \in L$ або $\Psi \in L$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta) = T$ або $\Psi_A(\delta) = T$, звідки $(\Phi \vee \Psi)_A(\delta) = T$.

Нехай $\Phi \vee \Psi \in R$. За $\Pi \Vdash$ маємо $\Phi \in R$ та $\Psi \in R$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta) = F$ та $\Psi_A(\delta) = F$, звідси $(\Phi \vee \Psi)_A(\delta) = F$.

Нехай $\exists x \Phi \in L$. Згідно НЗ тоді існує $y \in W$ таке, що $R^y_{\Phi}(\Pi) \in L$. За припущенням індукції маємо $(R^y_{\Phi}(\Pi))_A(\delta) = T$. Звідси $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow \delta(y)) = T$. Однак $\delta(y) \downarrow$ згідно з $\delta \in {}^W A$ та $y \in W$, тому для $a = \delta(y)$ маємо $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow a) = T$, звідси $(\exists x \Phi)_A(\delta) = T$.

Нехай $R^{\delta}_{\Phi}(\exists x \Pi) \in R$. Згідно НЗ для всіх $y \in W$ маємо $R^y_{\Phi}(\Pi) \in R$. За припущенням індукції тоді $(R^y_{\Phi}(\Pi))_A(\delta) = F$ для всіх $y \in W$. Звідси маємо $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow \delta(y)) = F$ для всіх $y \in W$. Згідно з $\delta \in {}^W A$, маємо $\delta(y) \downarrow$ для всіх $y \in W$. Позаяк δ є бієкцією $W \rightarrow A$, то кожне $b \in A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W$. Отже, $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow b) = F$ для всіх $b \in A$, звідси дістаємо $(\exists x \Phi)_A(\delta) = F$.

Нехай $R^{\delta}_{\Phi}(\exists x \Pi) \in L$. Згідно НЗР тоді існує $y \in W$ таке, що $R^y_{\Phi}(\Pi) \in L$. За припущенням індукції $(R^y_{\Phi}(\Pi))_A(\delta) = T$. Звідси отримуємо $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow \delta(y)) = T$. Проте $\delta(y) \downarrow$ згідно з $\delta \in {}^W A$ та $y \in W$, тому для $a = \delta(y)$ маємо $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow a) = T$, що далі дає $(\exists x \Phi)_A(\delta(y)) = T$, звідси $(R^{\delta}_{\Phi}(\exists x \Pi))_A(\delta) = T$.

Нехай $R^{\delta}_{\Phi}(\exists x \Pi) \in R$. Згідно НЗР для всіх $y \in W$ маємо $R^y_{\Phi}(\Pi) \in R$. За припущенням індукції тоді $(R^y_{\Phi}(\Pi))_A(\delta) = F$ для всіх $y \in W$. Звідси маємо $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow \delta(y)) = F$ для всіх $y \in W$. Згідно з $\delta \in {}^W A$, маємо $\delta(y) \downarrow$ для всіх $y \in W$. Позаяк δ є бієкцією $W \rightarrow A$, то кожне $b \in A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W$. Отримуємо, що $\Phi_A(\delta \nabla x \rightarrow \delta(y)) = F$ для всіх $b \in A$, тому для всіх $b \in A$ маємо $(\exists x \Phi)_A(\delta(y)) = F$, звідси $(R^{\delta}_{\Phi}(\exists x \Pi))_A(\delta) = F$.

На основі теореми 2 отримуємо теорему повноти для QC -числень.

Теорема 3. Нехай $\Gamma \vdash \Delta$. Тоді $\Gamma \vdash \Delta$ вивідна.

Доведення. Припустимо супротивне: $\Gamma \vdash \Delta$ та секвенція $\Gamma \vdash \Delta$ невивідна. Якщо $\Gamma \vdash \Delta$ невивідна, то секвенційне дерево δ для $\Gamma \vdash \Delta$ незамкнене. Отже, в δ існує незамкнений шлях ρ . Нехай L та R – множини всіх T -формул та F -формул секвен-

цій цього шляху. Згідно з теоремою 2 $H = (L, R)$ – модельна пара множин, причому існують модель мови $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^I A$ такі: $\Phi \in L \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\Phi \in R \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$. Згідно з $\Gamma \subseteq L$ та $\Delta \subseteq R$ тоді для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$ та для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) = F$. Це суперечить $\Gamma \vdash \Delta$.

Висновки

В роботі побудовано секвенційні числення чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних квазіарних предикатів. Такі числення будуються на основі властивостей відношення логічного наслідку для множин формул. Характерною їх особливістю є використання спеціальних секвенційних форм елімінації кванторів з розгалуженням. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

В подальшому планується побудова секвенційних числень першопорядкових логік квазіарних предикатів функціональних рівнів.

Список використаних джерел

1. Нікітченко Н.С. Композиційно-номінативний підхід до уточнення поняття програми / Н.С. Нікітченко // Пробл. програмування. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
2. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. Шкільняк С.С. Логіки квазіарних предикатів першого порядку / С.С. Шкільняк // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6 – С. 32–49.
4. Нікітченко М.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 176–185.
5. Шкільняк С.С. Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2012. – № 2–3 – С. 33–43.
6. Клини С. Математическая логика / С. Клини. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
7. Смирнова Е.Д. Логика и философия / Е.Д. Смирнова. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.

Надійшла до редколегії 10.05.2012

УДК 378.016

Омельчук Л.Л., к.ф.-м.н.

**Порівняльний аналіз українського
освітнього стандарту
з інформатики та Computer Science'2008**

Наведено порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки бакалаврів з інформатики та Computer Science'2008. Надано пропозиції для покращення українського освітнього стандарту.

Ключові слова: інформатика, освітній стандарт.

*E-mail: l.omelchuk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Буй Д.Б.

У вересні 2010 року Міністерством освіти і науки України затверджено стандарт освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів за напрямом підготовки 040302 "Інформатика" на здобуття кваліфікації 3121 фахівць з інформаційних технологій (надалі ОПП'2010) [1].

Для визнання українського диплома з інформатики, а також підвищення мобільності студентів потрібно, щоб український стандарт узгоджувався із стандартами інших країн. Проведемо порівняльний аналіз затвердженого стандарту з визнаними міжнародними стандартами освітньо-професійної підготовки з інформатики.

Найбільш значимим проектом, що має на меті стандартизацію процесу навчання в галузі інформатики, є Computer Science Curriculum («Рекомендації з викладання інформатики в університетах»). Цей план розроблений спеціальним комітетом з освіти професійного співтовариства ACM (Association for Computing Machinery) спільно з професійним співтовариством – IEEE Computer Society.

Перша версія Computing Curricula була розроблена спеціальним комітетом з освіти професійного співтовариства ACM та була опублікована в 1968 році. В 1970-х роках аналогічний документ випустило інше професійне співтовариство – IEEE Computer

L. L. Omelchuk, PhD

L. L. Omelchuk, PhD

**A comparative analysis of Ukrainian
educational standard in Informatics and
Computer Science'2008**

A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and Computer Science'2008 is made. Proposals for further enhancement of Ukrainian standards are formulated.

Key Words: informatics, educational standard.

Society. Наприкінці 1980-х років ці організації об'єднали свої зусилля та в 1991 році випустили оновлену версію рекомендацій – Computing Curricula'91. Передостанній план було підготовлено в 2001 році, а останній план з Computer Science опубліковано в грудні 2008 року (надалі CS'2008) [2]. ACM крім інформатики також виділяє інші три комп'ютерні спеціальності: комп'ютерну інженерію, програмну інженерію і інформаційні системи. В США, наприклад, склалася практика, за якою бакалаврів готують переважно з інформатики, а інші спеціальності з'являються потім у магістерських програмах.

В CS'2008 визначено коло базових тем, які складають ядро спеціальності на рівні бакалаврату (таких тем 14). Кожна з них складається з певної кількості розділів (від 3 до 15), деяка частина яких складає обов'язковий мінімум (для них зазначено мінімальну кількість годин, необхідну для вивчення предмета в лекційному форматі).

Базові теми з інформатики та їх покриття дисциплінами, які пропонуються ОПП'2010, представлені нижче в таблиці 1.

Співставляючи дисципліни ОПП'2010 та CS'2008 можна побачити, що усі базові теми та обов'язкові курси CS'2008 представлено в дисциплінах ОПП'2010. Проте, є низка вибіркових курсів з CS'2008, що не знайшли свого відображення в ОПП'2010: «Напрями в

обчислень» (AR), «Цифрова експертиза» (OS), «Мобільні комп'ютери» (NC), «Співробітництво та комунікація» (HC), «Більш складні методи обчислювальної геометрії» (GV), «Програмування ігор» (GV), «Поглиблене вивчення пошуку» (IS), «Поглиблене вивчення представлення знань та виведення» (IS), «Робототехніка» (IS).

Крім того, слід звернути увагу на дисципліни, які в CS'2008 є обов'язковими, в той час як в ОПП'2010 вони представлені вибірковими дисциплінами. Так, «Методи та засоби аналізу» (SP), «Недоліки комп'ютерних систем та ризики, пов'язані з їх застосуванням» (SP), «Конфіденційність та громадські свободи» (SP) в ОПП'2010 представлені однією дисципліною за вибором «Соціальні та професійні питання інформатики» (CB.3.03). Дисципліна «Інтелектуальна власність» (SP) – дисципліною за вибором «Основи авторського права» (CB.5.13).

З іншого боку, є низка дисциплін в ОПП'2010, що не мають свого аналогу в CS'2008. Це переважно дисципліни гуманітарної та соціально-економічної підготовки (ГСЕ), математичної, природничо-наукової підготовки (МПН) та декілька дисциплін професійної та практичної підготовки (ПП): «Українська мова (за професійним спрямуванням)» (ГСЕ 1.01), «Історія України» (ГСЕ 1.02), «Історія української культури» (ГСЕ 1.03), «Іноземна мова» (ГСЕ 1.04), «Фізичне виховання (за рахунок вільного часу студента)» (ГСЕ 1.06), «Алгебра та геометрія» (МПН 2.01), «Диференціальні рівняння» (МПН 2.03), «Математичний аналіз» (МПН 2.05), «Методика викладання математики та інформатики» (ПП 3.09), «Системний аналіз та теорія прийняття рішень» (ПП 3.19).

Таблиця 1

Порівняння CS'2008 та ООП'2010

Базова тема	CS'2008		Цикл	ООП'2010	
	Перелік дисциплін	Кількість годин		Перелік дисциплін	Кількість годин
DS	Дискретні структури	43			
DS	Основи логіки	10	МПН 2.04	Математична логіка та теорія алгоритмів	288
DS	Методи доведення	12			
DS	Основи обчислень	5	МПН 2.02	Дискретна математика	288
DS	Функції, відношення та множини	6			
DS	Графи та дерева	4			
DS	Дискретна ймовірність	6	МПН 2.06	Теорія ймовірностей та математична статистика	216
PF	Основи програмування	38			
PF	Основи конструкції	9	ПП 3.13	Програмування	576
PF	Алгоритми та розв'язок задач	6			
PF	Структури даних	10			
PF	Рекурсія	4			
PF	Підіскероване програмування	4			

PF	Об'єктно-зорієнтоване програмування	8	ППІ 3.13	Програмування	576
			СВ.1.06	Методи об'єктно-зорієнтованого програмування	
PF	Основи інформаційної безпеки	4	ППІ 3.05	Захист інформації	144
PF	Безпечне програмування	2			
AL	Алгоритми та складність	31			
AL	Основи аналізу алгоритмів	4	ППІ 3.13	Програмування	576
AL	Алгоритмічні стратегії	6	ППІ 3.01	Алгоритми і структури даних	144
AL	Фундаментальні алгоритми	12			
AL	Розподілені алгоритми	3			
AL	Клас складності NP				
AL	Геометричні алгоритми				
AL	Паралельні алгоритми				
AL	Основи теорії обчислюваності	6	МПН 2.04	Математична логіка та теорія алгоритмів	288
AL	Теорія автоматів				
AL	Поглиблений аналіз алгоритмів				
AL	Криптографічні алгоритми		ППІ 3.05	Захист інформації	144
AR	Архітектура та організація ЕОМ	36			
AR	Цифрова логіка та представлення даних	7	ППІ 3.02	Архітектура обчислювальних систем	144
AR	Архітектура обчислювальних систем	9			
AR	Інтерфейс та стратегія введення/виведення	3			
AR	Будова пам'яті комп'ютера	5			
AR	Функціональна організація	6			
AR	Багатопроцесорні архітектури	6			
AR	Покращення продуктивності				
AR	Розподілені системи				
AR	Пристрої		ППІ 3.07	Інформаційні мережі	144
AR	Напрями в обчисленні				
OS	Операційні системи	18			
OS	Огляд операційних систем	2	ППІ 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
OS	Основи операційних систем	2			
OS	Паралелізм	6			
OS	Планування та диспетчеризація	3			
OS	Керування пам'яттю	3			
OS	Керування пристроями				
OS	Безпека та захист даних	2			
OS	Файлові системи				
OS	Вбудовані системи та системи реального часу				
OS	Відмовостійкість				
OS	Оцінка продуктивності системи				
OS	Мови сценаріїв				
OS	Цифрова експертиза				
OS	Моделі безпеки		ППІ 3.05	Захист інформації	144

NC	Мережеві обчислення	15			
NC	Вступ до мережевих обчислень	2	ПП 3.07	Інформаційні мережі	144
NC	Мережі та комунікації	7			
NC	Мережева безпека	6			
NC	Web		ПП 3.16	Програмування та підтримка веб-застосувань	144
NC	Мережеві застосування				
NC	Керування мережами		ПП 3.05	Захист інформації	144
NC	Збирання та розпаковування даних		СВ.1.25	Теорія інформації та кодування	
NC	Технології мультимедіа		ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
NC	Мобільні комп'ютери				
PL	Мови програмування	21			
PL	Огляд мов програмування	2	ПП 3.13	Програмування	576
PL	Змінні та типи даних	3			
PL	Механізми абстракції	3			
PL	Системи типів				
PL	Семантика мов програмування				
PL	Об'єктно-зорієнтоване програмування	10	СВ.1.06 ПП 3.13	Методи об'єктно-зорієнтованого програмування	
				Програмування	576
PL	Функціональне програмування		СВ.2.18	Функціональне програмування	
PL	Віртуальні машини	1	ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	288
PL	Вступ до трансляції	2			
PL	Системи трансляції				
PL	Розробка мов програмування				
HC	Інтерфейси	8			
HC	Основи взаємодії людини та машини	6	ПП 3.15 СВ.2.14	Платформи корпоративних інформаційних систем Розробка інтерфейсу людина-система	144
HC	Побудова простого графічного інтерфейсу	2			
HC	Оцінка програмного забезпечення, орієнтованого на людину				
HC	Розробка програмного забезпечення, орієнтованого на людину				
HC	Проектування графічного інтерфейса користувача				
HC	Програмування графічного інтерфейса користувача				

НС	Людиномашинні аспекти мультимедіасистем		ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
НС	Співробітництво та комунікація				
НС	Інтерактивне проектування для нових середовищ		СВ.2.14	Розробка інтерфейсу людина-система	
НС	Людський фактор та безпека		ПП 3.05	Захист інформації	144
GV	Графіка та візуалізація	3			
GV	Фундаментальні методи в графіці	2	ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
GV	Графічні системи	1			
GV	Комп'ютерна анімація				
GV	Візуалізація				
GV	Віртуальна реальність				
GV	Комп'ютерний зір				
GV	Програмування ігор				
GV	Геометричне моделювання				
GV	Основи рендерінга		СВ.1.17	Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка	
GV	Поглиблене вивчення рендерінга				
GV	Обчислювальна геометрія				
GV	Більш складні методи обчислювальної геометрії				
IS	Інтелектуальні системи	10			
IS	Основи питання, пов'язані з інтелектуальними системами	1	ПП 3.06	Інтелектуальні інформаційні системи	144
IS	Пошук розв'язків	5			
IS	Представлення знань та виведення	4			
IS	Поглиблене вивчення пошуку				
IS	Поглиблене вивчення представлення знань та виведення				
IS	Агенти		СВ.1.01	Агентні технології	
IS	Обробка природної мови		ПП 3.20	Теорія програмування	144
IS	Навчання машини та нейронні мережі		СВ.1.15	Нейронні мережі	
IS	Системи штучного інтелекту з планованою поведінкою		СВ.1.20	Проектування систем штучного інтелекту	
IS	Робототехніка				
IS	Сприйняття		СВ.5.14	Основи дизайну	
IM	Управління інформацією	11	СВ.5.17	Психологія	
IM	Інформаційні моделі та системи	4	ПП 3.18	Розподілені інформаційно-аналітичні системи	144

IM	Системи баз даних	3	ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	288
IM	Моделювання даних	4	ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	288
IM	Реляційні бази даних				
IM	Мови запитів до баз даних		ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації	144
IM	Проектування реляційних баз даних				
IM	Обробка транзакцій				
IM	Розподілені бази даних				
IM	Проектування фізичної структури бази даних				
IM	Вилучення інформації				
IM	Збереження та пошук інформації				
IM	Гіпертекст та гіпермедіа		ПП 3.16	Програмування та підтримка веб-застосовувань	144
IM	Мультимедійна інформація та системи мультимедіа		ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	144
IM	Цифрові бібліотеки		ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації	144
IM	Індексація		ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	288
SP	Соціальні та професійні питання	16			
SP	Історія інформатики	1	ПП 3.13	Програмування	576
SP	Соціальний контекст інформатики	3	ПП 3.04	Безпека життєдіяльності	72
SP	Методи та засоби аналізу	2	СВ.3.03	Соціальні та професійні питання інформатики	
SP	Професійна та етична відповідальність	3	СВ.5.05	Етика та естетика	
			СВ.3.03	Соціальні та професійні питання інформатики	
SP	Інтелектуальна власність	3	СВ.5.13	Основи авторського права	
SP	Недоліки комп'ютерних систем та ризики, пов'язані з їх застосуванням	2	СВ.3.03	Соціальні та професійні питання інформатики	
SP	Конфіденційність та громадянські свободи	2			
SP	Комп'ютерні злочини				
SP	Економічні питання, пов'язані з застосуванням комп'ютерів		СВ.5.04	Економічна теорія	
SP	Філософські концепції		ГСЕ 1.05	Філософія	108
SP	Засоби безпеки		ПП 3.05	Захист інформації	144
SE	Програмна інженерія	31			
SE	Формальні методи		ПП 3.20	Теорія програмування	144
SE	Специфікації та вимоги до ПЗ	4	ПП 3.17	Проектування програмних систем	144

SE	Проектування ПЗ	8	ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
SE	Використання програмних інтерфейсів застосувань	5			
SE	Програмні засоби та оточення	3			
SE	Процеси розробки ПЗ				
SE	Перевірка відповідності ПЗ	3			
SE	Еволюція ПЗ	3			
SE	Керування програмними проектами	3			
SE	Компонентно-зорієнтована розробка				
SE	Спеціалізовані програмні системи		ПП 3.15	Платформи корпоративних інформаційних систем	144
			ПП 3.16	Програмування та підтримка веб-застосувань	144
			ПП 3.17	Проектування програмних систем	144
			ПП 3.18	Розподілені інформаційно-аналітичні системи	144
SE	Надійність ПЗ		ПП 3.05	Захист інформації	144
SE	Оцінка ризиків				
SE	Програмування з розширенням захистом				
CN	Обчислювальні науки	-			
CN	Дослідження операцій		ПП 3.08	Методи оптимізації та дослідження операцій	216
CN	Паралельні обчислення		ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	144
CN	Моделювання		СВ.1.11	Моделювання систем за умов невизначеності	
			СВ.1.12	Моделювання складних систем	
			СВ.1.13	Моделювання соціально-економічних процесів	
			СВ.1.10	Моделювання інформаційних процесів	
			СВ.1.09	Моделювання випадкових процесів	

Висновки

З дослідженого видно, що забезпечена відповідність відносно обов'язкового мінімуму дисциплін ОПП'2010 рекомендаціям CS'2008 за умови, що читатимуться дисципліни самостійного вибору «Соціальні та професійні питання інформатики» (СВ.3.03) та «Основи авторського права» (СВ.5.13).

В подальших роботах буде наведено порівняння ОПП'2010 з іншими освітніми стандартами:

- освітній стандарт, затверджений Міністерством освіти і науки Російської Федерації в 2009 році за напрямком підготовки 230100 «Інформатика и вычислительная техника» [3];

• освітній стандарт, затверджений Міністерством освіти і науки Російської Федерації в 2009 році за напрямком підготовки 230700 «Прикладная информатика» [4].

Список використаних джерел

1. Галузевий стандарт вищої освіти підготовки бакалаврів за напрямом 040302 «Інформатика». Київ, 2010.
2. Computer Science Curriculum 2008: An Interim Revision of CS 2001. Report from the Interim Review Task Force. Association for Computing Machinery & IEEE Computer Society.
<http://www.acm.org/education/curricula/ComputerScience2008.pdf>
3. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника». Москва, 2009.
<http://www.osu.ru/docs/bachelor/fgos/230100b.pdf>

4. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230700 «Прикладная информатика». Москва 2009.
<http://www.osu.ru/docs/bachelor/fgos/230700b.pdf>

Надійшла до редколегії 11.05.12

УДК 004.655

Поляков С.А., к. ф.-м. н.

Операционная семантика OLAP-запитів

В роботі побудована програмна алгебра OLAP-запитів, яка задає набір базових операцій визначених на множині гіперкубів. Множина базових функцій складається з функцій *Slice*, *Dice*, та множини агрегатних функцій, а сигнатура містить композицію *Cube** та суперпозицію. Замикання множини базових функцій відносно цих композицій породжує множини семантичних функцій OLAP-запитів.

Ключові слова: програмна алгебра, композиційна семантика, операційна семантика, бази даних, гіперкуб, багатовимірний куб, OLAP-запити, сховища даних.

*E-mail: polyakov@unicyb.kiev.ua

Статтю представив: д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Загальні зауваження

За призначенням реляційні бази даних розділяють на два класи. До першого відносяться бази даних загального призначення, на яких виконуються операції пов'язані з поточною діяльністю організацій та підприємств. Прикладами таких операцій є проведення банком платежу або резервування квитків. Вони характеризуються тим, що виконуються в режимі реального часу, але опрацюють порівняно невелику частину бази даних. Діяльність такого виду отримала спеціальну аббревіатуру OLTP (On-line Transaction Processing), а запити називають OLTP-запитами.

Бази даних другого класу використовуються для аналізу даних, підтримки процесу прийняття рішень. Прикладами таких операцій є аналіз продажів по регіонах, категоріям покупців, та товарним групам, або відповіді на питання чи є взаємозв'язок між віком людини, її освітою та розміром кредиту який ця людина бере в банку. Для виконання операцій такого виду потрібно написати складні запити з багаторівневим агрегуванням та групуванням. Вони характеризуються тим, що потребують багато часу для свого виконання і опрацюють більшу

S.A. Polyakov, PhD

The operational semantics of the OLAP-queries

The program algebra of the OLAP-queries is constructed. It builds the set of the base functions which are defined on the hypercubes. The base set of the functions consist of the *Slice*, *Dice* functions and aggregate functions. The signature includes the operator *Cube** and superposition. The closure of the base function under the *Cube** and superposition produce the semantics functions of the OLAP queries.

Key Words: program algebras, compositional semantics, operational semantics, databases, hypercube, multidimensional cube, OLAP-queries, data warehouses.

частину бази даних або навіть всю базу. Діяльність такого виду отримала аббревіатуру OLAP (On-line Analytic Processing), а запити називають OLAP-запитами або запитами підтримки рішень.

Термін OLAP був введений в роботі Кодда написаної в 1993 році разом з його дружиною та помічником [1]. В роботі, в тому числі, приведені дванадцять правил яким повинні задовольняти OLAP системи. В 1995 році були додані ще шість правил, таким чином загальна кількість правил стала дорівнювати вісімнадцяти. Перше правило говорить, що на концептуальному (логічному) рівні дані зображуються у вигляді багатовимірної матриці.

Структури даних

Структури даних на яких виконуються OLAP-запити отримали назву багатовимірних кубів даних або гіперкубів. Прототипом для гіперкубів виступають перехресні таблиці (crosstabs) [2], які використовуються при створенні перехресних звітів (cross-tabulation reports). Такі таблиці можна уявляти як матриці або двовимірні масиви в якості індексів в яких виступають значення із деяких множин. В табл. 1 приведений приклад

перехресної таблиці продажів автомобілів по роках.

Табл. 1. Перехресна таблиця продажів автомобілів по роках

	2007	2008	2009	2010
Ford				
Audi				
Mercedes				
Renault				

Множини які визначають значення комірок називаються вимірами. Табл. 1 має два виміри – назви автомобілів і роки. Додамо третій вимір – країни. Тоді табл. 1 перетвориться в куб, зображений на рис. 1.

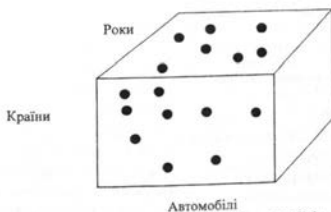


Рис. 1. Куб даних продажів автомобілів

У деяких країнах автомобілі даної моделі можуть не продаватися взагалі, або не продаватися в якомусь певному році. Тому не всі комірки кубу будуть заповнені. Такий куб називається розрідженим. Узагальненням перехресної таблиці та кубу виступають гіперкуби [2].

Надамо формальне визначення гіперкубу даних. При цьому будемо використовувати композиційний підхід до програмування, закладений в роботах В.Н.Редько [3, 4].

Нехай визначені наступні множини:

A – множина атрибутів;

$Dom, Dom_1, Dom_2, \dots$ – множини даних, вважаємо що в них існує спеціальний елемент NULL, який трактується як невизначене значення;

$Dim_1, Dim_2, \dots$ – множини, які називаються вимірами.

В визначеннях будуть використовуватись допоміжні функції проєкції по першій компоненті pr_1 та проєкції по другій компоненті pr_2 .

По аналогії з декартовим здобутком введемо операцію *іменного декартового здобутку* $*a_1, \dots, a_n$, параметричну по множенні атрибутів $(a_1, \dots, a_n) \subseteq A$. Операція задається виразом

$$*a_1, \dots, a_n (Dom_1, \dots, Dom_n) = \\ \{ \{a_1 : d_1, \dots, a_n : d_n\} \mid d_i \in Dom_i \}$$

Індексом будемо називати множини, яка отримується застосуванням іменного декартового здобутку до вимірів, тобто є результатом дії функції виду $*a_1, a_2, \dots, a_n (Dim_1, Dim_2, \dots, Dim_n)$.

Про такий індекс будемо говорити, що він має тип

$$T = \{a_1 : Dim_1, a_2 : Dim_2, \dots, a_n : Dim_n\}.$$

Позначимо індекс з типом T як Ndx_T . елементи індексу будемо називати значенням індексу, а множини всіх індексів позначимо через NDX . Відмітимо, що поняття індексів близько до поняття таблиці реляційної алгебри, див.

наприклад [5, 6], а скінчена підмножина деякого індексу ϵ , по суті, таблицю. Але з точки зору прагматики це різні сутності.

Під гіперкубом будемо розуміти часткову функцію, параметричну по типу індексу, яка відображає індекси в множину даних: $Cube_T: Ndx_T \rightarrow Dom$

Множину всіх гіперкубів з областю визначення Ndx_T , та множиною значень із Dom будемо позначати як $Cube(Ndx_T, Dom)$. Множину всіх гіперкубів позначимо через $CUBE$.

Операції та композиції на гіперкубах

Розглянемо семантику основних операцій на гіперкубах [2]. При визначенні функцій та композицій спочатку буде задаватися їх сигнатура, а потім сама функція.

Slice – параметрична функція взяття зрізу. Вона робить проєкцію гіперкубу за значеннями вимірів. Параметром виступає

предикат $p = (a_1 = d_1 \dots \& a_k = d_k)$, $a_i \in A$, $d_i \in Dim_i$. Домовимося позначати множину атрибутів такого предикату як $Atr(p) = (a_1, \dots, a_n)$, а множину значень як $Val(p) = (d_1, \dots, d_k)$.

$Slice_p: CUBE \rightarrow CUBE$;

$$Slice_p(Cube_T) = \begin{cases} \{(ndx_i, d_i) \mid (ndx_i, d_i) \in Cube_T \& \\ ndx_i(a_1) = dim_i \& \dots \\ \& ndx_i(a_k) = dim_k\}, \\ de\ p = (a_1 = dim_i \& \dots \\ \& a_k = dim_k), \\ \text{якщо } Atr(p) \subseteq pr_1(T) \\ \text{невизначена в протилежному} \\ \text{випадку} \end{cases}$$

Dice – функція, яка вирізає «шматок» гіперкубу. Вона виконує проєкцію за неперервними підмножинами значень деяких вимірів. На вимірах заданий лінійний порядок $\leq$. Функція параметрична за спеціальним предикатом

$p = (a_1 = dim'_1 \dots dim''_2 \& \dots \& a_k = dim'_k \dots dim''_k)$,
 $a_i \in A$, $dim'_i, dim''_i \in Dim_i$.

$Dice_p: CUBE \rightarrow CUBE$

$$Dice_p(Cube_T) = \begin{cases} \{(ndx_i, d_i) \mid (ndx_i, d_i) \in Cube_T \& \\ dim'_i \leq ndx_i(a_1) \leq dim''_i \& \\ \dots \& dim'_k \leq ndx_i(a_k) \leq dim''_k\}, \\ de\ p = (a_1 = dim'_1 \dots dim''_2 \& \dots \\ \& a_k = dim'_k \dots dim''_k), \\ \text{якщо } Atr(p) \subseteq pr_1(T) \\ \text{невизначена в протилежному} \\ \text{випадку} \end{cases}$$

Домовимося, що для функцій **Slice** та **Dice** можливо задавати всюди істинний предикат, який позначимо **True**. Для нього $Atr(True) = \emptyset$, та $Val(True) = \emptyset$ а функції на ньому діють як тотожні.

Введемо спеціальний символ $*$, при цьому вимагаємо щоб він не належав множинам вимірів. Він буде використовуватися в індексах. Змістовно, коли цей символ з'являється в елементі певного індексу, то це буде значити, що виконується агрегування по відповідному виміру. Позначимо через Dim_i^* вимір який утворюється об'єднанням Dim_i з введенням вище символом,

тобто $Dim_i^* = Dim_i \cup \{*\}$. Через T^* будемо позначати типи на розширених вимірах, через Ndx_T^* індекси, а через $CUBE^*$ – множину всіх гіперкубів на розширених вимірах. Відмітимо, що $Ndx_T \subset Ndx_T^*$, а $CUBE \subset CUBE^*$. Далі нам знадобиться функція звуження по нерівності $ndx|_{a \leq b} = \{(a_i, dim_i) \mid (a_i, dim_i) \in ndx, dim_i \neq b\}$.

Group – допоміжна функція яка групує елементи гіперкубу в гіперкуб гіперкубів, тобто в гіперкуб, даними якого виступають звичайні гіперкуби.

$Group: Cube(Ndx_T, Dom) \rightarrow Cube(Ndx_T^*,$
 $2^{Cube(Ndx_T, Dom)})$

$Group(Cube_T) = \{(ndx_i^*, dd_i) \mid$
 $ndx_i^* \in Ndx_T^* \setminus Ndx_T,$

$C = ndx_i^*|_{a \leq b}, dd_i = Slice_p(Cube_T),$

$pr_1(C) = Atr(p), pr_2(C) = Val(p)\}$

Композиція $Cube^*$ розширяє гіперкуб агрегуванням по всіх вимірах та їх сукупностях

[7]. Агрегативними функціями називаються функції, які розповсюджують бінарні операції на множини [5, 6]: $Agg_1: 2^{Dom} \rightarrow Dom$. Множину всіх агрегативних функцій позначимо через AGR . Композиція має сигнатуру $Cube^*: AGR \rightarrow Cube^*(AGR)$, де $Cube^*(AGR) = \{Cube^*(Agg_1)\}$ – множина спеціальних унарних функцій на гіперкубах, яка будуватиметься нижче.

$$Cube^*(AGR): CUBE \rightarrow CUBE^*$$

$$Cube^*(Agg_1)(Cube_T) = Cube_T \cup$$

$$\{(ndx_i^*, Agg_1(d_i))\}$$

$$(ndx_i^*, dd_i) \in Group(Cube_T),$$

$$d_i = pr_2^m(dd_i))\}$$

Тут pr_2^m – проекція по другій компоненті, яка повертає мультимножину, на відміну від pr_2 , яка повертає звичайну множину.

Визначимо програмну алгебру гіперкубів. Носій алгебри складає множина унарних функцій вигляду $f: CUBE \rightarrow CUBE^*$. Множина базових функцій складається з параметричних функцій $Slice_C$, $Dice_C$, та множини агрегативних функцій $\{Agg_1\}_i$, а сигнатура містить композицію $Cube^*$ та стандартну композицію суперпозиції.

Висновки

Побудована програмна алгебра визначає композиційну операційну семантику операцій на гіперкубах. Використання іменних множин для індексів дозволило позбутися порядку елементів у значеннях індексів, що не є суттєвим для моделювання гіперкубів. Аргументація тут така ж сама, як і для рядків таблиць. Розділення операцій на функції на даних та композиції (оператори) структурувало множину операцій на

гіперкубах. Таке розділення є стандартним для більшості мов програмування. У SQL на синтаксичному рівні воно відсутнє, що перешкоджає розумінню семантики мовних конструкцій та є суттєвим недоліком мови.

Список використаних джерел

1. Codd E.F. Providing OLAP (On-Line Analytical Processing) to User-Analysts: An IT Mandate / E.F. Codd, S.B. Codd, C.T. Salley // White Paper, – 1993. – 24 p.
2. Thomsen E. OLAP Solutions. Building Multidimensional Information Systems / E. Thomsen – John Wiley & Sons, Inc., – 2002. – 688 p.
3. Редько В. Н. Композиции программ и композиционное программирование / В. Н. Редько // Программирование. – 1978. – № 5. – С. 3-24.
4. Редько В. Н. Композиционные аспекты программологии. I / В. Н. Редько, Н. С. Никитченко // Кибернетика. – 1987. – № 5. – С. 49-56.
5. Редько В. Н. Реляційні бази даних: таблиці алгебри та SQL-подібні мови. / В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков – Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 196 с.
6. Буй Д. Б. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Д. Б. Буй. – Київ, 2002. – 365 с.
7. Gray J. Data Cube: A Relational Aggregation Operator Generalizing Group-By, Cross-Tab, and Sub-Total. / Gray J, Bosworth A., Layman A., Pirahesh H. // ICDE. – 1996: – 152-159 p.

Надійшла до редколегії 09.06.2012

УДК 004.89

Порхун О.В., к.ф.-м.н., асист.

Кластеризація текстів за фонічними ознаками з використанням нейронної мережі Кохонена

Дана стаття присвячена дослідженню проблеми встановлення авторства текстів за фонічними ознаками. Кластеризація базується на застосуванні нейронної мережі Кохонена з алгоритмом навчання SOM та представленні текстів у вигляді векторів частот 3-грам як векторів ознак. Реалізовано навчання мережі з використанням експериментально підібраних значень параметрів для обчислення функції околу нейрона-переможця та наведено результати кластеризації художніх текстів.

Ключові слова: нейронна мережа Кохонена, топологічний окіл, 3-грами.

*E-mail: elena_porkhun@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Модель нейронної мережі Кохонена належить до класу алгоритмів векторного кодування та реалізує топологічне відображення, яке оптимально розміщує фіксовану кількість векторів у відносно просторі більш високої розмірності, що дає змогу ефективно стискати та кластеризувати дані.

Як було наведено у попередній статті [1] використання фонічних ознак, що визначаються у текстах та формуються у вигляді n -грам, дають певні переваги порівняно із використанням частотних словників, що вимагає морфологічного аналізу. Наведені результати розпізнавання авторства текстів з використанням аналізу звукової організації мови також свідчать про ефективність підходу представлення текстів у вигляді поліграмних моделей. У даній роботі пропонується застосування нейронної мережі Кохонена з алгоритмом навчання SOM для вирішення задачі кластеризації художніх текстів за 3-грамми ($n=3$), використання частот яких в якості ознак дало найкращий результат у попередніх дослідженнях [1]. Особливості моделі Кохонена здійснювати перетворення в топологічно впорядкованій формі вхідних векторів сигналів, які мають

E.V. Porkhun, PhD.

E.V. Porkhun, PhD.

Clustering texts based on phonic features using Kohonen neural network

This article deals with the problem of defining authorship using phonic features. Clustering is based on using Kohonen neural network with learning algorithm SOM and representing texts in the form of vectors of frequency of 3-grams as feature vectors. Training network using experimentally selected parameter values to calculate the neighborhood function of neuron-winner is implemented and results of clustering texts are shown.

Key Words: Kohonen neural network, topological neighborhood, 3-grams.

довільну розмірність, в одно- чи двовимірну дискретну карту дозволяє візуалізувати кластеризацію даних, що, зокрема, обумовлює їх використання для вирішення даної задачі.

Карти самоорганізації

Клас нейронних мереж якому належить нейронна мережа Кохонена відноситься до систем, що самоорганізуються та носить назву карт самоорганізації. Дані мережі базуються на конкурентному навчанні. В картах самоорганізації (self-organizing map) нейрони розміщуються у вузлах решітки як правило одно- чи двовимірної. В процесі конкурентного навчання нейрони решітки вибірково налаштовуються на різні вхідні образи. Положення таким чином налаштованих нейронів (нейронів-переможців) впорядковуються відносно один одного таким чином, що на решітці утворюється система координат. Таким чином, дана модель мереж характеризується формуванням топографічних карт вхідних образів, в яких просторові координати нейронів решітки є індикатором встановлених статистичних ознак, які містяться у вхідних прикладах (векторах) [2]. На рис. 1 зображено нейронну мережу Кохонена з двовимірною решіткою нейронів 4×4 .

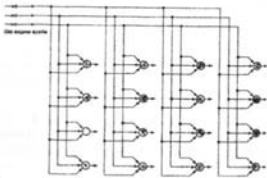


Рис. 1. Нейронна мережа Кохонена з двовимірною решіткою нейронів.

Алгоритм навчання SOM

Алгоритм навчання SOM, що відповідає за формування карт самоорганізації, починається з ініціалізації синаптичних ваг мережі як правило за допомогою генератора випадкових чисел, хоча можлива початкова ініціалізація значеннями вхідних векторів при умові, що вектори синаптичних ваг будуть різними для кожного нейрона решітки. На початку алгоритму карта ознак не є впорядкованою. Після коректної ініціалізації мережі реалізуються три наступні процеси:

1. Конкуренція.
2. Кооперація.
3. Синаптична адаптація.

Процес конкуренції

На даному етапі для кожного вхідного образу нейрони мережі обчислюють значення дискримінантної функції та визначається нейрон-переможець $i(x)$ – нейрон, який найкраще відповідає вхідному образу x , використовуючи критерій мінімуму Евклідової різниці:

$$i(x) = \arg \min_j \|x - w_j\|,$$

де $w_j = [w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jm}]^T$ – вектор синаптичних ваг нейрона j , $j = 1, 2, \dots, l$, l – загальна кількість нейронів мережі, m – розмірність вхідного простору.

Процес кооперації

Нейрон-переможець визначає просторове положення топологічного околу нейронів, забезпечуючи базис кооперації між ними нейронами. Нейрон-переможець знаходиться в центрі топологічного околу нейронів, що з ним співпрацюють.

Позначимо $h_{j,i}(x)$ – топологічний окіл з центром у нейроні-переможці i , який містить множину збуджених нейронів, представником

яких є нейрон з номером j ; $d_{j,i}(x)$ – латеральна відстань між нейроном-переможцем i та нейроном j . Топологічний окіл $h_{j,i}(x) \in$ унімодальною функцією від латеральної відстані $d_{j,i}(x)$ та задовільняє наступним умовам:

- він є симетричним відносно точки максимуму, що визначається при $d_{j,i}(x) = 0$;
- амплітуда $h_{j,i}(x)$ монотонно зменшується зі збільшенням латеральної відстані $d_{j,i}(x)$, досягаючи нуля при $d_{j,i}(x) \rightarrow \infty$ (необхідна умова збіжності).

В якості такої функції околу використовується функція Гауса:

$$h_{j,i}(x) = \exp\left(-\frac{d_{j,i}^2(x)}{2\sigma^2(n)}\right),$$

де $\sigma(n)$ – параметр ефективної ширини околу, що визначає рівень, до якого нейрони з топологічного околу нейрона-переможця приймають участь у навчанні. Особливістю алгоритма навчання SOM є те, що з часом розмір топологічного околу зменшується та залежність параметру ефективної ширини околу від часу n визначається за формулою:

$$\sigma(n) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

де σ_0 – початкове значення параметру σ , τ_1 – деяка часова константа.

Латеральна відстань $d_{j,i}(x)$ для випадку одновимірної решітки дорівнює $|j - i|$, для двовимірної ця відстань визначається наступним чином:

$$d_{j,i}(x) = \|r_j - r_i(x)\|,$$

де вектор r_j – визначає позицію збудженого нейрона j , $r_i(x)$ – нейрона-переможця.

Процес синаптичної адаптації

На даному етапі відбувається модифікація ваг нейронів таким чином, щоб відгук збуджених нейронів на наступну подачу аналогічних прикладів підсилювався. Модифікація ваг визначається за формулою:

$$w_j(n+1) = w_j(n) + \eta(n) h_{j,i}(x) (x - w_j(n)),$$

де $\eta(n)$ – параметр швидкості навчання, що монотонно зменшується з часом n :

$$\eta(n) = \eta_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_2}\right), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

де η_0 – початкове значення параметра η , τ_2 – часова константа алгоритму SOM.

Етапи навчання

Для оптимізації результатів навчання нейронної мережі Кохонена процес синаптичної адаптації може бути декомпонований на 2 етапи: етап самоорганізації та етап збіжності.

1. Етап самоорганізації або впорядкування. Може зайняти до 1000 ітерацій, а можливо і більше. На цьому етапі швидкість навчання $\eta(n)$ рекомендується використовувати з наступними значеннями параметрів:

$$\eta_0 = 0,1, \tau_2 = 1000.$$

Функція околу $h_{j,i(x)}(n)$ спочатку повинна охоплювати практично всі нейрони мережі та з часом поступово зменшуватися. Часову константу τ_1 можна визначити за формулою:

$$\tau_1 = \frac{1000}{\log \sigma_0}$$

2. Етап збіжності.

Даний етап необхідний для точного налаштування карти ознак та необхідна кількість ітерацій приблизно в 500 разів перевищує кількість нейронів мережі.

Для хорошої статистичної точності початкове значення параметра швидкості навчання η_0 повинно бути достатньо малим (порядку 0,01). Функція околу $h_{j,i(x)}(n)$ повинна охоплювати лише найближчих сусідів нейрона-переможця, кількість яких може зменшитися до одного або навіть до нуля.

Кластеризація художніх творів за триграмми нейронною мережею Кохонена

Для кластеризації були використані твори 14 авторів, дані представлені у таблиці 1.

Таблиця 1

Автор	Об'єм тексту в Кб	Кількість текстів	Середній об'єм в Кб
А.Столяров	1376.5	6	229.4
А.Толстой	267	4	66.8
М.Булгаков	1572.3	7	224.6
Ф.Достоевский	879.2	6	146.5
Н.Гоголь	1365.1	8	170.6
Е.Хаецкая	546.6	5	109.3
С.Казменко	947.9	4	237
Л.Кудрявцев	568.6	4	142.2

А.Лазаревич	1128.8	5	225.8
Ю.Латынина	3398.8	7	485.5
С.Логинов	1921.3	6	320.2
А.Пушкин	846.1	6	141
М.Шолохов	898.1	5	179.6
И.Тургенев	1193.7	9	132.6

Вектори ознак текстів будуються з частот виділених 3-грам у вибірці при перетворенні текстів у третій трансформації [1], відповідно до якої тексти перетворюються у набір послідовностей звуків.

При цьому, всі частоти приводяться до розміру з розрахунку на 30000 звуків тексту. Тобто, для вектора ознак тексту T

$$v^T = (ch_1^T, ch_2^T, \dots, ch_m^T):$$

$$ch_i^T = \frac{ch_i^T}{n^T} \cdot 30000, i = \overline{1, m}$$

де ch_i^T – частота i -ї триграми для тексту T , n^T – кількість фонем у тексті T , m – кількість 3-грам, виділених з усієї вибірки текстів (розмірність вектора ознак).

Розмірність векторів ознак для даної вибірки текстів склала 26277.

Для кластеризації була побудована нейронна мережа з решіткою нейронів 10×10 . Відповідно розмірність простору ваг у мережі склала 2627700.

При тестуванні системи для деяких авторів одразу декілька текстів отримували відгук в одному нейроні решітки, що означає високий рівень схожості текстів за ознакою частотності триграм. Кількість відгуків нейрона на тексти одного автора назовемо його *активністю*.

Згідно отриманим результатам кластеризації для 8 авторів (А.Столяров, Н.Гоголь, Е.Хаецкая, С.Казменко, Л.Кудрявцев, А.Лазаревич, Ю.Латынина, М.Шолохов) всі тексти було прокластеризовано вірно (всього 44 тексти) та в результаті було отримано відповідно 8 кластерів. Також більше 50% творів для 4-х авторів було прокластеризовано вірно, а саме: 5 творів з 6 Пушкіна, 5 творів з 7 Булгакова, 4 твори з 6 Достоевського, 4 твори з 6 Логінова. Також 2 кластери сформували відповідно 4 та 3 твори Тургенєва.

Результати кластеризації представлені у таблиці 2.

Таблиця 2

Автор	Кластеризація	Автор	Кластеризація
А. Столяров Текстів – 6; кластер – 1; 2 нейрони мають активність 2	●○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○	Л. Кудрявцев Текстів – 4; кластер – 1; 2 нейрони мають активність 2	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○
А. Толстой Текстів – 4; кластерів – 2 (кожен по 2 тексти)	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○	А. Лазаревич Текстів – 5; кластер – 1; 1 нейрон має активність 4	●●○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○
М. Булгаков Текстів – 7; кластерів – 3 (один містить 5 текстів, 2 по одному тексту); 1 нейрон має активність 2	○○●○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○	Ю. Латынина Текстів – 7; кластер – 1; 1 нейрон має активність 4	○○○○●●●○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○
Ф. Достоевський Текстів – 6; кластерів – 3 (один містить 4 тексти, 2 по одному); 2 нейрони мають активність 2	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○	С. Логинов Текстів – 3; кластерів – 3 (один містить 4, 2 по одному); 1 нейрон має активність 2	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○
Н. Гоголь Текстів – 8; кластер – 1; 1 нейрон має активність 3, 1 – активність 2	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○	А. Пушкин Текстів – 6; кластерів – 2 (один містить 5 текстів, інший – один); 1 нейрон має активність 5	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○
Е. Хаецкая Текстів – 5; кластер – 1; 2 нейрони мають активність 2	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○	М. Шолохов Текстів – 5; кластер – 1; 1 нейрон має активність 2	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○
С. Казменко Текстів – 4; кластер – 1; 1 нейрон має активність 3	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○	И.Тургенев Текстів – 9; кластерів – 4 (один містить 4 тексти, другий – 3, інші по одному); 2 нейрони мають активність 2	○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○

Висновки

Згідно отриманим результатам кластеризації художніх творів можна зробити наступні висновки:

1. Частоти 3-грам у текстах представлених наборами послідовностей звуків (без пробілів) є ефективною ознакою при визначенні стилістичної близькості творів.

2. Для точного налаштування нейронної мережі Кохонена є доцільною декомпозиція процесу синаптичної адаптації на 2 етапи – впорядкування та збіжності.

Список використаних джерел

1. Тарануха В.Ю., Порхун О.В. Автоматичне визначення авторства з використанням аналізу звукової організації мови // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки, 2011, №1. – С. 63-69.
2. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. Второе издание // Москва-Санкт-Петербург-Киев. – 2008. – С. 115-126.

Надійшла до редколегії 17.05.2012

УДК 004.4, 004.89

Россада Т.В.^{*}, аспірант, Скляр А.В.^{**}, аспірант**Властивості слабкоструктурованих даних з багатозначним іменуванням та їх використання**

Стаття є продовженням попередніх досліджень авторів, в яких було введено номінативні множини, що допускають неоднозначність іменування, доведена теорема про монотонність та еквівалентність програм над такими даними. У даному повідомленні досліджується еквівалентність даних, що допускають неоднозначність іменування, доводиться теорема про збереження програмами композиційної мови $SICON_R$ еквівалентності, яка базується на початковій еквівалентності базових значень. Запропоновано використання отриманих результатів в інтелектуальних навчальних системах та інших системах, які використовують слабкоструктуровані дані.

Ключові слова: номінативні дані, мови програмування, семантика програм, програмні алгебри, інтелектуальні навчальні системи.

^{*}E-mail: trossada@gmail.com^{**}E-mail: a.sklyar@seeker.pp.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

Розвиток Інтернету та зростаючий обсяг доступної в мережі інформації робить актуальним питання використання програмних систем для її обробки та опису. Але строга структуризація, притаманна класичним моделям даних, є суттєвим обмеженням, тому останнім часом особлива увага приділяється теорії слабкоструктурованих даних [1-2]: даних з нечіткою структурою, яка може змінюватись під час обробки. Робота з такими даними ускладнена за рахунок відсутності в них строгої структури, наявності неоднозначності іменування, синонімії тощо. Але все це є також і перевагами цих даних, адже робить їх зручним інструментом для вирішення достатньо великої кількості актуальних проблем, серед яких не тільки представлення даних з Web, але й, наприклад, створення гнучкої системи обміну даними між

T.V. Rossada^{*}, P.G., A.V. Sklyar^{**}, P.G.**Properties of semistructured data with multivalued naming and their use**

The article is a continuation of previous author's research, where introduced nominative sets allowing ambivalence naming and theorem about monotonic and equitone programs on such data proved. This paper investigated the equivalence of data allowing ambiguity of naming; a theorem about the conservation programs of compositional language $SICON_R$ equivalence based on the initial equivalence of basic values proved. Proposed to use the obtained results in intelligent tutoring systems and other systems, which use semistructured data.

Key Words: nominative data, programming languages, program semantics, program algebras, intelligent tutoring systems.

різнорідними БД, а також представлення даних для інтелектуальних навчальних систем (ІНС), для яких однією з важливих проблем є гнучке й водночас виразне представлення різноманітних даних, якими оперує така система: починаючи від окремих мультимедійних теоретичних матеріалів і навчальних задач, організованих у цілісний курс навчання, завершуючи моделями поведінки учня при розв'язанні проблемних ситуацій та поданням його знань та засвоєних умінь [3].

Для кожної окремо взятої задачі, для якої використовуються слабкоструктуровані дані, необхідно вирішення ряду проблем, індукованих особливостями системи, особливе місце серед яких займає проблема якомога більш повного використання можливостей таких даних. Важливе місце займає доведення доцільності та правильності обраного методу вирішення проблеми.

Можливість використання при роботі з слабкоструктурованими даними таких особливостей, як неоднозначність іменування, синонімія, тощо, відкриває перед ІНС нові горизонти для більшого їх наближення до імітації реальної взаємодії "вчитель – учень", проте ці аспекти ієрархічних даних потребують додаткових досліджень.

Проблема багатозначного іменування була частково досліджена у [4], дана робота є продовженням дослідження, вона присвячена формалізації методів обробки даних з багатозначним іменуванням та визначенням на них відношенням еквівалентності. Формальне дослідження та доведення основних властивостей багатозначного іменування дозволить у подальшому використовувати отримані результати у задачі реалізації різного типу систем, зокрема і ІНС, без ризику порушення логіки програми.

Для вирішення поставленої задачі у наступному пункті нагадаємо основні результати попередньої роботи. Усі визначення трактуються у смислі [4-6].

1. Номінативні дані з багатозначними іменами

Для визначення і дослідження основних проблем та особливостей роботи із слабкоструктурованими даними з багатозначним іменуванням, функціями та композиціями над ними, у [4] було введено підклас реляційних номінативних даних рангу 1 [5] (реляційних номінативних множин): RNS (з англ. *Relational Nominative Set*), який будується на основі множини імен V і множини базових (атомарних) значень W (зафіксуємо їх). Кожен елемент цього класу являю собою множини пар "ім'я $\mapsto$ значення" (*nominativ*), причому одному імені в такому даному може відповідати декілька атомарних значень. Клас RNS є підкласом загального класу номінативних даних [5].

Для роботи з даними класу RNS у [4] було визначено базові операції і функції над ними. Для $w \in W$, $v \in V$, $d, d' \in RNS$ було визначено наступні теоретико-множинні відношення і операції:

- **включення** $\subseteq$: $d \subseteq d' \Leftrightarrow$

$\forall v \forall w ((v \mapsto w \in e_d \rightarrow (v \mapsto w \in e_{d'}))$ (тут і далі e_d у смислі [7]);

- **рівність** $=$: $d = d' \Leftrightarrow d \subseteq d' \wedge d' \subseteq d$;

- **строге включення** $\subset$: $d \subset d' \Leftrightarrow$

$$d \subseteq d' \wedge \neg (d = d');$$

- **об'єднання** $\cup$: $d \cup d' =$
 $= \{v \mapsto w \mid v \mapsto w \in e_d \vee v \mapsto w \in e_{d'}\};$
- **перетин** $\cap$: $d \cap d' =$
 $= \{v \mapsto w \mid v \mapsto w \in e_d \wedge v \mapsto w \in e_{d'}\};$
- **різниця** $\setminus$: $d \setminus d' =$
 $= \{v \mapsto w \mid v \mapsto w \in e_d \wedge v \mapsto w \notin e_{d'}\};$
- **різниця по іменам** $\setminus$: $d \setminus d' =$
 $= \{v \mapsto w \mid v \mapsto w \in e_d \wedge v \notin nms(d')\};$
- **проекція** $//$: $d // d' =$
 $= \{v \mapsto w \mid v \mapsto w \in e_d \wedge v \in nms(d')\}.$

Для $w \in W$, $v \in V$, $d, d' \in RNS$ було визначено наступні базові функції:

- **іменування** $\Rightarrow_R$: $W \longrightarrow RNS$:

$$\Rightarrow_R v(w) = \{v \mapsto w\};$$

- **недетерміноване розіменування**

$$v \mapsto_R RNS \xrightarrow{m} W:$$

$$v \mapsto_R (d) = w \Leftrightarrow v \mapsto w \in e_d;$$

- **недетерміноване реляційне оновлення**

$$f_R: RNS^2 \xrightarrow{m} RNS: d \uparrow_R d' = d' \cup (d \setminus d') \cup b,$$

де r таке, що $b \subseteq (d // d')$;

- **детерміноване реляційне оновлення з повним заміщенням** $f_R^{all}: RNS^2 \longrightarrow RNS$:

$$d \uparrow_R^{all} d' = d' \cup (d \setminus d');$$

- **функція-константа** $\bar{\emptyset}: RNS \longrightarrow RNS$:

$$\bar{\emptyset}(d) = \emptyset.$$

Для введених у [4] класів відображень, а саме для мультінарних предикатів $P_m: RNS \xrightarrow{m} Bool$, ординарних мультінарних функцій $FO_m: RNS \xrightarrow{m} W$ та бімультінарних функцій $FB_m: RNS \xrightarrow{m} RNS$ ($FO_m \cup FB_m$ позначимо як F_m) було визначено основні композиції: суперпозиція $S^{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)}$, присвоєння As_R , послідовне виконання $\bullet$, розгалуження IF та цикл WH . Введені класи функцій та предикатів і композицій над ними утворюють собою алгебру функцій: $A_{Prog} = \langle FB_m, FO_m, P_m; \vee, \neg, S^{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)}, As_R, \bullet, IF, WH \rangle$ (рис. 1).

Для дослідження обрана композиційна мова програм *SICON*, оскільки вона задовольняє критеріям формальності, дескриптивної простоти,

функціональної повноти та структурної адекватності [5].

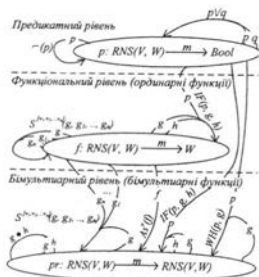


Рис. 1. Алгебра предикатів-функцій-програм

В алгебрах програм над класом даних RNS кожен семантичний терм Pr інтерпретується як певна функція $f: RNS \rightarrow RNS \cup W$ (клас таких функцій позначимо як SF_m) або предикат $p: RNS \rightarrow Bool$ (клас таких предикатів позначимо як SP_m). Функції f класу SF_m такі, що $f: RNS \rightarrow W$, будемо називати *ординарними мультварними*, а g такі, що $g: RNS \rightarrow RNS$ – *бімультварними*.

Інтерпретацію мови $SICON$ в алгебрах програм над класом даних RNS позначатимемо $SICON_R$.

Наведені композиції та класи функцій утворюють *програмну алгебру* $A_Prog_m = \langle SF_m, SP_m, v \Rightarrow, \emptyset, S^{(1, \dots, n)}, As^*, \bullet, IF, WH \rangle$ [4].

У [4] композиції присвоєння та суперпозиції були побудовані на основі недетермінованого реляційного оновлення. Але останнє, побудоване, в свою чергу, на основі теоретико-множинної операції об'єднання, може "зіпсувати" дане, оскільки результатом виконання цієї операції може бути номінативна множина, одному імені в якій можуть відповідати не еквівалентні значення. Наша ж задача – робота з еквівалентними значеннями, які ми позначимо для зручності одним ім'ям. Тому, для початку,

композиції присвоєння та суперпозиції мови $SICON_R$ будемо інтерпретувати наступним чином:

$$As_R^*(f)(d) = d \uparrow_R^{as} [v \mapsto f(d)],$$

$$S^{(1, \dots, n)}(f, g_1, g_2, \dots, g_n)(d) = f(d \uparrow_R^{as} [v_1 \mapsto g_1(d),$$

$$v_2 \mapsto g_2(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)]).$$

Отримані результати будуть використані в подальшому для дослідження мов $SICON$, відповідні композиції яких побудовані на основі недетермінованого реляційного оновлення та частково недетермінованого реляційного оновлення.

2. Еквівалентність даних класу $RNS(V, W)$

Як зазначалось у [4], введення багатозначного іменування дозволяє наблизити формальну модель до її реального прототипу. Це стосується і інтелектуальних навчальних систем. Розглянемо це на спрощеному прикладі модуля даних ІНС, що зберігає однотипні за складністю задачі та теоретичний матеріал (рис. 2), необхідний для їх розв'язання.

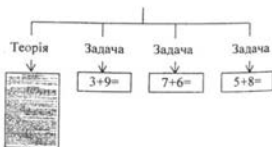


Рис. 2. Приклад номінативного даного з багатозначним іменуванням для ІНС

Зазвичай у процесі навчання від учня не вимагається розв'язати усі представлені в системі задачі. Натомість для закріплення матеріалу та навичок достатньо розв'язати лише декілька задач встановленої складності і не має значення, які саме задачі з набору будуть розв'язані учнем. Використання номінативних даних з багатозначним іменуванням для представлення елементів навчального курсу в даному випадку зводить задачу визначення рівня засвоєння навчального матеріалу учнем до використання введеної операції недетермінованого розіменування $v \Rightarrow_d$ даного $d = [Задача \mapsto w_1, \dots, Задача \mapsto w_n, Теорія \mapsto w']$. Для доведення коректності роботи такої методики введемо відношення номінативної еквівалентності на множині даних класу RNS .

Для формального визначення відношення еквівалентності на множині даних класу RNS попередньо введемо бінарне відношення номінативного еквівалювання (позначатимемо $\subseteq_{eq}$), що базується на визначеному відношенні еквівалентності на множині значень W .

Нехай $d, d' \in RNS$. Будемо казати, що $d \subseteq_{eq} d'$, якщо $nms(d) \subseteq nms(d')$ і для $\forall w, w' \in W, v \in V$ таких, що $v \mapsto w \in_e d$ і $v \mapsto w' \in_e d'$, виконується наступне: $w \sim w'$. З визначення випливає транзитивність відношення $\subseteq_{eq}$ на множині даних класу RNS (оскільки транзитивним є відношення $\subseteq$).

Еквівалентними будемо називати такі $d, d' \in RNS$ (позначатимемо $d \sim d'$), що $d \subseteq_{eq} d'$ і $d' \subseteq_{eq} d$. З визначення випливає симетричність та транзитивність відношення $\sim$ на множині даних класу RNS .

Лема 1 (критерій еквівалентності). Для $\forall d, d' \in RNS: d \sim d' \Leftrightarrow nms(d) = nms(d')$ і для $\forall w, w' \in W, v \in V$ таких, що $v \mapsto w \in_e d$ і $v \mapsto w' \in_e d'$, виконується наступне: $w \sim w'$.

Доведення.

За визначенням $d \sim d' \Leftrightarrow d \subseteq_{eq} d'$ і $d' \subseteq_{eq} d$. А останнє, за визначенням, виконується тоді і тільки тоді, коли $nms(d) \subseteq nms(d')$, $nms(d') \subseteq nms(d)$, тобто $nms(d) = nms(d')$, і $\forall w, w' \in W, v \in V$ таких, що $v \mapsto w \in_e d$ і $v \mapsto w' \in_e d'$, виконується наступне: $w \sim w'$.

Лема доведена.

Зауваження. Введені відношення номінативного еквівалювання $\subseteq_{eq}$ та номінативного еквівалентності $\sim$ не є рефлексивними. Наприклад, для такого даного $d = \{v \mapsto w, v \mapsto w'\}$, в якому w і w' – не еквівалентні, не буде виконуватись $d \subseteq_{eq} d$ і $d \sim d$. Якщо ж дане еквівалентне саме собі, то про нього можна стверджувати наступне: значення, що відповідають одному імені в цьому даному є парно еквівалентними.

Наслідок з леми 1. Для $\forall d, d', r, r' \in RNS: d \sim d', r \subseteq d$ і $r' \subseteq d'$: якщо $nms(r) = nms(r')$, то $r \sim r'$.

3. Еквізберігаючі функції

Будемо казати, що функція $f \in F_m$ зберігає еквівалентність (є еквізберігаючою), якщо для $\forall d, d', r, r' \in RNS$ таких, що $d \sim d', f(d) = r$ і $f(d') = r'$ виконується наступне: $r \sim r'$. Будемо

казати, що предикат $p \in P_m$ є еквізберігаючим, якщо для $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d', p(d) = p(d') = r'$. Позначимо клас еквізберігаючих функцій як PEF_m , а еквізберігаючих предикатів – як PEP_m (з англ. *Preserves the Equivalence*). Перевіримо, чи є еквізберігаючими базові функції.

Твердження 1. Для $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d'$, виконується наступне: кожен результат виконання операцій та функцій розмінування $v \Rightarrow_e d$, проєкції $d // d''$ ($d'' // d$), різниці по іменам $d \setminus d''$ ($d'' \setminus d$) та функції-константи $\bar{O}(d)$ буде еквівалентний кожному результату виконання операцій та функцій $v \Rightarrow_e d', d' // d''$ ($d'' // d'$), $d' \setminus d''$ ($d'' \setminus d'$) і $\bar{O}(d')$ відповідно.

Доведення.

Доведемо для $v \Rightarrow_e$: для $\forall r \in W$, якщо $v \Rightarrow_e d \downarrow = r$, то, за визначенням операції розмінування, $v \mapsto r \in_e d$. А з еквівалентності даних d і d' випливає, що для $\forall r' \in W$ такого, що $v \mapsto r' \in_e d'$ виконується наступне: $r \sim r'$.

Доведемо для $//$ і $\setminus$: множини імен $d // d''$ і $d' // d''$ ($d'' // d$ і $d'' // d'$) співпадають, оскільки рівними є $nms(d) \cap nms(d'')$ і $nms(d') \cap nms(d'')$ ($nms(d) \setminus nms(d'')$ і $nms(d') \setminus nms(d'')$) відповідно, а $nms(d) = nms(d')$ за умовою. Враховуючи, що $d // d'' \subseteq d$ і $d' // d'' \subseteq d'$ ($d'' // d \subseteq d$ і $d'' // d' \subseteq d'$), з наслідку з леми 1 випливає, що $d // d'' \sim d' // d''$ ($d'' // d \sim d'' // d'$). Для доведення твердження із фіксованим даним зліва достатньо скористатись тим фактом, що $nms(d) = nms(d')$.

Функція-константа $\bar{O}(d)$ є еквізберігаючою за визначенням: $\bar{O}(d) = \bar{O}(d') = \emptyset$.

Твердження доведено.

Зауваження. Базові теоретико-множинні операції перетину, різниці та об'єднання в загальному випадку еквівалентність не зберігають.

Наприклад для таких даних: $d = \{v \mapsto w\}$, $d' = \{v \mapsto w\}$, $d'' = \{v \mapsto w\}$, де $v \in V, w, w' \in W$ і $w \sim w'$ виконується наступне: $d \sim d'$, але, оскільки $d \cap d'' = \{v \mapsto w\}$, а $d' \cap d'' = \emptyset$, то дані $d \cap d'$ і $d' \cap d''$ не еквівалентні.

Аналогічно, не є еквівалентними і дані $d \setminus d'' = \emptyset$ та $d' \setminus d'' = \{v \mapsto w'\}$.

Для даних $d = \{v \mapsto w\}$, $d' = \{v \mapsto w\}$, $d'' = \{v \mapsto w\}$, де $v \in V, w, w', w'' \in W$ і $w \sim w'$ (але не еквівалентні w''): $d \cup d'' = \{v \mapsto w, v \mapsto w''\}$ і $d' \cup d'' = \{v \mapsto w', v \mapsto w''\}$. Ці дані

також не еквівалентні, оскільки для $v \mapsto w \in_e d \cup d''$ існує $v \mapsto w'' \in_e d' \cup d''$ такі, що значення w і w'' не еквівалентні.

Наслідок з твердження 1. Для $\forall d_1, d_2, d', d'' \in RNS$ таких, що $d_1 \sim d'_1$ і $d_2 \sim d'_2$, виконується наступне: $d_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d'_2$, $d_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d'_2$.

Доведення.

Зафіксуємо d_2 . За умовою $d_1 \sim d'_1$, отже, за твердженням 1, $d_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d'_2$. Зафіксуємо d'_1 . За умовою $d_2 \sim d'_2$, отже, за твердженням 1, $d'_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d'_2$. Використавши транзитивність відношення еквівалентності, отримаємо, що $d_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d'_2$ і $d_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d'_2$.

Твердження доведено.

Твердження 2. Для $\forall d, d', d'' \in RNS$ виконується наступне: якщо $d \sim d'$ і $nms(d) \cap nmd(d'') = \emptyset$, то $d \cup d'' \sim d' \cup d''$ і $d' \cup d'' \sim d \cup d''$.

Доведення.

Множини імен результуючих даних співпадають. Для $\forall v \in V, w, w' \in W$ таких, що $v \mapsto w \in_e d \cup d''$ і $v \mapsto w' \in_e d' \cup d''$ значення w і w' будуть еквівалентними, якщо $v \mapsto w \in_e d$ (слідок з $d \sim d'$), і рівними, якщо $v \mapsto w \in_e d''$. Інші варіанти виключені за рахунок умови $nms(d) \cap nmd(d'') = \emptyset$. Аналогічно доводиться твердження із фіксованим даним зліва.

Твердження доведено.

Наслідок з твердження 2. Для $\forall d_1, d_2, d', d'' \in RNS$ таких, що $d_1 \sim d'_1$, $d_2 \sim d'_2$ і $nms(d_1) \cap nmd(d_2) = \emptyset$, виконується наступне: $d_1 \cup d_2 \sim d'_1 \cup d'_2$.

Доведення.

Зафіксуємо d_2 . З умови та твердження 2 слідує, що $d_1 \cup d_2 \sim d'_1 \cup d_2$. Зафіксуємо d'_1 . З умови та твердження 2 слідує, що $d'_1 \cup d_2 \sim d'_1 \cup d'_2$. Використавши транзитивність відношення еквівалентності, отримаємо, що $d_1 \cup d_2 \sim d'_1 \cup d'_2$.

Твердження доведено.

Твердження 3. Для $\forall d_1, d_2, d'_1, d'_2 \in RNS$ таких, що $d_1 \sim d'_1$ і $d_2 \sim d'_2$, виконується наступне: $d_1 \uparrow_a^d d_2 \sim d'_1 \uparrow_a^d d'_2$.

Доведення.

За визначенням операції повного реляційного оновлення: $d_1 \uparrow_a^d d_2 = d_2 \cup (d_1 \parallel d_2)$, $d'_1 \uparrow_a^d d'_2 = d'_2 \cup (d'_1 \parallel d'_2)$. За наслідком з

твердження 1: $d_1 \parallel d_2 \sim d'_1 \parallel d'_2$ (отже і множини їх імен співпадають). За визначенням операції різниці по іменам: $nms(d_1 \parallel d_2) \cap nms(d'_2) = \emptyset$ і $nms(d'_1 \parallel d'_2) \cap nms(d'_2) = \emptyset$, тому можна використати наслідок з твердження 2: $d_2 \cup (d_1 \parallel d_2) \sim d'_2 \cup (d'_1 \parallel d'_2)$.

Твердження доведено.

Доведені твердження дозволяють говорити про *стабільність* введеного відношення еквівалентності відносно базових операцій розіменування, різниці по іменам, проєкції, повного реляційного оновлення та функцій-константи $\emptyset$.

Твердження 4. Клас еквізберігаючих функцій замкнений відносно композицій послідовного виконання $\bullet$, суперпозиції $S^{(n_1, \dots, n_k)}$ та присвоєння AS_s^* (побудованих на операції детермінованого реляційного оновлення з повним заміщенням).

Доведення.

Композиція послідовного виконання визначається через еквізберігаючу функцію: $\forall g, f \in PEF_m, d \in RNS: (f \bullet g)(d) = g(f(d))$, отже клас PEF_m замкнений відносно $\bullet$.

Композиції суперпозиції $S^{(n_1, \dots, n_k)}$ та присвоєння AS_s^* визначені через базову операцію детермінованого реляційного оновлення з повним заміщенням, яка, за твердженням 3, є еквізберігаючою, отже клас PEF_m замкнений відносно цих композицій.

Твердження доведено.

Твердження 5. Клас PEF_m замкнений відносно композицій розгалуження IF та циклу WH .

Доведення.

Доведемо для IF : для $\forall f, g \in PEF_m, p \in PEP_m, d, d' \in RNS$ і $d \sim d'$, оскільки p – еквізберігаючий предикат (тобто кожен результат $p(d)$ еквівалентний кожному результату $p(d')$), то можливі лише два випадки:

1) $IF(p, f, g)(d) = f(d)$ і $IF(p, f, g)(d') = f(d')$ (якщо $p(d) = T$), і тоді істинність твердження випливає з того, що f – еквізберігаюча функція;

2) $IF(p, f, g)(d) = g(d)$ і $IF(p, f, g)(d') = g(d')$ (якщо $p(d) = F$), і тоді істинність твердження випливає з того, що g – еквізберігаюча функція.

Доведемо для WH : для $\forall g \in PEF_m, p \in PEP_m, d, d' \in RNS$ і $d \sim d'$ виконується наступне: для деякого $m \in N$ виконується $g^{(m)}(d) = WH(p, g)(d)$, $p(g^{(m)}(d)) = T$ і $p(g^{(m)}(d')) \neq T$.

для всіх $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Використовуючи m разів властивість функції g зберігати еквівалентність, отримуємо, що $\forall r, r' \in RNS$ таких, що $r = g^{(i)}(d)$, $r' = g^{(i)}(d')$: $r \sim r'$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Оскільки p – еквізберігаючий предикат, то $p(g^{(i)}(d')) \neq T$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ і $p(g^{(m)}(d')) = T$. Тоді, за визначенням циклу, $WH(p, g)(d) = g^{(m)}(d)$ і $WH(p, g)(d') = g^{(m)}(d')$. $\forall r, r' \in RNS$ таких, що $r = g^{(m)}(d)$, $r' = g^{(m)}(d')$: $r \sim r'$.

Твердження доведено.

Теорема 1. PEF_m із базовими функціями розмінування $v \Rightarrow_k$ та функцією-константою $\bar{0}$, композиціями суперпозиції $S^{f_1, f_2, \dots, f_k, 1}$ і присвоєння AS_k^* , побудованих на основі операції детермінованого реляційного оновлення з повним заміщенням, послідовного виконання $\bullet$, розгалуження IF та циклу WH утворюють підалгебру алгебри функцій A_Prog .

Доведення випливає з тверджень 1-3.

Теорема 2. Для $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d'$ і для $\forall f \in SF_R$ виконується наступне: якщо $f(d) \downarrow$, то і $f(d') \downarrow$.

Доведення випливає з тверджень 1-4.



Рис. 3. Зв'язок між еквівалентними даними та результатами виконання над ними програми мови $SICON_R$.

Теорема 3. Для $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d'$ і для $\forall f \in SF_R$ виконується наступне: для $\forall r, r' \in RNS$ таких, що $f(d) = r$ і $f(d') = r'$, значення r і r' будуть еквівалентними (рис. 3).

Доведення.

Доведемо індукцією за рангом операторного терму, що кожна функція $f \in SF_m$ зберігає еквівалентність.

База індукції ($k = 1$): істинність твердження для класу функцій $SF_m^1 = \{\bar{0}\} \cup \{v \Rightarrow_k \mid v \in V\}$ випливає з твердження 1.

Індукційний перехід. Припустимо, що для деякого k твердження вже доведено. Доведемо

його для кожної функції з $SF_m^{k+1} \setminus SF_m^k$. Нехай $f \in SF_m^{k+1} \setminus SF_m^k$. Можливі такі випадки:

- f визначається як $S^{f_1, f_2, \dots, f_k, 1}(g, f_1, f_2, \dots, f_k)$, де $g, f_1, f_2, \dots, f_k \in SF_m^k$ (тут і далі, формально, k є сумою рангів операторних термів, до яких застосовується композиція, у даному випадку: $g, f_1, f_2, \dots, f_k$; це означає, що ранг кожного з них може бути і меншим за k , але, головне, не більшим), або як $AS_k^*(f)$, де $f_1 \in SF_m^k$, або як $f_1 \bullet f_2$, де $f_1, f_2 \in SF_m^k$. Тоді властивість виконується за твердженням 4.

- f визначається як $IF(p, f)$, де $p \in SP_m^k$, $f_1, f_2 \in SF_m^k$, або як $WH(p, f_1, f_2)$, де $p \in SP_m^k$, $f_1, f_2 \in SF_m^k$. Тоді властивість виконується за твердженням 5.

Індукційний перехід завершено.

Теорему доведено.

Наслідок з теореми 3. Для $\forall d \in RNS$ такого, що $d \sim d'$ і для $\forall f \in SF_R$ виконується наступне: для $\forall r, r' \in RNS$ таких, що $f(d) = r$ і $f(d') = r'$, значення r і r' будуть еквівалентними (рис. 4).



Рис. 4. Зв'язок між результатами виконання програми мови $SICON_R$ над даним, еквівалентним самому собі

Змістовна інтерпретація доведеної теореми така: при заданому відношенні еквівалентності на множині значень W результат роботи програми суттєво не залежить від вибору значення багатозначного імені, якщо ці значення еквівалентні.

Отримані результати дозволяють стверджувати, що відношення еквівалентності для даної системи є конгруенцією, оскільки воно є стабільним відносно базових операцій та функцій системи, а також композицій над ними.

4. Еквізберігаючі функції, побудовані на основі частково недетермінованого оновлення

Умову детермінованості операції реляційного оновлення можна послабити. Операція реляційного оновлення базується на

теоретико-множинний операції об'єднання. У минулих пунктах було доведено, що еквівалентність зберігається за умови, що множини імен даних, до яких застосовується операція об'єднання, не перетинаються. Цю умову можна послабити: еквівалентність буде зберігатися, якщо значення, які відповідають іменам, що належать перетину множин імен двох даних, будуть відповідно попарно еквівалентними (що умову для двох даних $d, d' \in RNS$ можна задати як $d // d' \sim d' // d$). Доведемо це.

Лема 2. $\forall d, d', d'' \in RNS$ виконується наступне: якщо $d \sim d' \wedge d' \sim d''$, то $d \sim d' \cup d''$.

Доведення.

З умови слідує, що $nms(d) = nms(d' \cup d'')$, а також, що $\forall w, w', w'' \in W, v \in V$ таких, що $v \mapsto w \in d, v \mapsto w' \in d' \wedge v \mapsto w'' \in d''$, виконується наступне: $w \sim w' \wedge w' \sim w''$. З останнього слідує, що будь-яке значення імені з об'єднання $d' \cup d''$ також буде еквівалентним w .

Лема доведена.

Твердження 6 (посилене твердження 2). Для $\forall d, d', d'' \in RNS$ виконується наступне: якщо $d \sim d', d // d'' \sim d'' // d$ і $d' // d'' \sim d'' // d'$, то $d \cup d' \sim d' \cup d'' \cup d'' \cup d \sim d' \cup d'' \cup d'$.

Доведення.

Скористасьмося тим фактом, що, за визначенням $//$ і $\sim$: $d = d // d'' \cup d'' // d$ і $d'' = d'' // d \cup d // d$. Множини імен $d // d''$ і $d'' // d$ (а отже і $d' // d''$ та $d'' // d'$) не перетинаються, тому, за твердженням 2: $d // d'' \cup d'' // d \sim d' // d'' \cup d'' // d'$.

Позначимо $p = d // d'', q = d'' // d, r = d' // d', s = d' // d'$. З умови: $p \sim q, r \sim s$. З еквівалентності d і d' та наслідку з леми 1: $p \sim r \wedge q \sim s$. Тоді з $p \sim s$ (оскільки $p \sim q \wedge q \sim s$), $p \sim r$ та леми 2: $p \sim r \cup s$; з $q \sim r$ (оскільки $q \sim p \wedge p \sim r$), $q \sim s$ та леми 2: $q \sim r \cup s$; за лемою 2 з отриманого слідує, що $p \cup q \sim r \cup s$. Тобто, що $d // d'' \cup d'' // d \sim d' // d' \cup d' // d'$.

З визначення операції $//$ і $\sim$ слідує, що $nms(d // d'' \cup d'' // d) = nms(d) \Delta nms(d'')$ (де Δ - симетрична різниця множин) і $nms(d // d'' \cup d'' // d) = nms(d) \cap nms(d'')$ (те саме вірно для d'). Ці множини не перетинаються, тому, за твердженням 2, їх об'єднання (які рівні відповідно $d \cup d''$ і $d' \cup d''$) також будуть еквівалентними.

Твердження доведено.

Наслідок з твердження 6 (посилений наслідок з твердження 2). Для

$\forall d_1, d_2, d', d'' \in RNS$ таких, що $d_1 \sim d', d_2 \sim d', d_1 // d_2 \sim d_2 // d_1$ і $d' // d'' \sim d'' // d'$ виконується наступне: $d_1 \cup d_2 \sim d' \cup d''$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку з твердження 2, випливає з твердження 6.

Лема 3. $\forall d, d' \in RNS$ виконується наступне: якщо $d' \subseteq_{eq} d$ то $d \sim d \cup d'$.

Доведення слідує з леми 1.

Твердження 7.

Для $\forall d_1, d_2, d', d'', r, r' \in RNS$ таких, що $d_1 \sim d', d_2 \sim d'', d_1 // d_2 \sim d_2 // d_1, d' // d'' \sim d'' // d', d_1 \uparrow_r d_2 = r \wedge d' \uparrow_{r'} d'' = r'$ виконується наступне: $r \sim r'$.

Доведення.

Спочатку доведемо, що $d_2 \cup (d_1 // d_2) \sim d_2 \cup (d' // d'')$. Це виконується за наслідком з твердження 2, враховуючи, що з визначення $//$ слідує: $nms(d_2) \cap nms(d_1 // d_2) = \emptyset$. Те саме вірно для $d'_1 \wedge d'_2$.

Покажемо, що $\forall b \subseteq d_1 // d_2$ виконується $b \subseteq_{eq} d_2 \cup (d_1 // d_2)$; $b \subseteq d_1 // d_2 \Rightarrow b \subseteq_{eq} d_1 // d_2$; з останнього та з умови $d_1 // d_2 \sim d_2 // d_1 \Rightarrow b \subseteq_{eq} d_2 // d_1$; з останнього $\Rightarrow b \subseteq_{eq} d_2$; $d_2 \subseteq d_2 \cup (d_1 // d_2) \Rightarrow d_2 \subseteq_{eq} d_2 \cup (d_1 // d_2)$; $b \subseteq_{eq} d_2, d_2 \subseteq_{eq} d_2 \cup (d_1 // d_2), \subseteq_{eq}$ - транзитивне $\Rightarrow b \subseteq_{eq} d_2 \cup (d_1 // d_2)$.

З останнього, з леми 3, слідує, що: $\forall b \subseteq d_1 // d_2: d_2 \cup (d_1 // d_2) \sim d_2 \cup (d_1 // d_2) \cup b$. Те саме вірно для $d'_1 \wedge d'_2$.

Позначимо $d_2 \cup (d_1 // d_2)$ як q і $d'_2 \cup (d'_1 // d'_2)$ як q' . Ми показали, що $q \sim q \cup b, q' \sim q' \cup b' \wedge q \sim q'$ (для $\forall b, b' \in RNS$ таких, що $b \subseteq d_1 // d_2$ і $b' \subseteq d'_1 // d'_2$). Враховуючи транзитивність відношення еквівалентності, виконується наступне: $q \cup b \sim q' \cup b'$, що і треба було довести.

Твердження доведено.

У попередніх пунктах ми розглядали мову $SICON_{R, \sim}$, в якій композиції присвоєння та суперпозиції були побудовані на основі детермінованого реляційного оновлення з повним заміщенням. Очевидно, що результати, отримані для такої мови не є вірними у випадку інтерпретації композицій присвоєння та суперпозиції через недетерміноване реляційне оновлення. Але, використовуючи твердження 6 та 7, можна послабити умову детермінованості оновлення.

Введемо частково недетермінованого реляційного оновлення $f'_R: RNS \rightarrow RNS$: якщо $d // d' \sim d' // d$, то $d \uparrow_R d' = d \uparrow_R d'$, інакше $d \uparrow_R d' = d \uparrow_R^{ab} d'$.

Така інтерпретація реляційного оновлення має сенс, враховуючи особливості тих систем, де планується використання даних результатів, наприклад, для ІНС: щоб додати до системи підручники з української літератури з оновленою програмою необхідно видалити усі підручники із застарілою програмою (детерміноване реляційне оновлення з повним заміщенням), але якщо потрібно додати задачі до існуючої множини еквівалентних новій задачі, то знижувати попередні не треба. В той же час, додаючи задачу, є сенс "оновлювати" множину, видаляючи деякі із попередніх задач (не детерміноване реляційне оновлення).

Твердження 8. Для $\forall d_1, d_2, d'_1, d'_2, r, r' \in RNS$ таких, що $d_1 \sim d'_1$, $d_2 \sim d'_2$, $d_1 \uparrow'_R d_2 = r$ і $d'_1 \uparrow'_R d'_2 = r'$ виконується наступне: $r \sim r'$.

Доведення випливає з наслідку з твердження 2 та з наслідку з твердження 6.

Доведені твердження дозволяють говорити про *стабільність* введеного відношення еквівалентності відносно базових операцій розіменування, різниці по іменам, проєкції, повного реляційного оновлення та функцій-константи $\bar{\emptyset}$.

Розглянемо мову $SICON^*_R$ (клас функцій цієї мови будемо позначати як SF^*_R), в якій композиції присвоєння та суперпозиції будемо інтерпретувати наступним чином:

$$AS^*_R(f)(d) = d \uparrow'_R [v \mapsto f(d)],$$

$$S^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)}(f, g_1, g_2, \dots, g_n)(d) = f(d \uparrow'_R [v_1 \mapsto g_1(d), v_2 \mapsto g_2(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)]).$$

Твердження 9. Клас еквізберігаючих функцій замкнений відносно композиції суперпозиції $S^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)}$ та присвоєння AS^*_R , побудованих на операції частково недетермінованого оновлення.

Доведення аналогічне доведенню твердження 4, випливає з твердження 8.

З твердження випливає наступна теорема.

Теорема 4. Клас еквізберігаючих функцій із базовими функціями розіменування $v \Rightarrow_R$ та

функцією-константою $\bar{\emptyset}$, композиціями суперпозиції $S^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)}$ і присвоєння AS^*_R , побудованими на операції частково недетермінованого реляційного оновлення, композиціями послідовного виконання $\bullet$, розгалуження IF та циклу WH утворюють підалгебру алгебри функцій A_Prog .

Теорема 5. Для $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d'$ і для $\forall f \in SF^*_R$ виконується наступне: якщо $f(d) \downarrow$, то $f(d') \downarrow$.

Теорема 6. Для $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d'$ і для $\forall f \in SF^*_R$ виконується наступне: для $\forall r, r' \in RNS$ таких, що $f(d) = r$ і $f(d') = r'$, значення r і r' будуть еквівалентними.

Доведення теорем випливає з теорем 1-3 та твердження 9.

Отримані результати, як і в попередньому розділі, дозволяють стверджувати, що відношення еквівалентності для даної системи є *конгруєнцією*, оскільки воно є стабільним відносно базових операцій та функцій системи, а також композицій над ними.

5. Квазіеквізберігаючі функції, побудовані на недетермінованому оновленні.

У попередніх розділах ми прийшли до висновку, що недетерміноване реляційне оновлення не є еквізберігаючим у загальному випадку. В той же час, використовуючи властивості еквівалентності, можна говорити про часткове збереження еквівалентності.

Будемо казати, що функція $f \in F_n$ *частково зберігає еквівалентність* (є *квазіеквізберігаючою*), якщо $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d'$ і для $\forall r \in RNS$ такого, що $f(d) = r$ існує $r' \in RNS$ таке, що $f(d') = r'$ і $r \sim r'$. Позначимо клас квазіеквізберігаючих функцій як $QPEF_n$ (з англ. *Quasipreserves*). Очевидно, що еквізберігаючі функції є в той же час і квазіеквізберігаючими функціями: $PEF_n \subseteq QPEF_n$. Стверджується, що операції об'єднання та недетермінованого реляційного оновлення є квазіеквізберігаючими (хоча і не є еквізберігаючими в загальному випадку).

Для доведення того факту, що операція недетермінованого оновлення є квазіеквізберігаючою, потрібно спочатку довести наступну лему.

Лема 4. Для всіх $d, d' \in RNS$ виконується наступне: якщо $d \sim d'$, то для кожного $r \subseteq d$ існує r' таке, що $r' \subseteq d'$ і $r \sim r'$.

Доведення.

Припустимо, що існує таке $r \subseteq d$, для якого не існує $r' \subseteq d'$ такого, що $r \sim r'$. Це означає, що для деякого $v \mapsto w \in_r r$ (а отже і $v \mapsto w \in_{d'} d'$) не існує w' такого, що $v \mapsto w' \in_{d'} d'$, а це суперечить умові $d \sim d'$.

Лему доведено.

Твердження 10. Для всіх $d_1, d_2, d'_1, d'_2 \in RNS$ таких, що $d_1 \sim d'_1$ і $d_2 \sim d'_2$, виконується наступне: для кожного результату операції $d_1 \upharpoonright_{\#} d_2$ існує еквівалентний йому результат виконання операції $d'_1 \upharpoonright_{\#} d'_2$.

Доведення.

Якщо $d_1 // d_2 \sim d'_1 // d'_2$ і $d_1 // d'_1 \sim d'_2 // d'_1$ – твердження буде виконуватися для $\forall b, b' \in RNS$ $b \subseteq d_1 // d_2$ і $b' \subseteq d'_1 // d'_2$. Інакше – достатньо взяти $b = b' = \emptyset$.

Твердження доведено.

Доведені твердження дозволяють говорити про квазістабільність введеного відношення еквівалентності відносно базових операцій об'єднання та недетермінованого реляційного оновлення. Приставка "квазі-" означає, що не для всіх можливих результатів виконання операції на еквівалентних даних зберігається еквівалентність, але для кожного такого результату існує еквівалентний йому результат виконання операції на даних, еквівалентних початковим.

Розглянемо мову $SICON^*_N$ (клас функцій цієї мови будемо позначати як SF^*_N), в якій композиції присвоєння та суперпозиції будемо інтерпретувати наступним чином:

$$AS^*_N(f)(d) = d \upharpoonright_{\#} [v \mapsto f(d)],$$

$$S^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)}(f, g_1, g_2, \dots, g_n)(d) = f(d \upharpoonright_{\#} \{v_1 \mapsto g_1(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)\}).$$

Твердження 11. Клас квазіеквівалентних функцій замкнений відносно композицій суперпозиції $S^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)}$ та присвоєння AS^*_N , побудованих на недетермінованому реляційному оновленні, та послідовного виконання $\bullet$.

Доведення.

Композиція $\bullet$ є еквівалентною за твердженням 4, отже є і квазіеквівалентною.

Композиції суперпозиції та присвоєння побудовані на базовій операції недетермінованого реляційного оновлення, яка за твердженням 11, є квазіеквівалентною.

Твердження доведено.

Твердження 12. Клас квазіеквівалентних функцій замкнений відносно композицій розгалуження IF та циклу WH .

Доведення.

Композиції циклу та розгалуження є еквівалентними за твердженням 5, отже вони є і квазіеквівалентними.

Твердження доведено.

Теорема 7. Клас квазіеквівалентних функцій із базовими функціями розіменування $v \Rightarrow_{\#}$ і функцією-константою $\emptyset$, композиціями суперпозиції $S^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)}$ та присвоєння AS^*_N , побудованими на основі операції недетермінованого реляційного оновлення, композиціями послідовного виконання $\bullet$, розгалуження IF та циклу WH утворюють підалгебру алгебри функцій A_Prog .

Теорема 8. Для $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sim d'$ і для $\forall f \in SF^*_N$ виконується наступне: якщо $f(d) \downarrow$, то і $f(d') \downarrow$.

Теорема 9. Програми мови $SICON^*_N$ є квазіеквівалентними, тобто якщо $d \sim d'$ і $f \in SF^*_N$ то для кожного r такого, що $f(d) = r$ існує еквівалентне йому r' таке, що $f(d') = r'$.

Доведення теорем 7-9 впливає з теорем 1-3 та тверджень 10-12.

Отримані результати дозволяють стверджувати, що відношення еквівалентності для даної системи є квазіконгруенцією, оскільки воно є квазістабільним відносно базових операцій та функцій системи, а також композицій над ними.

Висновки

Слабкоструктуровані дані – досить потужний інструмент, що потребує глибокого і послідовного дослідження. В той же час кожна окремо взята задача вимагає різного підходу до роботи з такими даними, утворюючи класи задач, для розв'язання яких доцільне використання тих чи інших аспектів.

Дана робота присвячена дослідженню одного з таких аспектів: багатозначності іменування, – та його властивостей.

Дослідження проводились у рамках композиційно-номінативного підходу, результатами є: формалізація еквівалентності даних; інтерпретація мови програм $SICON$ в алгебрі функцій над номінативними даними з множинним іменуванням і визначенням відношенням еквівалентності; теорема про збереження еквівалентності визначеними інтерпретаціями мови

програм $SICON$: $SICON_R$ та $SICON'_R$, що побудовані на основі операцій детермінованого реляційного оновлення з повним заміщенням та частково недетермінованого реляційного оновлення; теорема про часткове збереження еквівалентності визначеною інтерпретацією мови програм $SICON$, що побудована на основі операцій недетермінованого реляційного оновлення.

Отримані результати дозволяють стверджувати, що при заданому відношенні еквівалентності на множині значень результат роботи програми суттєво не залежить від вибору

значення багатозначного імені, якщо ці значення еквівалентні. Ці результати можуть використовуватися для різних задач, де доцільно використовувати багатозначне іменування та еквівалентні значення, у тому числі для розробки інтелектуальних навчальних систем: такі системи, наприклад, будуть в змозі коректно оцінити рівень знань учня, у тому числі у випадку, коли у навчальному курсі передбачаються однотипні задачі, і для засвоєння даного класу задач необхідним вважається не повне їх розв'язання, а лише певної підмножини.

Список використаних джерел

1. Cooper B. A fast index for semistructured data / B. F. Cooper, N. Sample, J. F. Michael, G. R. Hjaltason, M. Shadmon // VLDB – Roma, 2001. – P. 341-350.
2. McHugh J. Indexing Semistructured Data [електронний ресурс] / J. McHugh, J. Widom, S. Abiteboul, Q. Luo, A. Rajaraman // Technical Report, January 1998. Режим доступу: <http://infolab.stanford.edu/lore/pubs/semiindex98.pdf>. Дата звертання: 01.05.2012.
3. Валькман Ю. Р. Сравнительный анализ моделей знаний обучаемого в интеллектуальных обучающих системах / Ю. Р. Валькман, А. В. Склэр // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України. – К.: ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України, 2011. – Вип. 59. – С. 74-86.
4. Россда Т. В. Формалізація багатозначного іменування у мовах програм над номінативними даними / Т. В. Россда // Вісник Київського національного університету. Серія фізико-математичні науки. – 2012 – Вип. 1. – С. 217-222.
5. Nikitchenko N. S. A Composition Nominative Approach to Program Semantics / N. S. Nikitchenko // Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark. – 1998. – 103 p.
6. Нікітченко М. Композиційно-номінативні мови програм з асоціативним розмінуванням / М. Нікітченко, С. Іванов // Вісник Львівського університету. Прикладна математика та інформатика. – 2010. – Вип. 16. – С. 124-139.
7. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. Нікітченко, С. Шкільняк. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 528 с.

Надійшла до редакції 20.06.20

УДК 519.8

Семенов В.В., канд. техн. наук., ст. наук. співр.

**Модель формування середнього класу
на основі індексів поляризації**

Побудовано математичну модель формування середнього класу за ознакою матеріальної забезпеченості на основі використання індексів поляризації Естебана-Рей. За період 1999–2007рр. обчислені індекси поляризації за доходами в Україні. Отримані результати свідчать, що в Україні за вказаний період міжгрупової поляризації за доходами постійно зменшувалась, а частка популяції, яку можна ідентифікувати як середній клас постійно зростала.

Ключові слова: суспільна поляризація, індекс Естебана-Рей, індекс нерівності, міжгрупове відчуження.

E-mail: semenovsr@meta.ua

Статтю представив доктор техн. наук, професор Гарашенко Ф.Г.

Соціально-економічні реформи в Україні нараховують двадцять років. За цей строк здійснені суттєві перетворення у політичній, інституційній і соціальній сферах, які змінили відносини власності та структуру українського суспільства. Однією з проблем, яка знаходиться у центрі уваги громадськості, є формування середнього класу в сучасній Україні. Головне методологічне питання полягає в тому, як виділити соціальну групу із складної соціальної структури сучасного суспільства, яка відповідає ознакам середнього класу. В роботі розглядаються моделі поляризації суспільства та на їх основі досліджується динаміка формування середнього класу за критерієм матеріальної забезпеченості. Поняття поляризації порівняно недавно привернуло увагу як корисна характеристика розподілів доходів. Зменшення ролі середнього класу, як правило, порівнювалося до зростання нерівності доходів. Однак таке порівнювання містить фундаментальну концептуальну помилку: ніякі міри нерівності не відображають зникнення середнього класу. Таким чином, необхідна розробка системи мір, заснованих на понятті поляризації, які були б узгодженими із мірами нерівності, що задовольняють принципу Пігу -

Semenov V.V., PhD, Senior Researcher

**The model of formation of the middle
class on the based on index polarization**

The mathematical model of forming of middle class is built after the sign of financial material well-being on the basis of the use of indexes of polarization of Esteban-Ray. For period of 1999–2007 the indexes of income polarization are calculated for Ukraine. The got results testify that in Ukraine for indicated period intergroup polarization of income went down constantly, and share of population which can be identified as a middle class increased constantly

Key words: social polarization, index Esteban-Ray, inequality index, intergroup alienation, intragroup identity.

Дальтона і давали б аналогічні результати при аналізі трендів у розподілі доходів.

Естебан та Рей [3] запропонували індекси поляризації, які можуть бути використані для дослідження стратифікації соціоекономічних груп. Поняття поляризації відрізняється від поняття нерівності. Поляризація розглядає розподіл доходів стосовно декількох характерних поляричних властивостей або точок в розподілі доходів, в той час як поняття нерівності має відношення до загальної дисперсії розподілу. За допомогою послідовності прогресивних та регресивних трансферів можна отримати розподіл із вищою поляризацією, який, проте, має нижчу нерівність, постійну нерівність або вищу нерівність. Розподіл із вищим рівнем поляризації це розподіл, у якому менша частка економічних агентів має доходи на середньому рівні. Отже, індекси поляризації можуть бути використані як додатковий засіб аналізу розподілу доходів. При порівняльному аналізі розподілів доходів дослідження поляризації є корисним: зменшення поляризації означає зростання потужності середнього класу.

В роботі розглянуто індекс поляризації Естебана-Рей, який оснований на понятті внутрішньогрупового ототожнення та міжгрупового відчуження. Припускається, що

розподіл доходів може бути згрупований за дохідними групами таким чином, що особи в кожній групі "тотожні" між собою і відчувають "відчуження" від членів інших груп. Тоді поляризація розглядається як зростаюча функція цих двох характеристик. Зрозуміло, що у загальному випадку доступні дані згруповані у такий спосіб, який мало відповідає цим поняттям. Очевидним критерієм оптимального групування розподілу, який узгоджується із концепцією "ототожнення-відчуження" такий: міжгрупова нерівність повинна бути максимальною, а внутрішньогрупова, відповідно, мінімальною. Оскільки кінцевою метою даного дослідження є аналіз динаміки формування середнього класу за рівнем матеріального забезпечення, то необхідно розділити популяцію прийнятні на три дохідні групи, щоб проаналізувати розподіл благ у такому суспільстві, в якому є бідні, багаті та люди із середніми статками. Для вирішення цієї задачі можуть бути застосовані лише індекси Естебана-Рей.

Модель поляризації Естебана-Рей

Модель поляризації Естебана-Рей в якості базових понять використовує внутрішньогрупову тотожність та міжгрупове відчуження. Нехай F - розподіл доходів. Припускається, що особа відчуває вплив з боку двох сил: особа намагається "ототожнитися" себе із тими особами, яких вона розглядає як членів "власної групи", та відсторонитися від тих, кого вона розглядає як членів "інших груп". Таким чином, особа із доходами x відчуває групову тотожність $I(x, F)$ при розподілі F , та групову відчуженість $r(x, y)$ від особи із доходом y . Естебан та Рей ввели поняття ефективного антагонізму, який особа із доходом x відчуває до особи із доходом y як деяку зростаючу функцію $T(I(x, F), r(x, y))$. Ефективний антагонізм зростає при зростанні відчуження. Тоді поляризація є сумою усіх "ефективних антагонізмів". Таким чином, для того щоб побудувати індекс поляризації, придатний для обчислень, необхідно вибрати функціональні форми для ототожнення, відчуження та ефективного антагонізму T .

Припускаємо, що

$$T = I(x, F)r(x, y) = \frac{1}{2m} f^\alpha(x) |x - y|,$$

де $\alpha > 0$ - деяка константа, яка враховує важливість ототожнення, m - середній доход.

Вид функції $r(x, y) = \frac{|x - y|}{2m}$ зрозумілий: більша різниця у відносних доходах означає більше відчуження. Щодо форми функції $I(x, F) = f^\alpha(x)$, де $f(x)$ - функція щільності розподілу, то це просто означає, що особа із рівнем матеріального забезпечення x відчуває, що сенс ототожнення залежить від щільності, $f(x)$, при рівні забезпеченості x . В принципі, можна розглядати варіант "вікна ототожнення", проте, підвалини для встановлення ширини такого вікна невизначені. Тому для сімейства вір поляризації слід вибрати граничний випадок із нульовою шириною вікна ототожнення:

$$P^{ER}(F) = \iint T(f(x), |x - y|) f(x) f(y) dx dy = \\ = \frac{1}{2m} \iint f(x)^{1+\alpha} f(y) |x - y| dx dy,$$

де $P^{ER}(F)$ - індекс поляризації Естебана-Рей, $\alpha > 0$ - параметр, що враховує важливість ототожнення, K - коефіцієнт. Відмітимо, що при $\alpha = 0$ наведений вище вираз співпадає із коефіцієнтом нерівності Джині. Таким чином, впровадження параметру ототожнення робить міру поляризації фундаментально відмінною від міри нерівності. Якщо маємо згруповані дані, то визначимо індекс поляризації Естебана-Рей у вигляді:

$$P^{ER}(F) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K q_i^{1+\alpha} q_j |m_i - m_j|,$$

де K - кількість груп, q_i - групові популяційні частки, m_i - середні доходи в групі i , $i = 1, 2, \dots, K$, $\alpha \in (0, 1.6)$, m - середній дохід.

Розглянемо проблему представлення розподілу у вигляді K груп. При цьому виникає два питання: одне має відношення до кількості груп, інше - до визначення дохідних інтервалів. Будемо розглядати кількість груп як екзогенно задану характеристику (можна, наприклад, використовувати стандартні економічні категорії: бідні, середній клас, багаті) та зосереджуємось на ендогенному встановленні дохідних інтервалів. Сдиної відповіді на друге запитання немає, проте зрозуміло, що групування за доходами повинне бути узгодженим із інтуїтивним поняттям групового ототожнення: група повинна бути представлена типовим дохідним інтервалом $[x_{i-1}, x_i]$, у якому немає "великої" дисперсії за доходами (відносно дисперсії на усьому інтервалі).

Одним із способів визначення границь доходних інтервалів є пошук структури групування, яка мінімізує похибку групування. При цьому ми мінімізуємо нерівність в межах кожної групи, вимірюючи за допомогою індексу нерівності Джині, G , та максимізуємо нерівність між групами.

Умова оптимальності групування [1] наступна: кожна межа між двома групами повинна бути рівною середньому доходу в цих двох групах. Відмітимо ще один принциповий факт: оскільки G та μ фіксовані, мінімізація похибки групування означає максимізацію міжгрупової нерівності доходів. Коли дані діляться на дві групи, безпосередньо одержуємо точку оптимального поділу – це середній дохід. Якщо популяція ділиться на три і більше групи, оптимальне групування залежить від виду функції розподілу [1].

Таким чином, після визначення оптимальної структури групування похибка має вид:

$$\epsilon(f, \eta^*) = G - G(\eta^*),$$

де $G(\eta^*)$ – коефіцієнт Джині із оптимальною структурою групування η^* . Зазначимо, що введені визначення поляризації не можуть точно врахувати соціальні угруповання, проте вони точно відображають поняття на яке ми посилюємось як на поляризацію.

Для побудови процедури оцінювання індексів поляризації використовується логнормальний розподіл. Він краще, ніж інші відповідає сутності процесу, а його параметри можуть бути визначені за допомогою конкретних економічних характеристик: децильний коефіцієнт, середньо-душовий дохід, мінімальний дохід, мінімальний споживчий кошук (межа бідності) тощо. Випадкова величина розподілена логнормально, якщо логарифм її значень розподілений нормально. Параметри логнормального розподілу мають прозору економічну інтерпретацію.

Функція щільності логнормального розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(\ln x - \mu)^2 / (2\sigma^2)\}$$

де x – доходи, μ – середнє значення логарифмів доходів, σ^2 – дисперсія логарифмів доходів. Моменти логнормально розподіленої випадкової величини із параметрами μ та σ визначаються за формулою:

$$m_k = \int_0^\infty x^k f(x) dx = \exp(k\mu + \frac{k^2}{2}\sigma^2)$$

При заданій межі бідності, частка бідних може бути визначена через межу бідності та середній дохід:

$$H = F\left(\frac{\ln z - \mu}{\sigma}\right) = F\left(-\frac{\ln \frac{\text{середній дохід}}{\text{межа бідності}}}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)$$

Перевага наведеної вище точної формули полягає в тому, що вона допомагає нам врахувати складний та нелінійний характер взаємозв'язків між такими факторами, як середні доходи, нерівність та межа бідності, які взаємодіючи між собою визначають рівень бідності. При використанні логнормального розподілу для дослідження нерівності доходів корисною є теорема Ачівсона-Брауна [1].

Теорема. Неповний момент порядку k ($k = 1, 2, \dots$) логнормального розподілу має вид:

$$\int_0^z x^k f(x) dx = m_k F\left(\frac{\ln z - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right),$$

де $m_k = k!$ – центральний момент.

Використовуючи цей результат, ордината кривої Лоренца, що відповідає популяційній частці $p_z \in [0, 1]$ та рівню доходу z може бути записана у вигляді:

$$L(p_z) = \frac{1}{m_0} \int_0^z x f(x) dx = F\left(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right),$$

$$\text{де } p_z = F\left(\frac{\ln z - \mu}{\sigma}\right).$$

Оскільки $F^{-1}(p_z) = \frac{\ln z - \mu}{\sigma}$, отримуємо:

$$L(p_z) = F\left(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) = F(F^{-1}(p_z) - \sigma),$$

Частка доходів перших 50% популяції становить

$$L(0.5) = F(F^{-1}(0.5) - \sigma) = F(-\sigma),$$

а середній дохід перших:

$$m_{0.5} = mF(-\sigma) / p_{0.5} = 2mF(-\sigma),$$

де m – загальний середній дохід. Тоді середній дохід другої половини популяції може бути визначений за формулою:

$$m_{0.5} = 2m - m_{0.5}.$$

Частка осіб, які отримують доходи не вище середніх, становить:

$$p_m = F\left(\frac{\ln m - \mu}{\sigma}\right).$$

Тоді, згідно із наведеною вище теоремою, середній дохід перших 100 р_m відсотків популяції становить:

$$m_{c,m} = mF\left(\frac{\ln m - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) / F\left(\frac{\ln m - \mu}{\sigma}\right),$$

а середній дохід решти членів популяції (тобто, із доходом, вищим середнього) становить:

$$m_{r,m} = m[1 - F\left(\frac{\ln m - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)] / [1 - F\left(\frac{\ln m - \mu}{\sigma}\right)]$$

В загальному випадку, якщо розподіл розділений на дві групи рівнем доходу z , то середній дохід першої та другої групи, відповідно, становить:

$$m_{c,z} = m \frac{L(p_z)}{p_z} = m \frac{F\left(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{\ln z - \mu}{\sigma}\right)},$$

$$m_{r,z} = m \frac{1 - L(p_z)}{1 - p_z} = m \frac{1 - F\left(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)}{1 - F\left(\frac{\ln z - \mu}{\sigma}\right)}.$$

Перші 100 р% популяції отримують дохід не вищий $x = \exp(\mu + \sigma F^{-1}(p))$.

Індекс поляризації Естебана-Рей у випадку розділення популяції на три групи

Розділення популяції на три групи за ресурсами інтуїтивно можна розуміти як отримання груп із низькими доходами (бідних), середніми доходами (середній клас) та високими доходами (багатих). Природним способом формалізації такого поділу є групування на основі принципу "ототожнення – відчуження", запропонованого Естебаном та Ресм [3]. При цьому можливі декілька варіантів визначення доходних рівнів x_1^* та x_2^* , за якими популяція розділяється на три групи.

1. Екзогенно задається межа бідності $z = x_1^*$. Визначасмо згідно із логнормальним розподілом частку бідних $q_1 = H = F((\ln z - \mu) / \sigma)$. Після цього решту популяції, $1 - q_1$, ділимо на дві групи таким чином, щоб мінімізувати похибку групування. Тоді, за формальним критерієм оптимального групування, друга група може бути ототожнена із середнім класом, а третя є групою із високими доходами. В даному випадку межею бідності може бути: мінімальний споживчий кошик, визначена частка медіанного або середнього доходу тощо.

2. Екзогенно задається межа бідності $z = x_1^*$ та межа добробуту $w = x_2^*$. В цьому випадку нам залишається лише застосувати до емпіричного розподілу наведені вище результати та обчислити індекс P^{ER} .

3. Ендогенне визначення x_1^* та x_2^* . В цьому випадку необхідно обчислити $x_1^* = z$ та $x_2^* = w$, які дають оптимальне розділення популяції на три групи, тобто мінімізувати похибку групування. В термінах коефіцієнту Джині це означає, що максимізується міжгрупова компонента та мінімізується внутрішньогрупова (тобто, отримуємо три групи із найвищими із усіх можливих різницями міжгрупових середніх доходів та, відповідно, найнижчими із усіх можливих різницями у внутрішньогрупових доходах). В термінах схеми Естебана – Рея це означає групування, яке приводить до максимального міжгрупового відчуження та максимального внутрішньогрупового ототожнення.

4. Екзогенно задається межа добробуту $w = x_2^*$, а частка популяції із доходами $x \leq x_2$ ділиться на дві групи таким чином, щоб мінімізувати похибку групування. Тоді рівень доходів $z = x_1^*$ може інтерпретуватись як ендогенна (нормативна) межа бідності, умовна по межі добробуту. Цей випадок є дзеркальним відображенням першого.

В даному дослідженні розглядається випадок 1. Випадок 4, як зазначено, є дзеркальним відображенням випадку 1. Випадок 2 – тривіальний. На аналізі випадку 3 зупинимось нижче.

Таким чином, за умови екзогенно визначеної межі бідності, слід розглянути задачу оптимального розділення популяції на три групи, яке мінімізує похибку групування. Оскільки, в більшості випадків, межу бідності z можна розглядати як незаперечну умову екзогенного визначення групи бідних, необхідно знайти оптимальний рівень доходів x_1^* , який ділить решту популяції на дві групи із мінімальною похибкою групування. Тоді другу групу можна визначити як ендогенно задану групу із середніми доходами, а третя група може розглядатись як група із високими доходами.

Нехай $x_1^* = z$ – межа бідності. Оскільки ми припустили, що доходи розподілені логнормально, то частка бідних становить

$H = q_1 = F((\ln z - \mu) / \sigma)$, ордината Лоренца
 $L(q_1) = F((\ln z - \mu - \sigma^2) / \sigma)$, середній дохід
 бідних $m_1 = mL(q_1) / q_1$, де m – середній дохід
 усієї популяції. Середній дохід небідних
 становить:

$$m_{z_2} = m[1 - F(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma})] / [1 - F(\frac{\ln z - \mu}{\sigma})]$$

де $q_{z_2} = 1 - F((\ln z - \mu) / \sigma)$ – частка небідних
 осіб. Отже, із урахуванням того, що межа
 бідності z задана екзогенно, оптимальні групи
 повинні розділятися доходами:

$$x_1^* = z = m \frac{F(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma})}{F(\frac{\ln z - \mu}{\sigma})},$$

$$x_2^* = m \frac{1 - F(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma})}{1 - F(\frac{\ln z - \mu}{\sigma})}.$$

Популяційні частки груп становлять:

$$q_1 = H = F(\frac{\ln z - \mu}{\sigma}),$$

$$q_2 = F(\frac{\ln x_2^* - \mu}{\sigma}) - F(\frac{\ln z - \mu}{\sigma}),$$

$$q_3 = 1 - F(\frac{\ln x_2^* - \mu}{\sigma}),$$

де q_1 – частка бідних, q_2 – частка популяції із
 середніми доходами, q_3 – частка популяції із
 високими доходами, x_1^* та x_2^* – рівні доходів, за
 якими розділяються групи. Останні дві частки
 визначені ендогенно із умови оптимального
 групування.

Для оцінки індексу поляризації p^{ex}
 обчислимо середні доходи визначених груп.
 Середній дохід осіб із доходами, не вищими
 $x_1^* = z$, тобто бідних осіб, становить:

$$m_1 = mF(\frac{\ln z - \mu - \sigma^2}{\sigma}) / F(\frac{\ln z - \mu}{\sigma})$$

Середні доходи другої та третьої групи
 становлять:

$$m_2 = (m^* - q_1 m_1) / q_2,$$

$$m_3 = (m^* - (q_1 + q_2) m^*) / q_3,$$

де m^* – середній дохід перших двох груп, який
 визначається згідно із

$$m^* = mF(\frac{\ln x_2^* - \mu - \sigma^2}{\sigma}) / F(\frac{\ln x_2^* - \mu}{\sigma}).$$

Отже, для того, щоб обчислити індекс
 поляризації Естебана-Рея нам необхідно
 параметризувати розподіл (оцінити значення
 параметрів μ та σ).

Ендогенне групування популяції

Розглянемо випадок із ендогенним
 визначенням меж бідності $z = x_1^*$ та порогу
 добробуту $w = x_2^*$. Цей випадок можна
 розглядати як деяку нормативну базу для
 розділення популяції на три групи: бідних, осіб із
 середнім рівнем матеріального забезпечення та
 багатих. Припускаємо, що розподіл
 доходів/витрат є логнормальний, а x_1 та x_2
 дохідні рівні, які ділять популяцію на три групи.
 Якщо таке розділення виконано оптимально (в
 сенсі розглянутого вище критерію), тобто
 $x_1 = x_1^* = z$ та $x_2 = x_2^* = w$, то особи із доходом
 $x < x_1^* = z$ будуть розглядатись як бідні, особи із
 доходом $z = x_1^* \leq x < x_2^* = w$ розглядаються як
 представники середнього класу, а особи із
 доходом $x \geq x_2^*$ є багатими.

Розглянемо процедуру оптимального
 групування популяції із ендогенним визначенням
 меж бідності та меж добробуту. Частка осіб, які
 отримують дохід не вищий x_1^* становить:

$$q_1 = p_1 = F(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}).$$

Частка сукупних доходів, яку отримує ця
 група становить:

$$M_1 = L(p_1) = F(\frac{\ln x_1 - \mu - \sigma^2}{\sigma}).$$

Частка осіб, які отримують дохід не вищий
 x_2 становить:

$$p_2 = F(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}),$$

а частка доходів перших $100p_2\%$ популяції
 становить:

$$L(p_2) = F(\frac{\ln x_2 - \mu - \sigma^2}{\sigma}).$$

Отже, частка осіб із доходом, вищим x_2 та
 сукупна частка доходу цієї групи, відповідно,
 становлять:

$$q_3 = p_3 = 1 - F(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}),$$

$$M_3 = 1 - F(\frac{\ln x_2 - \mu - \sigma^2}{\sigma}).$$

Частка осіб із доходом $x_1 \leq x < x_2$ та частка їх сукупного доходу, відповідно, становить:

$$q_2 = F\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$M_2 = F\left(\frac{\ln x_2 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\ln x_1 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)$$

Таким чином, за умови розділення популяції на три групи, ми маємо:

$$\frac{L(p_2)}{p_2} = \frac{F\left(\frac{\ln x_2 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right)} = \frac{x_1}{m},$$

$$\frac{1 - L(p_1)}{1 - p_1} = \frac{1 - F\left(\frac{\ln x_1 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)}{1 - F\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)} = \frac{x_2}{m}.$$

Ми отримали систему із двох рівнянь із двома невідомими. Запишемо її у вигляді:

$$x_1 = mF\left(\frac{\ln x_2 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) / F\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$x_2 = m[1 - F\left(\frac{\ln x_1 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)] / [1 - F\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)]$$

Таким чином, за умови ендегенно заданих меж бідності та порогу добробуту, оптимальним є поділ популяції на групи, при якому межею бідності є середній дохід небагатих, а порогом добробуту – середній дохід небідних. З іншого боку необхідно відмітити, що припускаючи логнормальність розподілу доходів, що, по-суті, є припущенням логарифмічної корисності, ми фактично нормативно задаємо межу бідності та поріг добробуту. Точніше, якщо емпіричний розподіл доходів наближається логнормально функцією, то поріг добробуту та межа бідності можуть бути визначені ендегенно (тобто, нормативно).

Якщо задаємо межу бідності екзогенно, $z = x_1^*$, то це означає, що $z = x_1^*$ є середнім доходом групи бідних та наступної групи в розподілі, граничний дохід якої визначається із першого рівняння. Граничний дохід другої групи (визначений у першому рівнянні) є середнім доходом другої та третьої групи, граничний дохід якої визначається в другому рівнянні і т.д. Таким чином, якщо, за умови логнормального розподілу, ми ділимо популяцію на K доходних груп, то екзогенно задана межа бідності $z = x_1^*$ та параметри розподілу μ та σ однозначно визначають оптимальні границі доходних

інтервалів. Проте, слід зауважити, що межа бідності, з огляду на вказану нормативність аналізу, повинна бути меншою середнього доходу m . Якщо $z = x_1^* = m$, тобто, якщо межа бідності співпадає із середнім доходом популяції, то поділ популяції на декілька доходних груп на основі схеми "ототожнення – відчуження" Естебана-Рея є недоречним і має місце біполаризація суспільства.

В [2] автором обчислені індекси поляризації Естебана-Рея для розподілу грошових доходів в Україні за період 1999-2007рр. при нормативно визначеній межі бідності ($x = 0.75m$ та $x = 0.75Me$). Аналіз свідчить, що рівень міжгрупової поляризації за доходами в розподілі грошових доходів за вказаний період постійно зменшувався. Частка першої групи постійно зростає, а частки другої та третьої груп зменшуються. Таким чином, економічне зростання є сприятливим для групи бідних та забезпечує передумови для формування та зростання потужності середнього класу за доходами.

Висновки

В даному дослідженні розглянуто методи оцінки поляризації суспільства за доходами. Проаналізовані різні підходи до визначення поляризації. Досліджені теоретичні основи побудови індексів поляризації. Отримані формули для оцінки індексів поляризації на основі використання логнормальної моделі розподілу доходів. Виявлено та проаналізовано нормативний характер поняття меж бідності та порогу добробуту при оптимальному групуванні розподілу.

Список використаних джерел

1. Семенов В.В. Економіко-статистичні моделі та методи дослідження соціальних процесів: нерівність, бідність, поляризація: Т. 2. Бідність та поляризація. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2008. – 269с.
2. Семенов В.В. Статистичні моделі дослідження суспільної поляризації // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2011. – № 6. – С.154-160.
3. Esteban J.-M., Ray D. On the Measurement of Polarization // *Econometrica*. – 1994. – 62. – No.4. – p. 819-851.

Надійшла до редколегії 04.06.2012

Скобелев В. В., к.ф.-м.н.

Автомати на многовидах з алгеброю.

Досліджено автомати Мілі і Мура, які визначено системами рівнянь над алгеброю, яку задано на многовиді над скінченним кільцем. Встановлено автоматні характеристики моделей дослідження. Охарактеризовано гомоморфізми моделей дослідження у термінах гомоморфізму многовидів, який визначено як гомоморфізм відповідних алгебр.

Ключові слова: автомати, скінченні кільця, многовиди, гомоморфізми.

V. V. Skobelev, PhD

Automata determined over varieties with an algebra.

There are analyzed Mealy and Moore automata determined via systems of equations over some algebra determined for a variety over finite ring. Basic characteristics for investigated models are established. Homomorphism of investigated models is characterized via homomorphism of varieties, which is determined as homomorphism of corresponding algebras.

Key Words: automata, finite rings, varieties, homomorphism.

E-mail: vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Статтю представив чл.-кор. НАН України,
Анісімов А.В.

Вступ.

В [1] досліджено автомати на групах точок еліптичних кривих над полем $GF(q)$ ($q = p^k$, число p – простим, а $k \in \mathbb{N}$). Актуальність такого дослідження зумовлена використанням еліптичних кривих при розв'язанні задач захисту інформації [2-4], а вказані автомати дають змогу використовувати при розробці алгоритмів траєкторії, які побудовано на еліптичних кривих за допомогою швидких обчислень. Кожна алгебраїчна крива над полем є многовидом, тобто множиною розв'язків системи алгебраїчних рівнянь. Поняття "многовид" є одним з основних понять алгебраїчної геометрії [5-7]. Тому вказані дослідження встановлюють внутрішній зв'язок між криптографією і алгебраїчною геометрією.

Відомо, що для кожної еліптичної кривої y над полем $GF(q)$ множина точок G_y цієї кривої (включаючи невластну точку O) є абелевою групою $G_y = (G_y, +)$. Тому може бути визначено таку алгебру $S_{G_y} = (G_y, F_1 \cup F_2)$, що $F_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$ ($1 \leq k_1 < |G_y|$) – множиною унарних операцій, які визначено формулами: $\alpha_1(P) = O$ і $\alpha_i(P) = \underbrace{P + \dots + P}_{i-1 \text{ разів}}$ ($i = 2, \dots, k_1$) і

для всіх $P \in G_y$, а $F_2 = \{+, \cdot\}$ є одноелементною множиною бінарних операцій. Таким чином еліптична крива є многовидом, на якому

визначено алгебру з унарними і бінарними операціями.

Природним узагальненням поля є асоціативно-комутативне кільце $K = (K, +, \cdot)$ з одиницею. У подальшому вважаємо, що K – скінченне кільце.

Позначимо через $V(K)$ множину усіх таких многовидів $V \subseteq K^n$ ($n \in \mathbb{N}$) над кільцем K , що визначено алгебру $S_V = (V, F_1 \cup F_2)$, де F_1 і F_2 є множини відповідно унарних і бінарних операцій.

Обставини, які вказано вище, зумовлюють актуальність дослідження автоматів, які визначено системами рівнянь над алгебрами S_V ($V \in V(K)$). Саме таке дослідження є метою даної роботи.

1. Моделі дослідження.

Для кожного многовиду $V \in V(K)$ визначено алгебру $S_V = (V, F_1 \cup F_2)$, де $F_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$ і $F_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_{k_2}\}$ є множини відповідно унарних і бінарних операцій. Тому системи рівнянь

$$\begin{cases} q_{t+1} = \beta_{j_1}(\alpha_{k_1}(q_t), \alpha_{k_2}(v_1)) \\ y_{t+1} = \beta_{j_2}(\alpha_{k_2}(q_t), \alpha_{k_3}(v_2)) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+), \quad (1)$$

$$\begin{cases} q_{t+1} = \beta_{j_1}(\alpha_{k_1}(q_t), \alpha_{k_2}(v_1)) \\ y_{t+1} = \beta_{j_2}(\alpha_{k_2}(q_{t+1}), v_2) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+), \quad (2)$$

де $v_1, v_2 \in V$ є фіксовані точки, $i_1, i_2 \in N_{k_1}$ і $j_1, j_2 \in N_{k_2}$ є фіксовані числа, $q_0 \in V$ і $x_{r,1} \in N_{k_1}$ визначають множини відповідно автоматів $A^{(1)}(V)$ Мілі і $A^{(2)}(V)$ Мура, для яких x_r, q_r і y_r є відповідно станом, вхідним та вихідним символом у момент часу t . Таким чином для автомату $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$ многовид V є множиною станів і вихідним алфавітом, а множина N_{k_1} є вхідним алфавітом.

Визначимо, що автомати на еліптичних кривих, які досліджено в [1] є спеціальними випадками автоматів (1) і (2).

2. Автоматні характеристики моделей дослідження.

Нехай для многовиду $V \in V(K)$ визначено алгебру $S_V = (V, F_1 \cup F_2)$, де $F_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$ і $F_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_{k_2}\}$ є множини відповідно унарних і бінарних операцій. З (1) і (2) випливає, що мають місце рівності

$$|A^{(1)}(V)| = |A^{(2)}(V)| = k_1^2 k_2^2 |V|^2.$$

Для фіксованого $v \in V$ позначимо

$$Val_v F_1 = \{\alpha_r(v) \mid r \in N_{k_1}\}. \quad (3)$$

Охарактеризуємо спочатку ті властивості автомату $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$, які визначено лише його функцією переходів, тобто рівнянням. Автомат називають груповим, якщо при кожному фіксованому вхідному символі функція переходів є підстановкою на множині станів.

Твердження 1. Множина групових автоматів $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$ визначається множиною всіх таких пар $(\alpha_q, \beta_q) \in F_1 \times F_2$, що $Val \alpha_q = V$ і $Val \beta_q \mid_{v \in \{a_1(v)\}} = V$ для кожного $v \in Val_{v_1} F_1$.

Доведення. Для кожних фіксованих $v_1 \in V$ і $x \in N_{k_1}$ формула

$$\beta_q(\alpha_q(q), \alpha_x(v_1)) \neq \beta_q(\alpha_q(\bar{q}), \alpha_x(v_1))$$

має місце для кожних $q, \bar{q} \in V$ ($q \neq \bar{q}$) у тому та лише у тому випадку, якщо $Val \alpha_q = V$ і $Val \beta_q \mid_{v \in \{a_1(v_1)\}} = V$.

Таким чином, автомат $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$ є груповим у тому та лише у тому випадку, якщо $Val \alpha_q = V$ і $Val \beta_q \mid_{v \in \{a_1(v_1)\}} = V$ для кожного $x \in N_{k_1}$. Звідси і з (3) випливає, що твердження істинне.

Твердження доведено.

Стан $q \in V$ автомату $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$ визначимо як:

1) джерело, якщо з будь якого стану $\bar{q} \in V$ по жодному вхідному символу $x \in N_{k_1}$ неможливо перейти у стан q ;

2) стік, якщо з стану q по жодному вхідному символу $x \in N_{k_1}$ неможливо перейти у інший стан $\bar{q} \in V$.

Мають місце наступні два твердження.

Твердження 2. Множиною станів-джерел автомату $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$ є

$$V_{\text{src}}(M) = V \setminus Val(\beta_q \mid_{v \in \{a_1(v_1)\}}). \quad (4)$$

Доведення. Для кожних фіксованих $q, v_1 \in V$ рівняння

$$q = \beta_q(\alpha_q(\bar{q}), \alpha_x(v_1)) \quad (5)$$

відносно змінних $\bar{q} \in V$ і $x \in N_{k_1}$ має розв'язок у тому та лише у тому випадку, якщо

$$q \in \bigcup_{\bar{q} \in V, x \in N_{k_1}} Val(\beta \mid_{\{[\alpha_q(\bar{q}), \alpha_x(v_1)]\}}).$$

При цьому

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\bar{q} \in V, x \in N_{k_1}} Val(\beta \mid_{\{[\alpha_q(\bar{q}), \alpha_x(v_1)]\}}) = \\ &= \bigcup_{\bar{q} \in V} \left(\bigcup_{x \in N_{k_1}} Val(\beta \mid_{\{[\alpha_q(\bar{q}), \alpha_x(v_1)]\}}) \right) = \\ &= \bigcup_{\bar{q} \in V} (Val(\beta \mid_{\{[\alpha_q(\bar{q})] \cup \{a_1(v_1)\}}})) = \\ &= Val(\beta_q \mid_{v \in \{a_1(v_1)\}}). \end{aligned}$$

Таким чином для кожних фіксованих $q, v_1 \in V$ рівняння (5) відносно змінних $\bar{q} \in V$ і $x \in N_{k_1}$ має розв'язок у тому та лише у тому випадку, якщо $q \in Val(\beta_q \mid_{v \in \{a_1(v_1)\}})$. Звідси і з визначення стану-джерела випливає (4).

Твердження доведено.

Твердження 3. Множиною станів-стіків автомату $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$ є

$$V_{\text{stk}}(M) = \{q \in V \mid \{q\} = Val(\beta_q \mid_{a_1(q) \cup \{a_1(v_1)\}})\}. \quad (6)$$

Доведення. Для кожних фіксованих $q, v_1 \in V$ рівняння

$$\bar{q} = \beta_q(\alpha_q(q), \alpha_x(v_1)) \quad (7)$$

відносно змінних $\bar{q} \in V \setminus \{q\}$ і $x \in N_{k_1}$ не має розв'язків у тому та лише у тому випадку, якщо

$$\bigcup_{x \in N_{k_1}} Val(\beta \mid_{\{[\alpha_q(q), \alpha_x(v_1)]\}}) = \{q\}.$$

При цьому

$$\bigcup_{x \in N_{k_1}} Val(\beta \mid_{\{[\alpha_q(q), \alpha_x(v_1)]\}}) = Val(\beta \mid_{a_1(q) \cup \{a_1(v_1)\}}).$$

Таким чином для кожних фіксованих $q, v_1 \in V$ рівняння (7) відносно змінних $\tilde{q} \in V \setminus \{q\}$ і $x \in N_{q_1}$ не має розв'язків у тому та лише у тому випадку, якщо $Val(\beta_{1[q_1(q)] \rightarrow \alpha v_1 F_1}) = \{q\}$. Звідси і з визначення стану-стоку випливає (6).

Твердження доведено.

Для характеристики властивостей автомату $M \in A^{(1)}(V) \cup A^{(2)}(V)$, при визначенні яких суттєво використано функцію виходів, базовими є наступні еквівалентності $\varepsilon_1(v)$ ($v \in Val_{v_1} F_1$), $\varepsilon_2(v)$ ($v \in Val_{v_2} F_1$) і $\varepsilon_3(v)$ ($v \in Val_{v_1} F_1$) на множині V :

1) $(q, \tilde{q}) \in \varepsilon_1(v)$ у тому та лише у тому випадку, якщо

$$\beta_{\lambda}(\alpha_q(q), v) = \beta_{\lambda}(\alpha_q(\tilde{q}), v);$$

2) $(q, \tilde{q}) \in \varepsilon_2(v)$ у тому та лише у тому випадку, якщо

$$\beta_{\lambda}(\alpha_q(q), v) = \beta_{\lambda}(\alpha_q(\tilde{q}), v);$$

3) $(q, \tilde{q}) \in \varepsilon_3(v)$ у тому та лише у тому випадку, якщо

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda}(\alpha_{q_1}(\beta_{\lambda}(\alpha_q(q), v)), v_2) = \\ = \beta_{\lambda}(\alpha_{q_1}(\beta_{\lambda}(\alpha_q(\tilde{q}), v)), v_2). \end{aligned}$$

Позначимо $\varepsilon_1 = \bigcap_{v \in Val_{v_1} F_1} \varepsilon_1(v)$, $\varepsilon_2 = \bigcap_{v \in Val_{v_2} F_1} \varepsilon_2(v)$ і $\varepsilon_3 = \bigcap_{v \in Val_{v_1} F_1} \varepsilon_3(v)$.

Два різних стани автомату називають близькими, якщо кожен вхідний символ переводить їх у один і той же самий стан і при цьому автомат видає однакові вихідні символи.

Ясно, що:

1) Стани $q, \tilde{q} \in V$ ($q \neq \tilde{q}$) є близькими для автомату $M \in A^{(1)}(V)$ у тому та лише у тому випадку, якщо $(q, \tilde{q}) \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ (таким чином максимальними множинами станів-близьких автомату $M \in A^{(1)}(V)$ є такі елементи S фактор-множини $V/(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2)$, що $|S| \geq 2$);

2) стани $q, \tilde{q} \in V$ ($q \neq \tilde{q}$) є близькими для автомату $M \in A^{(2)}(V)$ у тому та лише у тому випадку, якщо $(q, \tilde{q}) \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_3$ (таким чином максимальними множинами станів-близьких автомату $M \in A^{(2)}(V)$ є такі елементи S фактор-множини $V/(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_3)$, що $|S| \geq 2$).

Автомат називають явно приведеним, якщо для кожних двох різних його станів існує вхідний символ, який розрізняє їх.

Ясно, що:

1) автомат $M \in A^{(1)}(V)$ є явно приведеним у тому та лише у тому випадку, якщо ε_2 є відношенням рівності на множині V ;

2) автомат $M \in A^{(2)}(V)$ є явно приведеним у тому та лише у тому випадку, якщо ε_3 є відношенням рівності на множині V .

3. Гомоморфізми моделей дослідження.

Нагадаємо, що автомат $M' = (Q', X', Y', \delta', \lambda')$ визначають як гомоморфний образ автомату $M = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$, якщо існує трійка сюр'єкцій $\chi_1: Q \rightarrow Q'$, $\chi_2: X \rightarrow X'$ і $\chi_3: Y \rightarrow Y'$, для якої рівності

$$\chi_1(\delta(q, x)) = \delta'(\chi_1(q), \chi_2(x)),$$

$$\chi_3(\lambda(q, x)) = \lambda'(\chi_1(q), \chi_2(x))$$

мають місце для кожних $q \in Q$ і $x \in X$. Якщо відображення χ_1 , χ_2 і χ_3 є бієкціями, то автомати M і M' ізоморфні.

У подальшому будемо використовувати саме таке визначення гомоморфізму і ізоморфізму автоматів.

Нехай $V, U \in V(K)$ і визначено алгебри $S_V = (V, F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)})$ і $S_U = (U, F_1^{(2)} \cup F_2^{(2)})$, де

$F_1^{(i)} = \{\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(i)}\}$ ($i=1,2$) і $F_2^{(i)} = \{\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_{k_2}^{(i)}\}$ ($i=1,2$) є множини, відповідно, унарних і бінарних операцій. Многовид U визначимо як гомоморфний образ многовида V , якщо існує така трійка відображень $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, де $\varphi_1: V \rightarrow U$ є сюр'єкцією, а $\varphi_2: F_1^{(1)} \rightarrow F_1^{(2)}$ і $\varphi_3: F_2^{(1)} \rightarrow F_2^{(2)}$ є бієкціями, що рівності

$$\varphi_1(\alpha(v_1)) = \varphi_2(\alpha)(\varphi_1(v_1)), \quad (8)$$

$$\varphi_1(\beta(v_1, v_2)) = \varphi_3(\beta)(\varphi_1(v_1), \varphi_1(v_2)) \quad (9)$$

мають місце для кожних $v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in F_1^{(1)}$ і $\beta \in F_2^{(1)}$. Якщо відображення φ_1 є бієкцією, то визначимо многовиди V і U як ізоморфні.

Таким чином гомоморфізм і ізоморфізм многовидів $V, U \in V(K)$ визначено через відповідно, гомоморфізм і ізоморфізм алгебр, які визначено на цих многовидах.

Теорема. Нехай $V, U \in V(K)$ і многовид U є гомоморфний образ многовида V . Існують такі відображення

$$\Psi_j: A^{(i)}(V) \rightarrow A^{(i)}(U) \quad (j=1,2),$$

що для кожного автомату $M_j \in A^{(j)}(V)$ автомат $\Psi_j(M_j) \in A^{(j)}(U)$ є його гомоморфний образ.

Доведення. Нехай $V, U \in V(K)$, многовид U є гомоморфний образ многовиду V , а трійка відображень $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, де $\varphi_1: V \rightarrow U$, $\varphi_2: F_1^{(1)} \rightarrow F_1^{(2)}$ і $\varphi_3: F_2^{(1)} \rightarrow F_2^{(2)}$ визначає гомоморфізм алгебри $S_V = (V, F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)})$ на алгебру $S_U = (U, F_1^{(2)} \cup F_2^{(2)})$.

Позначимо через $\Psi_j: A^{(j)}(V) \rightarrow A^{(j)}(U)$ ($j=1,2$) такі відображення, що:

1) для автомату $M_1 \in A^{(1)}(V)$, який визначено системою рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(1)} = \beta_{\alpha}^{(1)}(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(1)}), \alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_1^{(1)})) \\ y_{i+1}^{(1)} = \beta_{\alpha}^{(1)}(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(1)}), \alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_2^{(1)})) \end{cases} \quad (10)$$

автомат $\Psi_1(M_1) \in A^{(1)}(U)$ визначено системою рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(2)} = \\ = \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\varphi_2(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(2)}), \varphi_2(\alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_1^{(2)}))) \\ y_{i+1}^{(2)} = \\ = \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\varphi_2(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(2)}), \varphi_2(\alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_2^{(2)}))) \end{cases} \quad (11)$$

2) для автомату $M_2 \in A^{(2)}(V)$, який визначено системою рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(1)} = \beta_{\alpha}^{(1)}(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(1)}), \alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_1^{(1)})) \\ y_{i+1}^{(1)} = \beta_{\alpha}^{(1)}(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_{i+1}^{(1)}), v_2^{(1)}) \end{cases} \quad (12)$$

автомат $\Psi_2(M_2) \in A^{(2)}(U)$ визначено системою рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(2)} = \\ = \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\varphi_2(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(2)}), \varphi_2(\alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_1^{(2)}))) \\ y_{i+1}^{(2)} = \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\varphi_2(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_{i+1}^{(2)}), v_2^{(2)}))) \end{cases} \quad (13)$$

У (10)-(13) вважаємо, що $i \in \mathbb{Z}_+$.

З (8)-(13) випливає, що

$$\begin{aligned} \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\varphi_2(\alpha_{\alpha}^{(1)}(\varphi_1(q_i^{(1)})), \varphi_2(\alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(\varphi_1(v_1^{(1)})))) \\ = \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(1)}), \alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_1^{(1)}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\varphi_2(\alpha_{\alpha}^{(1)}(\varphi_1(q_i^{(1)})), \varphi_2(\alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(\varphi_1(v_2^{(1)})))) \\ = \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_i^{(1)}), \alpha_{\alpha_{i+1}}^{(1)}(v_2^{(1)}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\varphi_2(\alpha_{\alpha}^{(1)}(\varphi_1(q_{i+1}^{(1)})), \varphi_1(v_2^{(1)}))) \\ = \varphi_1(\beta_{\alpha}^{(1)}(\alpha_{\alpha}^{(1)}(q_{i+1}^{(1)}), v_2^{(1)}))) \end{aligned}$$

З цих рівностей безпосередньо випливає, що для кожного автомату $M_j \in A^{(j)}(V)$ ($j=1,2$) автомат $\Psi_j(M_j) \in A^{(j)}(U)$ є його гомоморфний образ.

Теорему доведено.

Слід відзначити, що з доведення теореми випливає, що трійку сюр'єкцій (X_1, X_2, X_3) , яка встановлює гомоморфізм автомату $M_j \in A^{(j)}(V)$ ($j=1,2$) на автомат $\Psi_j(M_j) \in A^{(j)}(U)$ визначено наступним чином: $X_1 = X_3 = \varphi_1$, а X_2 є тотожне відображення.

З доведення теореми 1 також безпосередньо випливає, що має місце наступний наслідок.

Наслідок. Якщо $V, U \in V(K)$ є ізоморфними многовидами, то існують такі відображення $\Psi_j: A^{(j)}(V) \rightarrow A^{(j)}(U)$ ($j=1,2$), що автомати $M_j \in A^{(j)}(V)$ і $\Psi_j(M_j) \in A^{(j)}(U)$ ізоморфні.

4. Приклад.

Для еліптичної кривої γ над скінченним полем K визначено алгебру $S_{G_\gamma} = (G_\gamma, F_1 \cup F_2)$, де $F_2 = \{+\}$ ($+$ є операція абелевої групи точок кривої γ), а $F_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$ ($1 \leq k_1 \leq |G_\gamma|$), де $\alpha_i(P) = O$ і $\alpha_i(P) = \underbrace{P + \dots + P}_{i-1 \text{ раз}} \quad (i=2, \dots, k_1)$

для всіх $P \in G_\gamma$. Тому множини автоматів Мілі $A^{(1)}(G_\gamma)$ і Мура $A^{(2)}(G_\gamma)$ визначено, відповідно, системами рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1} = \alpha_{\alpha}(q_i) +_{\gamma} \alpha_{\alpha_{i+1}}(P_1) \\ y_{i+1} = \alpha_{\alpha}(q_i) +_{\gamma} \alpha_{\alpha_{i+1}}(P_2) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\begin{cases} q_{i+1} = \alpha_{\alpha}(q_i) +_{\gamma} \alpha_{\alpha_{i+1}}(P_1) \\ y_{i+1} = \alpha_{\alpha}(q_i) +_{\gamma} P_2 \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+),$$

де $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_{k_1}$ фіксовані числа, $P_1, P_2 \in G_\gamma$ є фіксовані точки, $q_0 \in G_\gamma$ і $x_{i+1} \in \mathbb{N}_{k_1}$.

Якщо γ_1 і γ_2 є еліптичними кривими над полем K , то:

- 1) γ_2 є гомоморфний образ γ_1 , якщо група $(G_{\gamma_2, +_{\gamma_2}})$ є гомоморфний образ групи $(G_{\gamma_1, +_{\gamma_1}})$;
- 2) γ_1 і γ_2 ізоморфні, якщо групи $(G_{\gamma_1, +_{\gamma_1}})$ і $(G_{\gamma_2, +_{\gamma_2}})$ ізоморфні.

Звідси випливає, що якщо еліптична крива γ_2 є гомоморфний образ еліптичної кривої γ_1 , то для кожного числа k_1 ($1 \leq k_1 \leq |G_{\gamma_2}| - 1$) алгебра

$S_{G_{r_2}} = (G_{r_2}, F_1^{(2)} \cup F_2^{(2)})$, де $F_1^{(2)} = \{\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(2)}\}$
і $F_2^{(2)} = \{+_{r_2}\}$ є гомоморфний образ алгебри
 $S_{G_{r_1}} = (G_{r_1}, F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)})$, де $F_1^{(1)} = \{\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(1)}\}$ і
 $F_2^{(1)} = \{+_{r_1}\}$.

Відзначимо, що для гомоморфізму
 $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ алгебри $S_{G_{r_1}}$ на алгебру $S_{G_{r_2}}$
біскіпів ϕ_2 і ϕ_3 визначаються наступним чином:
 $\phi_2(\alpha_i^{(1)}) = \alpha_i^{(2)}$ ($i \in N_{k_1}$) і $\phi_3(+_{r_1}) = +_{r_2}$.

Зокрема, якщо γ_1 і γ_2 ізоморфні, то алгебри
 $S_{G_{r_1}}$ і $S_{G_{r_2}}$ ізоморфні, а ϕ_1 є біскіцією.

Нехай еліптична крива γ_2 є гомоморфний
образ еліптичної кривої γ_1 . З теореми випливає,
що існують такі відображення

$$\Psi_j : A^{(j)}(G_n) \rightarrow A^{(j)}(G_{r_2}) \quad (j=1,2),$$

що для автомату $M_j \in A^{(j)}(G_n)$ автомат
 $\Psi_j(M_j) \in A^{(j)}(G_{r_2})$ є його гомоморфний образ.
При цьому з доведення теореми випливає, що:

1) для автомату $M_1 \in A^{(1)}(G_n)$, який
визначено системою рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(1)} = \alpha_n^{(1)}(q_i^{(1)}) + \alpha_{n+1}^{(1)}(P_1^{(1)}) \\ y_{i+1}^{(1)} = \alpha_2^{(1)}(q_i^{(1)}) + \alpha_{n+1}^{(1)}(P_2^{(1)}) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+),$$

автомат $\Psi_1(M_1) \in A^{(1)}(G_{r_2})$ визначено системою
рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(2)} = \alpha_n^{(2)}(q_i^{(2)}) + \alpha_{n+1}^{(2)}(P_1^{(2)}) \\ y_{i+1}^{(2)} = \alpha_2^{(2)}(q_i^{(2)}) + \alpha_{n+1}^{(2)}(P_2^{(2)}) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+);$$

Список використаних джерел

1. Скобелов В.В. Аналіз автоматів, які визначено на еліптичних кривих // Вісник Київського університету. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 223-230.
2. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. – Минск: Новое знание, 2003. – 382 с.
3. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б., Часовских А.А. Алгоритмические основы эллиптической криптографии. – М.: МЭИ, 2000. – 100 с.

2) для автомату $M_1 \in A^{(2)}(G_n)$, який
визначено системою рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(1)} = \alpha_n^{(1)}(q_i^{(1)}) + \alpha_{n+1}^{(1)}(P_1^{(1)}) \\ y_{i+1}^{(1)} = \alpha_2^{(1)}(q_i^{(1)}) + \alpha_{n+1}^{(1)}(P_2^{(1)}) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+),$$

автомат $\Psi_2(M_2) \in A^{(2)}(G_{r_2})$ визначено
системою рівнянь

$$\begin{cases} q_{i+1}^{(2)} = \alpha_n^{(2)}(q_i^{(2)}) + \alpha_{n+1}^{(2)}(P_1^{(2)}) \\ y_{i+1}^{(2)} = \alpha_2^{(2)}(q_i^{(2)}) + \alpha_{n+1}^{(2)}(P_2^{(2)}) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+).$$

Зокрема, якщо еліптичні криві γ_1 і γ_2
ізоморфні, то вказані автомати ізоморфні.

Висновки.

У роботі досліджено автомати Мілі і Мура, які
визначено системами рівнянь над алгеброю, яку
задано на многовиді над скінченим кільцем.
Встановлено автоматні характеристики моделей
дослідження. Охарактеризовано гомоморфізми
моделей дослідження у термінах гомоморфізму
многовидів, який визначено як гомоморфізм
відповідних алгебр. Аналіз властивостей
відображень $\Psi_j : A^{(j)}(V) \rightarrow A^{(j)}(U)$ ($j=1,2$) у
термінах абстрактних властивостей алгебр S_V і
 S_U визначає напрямок подальших досліджень.
Інший напрямок пов'язано з аналізом
властивостей композицій відображень Ψ_j
($j=1,2$), що відповідають композиціям
многовидів, які належать множині $V(K)$.

4. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦНМО, 2003. – 328 с.
5. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т.1. – М.: Наука, 1988. – 352 с.
6. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т.2. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
7. Коке Д., Литтл Дж., О'Ши. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. – М.: Мир, 2000. – 687 с.

Надійшла до редколегії 18.05.12

УДК 517.9

Тимашов О.О., к.т.н., доцент,
Зінько П.М., канд. фіз.-мат. наук, доцент**Про автоматизовану систему управління підприємством в реальному часі**

Пропонується новий підхід до створення автоматизованих систем управління підприємством в реальному часі, який ґрунтується на використанні MES-систем і алгоритмів розв'язування задач лінійного програмування великої розмірності.

Ключові слова: автоматизована система управління підприємством, інформаційно-керуюча система, MES-система, задача лінійного програмування великої розмірності

E-mail: alex_timashov@mail.ru, zinko@unicyb.kiev.ua

Статтю представив: д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Традиційні автоматизовані системи управління підприємством дають можливість організувати циркуляцію документів підприємства, необхідних для формування бухгалтерської та управлінської звітності. Як правило, такі системи надають статичні "зрізи" швидко застарілої інформації про стан підприємства. На основі такої занадто агрегованої інформації складно побачити деталі процесу і запобігти небажаним подіям або хоча бчасно зреагувати на них. Іншими словами, немає можливості оперативно отримати достовірну інформацію про те, що і як відбувалося на виробництві, наприклад, чому був зірваний виробничий план і чому своєчасно не були прийняті відповідні заходи. Всі ці проблеми є наслідком того, що традиційні системи не працюють з оперативними даними, які надходять в режимі реального часу з виробничого рівня. Це призводить до того, що відсутня можливість оперативно аналізувати бізнес-процеси підприємства і управляти ними. Таким чином, підприємство потребує інформаційно-керуючої системи, що пронизує всі рівні управління підприємством і встановлює взаємозв'язок між ними. Мова йде про наступні рівні:

контроль та управління технологічними процесами – цехами, дільницями, технологічними лініями та ін;

A.A. Tymashov, Ph.D., Associate Professor,
P.M. Zinko, Ph.D., Associate Professor**On the automated system of management in real time**

A new approach to the creation of automated systems management in real time, which is based on the use of MES-systems and algorithms for solving linear programming problems of large dimension.

Keywords: automated system management, information management system, MES-system, linear programming problem of large dimension

виробничої діяльності (керівники виробництва, служби головного механіка, головного технолога тощо); на цьому рівні необхідна підтримка поопераційного планування, контролю якості продукції, контролю терміну виконання замовлення, контролю продуктивності;

фінансово-господарської діяльності; тут ми говоримо про комерційний бік діяльності підприємства, де необхідна підтримка фінансового обліку, логістики, планування в масштабах цілого підприємства і так далі.

Для того щоб це було ефективним, фінансова система в тісній інтеграції з системами виробництва, збуту і постачання, а значить, і в зв'язку з зовнішнім світом, повинна в короткостроковій і середньостроковій перспективі планувати витрати, оцінювати ризики і передбачати доходи. Даній вимозі не відповідає жодна з існуючих АСУП. Для вирішення вищевикладених проблем необхідно, щоб автоматизована система, дозволяла: оперативно збирати, передавати і відображати необхідні дані, контролювати виробництво і керувати ним в режимі реального часу.

Якщо попередні покоління систем управління підприємствами і процесами – системи АСУП – виконували роботи по складанню об'ємно-календарних планів (рідне – план-графіків роботи устаткування),

обрахуванню фінансових перспектив при стабільному попиті і розрахунку заробітної плати, то сучасні системи, які в даний час відповідають за складання планів робіт на виробництві - це системи класів ERP, MRPII, APS і MES. Вони включають в себе все нові і нові функції автоматизації діяльності підприємств в умовах динамічного розвитку ринку товарів новітнього суспільства споживання. Але основною функцією, як і раніше, вважається можливість складання плану робіт. Саме ця функція, в кінцевому підсумку, дозволяє зрозуміти - хто, коли і що повинен робити [4].

ERP-системи, по суті, не є прямим інструментом планування робіт на підприємстві. Це, перш за все, корпоративна інформаційна система, система управління підприємством, яка з'єднує блоки логістики підрозділів, що виконують певні функції (документообіг, управління закупівлями, поставками, складськими запасами та ін.) Можна сказати, що в ERP-системах планування ведеться без урахування поточного завантаження даного обладнання та стану обробки виробів, тобто будь-яке планування на рівні ERP обмежується лише формуванням об'ємного місячного (декадного) плану. Коригувати такі плани оперативного не вдається, от чому їх реалізація передбачає сувору виконавську дисципліну в усіх залучених у виробничий ланцюжок підрозділах підприємства. Тобто можна говорити про організацію виробництва контролюваного ERP, як виробництва з певним запасом «стійкості» по відношенню до виникаючих відхилень від складеного об'ємного плану. І, що особливо важливо, ERP, видавши завдання всім підрозділам, при виникненні потреби у коригуванні планів, не в змозі з цим впоратися, тому що будь-який перерахунок дасть ту ж картину загального завдання - завдання в обсягах, але не в детальних термінах по виробках і операціях, що потрібно для управління на рівні цехів.

З точки зору точного планування робіт на підприємствах, інтерес представляють системи класів APS (Advanced Planning & диспетчеризація) і MES (Manufacturing Execution Systems) [5]. APS-системи є вже безпосереднім інструментом планування робіт на підприємстві. Основною метою APS було розв'язання задач автоматизації управління ланцюгами постачання (SCM - управління

ланцюгами поставок). Причому ця функція APS реалізована за рахунок можливості планування всіх робіт в часі з урахуванням завантаження потужностей, має подвійне призначення - вона реалізується як для підприємства, що виступає об'єктом всього ланцюжка на динамічному ринку товарів, так і для об'єктів самого підприємства: цехів, дільниць і підрозділів. Таким чином, можливості планування в APS розширені і вдосконалені щодо стандарту MRPII.

Синхронність в APS - це можливість планування матеріалів, ресурсів і одночасно побудова розкладу з урахуванням реального завантаження устаткування в часі. З іншого боку - синхронність виражається ще й у тому, що розклади будуються для всіх підрозділів підприємства з урахуванням термінів поставок партнерів та розкладу для всіх цих виробничих структур є завжди взаємопов'язаними у часі, оскільки вони виходять із загального розкладу роботи всього підприємства.

Оперативність в APS - це можливість за найкоротший час визначити по тому чи іншому замовленню термін його виготовлення. Оперативність в плані диспетчерського контролю та оперативного перерахунку розкладів до APS, як правило, ніякого відношення не має, оскільки, якщо не змінюються зовнішні обмеження (порушення термінів поставок з боку партнерів, інші непередбачені затримки) і в портфель замовлень кожні п'ять хвилин не вноситься новий виріб, то перерахунок розкладів нічого не дасть. Облік ж внутрішніх збурень з боку численних підрозділів (поломки обладнання, брак на операціях і т.п.) може привести до істотного обтяження контуру диспетчеризації при існуючій розмірності задачі.

У порівнянні з алгоритмами MRPII, алгоритми APS при складанні розкладів одночасно враховують як потреби матеріалів, так і потужності підприємства з урахуванням їх поточного і спланованого завантаження.

MES-системи безпосередньо пов'язані з виробничим циклом виконання об'ємних планів, які спускаються цехам. Основних завдань три: оперативне планування, оптимізація, управління виробничими процесами. До вирішення цих завдань приступають після того, як цех в будь-якому вигляді отримує спущений йому вищим керівництвом об'ємний план і пройдено етап технологічної підготовки виробництва. У цеху

все починається зі складання детального оперативного, похвильного плану виробництва на найближчу перспективу. Звичайний горизонт оперативного планування не перевищує двох місяців, більш далекі горизонти безглузді в силу безупинно мінливих умов виробництва в цеху і наступними за ними коректуваннями виробничих розкладів. На практиці при плануванні виробництва формуються так звані об'ємні та оперативні плани. Об'ємний план встановлює коли, скільки і якої продукції повинно бути зроблено, оперативний план деталізує об'ємний за часом і завданням для низових ланок. Фактично оперативний план визначає, як насправді виробляється продукція. Крім того, оперативний план передбачає диспетчеризацію виробництва: контроль та облік виконання робочих нарядів, оперативне регулювання та оптимізацію ходу виробництва на рівні цеху. На багатьох вітчизняних підприємствах у виробничих підрозділах сьогодні можна побачити, що оперативний план регулярно порушується внаслідок багатьох причин. Серед них: відхилення фактичного часу виконання операцій від запланованого, надходження термінових замовлень, переробка браку, нестача і заміна робочої сили, поломки і ремонт обладнання, настання інших незапланованих подій. Кожна з цих подій робить невизначеність у виробничому плані. У цеху, щоб встигнути виконати замовлення в термін, оживають термінові дії щодо зміни черговості робіт, перерозподілу ресурсів та встановлення внутрішніх пріоритетів замовлень. Тут потрібно відзначити, що це нормальна ситуація, така природа виробництва і незаплановані події в цехах відбуваються на підприємствах усього світу.

Регламентований склад функцій MES-систем, число яких рівно одинадцять (www.mesa.org, www.mesa.ru, www.mesforum.ru):

1. Контроль стану і розподіл ресурсів (RAS).
2. Оперативне / Детальне планування (ODS).
3. Диспетчеризація виробництва (DPU).
4. Управління документами (DOC).
5. Збір та зберігання даних (DCA).
6. Управління персоналом (LM).
7. Управління якістю продукції (QM).
8. Управління виробничими процесами (PM).
9. Управління техобслуговуванням і ремонтом (MM).

10. Відстеження історії продукту (PTG).

11. Аналіз продуктивності (PA).

В цьому переліку немає функції SCM (SCM - Supply Chain Management), яка є головною в APS-системах. Незважаючи на різноманіття функцій MES, вони все ж таки мають оперативний характер і регламентують відповідні вимоги не до підприємства в цілому, а до тієї його одиниці (цеху, ділянки, підрозділу), для якої ведеться планування робіт. Причому такі функції, як управління документами, персоналом - це управління цеховими документами (наряд-замовленнями, звітними відомостями тощо) і персоналом цеху. Основними функціями MES-систем з перерахованих вище є - оперативноткалендарне планування (детальне планування) і диспетчеризація виробничих процесів в цеху. Саме ці дві функції визначають MES-систему як систему оперативного характеру, націлену на формування розкладів роботи устаткування і оперативне управління виробничими процесами в цеху.

MES-система отримує обсяг робіт, який або представлений ERP на етапі об'ємноткалендарного планування, або видається APS-системою у вигляді допустимого для підприємства план-графіка роботи цеху, і в подальшому сама не лише буде більш точні розклади для обладнання, а й в оперативному режимі відстежує їх виконання. У цьому сенсі мета MES-системи - не тільки виконати заданий обсяг з зазначеними термінами виконання тих чи інших замовлень, але й виконати якомога краще з точки зору економічних показників цеху. APS-системи формують якісь початкові розклади роботи першого ступеня наближення ще до початку реалізації виробничих планів. При цьому, зважаючи на велику розмірність завдання, не враховуються багато технологічних та організаційних чинників. MES-система вже на етапі виконання, отримуючи такий попередній план, оптимізує його по ряду критеріїв. При цьому, після оптимізації та побудови нового план-графіка роботи цеху, дуже часто за рахунок ущільнення роботи обладнання, відшукуються додаткові резерви, з'являється можливість в рамках планованого періоду виконати додаткові замовлення. Тим самим досягається ефект збільшення пропускної здатності виробничих структур.

Поява технічних засобів моніторингу виробничих процесів (які легко інтегруються)

уможливаює високоефективну реалізацію так званих MES-систем. Ці системи, що застосовуються на нижніх рівнях управління, дозволяють в реальному масштабі часу отримувати достовірну інформацію про події у цехах, на виробничих ділянках і технологічних установках підприємства. Отримані параметри виробництва: завантаження обладнання, відсоток браку, простої, витрати ресурсів дозволяють надалі краще оцінити фінансові показники підприємства в цілому. Вони дають також суттєві переваги, а саме: мінімізують час реакції на події, знижують час простою обладнання, зменшують цикл виробництва, підвищують якість продукції, зменшують паперовий документообіг і дозволяють швидко перенастроювати виробничі процеси [1].

Оперативність – це можливість за найкоротший час визначити по тому чи іншому замовленню термін його виготовлення. Врахування внутрішніх збурень з боку численних підрозділів (поломки обладнання, браки на операціях і т.п.) може призвести до істотного обтяження контуру диспетчеризації при існуючій розмірності задачі. Алгоритми при складанні розкладів одночасно враховують як потреби матеріалів, так і потужності підприємства з урахуванням їх поточного і спланованого завантаження. У них враховуються перенастроювання і деякі інші параметри технологічного середовища. Ідея алгоритму побудови розкладів наступна [2].

Є множина операцій для всієї множини виробів, множина верстатів і на кожній виробі є обмеження – за термінами випуску, по наявності матеріалу і т.п. Обмеження поділяються на важливі і не дуже. Спочатку, на першому проході алгоритму, складається розклад з урахуванням здійсненності важливих обмежень, наприклад, відсутність порушення термінів поставок. Якщо розклад отримано, то він вважається допустимим і приймається як базовий для подальшої «оптимізації» – на наступних проходах алгоритму проводиться спроба врахувати менш важливі обмеження, що залишилися.

Це ітераційний процес отримання допустимого розкладу з урахуванням нових обмежень, що вносяться на новій ітерації, тобто досить нескладна евристика. У ряді випадків процес планування спрощують ще сильніше – спочатку планують одну деталь, потім іншу, до тих пір, поки вся множина

деталей не буде спланована. Оцінка отриманих розкладів щодо дійсного оптимуму при цьому може бути досить низькою, але треба відзначити, що якщо ми складасмо розклад для декількох тисяч одиниць обладнання з сотень тисяч операцій на місяць чи півроку, то з цим фактом можна змиритися. Особливо якщо врахувати, що на наступному етапі за фактичну реалізацію виробничого розкладу будуть відповідати MES-системи. Таким чином, спрощений алгоритм побудови розкладу дає можливість в межах існуючих обчислювальних потужностей отримувати допустимі розклади і більш-менш точно прогнозувати терміни. При цьому не ставляться більш складні завдання як, наприклад, мінімізації в побудованих розкладах термінів перенастроювань, транспортних операцій, зменшення кількості задіяного обладнання тощо, оскільки облік цих вимог неминуче призведе до обтяження алгоритмів і неможливості за найкоротший час отримувати розклади для великих розмірностей. У зв'язку з цим вкрай обмежена сукупність критеріїв планування. І це зумовлює частоту перепланування (перерахунку) тільки при появі нових замовлень. При оперативному же управлінні перерахунок може вестися з дискретним часом в одну хвилину. Це не означає, що кожен хвилину робочим будуть видаватися нові завдання, але це означає, що всі процеси в цеху контролюються в режимі real time і це дозволяє заздалегідь передбачити всі можливі порушення розкладів і вчасно приймати відповідні заходи, але для задач значно меншої розмірності, коректуючи плани лише окремих цехів, оскільки за великим рахунком необхідно реагувати на будь-яку зміну ходу технологічного процесу. Постійні корекції планів виробництва – це типове явище для виробництва дрібносерійного та одиничного типів. Алгоритми базуються, в більшості випадків, на евристичках. Спочатку знаходиться допустиме рішення з урахуванням всіх обмежень і обраного критерію (частинного або інтегрального). В подальшому, на етапі оптимізації, відбувається пошук кращого розкладу. Звичайно, отриманий розклад також не є оптимальним у повному розумінні слова, оскільки пошук оптимуму в таких задачах завжди супроводжується значними часовими витратами. MES-системи, основними

функціями яких є – оперативно-календарне планування (детальне планування) і диспетчеризація виробничих процесів в цеху, і які визначають їх як систему оперативного характеру, націлену на формування розкладів роботи устаткування і оперативне управління виробничими процесами в цеху, будують розклади за 0.1 – 5 хвилин на сучасній техніці, але отримані при цьому розклади, як правило, вже набагато ближчі до оптимального.

В роботі завдання корекції планів виробництва формуються у вигляді задач лінійного програмування та запропоновано алгоритм на базі методу оберненої матриці, який більш економічний в обчисленнях, ніж звичайний симплекс метод (особливо це проявляється, якщо число рівнянь-обмежень m істотно менше розмірності простору змінних n). На кожній ітерації обчислюється матриця, обернена до базисної, що зводиться до обчислення за основними формулами m векторів розмірності m (нагадаємо, що в основному симплекс-методі на кожній ітерації за основними формулами обчислюється $n-m+1$ вектор).

Задача 1. Знайти $\arg \max_{x \in X} (c, x)$ для заданого вектора $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ та заданої множини

$$X = \{x \mid Ax = a^0, x \geq 0, x \in R^n\},$$

де A – матриця розмірності $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad a^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_m^0)^T.$$

Стовпці матриці A позначаються через $a^1, a^2, \dots, a^n$.

Припущення 1. (i) – ранг матриці A дорівнює m ; (ii) – $n > m$; (iii) – множина X непорожня.

Алгоритм 1.

Початок. I. Знайти початковий опорний розв'язок $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ задачі 1 і базис $a^1, a^2, \dots, a^m$ цього опорного розв'язку. (В загальному випадку для знаходження початкового опорного розв'язку і відповідного йому базису використовують спеціальні алгоритми).

II. Обчислити матрицю $B^{-1} = (\beta_{kj})_{k=1, m}^{j=1, m}$, обернену до початкової базисної матриці B .

III. Покласти $z_{k0} = x_k^1, \quad k = \overline{1, m}$.

Основний цикл. IV. Покласти $c_{\text{баз}} = (c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_m})$.

V. Обчислити вектор

$$b = c_{\text{баз}} B^{-1}.$$

VI. Для кожного $j \in [1: n]$ обчислити оцінку

$$\Delta_j = ba^j - c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

VII. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$), то покласти $x^* = x^1$ і припинити обчислення (тобто в цьому випадку опорний розв'язок x^1 оптимальний); якщо при деякому $j \in [1: n]$ виконується $\Delta_j < 0$, то перейти на крок VIII.

VIII. Вибрати згідно завчасно обумовленого правила такий індекс $s \in [1: n]$, щоб $\Delta_s < 0$.

IX. Обчислити вектор-стовпець

$$(z_{1s}, z_{2s}, \dots, z_{ms})^T = B^{-1} a^s.$$

X. Якщо при всіх $k \in [1: m]$ виконується $z_{ks} \leq 0$, то припинити обчислення (в цьому випадку цільова функція (c, x) необмежена (зверху) на допустимій множині X); інакше перейти на крок XI.

XI. Обчислити відношення z_{k0} / z_{ks} для всіх $k \in [1: m]$, для яких $z_{ks} > 0$ та позначити мінімальне з цих відношень через θ_0 .

XII. Знайти такий індекс $r \in [1: m]$, що $z_{rs} > 0$ і $z_{r0} / z_{rs} = \theta_0$.

XIII. Покласти $\bar{\beta}_{kj} = \beta_{kj}, \quad k = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, m},$ і $\bar{z}_{k0} = z_{k0}, \quad k = \overline{1, m}.$

XIV. Перейти до нового базису $a^1, \dots, a^{k^*},$ який отримусмо заміною вектора a^{k^*} в попередньому базисі вектором a^s (тобто покласти $i = s$).

XV. Обчислити за основними формулами матрицю $B^{-1} = (\beta_{kj})_{k=1, m}^{j=1, m}$, обернену до нової базисної матриці:

$$\bar{\beta}_{ij} = \bar{\beta}_{ij} / z_{rs}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\bar{\beta}_{kj} = \bar{\beta}_{kj} - (\bar{\beta}_{ij} / z_{rs}) z_{ks}, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k \neq r.$$

XVI. Обчислити за основними формулами нові значення базисних координат опорного розв'язку:

$$z_{r0} = z_{r0} / z_{rs}; \\ z_{k0} = \bar{z}_{k0} - (\bar{z}_{r0} / z_{rs}) z_{ks}, \quad k = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, m.$$

XVII. Перейти до нового опорного розв'язку $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^T$:

$$x_k^1 = z_{k0}, \quad k = \overline{1, m},$$

інші координати вектора x^1 дорівнюють нулю.

XVIII. Перейти на крок IV.

Теорема. Якщо виконані припущення 1 і задача 1 не вироджена, то процес розв'язування задачі 1 алгоритмом 1 через скінченне число ітерацій закінчиться або на кроці VIII (уходиться оптимальний розв'язок задачі 1), або на кроці X (встановлюється, що оптимального розв'язку задачі 1 немає).

Зауваження 1. На практиці алгоритм 1 застосовується також для розв'язування виродженої задачі лінійного програмування, для якої виконуються умови (I), (II), (III) припущення 1. В цьому випадку теоретично можливе зациклювання процесу розв'язування задачі 1 алгоритмом 1. Якщо при розв'язуванні задачі 1 алгоритмом 1 на деякому опорному розв'язку все-таки відбудеться зациклювання, то необхідно включити в алгоритм 1 спеціальне правило вибору вектора, що виводиться з базису, яке гарантує незациклювання.

Зауваження 2. Якщо на кроці XV алгоритму 1 матрицю B^{-1} обчислити за формулою $B^{-1} = D_r \bar{B}^{-1}$, де $\bar{B}^{-1}$ – матриця, обернена до базисної на попередній ітерації, а D_r має вигляд:

$$D_r = \begin{pmatrix} 1 \dots 0 & -z_{1s}/z_{rs} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 1 & -z_{r-1,s}/z_{rs} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1/z_{rs} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & -z_{r+1,s}/z_{rs} & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & -z_{ms}/z_{rs} & 0 \dots 1 \end{pmatrix},$$

то такий модифікований симплекс-метод називається **мультимплікативним**. Для запису матриці D_r достатньо знати $m+1$ число: число r та числа $-z_{1s}/z_{rs}, \dots, 1/z_{rs}, \dots, -z_{ms}/z_{rs}$. Якщо позначити через D_k матрицю D_r в k -й ітерації мультимплікативного алгоритму і за початкову базисну вибрати одиничну матрицю I , то обернена до базисної в k -й ітерації буде обчислюватися за формулою

$$B^{-1} = D_k D_{k-1} \dots D_1 I.$$

З цієї формули бачимо, що для обчислення матриці B^{-1} в k -й ітерації мультимплікативного алгоритму потрібно знати $(m+1)k$ чисел, що на початковій стадії обчислення приводить до економії оперативної пам'яті ЕОМ.

Список використаних джерел

1. Тимковский В.Г. Дискретная математика в мире станков и деталей / Тимковский В.Г. – М.: Наука, 2002. – 144 с.
2. Бермудес Дж. Системы оптимизированного производственного планирования: новая причуда или прорыв в области управления производством и цепочками поставок. Производственный обзор. AMR Research, 2006.
3. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. – Киев: Вища школа, 1983. – 512 с.
4. Загидуллин Р.Р. Управление машиностроительным производством с помощью MES-систем / Р.Р. Загидуллин, Е.Б. Фролов. – М.: «СТИН», 2007. – №11. – С.2–5.
5. Фролов Е.Б. MES системы. MES-системы, как они есть или эволюция систем планирования производства. Часть II / Е.Б. Фролов, Р.Р. Загидуллин. – ergnews.ru/doc2593.html, 2007.

Надійшла до редколегії 16.02.12

УДК 004.02

Тимофєєв В.Г., аспірант.

Проблема виконуваності у композиційно-номінативних логіках кванторно-екваційного рівня зі слабкою рівністю

У роботі досліджується задача перевірки виконуваності формул у композиційно-номінативних логіках кванторно-екваційного рівня. Розглядаються логіки із композицією слабкої рівності. Доводиться, що задача перевірки виконуваності може бути частково зведена до аналогічної задачі у класичних логіках предикатів першого порядку із рівністю. Запропонований метод дозволяє застосовувати наявні процедури перевірки виконуваності для класичних логік для вирішення поставленої задачі, але з неповним.

Ключові слова: композиційно-номінативні логіки, часткові предикати, виконуваність, істинність.

*E-mail: tvalentyu@univ.kiev.ua

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анисімов А.В.

Вступ

Проблема виконуваності, або проблема перевірки виконуваності формул, є однією із класичних проблем у математичній логіці [1]. Для конкретної формули вона полягає у визначенні, чи має формула інтерпретацію, на якій вона приймає істинне значення. Останнім часом зростає інтерес до цієї проблеми обумовлено її практичним значенням у сферах верифікації, синтезу, аналізу програм, тестування та ін. [2]. В цій роботі ми досліджуємо проблему виконуваності у рамках композиційно-номінативного підходу [3], що має на меті побудувати ієрархію логік різних рівнів абстрактності та загальності, на природній для програмування методологічній основі. Цей підхід ґрунтується на принципах розвитку від абстрактного до конкретного, пріоритету семантики, композиційності та номінативності.

Ці принципи визначають ієрархію нових логік, що семантично ґрунтуються на алгебрах предикатів. Предикатами виступають часткові відображення деякого класу даних D у клас Булевих значень $Bool$. Операції над предикатами називаються композиціями. Вони виступають засобами побудови предикатів. Класи даних

V.G. Tymofieiev*, PhD student.

V.G. Tymofieiev*, PhD student.

Satisfiability Problem in Composition-Nominative Logics of Quantifier-Equational Level with Weak Equality

The satisfiability problem in composition-nominative logics of quantifier-equational level is investigated. Logics with weak equality composition are considered. We prove that the problem in hand can be partly reduced to the satisfiability problem for classical first-order predicate logics with equality. The method proposed enables usage of existent satisfiability checking procedures also for quantifier-equational composition-nominative logics with weak equality, however this method is incomplete.

Keywords: composition-nominative logics, partial predicates, satisfiability, validity.

розглядаються на різних рівнях абстракції, все ж найбільша увага приділяється класу номінативних даних. Такі дані складаються із пар ім'я-значення. У найпростішому випадку, номінативні дані можуть вважатися частковими відображеннями певної множини імен (змінних) V у множину базових (атомарних) значень A . Дані цього виду називаються номінативними множинами. Їх клас позначається $V A$. Часткові предикати та функції над $V A$ називаються квазіарними, їх класи позначаються $Px^{V A} = V A \rightarrow Bool$ та $Fx^{V A} = V A \rightarrow A$ відповідно. Логіки, що визначаються таким підходом називаються композиційно-номінативними логіками (КНЛ) [3].

КНЛ можуть розглядатися як узагальнення класичних логік предикатів. Проте, багато методів, що розроблені для класичних логік, можуть бути застосовані і до КНЛ. В цій статті ми перевіряємо це твердження стосовно розв'язання проблеми виконуваності. В роботі розглядаються композиційно-номінативні логіки кванторно-екваційного рівня із предикатом слабкої рівності. Проблема виконуваності для КНЛ кванторно-екваційного рівня із сильною рівністю досліджувалася у [4].

В даній роботі обгрунтовується можливість застосування методу класичної нормалізації для зведення проблеми виконуваності у логіці, що розглядається, до аналогічної проблеми у класичній логіці предикатів першого порядку із рівністю. Побудований метод виявляється неповним, але втім дозволяє встановлювати невиконуваність формул у багатьох випадках.

Поняття та позначення, не визначені у даній роботі, слід розуміти у сенсі [1].

Основні поняття та визначення

В даній роботі розглядаються КНЛ чистих квазіарних предикатів над однорівневими номінативними даними. Ці логіки базуються на алгебрах з одним сортом $Pr^{V,A}$. Взагалі, серед логік квазіарних предикатів визначаються логіки кванторної, реномінативного, та кванторно-екваційного рівня. Ці рівні відрізняються множиною наявних композицій.

Логіки реномінативного рівня [1] є найбільш абстрактними із вищеперерахованих. Головною композицією для цих логік є композиція реномінації (перейменування), яка являє собою totale відображення $R_{x_1 \dots x_n}^{y_1 \dots y_n} : Pr^{V,A} \xrightarrow{r} Pr^{V,A}$.

Інтуїтивно, для даного квазіарного предикату P та номінативної множини d значення $R_{x_1 \dots x_n}^{y_1 \dots y_n}(P)(d)$ обчислюється наступним чином:

спочатку будеться нова номінативна множина d' шляхом зміни у d значень імен $v_1, \dots, v_n$ на значення імен $x_1, \dots, x_n$ відповідно; далі предикат P застосовується до d' . Отримане значення P (якщо таке було обчислено) буде результатом $R_{x_1 \dots x_n}^{y_1 \dots y_n}(P)(d)$. Для спрощення позначень

вживатимемо також для композиції реномінації запис $R_{x_1 \dots x_n}^{y_1 \dots y_n}$. Базовими композиціями

реномінативних логік виступають $\vee, \neg$ та $R_{x_1}^{y_1}$.

На кванторному рівні всі базові значення можуть бути використані для побудови номінативних множин, до яких потім можуть застосовуватись квазіарні предикати. Це дозволяє ввести композицію квантифікації $\exists x$. Базовими композиціями логік кванторного рівня виступають $\vee, \neg, R_{x_1}^{y_1}$, та $\exists x$.

На кванторно-екваційному рівні з'являються можливості порівнювання значень компонент номінативних множин за допомогою 0-арних композицій – параметричних предикатів рівності $=_n$. Базовими композиціями логік кванторно-екваційного рівня є $\vee, \neg, R_{x_1}^{y_1}, \exists x$, та $=_n$.

Всі зазначені логіки (реномінативні, кванторні, кванторно-екваційні КНЛ) базуються на алгебрах що мають один сорт: клас квазіарних предикатів.

В загальному вигляді композиційно-номінативні логіки задаються шляхом визначення трьох логічних компонент, що відображають семантико-синтаксичну схему визначення логіки:

- **семантичний компонент**: клас алгебр квазіарних предикатів, що визначає семантичну базу логіки. В даній роботі розглядаються алгебри виду $AQE(V, A) = \langle Pr^{V,A}, \vee, \neg, R_{x_1}^{y_1}, \exists x, =_n \rangle$;

- **синтаксичний компонент**: логічна мова, що задається класом формул логіки. Цей клас визначається сигнатурою логіки $\Sigma = (V, Ps, Cs)$, що включає нескінченну множину імен V , множину Ps предикатних символів та множину Cs символів композицій; множина формул $Fr(\Sigma)$ будеться індуктивно над множиною атомарних формул $AFr(V, Ps)$ за допомогою символів композицій;

- **інтерпретаційний (денотаційний) компонент**: параметричне totale відображення, що ставить у відповідність формулі її значення. Параметрами виступають алгебра, та відношення інтерпретації атомарних формул $I : AFr(V, Ps) \xrightarrow{i} Pr^{V,A}$. Пара $(AQE(V, A), I)$ називається **моделью** логіки. Якщо задано модель $M = (AQE(V, A), I)$ то інтерпретаційне відображення ставить у відповідність кожній формулі Φ деякий квазіарний предикат з $AQE(V, A)$, що позначається Φ_M . Іноді моделі зручніше подавати у спрощеній формі $J = (V, A, I)$.

Логіку, із сигнатурою Σ , визначену за описаною схемою, будемо позначати $L(\Sigma)$.

Алгебри квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня

Для логік кванторно-екваційного рівня (QE-рівня) множина композицій складається із пропозиційних композицій, композицій реномінації, кванторів і предикатів рівності. Всі (крім пропозиційних) композиції мають параметри – імена чи списки імен із нескінченної множини імен V .

Клас композиційних символів визначається множиною $Cs_{QE}(V) = \{ \vee, \neg \} \cup \{ R_{\vec{v}}^{\vec{v}} \mid \vec{v} = (v_1, \dots, v_n), \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{v} - \text{список попарно різних імен}, v_i, x_i \in V \text{ для всіх } i \in \{1, \dots, n\}, n \geq 0 \} \cup \{ \exists x \mid x \in V \}$

$\{=_{\alpha} \mid x, y \in V\}$. Для спрощення запису, однотипні композиційні символи зручно об'єднувати: $Cx_{QE}(V) = \langle \vee, \neg, R_i^{\vee}, \exists x, =_{\alpha} \rangle$.

Задамо інтерпретацію символів композицій для алгебри $AQE(V, A) = \langle Pr^{V,A}, \vee, \neg, R_i^{\vee}, \exists x, =_{\alpha} \rangle$. Для спрощення будемо використовувати однакові позначення для композицій як операцій в алгебрі, та символів композицій у логічній мові.

У визначеннях вживатимемо наступні позначення:

- $p(d) \downarrow$ означає, що предикат p визначений на номінативній множині d ;
- $p(d) \downarrow = b$ означає, що предикат p визначений на d та дорівнює Булевому значенню b ;
- $p(d) \uparrow$ означає, що p на d невизначений;
- для подання номінативних множин використовуємо запис $d = [v_i \mapsto a_i \mid i \in I]$.

Відношення належності до номінативної множини позначається $\in_{\alpha}$. Таким чином, $v_i \mapsto a_i \in_{\alpha} d$ позначає те саме що і $d(v_i) \downarrow = a_i$.

Пропозиційні композиції визначаються наступними формулами ($p, q \in Pr^{V,A}, d \in {}^VA$):

$$(p \vee q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } p(d) \downarrow = T \text{ або } q(d) \downarrow = T, \\ F, & \text{якщо } p(d) \downarrow = F \text{ та } q(d) \downarrow = F, \\ \text{невизначено в інших випадках.} \end{cases}$$

$$(\neg p)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } p(d) \downarrow = F, \\ F, & \text{якщо } p(d) \downarrow = T, \\ \text{невизначено якщо } p(d) \uparrow. \end{cases}$$

Унарна композиція реномінації $R_i^{\vee}$ є відображенням $R_i^{\vee}: Pr^{V,A} \xrightarrow{i} Pr^{V,A}$, де $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – списки імен із множини V ; імена списку $\bar{v}$ називаються *верхніми іменами* композиції реномінації та мають бути попарно різними, $n \geq 0$. Ще раз відмітимо що $R_i^{\vee}$ – параметрична композиція, що визначає клас композицій з різними параметрами, що є списками елементів із V . Ця композиція задається наступною формулою ($p \in Pr^{V,A}, d \in {}^VA$):

$$(R_{\eta_1 \dots \eta_n}^{\vee} p)(d) = p([v_i \mapsto a_i \mid v_i \in \{v_1, \dots, v_n\}] \vee [v_i \mapsto d(x_i) \mid d(x_i) \downarrow, i \in \{1, \dots, n\}]).$$

Операція ∇ визначається так: якщо d_1 та d_2 – номінативні множини, то $d = d_1 \nabla d_2$ складається із всіх іменованих пар з d_2 та тих пар із d_1 , імена яких не мають значень у d_2 .

Унарна параметрична композиція квантору існування $\exists x$ із параметром $x \in V$ визначається формулою:

$$(\exists x) p(x)(d) = \begin{cases} T, & p(d \nabla \nabla x \mapsto b) \downarrow = T \text{ для деякого } b \in A, \\ F, & p(d \nabla \nabla x \mapsto a) \downarrow = F, \text{ для всіх } a \in A \\ \text{невизначено в інших випадках.} \end{cases}$$

Тут $d \nabla \nabla x \mapsto a$ – скорочений запис для $d \nabla \nabla \{x \mapsto a\}$, $p \in Pr^{V,A}, d \in {}^VA$.

Нульарна параметрична композиція (слабої) рівності $=_{\alpha}$ ($x, y \in V$) визначається формулою:

$$=_{\alpha}(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } d(x) \downarrow, d(y) \downarrow \text{ та } d(x) = d(y), \\ F, & \text{якщо } d(x) \downarrow, d(y) \downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y), \\ \text{невизначено, коли } d(x) \uparrow \text{ або } d(y) \uparrow. \end{cases}$$

Для визначення логік зафіксуємо певну нескінченну множину імен V та фіксовану множину предикативних символів Ps . Елементи із V також традиційно називаються *змінними*. Нам необхідно визначити два класи логік – початкові композиційно-номінативні логіки, та класичні логіки предикатів. Внаслідок властивостей композицій у КНЛ при розгляді проблеми виконуваності можна обмежитися класом тотальних інтерпретацій предикативних символів. Тому семантичним компонентом логік обох видів виступатиме алгебра AQE . Розглянемо їх синтаксичні та інтерпретаційні компоненти.

Композиційно-номінативна логіка кванторно-екваційного рівня $L_{QE}(\Sigma_{QE})$

1. Синтаксичний компонент.

Сигнатурою КНЛ кванторно-екваційного (QE-рівня) є трійка $\Sigma_{QE} = (V, (\vee, \neg, R_i^{\vee}, \exists x, =_{\alpha}), Ps)$. Оскільки множина символів композицій визначається множиною V , будемо використовувати для сигнатури позначення (V, Ps) . Мовою логіки $L_{QE}(\Sigma_{QE})$ є клас формул $Fr_{QE}(V, Ps)$, що задається індуктивно:

- Якщо $P \in Ps$, то $P \in Fr_{QE}(V, Ps)$.
- Якщо $x, y \in V$, то $=_{\alpha} \in Fr_{QE}(V, Ps)$.
- Якщо $\Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$, $\Psi \in Fr_{QE}(V, Ps)$, то $(\Phi \vee \Psi) \in Fr_{QE}(V, Ps)$ та $\neg \Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$.

• Якщо $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{v}$ – список попарно різних змінних, $v_i, x_i \in V$ для $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \geq 0$, $\Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$, то $R_i^v \Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$.

• Якщо $x \in V$, $\Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$ то $\exists x \Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$.

2. Інтерпретаційний компонент.

Оскільки символи композицій інтерпретовані, необхідно задати лише відношення інтерпретації предикатних символів, тобто відображення $I_{QE}: Ps \rightarrow Pr^{VA}$.

Для проведення еквівалентних перетворень формул у КНЛ необхідно мати у наявності неістотні імена. Вважатимемо, що $U \subseteq V$ – нескінченна множина неістотних імен. Це допущення є по суті обмеженням на допустимі інтерпретації предикатних символів. Тобто, для будь-якого $d \in {}^VA$ $I_{QE}(P)(d) = I_{QE}(P)(d \parallel U)$ де $d \parallel U = \{ \langle v, a \rangle \in d \mid v \in U \}$. Таке обмеження є природним при розгляді проблеми виконуваності і не обмежує загальності задачі [4].

Класична логіка предикатів першого порядку з рівністю $L_{CL}(\Sigma_{CL})$

1. *Синтаксичний компонент.* Сигнатурою логіки є четвірка $\Sigma_{CL} = (V, \{\vee, \neg, \exists x, =\}, Ps, arity)$ (тут $arity: Ps \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ – функція, що ставить у відповідність кожному предикатному символу його ари́сть). У спрощеному вигляді сигнатуру задаватимемо у вигляді $(V, Ps, arity)$. Мова $Fr_{CL}(V, Ps, arity)$ задається індуктивно:

• Якщо $P \in Ps$, $arity(P) = n$, $x_1, \dots, x_n \in V$, то $P(x_1, \dots, x_n) \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$.

• Якщо $x, y \in V$, то $x = y \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$.

• Якщо $\Phi, \Psi \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$, то $(\Phi \vee \Psi) \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$ та $\neg \Phi \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$.

• Якщо $x \in V$, $\Phi \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$, то $\exists x \Phi \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$.

2. Інтерпретаційний компонент

Формули мови інтерпретуються як предикати алгебри $AQE(V, A)$. Атомарна формула $x = y$ інтерпретується предикатом $=_V$. Інтерпретація атомарних формул вигляду $P(x_1, \dots, x_n)$ визначається відображенням I_{CL} :

$I_{CL}: Ps \rightarrow \bigcup_{a \in A} (A^n \rightarrow Bool)$ таким, що

$I_{CL}(P) \in A^n \rightarrow Bool$ якщо $arity(P) = n$, $P \in Ps$.

Інтерпретацію формул класичних логік позначатимемо $J_{CL} = (V, A, arity, I_{CL})$.

Похідні композиції як то кон'юнкція &, універсальна квантифікація $\forall x$, заперечення рівності $\neq$ і т.п., визначаються для описаних логік у звичайний спосіб.

Для логік L_{QE} та L_{CL} будемо говорити про QE- та CL-формули, а також про QE-, та CL-інтерпретації.

Формула Φ називається виконуваною на інтерпретації J якщо існує $d \in {}^VA$ таке, що $\Phi_J(d) \downarrow = T$. Цей факт позначатимемо $J \models \Phi$. Формула Φ називається виконуваною якщо існує інтерпретація J на якій Φ виконувана. Будемо позначати цей факт $\models \Phi$. Формули Φ та Ψ еквівалентні якщо вони одночасно виконуватимуться або не виконуватимуться. Будемо вказувати тип відповідної логіки у символі $\models$ коли це необхідно, напр. $\models_{QE}$, $\models_{CL}$.

Проблема виконуваності

В цій роботі досліджується проблема перевірки факту $\models_{QE} \Phi$ для довільної формули $\Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$. Для КНЛ пропозиційного, реномінативного, кванторного та кванторно-еквівалентного рівня (із сильною рівністю) [4] аналогічну проблему було успішно розв'язано редукційними методами. По формулі КНЛ будувалася еквівалентна формула у відповідній класичній логіці (логіці висловлень або логіці предикатів першого порядку). Перевагою такого підходу є можливість застосовувати існуючі методи перевірки виконуваності формул, розроблені для класичних логік, для розв'язання задачі перевірки виконуваності у композиційно-номінативних логіках. Покажемо, що аналогічний метод вдається застосувати для часткового вирішення проблеми виконуваності у КНЛ кванторного рівня із слабкою рівністю.

Покажемо, що за QE-формулою Φ можна побудувати формулу Φ_{CL} класичної логіки предикатів першого порядку із рівністю таку, що із $\models \Phi$ слідує $\models_{CL} \Phi_{CL}$.

Спочатку формулу Φ слід перетворити у еквівалентну формулу спеціального виду. Кажуть, що формула Φ знаходиться в уніфікованій реномінативній нормальній формі (УРНФ) якщо виконуються наступні умови.

- композиція реномінації застосовується у Φ тільки до предикатних символів;
- для будь-якої пари підформул $R_{\frac{e}{q}}^e P$ та $R_{\frac{e}{p}}^e Q$ маємо, що $\bar{u}$ та $\bar{w}$ співпадають;
- для будь-якої підформули $R_{\frac{e}{x}}^e P$ та будь-якого квантору $\exists u$ що входить у Φ маємо $u \in \bar{v}$.

Для приведення формули до УРНФ застосовуються еквівалентні перетворення QE-формул, які детально описано у [4, 1]. Для формули Φ позначатимемо її УРНФ $urnf[\Phi]$.

До формул, що знаходяться в УРНФ можна застосувати totaly відображення $clf: Fr_{QE}(V, Ps) \xrightarrow{1} Fr_{CL}(V, Ps, arity)$ яке ставить у відповідність деяку формулу класичної логіки. Перетворення clf задається індуктивно наступним чином:

1. $clf[P] = P$
2. $clf[=_{\eta}] = =_{\eta}$
3. $clf[R_{\frac{e}{x_1} \dots \frac{e}{x_n}}^e P] = P(x_1, \dots, x_n)$
4. $clf[\neg \Phi] = \neg clf[\Phi]$
5. $clf[(\Phi_1 \vee \Phi_2)] = (clf[\Phi_1] \vee clf[\Phi_2])$
6. $clf[\exists x \Phi] = \exists x (x \neq e \wedge clf[\Phi])$, $e \in U$, e –

певна змінна, що не зустрічається у початковій формулі та задана наперед (тобто, кожне застосування 6-го правила вводить одну й ту саму змінну e).

Для формули $\Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$, що знаходиться в УРНФ, позначимо через V_{Φ} множину змінних, що зустрічаються у формулі як верхні імена композиції реномінації.

Розглядаючи проблему виконаності у класичній логіці L_{CL} для формул отриманих за допомогою відображення clf ми розширюємо множину базових значень A додатковим значенням ε . Говорячи неформально, це значення відображатиме невизначені компоненти номінативних множин.

Теорема. Нехай Φ – формула в уніфікованій реномінаційній нормальній формі, $\Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$. Тоді має місце імплікація $\models_{QE} \Phi \Rightarrow \models_{CL} clf[\Phi]$.

Доведення. Нехай $A_{\varepsilon} = A \cup \{\varepsilon\}$, $\varepsilon \in A$, $A_{\varepsilon}^V = V \xrightarrow{1} A_{\varepsilon}$ – клас totaly номінативних множин. Нехай $J = (V, A, I_{QE})$ – інтерпретація така, що $\Phi_J(d_0) \downarrow = T$ для деякого $d_0 \in {}^V A$, $d_0(e) \uparrow$, $\Phi_{CL} = clf[\Phi]$, $\Phi_{CL} \in Fr_{CL}(V, Ps, arity)$. Умова

$d_0(e) \uparrow$ справджується адже $e \in U$ та e не зустрічається у Φ . Побудуємо інтерпретацію J_{CL} класичної логіки $J_{CL} = (V, A_{\varepsilon}, arity, I_{CL})$ так, що $J_{CL} \models \Phi_{CL}$.

Визначимо відображення $ae: {}^V A \xrightarrow{1} A_{\varepsilon}^V$ наступним чином: $ae(d) = [v \mapsto \varepsilon \mid v \in V] \nabla d$. Це відображення додає пару $v \mapsto \varepsilon$ до номінативної множини d для всіх імен v , що не визначені у d .

Неважко бачити, що ae є бієктивним відображенням. Нехай $(v_1, \dots, v_n)$ – список верхніх імен композиції реномінації у Φ . Тоді для будь-якого $P \in Ps$ задамо $I_{CL}(P)$ як n -арний предикат $p: A_{\varepsilon}^n \longrightarrow Bool$, $p(a_1, \dots, a_n) = I_{QE}(P)([v \mapsto a \mid v \mapsto a \in a_n, d_0, v \in \{v_1, \dots, v_n\}]) \nabla [v \mapsto a_i \mid i = 1, \dots, n, a_i \neq \varepsilon]$.

Це завершує визначення інтерпретації J_{CL} .

Нехай $D = \{de(d_0 \nabla d) \mid d \in A_{\varepsilon}^{V_0}\}$. Доведемо індукцією що для будь-якої підформули Ψ формули Φ та відповідній їй формулі $\Psi_{CL} = clf[\Psi]$ з того, що $\Psi_J(d) \downarrow$ випливає, що $\Psi_J(d) = (\Psi_{CL})_{J_{CL}}(ae(d))$ для всіх $d \in D$.

База індукції: за побудовою $I_{CL}(R_{\frac{e}{x_1} \dots \frac{e}{x_n}}^e P)_J(d) = (P(x_1, \dots, x_n))_{J_{CL}}(ae(d))$ та $(=_{\eta})_J(d) = (=_{\eta})_{J_{CL}}(ae(d))$ коли $(=_{\eta})_J(d)$ визначено.

Доведемо індукційний перехід для нетривіального випадку – композиції квантора існування.

Нехай $\Psi = \exists x \Theta$, тоді $\Psi_{CL} = clf[\Psi] = \exists x (x \neq e \wedge \Theta_{CL})$, де $\Theta_{CL} = clf[\Theta]$. За припущенням індукції маємо, що для всіх $d \in D$ з $\Theta_J(d) \downarrow$ слідує $\Theta_J(d) = (\Theta_{CL})_{J_{CL}}(ae(d))$. Покажемо, що для всіх $d \in D$ $\Psi_J(d) \downarrow \Rightarrow \Psi_J(d) = (\Psi_{CL})_{J_{CL}}(ae(d))$.

Припустимо $\Psi_J(d) = (\exists x \Theta)_J(d) = T$. Це значить, що існує деяке $a \in A$ таке, що $\Theta_J(d \nabla x \mapsto a) = T$. Оскільки $x \in V_{\Phi}$ маємо, що $d \in D \Rightarrow d \nabla x \mapsto a \in D$. Це означає, згідно припущення, що $(\Theta_{CL})_{J_{CL}}(ae(d \nabla x \mapsto a)) = T$. Відмітимо, що $ae(d \nabla x \mapsto a) = ae(d) \nabla x \mapsto a$. Це означає, що $(\Theta_{CL})_{J_{CL}}(ae(d) \nabla x \mapsto a) = T$. Для всіх $d \in D$ маємо $ad(e) = \varepsilon$; за побудовою, e не зустрічається у Ψ та $a \neq \varepsilon$. Тому $ae(d \nabla x \mapsto a)(x) \neq ae(d \nabla x \mapsto a)(e)$ та

$(x \neq e)_{J_{CL}} (ae(d) \forall x \rightarrow a) = T$. Відповідно,
 $(\exists x (x \neq e \& \Theta_{CL}))_{J_{CL}} (ae(d)) = T$. Отже, ми
 показали, що імплікація $\Psi_j(d) = T \Rightarrow$
 $(\Psi_{CL})_{J_{CL}} (ae(d)) = T$ має місце.

Припустимо, що $\Psi_j(d) = (\exists x \Theta)_j(d) = F$.
 Тоді для всіх $a \in A$ $\Theta_j(d \forall x \rightarrow a) = F$. Згідно до
 припущення індукції, це означає, що для всіх
 $a \in A$ $(\Theta_{CL})_{J_{CL}} (ae(d \forall x \rightarrow a)) = F$. Що значить,
 що для всіх $a \in A$ $(\Theta_{CL})_{J_{CL}} (ae(d) \forall x \rightarrow a) = F$.
 Припустимо $(\Theta_{CL})_{J_{CL}} (ae(d) \forall x \rightarrow b) = T$ для
 деякого $b \in A_e = A \cup \{e\}$. Це можливо тільки у
 випадку коли $b = e$; це означає, що
 $(x \neq e \& \Theta_{CL})_{J_{CL}} (ae(d) \forall x \rightarrow b) = F$ для всіх
 $b \in A_e$. Що в свою чергу значить, що
 $(\exists x (x \neq e \& \Theta_{CL}))_{J_{CL}} (ae(d)) = F$. Таким чином,
 імплікація $\Psi_j(d) = F \Rightarrow (\Psi_{CL})_{J_{CL}} (ae(d)) = F$ має
 місце.

Індукційний перехід для композицій
 диз'юнкції та заперечення не викликає
 складнощів.

Тепер із $\Phi(d_0) \downarrow = T$ ми отримуємо, що
 $\Phi_{CL}(ae(d_0)) \downarrow = T$. $\square$

Наслідок. Нехай $\Phi \in Fr_{QE}(V, Ps)$. Якщо
 $clf[urnf[\Phi]]$ невиконувана у класичній логіці
 L_{CL} , то Φ невиконувана у L_{QE} .

Доведені твердження вказують на достатню
 умову не виконуваності формули Φ у
 композиційно-номінативній логіці кванторно-

екваційного рівня зі слабкою рівністю. Метод
 перевірки цієї умови полягає у побудові формули
 $clf[urnf[\Phi]]$ та використанні існуючих
 інструментів перевірки виконуваності для
 класичних логік [2].

Висновки

У статті досліджується проблема
 виконуваності для композиційно-номінативних
 логік кванторно-екваційного рівня зі слабкою
 рівністю. Показано, що цю проблему можна
 частково звести до проблеми виконуваності у
 логіках предикатів першого порядку. Описана
 схема може застосовуватися для спрощення
 формул у логіках, що розглядаються у статті.
 Ідея методу полягає у побудові еквівалентної
 формули класичної логіки першого порядку за
 даною формулою композиційно-номінативної
 логіки. Це дозволяє застосовувати потужні
 інструменти для перевірки виконуваності
 формул, що розроблені для класичних логік.

Отриманий наразі метод не є повним, тому
 питання про можливість повного зведення задачі
 поки що залишається відкритим. Іншими
 важливими напрямками подальшого дослідження
 проблеми виконуваності у КНЛ є розгляд більш
 виразних композиційно-номінативних логік, у
 тому числі логік програмно-функціонального
 рівня, та логік над ієрархічними даними.

Список використаних джерел

1. Nikitchenko N. A composition-nominative approach to program semantics / N. Nikitchenko // Technical report IT-TR 1998-020, Technical University of Denmark. – 1998. – 103 p.
2. Biere A. Handbook of Satisfiability / A. Biere, M. Heule, H. van Maaren, T. Walsh (Eds.). – IOS Press, 2009. – 980 p.
3. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: Видавничо-

поліграфічний центр «Київський
 університет», 2008. – 528 с.

4. Nikitchenko N. Satisfiability Problem in Composition-Nominative Logics of Quantifier-Equational Level / M. S. Nikitchenko, V.G. Tymofieiev // ICT in Education, Research and Industrial Applications: Integration, Harmonization and Knowledge Transfer: international conference, June 6-10, 2012, Kherson, Ukraine: proceedings. – CEUR-WS.org. – 2012. – №848. – P. 56-70.

Надійшла до редколегії 26.06.12

Чабанюк Я.М., д. ф.-м. н., проф.,
Горун П.П., аспірант

Асимптотика стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі усереднення

Досліджено асимптотичну поведінку стрибкової процедури стохастичної оптимізації в марковському середовищі в схемі усереднення через властивості функції Ляпунова для усереднених систем. Встановлено достатні умови її нормальності. Введено додаткові параметри α, β, γ , які дають можливість керувати оптимізацією самої процедури.

Ключові слова: стохастична оптимізація, процедура, асимптотична поведінка.

E-mail: yaroslav_chab@yahoo.com

Статтю представив д. т. н., проф. Акіменко В.В.

Дослідження поведінки флуктуацій процедури стохастичної оптимізації (ПСО) дає оцінку швидкості її збіжності до точки екстремуму усередненої еволюційної системи. Така проблема виникає при використанні алгоритму фазового усереднення випадкових еволюцій [1], який базується на близькості вихідної та усередненої еволюційних систем [2].

Крім того, знаючи властивості граничного розподілу ПСО, можна оцінити швидкість її збіжності, а також вибрати параметри, змінюючи які, можна керувати оптимізацією самої процедури.

Асимптотична поведінка процедури стохастичної оптимізації досліджувалась методом моментів, детально описаним у працях [3–5], а для загальніших випадків у працях [6–8] отримані інші граничні розподіли.

У даній роботі досліджується асимптотична поведінка процедури стохастичної оптимізації в марковському середовищі в схемі усереднення. Також введено додаткові параметри, що дозволяють керувати оптимізацією самої процедури.

Для простоти викладення розглядається одновимірний випадок функції регресії, однак отримані результати аналогічно переносяться на багатовимірний випадок.

© Я.М. Чабанюк, П.П. Горун, 2012

Ya.M. Chabanyuk, Doctor Sciences (Phys.-Math.),
Professor, P.P. Gorun, postgraduate.
Ya.M. Chabanyuk, Doctor Sciences (Phys.-Math.),
Professor, P.P. Gorun, postgraduate.

Asymptotic behavior of stochastic optimization jumping procedure in averaging scheme

The asymptotic behavior of stochastic optimization procedure in series scheme in Markov medium was investigated. For this purpose Lyapunov function properties for averaged systems was used. A necessary conditions for its normality was obtained. Also by using additional parameters α, β, γ we can control of optimization of stochastic optimization procedure.

Key words: stochastic optimization, procedure, asymptotic behavior.

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) з марковськими перемикаваннями в схемі серій задається співвідношенням

$$\left(\sum_{i=0}^{-1} a_i^* \nabla_s C(u_i^*; x_i^*) = 0 \right) [9]:$$

$$u^*(t) = u + \sum_{i=0}^{q(t)-1} a_i^* \nabla_s C(u_i^*; x_i^*), \quad (1)$$

$$u^*(0) = u, \quad t \geq 0,$$

де $u \in R^d$, $q(t) = \max\{n: \tau_n \leq t\}$ – рахуючий процес моментів відновлення $\tau_n, n \geq 0$ вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $(x_n = x(\tau_n), n \geq 0)$ у рівномірно ергодичний марковський процес $x(t)$ у вимірному просторі $(X, \mathcal{X})$ з генератором Q та потенціалом R_0 [1, Підрозділ 1.6]. γ – показник нормування часу, а a_i^* – деяка нормуюча послідовність. Псевдоградієнт ∇_s визначається співвідношенням

$$\nabla_s C(u_i^*) = \left(\frac{C(u_i^*; \cdot) - C(u_i^*; \cdot)}{2b(t)}, i = 1, d \right),$$

$$u_i^* = u, \pm b(t) \epsilon_i, \quad \epsilon_i = \{0, \dots, 1, 0, \dots, 0\}.$$

Збіжність стрибкової ПСО (1)

$$u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*, t \rightarrow \infty, \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (2)$$

означає, що виконується рівність

$$C'(u^*) = 0, \quad (3)$$

де точка u^* (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $u^* = 0$) – єдина точка рівноваги системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C'(u(t)), \quad C(u) = q \int \rho(dx) C(u; x) \quad (4)$$

Збіжність ПСО (1) розглядається в умовах експоненційної стійкості розв'язку $u(t)$ усередненої системи (4).

Рівності (3)–(4) дають умову балансу:

$$PC'(0; x) = 0, \quad (5)$$

де P – проектор, що визначається стаціонарним розподілом ВЛМ $x_n, n \geq 0$, тобто

$$P\varphi(x) = \int \rho(dx) \varphi(x).$$

Функція регресії $C(u; x)$ така, що $C(u; \cdot) \in C^4(R)$, тому має місце розклад

$$\begin{aligned} \nabla_x C(u; x) &= \frac{C(u + b; x) - C(u - b; x)}{2b(t)} = \\ &= C'(0; x) + u C''(0; x) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{b^2}{3} \right) C'''(0; x) + o(b^2) \end{aligned} \quad (6)$$

З іншого боку (2) означає, що флуктуації стрибкової ПСО доцільно вивчати з таким нормуванням:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{t^\gamma}{\varepsilon} u^\varepsilon(t), \quad (7)$$

отже,

$$u^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma} v^\varepsilon(t)$$

В ПСО (1) вкладає дискретна процедура u_n^ε :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\varepsilon &= u_n^\varepsilon + a_n^\varepsilon \nabla_x C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) \\ u_n^\varepsilon &= u(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \\ \tau_n^\varepsilon &= \tau_n / \varepsilon^{1/\gamma}, n \geq 0. \end{aligned}$$

Розглянемо такі функції:

$$a(t) = \frac{a}{t^\alpha}, a > 0; b(t) = \frac{b}{t^\beta}, b > 0,$$

де α, β такі, що забезпечують умови збіжності ПСО (1) [10]:

C1: умова експоненційної стійкості усередненої системи (4)

$$C'(u)V'(u) \leq -k_0 V(u);$$

$$\|V'(u)\| \leq k_1(1 + V(u));$$

C2: мають місце оцінки

$$\max_{x \in X} \left\langle \nabla_x C(u; x), \frac{d}{du} V(u) \right\rangle \leq k_2(1 + V(u));$$

$$\max_{x \in X} \left\langle \nabla_x C(u; x) q(x) R_0, \left\langle \nabla_x \bar{C}(u; x), \frac{d}{du} V(u) \right\rangle \right\rangle \leq k_3(1 + V(u));$$

$$\max_{x \in X} \left\langle \nabla_x C(u; x) q(x) R_0, \left\langle \nabla_x \bar{C}(u; x), \frac{d}{du} V(u) \right\rangle^2 \right\rangle \leq k_4(1 + V(u)),$$

де

$$\bar{C}(u; x) = q(x) C(u; x) - C(u);$$

C3: функції $a(t)$, $b(t)$ монотонно спадні, додатні та задовольняють умови:

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty, \sum_{t=0}^{\infty} a(t)b(t) < \infty.$$

C4: $\nabla_x C(u)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця:

$$\max_{u \in B^r} \|\nabla_x C(u) - C'(u)\| \leq k_5 b(t);$$

$$k_i > 0, i = \overline{0, 5},$$

де $V(u)$ – функція Ляпунова усередненої системи (4).

Покладемо $\gamma = 1/2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Асимптотична нормальність нормованої ПСО (7) встановлюється при додаткових умовах:

A1:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= 2 \int \pi(dx) q(x) C''(0; x) R_0 q(x) C''(0; x) - \\ &- q \int \rho(dx) (C''(0; x))^2 > 0. \end{aligned}$$

A2:

$$d = -q \int \rho(dx) C''(0; x) > 0;$$

A3:

$$k = ad - \gamma > 0.$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови збіжності стрибкової ПСО (1) C1–C4, а також додаткові умови A1–A3. Тоді має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \varepsilon \rightarrow 0.$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 \leq t \leq T$.

Граничний дифузійний процес $\zeta(t), t \geq 0$.

процесом Орнштейна-Уленбека [11, Т.2, Гл. III §8 д, Гл. X §4 б] і визначається генератором

$$L\varphi(v) = -k\nabla\varphi(v) + \frac{a^2}{2}\rho^2\varphi''(v). \quad (8)$$

Перш, ніж перейти до доведення теореми, розглянемо двокомпонентний МП

$$(v^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^2), t \geq 0). \quad (9)$$

Лема 1. Генератор МП (9) на банаховому просторі $B(X, \chi)$, $X \in R^d$ дійснозначних функцій $\varphi(u, \cdot) \in C^1(R)$ має представлення

$$L_\varepsilon\varphi(v; x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v; x) + \varepsilon^{-2}L_0\varphi(v; x), \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} L_0\varphi(v; x) &= \\ &= q(x)P\left[\varphi\left(v + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}}a\nabla_\delta C\left(\frac{\varepsilon}{t^{1/2}}v; x\right); y\right) - \varphi(v; y)\right] + \varepsilon^2 \frac{v}{2t}\varphi'(v; x), \\ P(x, dy)\varphi(\cdot, y) &= \int_x P(x, dy)\varphi(\cdot, y). \end{aligned} \quad (11)$$

Доведення. Проведемо доведення леми у два етапи.

Етап I (Вигляд генератора). Знайдемо умовне математичне очікування (покладемо $v^\varepsilon(t) = v$, $v_t^\varepsilon = x$):

$$\begin{aligned} E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | v^\varepsilon(t) = v, x_t^\varepsilon = x, \tau^\varepsilon(t) = t] &= \\ &= E_{v, x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] \times \\ &\times [I(\theta_\varepsilon > \varepsilon^{-2}\Delta) + I(\theta_\varepsilon \leq \varepsilon^{-2}\Delta)] \end{aligned} \quad (27)$$

Оскільки

$$I(\theta_\varepsilon > \frac{\Delta}{\varepsilon^2}) = e^{-\frac{\Delta}{\varepsilon^2}q(x)} = 1 - \frac{\Delta}{\varepsilon^2}q(x) + O(\Delta^2), \quad \text{а}$$

$$I(\theta_\varepsilon \leq \frac{\Delta}{\varepsilon^2}) = \frac{\Delta}{\varepsilon^2}q(x) + O(\Delta^2), \text{ маємо}$$

$$\begin{aligned} L_\varepsilon\varphi(v; x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} E_{v, x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(v; x)] = \\ &= \varepsilon^{-2}q(x) \int_x P(x, dy) \left[\varphi\left(v + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}}a\nabla_\delta C\left(\frac{\varepsilon}{t^{1/2}}v; x\right); y\right) - \varphi(v; y) \right] = \frac{v}{2t}\varphi'(v; x) \end{aligned}$$

Етап II. Використовуючи доданок $\pm \varphi(v; y)$ в квадратних дужках, останнє можна подати у вигляді (10) в позначенні (11).

Використовуючи (6), розкладемо функцію

$$\nabla_\delta C\left(\frac{\varepsilon}{t^{1/2}}v; x\right) \text{ в околі точки екстремуму } u^*:$$

$$\begin{aligned} E_{v, x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] &= \\ &= \varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), x) \left(1 - \frac{\Delta}{\varepsilon^2}q(x)\right) + \\ &+ \frac{\Delta}{\varepsilon^2}q(x)E_{v, x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), y)] + O(\Delta^2), \end{aligned} \quad (12)$$

де $x_{t+\Delta}^\varepsilon = y$.

Знайдемо приріст $\Delta v^\varepsilon(t)$ нормованої ПСО (7) при малих $\Delta > 0$, беручи до уваги розклад $(t + \Delta)^{1/2} = t^{1/2} + \frac{\Delta}{2t^{1/2}} + O(\Delta^2)$:

$$\begin{aligned} \Delta v^\varepsilon(t) &= v^\varepsilon(t + \Delta) - v^\varepsilon(t) = \\ &= \frac{\Delta}{2t}v + \varepsilon^{-1} \left(t^{1/2} + \frac{\Delta}{2t^{1/2}} \right) \Delta u^\varepsilon(t) + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Оскільки приріст $\Delta u^\varepsilon(t)$ ПСО (1) при наявності стрибка має вигляд

$$\Delta u^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t + \Delta) - u^\varepsilon(t) = \varepsilon^2 \frac{a}{t} \nabla_\delta C(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon),$$

приріст $\Delta v^\varepsilon(t)$ можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta v^\varepsilon(t) &= \frac{\varepsilon}{t^{1/2}}a\nabla_\delta C\left(\frac{\varepsilon}{t^{1/2}}v; x_t^\varepsilon\right) + \\ &+ \frac{\Delta}{2t} \left(v + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}}a\nabla_\delta C\left(\frac{\varepsilon}{t^{1/2}}v; x_t^\varepsilon\right) \right) + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

Для першого доданку в (12) при $\Delta \rightarrow 0$ $\Delta u^\varepsilon(t) \rightarrow 0$ (з умови Ліпшиця для $\nabla_\delta C(u; x)$), тому другим доданком в (13) нехтуємо. Підставивши $\Delta v^\varepsilon(t)$ в (12), з означення генератора МП (9) (див. наприклад, [12, Глава 3, §5]) отримуємо:

$$\begin{aligned} \nabla_\delta C\left(\frac{\varepsilon}{t^{1/2}}v; x\right) &= C'(0; x) + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}}vC''(0; x) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{t} v^2 C'''(0; x) + o\left(\frac{\varepsilon^4}{t^2}v\right), \end{aligned} \quad (14)$$

де $v = v(t)$, $b = \text{const}$.

Для зручності та скорочення записів $C^* = C^*(0; x)$, $\varphi' = \varphi'(v; x)$, $\varphi'' = \varphi''(v; x)$.
покладемо $C' = C'(0; x)$, $C'' = C''(0; x)$. Підставивши (14) в (11), маємо:

$$\varepsilon^{-2} L_0^* \varphi(v; x) = \varepsilon^{-1} \frac{1}{t^{1/2}} a \left[C' + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} v C'' + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{t} v^2 C''' \right] Q_0 \varphi' + \frac{v}{2t} \varphi' +$$

$$+ \frac{1}{t} \frac{a^2}{2} \left[C' + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} v C'' + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{t} v^2 C''' \right]^2 Q_0 \varphi'' + o \left(\frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \right). \quad (15)$$

Щоб не робити формули надто громіздкими, окремо розкриємо квадратні дужки у третьому доданку:

$$\left[C' + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} v C'' + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{t} v^2 C''' \right]^2 =$$

$$= (C')^2 + 2 \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} v C' C'' + \frac{\varepsilon^2}{t} v^2 C' C''' +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{t} v^2 (C'')^2 + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} \frac{\varepsilon^2}{t} v^2 C'' C''' + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^4}{t^2} v^4 (C''')^2 \quad (16)$$

Лема 2. Генератор (10) на тест-функціях $\varphi(v; \cdot) \in C^3(R)$ має асимптотичне представлення:

$$L_1^* \varphi(v; x) = \varepsilon^{-2} Q \varphi(v; x) + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1/2}} Q_1(x) Q_0 \varphi(v; x) +$$

$$+ \frac{1}{t} Q_2(x) \varphi(v; x) + \frac{\varepsilon}{t^{3/2}} \theta_1^* \varphi(v; x), \quad (17)$$

де

$$Q_1(x) \varphi(v; x) = a C'(v; x) \varphi'(v; x); \quad (18)$$

$$Q_2(x) \varphi(v; x) = v b(x) \varphi''(v; x) +$$

$$+ \frac{a^2}{2} (C'(v; x))^2 Q_0 \varphi''(v; x); \quad (19)$$

$$Q_0 \varphi(v; x) = q(x) \varphi(v; x);$$

$$b(x) = a C''(0; x) Q_0 + \frac{1}{2}, \quad (20)$$

а залишковий член $\theta_1^*(x) \varphi(v; x)$ обмежений.

Доведення. Підставивши (15), (16) у (10), отримуємо (17) в позначеннях (18)–(20). Обмеженість залишкового члена випливає з

$$L_{10}^* \varphi^e(v; x) = \varepsilon^{-2} Q \varphi^e(v; x) + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1/2}} [Q \varphi_1(v; x) + Q_1(x) Q_0 \varphi(v)] +$$

$$+ \frac{1}{t} [Q \varphi_2(v; x) + Q_2(x) Q_0 \varphi_1(v; x) + Q_2(x) \varphi(v)]$$

$$+ \frac{\varepsilon}{t^{3/2}} \left[Q_1(x) Q_0 \varphi_2(v; x) + Q_2(x) \varphi_1(v; x) + \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} Q_2(x) \varphi_2(v; x) \right] =$$

$$= \frac{1}{t} L \varphi(v) + \theta_1^*(x) \varphi(v). \quad (22)$$

рівностей (15), (16), а також обмеженості першої, другої та третьої похідної функції регресії.

Розв'яжемо проблему сингулярного збурення (ПСЗ) для оператора (17) на збурених функціях виду

$$\varphi^e(v; x) = \varphi(v) + \varepsilon \frac{1}{t^{1/2}} \varphi_1(v; x) + \varepsilon^2 \frac{1}{t} \varphi_2(v; x). \quad (21)$$

Лема 3. Розв'язок ПСЗ для оператора (17) на тест-функціях (21), таких, що $\varphi(v; \cdot) \in C^4(R)$, має вигляд

$$L_1^* \varphi^e(v; x) = \frac{1}{t} L \varphi(v) + \theta_1^*(x) \varphi(v),$$

де оператор L має представлення (8), а залишковий член $\theta_1^*(x) \varphi(v)$ такий, що

$$\|\theta_1^*(x) \varphi(v)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доведення. Оскільки залишковий член в представленні (17) не впливає на розв'язок ПСЗ (див. [2, Підрозділ 3.1] або [1]), розглянемо розв'язок ПСЗ тільки для зрізаного до (17) оператора:

$$L_{10}^* \varphi(v; x) = \varepsilon^{-2} Q \varphi(v; x) + \varepsilon^{-1} \frac{1}{t^{1/2}} Q_1(x) Q_0 \varphi(v; x) +$$

$$+ \frac{1}{t} Q_2(x) \varphi(v; x)$$

Оператор L_{10}^* на функціях (21) має представлення

Умови розв'язності (див. наприклад, [2, де Підрозділ 3.1]) для (22) мають вигляд:

$$Q\varphi(v) = 0, \\ Q\varphi_1(v; x) + Q_1(x)Q_0\varphi(v) = 0.$$

Оскільки $\varphi(v)$ належить простору N_Q нулів оператора Q , то перша умова виконується, а, беручи до уваги умову балансу (5), подіавши оператором R_0 , з останньої рівності знайдемо, що:

$$\varphi_1(v; x) = R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v) = aR_0C''(0; x)Q_0\varphi'(v; x). \quad (23)$$

Далі, з умови розв'язності (22) і представлення (23) маємо

$$Q\varphi_2(v; x) + L(x)\varphi(v) = L\varphi(v), \quad (24)$$

$$LP\varphi(v) = a\Gamma C''(0; x)q(x)PR_0[aC''(0; x)q(x)P\varphi'(v)] + \\ + P\left(v\left(aC''(0; x)q(x)P + \frac{1}{2}\right)\varphi'(v) + \frac{a^2}{2}(C''(0; x))^2q(x)P\varphi''(v)\right).$$

Оскільки $q(x)PR_0 = q(x)R_0 + P - I$, з останнього маємо:

$$LP\varphi(v) = v\left[aq\int_x \rho(dx)C''(0; x) + \frac{1}{2}\right]\varphi'(v) + \\ + a^2\left[\int_x \rho(dx)q(x)C''(0; x)R_0q(x)C''(0; x) - \frac{q}{2}\int_x \rho(dx)(C''(0; x))^2\right]\varphi''(v).$$

Остаточно маємо (8).

Зауваження. Залежно від параметрів α, β, γ , асимптотична поведінка нормованої ПСО (7) встановлюється при різних додаткових умовах. Тому розглянемо наступні *теореми-наслідки*.

Наслідок а. При $\gamma = 1/2, \alpha = 1, \beta = \gamma/2$, а також додаткових умовах А1–А3 граничний генератор L матиме вигляд:

$$L\varphi(v) = -(kv - m)\varphi'(v) + \frac{a^2}{2}\rho^2\varphi''(v),$$

де

$$m = \frac{ab^2}{6}q\int_x \rho(dx)C''(0; x).$$

Наслідок б. При $\gamma = 1/2, \alpha = 1, \beta = \gamma/4$, умові

$$\rho^2 = q\int_x \rho(dx)(C''(0; x))^2 > 0,$$

а також додаткових умовах А2–А3 граничний генератор L матиме вигляд:

$$L(x)\varphi(v) = Q_1(x)Q_0R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v) + Q_2(x)\varphi(v), \quad (25)$$

а оператор L визначається співвідношенням

$$LP\varphi(v) = PL(x)P\varphi(v). \quad (26)$$

Врахувавши, що $R_0Q = P - I$, а також

$PQ_1(v; x) = 0$, з (24)–(26) отримуємо

$$\varphi_2(v; x) = R_0\tilde{L}(x)\varphi(v),$$

де

$$\tilde{L}(x) = L(x) - L.$$

Знайдемо оператор L , використовуючи (26), а також (18) та (19):

$$L\varphi(v) = -kv\varphi'(v) + \frac{a^2}{2}\rho^2\varphi''(v).$$

Наслідок с. При $\gamma = 1/3, \alpha = 1, \beta = 3\gamma$, а також додаткових умовах А2–А3 граничний генератор L матиме вигляд:

$$L\varphi(v) = -kv\varphi'(v).$$

Зауваження. При $\gamma < 1/3, \alpha = 1$ граничний генератор L має аналогічний до с) вигляд.

Наслідок д. При $\gamma = 1/4, \alpha = 3/4, \beta = 2\gamma > \gamma$, умовах

$$d = -q\int_x \rho(dx)C''(0; x) > 0;$$

$$k(v) = \frac{ad}{2}v - \frac{1}{4} > 0,$$

а також додатковій умові А1 граничний генератор L матиме вигляд:

$$L\varphi(v) = -k(v)v\varphi'(v) + \frac{a^2}{2}\rho^2\varphi''(v).$$

Зауваження. При $1/2 < \alpha < 1$ змінна k залежить від нормованої еволюції v .

Висновки

Досліджено асимптотичну поведінку стрибкової процедури стохастичної оптимізації (ПСО) в схемі серій в марковському середовищі для одновимірної випадку. Отримані результати аналогічно переносяться на багатовимірний випадок.

Введено додаткові параметри α, β, γ , що дозволяють керувати оптимізацією самої процедури.

Показано, що при нормуванні по часу, де $\gamma \leq 1/2$ – коефіцієнт нормування, суттєво зменшується дисперсія ПСО, а математичне очікування знайденого розв'язку стає ближчим до точки екстремуму u^* .

Зокрема, при деяких співвідношеннях нормуючих коефіцієнтів α, β, γ для знаходження асимптотичної поведінки ПСО достатньо, щоб функція регресії $C(u; x)$ була тричі неперервно диференційовною: $C(u; x) \in C^3(R; X)$.

Таким чином, отримані результати розширюють можливості дослідження флуктуацій еволюційних систем в околі точки екстремуму у випадку залежного від еволюції сингулярного збурення еволюційної системи. У свою чергу, це дає змогу поглибити аналіз флуктуацій процедури стохастичної оптимізації в околі точки екстремуму при дослідженні умов оптимізації стохастичних систем.

Встановлено достатні умови стійкості динамічної системи в схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі через властивості функції Ляпунова для усереднених систем.

Доведено, що при їх виконанні для довільного початкового значення $u^e(0)$ описана процедура стохастичної оптимізації збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки екстремуму u^* усередненої еволюційної системи.

Встановлено супермартингальні властивості процесу на збурення функцій Ляпунова $V^e(u; x)$ через асимптотику компенсуючого оператора.

Отримано оцінки залишкових членів розв'язку проблеми сингулярного збурення через функції Ляпунова $V(u)$ для усереднених систем. Ці оцінки випливають з умов гладкості функцій регресії та функції Ляпунова $V(u)$.

Список використаних джерел

1. Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / Korolyuk V., Limnios N. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.
2. V.S. Korolyuk Stochastic Models of Systems / V.S. Korolyuk, V.V. Korolyuk. – London: Kluwer acad. pub., 1999. – 185 p.
3. Sacks J. Asymptotic distributions of stochastic approximations // Ann. Math. Statist., – 1958. – 29. – Vol. 2. – P. 373-405.
4. Невельсон М.Б. О сходимости моментов процедуры Роббинса-Монро / Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. // Автоматика и телемеханика. – 1972. – №3 – С. 101-125.
5. Хасьминский Р.З. О поведении процессов стохастической аппроксимации для больших значений времени // Проблемы передачи информации. – 1972. – 8, №1. – С. 453-495.
6. Fabian V. On asymptotic normality in stochastic approximation. // Annals of Mathematical Statistic, 1968. – Vol. 39(4). – P. 1327-1332.
7. Kersting G.D. A weak convergence theorem with application to the Robbins-Monro process // Ann. Prob. – 1978. – Vol. 6. – P. 1015-1025.
8. L. Ljung. Stochastic Approximation and optimization of random systems / L. Ljung, Georg Pflug, Harro Walk. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, – 1992. – 114 p.
9. Горун П.П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / Горун П.П., Чабанюк Я.М., Кукурба В.Р. // XVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties": PDMU-2010. – Київ: Освіта України. – 2010. – С. 54.
10. Горун П.П. Збіжність стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / Горун П.П., Чабанюк Я.М., Гнатів Л.Б. // XVII International Conference: Problems of decision making under uncertainties, 23-27 may 2011. – P. 58-59.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. – М.: Мир, 1967. – Т.1. – 527 с.
12. Невельсон М.Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. – М.: Наука, 1972. – 304 с.

УДК 517.929.4

Шатирко А.В., к. ф.-м. н., ст.н.сп.

**Стабілізація в системах прямого
регулювання з запізнюванням за
допомогою функціоналів Ляпунова-
Красовського**

З використанням прямого методу Ляпунова розглянуто задачу стабілізації нелінійних систем прямого регулювання з запізнюванням аргументу. Результати сформульовано у вигляді матричних алгебраїчних нерівностей.

Ключові слова: метод Ляпунова, абсолютна стійкість, запізнювання аргумента, стабілізація.

E-mail: a_shatyrko@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусайнов Д.Я.

Вступ

В запропонованій роботі одержано достатні умови стабілізації нелінійних систем регулювання з аргументом, що запізнюється. Апаратом дослідження вибрано метод функціоналів Ляпунова-Красовського. В роботах [1,2] отримано умови абсолютної стійкості систем регулювання з післядією. В роботах [3,4] обчислено коефіцієнти експоненціальної зблизності розв'язків систем. В запропонованій роботі припускається, що висловлені умови абсолютної стійкості не виконуються (або не знайдено параметрів, що гарантують виконання умов). Тоді за допомогою введення оберненого зв'язку у вигляді лінійної комбінації поточних фазових координат та координат, що запізнюються, система зводиться до абсолютно стійкої.

**1. Стабілізація в одновимірних процесах
регулювання із запізнюванням**

Попередньо розглянемо систему регулювання, що описується скалярним диференціальним рівнянням

A.V.Shatyrko, PhD in Math.

**Stabilization problem of Lurie-type direct
control system by Lyapunov-Krasovsky's
functional**

By employing the direct Lyapunov method stabilization problem of nonlinear Lurie-type direct control systems is considered. Conditions are constructed in terms of matrix algebraic inequalities.

Key Words: method of Lyapunov, absolute stability, time- delay argument, stabilization.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1 x(t) + a_2 x(t - \tau) + b f(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = c x(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Нелінійна функція $f(\sigma)$ задовольняє «умову сектора».

$$0 \leq f(\sigma) \leq k \sigma^2. \quad (1.2)$$

При дослідженні абсолютної стійкості системи (1.1) використовувався функціонал Ляпунова-Красовського вигляду «квадратична форма плюс інтеграл від нелінійності» [3,4].

$$V[x(t)] = h x^2(t) + g \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^2(s) ds + \beta \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma. \quad (1.3)$$

Умови стабілізації системи (1.1) будуть отримані також за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського (1.2).

Позначимо

$$\begin{aligned} s_{11}^1 &= -2a_1 h - g, \quad s_{12}^1 = -h a_2, \quad s_{22}^1 = e^{-\zeta \tau} g, \\ s_{13}^1 &= -\left[h b + \frac{1}{2} (\beta a_1 + \nu) \zeta \right], \quad s_{23}^1 = -\frac{1}{2} \beta \zeta a_2 c, \\ s_{33}^1 &= \frac{\nu}{k} - \beta \zeta c. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введемо до розгляду наступну матрицю

$$S_1[g, h, \beta, \nu, \zeta] = \begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & s_{23}^1 \\ s_{13}^1 & s_{23}^1 & s_{33}^1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

В роботах [3,4] доведено умови абсолютної стійкості для систем рівнянь. Наведемо їх для скалярного рівняння (1.1).

Теорема 1.1. Нехай існують сталі $h > 0$, $g > 0$, $\beta > 0$, $\nu > 0$, $\varsigma > 0$, при яких матриця $S_1[g, h, \beta, \nu, \varsigma]$ додатно визначена. Тоді система (1.1) є абсолютно стійкою.

Припустимо, що не вдалось знайти (або не існують) параметри, при яких матриця $S_1[g, h, \beta, \nu, \varsigma]$ додатно визначена, тобто при яких виконуються умови теореми 1.1. Введемо обернений зв'язок у вигляді лінійної комбінації поточних фазових координат та координат із запізнюванням

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_1 x(t) + a_2 x(t - \tau) + b f(\sigma(t)) + u(t), \\ \sigma(t) &= c_1 x(t) + c_2 x(t - \tau), \end{aligned} \quad (1.6)$$

а також матрицю наступного вигляду

$$\begin{aligned} S_2[g, h, c_1, c_2, \beta, \nu, \varsigma] &= \\ &= \begin{bmatrix} s_{11}^1 - 2hc_1 & s_{12}^1 - hc_2 & s_{13}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_1 \\ s_{12}^1 - hc_2 & s_{22}^1 & s_{23}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_2 \\ s_{13}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_1 & s_{23}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_2 & s_{33}^1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Мають місце наступні умови стабілізації.

Теорема 1.2. Нехай не існують (або не знайдені) сталі $h > 0$, $g > 0$, $\beta > 0$, $\nu > 0$, $\varsigma > 0$, при яких матриця $S_1[g, h, \beta, \nu, \varsigma]$ додатно визначена. Тоді абсолютно стійкою є система (1.6), якщо параметри c_1 , c_2 функції керування

$$u(t) = c_1 x(t) + c_2 x(t - \tau)$$

задовольняють нерівностям

$$c_1 < \frac{1}{2h} \left\{ s_{11}^1 - \frac{1}{s_{22}^1} (s_{12}^1 - hc_2)^2 \right\}, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} c_1 \leq \frac{1}{2h} \left\{ s_{11}^1 - \frac{1}{s_{22}^1} (s_{12}^1 - hcc_2)^2 - \frac{1}{s_{33}^1} (s_{13}^1 - hcc_1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{s_{22}^1 s_{33}^1} (s_{12}^1 - hc_2) \left(s_{23}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_2 \right) \left(s_{13}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Доведення. Умови абсолютної стійкості системи (1.6), як і в попередньому

випадку, мають вигляд додатної визначеності матриці $S_2[g, h, c_1, c_2, \beta, \nu, \varsigma]$. Як відомо [5,6], необхідною та достатньою умовою додатної визначеності симетричної матриці є додатність її головних діагональних мінорів, тобто

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= s_{11}^1 - 2hc_1 > 0, \\ \Delta_2^2 &= (s_{11}^1 - 2hc_1)s_{22}^1 - (s_{12}^1 - hc_2)^2 > 0, \\ \Delta_3^2 &= (s_{11}^1 - 2hc_1)s_{22}^1 s_{33}^1 + 2(s_{12}^1 - hc_2) \left(s_{23}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_2 \right) \times \\ &\times \left(s_{13}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_1 \right) - s_{22}^1 \left(s_{13}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_1 \right)^2 - \\ &- s_{33}^1 (s_{12}^1 - hc_2)^2 - \\ &- (s_{11}^1 - 2hc_1) \left(s_{23}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_2 \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Першу нерівність перепишемо у вигляді

$$c_1 < \frac{1}{2h} s_{11}^1. \quad (1.9)$$

Другу нерівність можна переписати у вигляді (1.7)

$$c_1 < \frac{1}{2h} \left\{ s_{11}^1 - \frac{1}{s_{22}^1} (s_{12}^1 - hc_2)^2 \right\}.$$

Розглянемо третю нерівність. Перепишемо її у вигляді (1.8)

$$\begin{aligned} c_1 \leq \frac{1}{2h} \left\{ s_{11}^1 - \frac{1}{s_{22}^1} (s_{12}^1 - hcc_2)^2 - \frac{1}{s_{33}^1} (s_{13}^1 - hcc_1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{s_{22}^1 s_{33}^1} (s_{12}^1 - hc_2) \left(s_{23}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_2 \right) \left(s_{13}^1 - \frac{1}{2}\beta\varsigma c_1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Порівнюючи нерівності (1.7), (1.8), (1.9), бачимо, що для виконання додатної визначеності матриці $S_2[g, h, c_1, c_2, \beta, \nu, \varsigma]$ достатньо виконання умов (1.7), (1.8).

2. Стабілізація нелінійних диференціально-різницьких систем регулювання із запізнюванням

Далі будемо розглядати системи диференціально-різницьких рівнянь, записаних у векторно-матричному вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = c^T x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут A, B – квадратні матриці зі сталими коефіцієнтами, $x(t) \in R^n$, $b, c \in R^n$. Нелінійна функція $f(\sigma)$ задовольняє «умову сектора» (1.2). При дослідженні абсолютної стійкості системи (2.1) будемо використовувати функціонал Ляпунова-Красовського вигляду

$$V[x(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-\tau)} x^T(s)Gx(s)ds + \beta \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma)d\sigma, \quad (2.2)$$

де G, H деякі додатно визначені матриці, $\beta > 0$, $\zeta > 0$ параметри.

Позначимо

$$S_{11}^3 = -A^T H - H A - G, \quad S_{12}^3 = -H B, \quad S_{22}^3 = e^{-\sigma} G,$$

$$S_{13}^3 = -\left[H b + \frac{1}{2}(\beta A^T + \nu I)c \right], \quad S_{23}^3 = -\frac{1}{2}\beta B^T c,$$

$$s_{33}^3 = \frac{\nu}{k} - \beta b c, \quad (2.3)$$

I – одинична матриця і введемо наступну матрицю

$$S_3[G, H, \beta, \nu, \zeta] = \begin{bmatrix} S_{11}^3 & S_{12}^3 & S_{13}^3 \\ (S_{12}^3)^T & S_{22}^3 & S_{23}^3 \\ (S_{13}^3)^T & (S_{23}^3)^T & s_{33}^3 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

В роботах [3,4] доведено наступні умови абсолютної стійкості.

Теорема 2.1. Нехай існують додатно визначені матриці H, G і параметри $\beta > 0$, $\nu > 0$, $\zeta > 0$, при яких матриця $S_3[G, H, \beta, \nu, \zeta]$ додатно визначена. Тоді система (2.1) є абсолютно стійкою.

Припустимо, що не вдалось знайти (або не існують) параметри, при яких виконуються умови теореми 2.1. Введемо обернений зв'язок у вигляді лінійної комбінації поточних фазових координат і координат із запізнюванням, тобто розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)) + u(t) \\ \sigma(t) = c^T x(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

$$u(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t-\tau),$$

де C_1, C_2 деякі матриці зі сталими коефіцієнтами.

При отриманні умов стабілізації будемо використовувати наступні результати.

Твердження 2.1 ([6], стор. 559). Нехай ермітова матриця S представлена у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix},$$

причому матриці A і C квадратні. Для додатної визначеності матриці S необхідно і достатньо, щоб були додатно визначені матриці A і $C - B^* A^{-1} B$.

Твердження 2.2 ([5], стор. 57). Якщо матриця A є невідірваною, то оберненою до матриці

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

буде

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} B R^{-1} C A^{-1} & -A^{-1} B R^{-1} \\ -R^{-1} C A^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$R = D - C A^{-1} B. \quad (2.7)$$

З використанням наведених тверджень сформулюємо наступні умови стабілізації.

Теорема 2.2. Нехай матриці C_1, C_2 і параметри $\beta > 0$, $\nu > 0$, $\zeta > 0$ такі, що виконуються умови

1. $\Delta_1^4 = S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1$ є додатно визначеною матрицею.

2. $\Delta_2^4 = S_{22}^3 - (S_{12}^3 - C_1^T H - H C_1) \times (S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1)^{-1} (S_{12}^3 - C_1^T H - H C_1)$ є додатно визначеною матрицею.

3. Справедлива нерівність $\Delta_3^4 > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_3^4 = s_{33}^3 - & \left(S_{13}^3 - \frac{1}{2} \beta C_1^T c \right)^T \times \\ & \times \left\{ (S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1)^{-1} + (S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1)^{-1} \times \right. \\ & \times (S_{12}^3 - H C_2) \times \\ & \times \left[S_{22}^3 - (S_{12}^3 - H C_2)^T (S - C_1^T H - H C_1)^{-1} (S_{12}^3 - H C_2) \right]^{-1} \times \\ & \times (S_{12}^3 - H C_2)^T \left\{ (S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1)^{-1} \left\{ S_{13}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c \right\} + \right. \\ & + \left(S_{13}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c \right)^T (S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1)^{-1} (S_{12}^3 - H C_2) \times \\ & \times \left[S_{22}^3 - (S_{12}^3 - H C_2)^T (S - C_1^T H - H C_1)^{-1} (S_{12}^3 - H C_2) \right]^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(S_{23}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c \right) + \left(S_{23}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c \right) + \\
& \times \left[S_{22}^3 - (S_{12}^3 - H C_2) \left(S - C_1^T H - H C_1 \right)^{-1} (S_{12}^3 - H C_2) \right]^{-1} \times \\
& \times \left[S_{12}^3 - H C_2 \right] \left(S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1 \right)^{-1} \left(S_{12}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c \right) - \\
& - \left(S_{23}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c \right)^T \times \\
& \times \left[S_{22}^3 - (S_{12}^3 - H C_2) \left(S - C_1^T H - H C_1 \right)^{-1} (S_{12}^3 - H C_2) \right]^{-1} \times \\
& - \left(S_{23}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c \right). \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Тоді система керування з оберненим зв'язком (2.5) є абсолютною стійкою.

Доведення. Позначимо

$$S_4[G, H, C_1, C_2, \beta, v, \zeta] = \begin{bmatrix} S_{11}^4 & S_{12}^4 & S_{13}^4 \\ (S_{12}^4)^T & S_{22}^4 & S_{23}^4 \\ (S_{13}^4)^T & (S_{23}^4)^T & S_{33}^4 \end{bmatrix},$$

де

$$S_{11}^4 = S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1, \quad S_{12}^4 = S_{12}^3 - H C_2,$$

$$S_{13}^4 = S_{13}^3 - \frac{1}{2} \beta C_1^T c, \quad S_{23}^4 = S_{23}^3 - \frac{1}{2} \beta C_2^T c.$$

Як випливає з попереднього, умовою абсолютної стійкості системи (2.1) є додатна визначеність матриці $S_4[G, H, C_1, C_2, \beta, v, \zeta]$.

А, як випливає з твердження 2.1, умовою додатної визначеності матриці $S_4[G, H, C_1, C_2, \beta, v, \zeta]$ є додатна визначеність матриці

$$M_4 = \begin{bmatrix} S_{11}^4 & S_{12}^4 \\ (S_{12}^4)^T & S_{22}^4 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

і виконання нерівності

$$s_{33}^4 - \left((S_{13}^4)^T, (S_{23}^4)^T \right) \begin{bmatrix} S_{11}^4 & S_{12}^4 \\ (S_{12}^4)^T & S_{22}^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{13}^4 \\ S_{23}^4 \end{bmatrix} > 0. \quad (2.10)$$

Згідно Твердження 2.2 з умов (2.6), (2.7) маємо

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} S_{11}^4 & S_{12}^4 \\ (S_{12}^4)^T & S_{22}^4 \end{bmatrix}^{-1} = \\
& = \begin{bmatrix} (S_{11}^4)^{-1} + & - (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} \\ + (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} & - (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} \\ - R^{-1} (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Тому нерівність (2.10) може бути переписана у вигляді $\Delta_4^1 > 0$, де

$$\begin{aligned}
\Delta_4^1 &= s_{33}^4 - (S_{13}^4)^T \times \\
& \times \left\{ (S_{11}^4)^{-1} + (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} \right\} (S_{13}^4) + \\
& + (S_{13}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} S_{23}^4 + \\
& + (S_{23}^4)^T R^{-1} (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{13}^4 - (S_{13}^4)^T R^{-1} S_{23}^4. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Розглянемо умову додатної визначеності матриці (2.9). Знов використовуючи Твердження 2.1, висловимо її у вигляді додатної визначеності матриць

$$S_{11}^4, \quad S_{22}^4 - (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4.$$

Таким чином, для додатної визначеності матриці $S_4[G, H, \beta, v, \zeta]$ потрібна додатна визначеність матриць

$$\Delta_4^1 = S_{11}^4, \quad \Delta_4^2 = S_{22}^4 - (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4$$

і виконання нерівності (2.11).

Список використаних джерел

1. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. – 208 с.
2. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с.
3. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Дослідження інтервальної стійкості диференціальних систем регулювання із запізненням за допомогою функціоналів Ляпунова-Красовського // Вісник Київ. Ун-ту. Серія: Фіз.-мат. Науки, вип.3, Київ, 2009. – С.212-221.
4. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією. – К.: ДП «Інформац.-аналіт. Агентство», 2012. – 73 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. – 552 с.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

Надійшла до редколегії 13.03.12

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.039.8:621.384.2

Асламова Л.І., к.б.н., с.н.с., Меленецька Н.В.,
к.б.н., м.н.с., Мірошніченко Н.С., к.т.н., м.н.с.,
Грабовська Е.В., к.ф.-м.н., м.н.с.**Оптимізація режимів роботи цифрових
рентгенодіагностичних комплексів для
зменшення доз опромінення пацієнтів***Запропоновано зменшення дозового
навантаження на пацієнтів та одержання
високоякісних знімків під час обстеження
органів грудної клітки шляхом оптимального
поєднання цифрового приймача рентгенівських
зображень та їх цифрової обробки.**Ключові слова: цифровий приймач
рентгенівського зображення, пацієнт, дозове
навантаження.*

*E-mail: radbez@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Сучасна медична діагностична радіологія рухається шляхом поетапної заміни плівкової радіографії на цифрову. Основні переваги цифрових рентгенівських систем забезпечуються детектуванням зображення, його подальшою обробкою та візуальним представленням [3]. Такі системи роблять швидкою, зручною та узгодженою роботу лікарів-діагностів та рентгенлаборантів в межах медичної установи, а також забезпечують тривале зберігання отриманої інформації та швидкий доступ до неї в разі потреби. Окрім того, потрібно відзначити безперечний позитивний внесок цифрових технологій в вирішення проблем, пов'язаних з отриманням дозового навантаження пацієнтами під час рентгенологічного обстеження. Серед діагностичних процедур щорічне флюорографічне обстеження робить вагомий внесок у формування індивідуальної ефективної дози, підвищуює ризик виникнення стохастичних ефектів у населення [14,15]. Таким чином, модернізації в сфері технологій виробництва рентгенівських апаратів здійснюються спираючись на міжнародний принцип ALARA (as low as reasonably achievable) (ICRP 1977 p.) і, відповідно, мають враховувати зміни параметрів функціональних вузлів радіографічних систем, дотримуючись розумного балансу між отриманням якісних та інформативних знімків

Aslamova L.I., PhD, Melenevskaya N.V., PhD,
Miroshnichenko N.S., PhD, Grabovska E.V., PhD
Aslamova L.I., PhD, Melenevskaya N.V., PhD,
Miroshnichenko N.S., PhD, Grabovska E.V., PhD**The optimization of operating modes in
digital diagnostic X-ray complexes to reduce
dose delivered to patient***The obtaining of high-quality images and
reduction of x-ray dose on patient undergoing chest
screening due to optimal combination of digital
receiver and its further software processing were
suggested.**Key Words: digital receiver, x-ray imaging,
patient, dose reduction*

для успішного встановлення або підтвердження діагнозу та дозовим навантаженням на пацієнта.

Одержання відносно якісного візуального представлення патології рентгенівськими системами протягом багатьох років здійснювалось за допомогою різних додаткових пристроїв та методик [1]. Так, в традиційній медичній практиці на сьогоднішній день широко використовуються відсіювальні решітки. Останні запобігають потраплянню на детектор зайвих квантів, які розсіюються тілом пацієнта та створюють небажані шуми, що в свою чергу призводить до отримання неякісних знімків з низькою яскравістю та контрастом. На теперішній час існує широкий ринок відсіювальних растрів з різним набором геометричних та якісних параметрів, складом матеріалу [4,19], які дозволяють, не збільшуючи суттєво величину струму або напруги на рентгенівській трубі, значно покращувати зображення. Але саме застосування решітки все одно вимагає досить високої експозиційної дози, тому нагальним є пошук і інших альтернативних методик. Такою методикою, наприклад, є використання повітряного проміжку, у поєднанні з алюмінієвими фільтрами та низькими величинами напруги на рентгенівській трубі [5,6].

З іншого боку, одним з функціональних вузлів рентгенівської системи, який забезпечує

отримання зображення, і зокрема визначає необхідну дозу опромінення, є цифровий приймач рентгенівських зображень [7,8]. На сьогоднішній день існує ряд приймачів, які широко застосовуються в рентгенодіagnostичних системах: детектори на рентгенівських електронно-оптичних перетворювачах, приймачі з запам'ятовуючим фотостимулюючим рентгенівським екраном, пласкі панелі на основі аморфного кремнію, детектори "екран – об'єктив – ПЗЗ-матриця", пласкі панелі на основі аморфного селену та пласкі панелі з голковим цезій-йодним екраном. Серед критеріїв оцінки роботи детектора (чутливість, просторова роздільна здатність, швидкість отримання інформаційних знімків та число градаційної щільності), основним – є його квантова ефективність [7]. Для усунення негативного впливу на цей показник, зокрема, необхідно коректно підбирати ефективність растру та розміри поля опромінення на об'єкті [4]. Через те, що мінімальне променеве навантаження на пацієнта визначається, окрім інших параметрів, розмірами об'єкту досліджуваної неоднорідності і товщиною тіла пацієнта в цій області, чутливість приймача обумовлює можливості отримання дійсно якісного зображення об'єкту при меншій дозі опромінення [7,2]. Потрібно відмітити, що за показником квантової ефективності при використанні відносно високих напруг (при обстеженні органів грудної клітини людини, зокрема при флюорографії) пласкі панелі з цезій-йодним екраном випереджають панелі з аморфного селену, які більш придатні для низьких напруг, наприклад, при маммографії [9-11].

Останнім часом, революційним напрямком в вирішенні проблеми зниження дози опромінення та одночасного покращення якості зображення досліджуваної патології є використання в цифрових рентгенівських системах обробки одержаних знімків програмними засобами [12,13,20]. Подібні технології дозволяють підвищити яскравість та контраст зображень за рахунок зниження рівня шумів. Метою даної роботи було вивчення можливостей підвищення контрасту об'єкту на одержаному зображенні при проведенні його цифрової обробки (за умов дотримання вимог [16-18], щодо дозового навантаження на пацієнта при флюорокопії) та оцінка її переваг, порівняно, з традиційною клінічною методикою з використанням відсіювальної решітки.

Матеріали та методи

Дослідження по вивченню зниження вхідної поверхневої дози (ВПД) під час заміни відсіювального растру на цифрову обробку зображень спеціальними пакетами програм ContextVision CVIE – Teleoptic –XR2 – ADI проводились на базі рентгенівської лабораторії НВО «Телеоптик» м. Київ, Україна.

В якості критерію ефективності перетворення зображення приймали контраст тест-об'єкту у вигляді алюмінієвого диску товщиною 0,5 мм, а також можливість візуально спостерігати аналогічні диски товщиною 0,2 мм та 0,1 мм. Також обов'язковою умовою було отримання зображень з роздільною здатністю не менше 2,5 п.л./мм. Грудна клітина пацієнта моделювалась водним фантомом. Фантом перекривав вхідну площину рентгенівського приймача. Алюмінієві диски розташовувались перед фантомом з боку рентгенівської трубки. Загальна схема експерименту представлена на рисунку 1.

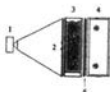


Рис.1 Схема експеримента: 1- рентгенівська трубка, 2 - тест-об'єкт, 3- водний фантом, 4- цифровий приймач рентгенівських зображень, 5- відсіювальна решітка.

В експерименті використовувались рентгенівське устаткування фірми Philips. Рентгенівське випромінювання генерувалося за допомогою рентгенівської трубки (Siemens Bi 125/30/52 R). Вимірювання проводились при постійній напрузі на трубі 81кВп (середній стандарт для флюороскопічного дослідження), відстань фокус-джерело становила 125 см. Використовувалась відсіювальна решітка (SOYEE 11104) з відношенням 10:1, частотою 51 ліній/см, фокусною відстанню 120 см. Знімки отримували на цифровому приймачі (Iopa – R4000) виробництва НВО «Телеоптик». Вимірювання проводились у стандартній проекції на водному фантомі товщиною 12, 15 см. Рентгенівські знімки, отримані для шару води кожної товщини без використання відсіювальної решітки для різних значень сили струму та експозиції. Експозиційна доза вимірювалась за

допомогою дозиметра (Radcal Corporation, тип 2026 Radiation Monitor), іонізаційна камера (20X-60) якого, розташовувалась перед фантомом.

Розрахунки порогової величини контрасту K проводили за формулою:

$$K = \frac{B_o - B_{\phi}}{B_{\phi}} 100\%$$

де B_o – яскравість об'єкту на зображенні; B_{ϕ} – яскравість фону на знімку.

Результати та обговорення

Дослідженнями на фантомі з шаром води 9 см при незмінній напрузі на рентгенівській трубі 81 кВ з величиною струму 40 мА та експозицією впродовж 50мс показано, що контраст зображення становив 3,7%. Після цифрової обробки зображення контраст покращувався у 1,8 рази і становив 6,6%. При застосуванні відсіювальної решітки контраст зображення становив 4,4%, що покращує зображення відповідно 1,2 рази порівняно з вихідними умовами. Після обробки його програмним забезпеченням контраст зростає до 4,6%. Збільшення величини струму до 125 мА призводить до підвищення ВПД опромінення у коефіцієнт Букі 3 та становить 47,6 мР. При цьому контраст зображення, отриманого без застосування решітки становить 4,1%. Цифрова обробка зображення підвищує його контраст у 1,5 разів і становить 6,6%. За умов використання відсіювальної решітки контраст покращується у 1,2 рази і становить 5%, після додаткової цифрової обробки - 8,6%.

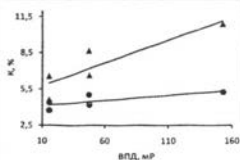


Рис.2 Контраст зображення, який відповідає різним значенням ВПД для товщини фантома 9 см. Крпки – без цифрової обробки, трикутники – з цифровою обробкою.

Зважаючи, що для людини пороговий контраст виявлення об'єкту на зображенні становить 5%, то з результатів досліджень видно,

що цифрова обробка підвищує контраст об'єкту до порогового значення, порівняно з відсіювальною решіткою, наявність якої вимагає значно вищої дози опромінення.

При подальшому збільшенні товщини водного шару фантому до 12 см, підвищували величину струму до 200 мА, час експозиції становив 50 мс. За цих умов контраст отриманого зображення тест-об'єкту складав 3,3%, який при цифровій обробці покращувався у 2,1 рази до 7%. Застосування відсіювальної решітки не дає суттєвого покращення, контраст становить 3,4%, з додатковою обробкою – 3,8%. Збільшення величини струму до 500мА та часу експозиції до 80 мс призводить до підвищення ВПД, тоді як контраст отриманого знімку становить 4,3%, який збільшується у 1,8 рази (7,9%) при цифровій обробці. Хоча використання відсіювальної решітки дозволило отримати контраст з перевищенням 5% порогу, проте цифрова обробка вихідного зображення забезпечила отримання значно кращого результату за тих же умов. Це дає можливість не використовувати відсіювальну решітку. Подальше збільшення струму та часу експозиції (як і у дослідках на фантомі з товщиною шару води 12 см) підвищує ВПД, але значного поліпшення зображення тест-об'єкту не дає.

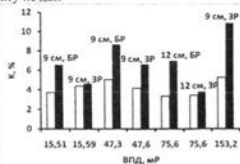


Рис.3 Контраст зображення, який відповідає різним значенням ВПД. Виміри ЗР – з решіткою, БЗ – без решітки. Білим – без цифрової обробки, чорним – з цифровою обробкою.

Висновки

Результати досліджень показують, що цифрова обробка зображень є найбільш сучасним та успішним методом при проведенні діагностичних процедур, зокрема під час обстеження органів грудної клітини пацієнтів.

Використання зазначеного методу дозволяє:

- відмовитись від використання відсіювальної решітки;
- знизити вхідну поверхневу дозу у 1,1...1,8 раз;
- зменшити дозового навантаження на пацієнта без збільшення вартості рентгенівського обладнання;

- знизити колективну дозу опромінення населення та ризики появи стохастичних ефектів;
- покращити якість надання медичних послуг пацієнтам та збільшити можливості ефективної рентгенодіагностики.

Список використаних джерел

1. *Bushberg J.T.* The essential physics of medical imaging / J.T. Bushberg, J.A. Seibert, E.M. Leidholdt, J.M. Boone // 2-nd edition, 2002 / Lippincott Williams and Wilkins. – 933p.
2. *Sutton D.* The textbook of radiology and imaging / D. Sutton – NY: Churchill Livingstone, Vol.1 (6th edition). – 1998. – P. 299 – 301.
3. *Blinov N.N.* Problems of enhancement of diagnostic capacity of medical X-ray equipment / N.N. Blinov, A.I. Mazurov // Biomedical Engineering, 2012 - 45, № 5. – P. 157–161.
4. *Mizuta M.* Comparison of grids for digital imaging with use of a direct-conversion flat-panel detector / M. Mizuta, S. Sanada, H. Akazawa et al. // Radiol Phys Technol. – 2012. – No. 5. – P. 46–52.
5. *Vassileva J.* A phantom approach to find the optimal technical parameters for plain chest radiography / J. Vassileva // The British Journal of Radiology. – 2004. – 77. – P. 648–653.
6. *Vassileva J.* A phantom for dose-image quality optimization in chest radiography / J. Vassileva // The British Journal of Radiology. – 2002. – 75. – P.837–842.
7. *Mazurov A.I.* Parameters of digital detectors and image quality / A.I. Mazurov // Biomedical Engineering. – 2009. – 43, №5. – P.197–199.
8. *Strotzer M.* Routine chest radiography using a flat-panel detector image quality at standard detector dose and 33% dose reduction / M. Strotzer, M. Völk, R. Fründ et al. // American Journal of Radiology 2002. – 178. – P.169–171.
9. *Berliner L.* Super-resolution variable-dose imaging in digital radiography: quality and dose reduction with a fluoroscopic flat-panel detector / L. Berliner, A. Buffa // International Journal of Computer Radiology and Surgery. – 2011. – 6. – P. 663–673.
10. *Völk M.* Dose reduction in skeletal and chest radiography using a large-area flat panel detector based on amorphous silicon and thallium-doped cesium iodide: technical background, basic image quality parameters, and review of the literature / M. Völk, O.W. Hamer, S. Feuerbach, M. Strotzer // European Radiology. – 2004. – 14. – P. 827–834.
11. *Rong X.J.* Comparison of an amorphous silicon/cesium iodide flat-panel digital chest radiography systems: a contrast-detail phantom study / X.J. Rong, C.C. Shaw, X. Liu et al. // Med Phys. – 2000. –No. 28. – P. 2328–2335.
12. *Prokop M.* Principles of image processing in digital chest radiography / M. Prokop, U. Neitzel, C. Shaefer-Prokop // Journal of thoracic imaging. Symposium: Digital chest radiography. – 2003. – 18, №3. P. 148–164.
13. *Karimian A.* Reducing the absorbed dose in analogue radiography of infant chest images by improving the image quality, using image processing techniques / A. Karimian, S. Yazdani, M.A. Askari // Radiat Prof Dosimetry. – 2011. – 147 (1-2). – P. 176–179.
14. Обзор ядерных технологий – 2006. Доклад Генерального директора // Генеральная конференция: пятидесятая очередная сессия (GC(50)/1). МАГАТЭ. – Вена, 2006, 32 с.
15. Доповідь про стан ядерної та радіаційної безпеки в Україні у 2009 році – 2010. – С. 90.
16. Наказ від 18.07.2011р. № 295 Міністерства охорони здоров'я України. "Про створення системи контролю та обліку індивідуальних доз опромінення населення при рентгенодіагностичних процедурах" – 2011.
17. Optimization of the radiological protection of patients undergoing radiography, fluoroscopy and computed tomography / IAEA-TECDOC-1423 / December 2004 – 2004.
18. Commission of the European Communities. Quality criteria for diagnostic images and patient exposure trial, Document XII/268/90. – Brussels: CEC 1990.
19. *Kok C.* Improving digital image quality for larger patient sizes without compromises / C. Kok // Smit Rontgen White paper, February 2008. – 2008.
20. Режим доступу: www.contextvision.com

Надійшла до редакції 22.05.12

УДК 537.52:533.9.082.5:537.872

Веклич А.М., к.ф.-м.н., доц.,
Безпалый О.О.* – студент,
Опанюк І.І., студент,
Прибытько Д.С., студент,
Борещкий В.Ф., к.ф.-м.н., асист.,
Лебідь А.В., аспірант,
Фесенко С.О., аспірант.

Визначення електричних та випромінювальних характеристик електродугового розряду

Дана робота присвячена розробці пристрою для вимірювання електричних та випромінювальних характеристик електродугового розряду з високою часовою роздільною здатністю. Прилад дозволяє реєструвати одночасно миттєві значення напруги, струму та інтегральні інтенсивності випромінювання.

Ключові слова: плазма, електродуговий розряд, мікроконтролер, операційний підсилювач, аналогово-цифровий перетворювач, електричні характеристики, інтенсивність випромінювання

*E-mail: realive52@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Прогрес технології виробництва композитних матеріалів зумовлює їх широке використання в якості електродів та контактів комутуючих приладів електротехнічного призначення (різноманітні реле, комутатори, розмикачі тощо). Посидання у композитних матеріалах компоненти з високою температурою плавлення (молібдена, вольфраму) та компоненти з високою електропровідністю (мідь) дозволяє отримувати високі експлуатаційні характеристики.

Ефективність роботи комутаційних пристроїв визначається ерозійною стійкістю матеріалу електродів і, отже, інтенсивністю процесів переносу маси цього матеріалу у розрядному проміжку. Необхідно зазначити, що кількість парів електродного походження в розряді, який виникає при процесах комутації, залежить як від

A.M. Veklich, Ph. D., Associate Professor,
O.O. Bezpalyy, student,
I.I. Opanyuk, student,
D.S. Prybytko, student,
V.F. Boretskij, Ph.D., Assistant Professor,
A.V. Lebid, post grad. student,
S.O. Fesenko, post grad. student.

Determination of electrical characteristics and radiation intensity of electric arc discharge

This paper deals with the development of device for measurement of electrical characteristics and plasma radiation intensity of electric arc discharge with high time resolution. The simultaneous registration of instant values of voltage, current and integral intensity of radiation is realized by this device.

Key words: plasma of electric arc discharge, microcontroller, operational amplifier, analog-to-digital converter, electrical characteristics, intensity of radiation

структури та складу електродів, так і від електричних параметрів розряду [5,6]. Крім того, електричні параметри розряду (струм, напруга) та інтегральна інтенсивність випромінювання розряду зазнають зміни у часі. Визначення таких параметрів з достатньою часовою роздільною здатністю представляє значний інтерес для з'ясування процесів, що мають місце у дуговому розряді.

На сьогоднішній день відомі промислові вимірювальні пристрої (цифрові вольтметри, осцилографи тощо), які дозволяють реєструвати електричні та випромінювальні параметри різних процесів у широкому динамічному діапазоні з високою часовою роздільною здатністю. Проте, такі пристрої, як правило, мають порівняно високу вартість.

Метою даної роботи є розробка приладу для вимірювання напруги, струму та інтегральної інтенсивності випромінювання електродугового розряду з подальшою її обробкою та візуалізацією на персональному комп'ютері (ПК).

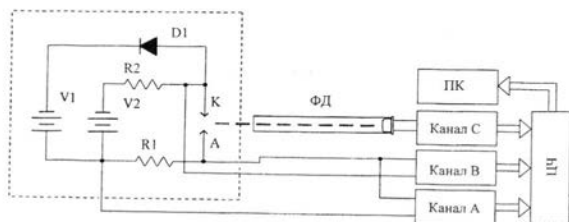


Рис. 1 Схема живлення електродугового розряду та розробленого пристрою

Особливості технічної реалізації

На рис. 1 зображена схема живлення електродугового розряду та розробленого пристрою. Під час спектроскопічних досліджень електродугового розряду використовуються два джерела живлення, позначені V1 і V2.

Джерело V1 слугує для запалювання та підтримання розряду в міжелектродному проміжку K-A (струм 3-5 А). V2 являє собою додаткове імпульсне джерело живлення (струм до 100 А). Вимірювання струму проводиться шляхом визначення напруги на резисторі R1, а напруги – шляхом вимірювання різниці потенціалу між електродами.

Таким чином, розроблений пристрій має два основні канали для вимірювання напруги, подібно до двоканального осцилографа. Проте, в промислових осцилографах входи каналів мають один спільний контакт – спільну «землю». Це може стати на заваді при деяких вимірюваннях, оскільки гальванічно з'єднує вузли схеми, які мають різні потенціали. Розроблений пристрій позбавлений вищевказаного недоліку. Рис. 2 наочно показує як вдалось досягти такого результату. На ньому показані входи каналів А (Bx A1, Bx A2) та В (Bx B1, Bx B2). Зображена на рисунку «земля» є внутрішньою для пристрою. До виходу подільника (B+, B-) – канал В, та (A+, A-) – канал А підключені входи диференціальних підсилювачів. Якщо записати рівняння вузлових потенціалів для даної схеми, то можна показати, що канали будуть незалежними лише за умови однаковості коефіцієнтів ділення напруги. Це є недоліком цієї схеми, оскільки необхідно використовувати прецизійні резистори. Використовувати підстроювальні резистори небажано, оскільки вони можуть мати значний часовий дрейф. Диференціальні підсилювачі побудовані за допомогою операційних підсилювачів із симетричними за опором входами. Для досягнення великого входного опору були використані операційні підсилювачі з малими входними струмами. Оскільки, входні кола пристрою ввімкнуті через високоомні резистори, то це дає змогу створити захист схеми від можливих перенапруг, що й було успішно реалізовано. Оскільки, частоти, що ресетруються даною схемою не дуже високі, то можна не використовувати компенсацію ділників, в іншому випадку необхідно встановлювати ємності паралельно до резисторів R1.

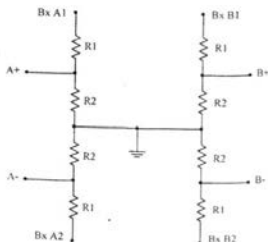


Рис. 2 Схема входного подільника напруги

Для ресстрації інтегральної інтенсивності випромінювання використано фотодіод, який розміщений у металевій трубці (ФД). Невеликий діаметр трубки дозволяє ресструвати випромінювання лише з певної області плазмового стовпа (як правило, середнього його перерізу) та знизити вплив навколишнього освітлення під час ресстрації випромінювання. За результатами пробних вимірювань сигналу фотодатчика на реальному дуговому розряді за допомогою осцилографа С9-8 визначено рівень максимальної напруги на виході фотодіода, який становить 20-25 мВ. За даними цих вимірів вирішено встановити підсилювач напруги для надійної ресстрації випромінювання та зменшення похибки під час оцифровування сигналу. Підсилювальна схема реалізована за допомогою операційного підсилювача загального призначення з високим входним опором за неінвертованою схемою підключення [1]. Фотодіод підключений до третього каналу приладу (канал С), який, у відміню від каналів А та В, не має захисту від перенапруги та не відділений від внутрішньої «землі» приладу високоомними резисторами, а тому його не варто використовувати для вимірювання входної напруги. Така організація схеми цілком виправдана, оскільки канал С використовується лише для вимірювання сигналу з фотодіода, де перенапруга неможлива. Окрім того фотодіод гальванічно роз'язаний з колами живлення електричної дуги.

Цифрова частина (ЦЧ) обробки сигналу (рис. 3) реалізована на: аналогово-цифрових перетворювачах (АЦП), мікроконтролері ATtiny2313 та мікроконтролері з апаратним USB інтерфейсом - AT90USB162 [2].

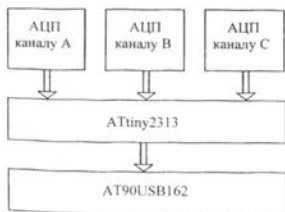


Рис. 3 Блок-схема цифрової частини.

Кожен канал має свій окремий восьмирозрядний АЦП з SPI інтерфейсом. Всі три АЦП підключені до мікроконтролера ATtiny2313, який створює сигнал для тактування АЦП і зчитує результат перетворення. Таким чином, мікроконтролер створює еквідистантні за часом вимірювання для кожного каналу. Зчитані дані мікроконтролер розміщує в своїй оперативній пам'яті. Отримані значення з кожного каналу записуються послідовно одне за одним, а в кінці записується номер виконаної вибірки – "маркер часу". Мікроконтролер ATtiny2313 за допомогою паралельної шини з'єднаний з мікроконтролером AT90USB162, що дає змогу швидко, окремими байтами, передавати дані з оперативної пам'яті мікроконтролера ATtiny2313 до AT90USB162. Залиш та зчитування оперативної пам'яті мікроконтролера ATtiny2313 реалізований за принципом буфера FIFO. Таким чином, дані в оперативну пам'ять записуються та зчитуються по колу, а якщо буфер переповнений, то нові дані записуються поверх старих, що призводить до втрати даних. Організація схеми з двома мікроконтролерами цілком виправдана, оскільки AT90USB162 першочерговим пріоритетом має обслуговування шини USB, а тому не зможе обслуговувати АЦП з еквідистантними часовими проміжками. Використання буфера FIFO дозволяє створити обмін даними в асинхронному режимі. Разом зі значеннями напруги каналів зчитуються маркери часу, що, в разі втрати даних, дає змогу встановити часову відповідність виміряних даних, та допомагає зів'язати вимірні дані з відповідним каналом приладу з дуже високою імовірністю.

Для більшої ефективності написаного коду мікроконтролер ATtiny2313 запрограмований мовою асемблер, що дозволяє використовувати контролер меншої продуктивності, зменшуючи тим його вартість [3].

Використаний для передачі даних на персональний комп'ютер, мікроконтролер AT90USB162 запрограмований мовою програмування C [4]. Обмін даними з ПК відбувається за протоколом USB в режимі віртуального COM порту. Реалізація такого обміну з боку контролера здійснена на основі бібліотеки LUFA [7]. Оскільки операційні системи Linux та Windows не є операційними системами реального часу, то однією із проблем є синхронне отримання даних з обох пристроїв. Ця проблема була вирішена за допомогою передачі згаданого вище маркера часу, який забезпечує однозначне співставлення отриманих даних.

Швидкість передачі експериментальних даних у запропонованій установці становила 160 кбайт/с, що відповідає 40 тисяч вимірювань струму, напруги, інтенсивності випромінювання та маркеру часу за 1 секунду. Хоча передавання маркеру часу завантажувало шини, проте це дозволяє з високою імовірністю гарантувати достовірність вимірних даних, що дуже важливо для фізичних досліджень.

Отримані ПК дані оброблялись з використанням спеціального графічного інтерфейсу користувача. Для розробки цього графічного інтерфейсу використовувалась мова програмування високого рівня C++ та кросплатформенна бібліотека Qt [8]. Даний інтерфейс виконує задачу отримання та візуалізації даних з каналів вимірювання електричних параметрів дуги (струму та напруги) та каналу реєстрації інтегральної інтенсивності випромінювання плазми електродугового розряду. Експериментальні дані зображуються на екрані ПК у вигляді графіків залежності відповідних параметрів від часу.

Для візуалізації даних використовувався набір програмних засобів під назвою Qwt [9], які підтримують неперервне промальовування графіків. Запропонований графічний інтерфейс дозволяє візуалізувати отримані дані у режимі наближеному до реального часу (за фактом їх надходження від установи за протоколом USB).

Розроблений графічний інтерфейс користувача дозволяє також зберігати дані у файл з подальшою можливістю повторної візуалізації або подальшої обробки даних в різноманітних математичних пакетах.

Висновки

Розроблено пристрій для вимірювання електричних параметрів та інтегральної інтенсивності випромінювання плазми електродугового розряду з високою часовою роздільною здатністю. Два канали приладу є розділеними один від одного високоомними резисторами та мають захист від можливих перенапруг, що суттєво розширює межі використання запропонованого пристрою. Важливим моментом для фізичних досліджень, до виконання яких може бути залучений даний пристрій, є одночасна реєстрація інтегрального

випромінювання плазми, струму та напруги дугового розряду.

Реалізовано обмін даними між експериментальною установкою та ПК за протоколом USB. Розроблено відповідне програмне забезпечення як для мікроконтролера вимірювальної установи, так і для ПК. Створено графічний інтерфейс користувача для отримання, обробки, збереження та візуалізації даних з експериментальної установи.

За умови незначного удосконалення запропонованої схеми можливе використання розробки як універсального вимірювального пристрою, наприклад, цифрового осцилографа.

Список використаних джерел

1. Левитський С.М. Основи радіоелектроніки. / С.М. Левитський – Київ: Видавничий центр «Київський університет», 2007. – 455с.
2. Белов А.В. Самоучитель разработчика устройств на микроконтроллерах AVR. / А.В. Белов – СПб.: Наука и Техника, 2008. – 544с.
3. Ревич Ю.В. Практическое программирование микроконтроллеров Atmel AVR на языке ассемблера. – 2-е изд., испр. / Ю.В. Ревич – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 352с.
4. Шнак Ю.А. Программирование на языке C для AVR и PIC микроконтроллеров. / Ю.А. Шнак – Корона-Век, МК-Пресс, 2011. – 400с.
5. Cheminat B. Vaporisation d'une anode en argent dans le plasma d'un arc électrique / B. Cheminat, R. Gadaud et P. Andanson. // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1987. – 20 – P. 444–452.
6. Maouhoub E. Influence of carbon dioxide on the radial temperature distribution in an argon arc / E. Maouhoub // J. Plasma Physics. – 2000. – 63. – P. 97–114.
7. Official LUFA Library Documentation. - <http://fourwalledcubicle.com/files/LUFA/Doc/111009.html/>.
8. Qt - A cross-platform application and UI framework. - <http://doc.qt.nokia.com/>.
9. Qwt (Qt Widgets for Technical Applications) User's Guide. - <http://qwt.sourceforge.net/>.

Надійшла до редакції 15.05.12

УДК 535.5:621.029.7

Григорук В.І., д. ф.-м. н., проф., Онисько Ю.Т.,
пр. інж., Слінченко* Ю.А., к. ф.-м. н.**Субхвильові кварцові волоконні
світловоди - створення та застосування**

В роботі була відпрацьована методика виготовлення субхвильових волоконних світловодів та волоконних голок (зондів) з сучасних світловодів: металізованих кварцових, кварц-кварцових, кварц-полімерних. Реалізовані "кварц-повітряні" субхвильові оптичні хвильоводи з радіусами сердцевини $\sim 0,1-0,5$ мкм та довжинами до 15 мм, наведено їх характерне зображення. Створено низку волоконних зондів - з робочими довжинами від 20 мкм до 2 мм, що використовуються, зокрема, у ближньопольових скануючих оптичних мікроскопах та дослідженнях.

Ключові слова: оптичне волокно, спеціальні волоконні світловоди, субхвильові світловоди, волоконні зонди, оптичне ближнє поле.

*E-mail: yas@univ.kiev.ua

Статтю представив проф., д. ф.-м. н. Данилов В.В.

Вступ

Прогрес волоконної оптики призвів до виникнення її нового напрямку, пов'язаному зі спеціальними волоконними світловодами (СПВС) [1]. Через необхідність отримання світловодів з наперед заданими фізичними характеристиками для фундаментальних досліджень та практичних застосувань СПВС є досить затребуваним класом волоконних світловодів (ВС). Вони використовуються у датчиках фізичних полів [1], у нанофотоніці [2], у елементах та пристроях ВОЛЗ [1], волоконно-оптичних лазерах [4] тощо.

Окремо, останнім часом, у оптиці ближнього поля широко досліджується такий різновид СПВС, як субхвильові ВС [7,8,10]: розподіл полів, їх вплив на речовину тощо.

Метою роботи є відпрацювання та спрощення методики створення субхвильових

Grygoruk V.I., Doct. sci., Prof., Onys'ko Y.T., pr.
eng., Slinchenko Y.A., Ph.D.**Physical aspects of two-dimensional image
transmission through optical fibers**

Physical principles of image transmission through optical fibers have been analysed in the paper. Two-way transmission of two-dimensional image (intensity distribution of transversal section of exciting beam radiation) through multimode optical fiber has been realized by use of phase conjugation by stimulated Brillouin scattering. Estimation of possibility of one-way transmission of the image through multimode optical fiber has been made.

Key Words: optical fiber, special fibers, subwavelength fibers, tapered fiber, optical near-field.

волоконних світловодів та волоконних зондів з сучасних типових волоконних світловодів.

Теорія

Субхвильові волоконні світловоди (СБВС) – це СПВС, характерні поперечні розміри (діаметри d) яких менші, або значно менші, за довжину хвилі випромінювання λ . Відповідно, серед СБВС розрізняють мікро- [5] та нановолокна [6]: $d < \lambda$ і $d \ll \lambda$ відповідно. Вони являють собою зазвичай "кварц-повітряні" ВС, у яких роль сердцевини відіграє кварцове волокно, а оболонки – оточуюче її (серцевину) повітря.

Кварцові СБВС виготовляються з кварц-кварцових чи з кварц-полімерних волокон (з попередньо видаленою оптичною оболонкою) шляхом нагрівання та витягування. При цьому утворюються два біконічні переходи між якими знаходиться СБВС необхідних розмірів, які

контролюються візуально за допомогою оптичного мікроскопа. Контроль товщини СБВС при автоматизованому способі виготовлення, можна здійснювати за допомогою вихідної потужності випромінювання, як це запропоновано у роботі [7] та зображено на рис. 1. При подовженні ВС (унаслідок нагрівання та розтягування) до 6,75 мм радіус ВС $a > 0,23$ мкм, при цьому на довжині хвилі 0,63 мкм окрім основної моди HE_{11} у ВС присутні TE_{01} та TM_{01} моди – відбувається биття між ними. При подовженні більше 6,75 мм реалізується одномодовий режим. Коли подовження ВС сягає 7,6 мм і більше, радіус середини стає меншим 0,2 мкм і потужність у ВС починає згасати.

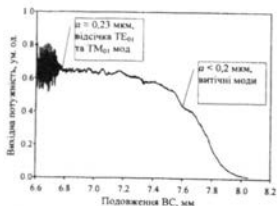


Рис. 1. Зміна вихідної потужності при виготовленні СБВС; $\lambda = 0,63$ мкм.

Останнім часом СБВС активно вивчаються і є найбільш поширеними у дослідженнях ближнього оптичного поля [8], нелінійних явищ [9], створенні волоконних датчиків (ВОД) фізичних полів [12].

Окремим класом СБВС є волоконні зонди (ВЗ) чи волоконні "голки" (ВГ) – волокна, що звужуються (tapered fiber): їхній діаметр плавно зменшується до нанорозмірів. Вони є досить затребуваними у практичних застосуваннях [3], зокрема, у ближньо-польових скануючих оптичних мікроскопах (БСОМ), та дослідженнях [7,10,11].

Отже, актуальним завданням є відпрацювання спрощеної методики виготовлення СБВС та ВГ з сучасних кварцових ВС для отримання якісних зразків та проведення,

зокрема, досліджень впливу їх ближнього оптичного поля на речовину.

Експериментальні результати та їх аналіз

СБВС виготовлялися шляхом нагрівання та витягування сучасних кварц-кварцових ВС (що використовуються для потреб зв'язку) діаметром 125 мкм, з попередньо видаленою захисною оболонкою, чи з кварц-полімерних ВС, з попередньо видаленою оптичною оболонкою, з діаметром кварцового волокна 200 мкм. В результаті – утворювалося два біконічні переходи між якими знаходилися СБВС потрібних розмірів. Контроль поперечних розмірів виконувався візуально, з допомогою оптичного мікроскопа.

За допомогою модифікованого зварювального апарату для ВС КСС-111, було відпрацьовано методику та виготовлені СБВС з радіусами $\sim 0,1 \pm 0,5$ мкм та довжинами до 15 мм. Характерне зображення, отримане за допомогою скануючого електронного мікроскопа (СЕМ), виготовленого СБВС наведено на рис. 2.

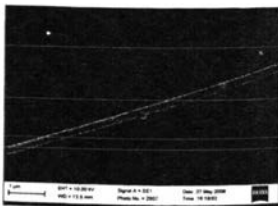


Рис. 2. СЕМ-зображення СБВС.

ВГ виготовлялися з металізованих кварцових, кварц-кварцових, кварц-полімерних ВС діаметрами 125 + 200 мкм, з попередньо знятими зовнішніми оболонками, за технологією аналогічною до виготовлення СБВС, описаною вище. Довжини таких ВГ були від 20 мкм до 2 мм. На рис. 3 наведено загальне, а на рис. 4 ($a - z$) типові СЕМ-зображення ВГ, виготовлених методом нагрівання та розтягування.

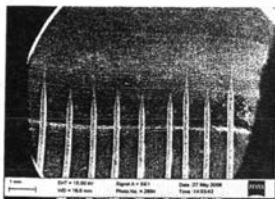


Рис. 3. Загальне СЕМ-зображення ВГ.

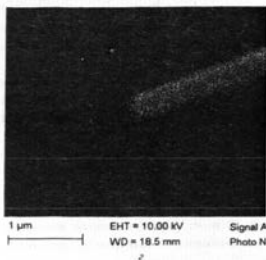
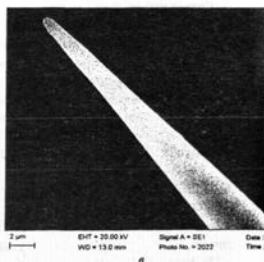
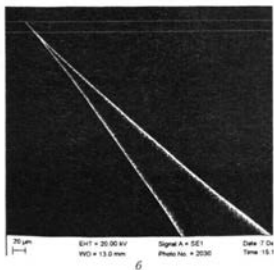
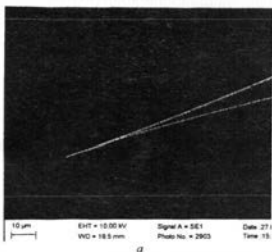


Рис. 4. а, б, в, г – типові СЕМ-зображення ВГ.

На відміну від аналогічних ВЗ, що виготовляються методом травлення, створені ВГ (рис. 4 а – г) мають симетричну форму та контрольований, адіабатичний стан зменшення діаметра. Це призводить до більшої концентрації інтенсивності у ВС та рівномірного та симетричного поперечного розподілу полів, що є важливим у дослідженнях ближнього поля СВВС [8] та його впливу на речовину [10].

Список використаних джерел

1. *Mendez A. Specialty optical fibers handbook* / A. Mendez, T. F. Morse. – Burlington: Elsevier Academic Press. – 2007. – 841 p.
2. *Prasad P. N. Nanophotonics* / P. N. Prasad. – Hoboken : John Wiley & Sons, 2004. – 415 p.
3. *Жданов Г. С. Ближнепольная оптика* / Г. С. Жданов, М. Н. Либенсон, Г. А. Маршиновский. – С.-Пб. : С.-Пб. ГУ ИТМО, 2007. – 98 с.
4. *Дианов Е. М. Волоконные лазеры* / Е. М. Дианов // УФН. – 2004. – 174, № 10. – С. 1139–1142.
5. *Sumetsky M. Basic elements for microfiber photonics: micro/nanofibers and microfiber coil resonators* / M. Sumetsky // J. Lightwave Technol. – 2008. – 26, № 1. – P. 21–27.
6. *Tong L. Glass nanofibers for micro- and nano-scale photonic devices* / L. Tong, E. Mazur // J. Non-Cryst. Solids. – 2008. – 354, № 12–13. – P. 1240–1244.
7. *Bures J. Power density of the evanescent field in the vicinity of a tapered fiber* / J. Bures, R. Ghosh // J. Opt. Soc. Am. A. – 1999. – 16, № 8. – P. 1992–1996.
8. Ближнее поле сужающихся волоконных световодов и проявление его воздействие на вещество / В. І. Григоруk, Ю. А. Слинченко, Л. С. Волковинская [та ін.] // Доповіді НАН України. – 2009. – №1. – С. 75–79.
9. *Nonlinear optics in photonic nanowire* / M. A. Foster, A. C. Turner, M. Lipson, A. L. Gaeta // Opt. Express. – 2008. – 16, № 2. – P. 1300–1320.
10. *Слинченко Ю. А. Осаждение металлических и углеродных структур на поверхности субволновых волоконных игл под действием оптического ближнего поля* / Ю. А. Слинченко, В. І. Григоруk, И. А. Гожик [и др.] // Металлофиз. новейшие технол. – 2008. – 30, № 9. – С. 1203–1213.
11. *Sumetsky M. Optics of tunneling from adiabatic nanotapers* / M. Sumetsky // Opt. Lett. – 2006. – 31, № 7. – P. 3420–3422.
12. *Evanescent field sensors based on fibre optic structures* / I. R. Matias, J. Bravo, J. M. Corres, F. J. Arregui // Sensing technology : 1st int. conf., 21–23 nov. 2005 y. : conf. proc. – North Palmerston (New Zealand), 2005. – P. 598–602.

Надійшла до редколегії 23.04.12

УДК 519.9

Корнієнко М.С., к.ф.-м.н.,
Григорук В.І., д.ф.-м.н., проф.,
Макара В.А., д.ф.-м.н., проф.,
Корнієнко О.М., аспірант,
Шевченко В.Б., к.ф.-м.н.

Спектральні дослідження станів води і множинних резонансів в нано- і мезопористому кремнії

Для нано- і мезопористого кремнію (ПК) вперше досліджені багатократні коливальні резонанси в речовині: води, OH груп, SiO_2 , Si і поверхневих шарів SiH_x , CH_x ($x, Y=1-3$). Встановлені частоти коливань поверхневих і внутрішніх OH груп в SiO_2 і Si, а також різних станів адсорбованої води. Множина резонансів і поєднання різних хімічних зв'язків зумовлює значне зростання хвильових нелінійностей. Це веде до підсилення нелінійної генерації вищих коливальних станів і коливально-електронної взаємодії, що сприяє виникненню різних станів води, зміні процесів окислення ПК і трансформації його гідридного покрову. Досліджена смуга обертоного $2\nu_{\text{OH}}$ адсорбованої води і встановлено сильне зростання ангармонізму.

Ключові слова: пористий кремній, смуги поглинання, коливальні резонанси, OH групи, стани води.

Korniyenko M. Ye., Ph. D.,
Grygoruk V. I., Doct. Sci.,
Makara V. A., Doct. Sci.,
Korniyenko O. M., post grad. stud.,
Shevchenko V. B., Ph. D.

Spectral investigations of water states and multiple resonances in nano- and mesoporous silicon

For nano- and mesoporous silicon (PS) multiple vibrational resonances of five substances: water and OH groups, SiO_2 , Si and surface layers SiH_x , CH_x ($x, Y=1-3$) were investigated at first time. Vibration frequencies of surface and internal OH groups in SiO_2 , Si and also different states of adsorbed water were established. The resonances set and various chemical bonds combination lead to significant increase in wave nonlinearities. This leads to enhancement of nonlinear higher vibrational states generation and vibrational-electron interaction that promotes creation of different water states, changes in oxidation process in PS and transformation of it hydride cover. Were studied by us the water adsorption band overtone $2\nu_{\text{OH}}$ and strong increase of it anharmonicity was found

Key Words: porous silicon, absorption bands, vibrational resonances, OH groups, water states.

E-mail: skorney@list.ru, nikkorn@univ.kiev.ua
Статтю представив д.ф.-м.н. Данілов В.В.

Вода відіграє важливу роль в окисленні поверхні пористого кремнію (ПК), формуванні його оксидних і гідратних шарів, підвищенні ефективності фотолітумінісценції [2,7]. Раніше нами були досліджені різні стани води у ПК із послабленими і підсиленими водневими зв'язками (ВЗ) в порівнянні з об'ємною водою [2,7]. В нано-ПК розміри кристалітів 1-2 нм, а у мезопористому - біля 20 нм, а пори збільшені до 50 нм. Малі розміри пор і нанокристалітів, а також велика частина поверхневих областей речовини ведуть до значного росту ангармонізму коливальних мод і посиленню ролі їх нелінійної резонансної взаємодії. Через генерацію вищих коливальних станів, коливальні рухи атомів нерозривно пов'язані з електронними станами і типами хімічних зв'язків. В активних

поверхневих областях здійснюється дисоціація молекул H_2O і CO_2 і відбувається окислення поверхні Si. Наявність найбільш високо-частотних коливань зв'язків O-H у адсорбованій воді, а також поверхневих і внутрішніх OH груп у ПК, приводить до додаткового росту значних нелінійних сприйнятливостей наноструктурних середовищ. Через гідрофобність поверхні Si, вода на початкових етапах зв'язування з ПК існує в двох станах: слабозв'язана вода з максимумом ν_{OH} смуги в області 3700 cm^{-1} і близька за властивостями до об'ємної води ($\nu_{\text{OH}}=3400 \text{ cm}^{-1}$). При перебуванні ПК 2-3 дні у рідких H_2O і D_2O , а також при тривалому окисленні на повітрі (декілька років) слабозв'язана вода трансформується у сильнозв'язану, для якої максимума поглинання зміщуються до 2900 cm^{-1} .

© М.С. Корнієнко, В.І. Григорук,
В.А. Макара, О.М. Корнієнко,
В.Б. Шевченко 2012

Після термовакуумного відпалу ($T = 570\text{K}$) знову зростає вміст слабозв'язаної води. Різні стани води приводять до відмінностей у процесах окислення ПК. Це виявляється у зміні тонкої структури (ТС) смуг поглинання і відношення ζ максимумів валентних ($1100\text{--}1200\text{ cm}^{-1}$) і деформаційних (460 cm^{-1}) смуг структурних тетраедрів SiO_4 шару SiO_2 . Для об'ємного зразка плавненого кварцу чи при довготривалому окисненні ПК на повітрі $\zeta_v = 2.62$, а при

компоненти цієї ТС пов'язані з найбільш колективними збудженнями, делокалізованими по багатьом хімічним зв'язкам, а бічні компоненти – з більш локалізованими збудженнями [3]. ФС хімічних зв'язків може спостерігатись разом з формуванням фононної зонної структури і LO-TO розщеплення Δ_{LT} [1].

Властивості гідридного шару SiH_x ($x=1\text{--}3$) також можна характеризувати відношенням η максимумів смуг поглинання валентних ν_{SiH}

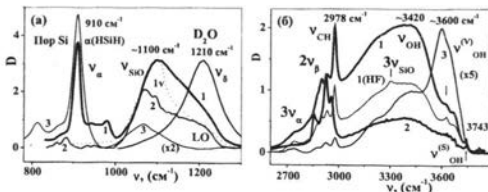


Рис.1. Смути поглинання деформаційних коливань ν_a зв'язків $\alpha(\text{HSiH})$ ПК і ν_{SiO} оксидного шару (а) і ν_{OH} води для зразків нано-ПК товщиною 120 мкм (1) і 20 мкм (2) і мезо-ПК (3), а також зразка 1 після його промивки у 5%-му розчині HF (1(HF)) (б) і нормована на максимум смуга поглинання плавненого кварцу (1v) (а).

перебуванні ПК ~ 1 годину у воді отримусмо менше значення $\zeta \approx 1.7$. При окисненні 2-3 дні у звичайній або важкій воді ζ відповідно дорівнює 2.06 і 3.18. При окисненні ПК у кислому (водний розчин HCl) або лужному (водний розчин NaOH) середовищі, а також довготривалому окисненні в атмосфері насичених парів H_2O отримасмо великі значення $\zeta = 4.2\text{--}6.7$, що вказує на суттєво іншу структуру окисного шару, зокрема різну зміну дипольних моментів при валентних і деформаційних коливаннях тетраедрів SiO_4 . Таким чином, величина ζ являє собою кількісну характеристику структури і властивостей перехідних фаз оксидного шару з розгалуженою сіткою Si-O-Si зв'язків, розподілених в поверхневому шарі нанокристалітів кремнію.

Зокрема сітка Si-O-Si зв'язків може мати фрактальну структуру. На фрактальну структуру (ФС) оксидного і гідридного шарів вказує специфічна ТС валентних і деформаційних смуг поглинання, що містять 3-5 спектральних компонент [8]. Центральні інтенсивні $\alpha(\text{HSiH})$ (910 і 980 cm^{-1}) (див. рис.1а). Спостерігається кореляція у поведінці величин ζ і

($\sim 2100\text{ cm}^{-1}$) і деформаційних коливань ν_a зв'язків η при різних сценаріях окислення поверхні ПК – більшим значенням ζ відповідають більші значення η . Це вказує на загальні складні квантово-хімічні механізми змін властивостей поверхні нано-ПК.

Найбільш сильні смути поглинання ν_{SiO} антисиметричних дипольних коливань SiO_4 (представлення F_2 групи Td [1]) оксидного шару нано- і мезо-ПК, а також нормована смуга ν_{SiO} плавненого кв ах інтенсивних смуг ν_a , у мезо-ПК смуга ν_{SiO} значно слабкіша ніж у нано-ПК, що пов'язано з меншою інтенсивністю процесів окислення через меншу розвиненість поверхні. Також треба відмітити більшу ширину смуг ν_{SiO} добре сформованих оксидних шарів у нано-ПК порівняно з об'ємним зразком плавненого кварцу і більшу інтенсивність високочастотного плеча, що відповідає LO моді. З ростом товщини оксидного шару нано-ПК спостерігалось зростання величини Δ_{LT} від 26 до 50 cm^{-1} , що вказує на підсилення колективних властивостей

оксидного шару (для об'ємних зразків кварцу $\Delta_{13}\text{C} > 10^2 \text{ см}^{-1}$). Оксидне покриття ПК відіграє особливу роль при взаємодії води з ПК [4,5,8].

На відміну від роботи [2], де вивчалися тонкі зразки ПК (8-20 мкм), більші товщини досліджуваних зразків нано-ПК (120-300 мкм) дали змогу отримати суттєво більш інтенсивні валентні смуги води ν_{OH} (рис.16) і чітко

нізму води у ПК, що підтверджує аномально сильні коливальні нелінійності наноструктур. Таким чином в області смуг ν_{OH} , $2\nu_{OH}$ проявляються множинні резонанси 6 речовин: води, OH груп, Si, SiO₂ і поверхневих груп SiH, CH. Потрібно відзначити, що резонанс OH коливань і другого оберту $3\nu_{OH}$ приводить до аномального підсилення поглинання силікатного

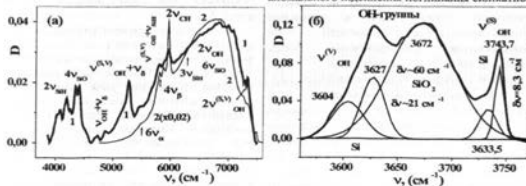


Рис.2. Порівняння виділених у спектрах поглинання смуг обертону $2\nu_{OH}$ валентної моди води для нано-ПК (1) і розрахованої по смугі ν_{OH} (2) (послабленої у 50 разів) (а) і розклад виділеної смуги поглинання внутрішніх і поверхневих OH груп у ПК і його оксидному покритті на спектральні компоненти гаусової форми (б).

спостерігати обертон $2\nu_{OH}$ (рис.2а). Це дозволило добре вивчити внутрішню структуру смуг води, пов'язану з множинною резонансів різних коливань, а також ідентифікувати слабкі компоненти поверхневих і внутрішніх ОН-груп, що показано на рис.1б. В області валентної смуги води ν_{OH} проявляються резонанси $\nu_{OH}+3\nu_{H_2O}=3\nu_{H_2O}$, $\nu_{OH}+\nu_{H_2O}=2\nu_{H_2O}$, де - ν_{H_2O} –деформаційне коливання зв'язків $\beta(HCH)$. В області валентних коливань ν_{SiO} оксидного шару потрапляє обертон $2\nu_{SiO}$, де $\nu_{SiO}=520\text{ см}^{-1}$ - сліда оптична мода кристалічного Si. В результаті резонансу $\nu_{OH}+3\nu_{H_2O}$ в область валентної смуги води потрапляє обертон $6\nu_{H_2O}$.

Ще більша кількість резонансів спостерігається в області смуги обертогу води $2\nu_{\text{OH}}$, що ілюструється рис.2а. Множина коливальних резонансів в широкій спектральній області важлива для нелінійної взаємодії хвильових збуджень різних середовищ і прояву нових функціональних можливостей. Відношення максимумів смуг ν_{OH} і $2\nu_{\text{OH}}$ для води у ПК дорівнює 50 порівняно з 990 для об'ємної води. Це свідчить про аномальний ріст ангармо-

середовища в області цього обертона.

Множинні резонанси сприяють суттєвому зростанню хвильових нелінійностей в коливальній області. Це приводить до ефективної генерації вищих коливальних станів в результаті нелінійної резонансної взаємодії коливальних мод і підсилення коливально-електронної взаємодії. Важливість багаточастинкових нелінійних хвильових процесів у нанофізиці підтверджується спостереженням видимої фотолумінесценції біля 1.8 eV при ІЧ збудженні ПК в області 4.85 мкм, що потребує підвищення частоти збуджуючого випромінювання мінімум у 7 разів.

В результаті резонансної взаємодії деформаційної моди D_2O $\nu_6=1210$ cm^{-1} з LO модою SiO_2 (рис.1а) швидкість окислення у технічній важкій воді (1% H_2O) більша ніж при контакті ПК із звичайною водою, де такий резонанс відсутній ($\nu_6=1640$ cm^{-1}). В зв'язку з цим спостерігається парадоксальний результат — амліст H_2O у ПК більший при зануренні його у технічну D_2O ніж у звичайну H_2O . Тривала дія слабкого магнітного поля ($B=0.17$ Т, 7 днів)

навпаки, затримує окислення і призводить до послаблення ВЗ у воді.

Для адсорбованої води у пористому склі (пори 7,8 нм) і силікагелі інтенсивності смуг ν_{OH} у спектрах КР і ІЧ поглинання значно зменшуються, а смуги вищих коливальних станів ($4\nu_{OH} + \nu_2$ і $5\nu_{OH}$ та ін.) підсилюються у 10^2 - 10^4 раз [4,5,8], що свідчить про сильну модифікацію електронних станів води в результаті колиально-електронної взаємодії. Це підтверджується спостереженням нових низькоенергетичних електронних смуг поглинання в забороненій зоні діелектриків [5,6].

На високочастотних крилах смуг ν_{OH} , $2\nu_{OH}$ спостерігаються слабкі смуги поглинання поверхневих і внутрішніх ОН груп оксидного шару SiO_2 , а також кристалітів Si, які частково представлені на рис.26. Смуги 3744 і 3634 cm^{-1} відповідають групам ОН на поверхні SiO_2 , а більш широка смуга 3672 cm^{-1} – внутрішнім ОН групам шару SiO_2 , що точно відповідає

положенню ОН смуги в плавленому кварці. Спостереження сумарних коливальних тонів води і Si в області 3890 cm^{-1} вказує на проникнення ОН груп чи молекул H_2O в об'єм нанокристалітів. У зв'язку з цим ми відносно вузькі смуги 3627 і 3604 cm^{-1} відносимо до нанокристалітів Si. У мезо-ПІК інтенсивність цих внутрішніх ОН груп досягала максимуму (рис.16).

В цілому отримані результати показали суттєві відмінності води в нанопорах і динаміку формування колективних властивостей тонких шарів SiO_2 на поверхні нанокристалітів Si. Показано, що зміною умов окислення можна суттєво змінювати властивості окисного і гідридного покрів ПІК, зокрема їх фрактальні властивості. Множинні коливальні резонанси ряду нанодисперсних речовин дозволяють отримати аномально високі нелінійні сприйнятливості, що веде до сильних колиально-електронних взаємодій і нових станів речовини.

Список використаних джерел

1. Свєрдлов Л.М. Колебательные спектры многоатомных молекул / Л.М. Свєрдлов, М.А.Ковнер, Е.П. Крайнов, – М., Наука, 1970, 559 с.
2. Korniyenko M.Ye. Detection of different states of water and oxide layer in porous silicon by IR spectroscopy / M.Ye. Korniyenko, V.A. Makara, V.B. Shevchenko, A.M. Korniyenko, T.S. Veblyaya, M.M. Makhno // Phys. Stat. Sol.(c). 2007. 4, No. 6, P.2131–2135.
3. Шалаев В.М. Оптические свойства фрактальных кластеров (восприимчивость, гигантское комбинационное рассеяние на примесях) / В.М. Шалаев, М.И. Штокман // ЖЭТФ.- 1987.- 92.- С.509-521.
4. Корниенко Н.Е. Состояния оксидного, гидридного и гидратного покровов пористого кремния / Н.Е. Корниенко, В.А. Макара, Т.С. Вебляя, В.Б. Шевченко // Сборник докладов Международной научной конференции «Актуальные проблемы физики твердого тела» (ФТТ-2007). 2007. Минск, 2, С.114-117.
5. Корниенко Н.Е. Аномальное возрастание ИК поглощения для последовательности обертонов дипольной моды $\nu_1(F_2)(SiO_4)$ монокристаллического и дисперсного кварца / Н.Е. Корниенко, там же, 2, С.174-176.
6. Корниенко Н.Е. Эффекты сильного фонон-электронного взаимодействия. Открытие электронных полос нового типа / Н.Е. Корниенко // Вестник Киевск.унив.Сер.физ.-мат. науки. 2006. №3. С.489-499.
7. Корниенко Н.Е. Влияние воды на фотолюминесценцию нанопористого кремния / Н.Е. Корниенко, В.А. Макара, О.А. Коротченко, В.Б. Шевченко, А.А. Подольн // Тезисы II Международной научной конференции «Наноструктурные материалы-2010: Беларусь-Россия-Украина» НАНО 2010, 2010 г., Киев, Украина, С. 428.
8. Корниенко Н.Е. Фрактальная структура гидридного и окисного покрова пористого кремния / Н.Е. Корниенко, В.А. Макара, В.Б. Шевченко, А.Н. Корниенко, Т.С. Вебляя // III Украинская научная конференция физики полупроводников, Украина, Одесса, 17-22 июня 2007 г, С.200.

Надійшла до редколегії 17.05.12

УДК 537.86/.87

Мойсєсенко В.А., аспірант

Про збудження магнітостатичних хвиль мікросмужковими антенами

В роботі теоретично та експериментально досліджено збудження магнітостатичних хвиль (МСХ) в тонких плівках залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ) різної товщини за допомогою мікросмужкових антен. Спираючись на теоретичні знання про спектри та фактор збудження МСХ мікросмужковими антенами-перетворювачами для різних геометрій поля було запропоновано емпіричні вирази для опису АЧХ планарного хвильоводу на базі плівок ЗІГ. Отримані результати добре узгоджуються з експериментальними кривими. Було описано фактори, що впливають на селективність плівок ЗІГ.

Ключові слова: магнітостатична хвиля, залізо-ітрієвий гранат, мікросмужкова антена.

E-mail: v_a_m@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Вступ

В сучасній радіоелектроніці НВЧ є тенденція до мікромініатюризації радіоелектронної апаратури. Використання інтегральної технології дозволяє з успіхом вирішувати прикладні задачі з проектування та створення антенно-фідерних пристроїв з досить високими вимогами по електродинамічним, аеродинамічним, габаритним, ваговим та вартісним параметрам. Особливо гостро такі вимоги стоять для систем обробки інформації зі складною та розгалуженою фідерною системою. Мікросмужкові антени, які виготовляються за технологією інтегральних схем, забезпечують високу повторюваність розмірів, низьку собівартість, малу металосмість, габаритні розміри та масу. Такі антени здатні випромінювати енергію з лінійною, круговою та еліптичною поляризацією, так конструктивно це дозволяє використовувати їх в багатьох частотних режимах [2].

Розробка теорії мікросмужкових ліній та основ їх проектування є важливим самостійним розділом сучасної електродинаміки та техніки НВЧ. Розуміння механізму випромінювання електромагнітних хвиль мікросмужковими структурами та вміння його регулювати допомагає вирішити питання як обмеження

V. A. Moiseenko, Post grad. Stud.

About excitation of magnetostatic waves by microstrip antennas

Excitation of magnetostatic waves (MSW) in thin films of iron-yttrium garnet (YIG) of different thicknesses with using microstrip antennas was theoretically and experimentally researched. Using theoretical knowledge about the spectra and excitation factor of MSW by microstrip antennas for different geometries field the empirical expressions to describe the amplitude-frequency characteristic of planar waveguide based on YIG films was proposed. Such characteristic was in good agreement with experimentally defined. Factors that affect on YIG films selectivity was described.

Key Words: magnetostatic wave, yttrium-iron garnet, microstrip antenna.

випромінювання (в лінійних передачі), так і його стимулювання (в антенах). Мікросмужкові лінії знайшли своє застосування в магнітоелектроніці. Так за допомогою мікросмужкових антен в феритових плівках можна збудити спінові хвилі чи подавати імпульс параметричної накачки на досліджуваній зразок [4]. Сучасні мікросмужкові лінії фотолітографічним методом формуються на поверхні пластини з полікору чи сапфіру [5]. Складаються вони з відповідних ліній, шлейфу для налаштування та самих антен. Характерний імпеданс для таких ліній 50 Ом, добротність – 50 [2].

Досить часто в наукових роботах з дослідження динаміки спінових хвиль в тонких плівках залізо-ітрієвого гранату наводиться значення товщини плівки, на якій проводилися дослідження [3, 5, 7]. Проте ніде не описується доцільність використання плівки саме цієї товщини, а також вплив налаштування мікросмужкової лінії з урахуванням феритового зразка на передаточні характеристики лінії. Тож метою даної роботи є дослідження впливу налаштування мікросмужкової лінії на збудження та розповсюдження спінових хвиль в планарному хвильоводі на базі тонких плівок ЗІГ. Спроби систематизувати практичні знання з

метою використання плівок різної товщини в приладах магнітоелектроніки проводились в циклі робіт J. Adama (див. наприклад [7]).

Теоретична модель

Розглянемо ізотропну ферромагнітну плівку товщиною d необмежену в просторі по двом координатам, як це зроблено в [6]. Запишемо рівняння руху намагніченості у вигляді:

$$\frac{\partial \vec{M}(r, t)}{\partial t} = -[g|\mu_0[\vec{M}(r, t) \times \vec{H}(r, t)]], \quad (1)$$

де $\vec{H}(r, t)$ – ефективне магнітне поле. Оскільки досліджуємо ЗОМСХ та ПМСХ, то розглянемо тільки випадок дотично-намагніченої плівки: $\vec{H}(r, t) \parallel \vec{M}(r, t) \parallel \vec{k}$ та $\vec{H}(r, t) \parallel \vec{M}(r, t) \perp \vec{k}$ відповідно.

Для аналізу скористаємося наближеними рівняннями, що описують спектр спінових хвиль дотично-намагніченої плівки:

$$\omega^2 = (\Omega_M + \omega_M + \omega_M P_{sw}) / (\Omega_M + \omega_M P_{sw} \sin^2 \varphi), \quad (2)$$

де позначено $\Omega_M = \omega_H + \omega_M \alpha k^2$; $\omega_H = |g| \mu_0 H_0$; $\omega_M = |g| \mu_0 M_0$; $k_x^2 = \chi^2 + k^2$, а α – константа обмінної взаємодії.

Розв'язуючи рівняння (1) з урахуванням граничних умов знаходимо коефіцієнти P_{sw} для випадку закріплених поверхневих спінів

$$P_{sw} = \frac{k_x^2}{k_z^2} \left[\frac{\chi - \chi_s}{\chi_s^2 - \chi_s^2} \cdot \frac{2}{k_c d} - \frac{\chi_s \chi_s}{2k_s^2} \cdot F_s \right] \cdot \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \right]$$

та для вільних поверхневих спінів

$$P_{sw} = \frac{k_x^2}{k_z^2} \left[\frac{\chi_s}{\chi_s^2 - \chi_s^2} \cdot \frac{2}{k_c d} - \frac{k_c^2}{2k_s^2} \cdot F_s \right] \cdot \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \right] \times \dots$$

$$\dots \times [(1 + \delta_{sw})(1 + \delta_{sw})]^{1/2},$$

де $F_s = (2/k_c d) [1 - (-1)^n e^{-k_c d}]$. Значення кута φ визначає, який тип хвиль збуджується. Так при $\varphi = 0$ збуджуються ЗОМСХ, а при $\varphi = \pm 90^\circ$ – ПМСХ. Дана проста форма дисперсійних співвідношень у вигляді раділ має фізично та практично цікаві залежності $\omega_s(k_c)$ в неявній формі. Проте для порівняння можна користуватись наближенням і спрощеним варіантом дисперсійних залежностей. Як це запропоновано в роботі [1, 5].

Так відомо, що ЗОМСХ можуть збуджуватись в діапазоні мікрохвильових частот: від ω_H до $\omega_{FM} = \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}$, де $\omega_H = \gamma H_0$, $\omega_M = 4\pi \gamma M_0$, H_0 , M_0 – постійне внутрішнє

поле та намагніченість насичення, γ – гіромагнітна стала (2,8 МГц/Е). Дисперсійна залежність при цьому має вигляд [1, 5]:

$$\omega^2(k) = \omega_H \left(\omega_H + \omega_M \frac{1 - e^{-k d}}{k d} \right). \quad (3)$$

де k – хвильове число. Так само ПМСХ можуть збуджуватись в діапазоні мікрохвильових частот: від ω_{FM} до $\omega_Y = \omega_H + \omega_M/2$, а дисперсійна залежність при цьому має вигляд [5]:

$$\omega^2(k) = \left(\omega_H + \frac{\omega_M}{2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_M}{2} \right)^2 e^{-2k d}. \quad (4)$$

Типовий вигляд дисперсійних залежностей приведено в роботі [6], тому вважаємо, що в даній роботі повторювати їх недоцільно. В даному випадку досить цікавими й інформативними будуть передаточні характеристики плівок, які можна отримати з дисперсійних залежностей. Ці залежності являють собою значення модуля групової швидкості хвиль в залежності від частоти сигналу, та як це показано на Рис. 1 для різних товщин плівок. Як бачимо зліва від частоти ФМР ω_{FM} знаходиться область спектру ЗОМСХ, а справа – ПМСХ. Варто зауважити, що спектр ПМСХ має ділянку з від'ємними значеннями групової швидкості. Оскільки ця ділянка спектру не має впливу на величину спектру спінових хвиль, то можна її не враховувати в подальших розрахунках.

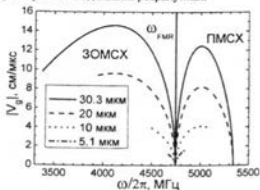


Рис. 1 Передаточна функція для геометрії ЗОМСХ та ПМСХ з плівками товщиною 5.1, 10, 20 та 30.3 мкм. Ширина мікросмушкової антені-перетворювача 25 мкм.

Важливим й досить складним є питання щодо розподілу струму по антені, особливо у випадку розгляду самоузгодженої задачі [3].

Для наших цілей, як впливає з проведених розрахунків, прийнятою виявилася проста

модель, в якій величина F_k максимальна при $k=0$ і досить швидко спадає при збільшенні значення хвильового числа до $k_0 = \pi/a$, де a – ширина мікросмужкової антени-перетворювача.

Наведені чисельні розрахунки базувалися на залежності типу [5]: $F_k = \exp(-(k/k_0)^4)$. З наведених вище міркувань випливає, що максимальне значення хвильового числа k_0 , яке може збудити мікросмужкова антенна-перетворювач шириною 25 мкм буде рівним 1256 см^{-1} . Виходячи з цього зрозуміло, що плівки різної товщини матимуть свою смугу пропускання, яка відрізняється для ЗОМСХ та ПМСХ, це є головним фактором селективності хвильоводів на базі плівок ЗІГ. Пропонуємо ввести величину, яка характеризує відношення ширини спектрів досліджуваних хвиль, як:

$$\eta = \frac{\omega_{\text{ЗОМСХ}}(0) - \omega_{\text{ЗОМСХ}}(k_0)}{\omega_{\text{ПМСХ}}(k_0) - \omega_{\text{ПМСХ}}(0)}, \quad (5)$$

де $\omega_{\text{ЗОМСХ}}$ та $\omega_{\text{ПМСХ}}$ – дисперсійні залежності для ЗОМСХ та ПМСХ відповідно.

Експеримент та обговорення результатів

Експериментальне дослідження проходження сигналів ЗОМСХ та ПМСХ пасивною лінією затримки на базі плівки ЗІГ проводилися на експериментальній секції, яка являла собою пластину з полікору на котрій були фотолітографічно сформовані вхідна та вихідна мікросмужкові антени шириною 25 мкм з підвідними лініями. Відстань між антенами складала 6 мм. Досліджуваний зразок ЗІГ монтувався на мікросмужкових антенах й розміщувався в зазорі постійного магніту, який забезпечував просторово-однорідне магнітне поле. В експерименті використовувались два зразки плівок ЗІГ розмірами 15 мм на 1,5 мм товщиною 5,1 мкм та 30,3 мкм з малими магнітними втратами $\Delta H = 0,3 \text{ Е}$ та $\Delta H = 0,5 \text{ Е}$ відповідно. Величина намагніченості насичення плівок складала приблизно 1750 Гс. Плівки намагнічувались до насичення постійним магнітним полем $H_0 = 960 \text{ Е}$ так щоб забезпечити збудження та розповсюдження в плівці ЗОМСХ та ПМСХ.

Вигляд типової залежності (5) розрахованої за теорією Калінікоса [6] та за спрощеною теорією [1, 5], котра не враховує обмінної взаємодії між спінами наведено на Рис. 2. Відразу помітна різниця теоретичних кривих для дисперсійних залежностей записаних в різному наближенні, що проявляється не тільки в кількісному порядку

величини, а й в куті нахилу кривої до осі. Як бачимо найбільше співпадіння теоретичної залежності з експериментом притаманне для кривої розрахованої за формулою (2), значно гірше співпадіння за формулами (3) та (4). Так маємо дві досить різні криві, з яких видно, що ширини спектрів для плівки товщиною 5,1 мкм майже однакові, а для 30,3 мкм ширина спектру ЗОМСХ більша порядку в 2 рази. Для оцінки використано значення величини розраховані за теорією Калінікоса, а саме для плівки товщиною 5,1 мкм $\eta = 0,62$ раз, а для 30,3 мкм – $\eta = 2,25$ раз.

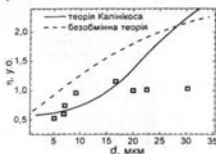


Рис.

2 Відношення ширини спектру ЗОМСХ до ПМСХ для плівок різної товщини розраховані за теорією Калінікоса та за безобмінною теорією. Пряма та пунктирна лінії – теоретичний розрахунок, маркери – експеримент.

Цікавим є те, що експериментальні точки наближаються до значень теорії лише при певних значеннях товщини плівки ЗІГ. При товщинах плівок $d \geq 10 \text{ мкм}$, значення параметра η не перевищує рівня 1, а це значить, що величини ширини спектру обох типів хвиль залишаються сталими й не залежать від зміни товщини плівки ЗІГ. При товщинах $d \leq 10 \text{ мкм}$, помітне співпадіння експерименту з теоретичними розрахунками за формулою (2). Це пояснюється тим, що налаштування пропускної здатності та КСХН експериментальної секції з мікросмужковими антенами проводилась саме для плівки з $d = 5,1 \text{ мкм}$. Тому резонансні властивості секції залишаються сталими для товщин плівок цього порядку й різко обмежуються при перевиконанні певної величини (в нашому випадку 10 мкм), що є технічним фактором селективності досліджуваної секції.

Експериментальне дослідження амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) плівок проводилось за допомогою блоків генератора частоти ГКЧ-57 та індикатора КСХН та ослаблення ЯЗР-67 за стандартною схемою відкаліброваною для дослідження на прохід. Експериментальні залежності АЧХ секції з плівкою для геометрії ЗОМСХ та ПМСХ наведено на Рис. 3. Отримані значення ширини спектру ЗОМСХ та ПМСХ на пів висоті кривої для плівки товщиною 5,1 мкм – 70 МГц та 133 МГц відповідно, а для плівки товщиною 30,3 мкм – 188 МГц та 183 МГц відповідно, похибка вимірювань складала ± 2 МГц.

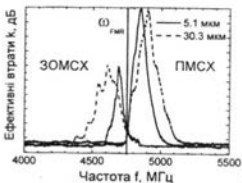


Рис. 3 Експериментальні АЧХ секції для геометрії ЗОМСХ та ПМСХ.

З Рис. 3 видно, що за рахунок різної ефективності збудження ЗОМСХ та ПМСХ максимальна пропускна здатність для геометрії ПМСХ краща на 5-7 дБ за пропускну здатність для геометрії ЗОМСХ. Як бачимо, форма резонансної кривої для секції з мікросмужковими антенами має вигляд „нахиленої“ гаусівської кривої. На кривих АЧХ помітна деяка частотна нарізка, яка виникає через неоднорідність КСХН в частотному діапазоні. Певне неспівпадіння кривих АЧХ для обох типів хвиль можна пояснити невеликою різницею величини постійної намагніченості плівок ЗІГ.

Для теоретичного опису експериментальних АЧХ секції (див. Рис. 3) запропоновано емпіричні вирази, для ЗОМСХ та ПМСХ відповідно

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \exp\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\pi\omega}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\pi\omega}\right)\right), \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \exp\left(\frac{-\omega + \omega_0}{2\pi\omega}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{-\omega + \omega_0}{2\pi\omega}\right)\right), \quad (7)$$

де ω_0 – центральна частота спектру, $\Delta\omega$ – ширина спектру. Частота ω_0 визначається величиною зовнішнього постійного магнітного поля H_0 .

Висновки

Таким чином в роботі теоретично та експериментально досліджено збудження МСХ мікросмужковими антенами. Запропоновано емпіричні вирази (6) та (7) для опису АЧХ планарного хвилеводу на базі плівок ЗІГ. Було встановлено, що на селективність плівки впливає не тільки величина її товщини, а й налаштування мікросмужкових антен. Експериментальні дослідження добре узгоджуються з теоретичним розрахунком. Вважаю, що викладені міркування будуть корисними при побудові приладів магнітоелектроніки.

Список використаних джерел

1. Гуревич А. Г. Магнитные колебания и волны / Гуревич А. Г., Мелков Г. А. – М.: Наука, 1994. – 464 с.
2. Панченко Б. А. Микрополосковые антенны / Панченко Б. А., Нефедов Е. И. – М.: Радио и связь. 1986. – 144 с.
3. Вашковский А. В. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот / Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, – 1993.
4. Зависляк И. В. Физические основы функциональной микроэлектроники / Зависляк И. В., Тычинский А. В. – Киев: УМК ВО, 1989. – 105 с.
5. Васючка В. І. Вплив ефективних параметрів плівок залізо-ітрієвого гранату на характеристики пасивної лінії затримки / Васючка В. І., Лазовський В. В., Мойсесіко В. А., Чумах А. В. // Вісник Київського університету. Сер.: Радіофізика та електроніка. – 2006. – №. 9 – С. 15 – 18.
6. Kalinikos B. A. Excitation of propagating spin waves in ferromagnetic films / Kalinikos B. A. // IEEE Proc. – 1980. – 127. – №. 1. – P. 4–10.
7. Adam J. D. Out of band suppression in MSW filters / Adam J. D. // IEEE Trans. Mag. – 1987. – Mag-23. – No. 5. – P. 3742-3744.

Надійшла до редколегії 10.02.2012

УДК 621.315.592

С.П. Павлюк*, к.ф.-м.н., Р.Ю. Кузьмич, студ.

Стабілізація виділеної потужності при протіканні ударного струму крізь напівпровідниковий діодний кристал

Досліджено ефект стабілізації виділеної потужності при проходженні крізь напівпровідниковий діодний кристал імпульсу ударного струму. Зона стабілізації потужності визначається досягненням температури власної провідності.

Ключові слова: потужність, стабілізація, діод, власна провідність

*E-mail: pps@univ.kiev.ua

Статтю представив Скришевський В.А.

Вступ

В останні роки напівпровідникові кристали почали застосовуватись як тепловиділяючі елементи. Був запропонований та впровадженний у виробництво спосіб збирання силових діодів, при якому через діодний кристал з притиснутими до нього облуженими выводами пропускали імпульс струму з потужністю, достатньою для його розігріву до температур плавлення припою на выводах. При цьому виводи припаювались до кристала [9].

Була опублікована робота, де описувалося використання кристала напівпровідника як тепловиділяючого елемента мікропаяльника [6]. У ті ж роки було опубліковано декілька робіт, де досліджувалося використання напівпровідникової КСДІ структури, як тепловиділяючого елемента для розплення спеціальних речовин. Через неї також пропускався потужний імпульс струму, і структура розігрівалася до великих температур [8]. В усіх цих випадках, коли кристал використовується як тепловиділяючий елемент, важливою умовою було додержання рівномірного виділення енергії та розігріву. Якщо він розігрівався нерівномірно, то в ньому виникали великі механічні напруження, які призводили до розколу кристала – тобто його знищення. Дослідження цих ефектів корисно для вивчення та проєктування роботи потужних напівпровідникових приладів, таких як: транзистори, діоди, мікросхеми, в яких виділяється велика енергія. Наприклад, діоди, які комутують

S. Pavlyuk*, Ph.D., R. Kuzmych, stud.

The stabilizing of isolated power during the passage of surge current pulse through semiconductor diode crystal

The stabilizing effect of isolated power during the passage of surge current pulse through semiconductor diode crystal was worked out. Power's zone of stabilization was defined the reaching of own conductivity's temperature.

Key words: power, stabilizing, diode, own conductivity.

великі струми; транзистори, в яких кристал напівпровідника прикріплений до спеціального радіатора, що відводить тепло. В таких випадках дуже важливо знати як проходить тепло, та з якою швидкістю відбувається охолодження кристала.

Роботи, які присвячені вивченню теплопровідності і температуропровідності напівпровідникових структур, є актуальними на даний час. Таких робіт опубліковано багато (4-6), але в них вимірювалась виділена потужність та енергія в кінці потужного імпульсу розігріву, а дослідження динаміки цих параметрів під час проходження імпульсу не проводилося.

Тому метою даної роботи було дослідження потужності та енергії, що виділяється безпосередньо під час проходження потужного імпульсу ударного струму.

Методика дослідження

Методика дослідження докладно описана в роботі (6). При проведенні досліджень через кристал напівпровідникового діода пропускали серію декількох напівсинусоїдальних імпульсів струму розігріву I_p з тривалістю 10 мс та частотою 100 Гц з регульованою амплітудою.

Амплітуда струму змінювалась від величини прямого струму діода до значення ударного прямого струму діода – струму, при протіканні якого перевищується максимально допустима ефективна температура переходу, але який за час служби діода виникає рідко з обмеженим числом

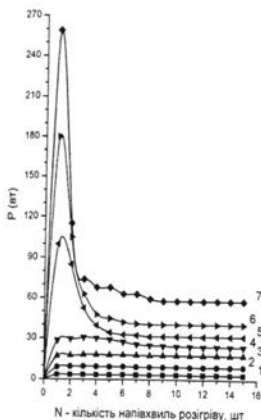


Рис 1. Залежність виділеної потужності від кількості півхвиль розігріву та при різних амплітудах струму:
 I_p, A : 1-2,5; 2-5; 3-7,5; 4-10; 5-12,5; 6-15; 7-17,5.

повторень і викликається незвичайними умовами роботи пристрою. Цей струм може перевищувати діючий прямий струм діода у десятки разів [2].

Кількість імпульсів у серій можна було змінювати. Спостерігали осцилограми падіння напруги на кристалі для моментів часу, коли струм розігріву I_p був максимальний розраховувалась потужність P_p та енергія E_p , яка виділилась в діоді.

Залежність прямого падіння напруги U_{np} на діоді від температури T при малому прямому струмі I_{np} , тобто температурний коефіцієнт напруги [1] дозволить визначити температуру p - n переходу. I_{np} пропускався крізь діод в моменти, коли $I_p=0$.

Оскільки при дослідженнях використовувались багато кристалів діодів, на

графіках приведені найбільш типові усереднені результати.

Проведені дослідження показали, що характер зміни параметрів і характеристик кристалів різних типів діодів був однаковий. Тому далі наведені дані для кристалів діодів КД208.

Експериментальні зразки

Зразки кристалів діодів КД208, що досліджувались, виготовлені із кремнію марки КЕФ-40 з питомим опором бази $\rho = 40$ Ом-см, концентрацією донорів порядку 10^{14} см $^{-3}$. З одного торця кристала дифузійно бора була створена p^+ область з питомим опором $\rho = 0,1$ Ом-см, концентрацією акцепторів порядку 10^{17} см $^{-3}$ і товщиною 0,01 см, а з іншого торця дифузійно фосфору отримана область n^+ контакту до n -області. Кристали мали циліндричну форму діаметром 0,18 см,

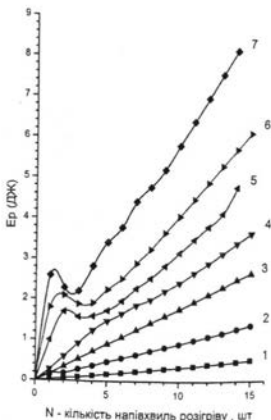


Рис 2. Залежність виділеної енергії від кількості півхвиль розігріву та при різних амплітудах струму:
 I_p, A : 1-2,5; 2-5; 3-7,5; 4-10; 5-12,5; 6-15; 7-17,5.

товщиною 0,03 см.

Експериментальні результати

Залежності виділеної потужності, енергії та температури від кількості півхвиль для різних величин струму показана на рис.1-3 відповідно. Як бачимо з графіків при невеликих амплітудах імпульсу струму 2.5A – 7.5A потужність незмінна на протязі всього імпульсу струму (рис.1, криві -3). Виділена енергія рівномірно зростає під час дії імпульсу (рис. 2, криві 1-3). Температура кристала діода теж рівномірно зростає і після збільшення амплітуди струму до 10A починає обмежуватися (рис.3, криві 1-3). При подальшому збільшенні амплітуди від 10A і більше потужність спочатку за 1-3 півхвилі різко зростає, потім спадає і досягає стаціонарного значення. Таким чином формується пік виділеної потужності (рис.1, криві 4-7). Це призводить до появи такого ж піка енергії (рис.2, криві 4-7) і температури (рис.3, криві 4-15). Після піка енергія та температура починають монотонно зростати.

Обговорення отриманих результатів

При проведенні досліджень використовували режим постійного струму $I_p = const$, тому що цей режим дозволяє стабілізувати виділену в кристалі потужність і захищає кристал від виходу з ладу [7]. Це зв'язано з тим, що при розігріві напівпровідникового кристала діода при такому режимі опір джерела розігріву R_i багато більше опору навантаження – опору напівпровідникового діодного кристала R_{dp} , тобто $R_i \gg R_{dp}$. При цьому режимі через кристал проходить імпульс струму I_p , амплітуда якого не змінюється під час імпульсу розігріву. Змінюється падіння напруги на кристалі U_p , що визначається опором напівпровідникового кристала R_{dp} , який змінюється в процесі розігріву. У цьому випадку зі збільшенням розігріву кристала його опір R_{dp} спочатку зростає за рахунок зменшення часу життя носіїв заряду (5) при досягненні ударного струму. Далі розігрів досягає величини власної провідності і опір падає, що призводить до зменшення падіння напруги U_p , середньої виділеної потужності $P_{dp} = I_p^2 R_p$ і до обмеження росту виділеної потужності температури кристала. У такий спосіб у цьому випадку реалізується негативний зворотний зв'язок між

температурою напівпровідникового кристала й приростом виділеної потужності. При використанні такого режиму нагрівання відбувається саморегуляція виділеної потужності, що дозволяє проводити багаторазові дослідження.

Висновки.

1. При використанні режиму постійного струму відбувається стабілізація виділеної в діодному кристалі потужності.

2. Зона стабілізації потужності виникає після досягнення температури власної провідності кристалом діода.

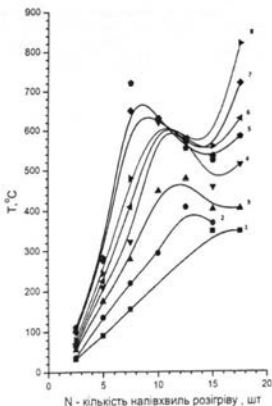


Рис 3. Залежність температури кристала діода від амплітуди струму при різних кількостях півхвиль струму.

Номер кривої означає кількість півхвиль розігріву

Список використаних джерел

1. Зи С. Физика полупроводниковых приборов : пер. с англ. [Текст] / С. Зи; М.: Мир, 1984. - Т.1, - 95 с.
2. Григорьев О.П. Диоды: Справочник. [Текст] / О.П. Григорьев, В.Н. Замятин, Б.В. Кондратьев, С.Л. Пожодаев; -М.: Радио и связь, 1990.-336с.
3. Павлюк С. П. Визначення температури діодного кристала під час проходження кризь нього імпульсу ударного струму: [Текст] / С. Павлюк, Г. Кутлін, С. Савицький, Р. Солтис, І. Тищенко // Вісник Київського університету. - Сер.: Радіофізика електроніка", 2008.-№11. -29-32с.
4. Павлюк С. Изменение сопротивления силовых диодов под действием импульса ударного тока [Текст] / С. Павлюк, Р. Солтис, С. Савицкий, И. Тищенко // Вісник Київського університету. -Сер.: Фізико-математичні науки, 2002. - № 1. -344-347с.
5. Павлюк С.П. Зміна параметрів та характеристик діодного кристала під дією імпульсу ударного струму/ С.Павлюк, Р. Кузьмич// Вісник Київського університету. - Сер.: Фіз.-мат. науки.", 2012.-№1(у друці.)
6. Павлюк С.П. Использование кремния в качестве полупроводниковых элементов микропаяльников. «Автоматическая сварка» [Текст]/ Павлюк С.П., Кутлин Г.Н., Кислицын В.М., Россошинский А.А, 1999г. Вып. 2, с.с. 41-44.
7. Павлюк С.П. Саморегуляція виділеної потужності напівпровідникового діодного кристала [Текст] / С.П. Павлюк, Л.В. Ішук, В.М. Кислицын // Вісник Київського університету. -Сер.: Фізико-математичні науки, 2002. - № 1. - 344-347с.
8. Коноваленко Л.Д. Тез. докл. конф. УНКФН-1 (Украина, Одесса). Коноваленко Л.Д., Макоблей Ф.В. и др. - 2002. 2. - С.216.
9. Россошинский А.А. А.С. №. 355696 СССР. Способ сборки полупроводниковых приборов. //Россошинский А.А., Лебига В.А., Кислицын В.М., Альперович Е.А. - 1972. - Бюл.№ 31.

Надійшла до редколегії 15.05.2012

УДК 535.345.67

*Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф., Федоров В.В.,
аспірант**Особенности распределения электрического поля
в 1-D фотонных кристаллах с тремя пів хви-
льовими резонаторами різної природи**

Досліджено спектральні характеристики про-
пускання і просторовий розподіл електричного
поля на частотах трьох дозволених зон, що ви-
никають в просторово-обмежених 1-D фотонних
кристаллах з трьома пів хвилювими дефектами
різної природи. Фотонний кристал утворений
шарами оксидів кремнію і титану, що чергують-
ся. Встановлено, що електричне поле концентру-
ється в середині пів хвилювих резонаторів з
меншою діелектричною проникністю (SiO_2) і на
межах пів хвилювих резонаторів з більшою діе-
лектричною проникністю (TiO_2). Показано, що
на частоті центральної дозволеної фотонної зони
електричне поле мінімізується в середині
центрального резонатора і концентрується в бі-
чних резонаторах.

Ключові слова: багат шарова тонкоплівкова
структура, одновимірний фотонний кристал

*E-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.техн.н. Погорілий С.Д.

При частотній селекції електромагнітного ви-
промінювання у різноманітних телекомунікацій-
них системах широко використовують багато пів
хвилюві інтерференційні фільтри [1-3]. Констру-
ктивно фільтри складаються з прозорої в робо-
чому діапазоні частот підкладки і з нанесеної на
неї періодичної послідовності чверть хвилювих
шарів. Періодичність порушується в певних міс-
цях введенням пів хвилювих шарів таким чином,
щоб уся багат шарова структура залишалася си-
метричною. У фотоніці такі структури дістали
назву одновимірних (1 - D) фотонних кристалів з
пів хвилювими дефектами [4-5]. Наявність пів
хвилювих дефектів призводить до появи фотон-
них дозволених зон в середині забороненої зони
фотонного кристалу. Нещодавно було показано,
що при певному виборі параметрів багат шаро-
вої структури можна добитися чіткого розділення
цих дозволених фотонних зон [6, 7]. У бездефек-
тних 1 - D фотонних кристаллах на краях зони

Yu.O. Pervak, Dr. Sci., V.V. Fedorov, post grad.
stud.**Features of electric-field distribution in 1-D
photonic crystals with three half-wave resona-
tors of different nature**

*Spectral characteristics of transmittance and
spatial distribution of electric-field were investi-
gated on frequencies of three allowed zones that
arise up in spatially-limit 1-D photonic crystals
with three half-wave defects of different nature. A
photonic crystal consists the layers of oxides of sili-
con and titan that alternate. It is set that the electric
field is concentrated in a middle of half wave resona-
tors with a less inductivity (SiO_2) and on limits of
half wave resonators with a greater inductivity
(TiO_2). It is shown that on frequency of the central
allowed photonic zone the electric field is mini-
mized in a middle of central resonator and concen-
trated in lateral resonators.*

Key words: multilayer thin-film structure, 1-D
photonic crystal

Бриллюєна електричне поле концентрується в
шарах з високою діелектричною проникністю в
першій фотонній дозволеній зоні (нижче заборон-
еної зони) і в шарах з низькою діелектричною
проникністю в другій дозволеній фотонній зоні
(вище забороненої зони) [4-5]. Раніше було дос-
ліджено просторовий розподіл електричного по-
ля в області дозволених фотонних зон, що вини-
кають в забороненій зоні фотонного кристалу
при введенні в нього трьох пів хвилювих струк-
турних дефектів однакової природи. Встановле-
но, що електричне поле концентрується в сере-
дині дефектних шарів з меншою діелектричною
проникністю, а у випадку високої діелектричної
проникності дефектного пів хвилювого шару на
інтерфейсах шарів з низькою та високою діелек-
тричною проникністю. Збільшення різниці в тов-
щині центрального і двох крайніх резонаторів,
що утворюють дефекти фотонного кристалу,
приводить до суттєвого зростання електричного
поля в області резонаторів. При різниці в тов-

щині 40% електричне поле в області резонаторних шарів перевищує електричне поле на вхідній поверхні в 5000 разів. Метою даної роботи є дослідження розподілу електричного поля і пропускання в одновимірних фотонних кристалах з трьома пар хвильовими резонаторами різної природи.

Розрахунки виконували матричним методом [8]. Детально процедура розрахунків була описана в роботах [6, 7]. За допомогою матричного методу можна отримати співвідношення для амплітуди електричного поля. Для межі поділу i і $i+1$ шарів:

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^N \cos \delta_i & (i \sin \delta_i) / \eta_i \\ i \eta_i \sin \delta_i & \cos \delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де E_0 , H_0 – амплітуди електричного і магнітного полів на межі поділу структури з зовнішнім середовищем; E_i , H_i – амплітуди на досліджуваній межі поділу. Таким чином, знаходження амплітуди електричного поля на будь-якій межі поділу плівок зводиться до розв'язання матричного рівняння. Для визначення величини електричного поля у будь-якій точці усередині плівки, можна ввести уявну межу поділу і записати таке ж матричне співвідношення. Якщо електричне поле ($|E|^2$) хвилі, що падає, прийняти рівним 100%, то при коефіцієнті відбивання 1, електричне поле на вхідній поверхні складе 400%. Електричне поле усередині багатошарової структури може в певних випадках значно перевищувати 400%. Усі розрахунки були виконані для нормального падіння випромінювання ($\theta_0 = 0$). При розрахунку спектральних характеристик багатошарової структури і амплітуди електричного поля враховувалася дисперсія вибраних матеріалів плівок і підкладки. Для опису дисперсії матеріалів використовували формулу Коші. Показник заломлення для оксиду кремнія визначали за формулою $n_{\text{Si}} = 1.46 + (3.35 \cdot 10^{-3} / \lambda^2) + (1.41 \cdot 10^{-5} / \lambda^4)$, а для оксиду титану – $n_{\text{Ti}} = 2.23 + (2.34 \cdot 10^{-3} / \lambda^2) + (7.69 \cdot 10^{-5} / \lambda^4)$, де λ – довжина хвилі в мікронах. Враховано також дисперсію показника заломлення підкладки: $n_{\text{S}} = 1.50 + (5.33 \cdot 10^{-3} / \lambda^2) + (4.92 \cdot 10^{-4} / \lambda^4)$. Екстинкція плівок і підкладки в даному спектральному діапазоні, не перевищує 10^{-5} , і не враховувалась.

Структурна формула досліджуваних структур може бути записана наступним чином

$$S(\text{HL})^i(\text{LH})^{k+1}(\text{HL})^{k+1}(\text{LH})^{k+1}S_0 \quad (2)$$

або

$$S(\text{LH})^i(\text{HL})^{k+1}(\text{LH})^{k+1}(\text{HL})^{k+1}S_0, \quad (3)$$

де S і S_0 – нескінченні середовища скла і повітря, відповідно; L і H – чверть хвильові шари ($n_L d_L = n_H d_H = \lambda_0 / 4$) SiO_2 і TiO_2 , відповідно; $\lambda_0 = 550$ нм; $l = 4, 5$; $k = 1, 3, 4, 5$. В цих структурах є три пар хвильових шари (три резонатори), що стає очевидно, якщо структурні формули (2) і (3) представити у вигляді (4) і (5), відповідно:

$$S(\text{HL})^i(\text{H}(2\text{L})(\text{HL})^k(2\text{H})(\text{LH})^k(2\text{L})\text{H}(\text{LH})^k \quad (4)$$

$$S(\text{LH})^i(2\text{H})(\text{LH})^k(2\text{L})(\text{HL})^k(2\text{H})(\text{LH})^k. \quad (5)$$

З виразів (4) і (5) добре видно, що центральний і бічні резонатори мають різну природу.

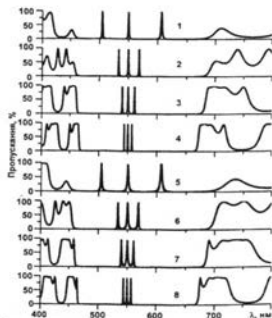


Рис.1. Спектральні залежності пропускання структур $S(\text{HL})^i(\text{LH})^{k+1}(\text{HL})^{k+1}(\text{LH})^{k+1}S_0$ (1-4) і $S(\text{LH})^i(\text{HL})^{k+1}(\text{LH})^{k+1}(\text{HL})^{k+1}S_0$ (5-8): $k = 1$ (1, 5), $k = 3$ (2, 6), $k = 4$ (3, 7), $k = l = 5$ (4, 8), $l = 4$ (1 - 3, 5 - 7).

На рис.1 приведено спектри пропускання досліджуваних структур. В фотонній забороненій зоні (~460 – 670 нм) чітко фіксуються три вузькі смуги пропускання. Збільшення товщини фотонної структури (збільшення параметрів k і l) призводить до зменшення відстані між смугами і їх ширини. При цьому в усіх випадках ширина центральної смуги пропускання суттєво більше ширини бічних смуг. Точне положення смуг пропускання і величини максимального пропускання приведено в таблиці. Максимальне пропускання центральної смуги дорівнює 95,76%, що відповідає пропусканню чистої підкладки.

Таблиця.

Довжини хвиль λ максимального пропускання T трьох смуг пропускання в забороненій зоні структур $S(HL)^4(HL)^4(2H)(LH)^4(2L)H(LH)^4S_0(1-4)$ і $S(LH)^4L(2H)(LH)^4(2L)(HL)^4(2H)L(HL)^4S_0(5-8)$.

№пп	l	k	λ_1 , нм	T_1 , %	λ_2 , нм	T_2 , %	λ_3 , нм	T_3 , %
1	4	1	504,72	96,46	550,00	95,76	606,76	96,65
2	4	3	533,19	95,78	550,00	95,76	568,47	95,81
3	4	4	539,49	95,73	550,00	95,76	561,16	95,76
4	5	5	543,40	95,75	550,00	95,76	556,88	95,77
5	4	1	504,40	98,41	550,00	95,76	607,40	98,61
6	4	3	533,14	95,93	550,00	95,76	568,53	95,95
7	4	4	539,49	95,73	550,00	95,76	561,16	95,76
8	5	5	543,40	95,75	550,00	95,76	556,88	95,77

Значення максимального пропускання бічних смуг прозорості майже в усіх випадках перевищує максимальне пропускання центральної смуги. Це можна пояснити наступним чином. На довжині хвилі 550 нм (положення максимального пропускання центральної смуги) характеристична матриця багатошарової структури є простою одиничною матрицею. Тобто, на довжині хвилі 550 нм структура є повністю прозорою. Більш високе пропускання в бічних смугах свідчить, що на відповідних довжинах хвиль багатошарова структура в певній мірі відіграє роль антивідбивного покриття. Для досліджуваних структур можна застосувати метод еквівалентних параметрів [8], оскільки усі структури мають симетричну будову. За зглядним методом симетричної структури в розрахункових задачах можуть розглядатися як окремі шари з еквівалентними параметрами. Розрахунок еквівалентного показника заломлення дозволить пояснити отримані значення максимального пропускання бічних дозволених смуг. Для центральної смуги на довжині хвилі 550 нм еквівалентний показник N_{ex} заломлення є

невизначеним, тому що $N_{\text{ex}} = (M_{21}/M_{12})^{1/2}$ і $M_{12} = M_{21} = 0$ (M_{12} і M_{21} матричні елементи характеристичної матриці багатошарової структури).

Суттєво відрізняються розподіли електричного поля на частоті центральної смуги і на частотах бічних смуг. Електричне поле на частоті максимального пропускання центральної смуги практично відсутнє в центральному резонаторі і концентрується в бічних резонаторах, якщо вони утворені шаром з низьким показником заломлення (рис.2). Якщо показник заломлення матеріалу бічних резонаторів вищий показника заломлення шарів, що його обмежують, то електричне поле концентрується на інтерфейсах шарів. На частотах максимального пропускання бічних смуг електричне поле концентрується в усіх трьох резонаторах. При цьому поле концентрується в середині резонаторів з малим показником заломлення і на інтерфейсах резонаторів з великим показником заломлення. Окрім того, в випадку структур з центральним резонатором на матеріалі з високим показником заломлення максимальне поле приблизно однакове в усіх резонаторах.

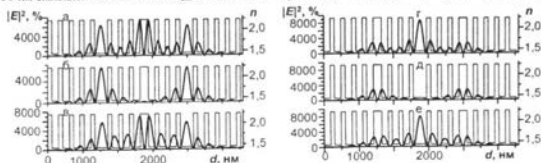


Рис. 2. Просторовий розподіл електричного поля $|E|^2$ (суцільні жирні криві) і показника заломлення n (суцільні тонкі криві) в структурах $S(HL)^4(LH)^4(HL)^4(LH)^4S_0$ (a – в) і $S(LH)^4(HL)^4(HL)^4(HL)^4S_0$ (r – е). Для кожної з структур приведено по три розподіли поля на довжинах хвиль максимального пропускання смуг λ_1 , λ_2 і λ_3 в порядку збільшення довжини хвилі. Точне значення λ_1 , λ_2 і λ_3 наведено в таблиці.

А в випадку структур з центральним резонатором на матеріалі з низьким показником заломлення максимальне поле в центральному резонаторі приблизно втричі більше за поле в бічних резона-

торах. При збільшенні товщини фотонної структури (збільшення кількості чверть хвильових шарів між резонаторами) ці закономірності проявляються більш виразно (рис.3).

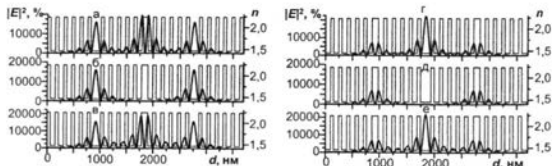


Рис.3. Просторовий розподіл електричного поля $|E|^2$ (суцільні жирні криві) і показника заломлення n (суцільні тонкі криві) в структурах $S(HL)^4(LH)^4(HL)^4(LH)^4S_0$ (а – в) і $S(LH)^4(HL)^4(LH)^4(HL)^4S_0$ (г – е). Для кожної з структур приведено по три розподіли поля на довжинах хвиль максимального пропускання λ_1 , λ_2 і λ_3 в порядку збільшення довжини хвилі. Точне значення λ_1 , λ_2 і λ_3 наведено в таблиці.

В досліджених структурах електричне поле в структурі може перевищувати електричне поле хвилі, що падає на структуру, в сотні разів. Тому, при використанні подібних інтерференційних структур потрібно це враховувати, оскільки при певних умовах електричне поле в структурі може виявитися достатньо великим, щоб зруйнувати

структуру. З іншого боку, на основі таких структур, якщо використовувати матеріали з високою променевою стійкістю, можна створювати різноманітні елементи керування світлом, ефективність яких буде суттєво залежати від нелінійних властивостей матеріалів пів хвильових резонаторів.

Список використаних джерел

1. Марков Ю.Н. К теории полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, И.С. Гайнутдинов // Оптика и спектроскопия. – 1977. – 43. – Вып. 5. – С.984-989.
2. Марков Ю.Н. К вопросу оптимизации полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, И.С. Гайнутдинов // ЖПС. – 1980. – 33. – №3. – С.536-540.
3. Марков Ю.Н. Синтез контрастных полосовых интерференционных фильтров. Сложнопериодические системы // Оптика и спектроскопия. – 1983. – 54. – Вып. 1. – С.173-178.
4. Joannopoulos J.D. Photonic Crystals / J.D. Joannopoulos, R.D. Meade and J.N. Winn // Princeton: Princeton University Press, 1995. – P. 133-150.
5. Первак В.Ю. Фізика фотонних кристалів / В.Ю. Первак, А.П. Шпак, Ю.О. Первак, Л.Ю. Куницька. – К.: Академперіодика. – 2007. – 304с.
6. Первак Ю.О. Спектральні властивості багатопшарових структур з трьома пів хвильовими резонаторами / Ю.О.Первак, В.В.Федоров // Вісник Київського університету, серія фізико-математичних наук. – 2011. – №1. – С. 259-262.
7. Первак Ю.О. Особливості спектральних характеристик багатопшарових структур з трьома пів хвильовими резонаторами / Ю.О.Первак, В.В.Федоров // Вісник Київського університету, серія фізико-математичних наук. – 2011. – №2. – С. 201-204.
8. MacLeod H.A. Thin-Film Optical Filters / H.A. MacLeod // Philadelphia: Inst. Phys. Publish., Pa., 2001. – P. 645.

Надійшла до редколегії 15.05.2012

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Альохін О.Д., д.ф.м.н., проф.,
Кулінич А.В., студентка,
Остапчук Ю.Л., к.ф.м.н.,
Рудніков Є.Г., к.ф.м.н.**В'язкість розчину ізомасляна кислота -
вода поблизу критичної температури
розширювання**

В роботі проведено дослідження в'язкості розчину ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розширювання. За одержаними експериментальними даними досліджено поведінку флуктуаційної частини в'язкості розчину, параметри рівняння в'язкості, критичні показники в'язкості і радіусу кореляції.

Ключові слова: критична в'язкість, радіус кореляції, критичний стан

*E-mail: alekhin@univ.kiev.ua, os@ukr.net

Експериментальні та теоретичні дослідження кінетичних властивостей речовини: в'язкості, коефіцієнта дифузії та ін. є актуальними завданнями фізики конденсованого стану речовини [1-3].

Численні експериментальні дослідження в'язкості рідин показують, що поблизу критичної точки (КТ) ця характеристика системи необхідно представляти у вигляді двох доданків:

$$\eta(t) = \eta_c(t) + \eta_v(t) = \eta_c(q, t_c) Z_c^{-1} (t)^{-z_\eta} \quad (1)$$

Тут $\eta_c(t) = A \exp(B/T)$ і $\eta_v =$ відповідно регулярна і флуктуаційна частина в'язкості, v і z_η – критичні показники [1-3] радіуса кореляції системи $R_c = t_c t^{-\nu}$ [1] і в'язкості [1, 2]; $t = (T - T_c)/T_c$; q – параметр, що має розмірність хвильового вектора.

Як видно з (1), при підході до критичної температури ($t \rightarrow 0$) співвідношення η/η_c необмежено зростає. Однак аналіз більшості експериментальних даних $\eta(t)$ все-таки свідчить про скінченну величину в'язкості в критичному стані речовини.

Кінцеве значення зсувної в'язкості також випливає із роботи М. Фіксмана [4].

В роботі [4] у рамках класичної теорії критичних явищ [5] показано, що лише в парадоксальному наближенні ($qR_c \rightarrow 0$) в'язкість системи $\eta(t)$, зумовлена стисливістю $\beta(t)$ і

Alekhin O.D., Dr. Sci., Prof.,
Kulinich A.V., student,
Ostapchuk Yu.L., PhD,
Rudnikov E.G., PhD**Viscosity of isobutyric acid - water solution
near the critical consolute temperature**

Viscosity of isobutyric acid - water solution has been investigated in the work near the critical consolute temperature. The fluctuation part of viscosity of solution, parameters of equation of viscosity, critical indexes of viscosity and correlation length have been studied by using the obtained experimental data.

Keywords: critical viscosity, correlation length, critical state

радіусом кореляції речовини ($\eta_c(t) - \beta^{1/2} - R_c - t^{-1/2} \Rightarrow \infty$), необмежено зростає при підході до КТ ($t \rightarrow 0$).

Виходячи з [4], у даній роботі на основі [1] запропоновано рівняння критичної частини в'язкості $\eta_v(t)$ [6], яке також враховує просторову дисперсію системи:

$$\eta_v = \frac{AR_c}{[1 + (qR_c)^2]^{3/2}} = \frac{\Delta\eta_c t^{-1/2}}{[1 + (q_c t^{-1/2})^2]^{3/2}} \quad (2)$$

Ця формула якісно узгоджується із рівнянням М. Фіксмана [4], ($\eta_v(q, R_c \rightarrow 0) \sim R_c \sim t^{-1/2}$) забезпечує скінченність в'язкості речовини в КТ при $q, R_c \rightarrow \infty$.

У цій роботі ці два якісно різних рівняння (1) і (2) одночасно були використані при аналізі експериментальних даних температурної залежності в'язкості $\eta(T)$ розчину ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розширювання. Ці експериментальні дані показані на рис. 1.

При цьому слід зауважити, що застосування в розрахунках лише однієї формули (1) не дає можливості визначити величину критичного показника в'язкості z_η , який входить у цю формулу у вигляді добутку $(\eta_c \sim t^{-z_\eta})$. Для його розрахунку необхідно окремо визначити величину критичного показника радіуса кореляції системи ν ($R_c \sim t^{-\nu}$).

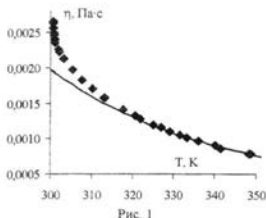


Рис. 1

Для цього спочатку у закритичній області температур ($t > 10^{-3}$), де $\eta_c \gg \eta_0$, були розраховані параметри $A = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Па·с і $B = 2004$ К регулярної частини в'язкості η_r (1). Використовуючи значення параметрів A і B , була виділена і проаналізована температурна залежність флуктуаційної частини в'язкості (2) $\eta_f(T) = \eta(T) - \eta_r(T)$. Ці дані представлено на рис. 2.

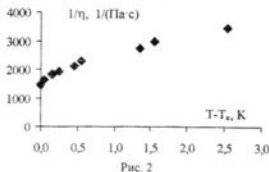


Рис. 2

Як видно з цього рисунку, при наближенні до критичної температури ($t \rightarrow 0$) обернена величина η_f^{-1} прямує до постійного значення $\eta_f^{-1}(t=0) = \eta_{fc}^{-1} = \alpha \eta_c^{-1} / \Delta \eta_c$. Для визначення температурної поведінки флуктуаційної частини в'язкості у подвійному логарифмічному масштабі було проаналізовано температурну залежність різниці величин $(\eta_c^{-1} - \eta_{fc}^{-1}) = \Delta \eta_c^{-1} \propto t^{\nu}$. Встановлено, що для досліджуваного розчину ця величина показника $\nu = 0,62 \pm 0,03$ є близькою до величини критичного показника радіуса кореляції $\nu = 0,63$ [1].

В подальшому експериментальні дані $\eta(T)$ (рис. 1) були використані для визначення величини критичного показника в'язкості z_η ($\eta(t)$

$\sim t^{z_\eta}$) (1) [2, 3]. Для цього, аналізуючи температурну залежність співвідношення $\eta(t)/\eta_c(t) \propto t^{z_\eta}$ для розчину ізомалеїної кислоти – вода, спочатку було визначено величину показника $z_\eta = z_{\eta v} = 0,040 \pm 0,005$ (рис. 3).

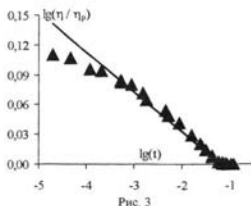


Рис. 3

Тоді, враховуючи значення одержаного раніше показника $\eta_{fc} = 0,62 \pm 0,03$, знаходимо величину критичного показника в'язкості $z_{\eta c} = 0,065 \pm 0,01$. Цей результат підтверджується аналізом даними інших експериментальних досліджень в'язкості поблизу КТ [6, 7].

1. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – Москва: Наука, – 1982. – 381 с.
2. Hohenberg P.C., Holperin B.I. Theory of dynamic critical phenomena // Rev. Mod. Phys. – 1977. – Vol.49. – P. 435.
3. Perl, R.A. Ferrel Decoupled mode theory of critical viscosity and diffusion in the binary liquid-liquid phase transition // Phys. Rev. A. – 1972. – Vol.6. – P. 2358.
4. Fixman M. Viscosity of critical mixtures // J. Chem. Phys. – 1962. – V.36, №2. – P.310-320.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. 3-е изд., доп. – Москва: Наука, – 1976. – 584 с.
6. Алюхин О.Д., Білоус О.І. Поведінка в'язкості рідинних систем поблизу критичної температури розшарування // УФЖ. – 2007. Т.52, №8. – С.795-799.
7. Plevachuk Y., Sklyarchuk V., Alekhin A., Bulavin L. Liquid-liquid phase equilibrium in ternary immiscible In-Tl-Te melts // Journal of Molecular Liquids. – 2006. – V.127. – P.33-36.

Надійшла до редколегії 2.05.2012

УДК 532

Григор'єв А.М., к.ф.-м.н., доц.,
Королівич В.Ф., інж.,
Кузовков Ю.Г., к.ф.-м.н., ст.наук.сп.,
Маматова Д.О., студ.,
Мороз К.О., к.ф.-м.н., доц.,

Термофізичні властивості системи двохатомних частинок, що взаємодіють за допомогою потенціалу Кіхари

Методом Монте-Карло розраховані густина, внутрішня енергія, ентальпія, ізобарна теплоємність, ізотермічний модуль пружності, коефіцієнт теплового розширення системи двоатомних частинок, що взаємодіють за допомогою потенціалу Кіхари, в широкому інтервалі густин і тисків. Діаметр атома та відстань між ними змінювалися таким чином, щоб об'єм молекули був сталим. Проаналізовано вплив несферичності молекул на термофізичні властивості дослідженого флюїду.

Ключові слова: ізотермічний модуль пружності, несферичність молекул.

*E-mail: agrigoriev@univ.kiev.ua

У роботі [1] досліджувався вплив форми молекули на термофізичні властивості рідин на прикладі модельної системи твердих гантелеподібних частинок, еліпсоїдів обертання та сфероциліндрів. Автори дійшли висновку, що за умови однаковості власних об'ємів молекул, баричні залежності пружних характеристик систем, взаємодія частинок яких має характер відштовхування, практично не залежать від форми молекули. Виникає питання, наскільки загальним є цей результат? Чи є дана особливість характерною рисою систем частинок, між якими діють лише сили відштовхування, чи вона є проявом більш універсальної закономірності? Що буде, якщо "включити" додатково сили притягання? При цьому кутова залежність сил притягання повинна повторювати кутову залежність сил відштовхування.

В якості фізичної моделі нами було обрано потенціальною модель твердих частинок з притяганням, різних за формою, а саме: однакових за об'ємом гантелеподібних частинок, потенціал взаємодії яких залежить від відстані між жорсткими серцевинами частинок (потенціал Кіхари), а інтенсивність взаємодії є сталою в певному інтервалі відстаней.

A.N. Grigoriev*, PhD, Ass. Prof.,
V.F. Korolovych, PhD, eng.,
Yu.I. Kuzovkov, PhD, Sen. Res.,
D.O. Mamatova, stud.,
K.O. Moroz, PhD, Ass. Prof.

Thermophysical properties of diatomic particle systems interacting via Kihara potential

Density, internal energy, enthalpy, isobaric heat capacity, isothermal elasticity modulus and heat expansion coefficient of dumb-bell fluids with square-well attraction potential were determined in Monte-Carlo simulations in a wide range of reduced densities and pressures. The molecule shape was changed by varying the atom diameter and the distance between atoms but the volume was the same. Molecular nonsphericity effect on the pressure dependence of thermophysical properties of studied fluids was analyzed.

Key Words: isothermal elasticity moduli, molecular nonsphericity.

Методом Монте-Карло були розраховані енергія, ентальпія, густина, ізотермічний модуль пружності, ізобарна теплоємність та коефіцієнт теплового розширення системи двоатомних молекул різного ступеня несферичності в широкому інтервалі тисків.

Необхідно звернути увагу на загальну характеристику проведених раніше досліджень термофізичних властивостей молекулярних рідин методом Монте-Карло. При визначенні пружних властивостей зазвичай розраховують тиск і фактор стиснення. У той же час розрахунок таких величин як модуль пружності є скоріш виключенням, ніж правилом. Але цінність теоретичних моделей визначається не лише їх здатністю правильно визначати залежність тиску або густини від відповідних термодинамічних параметрів, але й правильно описувати їхні похідні, такі як ізотермічний модуль пружності або коефіцієнт теплового розширення тощо. Це обумовлює необхідність досліджувати термофізичні величини не окремо, а в комплексі.

У вибраний нами моделі рідина складається з двоатомних молекул, атоми яких взаємодіють за допомогою потенціалу прямокутної ями:

$$\phi(r) = \begin{cases} \infty, & r < \sigma \\ -\varepsilon, & \sigma < r < 1.5\sigma \\ 0, & r > 1.5\sigma \end{cases}$$

де σ - діаметр атома, ε - глибина потенціальної ями, r - відстань між взаємодіючими атомами.

Форма частинки характеризувалася фактором несферичності a , який визначався як відношення діаметра атома σ до відстані між центрами атомів L . Досліджувалися три модельних флюїди з різними значеннями $a = 0; 0.5; 1.0$. Об'єм частинки залишався сталим в усіх випадках (рівний об'єму сфери одиничного діаметру).

Такий вибір параметрів атом-атомного потенціалу взаємодії дозволив коректно порівнювати значення розрахованих фізичних величин систем молекул з різною формою несферичності молекул.

Методом Монте-Карло в ізобарично-ізотермічному ансамблі для досліджуваних систем із 108 молекул були розраховані густина, внутрішня енергія, ентальпія, ізотермічний модуль пружності, ізобарна теплосмність і коефіцієнт теплового розширення в інтервалі тисків $P = 0.5-7.0$ при температурі $T = 1.0$.

В ході моделювання використовувалися три типи генерації нової конфігурації: зміщення молекули як цілого, поворот на випадковий кут навколо центра мас і зміна об'єму основної комірки. Максимальне зміщення, максимальний кут повороту і максимальна зміна об'єму вибиралися таким чином, щоб відповідна доля прийнятих конфігурацій дорівнювала 30% [2,3]. Кількість кроків для встановлення термодинамічної рівноваги дорівнювала 50 000, а кількість кроків для усереднення макроскопічних аналогів досліджуваних теплофізичних величин дорівнювала 2 000 000 при заданих P і T .

Згенерована за допомогою алгоритму Метрополіса послідовність конфігурацій системи використовувалася для знаходження середніх і середньоквадратичних флуктуацій мікроскопічних аналогів макроскопічних величин. Так, внутрішня енергія розраховується як [2,4]:

$$E = \langle U \rangle \\ U = \sum_{i < j} \phi(r_{ij})$$

Густина та ізотермічний модуль пружності розраховувалися за формулами [2,4]:

$$\rho = \frac{N}{\langle V \rangle} \quad K_T = \frac{T \langle V \rangle}{\langle \Delta V^2 \rangle}$$

Ентальпія [2,4]:

$$H = \langle U + PV \rangle$$

Ізобарна теплосмність [4,5]:

$$C_P = \frac{\langle \Delta H^2 \rangle}{T^2}$$

Коефіцієнт теплового розширення [4]:

$$\alpha_P = \frac{\langle \Delta H \Delta V \rangle}{T^2 \langle V \rangle}$$

На Рис. 1 наведено графік залежності густини від тиску для досліджених модельних рідин. Як видно з графіку, функція ρ від P є зростаючою і нелінійною, при чому швидкість зростання із збільшенням тиску зменшується. Що стосується впливу несферичності молекули, то густина при переході від сферичних молекул до несферичних зменшується.

На Рис. 2 зображено графік залежностей ізотермічного модуля пружності від тиску. Як видно з графіку, залежність модуля пружності від тиску є зростаючою і майже лінійною. Така залежність передбачається рівнянням стану Марієгхена, яке, як і рівняння Тейта, непогано описує P - V - T -дані молекулярних рідин в області тисків до 100 МПа [6-8].

З Рис. 2 видно, що вплив форми молекули на модуль пружності відносно невеликий порівняно з іншими теплофізичними характеристиками. Слід зазначити, що врахування сил притягання призводить до того, що вплив форми молекули на пружні властивості таких систем стає відчутнішим порівняно з системами, частинки яких можуть лише відштовхуватися.

Слабка залежність K_T від форми молекули при сталому тиску має цікаве застосування. Справа в тому, що, як показано в роботах Адаменко І.І., Сисосва В.М. та інш. [7-9], модуль пружності суттєво залежить від крутизни відштовхувальної частини потенціалу міжмолекулярної взаємодії. Така залежність була теоретично обґрунтована в роботах [7,9-11] для системи частинок, які взаємодіють за допомогою центрального потенціалу. Проте, при визначенні показника сил відштовхування з експериментальних даних по

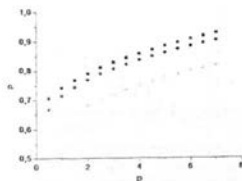


Рис. 1. Залежність густини від тиску модельних рідин (■ – $a=0.0$, ● – $a=0.5$, ▲ – $a=1.0$).

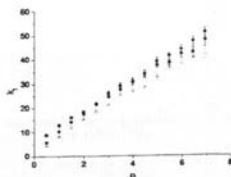


Рис. 2. Залежність ізотермічного модуля пружності від тиску модельних рідин (■ – $a=0.0$, ● – $a=0.5$, ▲ – $a=1.0$).

баричній залежності K_T залишався нез'ясованим вплив форми молекули на точність отриманих результатів [10]. Оскільки, як видно з Рис. 2, форма молекули слабо впливає на баричну залежність модулів пружності, то використання їх для аналізу особливостей потенціалу сил відштовхування між молекулами є цілком коректним навіть у випадку молекулярних рідин.

На Рис. 3 зображено залежність ізобарної теплосмності від тиску. Як видно з Рис. 3, залежність C_p від тиску є нелінійною, проходить через мінімум в області $P \sim 4$. Такий характер залежності теплосмності від тиску дійсно спостерігається на експерименті для молекулярних рідин [8]. Що стосується впливу

форми молекули, то при збільшенні несферичності частинки, ізобарна теплосмність збільшується.

На Рис. 4 зображено залежність коефіцієнта теплового розширення від тиску. Як видно з Рис. 4, залежність $\alpha_T(P)$ є нелінійною і спадною, причому швидкість спадання із тиском зменшується. Що стосується впливу несферичності молекули, то коефіцієнт теплового розширення при переході від сферичних молекул до несферичних збільшується. На Рис. 5 зображено залежність внутрішньої енергії від тиску. Як видно з графіку, залежність E від тиску є нелінійною і спадною, причому швидкість спадання із тиском

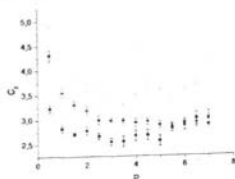


Рис. 3. Залежність ізобарної теплосмності модельних рідин (■ – $a=0.0$, ● – $a=0.5$, ▲ – $a=1.0$).

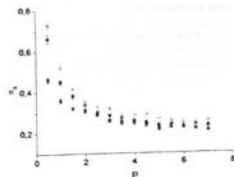


Рис. 4. Залежність коефіцієнта теплового розширення від тиску модельних рідин (■ – $a=0.0$, ● – $a=0.5$, ▲ – $a=1.0$).

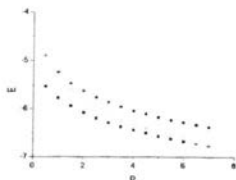


Рис. 5. Залежність внутрішньої енергії від тиску модельних рідин (■ – $a=0.0$, ● – $a=0.5$, ▲ – $a=1.0$).

зменшується. При переході від сферичних молекул до несферичних внутрішня енергія спочатку збільшується, а потім зменшується.

На Рис. 6 зображено залежність ентальпії від тиску. Як видно з графіку, залежність H від тиску є лінійною і зростаючою. Ентальпія при переході від сферичних молекул до несферичних монотонно збільшується.

Таким чином, досліджені теплофізичні величини по-різному залежать від ступені несферичності частинки, а саме: значення густини та ізотермічного модуля пружності тим більше, чим форма частинки ближча до сферичної; коефіцієнти теплового розширення, ізобарної теплоємності та ентальпії, змінюються в залежності від a протилежним чином: значення цих величин тим менші, чим форма частинки ближча до сферичної.

Список використаних джерел

1. Адаменко І.І. Вплив форми молекули на пружні властивості рідин. (Тверді гантелі, еліпсоїди обертання та сфероциліндри). / І.І. Адаменко, А.М. Григор'єв, Ю.Г. Кузовков // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. - Вип. №3. - С.235 – 240.
2. Frenkel D. Understanding computer simulations. / D. Frenkel, B. Smith – New York, Academic Press, 2002. – 638 p.
3. Антощенко В.Я. Основы физики воды. / В.Я. Антощенко, А.С. Давыдов, И.И. В.В. Ильин – К.: Наукова думка, 1991. – 667 с.

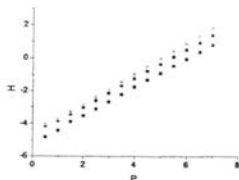


Рис. 6. Залежність ентальпії від тиску модельних рідин (■ – $a=0.0$, ● – $a=0.5$, ▲ – $a=1.0$).

4. Allen M.P. Computer simulation of liquids. / M.P. Allen, D.J. Tildesley – Oxford, Clarendon Press, 1986. – 385 с.
5. Гиришельдер Дж. Молекулярная теория жидкостей и газов (Дж. Гиришельдер, Ч. Кертис, Р. Берд. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 930 с.
6. Адаменко І.І. Фізика рідин та рідинних систем. / І.І. Адаменко, Л.А. Булавін –К.: АСМІ, 2006. – 623 с.
7. Сысоев В.М. Теория возмущений и уравнение состояния плотных конденсированных сред// ТМФ. – 1983. – Т. 55, №2. – С. 305-312.
8. Адаменко І.І. Влияние давления на термодинамические свойства молекулярных жидкостей и их растворов: дис. ...доктора физ.- мат. наук: 01.04.14. / Адаменко Ирина Ивановна. – К., 1991. – 327 с.
9. Сысоев В.М. Изотермическое уравнение состояния плотных жидкостей и газов // УФЖ – Т. 25, №1. – С.123 – 130.
10. Атамась О.О. Корекція параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії сил відштовхування. / О.О. Атамась, В.Ю. Бардік, В.М. Сысоев.// УФЖ. – 2000. – №10. – С.1184-1187.
11. Bardik V.Yu. Investigations of the steepness of a repulsive potential in accordance with the equation of state and light-scattering spectra. / V.Yu. Bardik, K.S. Shakun // УФЖ. – 2005. – №4. – С.404-406.

Надійшла до редколегії 15.04.2012

УДК 539.213

Лисов В.І., д.ф.м. н., проф.,
Цареградська* Т.Л., к.ф.м.н., доц.,
Турков О.В., інж.,
Сасенко Г.В., асп.

Вплив кріообробки на термічну стабільність аморфних сплавів

Для аморфних сплавів $Fe_{80}B_{20}$, $Fe_{83}B_{17}$, $Fe_{80}B_{18}Si_6$, $Fe_{70}Cr_{15}B_{15}$, $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$, $Fe_{75.2}B_{14}Si_6Ni_{1.8}$, $Fe_{77.5}B_{10}Si_2Ni_{1.5}Mo_1$ проведено експерименти по кріообробці з метою впливу на термічну стабільність. За допомогою високочутливої дилатометричної методики були визначені температури початку інтенсивної кристалізації для вихідних зразків та тих, що пройшли кріообробку. Показано, що запропоновані режими термообробки приводять до підняття стабільності аморфних сплавів, про що свідчить збільшення температури початку інтенсивної кристалізації.

Ключові слова: аморфні сплави, термодинамічна стабільність, кристалізація.

tsar_grd@ukr.net

Вступ

Актуальність дослідження аморфних сплавів пов'язана з тим, що однією з найважливіших умов розвитку сучасної техніки є створення матеріалів, які здатні зберігати високий рівень фізико-хімічних властивостей при постійних змінах умов роботи виробів, створених на їх основі. Традиційні сплави, що мають термодинамічно рівноважну структуру, методи їх виробництва та обробки часто не відповідають сучасним вимогам, тому все більше віддають перевагу новим термодинамічно нерівноважним матеріалам, які мають аморфну, мікрокристалічну або нанофазну структуру. Вихідний метастабільний аморфний стан, що отримується надшвидким гартуванням, не завжди має оптимальні характеристики, тому актуальним напрямком досліджень металевих стекло є розробка методів керованого наноструктурування [1]. До методів керованого наноструктурування відносять: термообробку

V.I. Lysov, Dr.Sc., Prof.,
T.L. Tsaregradskaya, PhD.,
O.V. Turkov, eng.,
G.V. Saenko, eng.

The influence of cryotreatment on thermal stability of amorphous alloys

For the amorphous alloys $Fe_{80}B_{20}$, $Fe_{83}B_{17}$, $Fe_{80}B_{18}Si_6$, $Fe_{70}Cr_{15}B_{15}$, $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$, $Fe_{75.2}B_{14}Si_6Ni_{1.8}$, $Fe_{77.5}B_{10}Si_2Ni_{1.5}Mo_1$ the experiments on cryotreatment with the aim of influence on thermal stability, are conducted. By the highly sensitive dilatometric method there were certain temperatures of beginning of intensive crystallization for initial alloys and alloys after cryotreatment. It is noted that brings the offered modes over of heat treatment to the increase of stability of amorphous alloys, to what testifies the increase of temperature of beginning of intensive crystallization.

Key words: amorphous alloys, thermodynamics stability, crystallization

(ізотермічні та неізотермічні відпалы за температур нижчих за температуру кристалізації, термоцикування, кріообробка, імпульсний лазерний відпал; інтенсивну пластичну деформацію та опромінення частками різної природи. Велика увага до термічної обробки сплавів з аморфною структурою пов'язана з можливістю набуття особливих властивостей в нанокристалічному стані. У зв'язку з цим дуже актуальним є дослідження поведінки аморфних сплавів під дією зовнішніх впливів, тим більше, що залишаються відкритими питання про механізми впливу зовнішніх чинників на властивості аморфних сплавів [2]. Метою роботи було дослідження впливу термообробки на термічну стабільність аморфних сплавів.

1. Методика експериментальних вимірювань

Експериментальні дослідження процесу кристалізації аморфних сплавів проводилися за допомогою високочутливої дилатометричної

методики. Методика проведених дилатометричних досліджень полягає в наступному. Молярний об'єм більшості сплавів в аморфному і кристалічному станах відрізняється на (1-3) %. При нагріванні аморфного сплаву його об'єм монотонно зростає, досягнувши певної температури (температури кристалізації) відбувається різке зниження об'єму, що свідчить про початок процесу кристалізації. Таким чином, можна досліджувати процес кристалізації аморфного сплаву, фіксуючи зміну довжини зразка і перераховуючи її в об'ємні зміни. На матеріал з відомим коефіцієнтом теплового розширення закріплюється відрізок аморфної фольги і задається прогин. Вимір довжини досліджуваної в процесі нагрівання фольги безперервно фіксується по зміні стріли прогину, викликаной розширенням фольги відносно матеріалу з відомим коефіцієнтом теплового розширення.

2. Результати експериментальних досліджень

Для аморфних сплавів $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$, $\text{Fe}_{83}\text{B}_{17}$, $\text{Fe}_{80}\text{B}_{16}\text{Si}_4$, $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{13}\text{B}_{15}$, $\text{Fe}_{60}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$, $\text{Fe}_{76,2}\text{B}_{14}\text{Si}_6\text{Ni}_{3,8}$, $\text{Fe}_{77,3}\text{B}_{16}\text{Si}_2\text{Ni}_{13}\text{Mo}_1$ були проведені експериментальні дослідження по визначенню інтервалів температурної стабільності. Після цього для даних сплавів була проведена термообробка з метою підвищення термічної стабільності. Термообробка полягала в

нагріванні до $T = T_k - 50^\circ\text{C}$ ($t=1$ хвилину) та різкому охолодженні до температури рідкого азоту з метою стабілізації отриманої структури.

На рис.1. наведена температурна залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $\text{Fe}_{83}\text{B}_{17}$ у вихідному стані (крива 1) та після термообробки: нагрівання зразка до $T = T_k - 50^\circ\text{C}$ з наступною кріообробкою (крива 2). Температура початку інтенсивної кристалізації для сплаву $\text{Fe}_{83}\text{B}_{17}$ складає 400°C , отже попередній короткочасний відпал (протягом 1 хвилини) проводився при $T=350^\circ\text{C}$. З рисунка видно, що температура початку інтенсивної кристалізації після термообробки складає 480°C , тобто збільшилась на 80°C .

На рис.2. наведена температурна залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $\text{Fe}_{76,2}\text{B}_{14}\text{Si}_6\text{Ni}_{3,8}$ у вихідному стані (крива 1) та після термообробки: нагрівання зразка до $T = T_k - 50^\circ\text{C}$ з наступною кріообробкою (крива 2). Температура початку інтенсивної кристалізації для сплаву $\text{Fe}_{76,2}\text{B}_{14}\text{Si}_6\text{Ni}_{3,8}$ складає 500°C , отже попередній відпал (протягом 1 хвилини) проводився при $T=450^\circ\text{C}$. З рисунка видно, що температура початку інтенсивної кристалізації після термообробки складає 540°C , тобто інтервал термічної стабільності збільшився на 40°C .

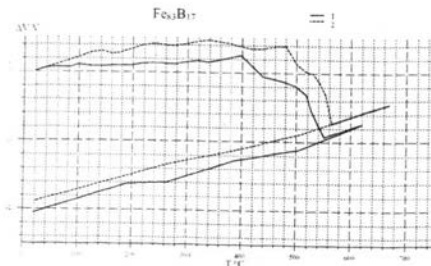


Рис.1. Температурна залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $\text{Fe}_{83}\text{B}_{17}$ при неперервному нагріванні у вихідному стані (крива 1) та після попередньої термообробки: нагрівання зразка до $T = T_k - 50^\circ\text{C}$ (350°C) з наступною криообробкою (крива 2)

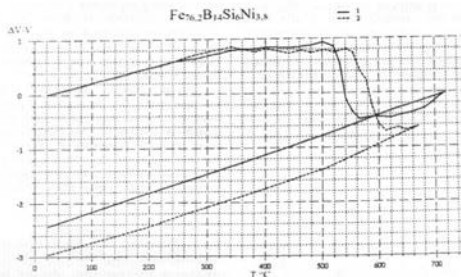


Рис.2. Температурна залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $\text{Fe}_{78.2}\text{B}_{14}\text{Si}_6\text{Ni}_{3.8}$ при неперервному нагріванні у вихідному стані (крива 1) та після попередньої термообробки: нагрівання зразка до $T = T_k - 50^\circ\text{C}$ (450°C) з наступною криообробкою (крива 2)

В таблиці 1 наведено температури початку інтенсивної кристалізації для вихідних зразків та після проведеної термообробки.

Таблиця 1

N	Склад аморфного сплаву	$T_k^0, ^\circ\text{C}$ вихідний зразок	$T_k^1, ^\circ\text{C}$, нагрівання до $T = T_k - 50^\circ\text{C}$ + криообробка	$\Delta T = T_k^1 - T_k^0, ^\circ\text{C}$
1	$\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$	480	500	20
2	$\text{Fe}_{60}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$	440	460	20
3	$\text{Fe}_{77.4}\text{B}_{16}\text{Si}_2\text{Ni}_{3.4}\text{Mo}_1$	475	500	25
4	$\text{Fe}_{80}\text{B}_{14}\text{Si}_6$	500	540	40
5	$\text{Fe}_{78.2}\text{B}_{14}\text{Si}_6\text{Ni}_{3.8}$	500	540	40
6	$\text{Fe}_{90}\text{B}_{10}$	380	440	60
7	$\text{Fe}_{83}\text{B}_{17}$	400	480	80

З таблиці 1 видно, що запропонована термообробка приводить до збільшення інтервалу температурної стабільності аморфних сплавів, про що свідчить збільшення температури початку інтенсивної кристалізації. Запропонований режим термообробки: нагрівання до $T = T_k - 50\text{K}$ з наступною криообробкою дозволяє розширити інтервали термічної стабільності бінарних аморфних

сплавів на $(60-80)^\circ\text{C}$, а багатоконцентних – на $(20-40)^\circ\text{C}$.

Аморфні сплави є гетерогенними системами: аморфна матриця – “вморожені” центри кристалізації, які знаходяться в

метастабільному стані, тому їх властивості істотно залежать від впливу зовнішніх умов (температура, тиск, час ізотермічної витримки та ін.), особливо в області фазових переходів. В щойно отриманих аморфних зразках завжди

присутні „вморожені“ центри кристалізації, при цьому об'ємна частка кристалічної фази в зразку не може перевищувати 10^6 (умова аморфності матеріалу). „Вморожені“ центри кристалізації мають різні розміри, як правило, (20-100) нм. З часом та при термообробці їх розмір може змінюватись. „Вморожені“ центри кристалізації можуть, наприклад, збільшуватись – тоді буде зменшуватись температурно-часова стабільність аморфних сплавів і відбуватись так зване „старіння“ аморфних сплавів.

На рис.3 представлено модель аморфної α -фази із центром кристалізації β -фази, сферичної форми з радіусом r_0 , який є „вмороженим“ в аморфну фазу [2].

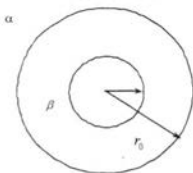


Рис.3. Ілюстрація моделі „вморожених“ центрів кристалізації в аморфній α -фазі

Умова термодинамічної рівноваги „вморожених“ центрів кристалізації–аморфна матриця за i -м компонентом описується рівністю $\Delta\mu_i = 0$ [2]. На процес зародження центрів кристалізації значно впливає різниця хімічних потенціалів $\Delta\mu_i$ між аморфією і кристалічною фазами, причому зменшення $\Delta\mu_i$ сприяє підвищенню термічної стабільності сплаву.

Збільшення інтервалу термічної стабільності можна пояснити тим, що проведена обробка аморфних сплавів призводить до істотного зміщення фазової рівноваги в гетерогенній системі: аморфна матриця–„вморожені“ центри кристалізації. При термообробці аморфних сплавів відбувається руйнування і дроблення „вморожених“ центрів кристалізації, присутніх в початкових зразках, що підтверджується збільшенням температури початку інтенсивної кристалізації сплавів.

Більш значне збільшення температури початку інтенсивної кристалізації для бінарних сплавів можна пояснити тим, що багатоконпонентні аморфні сплави є більш стабільними у порівнянні з бінарними, оскільки додавання кремнію та високотемпературних легуючих домішок, таких як молибден та ніобій, до базових бінарних сплавів системи Fe-B, гальмують дифузію бора в сплавах, отже і процес кристалізації.

Таким чином, результати проведених експериментальних досліджень підтверджують висновки теорії термодинамічної стабільності аморфних сплавів [2], яка показує можливість зсуву фазової рівноваги в системі аморфна матриця – „вморожені“ центри кристалізації за рахунок спрямованої зміни зовнішніх впливів та визначає способи розширення температурного інтервалу існування аморфного стану сплавів.

Висновки

1. Показано, що запропонований режим термообробки: нагрівання до $T = T_g - 50\text{K}$ з наступною кріообробкою, дозволяє розширити інтервали термічної стабільності бінарних аморфних сплавів на $(60-80)^\circ\text{C}$ багатоконпонентних – на $(20-40)^\circ\text{C}$.
2. Більш значне збільшення температури початку інтенсивної кристалізації для бінарних сплавів пояснюється тим, що багатоконпонентні сплави є термодинамічно стабільнішими, завдяки впливу легуючих домішок.
3. Підвищення термічної стабільності аморфних сплавів після запропонованої термообробки можна пояснити тим, що проведена обробка призводить до істотного зміщення фазової рівноваги в гетерогенній системі: аморфна матриця–„вморожені“ центри кристалізації, що супроводжується зменшенням розмірів „вморожених“ центрів кристалізації та гомогенізацією структури сплаву.

Література

1. Глезер, А.М. Аморфные та нанокристаллические структуры: сходства, различия, взаимные переходы / А.М. Глезер. // Российский химический журнал. – 2002. – т. XLVI. – № 5. – С.57 – 63.
2. Кристалізація і аморфізація металевих систем / А.П. Шпак, В.І. Лисов, Ю.А. Куницький, Т.Л. Цареградська; Київ: Академперіодика. 2002. – 207 с.

Надійшло до редакції 21.05.12

УДК 548:539.32, 534.222.2

Онанко А.П., к. ф.-м. н., с.н.с.

**Аналіз даних вимірювань параметрів
анізотропії ультразвукових швидкостей**

Розроблена автоматизована система чисельного аналізу даних вимірювань параметрів анізотропії ультразвукових швидкостей, яка забезпечує урахування впливу будови текстур SiO_2 та їх упорядкованості.

Ключові слова: анізотропія, ультразвукові швидкості, пружні постійні, текстура, симетрія.

*E-mail: onanko@univ.kiev.ua

Вступ

Найбільш інформативним параметром анізотропії є диференціальний коефіцієнт пружної анізотропії A_δ , величина якого характеризує відхилення текстури від найближчої до нього ізотропного середовища. За допомогою цього коефіцієнта можна порівняти анізотропію пружних середовищ різної симетрії. Величина коефіцієнта поперечно – ізотропної пружної анізотропії характеризує ступінь відхилення текстур ромбічної симетрії від найближчого до них за пружними властивостями поперечно – ізотропного середовища. Розповсюдження ультразвукових (УЗ) пружних хвиль супроводжується розсіюванням і поглинанням [1-2].

Експериментальні дослідження УЗ методами показують, що анізотропія пружних хвиль V обумовлена впливом кристалографічної орієнтації, формою зерен, орієнтацією мікротріщин. За характером орієнтації структурних елементів текстури можна розділити на три групи: однонаправлені, різнонаправлені в одній площині, просторово-орієнтовані.

Експеримент

Фазові швидкості V об'ємних пружних хвиль одержані за допомогою імпульсної установки УЗВШ на частоті $f \approx 1670$ кГц. Як п'єзовипромінювач і приймач повздовжніх і поперечних мод використовувалися п'єзокварци відповідної поляризації. Точність визначення фазових швидкостей повздовжніх та поперечних мод $\Delta V/V \approx 0,5\%$ [3]. На каменерізному станку були виготовлені зразки SiO_2 у вигляді

А. Р. Онанко*, PhD, Sen. Sci. Res.

**Data analysis of anisotropy parameters of
ultrasound velocities measurings**

The automated system of the numerical analysis of anisotropy parameters measurings of ultrasound velocities are created, which provide the account of influence texture structure of SiO_2 and their ordering.

Key words: anisotropy, ultrasound velocities, elastic constants, texture, symmetry.

кубоборомбодекаедрів, розміром $L = 30 \times 30 \times 30$ мм³. Забезпечувалася паралельність відповідних пар граней не гірше $\leq \pm 0,015$ мм. Орієнтація напрямків вимірів - з точністю $\Delta\alpha = \pm 1,5^\circ$.

Результати і їх обговорення

Розроблена автоматизована система (АС) обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей подана у вигляді блок-схеми на рис. 1.



Рис. 1. Загальна блок-схема автоматизованої системи обробки даних ультразвукових вимірювань анізотропії швидкостей.

У центрі блок-схеми розташоване "ядро" – сукупність процедур і функцій, які забезпечують дію програми як єдине ціле. "Ядро" фактично реалізує принцип модульності системи, на першому етапі роботи програми відповідні процедури і функції проводять ініціалізацію програми в цілому. При аналізі конфігурації програма переходить до етапу формування працездатного програмного комплексу, виходячи із наявних модулів і встановлених користувачем параметрів. Будова "ядра" зображена на рис. 2.

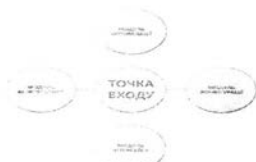


Рис. 2. Блок-схема будови "ядра" АС.

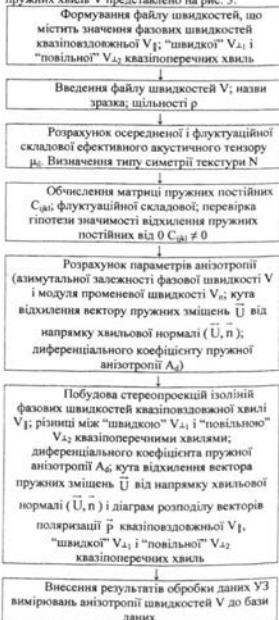
АС система дозволяє створити базу даних результатів обробки та працювати з нею для подальшого аналізу результатів. База даних результатів обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей містить: кількість зразків, що присутні у базі даних та екстремуми (мінімуми та максимуми) стереоексресій ізоліній фазових швидкостей квазіповздовжної хвилі V_1 ; різниці між "швидкою" і "повільною" квазіпоперечними хвилями $\Delta V_1 = V_{\Delta 1} - V_{\Delta 2}$; диференціальний коефіцієнт пружної анізотропії A_{Δ} кута відхилення вектора пружних змішень $\vec{U}$ від напрямку хвильової нормалі $(\vec{U}, \vec{n})$ і діаграм розподілу векторів поляризації $\vec{P}$ квазіповздовжної V_1 , "швидкої" $V_{\Delta 1}$ і "повільної" $V_{\Delta 2}$ квазіпоперечних хвиль, а також назви папок, до яких зберігаються звіти з результатами обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей.

Для обчислення осереднених пружних постійних C_{ijk} застосовується інваріантно-поляризаційний метод. Його особливістю є те, що ітераційна система рівнянь включає не тільки невідомі пружні постійні C_{ijk} , а і вектори пружних змішень $\vec{U}$ хвиль та обмеження на пружні постійні, що виникають із інваріантних величин тензору пружних постійних $\langle C_{ijk} \rangle$.

Задача обчислення значень фазових швидкостей V та векторів пружних змішень $\vec{U}$, якщо відомий осереднений тензор пружних постійних $\langle C_{ijk} \rangle$, зводиться до знаходження власних векторів і власних значень тензору Крістофеля L_{ij} . Необхідно знайти таку систему координат, в якій тензорна матриця діагональна. Отже шукають ортогональну матрицю, яка здійснює перехід від деякої довільної робочої системи координат, в якій задаються пружні модулі C_{ijk} , до власної системи координат приведенного тензора Крістофеля. Для цього вводять допоміжну

повернуту систему координат x_0 , вісь z якої співпадає з напрямком вектору хвильової нормалі n . Орієнтація двох інших осей x і y не має принципового значення.

Принципову схему алгоритму роботи АС чисельного аналізу і візуалізації даних УЗ вимірювань параметрів анізотропії швидкостей пружних хвиль V представлено на рис. 3.

Рис. 3. Принципова схема алгоритму роботи АС чисельного аналізу і візуалізації даних УЗ вимірювань параметрів анізотропії швидкостей V пружних хвиль.

У результаті числових розрахунків, проведених за схемою на рис. 3, отримуюмо урівноважені швидкості квазіповдовжкових V_1 і квазіпоперечних хвиль V_2 , значення акустичного тензора μ_0 в робочій системі координат, власні значення і їх довірчі границі та їх власні напрямки детермінованої складової акустичного тензора μ_0 зразків, ефективні пружні постійні C_{ij} зразків, параметри асимутальної анізотропії пружних хвиль, що представлені стереопроєкціями ізоліній фазових швидкостей квазіповдовжкової хвилі V_1 ; різниці між "швидкою" і "повільною" квазіпоперечними хвилями $\Delta V_2 = V_{21} - V_{22}$; диференціального коефіцієнта пружної анізотропії A_0 , кута відхилення вектора пружних зміщень $\vec{U}$ від напрямку хвильової нормалі ($\vec{U}, \vec{n}$) і діаграмами розподілу векторів поляризації $\vec{P}$ квазіповдовжкової V_1 ; "швидкої" V_{21} і "повільної" V_{22} квазіпоперечних хвиль.

Збереження результатів обробки відбувається після кожного етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V . Результати зберігаються у вигляді звіту, форма якого задається заздалегідь. В базу даних вносяться екстремуми (мінімуми та максимуми) стереопроєкцій ізоліній фазових швидкостей квазіповдовжкової хвилі V_1 , різниці між "швидкою" і "повільною" квазіпоперечними хвилями $\Delta V_2 = V_{21} - V_{22}$; диференціального коефіцієнта пружної анізотропії A_0 , кута відхилення вектора пружних зміщень $\vec{U}$ від напрямку хвильової нормалі ($\vec{U}, \vec{n}$) і діаграм розподілу векторів поляризації $\vec{P}$ квазіповдовжкової V_1 , "швидкої" V_{21} і "повільної" V_{22} квазіпоперечних хвиль, а також назва палки в яку зберігаються звіти з результатами обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V . Після введення назви і шільності ρ досліджуваного зразка та вибору режиму роботи програми кнопка "OK" стає активною. Після натискання кнопки "OK" у вікні вводу "назви" і "шільності" ρ зразка та вибору режиму роботи програми, якщо був вибраний "ручний" режим роботи програми, починається виконання першого етапу розрахунків та обробки даних. Ілюстрація вікна завершеного першого етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V зображена на рис. 4.



Рис. 4. Ілюстрація вікна завершеного першого етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V .

Результати математичного моделювання

Ілюстрація вікна завершеного другого етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V зображена на рис. 5.



Рис. 5. Ілюстрація вікна завершеного другого етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V .

Анізотропія пружних хвиль у кристалах проявляється не тільки в асимутальній залежності фазових V і променевих V_n швидкостей, але і у відхиленні векторів пружних зміщень $\vec{U}$ і променевих векторів від напрямку хвильової нормалі ($\vec{U}, \vec{n}$); в явищі акустичного подвійного променезаломлення і внутрішньої конічної рефракції, сингулярний поведінці векторів пружних зміщень $\vec{U}$ в околі акустичних осей. Ці властивості досліджені для

високосиметричних кристалів. Використання стереопроєкцій дозволило представити характер анізотропії пружних хвиль повністю, а не в окремих перетинах координатними площинами. На вказівні поверхні параметрів анізотропії пружних хвиль V впливає тип симетрії кристалу N . Ілюстрація вікна завершеного третього етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V зображена на рис. 6 та рис. 7.

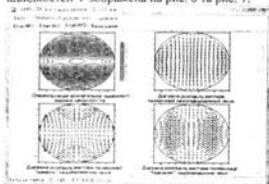


Рис. 6. Ілюстрація верхньої частини вікна завершеного третього етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V .

Вказівні поверхні параметрів анізотропії представляють у вигляді стереопроєкцій ізоліній. Ця поверхня дає вичерпуючі уявлення про просторові зміни параметрів анізотропії об'ємних пружних хвиль і відображає вплив симетрії. На азимутальну залежність диференціальних параметрів пружної анізотропії жорсткі обмеження накладає анізотропія середовища [4,5].

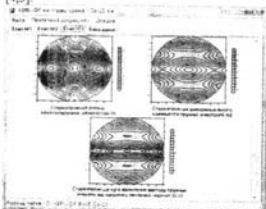


Рис. 7. Ілюстрація нижньої частини вікна завершеного третього етапу обробки даних УЗ вимірювань анізотропії швидкостей V .

Азимутальна анізотропія об'ємних пружних хвиль V проявляється: 1) у відмінності фазових V

і променевих швидкостей V_p пружних хвиль; 2) у відхиленні векторів пружних зміщень $\vec{U}$ і векторів променевих швидкостей пружних хвиль від напрямку хвильової нормалі ($\vec{U}, \vec{n}$); 3) у наявності поляризаційних ефектів, явищ акустичного подвійного променезаломлення, акустичної рефракції, сингулярній поведінці векторів пружних зміщень $\vec{U}$ в околі акустичних осей.

Висновки

Таким чином, розроблена АС чисельного аналізу і візуалізації даних УЗ вимірювань параметрів анізотропії швидкостей пружних хвиль може використовуватись для експрес-обробки експериментальних значень фазових швидкостей квазіповздовжньої V_{L1} , "швидкої" V_{L2} і "повільної" V_{L3} квазіпоперечних хвиль. Розглядаються програмно-алгоритмічні засоби АС чисельного аналізу і візуалізації даних УЗ вимірювань параметрів анізотропії швидкостей пружних хвиль, які забезпечують урахування впливу неоднорідності складу і будови текстур та їх упорядкованості.

Список використаних джерел

1. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах. – М.: Атомиздат, 1975. – 472 с.
2. Никаноров С.П., Кардашев Б.К. Упругость и дислокационная неупругость кристаллов. – М.: Наука, 1985. – 253 с.
3. Онанко А.П. Влияние водно на вказівку поверхню непружно-пружного тіла стопу $Ti_{62}Al_{38}$ // Металлофізика і новітні технології. – 2011. – 33, № 2. – С. 253-261.
4. Молодкий В. Б., Низкова А. И., Шпак А. П. и др. Дифрактометрия наноразмерных дефектов и гетерослоев кристаллов. – Киев: Академперіодика, 2005. – 364 с.
5. Шпак А. П., Кунацький Ю. А., Карбовський В. Л. Кластеры и наноструктурные материалы. – Киев: Академперіодика, 2001. – 588 с.

Надійшла до редколегії 28.05.2012

УДК 539.194

Охріменко Б.А., д. ф.-м.н., проф.,
Юшко О.О., асп.**Вплив деформації молекули SO_2 на прояв
девіації S-O зв'язку**

В наближенні гармонічних коливань побудовано петлю девіації молекули. Вона є чутливим індикатором, що реагує на попередню деформацію молекули, яку здійснено зсувом одного з атомів кисню від початкового положення рівноваги. Деформація молекули супроводжується зміщенням положення рівноваги іншого атома кисню. Виявлено характер залежності відповідної функції Лагранжа від орієнтації системи координат.

Ключові слова: молекула, зв'язок, девіація.

E-mail: bao@univ.kiev.ua

Вступ

На даний час при розгляді сил, які діють між атомами багатомірної молекули, цілком природним вважається уявлення, що міжатомні сили між двома хімічно зв'язаними атомами направлені уздовж прямої, яка з'єднує ядра цих атомів. Така точка зору сформувалася внаслідок широкого використання моделі, яку названо моделлю валентно-силового поля (ВСП). В цій моделі константами пружності характеризуються зв'язки, що існують між хімічно зв'язаними атомами, та кути між хімічними зв'язками. Модель ВСП досить часто використовується для розв'язання оберненої спектральної задачі коливної спектроскопії, що дозволяє визначити силову матрицю молекули. Однак на властивостях силовій матриці, одержаної таким чином, відбиваються особливості даної моделі, які не завжди відповідають реальній ситуації. Зазначені вище уявлення були б справедливими на 100%, якби модель валентно-силового поля відповідала б дійсності також на 100%.

Деякі чинники вказують на те, що існують певні відхилення від моделі ВСП. Використаємо як приклад молекулу води. Є дані, згідно з якими положення «центру мас» електронної оболонки молекули не співпадає з положенням ядра атома

Okhrymenko B.A., Doctor of phys-math.
sciences, professor, Yushko O.A. PhD student**Influencing of deformation of the molecule
 SO_2 on display of deviation of S-O bond**

In approaching of harmonic vibrations the loop of deviation of molecule is built. She is a sensible indicator, reactive on preliminary deformation of molecule which is carried out by the change of one of atoms of oxygen from initial position of equilibrium. Such deformation of molecule is accompanied by displacement of position of equilibrium of other atom of oxygen. Dependence of the proper function Lagrange on the orientation of the system of co-ordinates is proved.

кисню, а дещо зміщене в бік лінії Н-Н. Такий зсув представляється цілком природним при врахуванні ефективного позитивного заряду атомів водню. З цієї причини напрямком сил кулонівської взаємодії між атомом водню і «центром мас» електронної оболонки молекули не співпадатиме з напрямком прямої лінії, що з'єднує ядра атомів водню і кисню.

Будемо розуміти під напрямком результуючої сили напрямком, який відповідає максимальному значенню градієнта потенціальної енергії, що характеризує відхилення атома з положення рівноваги. Врахування цієї обставини приводить до висновку про можливість відхилення напрямку результуючого зв'язку між атомами кисню і водню від прямої, що з'єднує ядра цих атомів.

Кут, який утворюють між собою вказані два напрямки, названий кутом девіації хімічного зв'язку. Наскільки нам відомо, про існування явища девіації, зокрема, девіації O-H зв'язку молекули води, вперше в явному вигляді зроблено висновок в роботі [1]. Сам термін «девіація», що зазвичай застосовується для характеристики відхилення одного напрямку від іншого, запропонований в наступній роботі [2], де вивчено деякі особливості прояву цього явища для молекули води в конденсованому стані.

Таблиця 1. Елементи силової матриці $\vec{F} \cdot 10^{-3}$ молекули SO_2 .

№/№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	256.8	0	0	-128.4	-75.1	0	-128.4	75.1
3	0	0	119.4	0	-59.6	-59.7	0	59.6	-59.7
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	-128.4	-59.6	0	134.2	67.4	0	-5.9	-7.8
6	0	-75.1	-59.7	0	67.4	51.8	0	7.8	7.9
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	-128.4	59.6	0	-5.9	7.8	0	134.2	-67.4
9	0	75.1	-59.7	0	-7.8	7.9	0	-67.4	51.8

Згідно з результатами [1-3] кут девіації для вільної молекули води складає приблизно 2° , а для молекули води в рідкому стані він зростає до 7.5° . Кут девіації для молекули води в рідкому стані, як зазначено в роботі [3], корелює з результатами нейтронграфічних досліджень, згідно з якими в конденсованому середовищі спостерігається «викривлення» водневих зв'язків, тобто їх відхилення від прямої лінії на кут близький до 10° .

Виклене в [1] явище девіації – це результат розв'язання оберненої спектральної задачі коливної спектроскопії за допомогою відносно нового методу $3N$ -матриць [4], який, на відміну від багатьох інших, по-перше, не потребує використання попередніх припущень про характер силового поля молекули, по-друге, він може бути застосований як до вільних молекул, так і до молекул в конденсованому середовищі. Силова матриця має порядок $3N$, де N – кількість атомів багатоатомної молекули.

Подальші дослідження в цій галузі виявили наявність девіації хімічного зв'язку і у інших молекул, що належать як до групи симетрії C_2 , [5-11], так і до групи симетрії C_∞ [12-15]. Це явище спостерігається як у вільних молекул, так і в конденсованому середовищі. З огляду на це відомий факт викривлення водневих зв'язків можна розглядати як частинний випадок більш загального явища девіації хімічного зв'язку.

Слід сказати, що врахування ангармонічності нормальних коливань молекули води, яке здійснено в роботі [5], дозволило внести корективи щодо значень кута девіації хімічного зв'язку O-H молекули води як в газоподібному, так і в рідкому стані.

При малих пробних зміщеннях атома водню з положення рівноваги (близько 1% від довжини зв'язку O-H) кут девіації для вільної молекули води складає 3.8° , а для молекули води в рідкому стані він зростає до 7.7° . При збільшенні

пробного зміщення атома водню з положення рівноваги (близько 30% від довжини зв'язку O-H) для молекули води в рідкому стані кут девіації хімічного зв'язку O-H збільшується майже до 11° . Це стосується випадку, який відповідає стисканню O-H зв'язку. В випадку, що відповідає розтягненню O-H зв'язку (близько 30% від довжини зв'язку O-H), кут девіації хімічного зв'язку O-H для молекули води в рідкому стані зменшується приблизно до 5° . Звернемо увагу на те, що різні значення кута девіації для випадків стискання та розтягнення проявляються лише при врахування ангармонізму нормальних коливань.

В більшості цитованих вище робіт вивчалися молекули, що містять атоми водню. На відміну від цього в роботі [16] явище девіації вивчено для молекули SO_2 , обидва атоми якої належать до шостої групи елементів таблиці Менделєєва. При врахуванні ангармонічності коливань для молекули SO_2 було виявлено [16] деякі особливості прояву явища девіації в порівнянні із гідрідами атомів шостої групи таблиці Менделєєва.

Зокрема, якщо для води та інших гідрідів поступове розтягнення хімічного зв'язку супроводжується зменшенням кута девіації, то для молекули SO_2 , навпаки, спостерігається деяке збільшення кута девіації.

Що стосується стискання хімічного зв'язку, то для молекул гідрідів спостерігається збільшення кута девіації. Для молекули SO_2 в цьому випадку, навпаки, спостерігається деяке зменшення кута девіації.

Це дозволило висловити певні припущення про роль внутрішніх електронів атомів сірки та кисню.

Вказані факти стимулювали подальше вивчення таких проявів явища девіації для даної молекули, які характеризують її силове поле. Як показано в роботі [17], додаткову інформацію

про силове поле молекули можна одержати при вивченні впливу деформації молекули на прояви явища девіації.

Петля девіації деформованої молекули

Термін «петля девіації» є скороченою назвою графіку залежності в полярних координатах потенціальної енергії молекули від напрямку сталого за модулем зміщення одного атома молекули при незмінному положенні всіх інших атомів. Для побудови такого графіку необхідно мати відомості про силову матрицю.

Силу матрицю $\hat{V}$ (таб. 1) молекули SO_2 обчислено в роботі [16]. Відмітимо, що власні значення матриці

$$\hat{D} = \hat{M}^{-1} \hat{V}, \quad (1)$$

яка є добутком двох матриць, дорівнюють квадратам частот (см^{-1}) нормальних коливань молекули, де $\hat{M}$ - діагональна матриця мас атомів, які входять до складу молекули

$$\hat{M} = \text{diag}\{M, M, M, m, m, m, m, m\},$$

M и m - маси атомів сірки і кисню, відповідно. Власні значення матриці (1) відповідають квадратам частот нульових коливань ω_0^2 , від яких можна здійснити перехід до експериментальних частот ω , використавши співвідношення $\omega_0 = \omega(1 + u, \omega)$. Константи ангармонізму u , обчислені в роботі [16] і мають наступні значення: $u_1 = 5.643 \cdot 10^{-6}$, $u_2 = 4.505 \cdot 10^{-5}$, $u_3 = 5.182 \cdot 10^{-6}$.

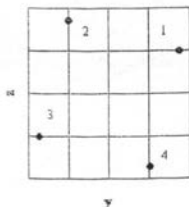


Рис. 1. Чотири послідовних розташування лівого атома кисню, що відповідають попередній деформації молекули. Центр квадрату відповідає положенню рівноваги.

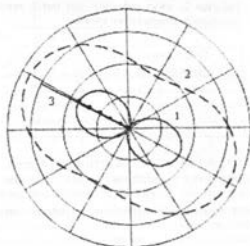


Рис. 2. Петля девіації недеформованої (1) та деформованої (2) молекули. Деформація зумовлена зміщенням лівого атому кисню з положення рівноваги в положення «1» на рис.1. Відрізок прямої (3) вказує на положення максимуму кривої (2). Точками вказано напрямки O-S.

Зазначимо, що вказані константи ангармонізму, за допомогою яких здійснюється редукція від експериментальних частот нормальних коливань до нульових частот, мають однакові значення для різних ізотопних модифікацій молекули. Розмірність даних констант ангармонізму є оберненою до розмірності частот нормальних коливань, що впливає з наведеної вище формули. Параметр форми коливань також знайдений в роботі [16] і дорівнює $\rho_1 = 0.847(^{12}\text{S}^{16}\text{O}_2)$.

Будемо вважати, що молекула розташована в площині yz , яка співпадає з площиною рисунка. Атом сірки знаходиться на осі z , атоми кисню розташовані нижче і симетрично відносно осі z .

Завернемо увагу на деякі особливості силових матриць $\hat{V}$ (таб. 1). Рядки та стовпчики силових матриць, які відповідають координатам x кожного атома молекули, дорівнюють нулю. Це пов'язано з тим, що відносно мале зміщення атома вздовж осі x практично не змінює його відстані від інших атомів і еквівалентне повороту трьохатомної молекули. Така операція не змінює потенціальної енергії вільної молекули. Подальші розрахунки в даній роботі виконано в наближенні гармонічних коливань.

Таблиця 2. «Кут девіації» для петлі девіації деформованої молекули SO_2 за рахунок зміщення положення лівого атома кисню.

Положення лівого атома О (рис. 1)	«Кут девіації» для двох значень множника r_d	
	$\Delta_d(r_d = 0.01)$	$\Delta_d(r_d = 0.005)$
1	2.142	1.642
2	-4.158	-1.508
3	-0.008	0.542
4	6.092	3.592

Петля девіації визначається як енергія, що характеризує зміщення одного атома в координатній площині yz декартової системи координат. Положення всіх інших атомів залишається незмінним. Зазвичай при дослідженні молекули SO_2 відповідне зміщення здійснюється для правого атома кисню, вектор зміщення якого можна представити в вигляді

$$\vec{v}_s(\varphi) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ y(\varphi) \ z(\varphi)]^T, \quad (2)$$

де знаком тильда «~» позначено операцію транспонування, зміщення $y(\varphi) = r_s \sin(\varphi)$, $z(\varphi) = r_s \cos(\varphi)$, r_s - множник, який визначає величину зміщення правого атома з положення рівноваги, кут φ визначає напрямок зміщення.

Для недеформованої молекули петля девіації визначається залежністю потенціальної енергії молекули від кута φ

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \vec{v}_s(\varphi) \tilde{F} \vec{v}_s(\varphi). \quad (3)$$

Відповідно до сформульованої вище задачі застосовується попередня деформація молекули. Вона здійснюється за рахунок зміщення в площині молекули лівого атома кисню, вектор зміщення якого можна представити в вигляді

$$\vec{v}_l(\psi) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ y(\psi) \ z(\psi) \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (4)$$

де $y(\psi) = r_d \sin(\psi)$, $z(\psi) = r_d \cos(\psi)$, r_d - множник, який визначає величину зміщення лівого атома з положення рівноваги. Кут ψ задає напрямок зміщення лівого атома при попередній деформації молекули.

Для деформованої молекули петля девіації визначається залежністю потенціальної енергії молекули від кута φ

$$V_s(\varphi) = \frac{1}{2} \vec{v}_s(\varphi) \tilde{F} \vec{v}_s(\varphi), \quad (5)$$

$$\text{де } \vec{v}_s(\varphi) = \vec{v}_s(\varphi) + \vec{v}_l(\psi).$$

Щоб одержати інформацію про залежність петлі девіації від характеру попередньої

деформації, було обрано для значень $i=1, 2, 3, 4$ наступні чотири значення кута $\psi_i = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$,

відповідно. Відлік кута ψ_i здійснюється проти годинникової стрілки таким чином, що нульове значення відповідає напрямку відрізка прямої лінії від лівого атома кисню до атома сірки. Таким чином, значення $i=1, 3$ відповідають стисненню та розтягненню відрізка O-S, а значення $i=2, 4$ - збільшенню та зменшенню кута $\angle \text{OSO}$. Значення множника обрано $r_d = 0.01$, що відповідає приблизно 30% довжини відрізка O-S. Таке значення обрано з метою зробити достатньо наочними зміни петлі девіації, які зумовлені попередньою деформацією.

Чотири вказаних положення лівого атома кисню при зміщенні його з положення рівноваги представлені на рис. 1. Попередня деформація молекули веде до наочних змін петлі девіації. Ці зміни ілюструє, зокрема, рис. 2, на якому показані дві петлі девіації - недеформованої

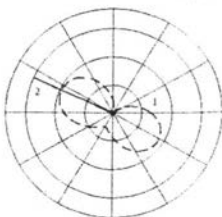
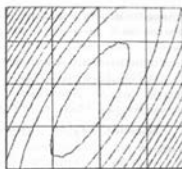


Рис. 3. Петля девіації (1) деформованої молекули та напрямок на максимум петлі (2). Деформація зумовлена зміщенням лівого атома кисню з положення рівноваги в положення «4» на рис.1.



а



б

Рис. 4. Контури сталих значень потенціальної енергії недеформованої (а) та деформованої (б) молекули в координатній площині yz , що співпадає із площиною молекули. Деформація зумовлена зміщенням лівого атому кисню з положення рівноваги в положення «3» на рис.1.

молекули та деформованої за рахунок зміщення лівого атому кисню в положення «1», що відповідає стисненню відрізка O-S. Можна бачити, що площа петлі девіації суттєво збільшується, що зумовлено енергією, яка витрачена на стиснення відрізка O-S. Кут девіації також збільшується.

Деформація молекули за рахунок зміщення лівого атому кисню в положення «4», що відповідає зменшенню кута між двома відрізками O-S, також супроводжується змінами петлі девіації. На рис. 3 можна бачити, що площа петлі девіації майже не змінюється, але вона стає несиметричною. Помітно збільшується кут девіації. Аналогічні зміни характеризують петлю девіації при деформації молекули за рахунок зміщення лівого атому кисню в положення «2», що відповідає збільшенню кута між двома відрізками O-S, але при цьому кут девіації приймає від'ємне значення.

Результати дослідження петлі девіації для деформованої молекули представлені в таблиці 2, де термін «кут девіації» взятий в лапки. Справа в тому, що при подальших дослідженнях було виявлено зміщення положення рівноваги правого атому кисню, яке зумовлено попередньою деформацією молекули. При наявності зміщення положення рівноваги правого атому кисню напрямок на максимум петлі девіації деформованої молекули в загальному випадку вже не можна розглядати як напрямок, який характеризує напрямок хімічного зв'язку. Докладніше про зміну положення рівноваги йдеться в наступному розділі.

Зміна положення рівноваги правого атому кисню

Попередня деформація молекули була здійснена за рахунок зміщення із положення рівноваги лівого атому кисню як показано на рис. 1. Цілком природним є припущення, що внаслідок попередньої деформації, зумовленої зміщенням лівого атому кисню при фіксованому положенні атому сірки, може змінитися положення рівноваги для правого атому кисню.

Зміни петлі девіації, які спостерігаються за рахунок зміщення лівого атому кисню в положення «2» або «4», можна легко пояснити, виходячи із загальних міркувань.

Справді, зміщення лівого атому кисню в положення «2» відповідає повороту відповідного відрізка O-S на певний кут за годинниковою стрілкою без зміни його довжини. Така операція має супроводжуватися зміною рівноважного положення правого атому кисню, яке має зміститися в тому ж напрямку на ту ж саму величину. Якщо тепер змістити правий атом в нове положення рівноваги, то це відповідатиме повороту молекули навколо атому сірки без будь-якої деформації молекули. Аналогічні висновки справедливі і для зміщення лівого атому кисню в положення «4».

Поворот молекули на деякий кут веде до того, що в новому її положенні вісь симетрії молекули вже не співпадає із координатною віссю z . Внаслідок цього обчислена раніше силова матриця $\hat{U}$ не відповідає повернутій молекулі. Відомо, що поворот молекули, наприклад, навколо осі x за годинниковою стрілкою є

еквівалентним повороту системи координат також навколо осі x на такий самий кут, але в протилежному напрямку. Ці міркування дозволяють обчислити нову силову матрицю $\bar{V}_x$ недеформованої повернутої молекули.

Позначимо матрицю перетворення системи координат при повороті її навколо осі x на кут ϕ як $\bar{C}_\phi$. Матрицю $\bar{V}_x(\phi)$ знайдемо із співвідношення

$$\bar{V}_x(\phi) = \bar{C}_\phi \bar{V}_x^0 \bar{C}_\phi^{-1}, \quad (6)$$

де

$$\bar{C}_\phi = \begin{bmatrix} \bar{c}_\phi & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{c}_\phi & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{c}_\phi \end{bmatrix},$$

символом $\bar{0}$ позначено нульову матрицю 3×3 .

З метою перевірки вказаних міркувань була побудована петля девіації недеформованої повернутої молекули з використанням матриці (6) при $\phi = 20^\circ$. Замість (3) використовувалося співвідношення

$$V(\phi, \varphi) = \frac{1}{2} \bar{v}_x(\varphi) \bar{V}_x(\phi) \bar{v}_x(\varphi) \quad (7)$$

Як і очікувалося, максимум петлі девіації відповідає куту $\Delta_d = \phi + \Delta = 20^\circ + 1.092^\circ$, де $\Delta = 1.092^\circ$ – кут девіації хімічного зв'язку O-S молекули SO_2 в її початковому положенні [16].

Для недеформованої молекули потенціальна яма, в якій знаходиться, наприклад, правий атом

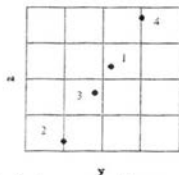


Рис. 5. Нові положення рівноваги правого атому кисню, що виникають внаслідок деформації молекули за рахунок зміщення лівого атому кисню. Нумерація положень рівноваги відповідає нумерації зміщень лівого атому (рис.1). Центр квадрату відповідає положенню рівноваги недеформованої молекули.

кисню представляє собою еліптичний параболоїд. Переріз такого параболоїду площиною, яка паралельна площині молекули, тобто координатній площині yz , представляє собою еліпс, напрямком малої осі якого відповідає максимуму петлі девіації. Точки еліпса відповідають певному сталому значенню потенціальної енергії. Обираючи різні значення енергії одержимо сімейство еліпсів. Таке сімейство еліпсів для правого атома недеформованої молекули представлено на рис. 4а. Центр квадрату співпадає з центром еліпсу і відповідає положенню рівноваги правого атома кисню недеформованої молекули.

Деформація молекули за рахунок зміщення лівого атома кисню з положення рівноваги супроводжується зміщенням положення рівноваги правого атома кисню, центр відповідного еліпсу зміщується відносно центра квадрата. Цю ситуацію ілюструє рис. 4б, на якому представлено розташування перерізів еліптичного параболоїда в випадку, коли лівий атом кисню зміщений з положення рівноваги в

точку «3» на рис. 1. Аналогічні розрахунки зроблено для всіх точок, що показані на рис. 1. Нові положення рівноваги правого атома кисню для цих випадків показані на рис. 5.

В випадку деформації «2» або «4» (рис. 1) нове положення рівноваги правого атома кисню (рис. 5) зміщується від початкового положення рівноваги на таку ж саму відстань, як і лівий атом. Потенціальна енергія молекули при зміщенні правого атома в нове положення рівноваги від початкового значення енергії недеформованої молекули, яке приймемо за 100%, зменшується до нуля. В результаті зміщення правого атома в нове положення рівноваги відновлюється початкова геометрія молекули.

В випадку деформації «1» або «3» (рис. 1) молекула набуває енергії приблизно на порядок більше, ніж в випадку деформації «2» або «4». Відстань нового положення рівноваги від початкового для правого атома приблизно в п'ять разів менша за відстань, на яку зміщується лівий атом. Потенціальна енергія молекули при зміщенні правого атома в нове положення рівноваги «1» або «3» (рис. 5) зменшується дуже мало, приблизно на 0,3%. Початкова геометрія молекули не відновлюється. При деформації «1» відстань O-S для лівого атома менша ніж для правого, а кут між напрямками O-S збільшується порівняно з недеформованою молекулою. При деформації «3» відстань O-S для лівого атома більша ніж для правого, а

кут між напрямками O-S зменшується порівняно з недеформованою молекулою.

Обговорення результатів та висновки

Дослідження петлі девіації деформованої молекули SO_2 показали, що напрямок на максимум петлі девіації є досить чутливим параметром, який реагує як на напрямок, так і на величину зсуву лівого атома кисню, за рахунок чого і здійснюється деформація молекули. Помічено, що деформація молекули за рахунок зміщення лівого атома кисню при незмінному положенні атома сірки супроводжується зміною рівноважного положення правого атома.

Виявлено, що збільшення (зменшення) довжини лівого відрізка O-S супроводжується зменшенням (збільшенням) кута між відрізками O-S. Ці результати корелюють із висловленням в [16] припущенням про вплив внутрішніх електронів на характер силового поля, в якому перебуває кожен атом молекули.

Якщо припустити, що між атомами кисню діють сили відштовхування, які характеризуються залежністю енергії від відстані типу $\frac{1}{r^n}$, то зсув лівого атома кисню в напрямку атома сірки веде до наближення його до правого атома кисню і зростання сил відштовхування між атомами кисню. Швидке зростання сил відштовхування із скороченням відстані між атомами часто розглядається як прояв принципу Паулі. Відповідний внесок в ці сили буде зумовлений не лише зовнішніми, а й внутрішніми електронами обох атомів кисню.

Правий атом кисню під дією зростаючих сил відштовхування має віддалятися від лівого атома кисню. Він буде рухатись ніби по жолобу вздовж напрямку «найменшого опору», тобто вздовж великої осі еліпса, який показано на рис. 4. Саме такому зсуву відповідають нові положення рівноваги правого атома кисню на рис. 5.

За наближеними підрахунками в законі типу $\frac{1}{r^n}$ оцінена константа n , приблизне значення якої $n \approx 9$.

Деформація молекули за рахунок зміни кута між відрізками O-S веде до передбачуваної зміни положення рівноваги правого атома. Переміщення правого атома в нове положення рівноваги еквівалентне повороту молекули на певний кут. Оскільки після такого повороту деформація молекули відсутня, то на перший

погляд здається, що її силова матриця залишається незмінною. Показано, що такий висновок не відповідає дійсності. В результаті повороту молекули її вісь симетрії не співпадає з жодною віссю декартової системи координат. Нову силову матрицю легко одержати, застосувавши до старої матриці перетворення подібності, яке змінює елементи силової матриці, але не змінює її власних значень. З метою перевірки властивостей нової матриці (6) обчислено петлю девіації повернутої молекули. Результати розрахунку за формулою (7) повністю узгоджуються із передбаченими.

Про залежність силової матриці від орієнтації системи координат можна зробити висновок без виконання будь-яких розрахунків. З таблиці 1 видно, що рядки силової матриці, які відповідають x координатам атомів молекули, містять лише нульові значення. Це зумовлено тим, що всі атоми молекули розташовані в площині yz . При цьому зміщення атомів вздовж осі x не супроводжується збільшенням потенціальної енергії молекули. Якщо ж системою координат повернути навколо осі z на 90° , то всі атоми молекули будуть розташовані в площині xz . Тепер нульові значення будуть мати ті рядки силової матриці, які відповідають y координатам атомів молекули. Звідси бачимо, що зміна орієнтації системи координат відносно молекули супроводжується змінами елементів силової матриці. Ці міркування ілюструє співвідношення (7), яке вказує на залежність виразу для потенціальної енергії від кута повороту ϕ системи координат навколо осі x . Зазначимо, що

$$\frac{\partial V(\phi, \theta)}{\partial \phi} = 0, \quad (8)$$

зокрема, і в точці $\phi = 0$.

Висловлені зауваження про залежність виразу для потенціальної енергії (7) від кута ϕ стосуються також функції Лагранжа, яка характеризує коливання молекули SO_2 і містить вираз (7). З (8) випливає, що така функція Лагранжа не є інваріантом по відношенню до операції повороту системи координат на малий кут. Відповідно до теореми Ньютон в такому випадку доведення закону збереження моменту кількості руху, яке базується на інваріантності функції Лагранжа, не поширюється як на молекулу SO_2 , так і на всі багатомірні молекули. Цей висновок підтверджує результати роботи [18], де останні питання розглянуті більш докладно.

Зроблений висновок корелює з тим фактом,

що поширена модель валентно-силового поля фактично еквівалентна відмові від постулату про наявність лише центральних сил, що діють між матеріальними точками. На цьому постулаті, як відомо, базується одне з доведень закону збереження моменту кількості руху.

Список використаних джерел

1. М.У.Білий, Б.А. Охріменко Оцінка силової матриці молекули H_2O в рідкому стані, *Укр. фіз. журн.*, 1999, т. 44, №3, с. 326-331.
2. M.U. Bilyi, G.I. Gaididei, B.A. Okhrimenko Deviation of OH bond in H_2O molecule, *Functional Materials*, 7, No.3, 2000, p.543-545.
3. Б.А. Охріменко, Г.І. Гайдідей Вплив міжмолекулярної взаємодії на напрямок О-Н зв'язку в молекулі води, *Укр. фіз. журн.*, 2003, т. 48, №7, с. 739-743.
4. М.У. Білий, Б.А. Охріменко, С.М. Яблочков Метод решения обратной спектральной задачи, *Известия вузов МВ ССО СССР, физика*, №4, 1987.-с.52-57.
5. Охріменко Б.А., Яблочкова К.С. Вплив ангармонізму нормальних коливань на девіацію О-Н-зв'язку молекули H_2O , *УФЖ-2007-Т. 52, №6, с.558-563.*
6. М.У.Білий, Б.А. Охріменко Девіація хімічного зв'язку S-H молекули H_2S , *Укр. фіз. журн.*, 2001, т. 46, №8, с. 825-828.
7. Гайдідей Г.І., Охріменко Б.А. Дослідження девіації ОН-зв'язку в молекулі H_2O , *КНУ, Вісник, Фізика*, 2002.- №4, с.22-24.
8. B.A. Okhrimenko, G.I. Gaididei and Samoilenko D.M. Intermolecular interaction influence on the direction of OH - bond in H_2O molecule. *Proceedings of SPIE*, Vol. 5507, p.184-189.
9. М.У.Білий, Г.І. Гайдідей, Б.А. Охріменко, В.П. Сахун, Д.М.Самойленко Силова матриця молекулярного аніона NO_2^- і девіація N-O - зв'язку, *Укр. фіз. журн.*, 2001, т. 46, №12, с.1256-1261.
10. Г.І. Гайдідей, Б.А. Охріменко, М.В. Шелехова, К.С., Яблочкова Оцінка силових матриць молекул H_2Se та H_2Te // *Вісник КНУ, Фізика*, №5, 2003,с.16-19.
11. Охріменко Б.А., Яблочкова К.С. Вплив ангармонізму нормальних коливань на девіацію зв'язків N-H молекул типу H_2X , // *Вісник КНУ. Сер. Фіз.-мат. науки.* - 2006. - № 4. - С. 449-458.
12. М. У. Білий, Б. А. Охріменко, Девиация N-H зв'язку в молекулі NH_3 , *УФЖ*, 2001, т. 46, №4, С.466-470
13. Б.А. Охріменко, Д.М. Самойленко Дослідження девіації N-H зв'язку молекули NH_3 , *КНУ, Вісник, Фізика*, 2002.- №4, С.45-49.
14. B.A. Okhrimenko, G.I. Gaididei, D.M. Samoilenko Chemical bonds deviation in NH_3 , PH_3 , AsH_3 , SbH_3 molecules, *Functional Materials*, 11, No.1, 2004, p.136-141.
15. Б.А. Охріменко, Д.М. Самойленко Девиация C-H зв'язку в рідкому та газоподібному хлорметані та йодметані// *УФЖ-2005-Т. 50, №6, С.544-550.*
16. Охріменко Б.А., Юшко О.А. Девиация химической связи S-O молекулы SO_2 , *Оптика и спектроскопия*, 2011, том 110, № 2, с. 211-217.
17. Матяш О.В., Охріменко Б.А. Девиация хімічного зв'язку деформованої молекули метану, *УФЖ-2009, Т.54, №12.- с.1167-1172.*
18. Охріменко Б.А., Про можливість зміни з часом момента імпульсу замкненої системи матеріальних точок, *УФЖ*, 2002, т.47, №5, С.500-507.

Надійшла до редколегії 13.06.2012

УДК 538.915

Плющай І.В.*, к.ф.м.н., доц.,
Макара В.А., д.ф.м.н., проф.,
Плющай О.І., к.ф.м.н., с.н.с.**Спін-поляризований
електронних спектрів
дислокацій в кремнії****розрахунок
крайової**

Електронні спектри та магнітний момент крайової дислокації в кристалічному кремнії розраховані методом функціоналу густини в узагальненому градієнтному наближенні. Обговорюються зміни густини електронних станів надкомірки, що містить дислокаційний диполь. Показана можливість формування ферромагнітного впорядкування на дислокаційних об'єктах зв'язках.

Ключові слова: кремній, крайова дислокація, електронна структура, магнітний момент.

* E-mail: iplyushay@univ.kiev.ua

Вступ. Експериментально встановлено [1], що пластична деформація Si супроводжується зміною поведінки магнітної сприйнятливості. Спостерігається зростання величини питомої магнітної сприйнятливості та з'являється нелінійно залежна від прикладеного магнітного поля складова. В роботі [2] показано, що ця «ферромагнітна» складова магнітної сприйнятливості в цілому діамagnetного Si корелює з концентрацією нерестових дислокацій, що утворюються при механічній обробці поверхні кремнію. В роботі [3] якісно проаналізована можливість виникнення ферромагнітного впорядкування на дислокаційних об'єктах зв'язках (ДОЗ).

Спеціальна увага в перелічених вище експериментальних дослідженнях приділялася контролю ферромагнітних домішок, які б могли спричинити таку «ферромагнітну» поведінку магнітної сприйнятливості. Було доведено [1-2], що саме дефекти та їх скупчення відповідають за зміну магнітної сприйнятливості деформованих (або іншим чином оброблених) зразків в порівнянні зі зразками-свідками.

В даній роботі проведений першопринципний спін-поляризований розрахунок електронних спектрів крайової дислокації в кремнії та проаналізована можливість виникнення ферромагнітного впорядкування на дислокаційних об'єктах зв'язках.

I.V.Plyushchay, PhD., docent,
V.A.Makara, Dr.Sci., Prof.,
O.I.Plyushchay, PhD., Sen. Sci. Res.**Spin-polarized calculation of edge
dislocation electronic spectra in silicon**

The electronic spectra and magnetic moment of the edge dislocation in crystalline Si are calculated by the density functional theory (DFT) in the general gradient approximation (GGA). Changes in the density of electronic states of the supercell with dislocation dipole are discussed. We have demonstrated the possibility of formation of ferromagnetic ordering on the dislocation dangling bonds.

Key Words: silicon, edge dislocation, electronic structure, magnetic moment.

Методика розрахунку. Розрахунок проводився методом функціоналу густини [4] в узагальненому градієнтному наближенні [5] за допомогою пакета програм ABINIT [6]. Числовий відпал положень атомів проводився за алгоритмом [7].

Добре відомо, що площиною легкого ковзання в Si є площина (111), відповідно ми розглядали крайову дислокацію, вектор Бюргерса якої лежить саме в цій площині. Для моделювання крайової дислокації ми вибрали надкомірку з 192 атомів ($a_x=4a(1\ 1\ 1)$, $a_y=2a(1\ -1\ 0)$, $a_z=a(1/2\ 1/2\ -1)$). Далі половина атомів з однієї з площин були видалені (12 атомів) так, що утворився диполь з двох крайових дислокацій, що можуть рухатися в площині ковзання (111). Періодичне повторення цієї надкомірки у просторі формує своєрідний «ліс» з паралельних дислокацій густиною $\sim 10^{13}\text{ см}^{-2}$. Зрозуміло це досить висока концентрація дислокацій, яка може реалізуватися лише поблизу границі гетеропереходу в епітаксійних гетероструктурах на основі Si [8].

Електронні спектри. Основною відмінністю розрахованого електронного спектру надкомірки, що містить дислокаційний диполь в порівнянні зі спектром монокристалічного Si є наявність гострого асиметричного піку в забороненій зоні під зоною провідності (рис.1). Крім того ширина забороненої зони дислокаційного кремнію помітно менша ніж у монокристалі кремнію.

Останнє ми пов'язуємо з наявністю поля напружень та утворення дислокаційних підзон над валентною зоною та безпосередньо під зоною провідності.

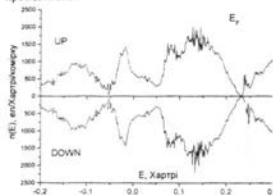


Рис.1. Енергетична залежність густини електронних станів надкомірки Si, що містить дислокаційний диполь.

Результати наших розрахунків якісно співпадають зі схемою зонної структури, відтвореною в [8] за результатами попередніх теоретичних оцінок та експериментальних досліджень гетеропереходу монокристалічний кремній – дислокаційний кремній.

Рівень Фермі, який в монокристалічному кремнії потрапляє на верхню границю валентної зони, в дислокаційному кремнії лежить в околі вищезазначеної гострої асиметричної підзони, так званої дислокаційної підзони. Аналіз локальних електронних спектрів, дозволяє зв'язати цей субпік з обірваними зв'язками на атомах, що розташовані на лінії дислокації та їх першими сусідами з боку видаленої напівплощини. Наявність частково заповненого гострого піку, пов'язаного з обірваними ненасиченими зв'язками в ядрі дислокації, згідно критерію Стонера може призводити до виникнення магнітного впорядкування за зонною схемою.

Проведений першопринципний спин-поляризований розрахунок дислокаційної надкомірки підтвердив, що основним станом буде дійсно спин-поляризований стан електронної підсистеми з вигрешом по енергії $5,5 \cdot 10^4$ Хартрі (0,015 eV) на надкомірці.

Енергетична залежність густини електронних станів дислокаційної надкомірки в проекції спин вниз та вгору представлені на рис.1. Видно, що спектри в цілому однакові за виключенням області вищезгаданої дислокаційної підзони в

околі рівня Фермі. Електронні стани дислокаційної підзони, що відповідають напрямку спіну вгору частково заповнені, а підзона спин вниз повністю незаповнена. Отже, ми маємо нескомпенсований магнітний момент на крайовій дислокації в кристалічному Si. Згідно проведеного першопринципного розрахунку цей момент становить $1,25\mu_B$ на надкомірці, що містить дислокаційний диполь. Нагадаємо, що вибрана нами надкомірка містить два відрізка ліній крайової дислокації (обірвана напівплощина) по одному атому на кожному. Отже можна вважати, що отриманий сумарний магнітний момент ($1,25\mu_B$) та вигреш по енергії за рахунок феромагнітного впорядкування дислокаційних обірваних зв'язків (0,015 eV) приходяться на два атоми, розташованих на лінії крайової дислокації в Si.

Список використаних джерел

1. Цмоць В.М. та ін. Дослідження магнітної сприйнятливості пластично деформованих монокристалів кремнію та германію // УФЖ – 2009, – т.54, №10. – с.1009-1015.
2. Новиков М.М. та ін. Детектування неростових дислокацій в монокристалічному кремнії методом измерения магнітної восприимчивости // УФЖ. - 1996. - Т.41, № 11-12. - С.1127-1130.
3. Бойчук В.И., Цмоць В.М., Янишин Б.В. Влияние дислокаций на ферромагнитные свойства пластически деформированных кристаллов кремния // УФЖ – 1988. – т.33, №10. – с.1515-1519.
4. Gonze X., Amadon B., et.al. ABINIT : First-principles approach of materials and nanosystem properties // Computer Phys. Comm. – 2009. – 180. – p. 2582-2615.
5. J.P.Perdew, K.Burke, M.Ernzerhof Generalized Gradient Approximation Made Simple // Phys. Rev. Lett. - 1996. – 77. – p. 3865-3868.
6. <http://www.abinit.org/>
7. Schlegel H. B. Optimization of equilibrium geometries and transition structures // J. Comput. Chem. – 1982. – 3. – p. 214-218.
8. Shklyarov A. A. et al Electroluminescence of dislocation-rich Si layers grown using oxidized Si surfaces // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2011. – 44. – p. 025402-8.

Надійшла до редколегії 22.06.2012.

Підписано до друку 09.07.2012.
Формат 70х100^{1/16}. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 25,8. Наклад 350 прим.
Зам. № 135.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел./факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail iaa@dstati.kiev.ua

100101010101

101110110101

10000110101

101010101011

101010101010

00011010101

010101010101

10000110101

010101010101

100101010101

100010101010

100001001010

100010010101

100001010101

000001010101

001010001010

000011101010

000101010101

000101010101

010101010101

000101010101