



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 1

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

17909JB
філія вул. Сеченова Ц 40.00

ВИПУСК №1 2012

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1, 2012**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусаїнов Денис Ях'євич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Волошин Олексій Федорович, доктор технічних наук, доцент;
- Гарашенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Заславський Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кудін Володимир Іванович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макарець Микола Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестюк Микола Олексійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Погорілий Сергій Дем'янович, доктор технічних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмельюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-036-4
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Городня Д.М. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою	9
Довгай Б.В. Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з Орлічевою правою частиною	13
Доронін О.В. Робастні оцінки для сумішей з гауссовою компонентою	18
Касянюк М.В. Про напівдосконалі напівдистрибутивні кільця	24
Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д., Друшляк М.Г. Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп	26
Скуратовський Р.В. Ідеали одногілкових особливостей кривих типу N	33
Циганівська І.М. Черепичні порядки в $M_3(D)$ скінченної глобальної розмірності	37
Шви́ров В.В. Про кількість класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець	44

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Борисейко О.В., Ковальчук В.Ф., Пучко Н.П. Напружено-деформівний стан електродовідної неферромагнітної сфери при зануренні у нестационарне магнітне поле	51
Вакал Ю.Є. Оцінка кількості збурених ультрасубгармонік системи типу "сферичний маятник"	55
Голіченко О.Л., Малюга В.С., Мелешко В.В. Асимптотична поведінка коефіцієнтів розв'язку задачі скінченному циліндрі стаціонарної Стоксової течії в	61
Горошко О.О., Кикоть С.В. Нелінійні коливання гнучкого трубопроводу з потоком рідини з нульовим початковим натягом	65
Григоренко О.Я., Вовкодав О.В., Яремченко С.М. Напружено-деформований стан нетонких сферичних оболонок змінної товщини при різних способах закріплення країв	69
Губська В.В., Лимарченко О.С. Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною	73
Смелянов В.В., Отто К.В., Розумнюк В.І., Отто Г.К., Яровой Л.К. Лазерний доплерівський вібретр зі зворотнім зв'язком в напівпровідниковому лазері	77
Івашук О.В. Періодичні розв'язки імпульсної системи з двома точками розриву в нефіксовані моменти часу	83
Ільченко Ю.В. Обмежені розв'язки абстрактного диференціального рівняння з запізненням аргументу та необмеженим операторним коефіцієнтом	89
Краснопольська Т.С., Спектор В.М. Хрестоподібні хвилі у прямокутному каналі скінченних розмірів	93
Креневич А.П. Чисельне інтегрування диференціальних рівнянь не розв'язаних відносно похідної	101
Рустамова А.В. Умови існування слабких квазіперіодичних розв'язків лагранжевих систем на одиничній сфері	103
Семків М.Я. Поширення нормальних SH-хвиль у хвилеводі з розрізом	109

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бейко І.В., Зінко П.М. Числові алгоритми асимптотично-розв'язуючих операторів для розв'язування крайових задач математичної фізики з підвищеною точністю	115
Бондарець І. М. Метод побудови дерев прийняття рішень за лінійний час	121
Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання процесів консолідації ґрунтів з урахуванням нелінійного закону фільтрації в умовах тепло-солепереносу	125

Власюк А.П., Федорчук Н.А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації солових розчинів	131
Власюк А.П., Цвєткова Т.П. Математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні солових розчинів в областях повного і неповного насичення	137
Гарашенко Ф.Г., Мороз О.Г. Ідентифікація нелінійної системи Гаммерштейна за допомогою генетичного алгоритму	145
Гололобов Д.О. Емпірична оцінка невідомого параметра випадкового поля із сильним перемішуванням	151
Джалладова І.А., Ружечкова М., Міхалкова М. Стабілізація класу систем диференціальних рівнянь з марковськими параметрами і білим шумом	155
Донченко В.С., Зінько Т.П. Комбінована процедура класифікації мовних сигналів	161
Дорошенко А.Ю., Акуловський В.Г. Вихідне проектування алгоритмів при алгебраїчному підході	167
Жирицький В.П. Структура та представлення тестових завдань закритої форми у системі дистанційного навчання «VITAVA»	173
Коваленко М.А. Аналіз автоматичних торгових систем. Оцінка результатів діяльності систем на прикладі даних "Fund-52"	179
Королік Р.П., Пічкур В.В. Про практичну стійкість дискретних множинних систем	185
Лівінська Г.В., Лебедєв Є.О. Гаусівська апроксимація мереж із змінною інтенсивністю вхідного потоку	189
Мащенко С.О. Бовсунівський О.М. Задача багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв	193
Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Двозначні та багатозначні композиційно-номінативні логіки	199
Погорілий С.Д., Білоконь І.В., Проців Т.Ю. Формування та дослідження паралельних схем алгоритму Данцига	207
Росада Т.В. Формалізація багатозначного іменування у мовах програм над номінативними даними	217
Скобєльєв В.В. Аналіз автоматів, які визначено на еліптичних кривих	223
Тарасова О. В. Задача розміщення ефірних подій	231
Терещенко В.М., Фокін А.О. Регіональний пошук для G_f -regiony	235
Уманський В. І. Алгоритм порівняння відбитків пальців за структурою сусідства особливих точок	239
Шатирко А.В. Стабілізація в системах непрямого регулювання методом функціоналів Ляпунова-Красовського	243

РАДІОФІЗИКА

Богданов Р.В., Костюкевич О.М.. Комп'ютерне моделювання магнетронного розпилювального пристрою з двома зонами ерозії	249
Веклич А.М., Сорока П.В. Дослідження плазми електродугового розряду між композитними електродами на основі міді в потоці аргону	261
Касумов М.М., Соломинко Ол.В. Про траскторію формування фулеренів у плазмі порожнього електрода дугового розряду	267
Крух І.С., Лушєвський О.В. Газо-аналітичні методи контролю токсичних газів у повітрі	271
Мартинш С.В., Сидоренко В.С. Особливості поверхневих хвиль в лівих середовищах	275
Мойсєєнко В.А., Мєлков Г.А. Дослідження спектрів МСХ в тонких плівках ЗІГ за допомогою нелінійної взаємодії спінових хвиль	279

Находкін М.Г., Куліш М.П., Литвин П.М., Родіонова Т.В., Сутягіна А.С. Вплив товщини на структурні характеристики нанокремнієвих плівок	285
Павлюк С.П., Кузьмич Р.Ю. Зміна параметрів та характеристик діодного кристала під дією імпульсу ударного струму	289
Первак Ю.О., Федоров В.В. Вплив неузгодженості резонаторів на спектральні характеристики і просторовий розподіл електричного поля в 1-D фотонних кристалах з трьома пів хвильовими резонаторами	295
Сохацький В.П. Спінова інжекція в Si з феромагнетика	299

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д., Білоус О.І. Розрахунки амплітуд параметричного рівняння стану різноманітних речовин поблизу критичної точки	305
Беженар А.А., Д. Занмін, Копань В.С., Рево С.Л., Хуторянська Н.В. Рухливість зарядів в наноструктурних композиціях Al-Cu та фторопласт-терморозширений графіт	307
Вашенко В.М., Злочевський В.В., Хадж Фараджаллах Даббах А., Скалозубов К.В. Ризик-орієнтований підхід оцінки екологічної безпеки об'єктів з радіоактивними відходами	311
Драпівковський М.А., Ростопіра Т.В., Заболотний М.А., Барабаш Ю.М., Куліш М.П., Дмитренко О.П., Курочка Л.І. Вивчення кінетики електронного транспорту в бактеріальних реакційних центрах з фулеренами	313
Захаренко М.І., Семенко М.П., Орленко М.В., Наконечна О.І., Сендєцький О.В. Магнітні властивості та електроопір швидко загартованих сплавів на основі системи Fe-Si-B	321
Зизак М.В., Васильєв Ю.О., Кисіль І.В. Швидка реконструкція K0s мезонів у експерименті CBM	325
Карленко Б.В., Макаренко О.В., Поперенко Л.В. Вплив забруднень на розсіювальні характеристики поляроїдних плівок	329
Копань В.С., Розуван С.Г. Дослідження булату на тунельному мікроскопі	333
Кулаков І.С., Васильєв Ю.О., Кисіль І.В. Пошук D0-мезонів у експерименті CBM	339
Овсієнко І. В., Перець Ю. С., Вовченко Л. Л., Козаченко В. В., Мацуї Л. Ю. Мікроструктура функціоналізованого TPI	345
Рево С.Л., Будзуляк І.М., Рачій Б.І., Кузишин М.М. Фізичні засади синтезу карбонового матеріалу для суперконденсаторів	353
Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Скануюча тунельна мікроскопія тонких плівок барьника	359

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

Д.М. Городня, аспірант

D.M. Gorodnya, PhD student

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою**Existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for a heat equation with general stochastic measure**

Доведено існування та єдиність слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, керованого загальною стохастичною мірою.

Existence and uniqueness of the weak solution of the Cauchy problem for a heat equation driven by the general stochastic measure is proved.

Ключові слова: стохастична міра, стохастичне рівняння теплопровідності, задача Коші, слабкий розв'язок.

Key Words: stochastic measure, stochastic heat equation, Cauchy problem, weak solution.

E-mail: gorodnya-darya@i.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Для моделювання поведінки реальних фізичних і біологічних процесів при наявності випадкових впливів часто використовується рівняння теплопровідності, яке містить доданок, заданий стохастичним інтегралом [1,2]. У даній роботі випадковий вплив описується за допомогою інтеграла за стохастичною мірою, на яку накладається тільки умова σ -адитивності за ймовірністю.

еквівалентності. Під збіжністю в L_0 будемо розуміти збіжність за ймовірністю.

Означення 1. Узагальненою випадковою функцією (у.в.ф.) називається лінійне неперервне відображення $\xi : D(\mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow L_0$.

У подальшому через $D'_t(\mathbb{R}^{d+1})$, $D'(\mathbb{R}^{d+1})$, (F, φ) , (f, φ) позначатимемо відповідно простір усіх у.в.ф., стандартний простір узагальнених функцій [3, § 5.3] та дії функцій $F \in D'_t(\mathbb{R}^{d+1})$ та $f \in D'(\mathbb{R}^{d+1})$ на основі функцію $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$. Властивості у.в.ф. досліджуються в [4,5]. Зокрема, справджується таке твердження.

Для випадку d просторових змінних розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності ми визначаємо як деяку узагальнену випадкову функцію, визначену на просторі $D(\mathbb{R}^{d+1})$ основних функцій з $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ з компактним носієм. Це дозволяє донести існування та єдиність розв'язку при умовах, подібних до тих, при яких у [3] встановлено існування та єдиність узагальненого розв'язку для звичайного рівняння теплопровідності.

Позначимо через $L(D)$ та $\mathcal{E}$ відповідно диференціальний оператор з постійними коефіцієнтами та його фундаментальний розв'язок (див., наприклад, [3, § 11.2]).

Теорема 1. [5] Нехай для функції $F \in D'_t(\mathbb{R}^{d+1})$ існує згортка $F * \mathcal{E}$. Тоді рішення $L(D)U = F$ має розв'язок в $D'_t(\mathbb{R}^{d+1})$. Цей розв'язок записується у вигляді $U = F * \mathcal{E}$ і є єдиним у класі всіх функцій із $D'_t(\mathbb{R}^{d+1})$, для яких існує згортка з $\mathcal{E}$.

Інший підхід, при якому розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності визначається як деякий процес V_t , $t > 0$, такий, що при фіксованому $t > 0$ V_t є узагальненою випадковою функцією, визначеною на просторі Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ швидко спадаючих основних функцій, запропоновано в [4].

Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{R}^{d+1})$ – σ -алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^{d+1}$.

Означення 2. Стохастичною мірою називається σ -адитивне відображення $\mu : \mathbf{B} \rightarrow L_0$.

2 Попередні відомості

Нехай L_0 – множина всіх випадкових величин, які задані на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ і розглядаються з точністю до P -

У роботі [6] визначено $\int_A f d\mu$, де $A \in \mathbf{B}$, f – дійсна вимірна функція, та досліджено його властивості. Зокрема, довільна обмежена вимірна функція є інтегровною, для цього інтеграла справджується аналог теореми Лебега про

мажоровану збіжність (див. наслідок 1.2 [6] або твердження 7.1.1 [7]) та теорема про диференціювання інтеграла по параметру [4], а також кожна стохастична міра μ визначає у.в.ф. $\dot{\mu}$ за правилом

$$(\dot{\mu}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x, t) d\mu(x, t), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Визначимо, що похідна від випадкового процесу $\eta : (a; b) \rightarrow L_0$ розглядається у сенсі збіжності за Яворістю.

3 Основні результати

Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності із стохастичною мірою, яка у символічному записі має вигляд

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta_x V + \dot{\mu}, \quad t > 0, \quad V|_{t=0+} = \dot{\nu}, \quad (1)$$

відносно невідомої функції $V \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$. Тут $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, μ – стохастична міра на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^{d+1})$, рівна нулю на усіх вимірних підмножинах множини $K := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : t < 0\}$, ν – стохастична міра на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$.

Означення 3. У.в.ф. $V \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ називається розв'язком задачі Коші (1), якщо $V = 0$ при $t < 0$ і для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$

$$- \left(V, \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right) = a^2 (V, \Delta_x \varphi(x, t)) + \quad (2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x, t) d\mu(x, t) + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) d\nu(x).$$

Аналогічно до [3, §5.5] $V = 0$ при $t < 0$, якщо $(V, \varphi) = 0$ для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$, такої, що $\text{supp } \varphi \subset K$.

Розв'язок задачі Коші (1) будується з урахуванням формули Пуассона [3, §16.3] таким чином. Нехай

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

– фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності і при $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$

$$v_1(x, t, \varphi) := \int_t^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(y - x, s - t) \varphi(y, s) dy;$$

$$v_2(x, \varphi) := v_1(x, 0, \varphi).$$

Теорема 2. Розв'язком задачі Коші (1) є у.в.ф.

$$(V, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0, \infty)} v_1(x, t, \varphi) d\mu(x, t) + \quad (3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_2(x, \varphi) d\nu(x), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Доведення. Зафіксуємо $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$ та $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$. З фінитності φ випливає, що $\text{supp } \varphi \subset (-L; L)^{d+1}$ для деякого $L > 0$, а отже

$$v_1(x, t, \varphi) =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^d} \int_0^L d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x + 2a\sqrt{\tau}\xi, t + \tau) e^{-|\xi|^2} d\xi.$$

Тому при фіксованому φ функція v_1 неперервна і обмежена по сукупності змінних x, t на $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$; а отже, вона інтегровна по стохастичній мірі μ . Також, позначивши δ -функцію Дірака через δ , при фіксованій $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ дістанемо (див. [3, §11.6]):

$$\varphi(x, t) = (\delta(y - x, s - t), \varphi(y, s)) =$$

$$\left(\mathcal{E}(y - x, s - t), -\frac{\partial \varphi(y, s)}{\partial s} - a^2 \Delta_y \varphi(y, s) \right) =$$

$$\int_t^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(y - x, s - t) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial s} - a^2 \Delta_y \varphi \right) dy.$$

Тому

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times [0, \infty)} \varphi(x, t) d\mu(x, t) = \\ & - \int_{\mathbb{R}^d \times [0, \infty)} v_1 \left(x, t, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) d\mu(x, t) - \\ & a^2 \int_{\mathbb{R}^d \times [0, \infty)} v_1(x, t, \Delta_y \varphi) d\mu(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

а отже, у.в.ф.

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0, \infty)} v_1(x, t, \varphi) d\mu(x, t), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1}),$$

є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta_x V + \dot{\mu}, \quad t > 0, \quad V|_{t=0+} = 0. \quad (5)$$

З урахуванням рівностей (4) при $t = 0$ аналогічно до (5) можна переконатися, що у.в.ф.

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_2(x, \varphi) d\nu, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1}),$$

є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta_x V, \quad t > 0, \quad V|_{t=0} = \nu. \quad (6)$$

Тому для закінчення доведення досить зауважити, що сума розв'язків задач (5, 6) є розв'язком задачі Коші (1). Теорему 2 доведено.

Зафіксуємо стохастичні міри $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, які задані на $B(\mathbb{R}^{d+1})$ та $B(\mathbb{R}^d)$ відповідно, і покладемо при $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$

$$(F_{\bar{\mu}}, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x, t) d\bar{\mu}(x, t), \quad (7)$$

$$(F_{\bar{\nu}}, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) d\bar{\nu}(x). \quad (8)$$

У подальшому використовується така лема.

Лема 1. Існують згортки $F_{\bar{\mu}} * \mathcal{E}$ та $F_{\bar{\nu}} * \mathcal{E}$.

Доведення. Зафіксуємо $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$ і збіжну до 1 в $\mathbb{R}^{2(d+1)}$ послідовність $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}^{2(d+1)}$ [3, §7.4]. Для існування згортки

$$F_{\bar{\mu}} * \mathcal{E}$$

досить довести [5], що границя за імовірністю при $k \rightarrow \infty$ послідовності

$$(F_{\bar{\mu}}, (\mathcal{E}(y, s), \eta_k((x, t), (y, s))\varphi(x + y, t + s))) = \quad (9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} d\bar{\mu}(x, t) \int_{\mathbb{R}} ds \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_k(x, t, y, s) dy, \quad k \geq 1,$$

де

$$\Phi_k(x, t, y, s) = \mathcal{E}(y, s) \eta_k((x, t), (y, s)) \varphi(x + y, t + s),$$

існує і дорівнює

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} d\bar{\mu}(x, t) \int_{\mathbb{R}} ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(y, s) \varphi(x + y, t + s) dy. \quad (10)$$

Зауважимо, що послідовність $\{\eta_k\}$ рівномірно обмежена на $\mathbb{R}^{2(d+1)}$ деякою сталою $C > 0$, а також на кожному компакт в $\mathbb{R}^{2(d+1)}$ дорівнює 1 починаючи з деякого номера. Також із фінитності φ випливає, що

$$\exists L > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \forall s \in \mathbb{R}, |s| > L: \quad \varphi(\xi, s) = 0. \quad (11)$$

Зафіксуємо $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Внаслідок теорему Лебега про мажоранову збіжність

$$\int_{-L}^{-L-t} ds \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_k(x, t, y, s) dy \rightarrow$$

$$\int_{-L-t}^{-L-t} ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(y, s) \varphi(x + y, t + s) dy, \quad k \rightarrow \infty,$$

тобто, з урахуванням (11), послідовність підінтегральних функцій, які інтегруються в (9) по стохастичній мірі μ , поточно збігається до підінтегральної функції з (10).

Легко переконатися, що вказана послідовність підінтегральних функцій рівномірно по $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ обмежена сталою $2CL\|\varphi\|_{\infty}$. Тому границя (7) існує і рівна вищезгаданій величині, що задається інтегралом (10), за теоремою Лебега про мажоранову збіжність для інтеграла за стохастичною мірою.

Аналогічно перевіряється, що існує за імовірністю

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F_{\bar{\nu}}, (\mathcal{E}(y, s), \eta_k((x, t), (y, s))\varphi(x + y, t + s))) \quad (12)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} d\bar{\nu}(x, t) \int_{\mathbb{R}} ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(y, s) \varphi(x + y, s) dy,$$

а отже, і згортка $F_{\bar{\nu}} * \mathcal{E}$. Лему 1 доведено.

Позначимо через $\mathcal{G}$ набір усіх у.в.ф., які зображуються у вигляді лінійних комбінацій у.в.ф. виду (7) та (8).

Теорема 3. Задача Коші (1) має єдиний розв'язок у множині усіх у.в.ф., для яких існує згортка з $\mathcal{E}$. Цей розв'язок зображується у вигляді (9).

Доведення. Внаслідок означення 3 у.в.ф. V є розв'язком задачі Коші (1) тоді і тільки тоді, коли V є розв'язком в $D'_s(\mathbb{R}^{d+1})$ рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a^2 \Delta_x V = F_{\bar{\mu}} + F_{\bar{\nu}}, \quad (13)$$

а також $V = 0$ при $t < 0$. Тут у.в.ф. $F_{\bar{\mu}}$, $F_{\bar{\nu}}$ будуються за допомогою стохастичних мір μ , ν за правилами (7) та (8) відповідно. Зауважимо, що $(F_{\bar{\mu}} + F_{\bar{\nu}}) \in \mathcal{G}$, а також із лінійності згортки та леми 1 випливає що згортка $F * \mathcal{E}$ існує для кожної $F \in \mathcal{G}$.

Оскільки стохастична міра μ рівна нулю на вимірних підмножинах множини K , то, внаслідок (3, 10, 12) для розв'язку V задачі Коші (1), який отриманий в теоремі 2 і задається формулою (3), виконується рівність $V = F_{\bar{\mu}} * \mathcal{E} + F_{\bar{\nu}} * \mathcal{E}$. Як і при доведенні леми 1 встановлюється, що існує згортка $V * \mathcal{E}$. Тому внаслідок теорема 1 рівняння (13) має єдиний розв'язок у класі всіх у.в.ф., для яких існує згортка з $\mathcal{E}$. Цей розв'язок задається формулою (3). Теорему 3 доведено.

Література

1. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика. - М.: Физматлит, 2001. - 528 с.
2. Sturm A. On convergence of population processes in random environments to the stochastic heat equation with colored noise // Electron. J. Probab. - 2003. - 8, N 6. - P.1-39.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
4. Радченко В. Н. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журнал. - 2008. - 60, №12. - с. 1675-1685.
5. Городня Д. М. Про існування та єдиність розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь із загальними стохастичними мірами // Теорія ймовір та матем.статист. -2011. - Вип. 85. - с. 50 -55.
6. Радченко В. Н. Интегралы по общим случайным мерам// Труды института математики НАН Украины, 1999. - 196 с.
7. Kwapień S., Woyczyński W. A. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. - Boston: Birkhäuser, 1992. - 360 p.

Надійшла до редакції 23.03.2011

УДК 519.21

Б.В. Довгай, к.ф.-м.н.

**Узагальнені розв'язки гіперболічного
рівняння з Орлічевою правою частиною**

Розглядається гіперболічне рівняння з Орлічевою правою частиною. Знайдені умови існування узагальненого розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: узагальнені розв'язки, строго Орлічевий випадковий процес, гіперболічне рівняння.

E-mail: bogdov@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Робота присвячена узагальненому розв'язку гіперболічного рівняння з нульовими початковими та граничними умовами та строго Орлічевою правою частиною. Досліджуються достатні умови існування узагальненого розв'язку цього рівняння.

2 Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 2.1 ([4]). Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається **С-функцією**, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.2 ([4]). Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим **С-функцією** $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ , що $EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

Простір Орліча $L_U(\omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U} = \inf \left\{ r > 0 : EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 1 \right\}.$$

Означення 2.3 ([4]). Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.

B.V.Dovgay, Ph.D.

**Generalized solutions of the hyperbolic
equation with Orlicz right part**

A hyperbolic equation with Orlicz right side is considered. The conditions for existence of generalized solution of this problem are found.

Key Words: generalized solutions, strictly Orlicz random process, hyperbolic equation.

Означення 2.4 ([4]). **С-функція** $U(x)$ підпорядкована **С-функції** $V(x)$ ($U \prec V$), якщо існують $x_0 \geq 0$ та $C > 0$ такі, що при $|x| > x_0$ має місце нерівність $U(x) \leq V(Cx)$.

Означення 2.5 ([5]). Нехай $U(x)$ – така **С-функція**, що $V(x) = x^2$ підпорядкована функції $U(x)$. Сім'я Δ випадкових величин ξ , $E\xi = 0$, з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевою, якщо існує стала C_Δ така, що для скінченної кількості випадкових величин $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ виконується нерівність

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right\|_{L_U} \leq C_\Delta \left(E \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Зауваження. Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ .

Теорема 1 ([5]). Нехай Δ – строго Орлічева сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ в просторі $L_U(\Omega)$ є строго Орлічевою сім'єю з тою ж самою визначальною сталою.

Означення 2.6 ([5]). Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго Орлічевою.

Теорема 2. Нехай (T_1, O_1, μ_1) , (T_2, O_2, μ_2) – вимірні простори з σ -скінченними мірами, $T = T_1 \times T_2$, $O = O_1 \times O_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Нехай $X = \{X(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in T\}$ – строго Орагчевий випадковий процес, $f(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in T$ – вимірна функція в (T, O, μ) . Нехай для кожного $t_1 \in T_1$ існує інтеграл в середньому квадратичному

$$\xi(t_1) = \int_T f(t_1, t_2) X(t_1, t_2) d\mu_2(t_2).$$

Тоді випадковий процес $\xi(t_1)$, $t_1 \in T_1$ є строго Орагчевим випадковим процесом з такою ж самою визначальною сталою.

Теорема 2 випливає з теореми 1.

Означення 2.7 ([4]). Будемо говорити, що S -функція U задовольняє g -умові, якщо існують такі сталі $z_0 \geq 0$, $K > 0$, $A > 0$, що для всіх $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ виконується нерівність

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

Теорема 3 ([6]). Нехай $\mathbb{R}^k$ – k -вимірний простір, $d(t, s) = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i - s_i|$, $T = \{0 \leq t_i \leq T_i, i = 1, 2, \dots, k\}$, $T_i > 0$, $X_n = \{X_n(t), t \in T\}$, $n \geq 1$ – послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча $L_U(\Omega)$, де для функції U виконується g -умова. Нехай виконуються умови:

1) $X_n(t) \rightarrow X(t)$ при $t \in T$ та $n \rightarrow \infty$ за ймовірністю.

2) $\sup_{n=1, \dots, \infty} \sup_{d(t, s) \leq h} \|X_n(t) - X_n(s)\|_{L_U} \leq \sigma(h)$, де $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ – така неперервна монотонно зростаюча функція, що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

3) для деякого $\varepsilon > 0$:

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ – функція, обернена до $\sigma(u)$.

Тоді процеси $X_n(t)$ неперервні з ймовірністю одиниця та збігаються за ймовірністю в просторі Банаха неперервних функцій з рівномірною нормою $C(T)$.

3 Умови існування узагальненого розв'язку

Нехай $T > 0$ – деяка стала, функції $p(x)$ та $\rho(x)$, $x \in [0, \pi]$ – двічі неперервно диференційовні, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$; $q(x)$, $x \in [0, \pi]$ – неперервно диференційовна функція така, що $q(x) \geq 0$, $\xi(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ – вибірково неперервне з ймовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho(x)\xi(x, t),$$

(1)

$$x \in [0, \pi], t \in [0, T]$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0;$$

(2)

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0.$$

(3)

Відповідна задача Штурма-Ліувілла матиме вигляд

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dX}{dx} \right) - qX + \lambda \rho X = 0,$$

(4)

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

(5)

Нехай $X_n(x)$ – ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n – відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на p , q , ρ всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [3]. Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Означення 3.1 ([2]). Випадкове поле $u(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n(t-u) \zeta_n(u) du,$$

(6)

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^\pi \xi(x, t) X_n(x) \rho(x) dx$$

(7)

і ряд в правій частині (6) збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0, \pi] \times [0, T]$.

Лема 1 ([1]). Існує стала $L > 0$ така, що

$$|X_k(x_1) - X_k(x_2)| \leq L \mu_k^2 |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in [0, \pi].$$

Лема 2 ([6]). Нехай функція $Z_\lambda(u)$, $\lambda > 0$, $u \in [0, +\infty)$ задовольняє умовам:

1) Існує стала $B > 0$ така, що

$$\sup_{u \in [0, +\infty)} |Z_\lambda(u)| \leq B.$$

2) Існує стала $C > 0$ така, що для всіх $u, v \in [0, +\infty)$: $|Z_\lambda(u) - Z_\lambda(v)| \leq C\lambda|u - v|$.

Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, така, що функція $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$.

Тоді для всіх $v > 0$ та $u > 0$ виконується наступна нерівність

$$|Z_\lambda(u) - Z_\lambda(v)| \leq \max\{C, 2B\} \frac{\varphi(\lambda + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|u-v|} + v_0\right)}.$$

Лема 3. Нехай в (1)–(3) $\xi(x, t)$ – центроване строго Оранжеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$, вибірково неперервне з імовірністю одиниці, U задовольняє g -умові. Якщо

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} |E\zeta_k(t)\zeta_m(s)|,$$

де $\zeta_k(t)$ визначено в (7), то збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m} \frac{1}{\mu_k \mu_m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) < \infty,$$

то

$$\begin{aligned} & \sup_{n \geq 1} \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ |x-y| \leq h \\ x, y \in [0, s] \\ t, s \in [0, T]}} \left(E |u_n(x, t) - u_n(y, s)|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq F \left(\varphi \left(\frac{1}{h} + v_0 \right) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

де

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} X_k(x) \int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du$$

є частковими сумами ряду (6),

$$F = T \max\{L, 2C_X\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} C_{k,m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) \right)^{1/2} \\ & + C_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} C_{k,m} (4T^2 \varphi(\mu_k + v_0) \right. \\ & \quad \left. \times \varphi(\mu_m + v_0) \right. \\ & \quad \left. + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(1 + v_0) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_m + v_0) \varphi(1 + v_0) \\ & + (\max\{1, 2T\})^2 \varphi^2(1 + v_0) \Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$C_X = \sup_{k \geq 1} \sup_{0 \leq x \leq \pi} |X_k(x)|.$$

L – стала з леми 1, $\varphi(x)$ – функція, для якої виконуються умови леми 2.

Доведення. Для $|t-s| \leq h$, $|x-y| \leq h$, $n \geq 1$ виконується наступна нерівність

$$\begin{aligned} & \left(E \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} X_k(x) \int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} X_k(y) \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \right|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq A_1 + A_2, \quad \text{де} \\ & A_1 = \left(E \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} (X_k(x) - X_k(y)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \right|^2 \right)^{1/2}, \\ & A_2 = \left(E \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} X_k(y) \left(\int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \right) \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} R_{k,m}(t, s) &= \int_0^t \int_0^s \sin \mu_k(t-u) \sin \mu_m(s-v) \\ & \quad \times E \zeta_k(u) \zeta_m(v) dv du. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_1^2 &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{1}{\mu_k \mu_m} |X_k(x) - X_k(y)| \\ & \quad \times |X_m(x) - X_m(y)| |R_{k,m}(t, s)|. \end{aligned}$$

З лем 1, 2 випливає, що

$$|X_k(x) - X_k(y)| \leq \max\{L, 2C_X\} \frac{\varphi(\mu_k^2 + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|x-y|} + v_0\right)}.$$

Крім того,

$$|R_{k,m}(t, s)| \leq C_{k,m} \int_0^t \int_0^s |\sin \mu_k(t-u)|$$

$$\times \sin \mu_m(s-v)|dvdu \leq T^2 C_{k,m}.$$

Отже,

$$A_1^2 \leq T^2 (\max\{L, 2C_X\})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} C_{k,m} \times (\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) \left(\varphi\left(\frac{1}{h} + v_0\right) \right)^{-2}.$$

$$A_2^2 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{1}{\mu_k \mu_m} |X_k(y)| |X_m(y)| \times \left| E \left(\int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du - \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \right) \times \left(\int_0^t \zeta_m(v) \sin \mu_m(t-v) dv - \int_0^s \zeta_m(v) \sin \mu_m(s-v) dv \right) \right|.$$

Нехай для визначеності $s \leq t$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \\ & - \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \\ & = \int_0^s \zeta_k(u) (\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)) du \\ & + \int_s^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du. \end{aligned}$$

Отже,

$$A_2^2 \leq C_X^2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{1}{\mu_k \mu_m} d_{k,m}(s, t),$$

де

$$\begin{aligned} d_{k,m}(s, t) &= \left| E \left(\int_0^s \zeta_k(u) (\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)) du + \int_s^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \right) \times \left(\int_0^s \zeta_m(v) (\sin \mu_m(t-v) - \sin \mu_m(s-v)) dv + \int_s^t \zeta_m(v) \sin \mu_m(t-v) dv \right) \right| \\ &\leq \int_0^s \int_0^s |E \zeta_k(u) \zeta_m(v)| |\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)| |\sin \mu_m(t-v) - \sin \mu_m(s-v)| dvdu \\ &\quad + \int_s^t \int_s^t |E \zeta_k(u) \zeta_m(v)| |\sin \mu_k(t-u)| |\sin \mu_m(t-v)| dvdu \\ &\quad + \int_0^s \int_s^t |E \zeta_k(u) \zeta_m(v)| |\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)| |\sin \mu_m(t-v)| dvdu \\ &\quad + \int_s^t \int_0^s |E \zeta_k(u) \zeta_m(v)| |\sin \mu_k(t-u)| |\sin \mu_m(t-v) - \sin \mu_m(s-v)| dvdu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -u)| |\sin \mu_m(t-v) - \sin \mu_m(s-v)| dvdu \\ & + \int_0^s \int_s^t |E \zeta_k(u) \zeta_m(v)| |\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)| |\sin \mu_m(t-v)| dvdu \\ & + \int_s^t \int_0^s |E \zeta_k(u) \zeta_m(v)| |\sin \mu_k(t-u)| |\sin \mu_m(t-v) - \sin \mu_m(s-v)| dvdu \\ & + \int_s^t \int_s^t |E \zeta_k(u) \zeta_m(v)| |\sin \mu_k(t-u)| |\sin \mu_m(t-v)| dvdu. \end{aligned}$$

За лемою 2

$$\int_s^t |\sin \mu_k(t-u)| du \leq \max\{1, 2T\} \frac{\varphi(1+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|} + v_0\right)}.$$

Крім того, за лемою 2

$$\begin{aligned} & \int_0^s |\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)| du \\ & \leq 2T \frac{\varphi(\mu_k + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|} + v_0\right)}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} d_{k,m}(s, t) &\leq C_{k,m} (4T^2 \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(\mu_m + v_0) \\ &+ 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(1+v_0) \\ &+ 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_m + v_0) \varphi(1+v_0) \\ &+ (\max\{1, 2T\})^2 \varphi^2(1+v_0)) \frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|} + v_0\right)}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що для $t \geq s$ така нерівність теж виконується. Отже,

$$\begin{aligned} A_2^2 &\leq C_X^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m} \frac{1}{\mu_k \mu_m} (4T^2 \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(\mu_m + v_0) \\ &+ 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(1+v_0) \\ &+ 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_m + v_0) \varphi(1+v_0) \\ &+ (\max\{1, 2T\})^2 \varphi^2(1+v_0)) \frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{h} + v_0\right)}. \end{aligned}$$

□

Теорема 4. Нехай $\xi(x, t)$ – центроване стро-го Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ з визначальною сталою C_{Δ} , вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g -умові. Припустимо $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$,

$\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, така, що функція $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$. Для того, щоб ряд (6) був узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m} \frac{1}{\mu_k \mu_m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) < \infty \quad (9)$$

і для довільного $\varepsilon > 0$ виконувалась умова:

$$\int_0^t U^{(-1)} \left(\left(\frac{\pi}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{C_{\Delta} F}{v} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \times \left(\frac{T}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{C_{\Delta} F}{v} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \right) dv < \infty, \quad (10)$$

де F задана (8).

Доведення. Згідно з теоремами 1, 2 всі суми $u_n(x, t)$ є строго Орлічевими випадковими полями з тою ж визначальною сталою C_{Δ} , тому

$$\|u_n(x, t) - u_n(y, s)\|_{L_U} \leq C_{\Delta} \left(E(u_n(x, t) - u_n(y, s))^2 \right)^{1/2}.$$

Розглянемо ряд

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \mu_k} X_n(x) X_k(x) \int_0^t \int_0^t \sin \mu_n(t-u) \times \sin \mu_k(t-v) E \zeta_n(u) \zeta_k(v) dv du \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \mu_k} |X_n(x)| |X_k(x)| \int_0^t \int_0^t |\sin \mu_n(t-u) \sin \mu_k(t-v)| |E \zeta_n(u) \zeta_k(v)| dv du \leq C_X^2 T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \mu_k} C_{n,k} < \infty$$

за умовою (9).

Із збіжності цього ряду випливає збіжність ряду (6), тобто збіжність послідовності $\{u_n(x, t)\}$ в середньому квадратичному, а значить, і за ймовірністю при всіх $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, T]$. Отже, виконується умова 1 теореми 3.

З леми 3 випливає виконання умови 2 теореми 3 для

$$\sigma(h) = C_{\Delta} F \left(\varphi \left(\frac{1}{h} + v_0 \right) \right)^{-1}.$$

І, нарешті, умова (10) забезпечує виконання умови 3 теореми 3, оскільки

$$\sigma^{(-1)}(t) = \frac{1}{\varphi^{(-1)} \left(\frac{C_{\Delta} F}{t} \right) - v_0}.$$

Тому твердження теореми 4 випливає з теореми 3. $\square$

4 Висновки

У даній роботі розглянуті узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з нульовими початковими та граничними умовами та строго Орлічевою правою частиною. Встановлені умови існування узагальненого розв'язку такого рівняння.

Список використаних джерел

1. Довгай Б.В. Гіперболічне рівняння з Орлічевою правою частиною / Б.В. Довгай // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011. – Вип. № 22.
2. Довгай Б.В. Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з φ -субгауссовою правою частиною / Б.В. Довгай // Теорія ймовір. та матем. стат. – 2009. – № 81. – С. 25 – 30.
3. Положий Г.Н. Уравнения математической физики / Г.Н. Положий. – Москва: Высшая школа, 1964. – 559 с.
4. Buldygin V.V. Metric characterization of random variables and random processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. – Kiev: "TbIMC"; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, – 2000. – 257 p.
5. Barrasa de la Krus E. Boundary-value problem for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions / E. Barrasa de la Krus and Yu. V. Kozachenko // Random operators and stochastic equations. – 1995. – Vol. 3, No. 3. – P. 201 – 220.
6. Kozachenko Yu.V. Boundary-value problems for equations of mathematical physics with Orlicz random initial conditions / Yu.V. Kozachenko and K.I. Veresh // Theory of Probability and Math. Statistics. – 2009. – No. 80. – P. 63 – 75.

Надійшла до редколегії 12.06.2011

УДК 519.2

О.В. Доронін, студент

**Робастні оцінки для сумішей з
гауссовою компонентою**

Розглянута задача семіпараметричного оцінювання для спостережень, які описуються моделлю суміші кількох ймовірнісних розподілів зі змінними концентраціями. Побудовані та досліджені оцінки для параметрів гауссової компоненти.

Ключові слова: модель сумішей зі змінними концентраціями, GEE, квантильна оцінка, імітаційне моделювання.

E-mail: al_doronin@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Ми вважаємо, що досліджувані об'єкти $O_{1,N}, \dots, O_{N,N}$ належать M різним популяціям (компонентам суміші). Невідомий номер компоненти, якій насправді належить $O_{j,N}$, позначимо через $\text{ind}(O_{j,N})$. Для кожного об'єкта $O_{j,N}$ спостерігаємо деякі його числові характеристики $\xi_{j,N} := \xi(O_{j,N})$. Розглядається вибірка з N спостережень $\xi_{1,N}, \dots, \xi_{N,N}$. Спостереження всередині вибірки є незалежними випадковими величинами.

Функцію розподілу $\xi(O_{j,N})$ за умови, що $O_{j,N}$ належить m -ій компоненті, позначимо через $F_m(A) := P[\xi(O_{j,N}) \in A | \text{ind}(O_{j,N}) = m]$, $m = \overline{1, M}$. Ймовірність того, що $O_{j,N}$ належить m -ій компоненті (концентрацію m -ої компоненти) позначимо через $p_{j,N}^m := P[\text{ind}(O_{j,N}) = m]$. В цій роботі набір концентрацій $\{p_{j,N}^m\}_{j=\overline{1,N}, m=\overline{1,M}}$ вважається відомим. Отже, розподіл $\xi_{j,N}$ виражається формулою

$$P[\xi_{j,N} \in A] = \sum_{m=1}^M p_{j,N}^m F_m(A).$$

Описана модель називається моделлю суміші зі змінними концентраціями (mixture with varying concentrations, MVC; див. [5], [4], [6]).

Для дослідження асимптотичних властивостей моделі розглядається послідовність вибірок $\{\xi_{j,N}\}_{j=\overline{1,N}, N \geq 1}$.

A. Doronin, Student

**Robust Estimates for Mixtures with
Gaussian Component**

The paper is devoted to the problem of semi-parametric estimation for observation, described by the model of mixture of some probability distributions with varying concentrations. Constructed and studied the estimators for parameters of gaussian component.

Key Words: mixture with varying concentrations, GEE, quantile estimate, Monte-Carlo.

Модель сумішей, де концентрації $p_{j,N}^m$ стали при різних j , називається класичною моделлю скінчених сумішей (classical finite mixture model, FMM; див. [13], [14]). В [9], [7], [8], [10], [12] розглядаються деякі спеціальні класи моделі сумішей.

В даній роботі розглядається семіпараметрична модель сумішей. Вважаємо, що функція розподілу певної компоненти (для визначеності – першої) є гауссовою з невідомим середнім μ та середньоквадратичним відхиленням σ . Тобто $F_1(A) = F_1(A, \vartheta)$, $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$. Розподіли всіх інших компонент повністю невідомі. Схожа модель для двокомпонентної суміші і одного скалярного невідомого параметра була розглянута в [3].

Дана робота організована наступним чином. В розділі 2 вводяться основні позначення та домовленості, які надалі використовуються в роботі, а також розглядаються деякі отримані раніше результати. В розділі 3 розглядається оцінка моментів і квантилів розподілів певних компонент суміші. В розділі 4 описується адаптивна оцінка, отримана в [11]. В розділі 5 описуються та аналізуються результати імітаційного моделювання, яке проводилось для перевірки роботи квантильних оцінок у порівнянні з іншими, включаючи адаптивну з [11]. В додатку до роботи міститься доведення теореми, яка формулюється в розділі 3.

2 Основні позначення та домовленості

Надалі для зручності викладення матеріалу позначимо через η_i , $i = \overline{1, M}$ формально введени випадкові величини з функціями розподілу $F_i(x)$. Символ ϑ позначатиме справжнє значення невідомого параметру, який треба оцінити в моделі. Через $F_1(x)$ позначимо $F_1(x, \vartheta)$, тобто справжню функцію розподілу першої компоненти. Через $E_i[\cdot]$ позначатимемо математичне сподівання, яке береться у припущенні, що значенням параметра є t .

Трикутні дужки з індексом N позначають оператор усереднення для деякого набору $a_{j,N} = \{a_{j,N}\}_{j=\overline{1,N}}$ з N елементів: $\langle a_{j,N} \rangle_N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}$.

Множення, сумування та інші арифметичні операції застосовуються до N -мірних наборів поелементно: $\langle a_{j,N} b_{j,N} \rangle_N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N} \cdot b_{j,N}$.

Позначимо $\langle a \rangle := \lim_{N \rightarrow \infty} \langle a_{j,N} \rangle_N$, якщо відносна границя існує.

Нехай $g(\cdot)$ – деяка вимірна функція від $\xi_{j,N}$. Як оцінку для значення $\hat{g}^m := E[g(\eta_m)] = \int g(x) F_m(dx)$ розглянемо $\hat{g}_N^m := \hat{g}_N(a_{j,N}^m) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^m \cdot g(\xi_{j,N})$, де $a_{j,N}^m$ – деякий набір невідповідних вагових коефіцієнтів.

На роль такого набору можна взяти набір мінімаксних вагових коефіцієнтів (див. [4])

$$a_{j,N}^m = (p_{j,N})^T \cdot (\Gamma_N)^{-1} \cdot e_m,$$

за умови $\det \Gamma_N \neq 0$, де $\Gamma_N := ((p_{j,N}^i p_{j,N}^j)^N)_{k,l=\overline{1,M}}$ – матриця Грама розміру $M \times M$ для концентрацій $p_{j,N}^i$, e_m – вектор з $\mathbb{R}^M$, в якому на m -му місці стоїть одиниця, а інші елементи – нулі, $p_{j,N} := (p_{j,N}^i)_{i=\overline{1,M}}$ – матриця з концентрацій розміру $M \times N$.

Згідно [4], $\hat{g}_N(a_{j,N}^m)$ є незміщеною оцінкою для $\hat{g}^m$. В [4] доводиться консистентність таких оцінок.

3 Оцінка моментів і квантилів

В цьому розділі наводяться три види оцінок параметру $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$ гауссового розподілу для першої компоненти суміші, побудовані в [4]. Оригінальним в даній роботі є узагальнення теореми 3.4.3 з [4] про асимптотичну поведінку оцінок для квантилів.

3.1 Лінійна оцінка

В [4] визначається навантажена емпірична функція розподілу для m -ї компоненти:

$$\hat{F}_{m,N}(x) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^m \mathbb{I}_{\{\xi_{j,N} \leq x\}}.$$

Лінійну оцінку для $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$ визначимо так:

$$\hat{\mu}_N^{\text{linear}} := \int x \hat{F}_{1,N}(dx) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^1 \xi_{j,N}.$$

Величина $\int (x - \hat{\mu}_N^{\text{linear}})^2 \hat{F}_{1,N}(dx)$ може приймати від'ємні значення внаслідок того, що коефіцієнти $a_{j,N}^1$ можуть бути від'ємними. Тому оцінку $\hat{\sigma}_N^{\text{linear}}$ треба визначити так:

$$\hat{\sigma}_N^{\text{linear}} := \sqrt{\max \left\{ 0, \int (x - \hat{\mu}_N^{\text{linear}})^2 \hat{F}_{1,N}(dx) \right\}} = \sqrt{\max \left\{ 0, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^1 (\xi_{j,N} - \hat{\mu}_N^{\text{linear}})^2 \right\}}.$$

Для досить великих N (коли $\hat{\sigma}_N^{\text{linear}} \neq 0$) ця оцінка збігається з GEE для оціночної функції $g(x, t) = (x - t_1, (x - t_1)^2 - t_2^2)^T$ (див. [11]), де $t = (t_1, t_2)^T$ – шуканий параметр (він відповідає параметру $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$). В [11] доводиться, що для такої оцінки коефіцієнтом розкриття буде матриця $S = V^{-1} \cdot Z \cdot V^{-T}$, де $V := \int \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \big|_{t=\vartheta} F_1(dx, \vartheta)$, $Z := \sum_{i=1}^M ((a^i)^2 p^i) \int g(x, \vartheta) \cdot g(x, \vartheta)^T F_i(dx, \vartheta) - \sum_{k,l=2}^M ((a^k)^2 p^k p^l) g^k \cdot (g^l)^T$, $g^i := \int g(x, \vartheta) F_i(dx)$, $i = \overline{2, M}$.

3.2 Виправлена оцінка

В [4] визначається виправлена навантажена емпірична функція розподілу для m -ї компоненти: $\hat{F}_{m,N}^+(x) := \min \left\{ 1, \sup_{y \leq x} \hat{F}_{m,N}(y) \right\}$. Ця функція розподілу, на відміну від $\hat{F}_{m,N}(x)$, має лише додатні стрибки.

Зрозуміло, що $\hat{F}_{1,N}^+(\cdot)$ можна побудувати як $\hat{F}_{1,N}^+(x) = \sum_{i=1}^{K_N} b_{i,N} \mathbb{I}_{\{x \leq x_{i,N}\}}$, де $b_{i,N} > 0$, $i = \overline{1, K_N}$ – стрибки функції $\hat{F}_{1,N}^+$ в точках $x_{i,N}$, $i = \overline{1, K_N}$, розташованих в порядку зростання. Зауважимо, що $1 \leq K_N \leq N$, а множина $\{x_{i,N}\}_{i=\overline{1, K_N}}$ співпадає з деякою K_N -елементною підмножиною $\xi_{1,N}, \dots, \xi_{N,N}$.

Виправлену оцінку для $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$ визначимо так:

$$\hat{\mu}_N^{fixed} := \int x \hat{F}_{1,N}^+(dx) = \sum_{i=1}^{K_N} b_{i,N} \cdot x_{i,N};$$

$$\hat{\sigma}_N^{fixed} := \sqrt{\int (x - \hat{\mu}_N^{fixed})^2 \hat{F}_{1,N}^+(dx) = \sqrt{\sum_{i=1}^{K_N} b_{i,N} \cdot (x_{i,N} - \hat{\mu}_N^{fixed})^2}}.$$

В [4] доводиться консистентність такої оцінки.

3.3 Квантильна оцінка

В [4] будується оцінка квантиля деякого рівня α для функції розподілу першої компоненти суміші наступним чином.

Нехай $y_{i,N} := \frac{1}{2} b_{i,N} + \sum_{j>i} b_{j,N}$. На відрізку $[x_{1,N}, x_{K_N,N}]$ визначимо $\hat{F}_{1,N}(x) := \frac{y_{i+1,N} - y_{i,N}}{x_{i+1,N} - x_{i,N}} \cdot (x - x_{i,N}) + y_{i,N}$, $x \in [x_{i,N}, x_{i+1,N}]$, $i = 1, K_N - 1$. Квантиль рівня α визначимо як значення оберненої функції до $\hat{F}_{1,N}(\cdot)$ в точці α (якщо воно існує):

$$\hat{Q}_N^1(\alpha) := \hat{F}_{1,N}^{-1}(\alpha).$$

Для гауссової першої компоненти параметр розподілу $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$ виражається через квантилі наступним чином: $\vartheta = (\mu, \sigma)^T = E_\vartheta \cdot \eta$, де $\eta := (Q^{F_1}(\frac{1}{4}), Q^{F_1}(\frac{1}{2}), Q^{F_1}(\frac{3}{4}))^T$, $E_\vartheta := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$, $\gamma := Q^{N(0,1)}(\frac{3}{4}) - Q^{N(0,1)}(\frac{1}{4})$ – інтерквартильний розмах стандартного нормального розподілу (ця величина приблизно дорівнює 1.34898).

Квантильна оцінка для $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$ визначається так:

$$\hat{\vartheta}_N^{quant} = (\hat{\mu}_N^{quant}, \hat{\sigma}_N^{quant})^T := E_\vartheta \cdot \hat{\eta}_N,$$

де $\hat{\eta}_N := (\hat{Q}_N^1(\frac{1}{4}), \hat{Q}_N^1(\frac{1}{2}), \hat{Q}_N^1(\frac{3}{4}))^T$. В [4] доводиться консистентність таких оцінок.

Надалі доводиться асимптотична нормальність оцінок квантилів виду $\hat{\eta}_N$ та квантильної оцінки $\hat{\vartheta}_N^{quant} = (\hat{\mu}_N^{quant}, \hat{\sigma}_N^{quant})^T$ і знаходиться їх коефіцієнт розсіювання.

Теорема 1. (про асимптотичну поведінку оцінок для квантилів; узагальнення теореми 3.4.3 з [4])

Нехай виконуються наступні умови:

1. $\sup_{j,N} |a_{j,N}^m| < \infty$.
2. Існують граничні величини $(p^k p^l(a^m))^2$, $(p^k(a^m)^2)$, $k, l = 1, M$.
3. $F_k(\cdot)$ – неперервна на $\mathbb{R}$, $k = 1, M$.
4. Для граничних величин $(a^m p^k) = I_{k+m}$, $k = 1, M$ (умова незміщеності).

5. Функції $F_k(\cdot)$, $k = 1, M$ строго зростають в деякій околиці $I_1, \dots, I_q$ точок $Q^{F_m}(\alpha_1), \dots, Q^{F_m}(\alpha_q)$ відповідно.

6. На $I_1, \dots, I_q$ у $F_m(\cdot)$ існує неперервна похідна $f_m(\cdot)$ і $f_m(Q^{F_m}(\alpha_i)) \neq 0$, $i = 1, q$.

Тоді вектор $(\sqrt{N}(\hat{Q}_N^m(\alpha_i) - Q^{F_m}(\alpha_i)))_{i=1,q}$ слабо збігається при $N \rightarrow \infty$ до гауссового випадкового вектору з нульовим середнім і коваріаційною матрицею $S = (S_{r,s})_{r,s=1}^q$ з елементами $S_{r,s} = \frac{f_r(Q^{F_m}(\alpha_r)) f_s(Q^{F_m}(\alpha_s))}{f_m(Q^{F_m}(\alpha_r)) f_m(Q^{F_m}(\alpha_s))}$.

$$\left(\sum_{k=1}^M (p^k(a^m)^2) F_k(\min\{Q^{F_m}(\alpha_r), Q^{F_m}(\alpha_s)\}) - \sum_{k,l=1}^M (p^k p^l(a^m)^2) F_k(Q^{F_m}(\alpha_r)) F_l(Q^{F_m}(\alpha_s)) \right).$$

Доведення див. в додатку.

Зуважимо, що твердження теореми стосується оцінок квантилів деякої m -ої компоненти суміші (не обов'язково першої), і в ньому не фігурує припущення про нормальність цієї компоненти.

Згідно теореми 1 $\sqrt{N}(\hat{\eta}_N - \eta)$ слабо збігається до нормального розподілу з нульовим середнім та дисперсійною матрицею S , визначеною в теоремі, коли $N \rightarrow \infty$.

Звідси маємо, що вектор $\sqrt{N}(\hat{\vartheta}_N^{quant} - \vartheta)$ слабо збігається до нормального розподілу з нульовим середнім та коваріаційною матрицею $E_\vartheta \cdot S \cdot E_\vartheta^T$.

4 Адаптивна оцінка

В цьому розділі розглянемо адаптивну оцінку, побудовану в [11].

Для побудови адаптивної оцінки потрібна деяка попередня (пілотна) оцінка шуканого параметра. В наступному розділі буде досліджена якість адаптивної оцінки в залежності від того, яку з оцінок (лінійну, виправлену або квантильну) брати на роль пілотної. Однак зрозуміло, що чим кращою буде пілотна оцінка, тим кращою буде адаптивна.

В [11] адаптивна оцінка будується методом узагальнених оцінюючих рівнянь (generalized estimating equations, GEE). Алгоритм побудови наступний.

Нехай $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_d(x, t))^T$ – деякий заданий набір функцій, $f_1(x, t)$ – щільність гауссового розподілу з параметром $t = (t_1, t_2)^T$ (який відповідає параметру $\vartheta =$

$(\mu, \sigma)^T$, $\hat{\vartheta}_N$ – деяка пілотна оцінка для ϑ (має бути консистентною).

Адаптивна оцінка в [11] має вигляд

$$\hat{\vartheta}_N = \hat{\vartheta}_N - \hat{B}_N^* \cdot \hat{u}^1(\hat{\vartheta}_N),$$

де $\hat{B}_N := E_0 \cdot (\hat{V}_N^T \cdot \hat{Z}_N^{-1} \cdot \hat{V}_N)^{-1}$,
 $\hat{V}_N^T \cdot \hat{Z}_N^{-1} \cdot E_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{V}_N :=$
 $-\int u(x, \hat{\vartheta}_N) \cdot f_1^*(x, \hat{\vartheta}_N)^T dx$, $f_1^*(x, t) :=$
 $\left(\frac{\partial}{\partial t_1} f_1(x, t), \frac{\partial}{\partial t_2} f_1(x, t), f_1(x, t) \right)$, $\hat{Z}_N := \hat{Z}_{2,N} -$
 $\hat{Z}_{1,N}$, $\hat{Z}_{1,N} := \sum_{k=1}^M ((a^1)^2 p^k p^l) f_1(x, \hat{\vartheta}_N) \cdot (u^1)^T$,
 $\hat{Z}_{2,N} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (a^1)^2 u(\xi_{j,N}, \hat{\vartheta}_N) \cdot u^T(\xi_{j,N}, \hat{\vartheta}_N)$,
 $u_N^1 := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_N^m u(\xi_{j,N}, \hat{\vartheta}_N)$.

В [11] доводиться консистентність та асимптотична нормальність такої оцінки для $\vartheta = (\mu, \sigma)^T$ з граничною теоретичною матрицею розсіювання $S^* = E_0 \cdot (V^T \cdot Z^{-1} \cdot V)^{-1} \cdot E_0^T$, де $V := -\int u(x, \vartheta) \cdot f_1^*(x, \vartheta)^T dx$, $Z := Z_2 - Z_1$, $Z_1 := \sum_{k=1}^M ((a^1)^2 p^k p^l) \int u(x, \vartheta) f_k(x) dx \cdot \int u(x, \vartheta)^T f_k(x) dx$, $Z_2 := \int (((a^1)^2 p^1) f_1(x, \vartheta) + \sum_{m=2}^M ((a^1)^2 p^m) f_m(x)) u(x, \vartheta) \cdot u(x, \vartheta)^T dx$.

Слід зауважити, що значення S^* не залежить від пілотної оцінки і є однаковим для всіх консистентних пілотних оцінок.

5 Результати імітаційного моделювання

Методами імітаційного моделювання було досліджено поведінку наступних оцінок:

1. Лінійна оцінка.
2. Виправлена оцінка.
3. Квантильна оцінка.
4. Адаптивна оцінка з виправленою оцінкою в якості пілотної.
5. Адаптивна оцінка з квантильною оцінкою в якості пілотної.

Дослідження були побудовані на двох видах двокомпонентної суміші гауссових розподілів з наступними параметрами:

- Дослідження 1. Компонента 1: $\mu = -3$, $\sigma = 1$; компонента 2: $\mu = 3$, $\sigma = 2$.
- Дослідження 2. Компонента 1: $\mu = 0$, $\sigma = 2$; компонента 2: $\mu = 1$, $\sigma = 2$.

Оцінки підраховувались для різних розмірів вибірки (число N): 50, 100, 250, 500, 750, 1000, 2000, 5000. Середньоквадратичні відхилення (mean squared error, MSE) побудованих оцінок було підраховано за допомогою 1000 вибірок (для кожного значення N). Набір кон-

центрацій брався рівномірним: $p_{j,N}^1 = \{ \frac{1}{N} \}_{j=1}^N$, $p_{j,N}^2 = 1 - p_{j,N}^1$.

Для адаптивної оцінки на роль вектора функцій $u(x, t)$ брався вектор з 8 функцій. Перші 5 з них – кубічні В-сплайни з носієм $(t_1 - 4t_2, t_1 + 4t_2)$ та рівномірним поділом цього носія на 8 інтервалів. Останні 3 функції: 1, $(x - t_1)/t_2$, $(x - t_1)^2/t_2^2$.

На рис. 1 наводяться графіки, на яких в логарифмічному масштабі відкладені значення оцінок для MSE оцінок для μ і σ , помноженої на кількість спостережень (число N). На рисунку видно, що ці величини прямують до відповідних коефіцієнтів розсіювання оцінок. Із цього видно, що зміщення наведених оцінок стає несуттєвим в порівнянні з їх дисперсією при обсягу вибірок N , що прямує до нескінченності.

Результати імітаційного моделювання показують, що квантильна оцінка дійсно може використовуватись для аналізу параметрів розподілу. Крім того, вона буде робастною, на відміну від лінійної або виправленої оцінки.

На основі даних імітаційного моделювання можна висунути евристичну гіпотезу про те, що якщо компоненти суміші добре розділяються, то квантильна оцінка дає кращі результати, ніж лінійна. Якщо ж компоненти суміші розділяються досить погано, то кращою стає лінійна оцінка (звісно, за умови відсутності викидів, бо лінійна оцінка не є робастною на відміну від квантильної).

В обох експериментах значення дисперсій оцінок виявились доволі близькими до асимптотичного значення для обсягів вибірки, починаючи з 2000.

6 Висновок

Була побудована квантильна оцінка для моделі сумішей зі змінними концентраціями. Отримана оцінка може виступати альтернативою для оцінки методу моментів. Оцінка дає хороші результати при імітаційному моделюванні на вибірках помірного та малого розміру. Квантильну оцінку рекомендується використовувати на забруднених вибірках та на вибірках, в яких різні компоненти суміші добре розділяються між собою. Дисперсійна матриця квантильних оцінок виявилась доволі близькою до значення, яке дають асимптотичні формули. Як критерій того, яку оцінку (квантильну або

лінійну) краще застосувати для моделі сумішей з певними розподілами компонент пропонується брати відповідні асимптотичні дисперсійні

матриці оцінок.

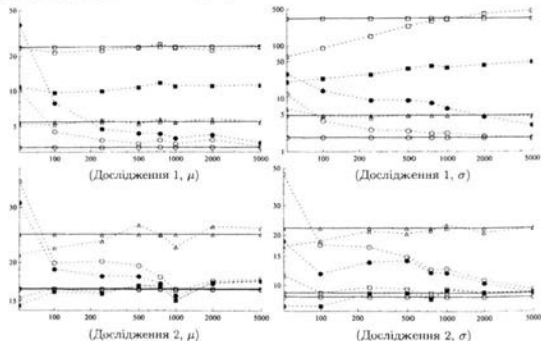


Рис. 1: Розкиданість оцінок. $\square$ – оцінка 1, $\blacksquare$ – 2, $\triangle$ – 3, $\bullet$ – 4, $\circ$ – 5. Горизонтальні прямі відповідають значенням коефіцієнтів розсіювання, ламані лінії – MSE, помноженої на N .

7 Додаток

Теорема 2. (про асимптотику $\hat{F}_{m,N}^+$; див. [4])

Позначимо $B_N(x) := \sqrt{N}(\hat{F}_{m,N}^+(x) - F_m(x))$.

Нехай виконуються наступні умови:

1. $\sup_{j,N} |a_{j,N}^m| < \infty$.
2. Існують границі $(p^k p^l(a)^2)$, $k, l = 1, M$.
3. $F_k(\cdot)$ – неперервна на $\mathbb{R}^d$, $k = 1, M$.
4. $\langle a^m p^k \rangle = I_{k=m}$, $k = 1, M$ (умова незмішаності).

Тоді на деякому випадковому просторі можна побудувати процеси $B_N'(\cdot)$ та $B(\cdot)$ такі, що:

1. Процеси $B_N'(\cdot)$ мають такий самий розподіл, як і $B_N(\cdot)$.
2. $B(\cdot)$ є гауссовим випадковим процесом з неперервними траєкторіями, нульовим середнім і коваріаційною функцією

$$E[B(x)B(y)] = \sum_{k=1}^M (p^k(a^m)^2) F_k(\min\{x, y\}) -$$

$$\sum_{k,l=1}^M (p^k p^l(a^m)^2) F_k(x) F_l(y).$$

3. $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |B_N'(x) - B(x)| \rightarrow 0$ м.н. при $N \rightarrow \infty$.

Доведення теореми 1.

Позначимо $B_N^*(x) := \sqrt{N}(\hat{F}_{m,N}^+(x) - F_m(x))$.

За теоремою 2: $B_N \xrightarrow{Sk} B$, де B – неперервний м.н. гауссів процес, описаний у цій теоремі.

Процес $\hat{B}_N(x) := \sqrt{N}(\hat{F}_{m,N}(x) - F_m(x))$ також збігається за Скороходом до $B(x)$ на I . Цей факт доводиться в [4] в доведенні теореми про асимптотичну поведінку оцінок для квантилів.

Оскільки нас цікавить лише слабка збіжність розподілів, можна отождествити $\hat{B}_N$ з їх копіями, побудованими на одному ймовірнісному просторі і вважати, що $\sup_{x \in I_i} |\hat{B}_N(x) - B(x)| \rightarrow 0$ м.н., $N \rightarrow \infty$, $i = \overline{1, q}$.

Неважко впевнитись, що при $i = \overline{1, q}$ подія

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(\hat{F}_N^{-1}(\alpha_i) - Q^{F_m}(\alpha_i)) < x &= \\ \{-\hat{B}_N(Q^{F_m}(\alpha_i) < \\ \sqrt{N}(F_m(Q^{F_m}(\alpha_i) + x/\sqrt{N}) - \alpha_i) \}. \\ \text{Отже:} \\ P\left[\sqrt{N}(\hat{F}_N^{-1}(\alpha_i) - Q^{F_m}(\alpha_i)) < x_i, \quad \overline{i=1,q}\right] &= \\ P\left[-\hat{B}_N(Q^{F_m}(\alpha_i) + x_i/\sqrt{N}) < \right. \\ \left. \sqrt{N}(F_m(Q^{F_m}(\alpha_i) + x_i/\sqrt{N}) - \alpha_i), \quad \overline{i=1,q}\right] \sim \\ P\left[-\hat{B}_N(Q^{F_m}(\alpha_i) + x_i/\sqrt{N}) < \right. \\ \left. f_m(Q^{F_m}(\alpha_i))x_i, \quad \overline{i=1,q}\right] \sim \\ P\left[-B(Q^{F_m}(\alpha_i)) < f_k(Q^{F_m}(\alpha_i))x_i, \quad \overline{i=1,q}\right] &= \\ P\left[B(Q^{F_m}(\alpha_i)) < f_k(Q^{F_m}(\alpha_i))x_i, \quad \overline{i=1,q}\right]. \end{aligned}$$

За теоремою 2 $\eta := (B(Q^{F_m}(\alpha_i)))_{i \in \overline{1,q}}$ - центрований гауссовий випадковий вектор з $\mathbb{R}^q$ з коваріаційною матрицею, визначеною в теоремі.

Тому вектор $\eta' := \left(\frac{B(Q^{F_m}(\alpha_i))}{f_k(Q^{F_m}(\alpha_i))}\right)_{i \in \overline{1,q}} \in \mathbb{R}^q$ - центрований гауссовим випадковим вектором з $\mathbb{R}^q$ з коваріаційною матрицею, яка фігурує в твердженні даної теореми.

З іншого боку було доведено, що випадковий вектор $\left(\sqrt{N}(\hat{Q}_N^m(\alpha_i) - Q^{F_m}(\alpha_i))\right)_{i \in \overline{1,q}}$ слабо збігається до випадкового вектора η' , що і потрібно було довести. $\square$

Список використаних джерел

- Боровков А.А. Математическая статистика / А.А. Боровков - М.: Наука, 1984. - 472 с.
- Карташов М.В. Імовірність, процес, статистика / М.В. Карташов - К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. - 494 с.
- Лодатко А., Майборода Р. Адаптивна моментна оцінка параметру розподілу по спостереженнях з домішкою / А. Лодатко, Р. Майборода // Теорія ймовірностей та математична статистика. - 2006. - Вип. 75. - С. 61-70.
- Майборода Р.Є., Сугакова О.В. Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші / Р.Є. Майборода, О.В. Сугакова // К.: ВПЦ "Київський університет". - 2008. - 213 с.
- Похилько Д.І. Вейвлет-оцінки щільності по спостереженням з суміші / Д.І. Похилько // Теорія ймовірностей та математична статистика. - 2004. - Том 70. - С. 121-130.

- Autin F., Pouet Ch. Test on the components of mixture densities [Електронний ресурс] / F. Autin, Ch. Pouet // eprint arXiv:0912.0786, - 2010.
- Bordes L., Mottelet S., Vandekerckhove P. Semiparametric estimation of a two-component mixture model / L. Bordes, S. Mottelet, P. Vandekerckhove // Annals of Statistics. - 2006. - Vol. 34, No. 3. - P. 1204-1232.
- Bordes L., Delmas C., Vandekerckhove P. Semiparametric Estimation of a two-component Mixture model where one component is known / L. Bordes, C. Delmas, P. Vandekerckhove // Scandinavian Journal of Statistics. - 2006. - Vol. 33. - P. 733-752.
- Hall P., Zhou X.-H. Nonparametric estimation of component distributions in a multivariable mixture / P. Hall, X.-H. Zhou // Annals of Statistics. - 2003. - Vol. 31, No. 1. - P. 201-224.
- Hunter D.R., Wang S., Hettmansperger T.R. Inference for mixtures of a symmetric distributions / D.R. Hunter, S. Wang, T.R. Hettmansperger // Annals of Statistics. - 2007. - Vol. 35. - P. 224-251.
- Maiboroda R., Sugakova O. Generalized Estimating Equations for Mixtures with Varying Concentrations [Електронний ресурс] / R. Maiboroda, O. Sugakova // КНУ імені Тараса Шевченка: Технічний звіт 0106U005864-MS10. - 2011. - 14 с. - Режим доступу до журн.: <http://probability.univ.kiev.ua/index.php?page=textrep>.
- Maiboroda R., Sugakova O. Nonparametric density estimation for symmetric distributions by contaminated data / R. Maiboroda, O. Sugakova // Metrica to appear.
- McLachlan G.J., Peel D. Finite Mixture Models / G.J. McLachlan, D. Peel. - NY, Wiley, 2000.
- Titterton D.M., Smith A.F., Makov U.E. Analysis of Finite Mixture Distributions // D.M. Titterton, A.F. Smith, U.E. Makov. - NY, Wiley, 1985. - 364 p.

Надійшла до редакції 1.06.2011

УДК 512.552

М. В. Касянук, аспірант

Про напівдосконалі напівдистрибутивні кільця

У даній роботі будуються артиніві кільця і досліджуються їх властивості.

Ключові слова: напівдосконалі напівдистрибутивні кільця, сагайдак.

E-mail: marinasayenko@gmail.com

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В. В.

1 Вступ

Багато важливих класів кілець характеризуються за властивостями модулів над ними. Як приклад, розглянемо напівдосконалі напівдистрибутивні кільця. Перші публікації в теорії напівдистрибутивних кілець з'явилися в середині 20 сторіччя. Статті Брунґса, Туганбаєва, Фачіні, Мюллера та інших були присвячені вивченню різних класів напівдистрибутивних кілець. Теорема зведення для напівдосконалих напівдистрибутивних кілець була доведена в [2].

2 Теорема зведення напівдосконалих напівдистрибутивних кілець

Теорема 2.1. (*А. Туганбаєва*). Напівдосконале кільце A напівдистрибутивне справа (ліва) тоді і тільки тоді, якщо для будь-яких локальних ідемпотентів e і f кільця A множина eAf - це однорядний fAf -модуль справа (однорядний eAe -модуль ліва).

Наслідок 1. Нехай A - напівдосконале кільце і нехай $1 = e_1 + \dots + e_n$ - розклад $1 \in A$ в суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів. Кільце A напівдистрибутивне справа (ліва) тоді і тільки тоді, якщо для будь-яких ідемпотентів e_i і e_j цього розкладу множина $e_i A e_j$ є однорядним $e_j A e_j$ -модулем справа ($e_i A e_i$ -модулем ліва).

Наслідок 2. Нехай A - напівдосконале кільце і нехай $1 = e_1 + \dots + e_n$ - розклад $1 \in A$ в суму вза-

М. В. Касянук, PhD student

On semiperfect semidistributive rings

In this paper the Artinian rings are building and its properties are investigated.

Key Words: semiperfect semidistributive rings, a quiver.

емно ортогональних локальних ідемпотентів. Кільце A напівдистрибутивне справа (ліва) тоді і тільки тоді, якщо для будь-яких ідемпотентів e_i і e_j ($i \neq j$) цього розкладу кільце $(e_i + e_j)A(e_i + e_j)$ - напівдистрибутивне справа (ліва).

Наслідок 3. Нехай A - нетерове напівдосконале напівдистрибутивне кільце і нехай $1 = e_1 + \dots + e_n$ - одиничний розклад $1 \in A$ в суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів, нехай $A_{ij} = e_i A e_j$ і нехай R_i - рідихал Джекобсона кільця A_n . Тоді $R_i A_{ij} = A_{ij} R_i$ для $i, j = 1, \dots, n$.

Приклад 1. Розглянемо

$$A = \begin{pmatrix} R & C \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

де R -алгебра (R -поле дійсних чисел, C - поле комплексних чисел). Розклад Пірса радикала Джекобсона $R = R(A)$ має форму

$$R = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і R -алгебра A є правого порядку, тобто напівдистрибутивна справа. Лівий нерозкладний проєктивний модуль $Q_2 = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}$ має цоколь $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$, який є прямою сумою лівого простого модуля $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, R -алгебра A - напівдосконале напівдистрибутивне справа кільце, але не є напівдистрибутивним зліва кільцем.

3 Сагайдаки напівдосконалих напівдистрибутивних кілець.

Зауважимо, що сагайдак без кратних стрілок і петель називається простим сагайдаком. Нехай A - напівдосконале напівдистрибутивне кільце. Фактор-кільце A/R^2 - артинове справа і його сагайдак $Q(A)$ визначається $Q(A) = Q(A/R^2)$.

Теорема 3.1. Сагайдак $Q(A)$ напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A є простим. Навпаки, для будь-якого простого сагайдака Q існує напівдосконале напівдистрибутивне кільце A таке, що $Q(A) = Q$.

Наслідок 4. Ланцюг графа $LG(A)$ напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A співпадає з $Q(A)$.

Доведення. Для будь-якого напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A виконуються наступні рівності: $LG(A) = Q(A, R) = Q(A)$.

Теорема 3.2. Для артинового кільця A , де $R^2 = 0$ виконуються наступні умови:

(а) A - напівдистрибутивне;

(б) $Q(A)$ - простий і лівий сагайдак $Q'(A)$, який можна отримати з $Q(A)$ перевернувши всі стрілки наопаки.

Означення. Напівдосконале кільце A таке, що A/R^2 - артинове, будемо називати Q - симетричним, якщо лівий сагайдак $Q'(A)$ можна отримати з правого сагайдака $Q(A)$, змінивши всі напрямки стрілок.

Наслідок 5. Кожне напівдосконале напівдистрибутивне кільце є Q - симетричним.

Зауваження 1. Приклад 1 показує, що напівдосконале напівдистрибутивне кільце є завжди Q - симетричним.

Нехай $\mathcal{O}$ - ланцюгове артинове кільце з єдиним максимальним ідеалом $\mathfrak{M} = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$. Тоді всі ідеали $\mathcal{O}$ (ліві, праві і двосторонні) вичерпуються степенями $\mathfrak{M}^k = \pi^k\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi^k$.

Означення. Цілочисельна матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається

- матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ і $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i, j, k ;
- зведеною матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всіх $i, j, i \neq j$.

Нехай $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}/A\}$, де $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ - це матриця показників з порядком A , тобто

$$A = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} \mathcal{O},$$

де e_{ij} елементи матриці. Якщо порядок матриці зведень, тобто A/R - прямий добуток дільників кілець, тоді $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$, якщо $i \neq j$, тобто $\mathcal{E}(A)$ - зведена матриця показників.

Теорема 3.3. Кільце $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}/A\}$ є артиновим напівдистрибутивним кільцем.

Список використаних джерел

1. Michiel Hazewinkel, Nadya Gubareni, V. V. Kirichenko *Algebras, Rings and Modules, volume 1*, Netherlands: Springer.-2007.- p. 343-353
2. V.V. Kirichenko and M.A.Khilina *Semi-perfect semi-distributive rings*, In: Institute Groups and Related Algebraic Topics, Institute of Mathematics NAS Ukraine, 1993, pp. 457-480

Надійшла до редакції 25.05.2011

УДК 519.2

Ф.М. Лиман, д.ф.-м.н.,
Т.Д. Лукашова, к.ф.-м.н.,
М.Г. Друшляк

**Скінченні 2-групи з нециклічним
центром та недедекіндовою нормою
абелевих нециклічних підгруп**

Вивчаються скінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп та нециклічним центром. Встановлюється зв'язок між нормами нециклічних та абелевих нециклічних підгруп.

Ключові слова: нормалізатор, норма абелевих нециклічних підгруп, норма нециклічних підгруп.

E-mail: marydru@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, проф. Кириченко В.В.

Одним з основних напрямків у теорії груп є вивчення впливу наперед заданих систем підгруп на структуру групи. В одних випадках група може мати систему підгруп з певними властивостями, але вплив цієї системи підгруп є не суттєвим. В інших випадках наявність єдиної (як правило, характеристичної) підгрупи з певною властивістю може бути визначальним фактором для будови усієї групи. Список таких підгруп можна суттєво розширити, розглядаючи різноманітні Σ -норми групи. Нагадаємо, що Σ -нормою називається перетин нормалізаторів усіх підгруп системи Σ (за умови, що система Σ непорожня). Зрозуміло, що коли Σ -норма збігається з групою, то в останній нормальні всі підгрупи системи Σ .

Уперше ситуацію, коли Σ -норма є власною підгрупою групи, почав вивчати Р.Бер [1] у 1935 році для системи Σ всіх підгруп даної групи. Відповідно Σ -норму він назвав *нормою* групи G та позначив $N(G)$. Згідно з [1] нормою $N(G)$ групи G називатимемо перетин нормалізаторів усіх підгруп групи G .

Звужуючи систему підгруп Σ , можна отримувати ті чи інші Σ -норми, що є узагальненнями норми $N(G)$. Зрозуміло, що всі Σ -норми містять центр групи і є її характеристичними

F.M. Lyman, Ph.D.,
T.D. Lukashova, Ph.D.,
M.G. Drushlyak

**Finite 2-groups with non-cyclic centre
and non-Dedekind norm of Abelian
non-cyclic subgroups**

Finite 2-groups with non-Dedekind norm of Abelian non-cyclic subgroups and non-cyclic centre are studied. Connections between norms of non-cyclic and Abelian non-cyclic subgroups are investigated.

Key Words: normalizer, norm of Abelian non-cyclic subgroups, norm of non-cyclic subgroups.

підгрупами. Якщо у якості системи Σ виступає система всіх абелевих нециклічних підгруп, то у відповідності з [2] таку Σ -норму називатимемо нормою абелевих нециклічних підгруп і позначатимемо N_G^A . Якщо група G збігається з нормою N_G^A , то в G нормальними будуть всі абелеві нециклічні підгрупи. Неабелеві групи з такою властивістю вивчалися в [3] і були названі $\overline{NA_2}$ -групами (або $\overline{NA_2}$ -групами у випадку 2-груп). Будову скінченних $\overline{NA_2}$ -груп описує наступне твердження.

Твердження 1. ([3]). *Скінченні несамальтові $\overline{NA_2}$ -групи вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) $G = ((a) \times (b)) \rtimes (c)$, де $|a| = 2^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = 2$, $[a, b] = [a, c] = 1$, $[b, c] = a^{2^{n-1}}$;
- 2) $G = (a) \rtimes (b)$, де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$;
- 3) $G = (H \times (b)) \rtimes (c)$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2$, $|b| = |c| = 2$, $[h_1, h_2] = h_1^2$, $[H, (b)] = [H, (c)] = E$, $[b, c] = h_1^2$;
- 4) $G = ((a) \times (b))(c)$, де $|a| = |b| = |c| = 4$, $c^2 = a^2b^2$, $[c, b] = c^2$, $[c, a] = a^2$;
- 5) $G = ((a) \times (b))(c)(d)$, де $|a| = |b| = |c| = |d| = 4$, $c^2 = d^2 = a^2b^2$, $[a, c] = [d, c] = a^2$, $[b, d] = b^2$, $[c, b] = [d, a] = c^2$;
- 6) $G = H \times (c)$, де H - група кватерніонів.

$$|c| = 2^n, n \geq 2;$$

7) $G = H \times Q$, де H і Q - групи кватерніонів;

8) $G = (H \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = |b| = |c| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = E$, $c^2 = b^2 h_1^2$, $[b, c] = b^2$;

9) $G = (\langle h_2 \rangle \times \langle c \rangle) \langle h_1 \rangle$, де $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $|c| = 2^n > 2$, $[c, h_1] = c^{2^{n-1}}$;

10) $G = (H \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|b| = 2$, $|c| = 8$, $[b, c] = [h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $c^2 = h_1$, $[h_2, c] = b$;

11) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, де $|a| = 8$, $|b| = 2^n > 2$, $a^4 = b^{2^{n-1}}$, $a^{-1}ba = b^{-1}$.

Безпосередньо з твердження 1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 1. Нехай G - скінченна 2-група, що має нециклічний центр та недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Тоді N_G^A є групою одного з типів 4)-9) або 2) при $n > 1$ твердження 1.

Лема 1. ([4]) Якщо Z - центральна нециклічна підгрупа групи G , то у фактор-групі $G/Z = \bar{G}$ має місце включення $\bar{N}_G^A \subseteq N(\bar{G})$, де $N(\bar{G})$ - норма групи $\bar{G}$.

Наступний приклад підтверджує, що рівність $N_G^A = N(\bar{G})$ виконується не завжди.

Приклад 1. $G = \langle (a) \times \langle b \rangle \rangle \langle c \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2$, $|c| = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Зрозуміло, що $N_G^A \subseteq N_G(\langle b, c \rangle) \cap N_G(\langle ab, c^2 \rangle) = \langle a^4, b, c \rangle \cap \langle a^4, ab, c \rangle = \langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle = Z(G)$. Тому $N_G^A = \langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle = Z(G)$.

У фактор-групі $\bar{G} = G/\langle a^4, c^2 \rangle$ норма $N(\bar{G}) = Z(\bar{G}) = \langle \bar{a}^2 \rangle \times \langle \bar{c} \rangle$. Образом норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп є $\bar{N}_G^A = \langle \bar{c} \rangle$. Отже, $\bar{N}_G^A \neq N(\bar{G})$.

Позначимо $\omega_m(G)$ підгрупу, породжену елементами порядку не більше 2^m . Зокрема, $\omega_1(G) = \omega(G)$ - нижній шар групи G .

Лема 2. ([4]) Якщо локально скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нижній шар $\omega(N_G^A)$ є центральною нециклічною підгрупою групи G , то $\omega(G) = \omega(N_G^A)$.

Нециклічною нормою N_G групи G будемо називати перетин нормалізаторів усіх нециклічних підгруп даної групи. Зрозуміло, що в загальному випадку має місце включення $N_G \subseteq N_G^A$. Більш точні зв'язки між цими нормами в класі скінчених 2-груп встановлюються нижче.

Теорема 1. Якщо скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп та нециклічний центр і не містить групи кватерніонів, то $N_G^A = N_G$.

Доведення. Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 2 $\omega(G) = \omega(N_G^A)$. Враховуючи, що група G не містить групи кватерніонів і має нециклічний центр, кожна нециклічна підгрупа, містить нижній шар $\omega(G)$. Тому для кожного елемента x довільної нециклічної підгрупи підгрупа $\langle x, \omega(G) \rangle$ - абелева нециклічна. Отже, кожна нециклічна підгрупа покривається абелевими нециклічними підгрупами і тому $N_G^A = N_G$. Теорему доведено. $\square$

Відсутність групи кватерніонів в групі G є суттєвою вимогою в теоремі 1, що підтверджує наступний приклад.

Приклад 2. $G = Q \rtimes H$, $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$, $|q_1| = 2^n$, $n > 2$, $|q_2| = 4$, $q_1^{2^{n-1}} = q_2^2$, $q_2^{-1}q_1q_2 = q_1^{-1}$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[q_2, h_2] = 1$, $[q_2, h_1] = q_2^2$, $[H, \langle q_1 \rangle] = E$.

У цій групі $N_G^A = \langle q_1^{2^{n-3}} \rangle \times H \neq N_G = \langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 q_1^{2^{n-2}} \rangle$.

Отже, якщо в локально скінченній p -групі G ($p \neq 2$) з неабелевою нормою N_G^A завжди виконується рівність $N_G^A = N_G$ [4], то в 2-групах ця рівність може не виконуватись як у випадку $G = N_G^A$ (твердження 1, група типу 7), так і у випадку $G \neq N_G^A$ (приклад 2).

Лема 3. Будь-яка скінченна 2-група G експоненти 4 з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром є HA_2 -групою.

Доведення. Нехай група G задовольняє умови леми. Тоді $\omega(N_G^A) = \omega(G)$ - центральна елементарна абелева група порядку 4.

Фактор-група $\bar{G} = G/\omega(G)$ є групою експоненти 2. Отже, $\bar{G}$ - абелева і $G' \subseteq \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи містить $\omega(G)$, то кожна така підгрупа нормальна в G і G є HA_2 -групою. Лему доведено. $\square$

Наслідок 2. Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо група G містить елементи порядку 4, що не належать нормі N_G^A , то $\exp G > 4$.

Лема 4. Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$, то підгрупа $G_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA}_2$ -групою.

Доведення. Нехай $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G) \subseteq Z(G)$. Тому $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ і $G_1' \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G_1 містить $\omega(G)$, то вона нормальна в G_1 . Отже, $G_1 \in \overline{HA}_2$ -групою і лему доведено. $\square$

Існування групи, про яку йдеться в лемі 4, підтверджує приклад 2.

Наслідок 3. Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо норма N_G^A є групою одного з типів 2) при $n \geq m > 2$, $m > n > 2$, 5), 7), 8) або 6) і 9) при $n > 2$ твердження 1, то $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$ і $\omega_2(N_G^A)$ є підгрупою експоненти 4.

Доведення. Нехай умови наслідку виконуються та існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. Тоді за лемою 4 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA}_2$ -групою. Враховуючи будову норми N_G^A і опис $\overline{HA}_2$ -груп, приходимо до протиріччя. Отже, $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$. $\square$

Лема 5. Якщо в скінченній 2-групі G з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то група G не містить узагальненої групи кватерніонів порядку більше 8. Якщо при цьому група G містить групу кватерніонів, то $H \subset N_G^A$. Більше того, якщо кожна група кватерніонів нормальна в нормі N_G^A , то $N_G^A = N_G$.

Наслідок 4. Нехай G - скінченна 2-група з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A , яка не містить групи кватерніонів. Якщо $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то група G також не містить групи кватерніонів і $N_G^A = N_G$.

Для скорочення викладу скінченні 2-групи з нециклічним центром і недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп будемо називати групами типу α , якщо N_G^A - неметациклічна підгрупа, і групами типу β , якщо N_G^A - метациклічна підгрупа.

Теорема 2. Група G є групою типу α тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з наступних типів:

1) G - неметациклічна недедекіндова $\overline{HA}_2$ -група з нециклічним центром, $G = N_G^A$;

2) $G = H \cdot Q$, де H - група кватерніонів порядку 8, Q - узагальнена група кватерніонів, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $Q = \langle y, x \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $|x| = 4$, $y^{2^{n-1}} = x^2$, $x^{-1}yx = y^{-1}$, $H \cap Q = E$, $[Q, H] \subseteq \langle x^2, h_1^2 \rangle$, $N_G^A = H \times \langle y^{2^{n-2}} \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Доведемо необхідність умов теореми.

Оскільки центр $Z(G)$ нециклічний, то $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$ і за лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Виходячи з умови теореми та наслідку 1, робимо висновок, що норма N_G^A є групою одного з типів 4)-9) твердження 1.

Продовжимо доведення теореми залежно від будови норми N_G^A .

Лема 6. Нехай G - група типу α , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою одного з типів 4), 5), 7), 8) та 9) при $n = 2$ твердження 1. Тоді $G = N_G^A$.

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$ і покажемо, що G - група експоненти 4. Нехай існує елемент $x \in G$, $|x| = 8$.

Якщо при цьому норма N_G^A є групою одного з типів 5), 7) або 8) твердження 1, то за наслідком 3 $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$ і $x^2 \in N_G^A$.

Нехай норма N_G^A є групою одного з типів 4) або 9) при $n = 2$ твердження 1. Припустимо, що $x^2 \notin N_G^A$. З умов $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ та $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ випливає, що $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$ і $x^2 \in Z(G_1)$. Але у такому випадку $\omega(G_1) \neq \omega(N_G^A)$, що неможливо за лемою 2. Отже, $x^2 \in N_G^A$, $[\langle x \rangle, \omega(G)] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \langle x^2 \rangle \omega(G)$.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G_1} = G_1 / \omega(G)$. За доведеним $\overline{G_1}' \subseteq \langle x^2 \rangle$. Якщо $\overline{G_1}' \neq E$, то, враховуючи умови $\overline{x} \notin Z(\overline{G_1})$ і $\langle \overline{x} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$, одержимо $[\overline{G_1} : C_{\overline{G_1}}(\langle \overline{x} \rangle)] = 2$. Отже, N_G^A містить елемент $\overline{y}$ порядку 2, непереставний з $\overline{x}$. Тоді $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ - група діеда порядку 8 і $|\overline{xy}| = 2$. Оскільки $\omega(G)$ - центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 1 $N_G^A \leq N(\overline{G})$, звідки $\langle \overline{xy} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$. Отже, $\overline{G_1}$ - абелева, що неможливо.

Тому $\overline{G_1}' = E$, $G_1' \subseteq \omega(N_G^A)$ і $G_1 \in \overline{HA_2}$ -групою, що містить центральну циклічну підгрупу порядку 4, що неможливо, враховуючи будову норми N_G^A . Таким чином, $G \in$ групою експоненти 4. За лемою 3 $G \in \overline{HA_2}$ -групою і лемою доведено. $\square$

Лема 7. Нехай G - група типу α , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є прямим або напівпрямим добутком нормальної циклічної групи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Тоді $G = N_G^A$.

Доведення. Нехай норма N_G^A задовольняє умови леми, тобто є групою типу 6) або 9) при $n > 2$. Припустимо, що $G \neq N_G^A$. Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Окрім того, за наслідком 3 $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$.

Якщо норма N_G^A є групою типу 6) при $n > 2$, то за лемою 5 $N_G^A = N_G$. За теоремою 2 [5] $G - \overline{HA_2}$ -група, що є напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Отже, $G = N_G^A$ що неможливо.

Нехай норма N_G^A є групою типу 9) при $n > 2$. Тоді за лемою 5 N_G^A містить усі групи кватерніонів. Враховуючи також, що N_G^A нормалізує кожну абелеву нециклічну підгрупу, робимо висновок, що нециклічна норма N_G групи G збігається з нециклічною нормою підгрупи N_G^A , тобто $N_G = N_{N_G^A} = \langle c^2 \rangle \times H$, $|c^2| \geq 4$. За теоремою 2 [5], як і в попередньому випадку, $G \in \overline{HA_2}$ -групою і $G = N_G^A$, що неможливо. Лему доведено. $\square$

Лема 8. Нехай G - група типу α , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою виду $N_G^A = H \times \langle c \rangle$, де H - група кватерніонів, $|c| = 4$. Тоді або $G = N_G^A$, або $G \in$ групою типу 2) теорему 2.

Доведення. За лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Якщо $N_G^A = \omega_2(G)$, то за лемою 5 $N_G^A = N_G$. За результатами роботи [5] $G \in \overline{HA_2}$ -групою і $G = N_G^A$.

Отже, надалі будемо вважати, що $N_G^A \neq \omega_2(G)$ і існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 4 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA_2}$ -групою експоненти 4. Якщо при цьому $[x, c] = 1$, то G_1 містить центральну циклічну підгрупу $\langle c \rangle$ порядку 4, що неможливо за твердженням 1, враховуючи, що $|\omega_2(G_1)| = 64$. Отже, $c \notin Z(G)$.

Якщо при цьому $\langle c \rangle \triangleleft G$, то, враховуючи нецентральність підгрупи $\langle c \rangle$, одержимо $[G : C] = 2$, де $C = C_G(\langle c \rangle)$.

Покажемо, що за цих умов усі елементи, порядком яких більший за 4, переставні з елементом c . Нехай $y \in G \setminus N_G^A$, $|y| = 2^s$, $s > 2$. Якщо $\langle y \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ і $[\langle y^2 \rangle, N_G^A] = E$. Але у такому випадку $\omega(G) \neq \omega(N_G^A)$, що суперечить лемі 2. Тому $\langle y \rangle \cap N_G^A = \langle y^{2^{s-2}} \rangle$.

Покладемо $y_1 = y^{2^{s-3}}$, $y_1^2 = c^m h^k$, де $h \in H$ і розглянемо групу $G_2 = \langle y_1 \rangle N_G^A$. Оскільки $[\langle y_1 \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y_1 \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \langle y_1^2 \rangle \omega(G)$, то $\langle y_1^2 \rangle \triangleleft G_2$. З цього випливає, що або $m \equiv 0 \pmod{2}$ і $\langle k, 2 \rangle = 1$, або $k \equiv 0 \pmod{2}$ і $\langle m, 2 \rangle = 1$.

У першому випадку $y_1^2 = c^{2m_1} h^{k_1}$, $\langle k, 2 \rangle = 1$. За доведеним вище $[\langle y_1 \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y_1 \rangle \cap N_G^A = \langle y_1^2 \rangle = \langle h \rangle$. Нехай h_1 - елемент підгрупи H , непереставний з h . Тоді $[\langle h_1 \rangle, \langle y_1 \rangle] = \langle y_1^2 \rangle = \langle h^{k_1} \rangle$. Якщо при цьому $\langle l, 2 \rangle = 1$, то $\langle y_1, h_1 \rangle$ - група дієдра і $|\langle y_1, h_1 \rangle| = 2$. За лемою 1 $\langle y_1, h_1 \rangle \triangleleft \overline{G_2}$, тому $\overline{G_2} = \overline{N_G^A} \times \langle y_1, h_1 \rangle$. Отже, $[\langle y_1, h_1 \rangle, \overline{G_2}] = [\langle y_1, h_1 \rangle] = 1$, що неможливо. Таким чином, $\langle l, 2 \rangle \neq 1$ і $[\langle h_1 \rangle, \langle y_1 \rangle] = 1$. Але тоді $[h_1, y_1] \in \omega(N_G^A)$, $[h_1, y_1^2] = [h_1, h_1] = 1$, всупереч вибору h_1 .

Таким чином, $y_1^2 = c^m h^{2k_1}$, де $\langle m, 2 \rangle = 1$, і тому $[y, c] = 1$. Отже, елементи порядку яких більший 4, належать до централізатора C .

Нехай тепер $x \notin C$. Тоді $|x| = 4$. Враховуючи умову $[G : C] = 2$, одержимо $G = C \langle x \rangle$, де $x^2 \in \omega(G)$, $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$. За доведеним вище норма N_G^A містить усі елементи четвертого порядку централізатора C , тобто $N_G^A = \omega_2(C)$. Якщо при цьому $\exp C = 4$, то $N_G^A = C$ і $G = N_G^A \cdot \langle x \rangle$. За лемою 4 $G - \overline{HA_2}$ -група відмінна від N_G^A , що неможливо. Отже, $\exp C > 4$.

Оскільки норма N_G^A підгрупи C містить N_G^A і $c \in Z(C)$, то норма N_G^A є групою одного з типів:

- 1) $N_G^A = \langle y \rangle \times H$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$;
- 2) $N_G^A = \langle y \rangle \times H$, $[\langle y \rangle, H] = \langle y^{2^{n-1}} \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$.

За лемою 7 $N_G^A = C$. Розглянемо кожен з випадків окремо.

1. Якщо $C = N_G^A = \langle y \rangle \times H$, тоді $G = (\langle y \rangle \times H) \langle x \rangle$, $x^2 \in C$. Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\omega(G) \cong (\langle \overline{y} \rangle \times \overline{H}) \langle \overline{x} \rangle$. Оскільки $\langle \overline{y} \rangle = \overline{Z(C)}$, то підгрупа $\langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$ містить циклічну підгрупу індекса 2 і можливі наступні співвідношення між $\overline{x}$ та $\overline{y}$.

Якщо $[\bar{y}, \bar{x}] = 1$, то $G' \subseteq \omega(G)$ і $G \in \overline{HA_2}$ -групою, всупереч умові $G \neq N_G^A$.

Якщо $\bar{x}^{-1}\bar{y}\bar{x} = \bar{y}^{-1}\bar{y}^{2^{n-2}}$, $n \geq 4$, то переходячи до прообразів, будемо мати $x^{-1}yx = y^{-1}cz$, де $z \in \omega(G)$. Далі $x^{-2}yx^2 = x^{-1}y^{-1}czx = yc^{-2}$, що суперечить умові $x^2 \in Z(G)$.

Якщо $\bar{x}^{-1}\bar{y}\bar{x} = \bar{y}\bar{y}^{2^{n-2}}$, де $n \geq 4$, то $|y| \geq 16$, $x^{-1}yx = ycz$, де $z \in \omega(G)$, і $x^{-1}y^2x = y^2c^2$. Оскільки $c \in \langle y \rangle$, то $y^2 = c$ і $|y| = 8$. Протиріччя.

Таким чином, $\bar{x}^{-1}\bar{y}\bar{x} = \bar{y}^{-1}$. Тоді $G = \langle y \rangle G_1$, де $G_1 = N_G^A(x)$ є $\overline{HA_2}$ -групою, яка є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Неважко довести, що існує елемент $x_1 \in G_1$, що $x_1^2 = c^2$ і $\langle y, x_1 \rangle$ - узагальнена група кватерніонів.

Отже, $G = H \cdot Q$ - група типу 2) теореми 2, де одна з груп H чи Q є узагальненою групою кватерніонів порядку більше 8, а інша - групою кватерніонів, $[H, Q] \subseteq \omega(G)$.

2. Нехай тепер $C = N_G^A = \langle y \rangle \lambda H$, $[(y), H] = \langle y^{2^{n-1}} \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$.

Розглянемо фактор-групу $\bar{G} = G/\omega(G) \cong (\langle y \rangle \lambda \bar{H})/(\bar{x})$, де $[\bar{H}, (\bar{x})] = E$, $[(y), (\bar{x})] \subseteq \langle \bar{y}, \bar{H} \rangle$. Покладемо $\bar{x}^{-1}\bar{y}\bar{x} = \bar{y}^{\alpha}\bar{h}^{\beta}$, де $\bar{h} \in \bar{H}$. Тоді з умови $[\bar{x}^2, \bar{y}] = 1$ випливає, що $\bar{x}^{-2}\bar{y}\bar{x}^2 = (\bar{y}^{\alpha}\bar{h}^{\beta})^{\alpha}\bar{h}^{\beta} = \bar{y}^{\alpha^2}\bar{h}^{\beta(\alpha+1)} = \bar{y}$. Якщо $\beta \equiv 1(mod 2)$, то $\alpha^2 \equiv 1(mod 2^{n-1})$ і $\alpha = \pm 1 + 2^{n-1}t$ або $\alpha = \pm 1 + 2^{n-2}t$. Неважко перевірити, що кожному з випадків $[h_1, (xy)^2] \neq 1$ для елемента $h_1 \in H$, який непереставний з h . З іншого боку, $[h_1, x] \in \omega(G)$, $[h_1, y] \in \omega(G)$. Отже, $[h_1, xy] \in \omega(G)$ і $[h_1, (xy)^2] = 1$. Отримали протиріччя.

Отже, $\beta \equiv 0(mod 2)$ і $\langle \bar{y} \rangle \triangleleft \bar{C}$. Міркуючи аналогічно попередньому випадку отримуємо, що $\bar{x}^{-1}\bar{y}\bar{x} = \bar{y}^{-1}$. Тоді $G = \langle y \rangle G_1$, де $G_1 = N_G^A(x)$ є $\overline{HA_2}$ -групою, яка є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Отже, $G = H \cdot Q$ - група типу 2) теореми 2.

Припустимо, що $\langle c \rangle \ntriangleleft G$. Тоді $[(c), G] \subseteq \omega(G)$.

Нехай x - елемент G , такий що $|x| \geq 8$. Якщо $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $[(x), N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ і $\langle x^2, N_G^A \rangle = E$. Тоді $G_1 = \langle x^2 \rangle N_G^A$ є $\overline{HA_2}$ -групою, що має дві центральні циклічні підгрупи $\langle x \rangle$ та $\langle c \rangle$ порядку 4, що суперечить їх опису. Отже, $x^{2^k} = c^{\alpha}h^{\beta}$ (де або α , або β не діляться на 2) і $[(x), N_G^A] \subseteq \langle x^{2^k} \rangle \omega(G)$. Оскільки $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, то або $\alpha \equiv 0(mod 2)$ і $\beta \equiv 1(mod 2)$, або $\alpha \equiv 1(mod 2)$ і $\beta \equiv 0(mod 2)$.

Якщо $\alpha \equiv 0(mod 2)$ і $\beta \equiv 1(mod 2)$, то неважко довести, що $[(x), N_G^A] \subseteq \omega(G)$, тому $[x^2, h_1] = 1$. З іншого боку, $[x^2, h_1] = [c^{2\alpha}h^{\beta}, h_1] = [h^{\beta}, h_1] \neq 1$. Отримали протиріччя. Отже, $x^{2^k} = c^{\alpha}h^{2\beta}$, де $(\alpha, 2) = 1$, звідки $[x, c] = 1$ і $\langle x \rangle \cap N_G^A = \langle ch^{2\beta} \rangle$, де $\beta \in \{0, 1\}$.

Позначимо $N = N_G(\langle c \rangle)$. Зрозуміло, що $N \geq N_G^A$ і для будь-якого елемента $y \in G$ $|y| \geq 8$, $y \in N$. Якщо $N \neq G$, то існує елемент $a \in G \setminus N$, такий що $|a| = 4$, $a^2 \in \omega(G)$, $[(a), N_G^A] \subseteq \omega(G)$.

Нехай $a, b \notin N$. Тоді $[a, c] = c^{2^r}h^2$, $[b, c] = c^{2^s}h^2$, звідки $[ab, c] \in \langle c \rangle$ і $ab \in N$. Неважко довести, що $a^{-1}N = aN = bN$, тому $[G : N] = 2$ і $N \triangleleft G$, $G = N(a)$, $a^2 \in \omega(N_G^A)$.

За доведеним вище підгрупа N є добутком групи кватерніонів порядку 8 і узагальненої групи кватерніонів порядку більше 16: $N = H \cdot Q$, $[H] = 8$, $|Q| \geq 16$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $Q = \langle y, x \rangle$, $|y| = 2^n > 4$, $y^{2^{n-2}} = c$, $[H, Q] \subseteq \omega(G)$.

Якщо $|y| > 8$, то $N' = \langle y^2 \rangle \times \langle h^2 \rangle \triangleleft G$ і $(y^4) \triangleleft G$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, що суперечить припущенню. Отже, $|y| = 8$.

Розглянемо фактор-групу $G/N_G^A \cong (\langle \bar{y} \rangle \times \langle \bar{x} \rangle)/(\bar{a})$, $|\bar{y}| = |\bar{x}| = |\bar{a}| = 2$. Якщо G/N_G^A неабелева, то вона є групою діедрів і містить елемент четвертого порядку виду $(\bar{a}\bar{y})$, де $\bar{t} \in \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$. Зрозуміло, що $|\bar{a}\bar{t}| > 4$, а, отже, $\bar{a} \in N$ і $\bar{a} \in N$, що неможливо. Таким чином, фактор-група G/N_G^A абелева, $[\bar{N}, (\bar{a})] = 1$ і $[y, a] = c^k h^m$. Якщо $m \equiv 0(mod 2)$, то $[y^2, a] = c^{2k} \in \langle c \rangle$, що неможливо, бо у такому випадку $a \in N$. Отже, $m = 1$ і $[y, a] = c^k h$. Звідси $(ya)^2 = ya^2yc^k h = c^{1+k} h z$, $z \in \omega(G)$. З іншого боку, оскільки $|ya| > 4$, то за доведеним $\langle ya \rangle \cap N_G^A \subseteq \langle c \rangle \omega(G)$. Протиріччя. Лему доведено. $\square$

Теорему доведено. $\square$

Теорема 3. Група G є групою типу β тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з наступних типів:

- 1) G - метациклічна недедекіндова $\overline{HA_2}$ -група з нециклічним центром, $G = N_G^A = N_G$;
- 2) $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$, $|x| = 2^k$, $|b| = 2^m$, $m > 2$, $k \equiv m+r$, $1 \leq r < m-1$, $Z(G) = \langle x^{2^{r+1}} \rangle \times \langle b^{2^{r+1}} \rangle$, $[x, b] = x^{2^{k-r-1}} b^{2^{m-1}}$, $(s, 2) = 1$, $0 \leq t < 2$, $N_G^A = N_G = \langle x^{2^{m-1}} \rangle \times \langle b \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Доведемо необхідність умов теореми.

Оскільки норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і метациклічна, а центр $Z(G)$ - нециклічний, то за наслідком 1 N_G^A є групою типу 2) твердження 1 при $m > 1$:

$N_G^A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $n \geq 2$, $m > 1$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$.

Продовжимо доведення теореми в наступних лемах.

Лема 9. Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $m > n \geq 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.

Доведення. Нехай $G \neq N_G^A$. Якщо $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то за наслідком 4 і лемою 5 [5] $G = N_G^A = N_G$, що суперечить припущенню.

Отже, далі будемо вважати, що $\omega_2(N_G^A) \neq \omega_2(G)$. Тоді існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 2 $x^2 \in \omega(G)$, $[(x), N_G^A] \subseteq (x)\omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$. Тому за лемою 4 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ є $\overline{HA}_2$ -групою.

Виходячи з опису $\overline{HA}_2$ -груп з нециклічним центром, G_1 є прямим чи наліппрямим добутком нормальної циклічної підгрупи $\langle y \rangle$ порядку більше 2 та групи кватерніонів H . З цього випливає, що $|a| = |x| = 4$, $|y| = |b|$. Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $G_1 = \langle y \rangle \rtimes H$, де $H = \langle x, a \rangle$ - група кватерніонів, $[H, \langle y \rangle] \subseteq \langle b^{2^{m-1}} \rangle$. Виходячи з цього, неважко довести, що для довільного елемента $x \notin N_G^A$, $|x| > 2$ виконується $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$.

Припустимо, що фактор-група $\overline{G} = G/N_G^A$ містить підгрупу $\langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle$, де $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 2$. Оскільки $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$ і $\langle y \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $|x| = |y| = 4$. За доведеним у кожному з суміжних класів xN_G^A та yN_G^A знайдуться такі елементи x_1 та y_1 , що $|x_1| = |y_1| = 4$, $x_1^2 = y_1^2 = a^2 = [x_1, a] = [y_1, a]$ та $[x_1, b] = b^{2^{m-1}}$, $[y_1, b] = b^{2^{m-1}}$. Оскільки $[x, y] = 1$, то $[x_1, y_1] \in N_G^A$. Покладемо $[x_1, y_1] = a^r b^s$, тоді $[x_1^2, y_1^2] = b^{2s} a^{2r} b^{2^{m-1}s} = 1$ і $2s(1 + 2^{m-2}t) \equiv 0 \pmod{2^m}$. Оскільки $m > 2$, то $s \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$, $s = 2^{m-1}s_1$. Отже, $(x_1 y_1)^2 = a^{-r} b^{2^{m-1}s_1}$. Якщо $(r, 2) \neq 1$, то $|x_1 y_1 a^{-r/2} b^{2^{m-1}s_1/2}| = 2$. У такому випадку і $(x_1 y_1 a^{-r/2} b^{2^{m-1}s_1/2}) \in N_G^A$ і $x_1 \in y_1 N_G^A$, що неможливо. Нехай $(r, 2) = 1$. Тоді з умови $[x_1 y_1, b] = b^{2^{m-1}}$ випливає $[(x_1 y_1)^2, b] = [a^{-r} b^{2^{m-1}s_1}, b] = [a^r, b] = 1$, що також неможливо. Отже, $\overline{G}$ має єдину інволюцію.

Припустимо, що $|\overline{G}| = 2$, тоді G є $\overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню.

Отже, фактор-група $\overline{G}$ містить елемент $\overline{y}$ порядку 4. Тоді $|g| = 8$ і за доведеним $\langle g \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$. Оскільки $[(g), N_G^A] \subseteq (g)\omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$, то комутант групи $G_1 = \langle g \rangle N_G^A$ міститься в $\omega(G)$ і G_1 є $\overline{HA}_2$ -групою, що неможливо, враховуючи будову N_G^A та опис $\overline{HA}_2$ -груп. Лему доведено. $\square$

З наслідків 3 та 4 і леми 5 [5] отримуємо наступну лему.

Лема 10. Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n \geq m > 2$. Тоді G є групою типу 2) теореми 2.

Лема 11. Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n > m = 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.

Доведення леми 11 аналогічне доведенню леми 9.

Лема 12. Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n = m = 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$. Нехай x - елемент найменшого порядку групи G , що не належить до норми N_G^A . Тоді $x^2 \in N_G^A$ і за лемою 2 $|x| > 2$. Покладемо $x^2 = a^{\alpha} b^{\beta}$. Оскільки $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$, то $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, звідки $\beta = 2\beta_1$.

Припустимо, що $(\alpha, 2) = 1$. Оскільки $\omega(G)$ центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 1 у фактор-групі $\overline{G}_1 = G_1/\omega(G)$ $\overline{N}_{G_1}^A \subseteq N(\overline{G}_1)$, тому $\langle \overline{x} \rangle \triangleleft \overline{G}_1$ і $\overline{G}_1' \subseteq \langle \overline{x} \rangle \cap \overline{N}_{G_1}^A = \langle \overline{x}^2 \rangle = \langle \overline{a} \rangle$. Якщо $\overline{G}_1' = \overline{E}$, то $G_1' \subseteq \omega(G)$ і $[x, b] \in \omega(G)$, $[x^2, b] = 1$, що неможливо. Отже, $\overline{G}_1' = \langle \overline{a} \rangle$. Тоді $(\overline{bx})^2 = (\overline{bx})(\overline{bx}) = \overline{b^2 x^2 a^1} = 1$. Але у такому випадку $\overline{b} \notin N_{G_1}^A(\overline{bx})$, що неможливо. Отже, $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ і для довільного елемента $x \in G$, $|x| = 2^k$, $k > 1$, $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$. Якщо при цьому $k > 2$, то $\langle x \rangle \cap N_G^A = \langle a^2 b^2 \rangle$, бо інакше з умови $[(x^2), N_G^A] = E$ випливає існування елемента порядку 2, що не належить нормі N_G^A .

Нехай $\overline{A}$ - максимальна елементарна абелева підгрупа фактор-групи $\overline{G} = G/N_G^A$, $\overline{x}$ та $\overline{y}$ - довільні елементи з $\overline{A}$. За доведеним вище $x^2 \in \omega(G)$ та $y^2 \in \omega(G)$, тому $[x^2, y] = [x, y^2] = 1$. Покладемо $[x, y] = a^r b^s$. Тоді $(xy)^2 = a^r b^s x^2 y^2$.

де $z \in \omega(G)$. Оскільки $(xy)^2 \in \omega(G)$, то $r \equiv t \equiv 0 \pmod{2}$. Отже, для довільних елементів $x, y \in A$ (A - повний прообраз підгрупи $\bar{A}$), $[x, y] \in \omega(G)$ і $A' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з A містить $\omega(G)$, $A \in \overline{HA_2}$ -групою експоненти 4. З опису таких груп $|\bar{A}| \leq 4$.

Нехай $|\bar{A}| = 2$. Оскільки $\bar{G}$ нільпотентна, то $Z(\bar{G}) \neq \bar{E}$ і $\bar{G}$ має єдину інволюцію. Отже, $\bar{G}$ або циклічна, або кватерніонна 2-група.

Якщо $\bar{G}$ - циклічна, то $G = \langle x \rangle N_G^A$, $G' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з G містить $\omega(G)$, $G \in \overline{HA_2}$ -групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню.

Нехай $\bar{G}$ - кватерніонна 2-група. Тоді вона містить групу кватерніонів $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ порядку 8, $\bar{x}^2 = \bar{y}^2$. Переходячи до прообразів, покладемо $y^2 = x^2 a^m b^s$. Оскільки $[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$, то $[\langle y^2 \rangle, N_G^A] = E$. Аналогічно $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$. Отже, $m \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$ і $x^2 \in Z(G)$, що неможливо.

Нехай $|\bar{A}| = 4$, $\bar{A} = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$ елементарна абелева підгрупа порядку 4. Якщо $\bar{A} = \bar{G}$, то $G' \subseteq \omega(N_G^A)$ і $G \in \overline{HA_2}$ -групою, тобто $G = N_G^A$, що неможливо за припущенням.

Нехай $\bar{A} \neq \bar{G}$. Позначимо $\bar{N} = N_{\bar{G}}(\bar{A})$. Тоді $[\bar{N} : C_{\bar{N}}(\bar{A})] = 2$. Група $C_{\bar{N}}(\bar{A})$ не містить нециклічних абелевих підгруп порядку 8, оскільки повний прообраз такої групи є $\overline{HA_2}$ -групою, що неможливо, враховуючи твердження 1. Тоді $C_{\bar{N}}(\bar{A}) = \bar{A}$ і $\bar{N} = C_{\bar{N}}(\bar{A})(\bar{x}_1)$, де $\bar{x}_1^2 \in C_{\bar{N}}(\bar{A})$.

Отже, $\bar{N} = \bar{A}(\bar{x}_1) = (\langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle)(\bar{x}_1) = \langle \bar{x}_2 \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$, $|\bar{x}_2| = 4$, $[\bar{x}_2, \bar{y}] = \bar{x}_2^2 = \bar{x}$.

Позначимо $\bar{N}_1 = N_{\bar{G}}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$. Оскільки $[\bar{N}_1 : C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle)] = 2$ і $\bar{y} \notin C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$, то $\bar{N}_1 = C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle) \times \langle \bar{y} \rangle$, де $C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$ - циклічна підгрупа. Отже, $\bar{N}_1 = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$ і $\bar{x}_2 \in \langle \bar{x} \rangle$. Тоді $\bar{N}'_1 = \langle \bar{x}_2 \rangle$ і тому $\langle \bar{x}_2 \rangle$ - характеристична підгрупа групи $\bar{N}_1$.

Покладемо $\bar{N}_2 = N_{\bar{G}}(\bar{N}_1)$, тоді $\langle \bar{x}_2 \rangle \triangleleft \bar{N}_2$ і $\bar{N}_2 \subseteq N_{\bar{G}}(\langle \bar{x}_2 \rangle) = \bar{N}_1$. Це можливо лише за умови, що $\bar{N}_1 = \bar{G} = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$, $|\bar{x}| = 2^k > 2$, $|\bar{y}| = 2$, $\bar{y}^{-1} \bar{x} \bar{y} = z^{-1+2^{k-1}} \bar{x}$, $t \in \{0, 1\}$. Покажемо, що $t = 0$. Для довільного елемента $g \in \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $|g| \geq 8$ мають місце співвідношення $[g^2, N_G^A] = 1$ та $\langle g \rangle \cap N_G^A = \langle a^2 b^2 \rangle$. Нехай $z_1 = z^{2^{k-1}}$ і $y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a^{\alpha} b^{\beta}$, де z та y - прообрази елементів $\bar{z}$ та $\bar{y}$ відповідно. Оскільки $|z| > 8$, то $|zy| = 8$ і $(zy)^4 = a^2 b^2 = a^{2\alpha} b^{2\beta}$. Таким чином, $\alpha \equiv \beta \equiv 0 \pmod{2}$ та $y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a_1$, де $a_1 \in \omega(G)$. Оскільки $[z_1, y] \in \omega(G)$, покладемо $[z_1, y] = a_2$, де $a_2 \in \omega(G)$. Враховуючи, що $y^2 \in$

$\omega(N_G^A)$, маємо $y^{-2} z y^2 = y^{-1} z^{-1} z_1 a_1 y = z a_2 = z$. Отже, $a_2 = 1$ і $z_1 \in Z(G)$, що неможливо. Таким чином, $\bar{y}^{-1} \bar{x} \bar{y} = z^{-1}$. Перейдемо до прообразів: $y^{-1} z y = z^{-1} a^{\alpha} b^{\beta}$. Оскільки $\langle zy \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(N_G^A)$ та $(zy)^2 = y^2 a^{\alpha} b^{\beta} \in N_G^A$, то $l \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$ і $y^{-1} z y = z^{-1} a^{2l} b^{2s} = z^{-1} z_2$, де $z_2 \in \omega(N_G^A)$.

Виходячи з умов $[\langle z \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$, $[z^{2^{k-1}}, y] \in \omega(G)$, робимо висновок, що $[\langle z^{2^{k-1}} \rangle, G] \subseteq \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G містить $\omega(G)$, то елемент $z^{2^{k-1}}$ порядку 4 нормалізує кожну таку підгрупу. Це означає, що $z^{2^{k-1}}$ належить нормі N_G^A . Маємо протиріччя. Отже, $G = N_G^A$. Лему доведено. $\square$

Теорему доведено. $\square$

З теорем 12 і 16 та теореми [2] випливає

Наслідок 5. Будь-яка 2-група G з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп тоді і тільки тоді не містить підгруп кватерніонів, коли такої підгрупи не містить норма N_G^A .

Список використаних джерел

1. Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // *Comp. Math.* -1935.-1 -S.254-283.
2. Лима Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп // *Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки"*. - 2005. - №1. - С.56-64.
3. Лима Ф.Н. 2-групи з інваріантними нецикліческими підгрупами // *Мат. Записки*. - 1968. - 4, №1. - С. 75-83.
4. Друшляк М.Г. Конечные р-группы (р ≠ 2) с абелевой нормой абелевых нецикліческих підгруп // *Известия Гомельского университета имени Ф.Скорини*. - 2010. - №1(58). - С.192-197.
5. Лукашова Т.Д. Конечные 2-группы с недедекіндовой нормой нецикліческих підгруп // *Известия Гомельского гос-го ун-та им. Ф.Скорини. Вопросы алгебры*. - 2001. - №3(6). - С. 139-150.

Надійшла до редколегії 26.07.2011

УДК 512.552+512.715

Р.В. Скуратовський, аспірант

**Ідеали одногілкових особливостей
кривих типу N**

У роботі досліджено особливості типу N плоскої алгебраїчної кривої.

Встановлені достатні умови того, що особливість типу N плоскої алгебраїчної кривої з однією гілкою має як максимум двопараметричний сімейство ідеалів.

Ключові слова: особливість плоскої алгебраїчної кривої, особливість типу N кривої, двопараметричне сімейство ідеалів.

E-mail: rquot@ukr.net

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Вивчення модулів Коена-Маколея, зокрема, ідеалів комутативних кілець розмірності Крулля 1, є класичним напрямком сучасної алгебри, який веде початок ще з робіт Дедекінда, а в новий час – з теорії цілочисельних зображень. Зокрема, в роботі [2] було дано критерій того, що локальне комутативне кільце R розмірності Крулля 1 без нильпотентних елементів має скінченну кількість нерозкладних модулів Коена-Маколея. Виявилось також, що лише в цьому випадку воно має скінченну кількість класів ідеалів. У роботі [6] було показано, що для особливостей алгебраїчних кривих умови з [3] рівносильні тому, що R домінує одну з простих плоских особливостей у розумінні Арнольда [1]. У роботі [7] Шалперта встановив, що плоска особливість має лише однопараметричний сім'я ідеалів тоді і тільки тоді коли вона є строго однопараметричною в розумінні [9] (рівносильно, одно- або двопараметричною в розумінні [2]). Зауважимо, що в цьому випадку будова всіх модулів Коена - Маколея може бути як загодно складною, оскільки більшість з цих особливостей є дикими [3] (саме, дикими є всі, крім особливостей типу T). У роботі [4] результат Шалперта перенесено на довільні особливості кривих.

Дана робота присвячена питанню про те, коли одновимірна особливість має щонайбільше двопараметричний сім'я ідеалів. Воно було вирі-

R.V. Skuratovskii, PhD student

Ideals of one branch singularities of type N

The paper deals with one-branched plane curve singularity of type N .

Sufficient conditions are established in order that a one-branched plane algebraical curve singularity of type N has at most two parametric families of ideals.

Key Words: one-branched plane curve singularity, two parametric families of ideals, singularity of type N .

шено для кубічних особливостей (особливостей типу E) в роботі [5] і для одногілкових біквадратичних особливостей (особливостей типу W) в роботі [8]. В даній роботі ми розглянемо деякі випадки одногілкових особливостей типу N (особливостей степеня 5).

2 Означення і основні поняття

Означення 2.1. Одногілковою особливістю типу N назовемо підкільце $R \subset k[[t]]$ таке, що $k[[t]]$ є скінченно породженим R -модулем причому $t^5 \in R$. Таку особливість називатимемо плоскою, якщо її розмірність звуження $\dim(m/m^2) = 2$, де $m = \text{rad } R$ - максимальний ідеал, тобто m має 2 породжуючі елементи.

Надалі R позначає якусь особливість типу N , $m = \text{rad } R$, $S = \text{End}(m)$. Тоді $S \supseteq R$, причому якщо $R \neq k[[t]]$, то $S \neq R$ [2].

Нехай l – найменший показник, не кратний 5, такий, що R містить елемент $t^l + q(t)$, де $q(t)$ не містить членів степенів менших або рівних l . Будемо казати, що R – особливість типу N_{20} , якщо $l=6$, і R – особливість типу N_{24} , якщо $l=7$.

Означення 2.2. Нехай X це деякий (двобовий) S -ідеал. Породжуючим підпростором у S/m модуль $V = X/mX$ називається такий підпростір W , що $SW = V$.

Означення 2.3. Породжуючі підпростори W_1, W_2 у S -модулі $V = X/mX$ звуться

еквівалентними тоді і тільки тоді, коли існує обертовий множник $\lambda \in E$, де $E = \text{End}(X)$, такий, що $\lambda W_1 = W_2$.

Теорема 2.1. Нехай X - ідеал кільця S . Тоді існує взаємно однозначна відповідність між класами R -ідеалів I такими, що $SI = X$ і класами еквівалентності породжуваних підпросторів у S/m -модулі $V = X/mX$.

Доведення цього наведене, наприклад, в [1]. При цьому ідеалу I відповідає підпростір $W = I/mI \subseteq X/mX = V$, навпаки, породжуючому підпростору $W \subseteq V$ відповідає ідеал I , який є прообразом W при природній проекції $X \rightarrow V$. Зауважимо також, що оскільки $t^5 \in R$, то завжди $1 \leq \dim X/mX \leq 5$.

Для знаходження ідеалів R ми будемо ланцюг надкілець $R = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r = k[t]$ у якому $K_{i+1} = \text{End}(R_i)$, де $R_i = e R K_i$. Як було зауважено вище, доки K_i не є цілозамкненим, тобто $K_i \neq k[t]$, обов'язково $K_{i+1} \neq K_i$. Тоді, застосувавши попередню теорему, ми отримуємо по черзі ідеали кілець $K_{m-1}, K_{m-2}, \dots$, нарешті, K_0 .

3 Основні результати

Теорема 3.1. Нехай X такий ідеал кільця K_{r+1} , що $\dim(X/R_r X) = 5$. Тоді для довільного K_s - ідеала I , $s \leq r$, такого, що $K_{s+1}I = X$, I є насправді K_r - ідеалом.

Доведення. Оскільки завжди $\dim X/R_s X \leq 3$, то $R_s X = R_r X$. Тому, якщо W є породжуючим підпростором в $X/R_s X = X/R_r X = V$ (над K_{s+1}), то він є й породжуючим підпростором над K_r в $X/R_r X$, отже, його прообраз (тобто I) є K_r -ідеалом. $\square$

Ми також будемо користуватись наступним відомим фактом [2].

Теорема 3.2. Якщо $\dim(S/R) = 1$, то будь-який нерозкладний R -модуль без скруту (зокрема, будь-який R -ідеал) або ізоморфний R , або є S -модулем.

Сформулюємо основний результат статті. Нагадаємо, що кажуть, що R домінує R' , якщо $R \supseteq R'$. Зрозуміло, що у цьому випадку кожен R -ідеал є R' -ідеалом.

Основна теорема. Якщо одногілкова особливість домінує особливість типу N_{24} або N_{20} , то вона має щонайбільше 2-параметричні сім'ї ідеалів.

Доведення. Очевидно, досить перевірити, що кільця типу N_{24} , N_{20} мають лише 2-параметричні сім'ї ідеалів. Оскільки обчислення в обох випадках подібні, ми наведемо їх лише у випадку N_{24} , тобто $l = 7$.

Знайдемо серію надкілець для $K_0 = \langle t^5, t^7 \rangle$
 $K_0 = (1, t^5, t^7, t^{10}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{17}, t^{19}, t^{20}, \dots)$
 $K_1 = (1, t^5, t^7, t^{10}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \dots)$
 $K_2 = (1, t^2, t^7, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \dots)$
 $K_3 = (1, t^2, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \dots)$
 $K_4 = (1, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \dots)$
 $K_5 = (1, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \dots)$

Означення 3.1. Нехай X це S -ідеал. Вибіримо в $V = X/mX$ базу $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_k, \beta_1, \dots, \beta_l \rangle$ так, що $V \text{rad} S = \langle \beta_1, \dots, \beta_l \rangle = X \text{rad} S / X \text{rad} R$. Елементи $\beta_1, \dots, \beta_l$ зватимемо вільними в V , а елементи $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - обов'язковими. Очевидно підпростір $W \subseteq V$ є таким, що породжує тоді і лише тоді, коли його образ в $V/V \text{rad} S$ містить всі обов'язкові елементи.

Відомо, що кожен K_3 - ідеал ізоморфний деякому надкілцю K_3 , тобто збігається з K_3 , K_4 або K_5 . Позначимо R_i - радикал кільця K_i .

Теорема 3.3. Повний список K_2 - ідеалів, які не є K_3 - ідеалами і є такими, що породжені K_3 наведено нижче. Ми позначимо, K_3 - ідеали $I' = K_3 I$ і покладемо $M_2 = I' R_2$.

Доведення. • $I' = K_3$, $M_2 = I' R_2$. Тоді

- $I_1^{2,3} = \langle 1, t^2, t^4, t^6 \rangle + M_2$
- $I_2^{2,3} = \langle 1, t^2, t^6, t^8 \rangle + M_2$
- $I_3^{2,3} = \langle 1, t^2, t^4, t^8 \rangle + M_2$
- $I_4^{2,3} = \langle 1, t^6, t^4, t^8 \rangle + M_2$
- $I_5^{2,3} = \langle 1, t^2 + \beta t^8, t^4 + \mu t^8 \rangle + M_2$
- $I_6^{2,3} = \langle 1, t^2 + \alpha t^6 + \alpha t^8 \rangle + M_2$
- $I_7^{2,3} = \langle 1, t^2 + \alpha t^6, t^8 \rangle + M_2$
- $I_8^{2,3} = \langle 1, t^4, t^6 + \mu t^8 \rangle + M_2$
- $I_9^{2,3} = \langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \rangle + M_2$
- $I_{10}^{2,3} = \langle 1, t^6, t^8 \rangle + M_2$
- $I_{12}^{2,3} = \langle 1, t^2 + \beta t^6 + \chi t^8 \rangle + M_2$

$$12. I_{13}^{2,3} = \langle 1, t^4 + \gamma t^6 \rangle + M_2$$

$$13. I_{14}^{2,3} = \langle 1, t^6 + \gamma t^8 \rangle + M_2$$

$$14. I_{15}^{2,3} = \langle 1, t^8 \rangle + M_2.$$

$$\bullet I' = K_4, M_2 = R_2 I', M_2 = \langle t^5, t^7, t^8, t^9, \dots \rangle$$

$$1. I_1^{2,4} = \langle 1, t^2, t^3, t^4 \rangle + M_2$$

$$2. I_2^{2,4} = \langle 1, t^2, t^3 + \beta t^4, t^6 \rangle + M_2$$

$$3. I_3^{2,4} = \langle 1, t^3, t^4, t^6 \rangle + M_2,$$

$$4. I_4^{2,4} = \langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^3 + \eta t^4 \rangle + M_2$$

$$5. I_5^{2,4} = \langle 1, t^4 + \beta t^6, t^3 \rangle + M_2$$

$$6. I_6^{2,4} = \langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \rangle + M_2$$

$$7. I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \langle 1, t^3 + \gamma t^4 \rangle + M_2$$

$$8. I_{7,\lambda}^{2,4} = \langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 \rangle + M_2$$

$$9. I_{10}^{2,4} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4, t^6 \rangle + M_2$$

$$10. I_9^{2,4} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4 \rangle + M_2, \gamma \neq 0$$

$$11. I_{10}^{2,4} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^6 \rangle + M_2, \gamma \neq 0.$$

$$\bullet I' = K_5, M_2 = R_2 I' = \langle t^5, t^6, t^7, \dots \rangle \text{ тоді:}$$

$$1. I_1^{2,5} = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle + M_2$$

$$2. I_2^{2,5} = \langle 1, t, t^3, t^4 \rangle + M_2$$

$$3. I_3^{2,5} = \langle 1, t, t^2, t^4 \rangle + M_2$$

$$4. I_4^{2,5} = \langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3 \rangle + M_2$$

$$5. I_5^{2,5} = \langle 1, t, t^3 + \mu t^4 \rangle + M_2$$

$$6. I_6^{2,5} = \langle 1, t + \gamma t^2, t^4 \rangle + M_2$$

$$7. I_7^{2,5} = \langle 1, t + \beta t^3 + \gamma t^4 \rangle + M_2.$$

Ми розглянемо, як приклад, одержання ідеалів $I_j^{2,3}$. Інші випадки цілком аналогічні. У цьому випадку $I' = K_3$, $I' R_3 = \langle t^2, t^4, \dots \rangle = R_3$, $I' R_2 = \langle t^5, t^7, t^9, \dots \rangle = M_2$ тому $I'/I' R_2 = \langle 1, t^2, t^4, t^6, t^8 \rangle$, де t^2, t^4, t^6, t^8 – вільні. Можливі варіанти для підпросторів

4-вимірні:

1) $W = \langle 1, t^2 + \lambda t^8, t^4 + \beta t^8, t^6 + \gamma t^8 \rangle$ візьмемо множник $\alpha = 1 - \lambda(t^6 + \gamma t^8)$ він редукує параметр λ . Аналогічно інші параметри також редукуються. Отже отримали $I_1^{2,3} = \langle 1, t^2, t^4, t^6 \rangle + M_2$

2) $W = \langle 1, t^2 + \gamma t^4, t^6, t^8 \rangle$, $\alpha = 1 - \gamma(t^2 + \beta t^4)$ дає $I_2^{2,3} = \langle 1, t^2, t^6, t^8 \rangle + M_2$

3) $W = \langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^4 + \beta t^6, t^8 \rangle$ дає $\alpha = 1 - \gamma(t^4 + \beta t^6) \Rightarrow W = \langle 1, t^2, t^4 + \beta t^6, t^8 \rangle$ $\alpha = 1 - \beta t^2$ звідси $I_3^{2,3} = \langle 1, t^2, t^4, t^8 \rangle + M_2$

4) $W = \langle 1, t^4, t^6, t^8 \rangle$ тому $I_4^{2,3} = \langle 1, t^6, t^4, t^8 \rangle + M_2.$

3-вимірні:

$$1. W = \langle 1, t^2 + \gamma t^6 + \beta t^8, t^4 + \eta t^6 + \mu t^8 \rangle,$$

$$\alpha = 1 - \mu(t^4 + \eta t^8), \alpha = 1 - \frac{\beta}{\eta}(t^4 + \eta t^8) \text{ отри-}$$

$$\text{муюмо } I_5^{2,3} = \langle 1, t^2 + \beta t^8, t^4 + \mu t^8 \rangle + M_2$$

$$2. W = \langle 1, t^2 + \gamma t^4 + \beta t^8, t^6 + \mu t^8 \rangle,$$

$$\alpha = 1 - \gamma(t^2 + \gamma t^4 + \beta t^8), \text{ після цього множення}$$

$$\text{зникне } t^6 \text{ віднявши } t^6 + \mu t^8, \text{ потім}$$

$$\alpha = 1 - \beta(t^6 + \mu t^8) \text{ і } I_6^{2,3} = \langle 1, t^2, t^6 + \alpha t^8 \rangle + M_2$$

$$3. W = \langle 1, t^2 + \gamma t^4 + \beta t^6, t^8 \rangle, \alpha = 1 -$$

$$\gamma(t^2 + \gamma t^4 + \beta t^6) \text{ дає } I_7^{2,3} = \langle 1, t^2 + \beta t^6, t^8 \rangle + M_2$$

$$4. W = \langle 1, t^4 + \beta t^8, t^6 + \mu t^8 \rangle, \alpha = 1 - \beta t^4 \text{ дає}$$

$$I_8^{2,3} = \langle 1, t^4, t^6 + \mu t^8 \rangle + M_2$$

$$5. W = \langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \rangle \text{ дає } I_9^{2,3} =$$

$$\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \rangle + M_2$$

$$6. W = \langle 1, t^6, t^8 \rangle \text{ дає } I_{10}^{2,3} = \langle 1, t^6, t^8 \rangle + M_2$$

$$7. W = \langle 1, t^4 + \gamma t^6, t^8 \rangle \text{ звідси } I_{17}^{2,3} =$$

$$\langle 1, t^4 + \gamma t^6, t^8 \rangle + M_2.$$

2-вимірні:

$$1. W = \langle 1, t^2 + \gamma t^4 + \beta t^6 + \chi t^8 \rangle, \alpha = 1 - \frac{\beta}{\gamma} t^4 \text{ дає}$$

$$I_{10}^{2,3} = \langle 1, t^2 + \beta t^6 + \chi t^8 \rangle + M_2$$

$$2. W = \langle 1, t^4 + \gamma t^6 + \chi t^8 \rangle, \alpha = 1 - \chi t^4 \text{ дає}$$

$$I_{11}^{2,3} = \langle 1, t^4 + \gamma t^6 \rangle + M_2$$

$$3. W = \langle 1, t^6 + \gamma t^8 \rangle \text{ дає } I_{12}^{2,3} = \langle 1, t^6 + \gamma t^8 \rangle + M_2$$

$$4. W = \langle 1, t^8 \rangle \text{ дає } I_{13}^{2,3} = \langle 1, t^8 \rangle + M_2.$$

1-вимірний – саме K_2 . $\square$

Аналогічно, при переході до кілець K_1 і K_2 одержуємо такі результати.

Теорема 3.4. Повний список K_1 ідеалів, які не є K_2 ідеалами, наведено нижче. Ми позначимо $I' = K_1 I$ і покладемо $M_1 = R_1 I'$.

Доведення. $\bullet I' = I_j^{2,4}$. Тоді для $0 < j < 7$

маємо, $M_1 = \langle t^5, t^7, t^8 + \gamma t^9, t^{10}, t^{11}, \dots \rangle$.

При $j = 7$, $\lambda \neq 0$ для $I_{1,7,\lambda}^{1,2,4}$ маємо

$M_1 = \langle t^5, t^7, t^8 + \chi t^{11}, t^9, t^{10}, t^{12}, \dots \rangle$, у

випадку $j = 7$, $\lambda = 0$ маємо $M_1 =$

$\langle t^5, t^7, t^8 + \gamma t^9, t^{10}, t^{11}, \dots \rangle$

$$1. I_{1,2}^{1,2,4} = \langle 1, t^2, t^3 + \beta t^4 + \gamma t^9, t^6 \rangle + M_1$$

$$2. I_{1,4}^{1,2,4} = \langle 1, t^3 + \gamma t^6, t^3 + \eta t^4 \rangle + M_1$$

$$3. I_{1,4,7}^{1,2,4} = \langle 1, t^3 + \mu t^9, t^3 + \eta t^4 \rangle + M_1$$

$$4. I_{1,4,9}^{1,2,4} = \langle 1, t^3 + \gamma t^6, t^3 + \beta t^9 \rangle + M_1$$

$$5. I_{1,5}^{1,2,4} = \langle 1, t^6 + \mu t^9, t^3 + \beta t^4 \rangle + M_1$$

$$6. I_{1,6,\beta=0}^{1,2,4} = \langle 1, t^6 + \mu t^9, t^3 + \gamma t^9 \rangle + M_1$$

$$7. I_{1,7,\lambda=0}^{1,2,4} = \langle 1, t^3 + \gamma t^4 \rangle + M_1$$

$$8. I_{1,7,\lambda}^{1,2,4} = \langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6, t^{11} \rangle + M_1$$

$$9. I_{2,7,\lambda}^{1,2,4} = \langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 + \eta t^{11} \rangle + M_1.$$

$$\bullet I' = I_{j,1}^{2,3}, M_1 = R_1 I', M_1 = \langle t^5, t^7, t^{10}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, \dots \rangle.$$

$$\text{Для } j=14, j=13 \text{ маємо } M_1 = \langle t^5, t^7, t^9, t^{10}, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{12}, t^{14}, \dots \rangle.$$

$$\text{Для } j=12, M_1 = \langle t^5, t^7, t^9 + \gamma t^{13}, t^{10}, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{12}, t^{14}, \dots \rangle.$$

$$\text{Для } j=9, M_1 = \langle t^5, t^7, t^9 + \gamma t^{11}, t^{10}, t^{12}, t^{13}, \dots \rangle.$$

$$\text{Для } j=7, M_1 = \langle t^5, t^7, t^9, t^{10}, t^{12}, t^{13}, \dots \rangle.$$

$$\text{Для } j=15, M_1 = \langle t^5, t^7, t^{10}, t^{12}, t^{13}, \dots \rangle.$$

$$\bullet I_{15}^{2,3} = \langle 1, t^8 \rangle + M_2$$

$$1. I_{1,15}^{1,2,3} = \langle 1, t^8 + \gamma t^9, t^{11} \rangle + M_1$$

$$2. I_{2,15}^{1,2,3} = \langle 1, t^8 + \gamma t^9 + \chi t^{11} \rangle + M_1$$

$$3. I_{3,15}^{1,2,3} = \langle 1, t^8 + \beta t^{11}, \gamma t^9 + \chi t^{11} \rangle + M_1.$$

$$\bullet I' = I_{14}^{2,3}, M_1 = R_1 I' \text{ породжує } I_{1,14}^{1,2,3} = \langle 1, t^6 + \gamma t^8 \rangle + M_1,$$

$$\bullet I' = I_{13}^{2,3}, M_1 = R_1 I' \text{ породжує } I_{1,13}^{1,2,3} = \langle 1, t^4 + \gamma t^6 \rangle + M_1,$$

$$\bullet I' = I_{12}^{2,3}, M_1 = R_1 I' \text{ породжує } I_{1,12}^{2,3} = \langle 1, t^2 + \beta t^6 + \chi t^8 \rangle + M_1,$$

$$\bullet I' = I_{9}^{2,3}, M_1 = R_1 I' \text{ породжує } I_{1,9}^{1,2,3} = \langle 1, t^4 + \gamma t^6, t^8 + \mu t^{11} \rangle + M_1,$$

$$\bullet I' = I_{7}^{2,3}, M_1 = R_1 I' \text{ породжує } I_{1,7}^{1,2,3} = \langle 1, t^2 + \beta t^6, t^8 + \mu t^{11} \rangle + M_1,$$

$$\bullet I' = I_{8}^{2,3}, M_1 = R_1 I', M_1 = \langle t^5, t^7, t^9, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{10}, \dots \rangle \text{ породжує } I_{1,6}^{1,2,3} = \langle 1, t^2 + \gamma t^{13}, t^6 + \beta t^8 \rangle + M_1,$$

$$\bullet I' = I_{10}^{2,3}, M_1 = R_1 I', M_1 = \langle t^5, t^7, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, \dots \rangle \text{ породжує } I_{1,10}^{1,2,3} = \langle 1, t^6 + \gamma t^9, t^8 + \beta t^9 \rangle + M_1.$$

$$\bullet I' = I_{7}^{2,5}, M_1 = R_1 I', M_1 = \langle t^5, t^6 + \gamma t^9, t^7, t^8, t^{10}, \dots \rangle \text{ породжує } I_{1,7}^{1,2,5} = \langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 \rangle + M_1.$$

□

Теорема 3.5. Повний список K_0 ідеалів, які не є K_1 ідеалами наведено нижче. Ми позначимо K_1 -ідеал $I' = K_1 I$ і покладемо $M_0 = R_0 I'$.

Доведення. $I' = I_{j,1}^{1,2,3}, M_0 = R_0 I', M_0 = \langle t^5, t^7, t^{10}, t^9 + \gamma t^{11}, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16} + \gamma t^{18}, \dots \rangle$ дає $I_{1,1,13}^{0,1,2,3} = \langle 1, t^4 + \gamma t^6 \rangle + M_0$.

Для всіх інших K_1 -ідеалів I' виконується рівність $R_0 I' = R_1 I'$, а тому вони не дають нових K_0 -ідеалів. □

Результат основної теореми слідує з теорем 3.3, 3.4 і 3.5. □

4 Висновок

Отже одновимірні одногілкові особливості типу N_{20}, N_{24} (особливості степеня 5) мають щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів.

Список використаних джерел

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. - М.: МЦНМО, 2009. - 672с.
2. Дрозд Ю.А., Ройтер А.В. Коммутативные кольца с конечным числом неразложимых целочисленных представлений // Известия АН СССР Сер. Мат. -1967.- №31. - С. 783-798.
3. Drozd Y.A., Greuel G.-M. Cohen-Macaulay module type // Compositio Math. - 1993. - Vol. 89. - P. 315-338.
4. Drozd Y.A., Greuel G.-M. On Schappert's characterization of strictly unimodal plane curve singularities // Progress in Mathematics - 1998. - Vol.162. - P. 3-26.
5. Drozd Y.A., Skuratovskii R.V. Cubic rings and their ideals // Ukr. Mat. Zh. - 2010. - Vol.62. - P. 464-470.
6. Greuel G.-M., Knorrer H., Simple singularities in positive characteristic // Math. Z. 203. - 1990 - P. 339-354.
7. Schappert A., A characterization of strictly unimodal plane curve singularities // Springer, Berlin-Heigberg - New York. - 1987. - Vol. 1273.- P. 168-177.
8. Skuratovskii R.V. Ideals of one-branched singularities of curves of type W // Ukr. Mat. Zh. - 2009. - Vol.61. - P. 1257 - 1266.
9. Wall C.T. Classification of unimodal isolated singularities of complete intersections // Proc. Symp. Pure Math. 40 (2) -1983.- P. 625-640.

Надійшла до редколегії 04.06.2011

УДК 512.647

Ірина М. Циганівська, асистент

**Черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної
глобальної розмірності**

У роботі описано з точністю до ізоморфізму всі черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної глобальної розмірності

Ключові слова: черепичний порядок, проєктивна резольвента, глобальна розмірність

E-mail: iratsy80@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Черепичні порядки виникли в 70-их роках минулого століття. В. Ятегаонкар в [4] навів необхідні умови для того, щоб черепичний порядок мав скінченну глобальну розмірність. В цій роботі він довів, що з точністю до ізоморфізму в $M_n(K)$ існує лише скінченна кількість черепичних порядків скінченної глобальної розмірності.

Під черепичним порядком ми розуміємо нетерове первинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона. Мета цієї статті — описати з точністю до ізоморфізму всі черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної глобальної розмірності.

**1.1 Черепичні порядки над дискретно
нормованими кільцями та матриці показників**

Означення 1.1. Модуль M називається дистрибутивним, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Очевидно, що підмодуль та фактормодуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається напівдистрибутивним, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_A A$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним.

Iryna M. Tsiganivska, Assistant Professor

**Tiled orders in $M_5(D)$ of finite global
dimension**

We describe all tiled orders in $M_5(D)$ of finite global dimension up to isomorphism

Key Words: tiled order, projective resolvent, global dimension

Очевидно, що кожний ланцюговий модуль є дистрибутивним модулем та кожний напівланцюговий модуль є напівдистрибутивним модулем.

Означення 1.2. Кільце ендоморфізмів нерозкладного проєктивного модуля над напівдосконалим кільцем називається головним кільцем ендоморфізмів.

Ми писатимемо $SPSD$ -кільце A для напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A .

Означення 1.3. Кільце A називається напівмаксимальним, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним), тобто всі головні кільця ендоморфізмів кільця A є дискретно нормованими кільцями.

Твердження 1. Напівмаксимальне кільце є прямим добутком скінченного числа первинних напівмаксимальних кілець.

Теорема 1. Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A еквівалентні:

- (a) кільце A — напівдистрибутивне;
- (b) кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Теорема 2. Кожне напівамаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π , α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i .

Означення 1.4. Первинне напівамаксимальне кільце називається черепичним порядком.

З теорем 1 та 2 отримуємо, що черепичний порядок — це первинне нетерове справа *SPSD*- кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

Позначимо через $M_n(B)$ кільце всіх $n \times n$ матриць над кільцем B .

Означення 1.5. Цілочисельна матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається

- матрицею показників, якщо $\mathcal{E}$ - матриця показників і $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i, j, k ;
- зведеною матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всіх $i, j, i \neq j$.

Ми використовуємо наступне позначення: $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$, де $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця A , тобто

$$A = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} \mathcal{O},$$

де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок зведений, тобто $A/R(A)$ є прямим добутком тіл, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ при $i \neq j$, тобто матриця показників $\mathcal{E}(A)$ є зведеною. Тут $R(A)$ — радикал Джекобсона кільця A .

Черепичний порядок A має класичне кільце часток $Q = M_n(D)$, де D — класичне тіло часток дискретно нормованого кільця $\mathcal{O}$.

1.2 Незвідні ґратки над черепичним порядком

Означення 1.6. Нехай A — черепичний порядок. Правую (лівою) A -ґраткою називається правий (лівий) A -модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$ -модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A -модулі є A -ґратками.

Серед всіх A -ґраток виділяються так звані незвідні A -ґратки, тобто A -ґратки, які містяться у простому правому (лівому) Q -модулі U (відп. V). Ці ґратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Будь-яка права (відп. ліва) незвідна A -ґратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A -модулем з $\mathcal{O}$ -базисом $(\pi^{\alpha_1}e_1, \dots, \pi^{\alpha_n}e_n)$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i, & (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases} \quad (2)$$

де буква T означає операцію транспонування.

Для наших цілей досить розглянути зведений черепичний порядок A . В цьому випадку елементи $S_r(A)$ ($S_l(A)$) знаходяться в бієктивній відповідності з цілочисельними рядками векторів $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (стовпчиками векторів $\vec{\alpha}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$), де $\vec{\alpha}$ і $\vec{\alpha}^T$ задовольняють умовам 2. Ми будемо записувати $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

Нехай $\vec{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Відношення порядку $\vec{a} \leq \vec{b}$ в $S_r(A)$ визначається таким чином:

$$\vec{a} \leq \vec{b} \iff \alpha_i \geq \beta_i \text{ для } i = 1, \dots, n.$$

Оскільки кільце A є напівдистрибутивним, то $S_r(A)$ та $S_l(A)$ є дистрибутивними ґратками відносно додавання та перетину.

1.3 Проективні накриття незвідних ґраток

Твердження 2. Нехай X_1, X_2, X_3 — всі максимальні підмодулі незвідного і непроективного A -модуля M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $\mathcal{E}(X_i) = \mathcal{E}(M) + e_{ji}$, де $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots, 0)$.

$$\text{Тоді } P(M) = \bigoplus_{i=1}^3 \pi^{\alpha_{ik}} P_{ji} \text{ та } M = \sum_{i=1}^3 \pi^{\alpha_{ik}} P_{ji}.$$

Теорема 3. Нехай M_1, M_2, M_3 — підмодулі дистрибутивного модуля $M = \sum_{i=1}^3 M_i$ та епі-

морфізм $\varphi: \bigoplus_{i=1}^3 M_i \rightarrow M$ діє за правилом $\varphi(m_1, m_2, m_3) = m_1 + m_2 + m_3$. Тоді

$$\ker \varphi = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_i = \sum_{j \neq i} m_{ij}, \\ m_{ij} = -m_{ji} \in M_i \cap M_j\}.$$

Наслідок 1. Нехай M — незвідний Λ -модуль і $P(M) = \bigoplus_{i=1}^3 \pi^{\alpha_{ij}} P_{ji}$, $M = \sum_{i=1}^3 \pi^{\alpha_{ij}} P_{ji}$. Тоді ядро епіморфізму $\varphi: P(M) \rightarrow M$ дорівнює

$$\ker \varphi = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_i = \sum_{k \neq i} m_{ik},$$

$$m_{ik} = -m_{ki} \in \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji} \cap \pi^{\alpha_{ik}} P_{jk}\}.$$

1.4 Черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної глобальної розмірності

Нехай $\Lambda = \{O, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — черепичний порядок в $M_5(D)$ і $d = \sum_{i,j=1}^5 \alpha_{ij}$. Нижче наведено з точністю до ізоморфізму всі черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної глобальної розмірності.

$$d = 10, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 1.$$

$$d = 11, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2.$$

$$d = 12, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2.$$

$$d = 12, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 3$$

$$d = 13, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 13, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 13, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 14, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 3$$

$$d = 14, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 3$$

$$d = 14, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 14, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 14, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 15, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 15, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 3$$

$$d = 15, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 4$$

$$\begin{array}{ll}
d = 15, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3 \\
d = 15, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3 \\
d = 15, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3 \\
d = 15, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 2 \\
d = 16, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3 \\
d = 16, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3 \\
d = 16, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 2 \\
d = 16, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 4 \\
d = 16, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3 \\
d = 16, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 4 \\
d = 17, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 2 \\
d = 17, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 4 \\
d = 17, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3 \\
d = 17, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & gl.dim \Lambda = 3
\end{array}$$

$$d = 17, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 4$$

$$d = 17, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 4$$

$$d = 18, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 3$$

$$d = 18, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 3$$

$$d = 18, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

$$d = 19, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 3$$

$$d = 20, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad gl.dim \Lambda = 2$$

Обчислимо глобальну розмірність одного з вище наведених черепичних порядків.

Нехай $\Lambda = \{O, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений черепичний порядок з матрицею показників.

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решітка всіх незвідних модулів, що містяться

в незвідному модулі (00000) має вигляд

$$(00000)P_1$$

$$(10000)R_1 = P_2$$

$$(11000)R_2$$

$$(21000)$$

$$(11100)$$

$$(11010)$$

$$(21100)$$

$$(21010)P_3$$

$$(11110)$$

$$(22100)P_4$$

$$(21110)R_3$$

$$(11111)\pi P_1$$

$$(22110)R_4$$

$$(21111)\pi R_1$$

$$(32110)P_5$$

$$(22111)\pi R_2$$

$$(32111)$$

$$(22211)$$

$$(22121)$$

Випишемо проективні резольвенти всіх простих модулів.

Проективним накриттям модуля $U_i = P_i/R_i$ ($i = 1, \dots, 5$) є модуль P_i , тобто $P(U_i) = P_i$.

Отже, маємо точні короткі послідовності

$$0 \quad R_i \quad P_i \quad U_i \quad 0$$

Оскільки $R_1 = P_2$ — проективний модуль, то точна послідовність

$$0 \quad P_2 \quad P_1 \quad U_1 \quad 0$$

є проективною резольвентою модуля U_1 .

Звідси отримуємо, що $pd U_1 = 1$.

Модуль R_2 має 3 максимальних підмодулів і $P(R_2) = \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4$, причому $\pi P_1 + P_3 + P_4 = R_2$. З комутативної діаграми точних рядків та 2-го і 3-го точних стовбчиків

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 \\
 0 & \pi P_1 \cap P_3 & & \pi P_1 \cap P_3 & & 0 & 0 \\
 0 & K & & \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 & & \pi P_1 + P_3 + P_4 = R_2 & 0 \\
 0 & (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 & & (\pi P_1 + P_3) \oplus P_4 & & \pi P_1 + P_3 + P_4 = R_2 & 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

за лемою 3×3 отримуємо коротку точну послідовність

$$0 \rightarrow \pi P_1 \cap P_3 \rightarrow K \rightarrow (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 \rightarrow 0$$

де K — ядро епіморфізму $\pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \rightarrow R_2$, що діє за правилом $\varphi(m_1, m_2, m_3) = m_1 + m_2 + m_3$, $\pi P_1 \cap P_3 = (21111) = \pi P_2$ — проєктивний модуль, $(\pi P_1 + P_3) \cap P_4 = (22110) = R_4$.

Для модулів $\pi P_1 \cap P_3$ та $(\pi P_1 + P_3) \cap P_4$ маємо точні послідовності

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \pi P_2 & & \pi P_1 \cap P_3 & & 0 \\
 0 & \pi^2 P_2 & & \pi^2 P_1 \oplus P_3 & & (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 & 0
 \end{array}$$

Тоді маємо наступну комутативну діаграму з точними рядками і стовпчиками

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & \pi^2 P_2 & & \pi^2 P_2 & 0 \\
 0 & & \pi P_2 & & \pi P_2 \oplus \pi^2 P_1 \oplus P_3 & & \pi^2 P_1 \oplus P_3 & 0 \\
 0 & & \pi P_1 \cap P_3 & & K & & (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 & 0 \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

З трьох коротких точних послідовностей

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & R_2 & & P_2 & & U_2 & 0 \\
 0 & K & & \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 & & R_2 & 0 \\
 0 & \pi^2 P_2 & & \pi P_2 \oplus \pi^2 P_1 \oplus P_3 & & K & 0
 \end{array}$$

отримуємо проєктивну резольвенту модуля U_2

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \pi^2 P_2 & & \pi P_2 \oplus \pi^2 P_1 \oplus P_3 & & \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 & & P_2 & U_2 & 0 \\
 & & & & & K & & R_2 & & \\
 & & 0 & & & 0 & & & 0
 \end{array}$$

Аналогічно отримуємо проективні резольвенти модулів U_3, U_4, U_5 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \pi^3 P_2 & \pi^3 P_1 \oplus \pi P_3 & \pi P_3 \oplus \pi P_4 & \pi P_2 \oplus P_5 & P_3 & U_3 & 0 \\
 & & & \pi R_4 & R_5 & R_3 & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 0 & \pi^2 P_2 & \pi^2 P_1 \oplus P_3 & P_4 & U_4 & 0 & \\
 & & & R_4 & & & & \\
 & & & 0 & 0 & & & \\
 0 & \pi^3 P_2 & \pi^3 P_1 \oplus \pi P_3 & \pi P_3 \oplus \pi P_4 & P_5 & U_5 & 0 & \\
 & & & \pi R_4 & R_5 & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & &
 \end{array}$$

Отже, проективні розмірності простих Λ — модулів наступні: $pd U_1 = 1$, $pd U_2 = 3$, $pd U_3 = 4$, $pd U_4 = 2$, $pd U_5 = 3$.

Оскільки

$$gl.dim \Lambda = pd_{\Lambda}(\Lambda/R) = pd_{\Lambda}(\bigoplus_{i=1}^5 U_i) = \max_i pd_{\Lambda} U_i,$$

то

$$gl.dim \Lambda = 4.$$

Зауваження. Наведений вище список черепичних порядків в скінченній глобальній розмірності співпадає зі списком Фуджіти в [5].

Література

1. Zavadskij, A.G. and Kirichenko, V.V., *Torsion-free Modules over Prime Rings*, Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov. Inst. (LOMI) - 1976. - v. 57. - p. 100-116 (in Russian). English translation in J. of Soviet Math., v. 11, N 4, April 1979, p. 598-612.
2. M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules*. Vol.

- 1, Series: Mathematics and Its Applications, 575, Kluwer Acad. Publish., 2004, xii+380pp.
3. M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules*. Vol. 2, Series: Mathematics and Its Applications, 586, Kluwer Acad. Publish., 2007, xii+400pp.
4. V. A. Jategaonkar, Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* 196 (1974), pp. 313-330.
5. H. Fujita, Tiled orders of finite global dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 322, 1990, pp. 329-342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension", *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 327, No.2 (1991), pp. 919-920.
6. V. Zhuravlev, D. Zhuravlyov, Tiled orders of width 3, *J. Algebras and discrete mathematics* 1 (2009), 111-123.

Надійшла до редколегії 01.03.2011

УДК 512.55

В'ячеслав В. Шви́ров, асистент

Про кількість класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладаємих кілець.

У роботі встановлюються зв'язки між кількістю класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладаємих кілець та числами Каталана. Також отримані комбінаторні результати про кількість класів кілець, що мають скінченну розмірність Круля.

Ключові слова: напівланцюгове кільце, розмірність Круля кілець, первинний сагайдак, числа Каталана.

E-mail: slavik_asas@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Кириченко В. В.

1 Вступ. Основні визначення.

Метою роботи є вивчення деяких комбінаторних властивостей, що виникають при класифікації напівланцюгових кілець із скінченною розмірністю Круля, кусково нетерових напівланцюгових кілець, та напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю нілпотентним первинним радикалом, первинний сагайдак яких є ланцюгом.

Розмірність Круля напівланцюгових кілець вивчалася багатьма авторами. Чаттерс у [6] доводить структурну теорему для первинних напівланцюгових кілець зі скінченною розмірністю Круля. М. Алхам [4] отримує структурну теорему для неінгулярних напівланцюгових кілець з розмірністю Круля одиниця. У випадку напівланцюгових кілець із скінченною розмірністю Круля виникають комбінаторні результати, пов'язані із класифікацією таких кілець. Зв'язки між кількістю допустимих послідовностей та числами Каталана вивчалися у [8]. В роботі істотно використовуються результати робіт Н.М. Губарені, В.В. Кириченко [1], [2], а також Г. Пуниського [5].

Означення 1.1. Модуль M називається ланцюговим, якщо ґратка його підмодулів утворює ланцюг, тобто множина всіх підмодулів модулю M є лінійно впорядкована відносно включення. Модуль називається напівланцюговим, якщо він розкладається у скінченну пряму суму ланцюгових модулів.

Означення 1.2. Кільце R називається ланцю-

Vjacheslav V. Shvyrov, assistant

On the number equivalence classes of serial indecomposable rings.

We learn connections with the number equivalence classes of serial indecomposable rings and Catalan numbers. Also are obtained some combinatorial results about serial rings with finite Krull dimension.

Key Words: serial ring, Krull dimension of the ring, prime quiver, Catalan numbers.

говим справа, якщо R_R є правим ланцюговим модулем, тобто ґратка правих ідеалів є лінійно впорядкована.

Означення 1.3. Кільце R називається напівланцюговим справа, якщо R_R є напівланцюговим модулем. Кільце яке є напівланцюгове справа та зліва називається напівланцюговим.

Означення 1.4. Нехай M – правий R -модуль. Розмірність Круля модуля M будемо позначати через $Kdim(M)$ і визначимо наступним чином:
якщо $M = 0$, тоді $Kdim(M) = -1$;
якщо α – ординал і $Kdim(M) \not\leq \alpha$, тоді $Kdim(M) = \alpha$, якщо не існує нескінченного убиваючого ланцюга

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

підмодулів M_i , таких, що для $i = 1, 2, \dots$
 $Kdim(M_i/M_{i+1}) \not\leq \alpha$.

Якщо не існує ординалу α , такого, що $Kdim(M) = \alpha$, то будемо говорити, що M не має розмірності Круля.

Означення 1.5. Правовою розмірністю Круля кільця R називається розмірність Круля правого регулярного модуля R_R і будемо позначати її через $Kdim(R)$.

Наступний факт ([3]) корисний при обчислюванні розмірності Круля. Якщо модуль M має розмірність Круля, тоді $Kdim(M) \leq \sup\{Kdim(M/E) + 1 \mid E - \text{істотний підмодуль } M\}$.

Твердження 1. ([5]) Для кожного напівланцюгового кільця R і натурального n , $Kdim(R) \geq n$ тоді і тільки тоді, коли $Kdim(R_i) \geq n$ для кожного i .

2 Класи еквівалентності напівланцюгових кілець з скінченною розмірністю Круля.

Означення 2.1. Кільце A називається кусково нетеровим справа, якщо воно задовільняє наступним умовам

i) A має скінченну множину попарно ортогональних примітивних ідемпотентів $e_1, \dots, e_n$, таких, що $1 = e_1 + \dots + e_n$.

ii) $e_i A e_i$ – нетерове справа для кожного примітивного ідемпотента e_i , $i = 1, \dots, n$ (див. [2]).

Аналогічно визначаються кусково нетерові зліва кільця. Кусково нетерове зліва й справа кільце називається кусково нетеровим.

У зв'язку з твердженням 1 для напівланцюгових кусково нетерових кілець введемо наступну класифікацію таких кілець. Нехай A і B напівланцюгові кусково нетерові кільця, що мають розмірність Круля 1. $1_A = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, $1_B = f_1 + f_2 + \dots + f_m$. Позначимо $A_i = e_i A e_i$, $B_j = f_j B f_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Покладемо

$$A \sim B \Leftrightarrow \{n = m, \sum_{i=1}^n Kdim(A_i) = \sum_{j=1}^m Kdim(B_j), i, j = 1, \dots, n\}.$$

Позначимо через $\mathcal{A}_{1,n}$ клас всіх напівланцюгових кусково нетерових кілець, таких, що мають розмірність Круля одиниця і для кожного кільця $A \in \mathcal{A}_{1,n}$ одиниця є сумою n ортогональних ідемпотентів $1 = e_1 + \dots + e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\sum_{i=1}^n Kdim(A_i) = s$ для деякого i . Відповідний клас еквівалентності будемо позначати через $\mathcal{A}_{1,n,s}$.

Справедлива наступна теорема

Теорема 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, тоді кількість класів еквівалентності за відношенням $\sim$ на множині $\mathcal{A}_{1,n}$ напівланцюгових кусково нетерових кілець дорівнює $n + 1$.

Доведення. Нехай A – довільне напівланцюгове кусково нетерове кільце. Тоді для будь-

якого локального ідемпотенту e , eAe – ланцюгове нетерове кільце. Одне eAe є або дискретно нормоване кільце, або артинове ланцюгове кільце. У першому випадку розмірність Круля $Kdim(eAe) = 1$ оскільки eAe двобічно нетерове і ланцюгове. У другому випадку розмірність Круля дорівнює 0, оскільки eAe артинове.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Kdim(A_i) \leq 1$, $i = 1, \dots, n$ для будь-якого кусково нетерового кільця. Звідси

$$\sum_{i=1}^n Kdim(A_i) \leq n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Кількість всіх різних послідовностей довжини n з нулів та одиниць і впорядкованих за зростанням є $n + 1$, одже кількість класів еквівалентності дорівнює $n + 1$.

Позначимо через $\mathcal{A}_{k,n}$ клас всіх нерозкладних напівланцюгових кілець, таких, що мають скінченну розмірність Круля, яка дорівнює k , $k \in \mathbb{N}$ і для кожного кільця

$$A \in \mathcal{A}_{k,n} \Leftrightarrow Kdim(A) = k, 1_A = e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

Нехай $A, B \in \mathcal{A}_{k,n}$. Покладемо

$$A \sim_k B \Leftrightarrow \{\exists \pi_n \in S_n \mid \pi_n(f_1, \dots, f_n) = (f'_1, \dots, f'_n) \Rightarrow Kdim(e_i A e_i) = Kdim(f'_i B f'_i), i = 1, \dots, n\},$$

де S_n симетрична група перестановок на множині з n елементів. Тобто два кільця належать до одного класу тоді і тільки тоді, коли можливо так розташувати їх ідемпотенти, що відповідні діагональні елементи у декомпозиціях Пірса цих кілець мають однакові розмірності Круля.

Позначимо через $\mathcal{A}_{k,n} / \sim_k$ множину класів еквівалентності за відношенням $\sim_k$. Нехай C_n^k позначає кількість сполучень.

Теорема 2. Кількість класів еквівалентності на множині $\mathcal{A}_{k,n}$ за відношенням $\sim_k$ дорівнює

$$|\mathcal{A}_{k,n} / \sim_k| = \sum_{i=1}^{n-1} C_{k+i-1}^k = C_{n+2k-2}^k - 1.$$

Доведення. За твердженням 1

$$Kdim(A) \geq Kdim(A_i), \quad Kdim(A) = k,$$

для будь-якого кільця $A \in A_{k,n}$. Одже $Kdim(A_i)$ може набувати значень з множини $\{0, 1, \dots, k\}$. Нехай $A \in A_{k,n}$ довільне кільце, $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Через те, що кільце A має скінченну розмірність Крулля k отримуємо послідовність натуральних чисел $\{Kdim(A_1), Kdim(A_2), \dots, Kdim(A_n)\}$, знову з твердження 1 випливає, що $Kdim(A) = \max A_i$, $i = 1, \dots, n$ та обов'язково існує деякий номер i , такий, що $Kdim(A_i) = k$. Одже кількість класів збігається з кількістю різних послідовностей натуральних чисел від 0 до k довжини n впорядкованих за зростанням. Кількість таких послідовностей будемо шукати у вигляді суми $S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$, де s_i – кількість послідовностей довжини n , що містять рівно i разів число k . Будемо вважати різні числа від 0 до $k-1$ об'єктами. Виникає наступна комбінаторна задача. Маємо об'єкти $k-1$ типів, потрібно обчислити скільки комбінацій можливо зробити так, щоби у кожну комбінацію входило $n-i$ об'єктів. Кожну комбінацію закодуємо за допомогою 0 та 1, 1 буде відповідати об'єктам, 0 виконувати функцію розділника. Тоді, наприклад, записав $n-i$ одиниць та $k-1$ нуль отримуємо комбінацію, за якою обирається $n-i$ об'єктів першого типу та жодного інших типів. Виконуючи переставки всіма способами $n-i$ одиниць та $k-1$ нулів, кожен раз будемо отримувати деяке розташування з $n-i$ чисел.

$$P(n-i, k-1) = \frac{(n-i+k-1)!}{(n-i)!(k-1)!} = C_{n+k-i-1}^{n-i}.$$

Звідси

$$S = C_{n+k-2}^{n-1} + C_{n+k-3}^{n-2} + \dots + C_k^1 = \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^i.$$

Через те, що $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^i = \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^{n-i} = A$$

За одним з визначень біноміальних коефіцієнтів маємо

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i.$$

Одже, C_n^i – коефіцієнт біля x^i у розкладі $(x+1)^n$. Звідси, S є сумою коефіцієнтів біля x^{k-1} у виразі

$$(x+1)^k + \dots + (x+1)^{n+k-2}.$$

Спрощуючи як суму геометричної прогресії, отримуємо

$$\begin{aligned} (x+1)^k + \dots + (x+1)^{n+k-2} &= \\ &= \frac{(x+1)^k(1 - (x+1)^{n+k-2})}{1 - (x+1)} = \\ &= \frac{(x+1)^k((x+1)^{n+k-2} - 1)}{x} = \\ &= \frac{(x+1)^{n+2k-2} - (x+1)^k}{x} \end{aligned}$$

Звідси, S – коефіцієнт біля x^k у виразі

$$(x+1)^{n+2k-2} - (x+1)^k$$

Таким чином, $S = C_{n+2k-2}^k - 1$.

3 Про кількість класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець з нетривіальною діагоналлю та нілпотентним первинним радикалом.

Означення 3.1. Послідовність $p_1, p_2, \dots, p_t$ називається допустимою, якщо вона задовольняє наступним нерівностям

$$2 \leq p_i \leq p_{i+1} + 1, \quad i = 1, \dots, t-1, \quad p_t = 1,$$

або нерівностям

$$2 \leq p_i \leq p_{i+1} + 1, \quad i = 1, \dots, t-1, \quad 2 \leq p_t \leq p_1 + 1,$$

Означення 3.2. Сагайдак Q називається праворядним, якщо із кожної його вершини виходить не більше однієї стрілки.

Означення 3.3. Контуром сагайдака Q називається послідовність попарно різних вершин $\{i_1, \dots, i_t\}$ та стрілок $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$, таких, що кожна стрілка σ_k з'єднує i_k з i_{k+1} або i_{k+1} з i_k , крім того стрілка σ_t з'єднує i_t з i_1 або i_1 з i_t . Зв'язний сагайдак без контурів називається деревом. Коренем дерева називається вершина із якої не виходить стрілка.

Теорема 3. Кількість допустимих послідовностей довжини t дорівнює $(t-1)$ -му числу Каталана C_{t-1} .

Доведення. Для доведення теореми встановимо бієкцію між множиною всіх допустимих послідовностей довжини t та множиною всіх однокореневих дерев з t вершинами. За [7] кількість всіх однокореневих дерев з $t+1$ вершиною є t -те число Каталана. Далі, будь-яке однокореневе дерево будемо називати просто деревом.

У випадку $t = 1$ маємо одну допустиму послідовність 1, якщо $t = 2$ маємо послідовність 21, продовжуючи подібним чином побудуємо всі допустимі послідовності довжини 3, це є 221, 321, легко бачити, що на i -му місці у послідовності може бути розташоване тільки одне з чисел $\{2, \dots, t-i+1\}$, $i = 1, \dots, t-1$. Допустимі послідовності довжини 4 є:

4321, 3321, 2321, 3221, 2221

Нехай $p_1, p_2, \dots, p_{t-1}, p_t$ – довільна допустима послідовність. Будемо зіставляти кожній допустимій послідовності довжини t дерево з t вершинами наступним чином: проведемо на площині t паралельних прямих, які позначимо $L_1, L_2, \dots, L_t$, далі, читаючи послідовність зліва направо, зіставимо кожному p_j , $1 \leq j \leq t$ точку на L_{p_j} -й прямій. Позначимо точки через $P_1, P_2, \dots, P_t$. Будемо сполучувати точки P_i та P_j ребром тоді і тільки тоді, коли $p_j \leq p_i + 1$ і $i < j$, $1 \leq i, j \leq t$. За побудовою, отримана фігура є деревом, що містить t -точок. Відповідність у випадку $t = 4$ див. Рис 1.

Припустимо за індукцією, що допустимі послідовності довжини t відповідають всім деревам з t вершинами. Покажемо, що це справедливо і для випадку $t+1$. Допустимі послідовності довжини $t+1$ можна отримати додаючи одне з чисел $\{2, \dots, t+1\}$ зліва до допустимої послідовності довжини t . Нехай $p_1, \dots, p_t$ довільна допустима послідовність довжини t , T_t – дерево, що відповідає цій послідовності. Нехай $s, p_1, \dots, p_t$ допустима послідовність довжини $t+1$. Додамо точку C_t на деяку з прямих L_i , $i = 2, \dots, t+1$. З'єднаємо ребром точку C_t з деякою точкою, що міститься на прямій L_{j-1} таким чином, щоб $s \leq p_1 + 1$. За побудовою ми знову отримаємо дерево, одже отримали фігури є всіма можливими деревами з $t+1$ вершинами.

Навпаки можна показати, що будь-якому дереву з t вершинами можливо поставити у відповідність допустиму послідовність, якщо провести t паралельних прямих $L_1, \dots, L_t$, та побудувати всі можливі дерева з t вершинами, таким чином, щоб кожна вершина дерева належала деякій прямій L_i , $i = 1, \dots, t$. Якщо $P_i \in L_i$ будемо вважати $p_i = i$, $i = 1, \dots, t$. Обходячи всі вершини дерева по гілках, двигаячись з корня дерева, та починаючи з самої короткої лівої гілки будемо виписувати відповідні точки дерева справа наліво $p_1, p_2, \dots, p_t$, після проходження кожної гілки, пройдені ребра зтираються. За [7] кількість таких дерев є C_{t-1} .

У випадку $t = 4$ маємо

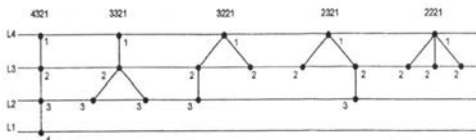


Рис 1.

Означення 3.4. Первинним рядом A -модуля M називається ряд

$$M \supset M\mathcal{L} \supset \dots \supset M\mathcal{L}^{k-1} \supset M\mathcal{L}^k = 0.$$

Мінімальне число k , таке, що $M\mathcal{L}^k = 0$ назива-

ється довжиною первинного ряду. Будемо позначати її через $k = pl(M)$.

Означення 3.5. Напівланцюгове нерозкладне кільце A з нетривіальною діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом $\mathcal{L}$ та первинним са-

гайдаком $PQ(A)$ будемо називати кільцем першого типу, якщо $PQ(A)$ є ланцюг.

Означення 3.6. Нехай A_1 та A_2 нерозкладні напівланцюгові кільця з нетривіальною діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом. Будемо говорити, що A_1 та A_2 належать до одного класу еквівалентності тоді і лише тоді, коли їх первинні сагайдаки збігаються і кільця A_1 , A_2 є першого типу.

Зв'язок між кількістю класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець з нетривіальною діагоналлю першого типу та числами Каталана виникає завдяки наступній теоремі

Теорема 4. [2] Нехай A є нерозкладне напівланцюгове кільце з нетривіальною діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом $\mathcal{L}$

а) якщо первинний сагайдак кільця A є ланцюгом, тоді

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1, i = 1, \dots, t-1, pl_t = 1,$$

б) якщо первинний сагайдак кільця A є циклом, тоді

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1, i = 1, \dots, t-1, 2 \leq pl_t \leq pl_1 + 1,$$

Наслідок. Кількість класів еквівалентності нерозкладних напівланцюгових кілець з нетривіальною діагоналлю нільпотентним первинним радикалом, первинний сагайдак яких є ланцюгом довжини n є $n-1$ -ше число Каталана.

Доведення. За попередньою теоремою, якщо первинний сагайдак кільця є ланцюгом довжини n , тоді довжини всіх первинних рядів задовольняють нерівностям.

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1, i = 1, \dots, n-1, p_n = 1,$$

За визначенням послідовність $pl_1, \dots, pl_n$ є допустимою, одже, за теоремою 2, кількість

допустимих послідовностей довжини n є $(n-1)$ -ше число Каталана, звідси, кількість класів еквівалентності дорівнює $n-1$ -му числу Каталана.

Література

1. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Rings and Modules*, // Czestochowa. - 2001. - 306 p.
2. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical*, // Algebras and Representations Theory (2006) 9, pp. 147-160.
3. J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, // Graduate Studies in Mathematics v. 30, -2001.
4. M. H. Upham, *Serial rings with right Krull dimension one*, // J. Algebra 109 (1987), 319-333.
5. G. Puninski, *Serial Rings*, // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001
6. A.W. Chatters, *Serial rings with Krull dimension*, Glasgow Math. J. 32 (1990). 71-78.
7. Stanley, R.P. (1999): *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*. Cambridge University Press. (pp. 212-229)
8. J. O. Hanes, D.D. Wick, *The number of admissible sequences for indecomposable serial rings with simple projective module*. Proceedings of the Louisiana-Mississippi Section of Mathematical Association of America, Spring 2000.

Надійшла до редколегії 19.06.2011

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 519.9

Борисейко* О.В., к.ф.-м.н., доц.,
Ковальчук** В.Ф., к.ф.-м.н., доц., Пучко Н.П.,
інж.-математик**Напружено-деформівний стан електро-
провідної неферомагнітної сфери при
зануренні у нестационарне магнітне поле**

Вивчається характер руху і напружено-деформівний стан електропровідної неферомагнітної сфери, яка занурюється у магнітне поле, що описується функцією Хевісайда. Визначаються деформуючі сили, діючі на сферу з боку магнітного поля. Пропонується новий підхід до розв'язку задачі деформування електропровідних тіл імпульсними електромагнітними полями, суть якого у розбитті вихідної задачі на дві більш прості.

Ключові слова: пондеромоторна сила, дифузія магнітного поля, магнітопружність, імпульсні електромагнітні поля.

*E-mail: b12313@ukr.net, 8172@ukr.net

Статтю представив член редколегії акад. НАН України М.О. Перестюк

Розглянемо випадок короткочасної взаємодії неферомагнітного електропровідного пружного тіла з імпульсним електро-магнітним полем (ЕМП). Вважатимемо, що тіло виготовлене з матеріалу з високою провідністю, наприклад, з міді, алюмінію або подібного. Тоді впливом явищ поляризації і намагнічування можна знехтувати і покласти $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Оскільки взаємодія короткочасна, то будемо вважати, що пружне і електромагнітне поля незв'язані, а вільні електричні заряди відсутні, тобто $\rho_e = 0$. Термічні напруження також не прийматимемо до уваги, тому що їх приріст при короткочасній взаємодії несуттєвий [1, 2]. За цих умов явище взаємодії неферомагнітного тіла з імпульсним ЕМП можна описати нелінійною незв'язаною системою рівнянь магнітопружності:

$$2 \frac{m-1}{m-2} \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}}{G} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

A. V. Borysaiko, Cand.Sci (Phys.-Math.), ass. prof.,
V. F. Kovalchuk, Cand.Sci (Phys.-Math.),
N. P. Puchko, eng.-mathematician**Stress-Strain State of conductive non-
ferromagnetic sphere at an immersion in
non-stationary magnetic field**

A conducting nonferromagnetic sphere submerging in the magnetic field described by Heaviside function is examined. Forces operating on the sphere from the side of magnetic-field are determined. A new method is offered to the decision of deformation problem of conducting bodies by the impulsive magnetic field. An essence of this method in breaking up of problem on two more simple.

Key Words: pondermotive force, diffusion of magnetic field, magnetoelectricity, impulsive magnetic field.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

А електричні і механічні граничні умови на поверхні тіла S матимуть вигляд

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad \sigma_e n_j = \Phi_i, \quad (2)$$

де $\mathbf{F}$ – вектор пондеромоторної сили, σ – провідність.

Таким чином, для визначення напружено-деформівного стану тіла під дією імпульсного ЕМП необхідно спочатку визначити ЕМП у ньому, а потім розв'язати рівняння Ламе з пондеромоторною силою.

Розглянемо модельну задачу про занурення електропровідного неферомагнітного тіла з постійною швидкістю $\mathbf{v} = kv$ у магнітне поле $\mathbf{B}_0$, яке описується функцією Хевісайда $H(\dot{z})$. Нехай тіло є сферою, з якою пов'яжемо систему координат, що рухається зі швидкістю $\dot{z} = v\dot{t}$. Тоді можна вважати, що сфера нерухома, а на неї зі швидкістю $\mathbf{v}$ (причому $v \ll c$ – швидкості світла) набігає магнітне поле $\mathbf{B}_0$.

$$\mathbf{B}_0 = -j\mathbf{B}_0 H(z-1+t), \quad \mathbf{E}_0 = i v \mathbf{B}_0 H(z-1+t). \quad (3)$$

Під дією цього поля у сфері індукується ЕМП, яке можна знайти шляхом інтегрування рівнянь Максвелла. Оскільки при $v \ll c$ [3] можна знехтувати відбитим від поверхні сфери полем, то електричні граничні умови (2) зводяться до умови рівності дотичних складових магнітного поля (3) і магнітного поля в середині сфери. Початкові умови – нульові.

Для розв'язку скористаємося перетворенням Лапласа [5]

$$\hat{E}_2(r, \theta, \varphi; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left[u_n^k(r, p) L_n^k(\theta, \varphi) + v_n^k(r, p) M_n^k(\theta, \varphi) + w_n^k(r, p) N_n^k(\theta, \varphi) \right],$$

$$\hat{H}_2(r, \theta, \varphi; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left[g_n^k(r, p) L_n^k(\theta, \varphi) + \eta_n^k(r, p) M_n^k(\theta, \varphi) + \zeta_n^k(r, p) N_n^k(\theta, \varphi) \right] \quad (5)$$

$$\text{де } L_n^k(\theta, \varphi) = e_n S_n^k, \quad M_n^k(\theta, \varphi) = r \cdot \text{grad} S_n^k,$$

$$N_n^k(\theta, \varphi) = r \cdot \text{rot} [e_n \cdot S_n^k], \quad (6)$$

$$S_n^k(\theta, \varphi) = [(2n+1)(n-k)!/4\pi(n+k)!]^{1/2} \exp(ik\varphi).$$

Розклад набігаючого поля (3) в області відображень по векторним гармонікам (6) отримаємо, скориставшись формулою обернення [4] (* - знак комплексного спряження)

$$\hat{f}(r, \theta, \varphi; p) = \int_0^{\infty} f(r, \theta, \varphi; t) e^{-pt} dt \quad (4)$$

і методом власних функцій [5], згідно якого розв'язок рівнянь Максвелла для сфери в області зображень шукається у вигляді

$$\begin{aligned} & e_n u_n^k + n(n+1)(e_n v_n^k + e_\varphi w_n^k) = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[(e_r \cdot \hat{E}_0) L_n^{k*} + (e_\theta \cdot \hat{E}_0) M_n^{k*} + \right. \\ & \left. + (e_\varphi \cdot \hat{E}_0) N_n^{k*} \right] \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Виконавши необхідні викладки, маємо

$$\hat{E}_0 = \frac{ive^{-p} B_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{n(n+1)}{x} I_n L_n^- + \frac{i}{x} \frac{d}{dx} (x I_n) M_n^- + I_n N_n^+ \right\}, \quad (8)$$

$$\hat{H}_0 = -\frac{e^{-p} B_0}{\mu_0 p} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{n(n+1)}{x} I_n L_n^- + \frac{i}{x} \frac{d}{dx} (x I_n) M_n^- + I_n N_n^+ \right\}$$

Тут для скорочення запису введені такі позначення:

$$L_n^\pm = L_n^\pm \pm L_n^{\pm 1}, \quad M_n^\pm = M_n^\pm \pm M_n^{\pm 1}, \quad N_n^\pm = N_n^\pm \pm N_n^{\pm 1},$$

$$x = pr, \quad y = \sqrt{q} pr, \quad I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x),$$

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} I_{n+1/2}(y), \quad q = \sigma \mu_0 v a, \quad (9)$$

$$\hat{E}_2 = \frac{ive^{-p} B_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{(n+1)n}{y} g_n f_n L_n^- + \frac{i}{y} g_n \frac{d}{dy} (y f_n) M_n^- + b_n f_n N_n^+ \right\},$$

$$\hat{H}_2 = \frac{e^{-p} B_0}{\mu_0 p} \sqrt{\frac{q}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{(n+1)n}{y} b_n f_n L_n^- + \frac{i}{y} b_n \frac{d}{dy} (y f_n) M_n^- + b_n f_n N_n^+ \right\}. \quad (10)$$

З граничних електричних умов (2) для дотичних складових магнітного поля знаходимо вирази для сталих інтегрування b_n і g_n ($r=1$)

де $\sqrt{\pi/(2x)} I_{n+1/2}(x)$ – модифікована функція Бесселя напівцілого індекса.

Підставляючи (5) у рівняння Максвелла та використовуючи повноту розкладу по векторним гармонікам, отримаємо дві системи рівнянь для кожного n і k . Розв'язуючи їх, знаходимо індуковане електромагнітне поле сфери

$$b_n = \left[\sqrt{p/q} x^{-1} d(x I_n) / dx \right] / \left[y^{-1} d(y f_n) / dy \right]$$

$$g_n = -\sqrt{p/q} I_n / f_n. \quad (11)$$

Побудувати точне обернення розв'язку (10) з допомогою інтеграла Рімана-Меліна достатньо важко. Тому для малих значень безрозмірного часу t , при яких відбуваються найбільш суттєві явища взаємодії пружного тіла з імпульсним ЕМП, було побудовано асимптотичний розв'язок. Сферична функція $\sqrt{\pi/(2y)} I_{n+1/2}(y)$ була замінена першим членом свого асимптотичного ряду для великих y . Чисельний аналіз показав, що вказане наближення для значень $t < 14$ дає похибку, наприклад, для мідної сфери при $va = 100$, не більше 5 %. Після заміни сферичних функцій їх асимптотичними представленнями вдалося знайти суми рядів (10), а потім визначити їх оригінали (радіальними складовими ЕМП нехтуємо у порівнянні з тангенціальними, тому що останні в $\sqrt{q}$ разів більші, а q – достатньо велике число для провідних тіл):

$$\begin{aligned} E_z &= v B_0 r^{-1} (T \pi q)^{-1/2} \exp[-q(1-r)^2/4T] \times \\ &\times (e_\theta \cos \varphi - e_\varphi \sin \varphi \cos \theta) H(T), \\ H_z &= -\mu_0^{-1} r^{-1} B_0 \operatorname{Erfc}[\sqrt{q}(1-r)/2\sqrt{T}] \times \\ &\times (e_\theta \cos \theta \sin \varphi - e_\varphi \cos \varphi) H(T), \\ T &= t - 1 + \cos \theta, \quad r \geq \varepsilon \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вивчимо характер руху сфери та діючі на неї сили при зануренні її у магнітне поле (1). У цьому випадку у сфері індукється ЕМП (12), яке викликає пондеромоторну силу

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -e_\varphi v \sigma B_0^2 r^{-2} (T \pi q)^{-1/2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \times \\ &\times \exp[-q(1-r)^2/4T] \operatorname{Erfc}[\sqrt{q}(1-r)/2\sqrt{T}] H(T). \end{aligned} \quad (13)$$

Ця масова сила викликає демпфуючу силу P_z , яка діє вздовж осі z і гальмує рух сфери. Інтегруючи (13) по об'єму сфери, знаходимо явний вираз для P_z

$$P_z = -\frac{1}{2} \mu_0^{-1} B_0^2 \sigma^2 \pi (2t - 2t^2 + t^3 - t^4/4) H(2-t) \quad (14)$$

Для оцінки ефективності перетворення енергії магнітного поля у механічну енергію при зануренні провідника у магнітне поле була розглянута задача про занурення сфери з ідеальною провідністю у магнітне поле. Вважається, що по поверхні сфери біжить зовнішнє магнітне поле $B_0 = -j B_0 H(t-1+\cos\theta)$.

Тоді, користуючись тензором натягу Максвелла, і зауваживши, що $T_{zz} = 0$, $T_{\varphi\varphi} = 0$ і

$T_{zz} = -\frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} H(T)$, отримаємо вираз для демпфуючої сили P_z'

$$\begin{aligned} P_z' &= a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi T_{zz} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= -\frac{B_0^2 \sigma^2 \pi}{2 \mu_0} (2-t) t H(2-t). \end{aligned} \quad (15)$$

Значення сили P_z' , яка діє на сферу з ідеальною електропровідністю при її проникненні у магнітне поле, більше, ніж значення сили P_z для сфери з хорошою електропровідністю, максимально на 25%. Очевидно, що для другої сфери частина механічної енергії перетворюється у теплову.

Якщо вважати, що швидкість занурення v ідеально електропровідної сфери у магнітне поле є змінною, то у розмірних координатах силу P_z' можна записати так:

$$P_z' = -\frac{1}{2} \frac{B_0^2 \sigma^2 \pi}{\mu_0} h(2a-h) H[h(2-h)], \quad h = \int_0^t v dt, \quad (16)$$

де h – глибина проникнення сфери у магнітне поле (тобто висота сферичного сегмента, який занурюється у магнітне поле). При постійній швидкості v вирази (15) і (16) співпадають.

При зануренні у магнітне поле у електропровідній сфері під дією пондеромоторної сили виникають напруження і деформації. Для їх знаходження необхідно проінтегрувати рівняння Ламе (1) з масовою силою $\mathbf{F}$ при умові, що напруження на поверхні сфери відсутні, тобто $\Phi_i = 0$.

Для спрощення розв'язку поставленої задачі дослідимо фізику процесу деформування пружних провідних тіл імпульсними магнітними полями. Розглянемо електропровідний напівпростір $x \geq 0$, по якому в момент часу $t=0$ здійснюється магнітний удар. Розв'язок цієї задачі добре відомий [6]. Процес деформування у цьому випадку відбувається наступним чином. У момент часу $t=0$ на півпростір починає діяти розподілене навантаження $B_0^2/2\mu_0$, яке викликає у ньому подовжно пружну хвилю. Потім магнітне поле починає дифундувати у півпрості і «вибирає» ті напруження, які викликала пружна хвиля, що йшла попереду. Тому в залежності від глибини дифузії магнітного поля в

електропровідний простір задачу можна розбити на дві:

I. На відстані, більшій від глибини дифузії, - це задача динамічної теорії пружності без масових сил, але з граничними умовами, рівними величині магнітного напруження, оскільки ЕМП ще не проникло в точку спостереження.

II. На глибині дифузії - це задача квазістатичної теорії пружності з масовими силами і заданими навантаженнями на поверхні тіла, оскільки сюди вже проникло ЕМП і діє тільки пондеромоторна сила, яка змінюється повільно.

Для отримання розв'язку поставленої задачі необхідно «зшити» розв'язки цих двох задач.

Отже, задача динамічної теорії пружності для сфери, яка знаходиться під дією пондеромоторних сил, формулюється наступним чином:

$$\text{grad div } \mathbf{u} - k^{-2} \text{rot rot } \mathbf{u} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2,$$

$$\frac{1}{2} G^{-1} \sigma_r|_{r=1} = -[a_0^* S_0^* + a_2^* S_2^* + a_s^* (S_2^* + S_2^{-2})], \quad (17)$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=1} = \tau_{r\varphi}|_{r=1} = 0.$$

Ці вирази зведені до безрозмірних координат за допомогою співвідношень:

$$r = \tilde{r}/a, \quad t = c_1 \tilde{t}/a, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{u}} a^{-1} B_0^2 \mu_0^{-1} G^{-1},$$

$$k^2 = c_1^2 / c_2^2 = 2(m-1)/(m-2),$$

$$a_0^* = \frac{4}{3} \sqrt{\pi}, \quad a_2^* = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}}, \quad a_s^* = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3\pi}{10}},$$

де c_1, c_2 - швидкості хвиль розтягування-стискування та хвиль зсуву відповідно.

Задача квазістатичної теорії пружності має вигляд:

Список використаних джерел

1. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. - Москва: Физматгиз, 1963. - 251 с.
2. Ковальчук В.Ф. Пондеромоторное взаимодействие импульса электромагнитного поля со сплошной сферой // В.Ф.Ковальчук // Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах - Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1984. - С. 86-88.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е.Тамм. - Москва: Наука, 1976. - 616 с.

$$k^2 \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{F} = f(r)[a_0^* \mathbf{L}_0^* + a_2^* \mathbf{L}_2^* + a_s^* (\mathbf{L}_2^* + \mathbf{L}_2^{-2})],$$

$$f(r) = -\frac{4}{r^2} \frac{\sqrt{\sigma \mu_0 c_1 a}}{\sqrt{\pi t}} \exp[-\sigma \mu_0 c_1 a (1-r)^2 / 4t] \times \\ \times \text{Erfc}[\sqrt{\sigma \mu_0 c_1 a} (1-r) / 2\sqrt{t}],$$

$$\sigma_r|_{r=1} = \tau_{r\theta}|_{r=1} = \tau_{r\varphi}|_{r=1} = 0.$$

Виходячи з вигляду граничних умов (17) і виразу для пондеромоторної сили у формулах (18), вектор пружних переміщень будемо шукати у вигляді:

$$\mathbf{u} = a_0^* u_0 \mathbf{L}_0^* + a_2^* u_2 \mathbf{L}_2^* + a_s^* v_2 \mathbf{M}_2^* + a_2^* u_2 (\mathbf{L}_2^* + \mathbf{L}_2^{-2}) + \\ + a_s^* v_2 (\mathbf{M}_2^* + \mathbf{M}_2^{-2})$$

Для знаходження розв'язку динамічної задачі (17) було застосовано перетворення Лапласа. Знаходження оберненого перетворення Лапласа зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра першого роду, яке було розв'язане чисельно.

При розв'язуванні задачі (18) спочатку будувався загальний розв'язок для довільної масової сили, а потім для $n = 0$ і $n = 2$.

Висновки: Було встановлено, що розбиття початкової задачі про сферу, на яку діє імпульсне ЕМП, значно спростило аналіз напружено деформованого стану сфери. Зокрема, було знайдено, що найбільші динамічні стискаючі напруження у провідній сфері перевищують рівень магнітного тиску у 2-3 рази.

4. Абрагам М., Беккер М. Теория электричества / М.Абрагам, М.Беккер. - Ленинград-Москва, ОНТИ: Гостехиздат, 1936. - 258 с.
5. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А.Ф. Улитко. - Киев: Наукова думка, 1979. - 263 с.
6. Moon F.C. Magnetically induced stress waves in a conducting solid - theory and experiment / F.C. Moon, S. Chattopadhyaya // Trans. ASME. Series E. Journal of Applied Mech. - 1974. - 41. - No. 3. - P. 641-646.

Надійшла до редколегії 12.12.2011

УДК 517.9

Вакал Ю.Є.

Оцінка кількості збурених
ультрасубгармонік системи типу
"сферичний маятник"

Розглядається механічна система, яка описує коливання сферичного маятника під дією сили ваги та слабкого неоднорідного потенціального силового поля. Показано, що кількість ультрасубгармонік у такій системі оцінюється знизу функцією, що має степеневий характер залежності від величини, обернено пропорційної мазому параметру збурення, при прямуванні цього параметра до нуля.

Ключові слова: ультрасубгармоніки, сферичний маятник, гамільтонова система.

E-mail: iuliia.vakal@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

1. Вступ

Розглянемо механічну систему з лагранжіаном

$$L(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}{2} - \cos \theta,$$

яка описує коливання сферичного маятника під дією сили ваги. Тут $\varphi \bmod 2\pi$ та $\theta \in (0, \pi)$ – стандартні координати одиничної сфери (відповідно довгота та широта). Зради простоти вважаємо, що маса маятника, прискорення вільного падіння та радіус сферичного маятника рівні одиниці.

Припустимо, що зазначену систему збурює мале неоднорідне потенціальне силове поле. За допомогою перетворення Лежандра перейдемо стандартним чином від лагранжевої до гамільтонової системи [1]. Збурений гамільтоніан і симплектична структура в канонічних координатах $(p, z; \varphi, \theta)$ мають вигляд

$$H_\varepsilon = \frac{p^2}{2} + \frac{z^2}{2\sin^2 \theta} + \cos \theta + \varepsilon h(\varphi, \theta),$$

$$\omega^2 = dp \wedge d\theta + dz \wedge d\varphi.$$

Відомо, що фазові криві збуреної системи на поверхні рівня гамільтоніана H_ε є інтегральними кривими деякої неавтономної системи.

Для опису рухів незбуреної системи використовуються два інтеграли руху: енергії

$$H_0 = E$$

Yu. E. Vakal*

Estimating the number of perturbed
ultrasubharmonics of a "spherical
pendulum" system type

We consider a mechanical system which describes oscillations of a spherical pendulum under gravity force and heterogeneous potential force field. It is shown that the number of ultrasubharmonics in this system is estimated from below by a function which has a power character of dependency a quantity which is inversely proportional to small perturbation parameter when this parameter tends to zero.

Key Words: ultrasubharmonics, spherical pendulum, Hamiltonian system.

та імпульсу координати φ

$$z = c.$$

Спільна поверхня рівня енергії та імпульсу задається системою рівнянь

$$\frac{p^2}{2} + \cos \theta + \frac{c^2}{2\sin^2 \theta} = E, \quad z = c.$$

При $c \neq 0$ на площині (p, q) ці рівняння визначають замкнену криву γ , а в повному фазовому просторі – двовимірний тор

$$\gamma \times S^1, \quad S^1 := \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} = \{\varphi \bmod 2\pi\}.$$

Як буде показано нижче в п.3, після перепозначення $\theta = q$, траєкторії незбуреної системи можна інтерпретувати як інтегральні криві системи з гамільтоніаном

$$H_- = -\sqrt{2\sin^2 q \left[E - \frac{p^2}{2} - \cos q \right]}$$

у випадку, коли координата z залишається додатною, або гамільтоніаном

$$H_+ = \sqrt{2\sin^2 q \left[E - \frac{p^2}{2} - \cos q \right]}$$

у випадку $z < 0$. При цьому в обох випадках в ролі незалежної змінної виступає координата φ .

Надалі розглядатимемо лише гамільтоніан $H := H_-$. Ця функція має єдину критичну точку $(p_*, q_*) = (0, \pi - \arctg \sqrt{2})$, в якій вона досягає

свого мінімального значення $H(p, q) = -2\sqrt{3}/3$. Дана точка є особливою точкою еліптичного типу.

Крім того, ще одним критичним значенням гамільтоніана $H \in z^* = 0$, критичність якого обумовлена недиференційовністю функції H на множині її нульового рівня (більш того, при наближенні до цієї множини частинні похідні гамільтоніана прямують до нескінченності).

Мета даної роботи полягає в отриманні нижніх оцінок для кількості збурених ультрасубгармонік, які концентруються поблизу особливої точки (p, q) та поблизу критичної лінії рівня $H = 0$. Нагадаємо, що (n/m) -ультрасубгармоніками називають $(2\pi n/m)$ -періодичні розв'язки незбуреної системи, в якій роль незалежної змінної відіграє φ .

Основним інструментом для отримання зазначених вище оцінок слугує наведена в п.2. теорема 1, яка встановлює умови існування періодичних розв'язків збуреної системи з півтора ступенями вільності, які при $\varepsilon \rightarrow 0$ трансформуються в породжуючі ультрасубгармоніки незбуреної системи.

Відмітимо, що у роботах [2]-[5] існування і кількість ультрасубгармонік пов'язувалися з наявністю нулів функції Мельнікова при негамільтонових збуреннях.

2. Ультрасубгармоніки двовимірної майже автономної періодичної за часом гамільтонової системи

Розглянемо в деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$ з канонічними координатами p, q збурену гамільтонову систему з гамільтоніаном $H(p, q) + \varepsilon h(t, p, q)$, де $H \in C^5(D^2 \mapsto \mathbb{R})$, $h \in C^2(S^1 \times D^2 \mapsto \mathbb{R})$, $\varepsilon \geq 0$ – малий параметр. Припустимо, що в $D \subset \mathbb{R}^2$ можна ввести неканонічні змінні $(z, \varphi \bmod 2\pi)$ типу дія-кут, де $z = H$ – координата, яка нумерує замкнені фазові криві автономної незбуреної системи, а φ – кутова координата на кожній з таких кривих.

Для кожного раціонального числа m/n з області значень частотної функції $\omega(z)$ знайдеться число $z_{m/n} \in (z_*, z^*)$ таке, що $\omega(z_{m/n}) = m/n$, де z_*, z^* – критичні значення функції H . Крива $H = z_{m/n}$ складається з початкових даних (n/m) -

ультрасубгармонік незбуреної системи.

Зафіксувавши деяку точку $z_{m/n}$ і достатньо мале число $\delta = \delta_{m/n}$, після заміни $z = z_{m/n} + y$,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{m}{n}t + \psi, \text{ де } |\psi| \leq \delta, \text{ дістанемо систему} \\ \begin{cases} \dot{y} = -\varepsilon \omega(z_{m/n} + y) h'_\varphi\left(t, z_{m/n} + y, \frac{m}{n}t + \psi\right) := \\ := \varepsilon Y(t, y, \psi), \\ \dot{\psi} = \omega(z_{m/n} + y) - \omega(z_{m/n}) + \\ + \varepsilon \omega(z_{m/n} + y) h'_t\left(t, z_{m/n} + y, \frac{m}{n}t + \psi\right) := \\ := \Theta(y) + \varepsilon \Psi(t, y, \psi). \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

За допомогою методу Арнольда виявлення нерухомих точок відображення Пуанкаре [1], встановлено таку теорему існування $2\pi n$ -періодичних розв'язків системи (1).

Теорема 1 [6]. Якщо знайдуться додатні числа $\delta = \delta_{m/n}$, $\rho = \rho_{m/n}$ та $\varepsilon = \varepsilon_{m/n}$, які задовольняють нерівності $\rho + \varepsilon T_n |Y|_\delta \leq \delta$,

$$\varepsilon \left(|\Theta|_\delta |Y|_\delta T_n + |\Psi|_\delta \right) \leq \frac{m \ln}{|Y|_\delta} (y) \rho, \quad (2)$$

$$\varepsilon \left[3\pi \left(|\Theta|_\delta + \varepsilon |\Psi|_\delta \right) |\Psi|_\delta + \frac{1}{2} |\Psi|_\delta \right] \leq \frac{1}{2} \frac{m \ln}{|Y|_\delta} (y), \quad (3)$$

$$\max \left\{ \varepsilon |Y|_\delta, \varepsilon |\Psi|_\delta, \sqrt{\varepsilon |Y|_\delta \left(|\Theta|_\delta + \varepsilon |\Psi|_\delta \right)} \right\} \leq \frac{\ln 2}{4\pi n}, \quad (4)$$

де $| \cdot |_\delta = \max_{t \in \mathbb{R}, y \in B_\delta, \psi \in [0, 2\pi]} | \cdot |$, $T_n = 2\pi n$, то система (1) має принаймні два $2\pi n$ -періодичних розв'язки $(y^\pm(t), \psi^\pm(t))$ таких, що $\forall t \in \mathbb{R}$

$$|y^\pm(t)| \leq \varepsilon \left[\frac{T_n \max_{|y| \leq \delta} |\Theta'(y)| |Y|_\delta + \varepsilon |\Psi|_\delta}{\frac{m \ln}{|Y|_\delta} (y)} + T_n |Y|_\delta \right].$$

Щоб використати теорему 1 для знаходження оцінки низу кількості збурених ультрасубгармонік, необхідно мати оцінки норм $| \cdot |_\delta$ правих частин системи (1) та їхніх похідних. Для їх встановлення, користуючись лемою 1, потрібно спершу оцінити похідні функцій $p = P(z, \varphi)$, $q = Q(z, \varphi)$ які виражають канонічні змінні (p, q) через неканонічні змінні (z, φ) типу дія-кут.

Лема 1. В координатах (p, q) справджуються рівності

$$p'_i = \frac{H'_p}{(H'_p)^2 + (H'_q)^2} + \left(\frac{T - H}{2\pi} \right)^2 f H'_q,$$

$$q'_i = \frac{H'_q}{(H'_p)^2 + (H'_q)^2} - \left(\frac{T \circ H}{2\pi} \right)^2 f H'_p,$$

$$p'_0 = \frac{T \circ H}{2\pi} H'_q, \quad q'_0 = \frac{T \circ H}{2\pi} H'_p,$$

з функцією $f \in C^2(D \rightarrow \mathbb{R})$, яка визначається рівностями

$$f|_{\varphi=0} = 0 \quad \text{та} \quad f'_\varphi = \frac{2\pi g}{T \circ H} - \frac{2\pi T' \circ H}{(T \circ H)^2},$$

$$\text{де } g := \frac{\partial}{\partial p} \frac{H'_p}{(H'_p)^2 + (H'_q)^2} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{H'_q}{(H'_p)^2 + (H'_q)^2}.$$

Основні результати щодо оцінки кількості збурених ультрасубгармонік вдасться сформулювати з використанням теоретико-числової функції $\Xi(\cdot, \cdot)$ двох аргументів – натурального числа та напівінтервалу (інтервалу), визначеної за правилом [7]

$$\Xi(N, I) := \begin{cases} I(N) \Phi(N), & \text{якщо } I = (a, b], \\ I(N) \Phi(N) - I_0(b), & \text{якщо } I = (a, b), \end{cases}$$

де $\Phi(N) := \sum_{n=1}^N \varphi(n)$, $\varphi(\cdot)$ – функція Ейлера,

$$I(N) := (b-a) + \frac{I_x(b) + I_x(a) - 2}{N},$$

$I_A(\cdot)$ – індикатор множини A . Відомо [8], що

$$\Xi(N, I) - \frac{3N^2}{\pi^2} |I|, \quad N \rightarrow \infty,$$

де $|I| := (b-a)$.

3. Властивості періоду незбуреної системи на поверхні рівня її гамільтоніана

Повернемось до розгляду незбуреної системи типу “сферичний маятник”. Оскільки координата φ еволюціонує згідно з рівнянням $\dot{\varphi} = \frac{z}{\sin^2 \theta}$, то її можна використовувати в якості незалежної змінної лише у випадку, коли $\dot{\varphi}$, а тоді й z , у процесі еволюції не змінює знак, тобто або $z > 0$, або $z < 0$.

Незбурена система на поверхні $H_0 = E$ після виключення часу набирас вигляду

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{\partial q}{\partial H_0} \Big|_{H_0=E}, \quad \frac{dq}{d\varphi} = -\frac{\partial p}{\partial H_0} \Big|_{H_0=E},$$

а оскільки $H_0(p, H(p, q), q) = E$, де

$H = H_0(p, q)$ – функції, визначені у вступі, то перепозначивши $\varphi = t$, дістанемо

$$\frac{dp}{dt} = -H'_q, \quad \frac{dq}{dt} = H'_p.$$

Це канонічна система з одним ступенем волі, а її фазові криві є лініями рівня гамільтоніана H . Тобто траєкторії незбуреної системи можна інтерпретувати як інтегральні криві системи з гамільтоніаном H_- у випадку $z > 0$ або гамільтоніаном H_+ у випадку $z < 0$. Надалі розглядатимемо лише гамільтоніан $H := H_-$.

Для того, щоб скористатися оцінками леми 1, необхідно з'ясувати властивості функції $T(z)$ – періоду руху системи з гамільтоніаном H по лінії рівня $H = z$ (при фіксованому значенні E), та його похідних.

Оскільки

$$\frac{dq}{dt} = \pm \frac{\sin q}{z} \sqrt{2 \sin^2 q (E - \cos q) - z^2},$$

то

$$T(E, z) = -2z \int_{u_-(E, z)}^{u_+(E, z)} \frac{du}{(1-u^2) \sqrt{2(1-u^2)(E-u) - z^2}} = T_-(z) + T_+(z), \quad (5)$$

де $u_{\pm}(E, z)$ – корені кубічного рівняння

$$P_3(u; E, z) := 2(1-u^2)(E-u) - z^2 = 0, \quad (6)$$

які належать інтервалу $(-1, 1)$, а

$$T_{\pm} = -z \int_{u_{\pm}(E, z)}^{u_{\mp}(E, z)} \frac{du}{(1 \pm u) \sqrt{2(1-u^2)(E-u) - z^2}}.$$

Існування таких коренів накладає обмеження на параметри E та z , а саме, необхідно і достатньо, щоб $E > -1$, $z \in (-\sqrt{u^*(E)}, 0)$, де

$$u^*(E) := \max_{u \in [-1, \min\{E, 1\}]} 2(1-u^2)(E-u) = 2 \left(1 - \left(\frac{E - \sqrt{E^2 + 3}}{3} \right)^2 \right) \left(\frac{2E}{3} + \frac{\sqrt{E^2 + 3}}{3} \right).$$

У нашому випадку маємо два критичних значення: $z_* = -\sqrt{u^*(E)}$ – значення еліптичного типу (це означає, що множина рівня $H = z_*$ вироджується в особливу точку еліптичного типу) та $z^* = 0$.

Дослідимо властивості періоду в частинному випадку $E = 0$ при $z \rightarrow z^* = 0$.

Нехай $r_i = r_i(z)$, $i = 1, 2, 3$ – корені полінома

(6), записані в неспадному порядку. Неважко бачити, що $-1 < r_1 < 0$. Таким чином,

$$P_3(u, 0, z) = 2 \prod_{i=1}^3 (u - r_i),$$

причому $r_1(z) = u_-(0, z)$, $r_2(z) = u_+(0, z)$.

Зробимо в інтегралі $T_+(z)$ заміну змінної інтегрування $u - r_1 = (r_2 - r_1)t^2$. Дістанемо

$$T_+(z) = -\frac{\sqrt{2z}}{(1 \pm r_1)\sqrt{r_2 - r_1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1 - n_z t^2)\sqrt{(1 - t^2)(1 - m^2 t^2)}},$$

$$\text{де } n_z = \mp \frac{r_2 - r_1}{1 \pm r_1}, \quad m = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1}.$$

Оскільки $P'_u(r_j(0); 0, 0) \neq 0$ (всі корені прості), то згідно з аналітичним варіантом теореми про неявну функцію функції $r_j(z)$ аналітичні в околі нуля, причому

$$r_1(z) = -1 + \frac{z^2}{4} + O(|z|^4), \quad r_2(z) = O(|z|^2),$$

$$r_3(z) = 1 + O(|z|^2).$$

Тоді $n_-(z) = \frac{1}{2} + O(z^2)$, $n_+(z) = -\frac{4}{z^2} + O(1)$ та

$m(z) = \frac{1}{2} + O(|z|^2)$, і якщо позначити

$v^2(z) := -1/n_+(z)$, то для від'ємних близьких до нуля z маємо

$$v^2(z) = \frac{z^2}{4} + O(|z|^4), \quad v(z) = -\frac{z}{2} + O(|z|^3).$$

Лема 2. Нехай $T(z) := T(0, z)$, тоді знайдуться додатні сталі r^* , $C_j^{[j]}$, $j = 0, 1, 2$ такі, що при $z \in (z^* - r^*, z^*)$ справджуються нерівності:

$$|T(z) - \pi| \leq C_0^{[0]} |z - z^*|,$$

$$\left| T'(z) + \frac{\pi}{8} \right| \leq C_1^{[1]} |z - z^*|, \quad |T''(z)| \leq C_2^{[2]}.$$

Доведення. Дослідимо функцію $T_+(z)$. Подамо її у вигляді

$$T_+(z) = w(z) \int_0^1 \frac{dt}{v^2(z) + t^2} \sqrt{(1 - t^2)(1 - m(z)t^2)}.$$

Тут функція $w(z)$ – аналітична в околі нуля і разом з похідними допускає представлення

$$w(z) = -z + O(|z|^3), \quad w'(z) = -1 + O(|z|^2),$$

$$w''(z) = O(|z|).$$

та провівши відповідні обчислення, переконуємось в тому, що

$$T_+(z) = \frac{\pi w(z)}{2v(z)\sqrt{1 + v^2(z)}} + O(|z|) = \pi + O(|z|).$$

Легко показати, що $T_-(z)$ аналітична в околі $z = 0$ і виконується $T_-(0) = 0$.

Дослідимо тепер асимптотику $T_+(z)$. Маємо

$$\begin{aligned} T_+(z) &= w(z) \int_0^1 \frac{dt}{v^2(z) + t^2} \sqrt{(1 - t^2)(1 - m(z)t^2)} - \\ &- w(z) \int_0^1 \frac{(v^2(z))' dt}{v^2(z) + t^2} \sqrt{(1 - t^2)(1 - m(z)t^2)} + \\ &+ w'(z) \int_0^1 \frac{m'(z)t^2 dt}{2(v^2(z) + t^2) \sqrt{(1 - t^2)(1 - m(z)t^2)}^{3/2}}. \end{aligned}$$

З урахуванням попередніх викладок для першого доданку дістанемо

$$I_1 = \frac{\pi}{z} - \psi(z) + O(|z|),$$

$$\begin{aligned} \text{де } \psi(z) &:= \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - t^2/2}} - 1 \right] \frac{dt}{(v^2(z) + t^2) \sqrt{(1 - t^2)}} \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dt}{v^2(z) + t^2} \sqrt{(1 - t^2)} \geq \frac{\pi}{8} + O(z). \end{aligned}$$

Відповідно для другого доданку –

$$I_2 = -\frac{\pi}{z} + O(|z|), \quad \text{а третій доданок має порядок } O(|z|^2).$$

Отже, $T_+(z) = -\psi(z) + O(|z|)$. Звілси $T_+(0) \leq -\frac{\pi}{8}$.

Так само можна оцінити другу похідну, яка має порядок $O(1)$.

Тепер дослідимо властивості періоду в частинному випадку $E = 0$ при $z \rightarrow z_*$.

Лема 3. Знайдуться додатні сталі r_* , $\tilde{C}_j^{[j]}$, $j = 0, 1, 2$, такі, що при $|z - z_*| < r_*$ справджуються нерівності:

$$|T(z) + \pi\sqrt{2}| \leq \tilde{C}_0^{[0]} |z - z_*|,$$

$$\left| T'(z) - \frac{17\sqrt{108}}{72} \pi \right| \leq \tilde{C}_1^{[1]} |z - z_*|,$$

$$\left| T''(z) - \frac{19\sqrt{2}}{12} \pi \right| \leq \tilde{C}_2^{[2]} |z - z_*|.$$

Доведення. Розглянемо інтеграл, який фігурує у виразі для періоду (5) при $E = 0$:

$$\int_{u_-(z)}^{u_+(z)} \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{2(1-u^2)(-u)-z^2}}.$$

Підкореневий вираз досягає максимуму в точці $u_* = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Виконавши заміни $u = u_* + \alpha x$, $z = \beta w$, переконуємось в тому, що цей інтеграл зводиться до інтегралу

$$\int_{x_-(w)}^{x_+(w)} \frac{g(x) dx}{\sqrt{1-w^2-x^2-kx^3}},$$

де $g(x) = \frac{\alpha^4 \sqrt{27}}{2 \left(\frac{2}{3} - \alpha^2 x^2 + \frac{2\alpha x}{\sqrt{3}} \right)} = \frac{-\sqrt{6} \sqrt{3}}{4 \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} x \right)}$,

$$x_+(w) = \frac{u_+(w/\beta) - u_*}{\alpha}, \quad x_-(w) = \frac{u_-(w/\beta) - u_*}{\alpha},$$

$$\alpha = -\sqrt{2}/3, \quad k = \sqrt{6}/9, \quad \beta^2 = 4/(3\sqrt{3}).$$

Можна показати, що існує заміна змінної у вигляді збіжного ряду $x = y + ay^2 + by^3 + \dots$, де, зокрема, $a = -\sqrt{6}/18$, $b = -5/108$, така, що

$$[x^2 + kx^3]_{x=y+ay^2+by^3+\dots} = y^2.$$

Отже дістаємо інтеграл

$$\int_{-\sqrt{1-w^2}}^{\sqrt{1-w^2}} \frac{g(y + ay^2 + by^3 + \dots)(1 + 2ay + 3by^2 + \dots) dy}{\sqrt{1-w^2-y^2}}.$$

Зробивши заміну $y = \sqrt{1-w^2}v$, розклавши чисельник за степенями $\sqrt{1-w^2}v$ та врахувавши рівності $\int_{-1}^1 \frac{v^{2k+1}}{\sqrt{1-v^2}} dv = 0$, $k \in \mathbb{N}$, дістаємо зображення

$$I = \int_{-1}^1 \frac{g(0)}{\sqrt{1-v^2}} dv + (1-w^2) \int_{-1}^1 \frac{A(a,b)v^2}{\sqrt{1-v^2}} dv + O((1-w^2)^2) =$$

$$= g(0)\pi + (1-w^2)A(a,b)\frac{\pi}{2} + O((1-w^2)^2),$$

$$\text{де } A(a,b) = -\frac{19\sqrt{108}}{144}, \quad g(0) = \frac{-\sqrt{108}}{4}.$$

Таким чином,

$$T(z) = -2z \left[g(0)\pi + \left(1 - \frac{z^2}{\beta^2} \right) A(a,b)\frac{\pi}{2} + \right.$$

$$\left. + O\left(\left(1 - \frac{z^2}{\beta^2} \right)^2 \right) \right], \quad \text{при } z \rightarrow z_*$$

Тепер вже неважко одержати оцінки для перших двох похідних функції $T(z)$.

Прямою перевіркою також переконуємось у тому, що $T'(z_*) \neq 0$.

4. Збурення ультрасубгармонік примежової зони ліній рівня $H = z^*$ та примежової зони точки еліптичного типу

Для примежової зони $z \in (-\delta, 0)$ справедливі оцінки

$$|H'|_{H=z} = O(1/z), \quad |H''|_{H=z} = O(1/z^3),$$

$$|H''|_{H=z} = O(1/z^5).$$

Тоді з цих оцінок і леми 2 маємо такий результат.

Лема 4. Існують такі додатні числа $r^* > 0$, C^* , c^* , що для всіх раціональних m/n таких, що $|z^* - z_{m/n}| < r^*$ при

$$\delta = \delta_{m/n} := \frac{1}{2} |z^* - z_{m/n}|, \text{ справджуються оцінки}$$

$$|Y'_l| \leq \frac{C^*}{\delta}, \quad |Y'_r| \leq \frac{C^*}{\delta^3}, \quad |Y''_v| \leq \frac{C^*}{\delta^4}, \quad |\theta| \leq C^*,$$

$$|\Psi'_l| \leq \frac{C^*}{\delta^2}, \quad |\Psi'_r| \leq \frac{C^*}{\delta^6}, \quad |\Psi''_v| \leq \frac{C^*}{\delta^3}, \quad \min_{j \in \{-4,4\}} |\theta^j| \geq c^*.$$

Покладемо $\omega^* := \omega(z^*)$ і припустимо, що існують сталі $\gamma^* > 0$, $\kappa^* \geq 1$ такі, що

$$\left| \frac{m}{n} - \omega \right| \geq \frac{\gamma^*}{n^{\kappa^*}}, \quad \forall \frac{m}{n} \in Q, \quad \frac{m}{n} \neq \omega^*. \quad (7)$$

Тоді згідно з лемою 2 для точок примежової зони точки $z^* = 0$ маємо нерівності

$$\frac{\gamma^*}{n^{\kappa^*}} \leq \left| \frac{m}{n} - \omega \right| = \left| \omega(z_{m/n}) - \omega(z^*) \right| =$$

$$= \left| \frac{T(z_{m/n}) - \pi}{T(z_{m/n})} \right| \leq \frac{\tilde{C}_T^{[0]}}{T(z_0)} |z_{m/n} - z^*|.$$

Забезпечивши вибором δ_0 виконання нерівності $\delta_0 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{T(z_0)}{\tilde{C}_T^{[0]}} \right]$ і поклавши $\rho = \frac{\delta}{2}$,

$$\delta = \delta_{m/n} := \frac{|z_{m/n} - z^*|}{2}, \text{ дістанемо } \delta_0 n^{-\kappa^*} \leq \delta \leq \delta_0.$$

З оцінок леми 4 та умов (2)-(4) випливає, що

$$\varepsilon = O \left(\min \left\{ \frac{\delta^5}{n}, \frac{\delta^2}{n}, \delta^3, \frac{\delta^4}{n^2} \right\} \right).$$

Тому, якщо покласти $\epsilon_1 = \frac{\mu_1}{\pi^{\frac{1}{2k^*}}}$, то одночасно для всіх точок прилежної зони точки $z^* = 0$ значення μ_1 можна вибрати так, щоб при $\epsilon < \epsilon_1$ задовольнити всі чотири нерівності в умовах теореми 1. Звідси випливає, що при $\epsilon < \epsilon_1$ кількість збурених ультрасубгармонік прилежної зони точки $z^* = 0$ дорівнює кількості тих раціональних чисел з проміжку $I_1 = (-\delta, 0)$, у яких знаменник не перевищує $(\mu_1/\epsilon)^{1/(2k^*)}$.

Як наслідок, маємо таке твердження.

Теорема 2. Нехай виконані всі вище згадані умови на збурений і незбурений гамільтоніан і число ω^* задовольняє нерівності (7). Тоді існують додатні числа μ_1, ϵ_1 такі, що при $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ кількість збурених ультрасубгармонік прилежної зони точки $z^* = 0$ не менша за

$$\geq \left(\left\lfloor \frac{\mu_1}{\epsilon} \right\rfloor^{1/(2k^*)}, I_1 \right) - \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{\mu_1}{\epsilon} \right)^{1/2k^*} (|I_1|), \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Зауважимо, що гамільтоніан системи не має особливостей в околі еліптичної точки $(p, q) = (0, \pi - \arctg \sqrt{2})$. А тоді використавши лему 3 і провівши ті ж самі міркування, що і у випадку точки $z^* = 0$, маємо таке твердження.

Список використаних джерел

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд – М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. Козлов В.В. Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамилтоновых системах с полутора степенями свободы / В.В. Козлов // Усп. матем. наук. – 1986. – 41, № 5. – С. 177-178.
3. Вакал Ю.С. Оцінка кількості збурених ультрасубгармонік системи з півтора ступенями вільності, близької до гамільтонової / Ю.С. Вакал, І.О. Парасюк // Нелінійні коливання. – 2011. – 14, № 2. – С. 147-180.
4. Guckenheimer J. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields / J. Guckenheimer, Ph. Holmes – New York: Springer-Verlag, 1983. – 453 p.
5. Колесов А.Ю. Явление буферности в системах, близких к двумерным гамилтоновым / А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов //

Теорема 3. Нехай виконані всі вище згадані умови на збурений і незбурений гамільтоніан, число $\omega_* := \omega(z_*)$ задовольняє аналог нерівностей (7). Тоді існують додатні числа μ_2, ϵ_2 такі, що при $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ кількість збурених ультрасубгармонік прилежної зони еліптичного типу не менша за

$$\geq \left(\left\lfloor \frac{\mu_2}{\epsilon} \right\rfloor^{2/(3k_*)}, I_2 \right) - \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{\mu_2}{\epsilon} \right)^{4/3k_*} (|I_2|), \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

5. Висновок

В даній роботі із застосуванням методу Арнольда виявлення нерухомих точок симплектичних дифеоморфізмів встановлено нижні оцінки числа ультрасубгармонік для системи типу "сферичний маятник". Виявилось, що в цьому випадку маємо дві критичні зони кільцевої області, розшаровані замкненими лініями рівня незбуреного гамільтоніана: прилежну зону еліптичного типу і прилежну зону нульового рівня функції H . Для обох зон відповідні оцінки для кількості збурених ультрасубгармонік демонструють степеневий характер залежності від $1/\epsilon$, причому більша швидкість наростання числа ультрасубгармонік при $\epsilon \rightarrow 0$ притаманна прилежній зоні еліптичного типу.

Труды Ин-та матем. и мех. УРО РАН. – 2006. – 12, № 1. – С. 109-141.

6. Вакал Ю.С. Існування збурених ультрасубгармонік у двовимірній майже автономній гамільтоновій системі / Ю.С. Вакал // IV Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", 8-10 вересня 2011, Київ, Україна: матеріали конференції. – 2011. – С. 52.
7. Dress F. Discrepance des suites de Farey / F. Dress // J. Theor. Nombres Bordeaux. – 1999. – 11, № 2. – P. 345-367.
8. Montgomery H.L. Fluctuations in the mean of Euler's phi function / H.L. Montgomery // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). – 1987. – 97, № 1-3. – P. 239-245.

Надійшла до редколегії 15.03.12

УДК 532.5.

Голіченко О.Л., аспірант
Малюга В.С., к.ф.-м.н.
Мелешко В.В., д.ф.-м.н.**Асимптотична поведінка коефіцієнтів
розв'язку задачі стаціонарної Стоксової
течі в скінченному циліндрі**

Стаття присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язку нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникає при розгляді задачі про стаціонарний рух Стоксової течії в скінченному циліндрі. Отримані аналітичні вирази для асимптотики розв'язку.

Ключові слова: асимптотична поведінка невідомих, стаціонарна Стоксова течія, скінченний циліндр.

*E-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

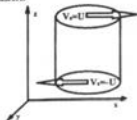
Статтю представив член редколегії акад. НАН України Перестюк М.О.

Вступ

Дослідження течії Стокса в циліндрах кінцевих розмірів є важливою задачею гідромеханіки, оскільки такого роду течії постійно застосовуються в сучасній хімічній, фармацевтичній, харчовій промисловостях. Отриманню аналітичного розв'язку такого роду течій присвячені роботи [1,3]. Одним з найбільш ефективних аналітичних методів розв'язку Стоксових течій в скінченному циліндрі є метод суперпозиції, який в результаті дозволяє звести задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Ця система в свою чергу може бути розв'язана за допомогою методу редукції. Але для правильного його застосування нам потрібно знати асимптотичну поведінку розв'язку системи, при прямуванні її індексів на нескінченність. Метою роботи є одержання цієї асимптотичної поведінки.

**Нескінченна система лінійних алгебраїчних
рівнянь**

В роботі [3] задача про рух стаціонарної Стоксової течії в скінченному круговому циліндрі була зведена до системи рівнянь (1)

Oleksandr L.Golichenko, PhD student,
Volodimir S.Malyuga, PhD (Phys.-Math).Vyacheslav V.Meleshko, Dr.Sc (Phys.-Math),
Professor.**Asymptotic behavior of the coefficients of
solution of the stationary Stokes flow
problem in a finite cylinder**

The article addresses to the study of asymptotic behavior of solution of an infinite system of linear algebraic equations, that arise under consideration of the problem of stationary motion of the Stokes flow in a finite cylinder. The analytical expressions for the asymptotics of the solution are obtained.

Key Words: asymptotic behavior of unknowns,
steady Stokes flow, finite cylinder.

$$\begin{cases} X_k T(\beta_k) - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{4\beta_k^2 \mu_{nn}}{(\mu_{nn}^2 + \beta_k^2)^2} = F_k, & k=1,2,\dots \\ Z_n \Delta(\mu_{nn}, h) - \sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{4\mu_{nn}^2 \beta_k}{h(\beta_k^2 + \mu_{nn}^2)^2} = G_n, & n=1,2,\dots \end{cases} \quad (1)$$

де використані позначення:

$$T(\beta) = \beta \left(\frac{J_0(\beta)}{J_2(\beta)} - 1 \right) - 2(m-1) \frac{J_2(\beta)}{J_4(\beta)} \frac{2m}{\beta} - \frac{2m^2 J_2(\beta)}{\beta^2 J_4(\beta)}, \quad \Delta(\mu) = \alpha \beta \mu + \frac{\mu}{\sinh \mu},$$

$\beta_k = k\pi/h$, μ_{nn} визначаються як корні рівняння $J_m(\mu_{nn}) = 0$ а X_k та Z_n шукані змінні. Вільні члени F_k та G_n являють собою розклади граничних умов на бічних поверхнях циліндра в відповідні ряди. В даній роботі ми обмежимося розглядом конкретного випадку, коли швидкість течії на бічній поверхні циліндра рівна нулю, а верхня і нижня кришки рухаються як показано на малюнку. В цьому випадку $F_k = -2(2 - \frac{I_0(\beta_k)}{I_2(\beta_k)})$,

$$G_n = 0 \text{ а } m = 1.$$

Асимптотична поведінка невідомих

Для зручності опустимо індекси m при коефіцієнтах μ_{nn} , оскільки в усіх подальших викладах $m=1$ а також виконаємо наступну підстановку:

$$\beta_k X_k = -x_k, \quad (2)$$

$$\mu_{nn} Z_n = -y_n.$$

Тоді система рівнянь (1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_n - F_n(\beta_n) = \frac{2\beta_n}{i(\beta_n)} \left(2 - \frac{I_n(\beta_n)}{I_1(\beta_n)} \right) & n=1,2,\dots \\ x_n - F_n(\mu_n) = 0 & k=1,2,\dots \end{cases} \quad (3)$$

де $t(\beta) = T(\beta)|_{\mu=1}$, $\delta(\mu) = \Delta(\mu) \cdot \sin^2 \mu$, а також:

$$\begin{cases} F_1(z) = 4 \frac{z^3}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{(\mu_n^2 + z^2)^2} \\ F_2(z) = 4 \frac{z^3}{h} \frac{\sinh^2(hz)}{\delta(hz)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(\beta_n^2 + z^2)^2} \end{cases} \quad (4)$$

Спочатку доведемо, що функція $t(\beta)$ не має дійсних коренів. Для цього введемо наступну суму:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{4\beta^2} \left[\frac{I_1'(\beta)}{I_1(\beta)} - \frac{4}{\beta^2} - 1 \right]. \quad (5)$$

Після чого функція $t(\beta)$ може бути представлена у вигляді:

$$t(\beta) = 4\beta^3 S_1 + \frac{2}{\beta} \frac{\beta I_0(\beta) - 2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)}. \quad (6)$$

Розглянемо функцію $F(\beta) = \beta I_0(\beta) - 2I_1(\beta)$. За допомогою представлення функцій Бесселя у вигляді сум рядів:

$$I_0(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2k}}{k!^2}, \quad I_1(\beta) = \frac{\beta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2k}}{k!(k+1)!},$$

можна переписати функцію $F(\beta)$ у вигляді:

$$F(\beta) = \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2k}}{(k-1)!(k+1)!} > 0, \quad \beta > 0.$$

Таким чином легко бачити що $t(\beta) > 0$ при $\beta \geq 0$, а отже і $t(\beta)$, не має жодних дійсних коренів.

Для вивчення асимптотичної поведінки комплексних коренів, представимо функцію

$$t(\beta) \text{ у вигляді: } t(\beta) = \frac{t_1(\beta)}{I_1^2(\beta) I_1(\beta)}, \text{ де}$$

$$t_1(\beta) = \beta I_1^2(\beta) - I_1^2(\beta) I_1(\beta) - \left(\beta + \frac{2}{\beta} \right) I_1^2(\beta) I_0(\beta) + I_1^3(\beta).$$

Користуючись асимптотичним розкладом

$$I_0(\beta) = \frac{e^{\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}} \left(1 + \frac{1}{8\beta} + \frac{9}{128\beta^2} \right) + \frac{ie^{-\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}} \left(1 - \frac{1}{8\beta} + \frac{9}{128\beta^2} \right),$$

$$I_1(\beta) = \frac{e^{\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}} \left(1 - \frac{3}{8\beta} + \frac{15}{128\beta^2} \right) - \frac{ie^{-\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}} \left(1 + \frac{3}{8\beta} - \frac{15}{128\beta^2} \right),$$

можна переконатися що асимптотична поведінка функції $t_1(\beta)$ має вигляд:

$$t_1(\beta) = \frac{e^{-\beta}}{(2\pi\beta)^{3/2}} \left[e^{\beta} + 4ie^{\beta} \left(\beta - \frac{5}{8} \right) - 4e^{\beta} \left(\beta + \frac{5}{8} \right) + i \right].$$

Використовуючи підстановку $\beta = \gamma \log|z| + i\tau + \lambda_0$,

можна показати, що нулі функції $t_1(\beta)$ мають асимптотичну поведінку вигляду:

$$\beta_n = \frac{\log 4\pi n}{2} + i\pi n + O\left(\frac{\log n}{n}\right). \quad (7)$$

Така поведінка $F_1(z)$ та $F_2(z)$ дозволяє нам користуватися інтегральним перетворенням Меліна:

$$Y_j(\gamma) = \int_0^\infty F_j(z) z^{\gamma-1} dz, \quad j=1,2 \quad (8)$$

В області $P = \{\gamma: -2 < \text{Re}(\gamma) < -1\}$ функції $Y_j(\gamma)$ регулярні, а також відомо, що:

$$|Y_j(\gamma)| = O(e^{-\varepsilon \text{Im}(\gamma)}), \quad |\text{Im}(\gamma)| \rightarrow \infty, \quad j=1,2 \quad (9)$$

для деякого скінченного $\varepsilon > 0$ та за умови, що $-2 + \delta_1 < \text{Re}(\gamma) < -1 - \delta_1$.

Алгебраїчними перетвореннями з (3) та (4) $F_j(z)$ можна представити у вигляді:

$$F_1(z) = 4z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_2(\mu_n)}{(\mu_n^2 + z^2)^2} + G_1(z),$$

$$F_2(z) = 4 \frac{z^3}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_1(\beta_n) + 2\beta_n \left(2 - \frac{I_1(\beta_n)}{I_1(\beta_n)} \right) / I_1(\beta_n)}{(\beta_n^2 + z^2)^2} + G_2(z),$$

де:

$$G_1(z) = 4z^3 \left(\frac{1}{t(z)} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{(\mu_n^2 + z^2)^2},$$

$$G_2(z) = 4 \frac{z^3}{h} \left(\frac{\sinh^2(hz)}{\delta(hz)} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(\beta_n^2 + z^2)^2}.$$

Надалі ми будемо користуватися виразами

$$\frac{1}{t(\beta)} - 1 = \frac{1}{\beta} + \frac{15}{8\beta^2}, \quad (10)$$

$$\frac{2 - \frac{I_1(\beta_n)}{I_1(\beta_n)}}{I_1(\beta_n)} - 1 = \frac{3}{8\beta_n^2}. \quad (11)$$

Образ функції $G_1(\gamma)$ є регулярним в області

$\text{Re} \gamma \in (-2, 0)$. Образ функції $G_2(\gamma)$ є регулярним в області $\text{Re} \gamma \in (-2, \infty)$. Запишемо

$$Y_1(\gamma) = \int_0^\infty F_1(z) z^{\gamma-1} dz = \frac{\pi(\gamma+1)}{\cos \frac{\pi\gamma}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} F_2(\mu_n) \mu_n^{\gamma-1} + \hat{G}_1(\gamma),$$

$$Y_2(\gamma) = \int_0^\infty F_2(z) z^{\gamma-1} dz = \frac{\pi(\gamma+1)}{h \cos \frac{\pi\gamma}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_1(\beta_n) + 2 \left(2 - \frac{I_1(\beta_n)}{I_1(\beta_n)} \right) \beta_n / I_1(\beta_n) \right] \beta_n^{\gamma-1} + \hat{G}_2(\gamma).$$

Використовуючи інтеграли Меліна та теорему Коші запишемо:

$$Y_1(\gamma) = \frac{\pi(\gamma+1)}{\cos \frac{\pi\gamma}{2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(z) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\gamma-1} dz + \frac{Y_1(\gamma)}{\pi} \right] + \hat{G}_1(\gamma),$$

$$\gamma_1(\gamma) = \frac{\gamma+1}{\cos \frac{\pi\gamma}{2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(\xi) \left(\frac{\pi}{h} \right)^{\gamma-\xi} \zeta(\xi-\gamma+1) d\xi + \gamma_1(\gamma) \right] +$$

$$+ 2 \left(\frac{\pi}{h} \right)^{\gamma+1} \frac{\gamma+1}{\cos \frac{\pi\gamma}{2}} \zeta(-\gamma) + \frac{2\pi}{h} \frac{\gamma+1}{\cos \frac{\pi\gamma}{2}} \frac{\zeta}{\Gamma} \left[\frac{2 - \frac{I_2(\beta_2)}{I_1(\beta_2)}}{i(\beta_2)} - 1 \right] \beta_2' + \hat{G}_1(\gamma).$$

$$-2 < \operatorname{Re}(\xi) < \operatorname{Re}(\gamma) < -1.$$

Після цього функції F_j записуються у вигляді:

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi\gamma}{2}}{D(\gamma)} \left\{ r(\gamma) [\pi L_1(\gamma) + \right.$$

$$+ r(\gamma) L_2(\gamma) + L_3(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + \hat{G}_1(\gamma) \Big\} z^{-\gamma} d\gamma,$$

$$F_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi\gamma}{2}}{D(\gamma)} \left\{ r(\gamma) [L_2(\gamma) + \right.$$

$$+ \pi r(\gamma) L_1(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + L_3(\gamma) + \hat{G}_2(\gamma) \Big\} z^{-\gamma} d\gamma,$$

де

$$L_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon_2(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\gamma-\zeta-1} d\zeta,$$

$$L_2(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon_1(\zeta) \left(\frac{\pi}{h} \right)^{\gamma-\zeta} \zeta(\xi-\gamma+1) d\xi,$$

$$L_3(\gamma) = 2r(\gamma) \left(\frac{\pi}{h} \right)^{\gamma+1} \zeta(-\gamma) + 2r(\gamma) \frac{\pi}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 - \frac{I_2(\beta_2)}{I_1(\beta_2)}}{i(\beta_2)} - 1 \right] \beta_2',$$

$$r(\gamma) = \frac{\gamma+1}{\cos \frac{\pi\gamma}{2}}, \quad D(\gamma) = \cos^2 \frac{\pi\gamma}{2} - (\gamma+1)^2.$$

Після переходу контура інтегрування вправо від простого полюса $\gamma = -1$ функції набудуть вигляду:

$$F_1(z) = \frac{8z}{\pi^2 - 4} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi\gamma}{2}}{D(\gamma)} \left\{ r(\gamma) [\pi L_1(\gamma) + \right.$$

$$+ r(\gamma) L_2(\gamma) + L_3(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + \hat{G}_1(\gamma) \Big\} z^{-\gamma} d\gamma,$$

$$F_2(z) = \frac{4\pi z}{\pi^2 - 4} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi\gamma}{2}}{D(\gamma)} \left\{ r(\gamma) [L_2(\gamma) + \right.$$

$$+ \pi r(\gamma) L_1(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + L_3(\gamma) + \hat{G}_2(\gamma) \Big\} z^{-\gamma} d\gamma,$$

$$-1 < \operatorname{Re}(\gamma) < 0.$$

Користуючись (10) та (11) запишемо функцію $G_1(z)$ у вигляді:

$$G_1(z) = 4z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_2(\mu_n)}{(\mu_n^2 + z^2)^2} + G_{12}(z), \quad (12)$$

де функція $G_{12}(z)$ регулярна в області $\gamma \in (-1, 1)$. Одержимо:

$$\hat{G}_1(\gamma) = \int_0^{\infty} G_1(z) \cdot z^{\gamma-1} dz =$$

$$= \frac{\pi\gamma}{\cos \frac{\pi(\gamma-1)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} F_2(\mu_n) \mu_n^{\gamma-2} + \hat{G}_{12}(\gamma) =$$

$$= \frac{\pi\gamma}{\cos \frac{\pi(\gamma-1)}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon_2(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\gamma-\xi-2} d\xi + \hat{G}_{12}(\gamma),$$

$$-2 < \operatorname{Re}(\gamma) - 1 < \operatorname{Re} \xi < -1.$$

Використовуючи теорему Коші (взявши лишок в точці $\xi = \gamma - 1$) одержимо:

$$\hat{G}_1(\gamma) = \frac{\pi\gamma}{\cos \frac{\pi(\gamma-1)}{2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon_1(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\gamma-\xi-2} d\xi + \frac{\Upsilon_1(\gamma-1)}{\pi} \right] + \hat{G}_{12}(\gamma).$$

де $-2 < \operatorname{Re} \xi < \operatorname{Re}(\gamma) - 1 < -1$. Беручи до уваги, що

$$\Upsilon_1(\gamma-1) = \frac{\cos^2 \frac{\pi(\gamma-1)}{2}}{D(\gamma-1)} \left\{ r(\gamma-1) [L_1(\gamma-1) + \right.$$

$$+ \pi r(\gamma-1) L_1(\gamma-1) + \hat{G}_1(\gamma-1)] + L_2(\gamma-1) + \hat{G}_2(\gamma-1) \Big\},$$

функція $\hat{G}_1(\gamma)$ остаточно прийме вигляд

$$\hat{G}_1(\gamma) = r(\gamma-1) \left[\pi L_1(\gamma-1) + \frac{\cos^2 \frac{\pi(\gamma-1)}{2}}{D(\gamma-1)} \left\{ r(\gamma-1) [L_1(\gamma-1) + \right. \right.$$

$$+ \pi r(\gamma-1) L_1(\gamma-1) + \hat{G}_1(\gamma-1)] + L_2(\gamma-1) + \hat{G}_2(\gamma-1) \Big\} + \hat{G}_{12}(\gamma),$$

$$+ \pi r(\gamma-1) L_1(\gamma-1) + \hat{G}_1(\gamma-1)] + L_2(\gamma-1) + \hat{G}_2(\gamma-1) \Big\} + \hat{G}_{12}(\gamma),$$

де $-2 < \operatorname{Re} \xi < \operatorname{Re}(\gamma) - 1 < -1$. Точка $\gamma = 0$ являється полюсом другого порядку. Для обчислення лишку в цій точці можна скористатися наступними розкладами

$$\frac{\cos^2 \pi\gamma/2}{D(\gamma)} \sim -\frac{1}{2\gamma} + \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{\pi}{h} \right)^{\gamma} \sim 1 + \log \frac{\pi}{h},$$

$$\frac{\gamma^2}{D(\gamma-1)} \sim \frac{4}{\pi^2 - 4}, \quad z^{-\gamma} \sim 1 - \gamma \cdot \log z,$$

$$\zeta(1-\gamma) \sim -\frac{1}{\gamma} + \gamma, \quad \gamma \rightarrow 0.$$

Тоді

$$\operatorname{res}_{\gamma=0} F(\gamma) = -\frac{4}{\pi^2 - 4} \left(\log \frac{zh}{\pi} + \gamma + \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right).$$

де

$$F(\gamma) = \left[2 \frac{\cos^2 \pi \gamma / 2}{D(\gamma)} \cdot \frac{\gamma^2}{D(\gamma-1)} \left(\frac{\pi}{h} \right)^\gamma \zeta(1-\gamma) z^{-\gamma} \right].$$

Беручи до уваги, що $r(\gamma) \sim 1 + \gamma$, $\gamma \rightarrow 0$, залишок найдених функцій дорівнює:

$$\text{res}_{\gamma=0} F(\gamma) \cdot r(\gamma) = -\frac{4}{\pi^2 - 4} \left(\log \frac{zh}{\pi} + \gamma + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right).$$

Таким чином функції F_1 та F_2 запишуться у вигляді:

$$F_1(z) = \frac{8z}{\pi^2 - 4} + \frac{4}{\pi^2 - 4} \left[\log \frac{zh}{\pi} + 1 \right] + C + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi \gamma}{2}}{D(\gamma)} \cdot \{r(\gamma) [\pi L_1(\gamma) + r(\gamma) L_2(\gamma) + L_3(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + \hat{G}_1(\gamma)\} z^{-\gamma} d\gamma,$$

$$F_2(z) = \frac{4\pi z}{\pi^2 - 4} + \frac{4}{\pi^2 - 4} \log \frac{zh}{\pi} + C + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi \gamma}{2}}{D(\gamma)} \cdot \{r(\gamma) [L_1(\gamma) + \pi r(\gamma) L_1(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + L_3(\gamma) + \hat{G}_2(\gamma)\} z^{-\gamma} d\gamma,$$

$0 < \text{Re}(\gamma) < 1$, де $\hat{G}_1(\gamma)$ визначена за допомогою формули (13). Функція $G_{12}(z)$ може бути представлена у вигляді

$$G_{12}(z) = \frac{15}{2} z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_2(\mu_n)}{(\mu_n^2 + z^2)^2} + G_{13}(z). \quad (14)$$

Функція $G_{13}(z)$ залишається регулярною в області $\gamma \in (0, 2)$. Таким чином

$$\hat{G}_{13} = \int G_{13}(z) \cdot z^{-\gamma} dz = \frac{15}{8} \frac{\pi(\gamma-1)}{\cos \frac{\pi(\gamma-2)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} F_1(\mu_n) \mu_n^{-\gamma} + \hat{G}_{13}(\gamma)$$

Застосовуючи аналогічну техніку до функції G_{12} одержуємо

$$\hat{G}_{12}(\gamma) = \frac{15}{8} \frac{\pi(\gamma-1)}{\cos \frac{\pi(\gamma-2)}{2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} L_1(z) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-\gamma-1} d\zeta \right] + \hat{G}_{12}(\gamma)$$

$$-2 < \text{Re} \xi < \text{Re}(\gamma) - 2 < -1$$

Підстановка $\Upsilon_2(\gamma-2)$ дає,

$$\hat{G}_{12}(\gamma) = \frac{15}{8} r(\gamma-2) \left[\pi \cdot L_1(\gamma-2) + \frac{\cos^2 \frac{\pi(\gamma-2)}{2}}{D(\gamma-2)} \{r(\gamma-2) [L_2(\gamma-2) + \pi r(\gamma-2) L_1(\gamma-2) + \hat{G}_1(\gamma-2)] + L_3(\gamma-2) + \hat{G}_2(\gamma-2)\} \right] + \hat{G}_{12}(\gamma)$$

Потім, беручи залишок в точці $\gamma = 1$, ми можемо одержати асимптотичну поведінку функцій $F_1(z)$, $F_2(z)$

$$F_1(z) = \frac{8z}{\pi^2 - 4} + \frac{4}{\pi^2 - 4} \left[\log \frac{zh}{\pi} + 1 \right] + C - \frac{3}{4z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi \gamma}{2}}{D(\gamma)} \cdot \{r(\gamma) [\pi L_1(\gamma) + r(\gamma) L_2(\gamma) + L_3(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + \hat{G}_1(\gamma)\} z^{-\gamma} d\gamma.$$

$$F_2(z) = \frac{4\pi z}{\pi^2 - 4} + \frac{4}{\pi^2 - 4} \log \frac{zh}{\pi} + C + \frac{\pi}{2(\pi^2 - 4)z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi \gamma}{2}}{D(\gamma)} \cdot \{r(\gamma) [L_1(\gamma) + \pi r(\gamma) L_1(\gamma) + \hat{G}_1(\gamma)] + L_3(\gamma) + \hat{G}_2(\gamma)\} z^{-\gamma} d\gamma.$$

$$1 < \text{Re}(\gamma) < \gamma^*.$$

Після чого асимптотична поведінку двох наборів невідомих коефіцієнтів може бути представлена формулами

$$x_{14} = -\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - \frac{4}{\pi^2 - 4} \frac{(\log k + 1)}{\beta_k} - \frac{C}{\beta_k} + \text{Re} \frac{C}{\beta_k^{\gamma^*+1}} + \dots,$$

$$y_{14} = -\frac{4\pi}{\pi^2 - 4} - \frac{4}{\pi^2 - 4} \frac{\log \mu_k h / \pi}{\mu_k} - \frac{C}{\mu_k} - \frac{\pi}{2(\pi^2 - 4)\mu_k^2} + \text{Re} \frac{C}{\mu_k^{\gamma^*+2}} + \dots$$

Висновки

В результаті дослідження асимптотичної поведінки невідомих в нескінченній лінійній системі алгебраїчних рівнянь, для стаціонарних Стоксових течій в скінченному циліндрі були одержані аналітичні вирази, що описують асимптотику невідомих. Встановлено, що при спрямуванні індексів системи до нескінченності, невідомі прямують до констант $-2\pi^2/(\pi^2 - 4)$ та $-4\pi/(\pi^2 - 4)$. При цьому другі члени асимптотичного розкладу прямують до 0 як $\frac{\log n}{n}$.

Список використаних джерел

1. V.S. Malyuga, V.V. Meleshko, M.F. Speetjens, H.J.H. Clercx and G.J.F. van Heijst. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container/Proc. R. Soc. A 2002, 458, 1867-1885.
2. V.V. Meleshko, A.M. Gomilko. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle/Proc. R. Soc. A 1997, 453, 2139-2160.
3. V.V. Meleshko, V.S. Malyuga and A.M. Gomilko. Steady Stokes flow in a finite cylinder/Proc. R. Soc. A 2000, 456, 1741-1758.
4. Г.Н. Ватсон. Теория бesselовых функций. Честь преемник. Москва 1949.

Надійшла до редколегії 25.01.2012

УДК 539.3

Горошко О. О., д.ф.-м.н. проф.,
Кикоть* С. В., к.ф.-м.н.**Нелінійні коливання гнучкого
трубопроводу з потоком рідини
з нульовим початковим натягом**

У статті досліджуються коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною з нульовим початковим натягом. Для постановки задачі та побудови розв'язку нелінійних рівнянь використовується гіпотеза Кірхгофа та прямі методи математичної фізики. Результати аналітично-чисельного дослідження представлені графічно у вигляді залежностей частоти власних коливань від швидкості руху рідини, при фіксованих значеннях амплітуди відхилення. Встановлені значення критичних швидкостей.

Ключові слова: гнучкий трубопровід, двошвидковий колиний процес, критична швидкість.

*E-mail: s.v.kykot@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Перестек М.О.

Вступ. Клас конструкцій і споруд, які зазнають впливу рухомих навантажень, різних за природою і характером дії, надзвичайно широкий [1,2]: від балок і пластин, мостів та трубопроводів, ремінних передач, стрічкових пилос, канатів у підіймально-транспортних пристроях та до залізничних шляхів, аеродромного покриття, несучого льодового покриття, розвитку освоєння багатств морів та океанів [3]. Тому задачі динамічного розрахунку конструкцій на рухоме навантаження набувають все більшого значення і знаходять найрізноманітніші застосування в інженерній практиці.

Перші теоретичні і експериментальні дослідження з динаміки пружних систем з рухомих навантаженим почали з'являтися в середині XIX століття.

До дослідження задач про коливання трубопроводу з нульовим (малим) початковим натягом приводять дослідження стійкості руху гнучкого трубопроводу на гладкій поверхні, плаваючих трубопроводів, закріплених на віброуючих об'єктах, і ряд інших прикладних використань гнучких трубопроводів.

Класичні задачі про нелінійні коливання струн з нульовим натягом започатковані

Oleg O. Goroshko, Dr.Sc., Professor,
Sergiy V. Kykot*, Ph.D.,**Nonlinear oscillations of a flexible conduit
with fluid flow at zero starting tension**

The paper is devoted to investigations of the oscillations of a flexible conduit with fluid flow at zero starting tension. The Kirchhoff hypothesis and direct methods of mathematical physics are used for the problem formulation and construction of nonlinear equations solutions. Results of analytically-numerical investigations are presented as plots of natural-vibration frequency versus fluid flow velocity at fixed values of deviation amplitude. The critical velocities values are obtained.

Key words: synthetic conduit, double wave oscillation process, critical velocity.

Р. Кірхгофом (1897р.) і узагальнені в монографії Г. Каудерера [4]. Рівняння нелінійних коливань струни представлені у формі

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{EF}{2l} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Тут натяг струни виникає внаслідок її пружного видовження при поперечному деформуванні. У відповідності з гіпотезою Кірхгофа [4] при обчисленні $T(u')$, опускаючи залежність натягу від часу, отримаємо

$$T(u') = -\frac{EF}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2)$$

Коливання струни з частотою основного тону описується рівнянням

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{\pi^2}{\rho l^2} \left(\frac{\pi^2 EF}{4l^2} q_1^2 \right) q_1(t) = 0. \quad (3)$$

Нелінійні коливання струни з частотою основного тону [4] описуються рівнянням

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{\pi^4 EF}{4 \rho l^4} q_1^3(t) = 0. \quad (4)$$

За допомогою інтегрування рівняння (4) в спеціальних функціях Г. Каудерер [4] отримав точне значення частоти

$$\omega = 4,174 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}}. \quad (5)$$

Наближений розв'язок рівняння (4) можна отримати також методом Б.Г. Гальоркіна [5]. Представляючи розв'язок рівняння (4) у формі $q_1(t) = a \sin \omega t$ у відповідності з цим методом отримасмо

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{4} \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}} = 4,274 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}}, \quad (6)$$

тобто частота власного коливання пропорційна амплітуді a .

Наближене значення частоти (по Гальоркіну) (6) на 2,4% відрізняється від точного розв'язку (5).

Корисно представити також значення частоти поперечних коливань (6) у формі

$$\omega = 1,36 \frac{a}{l} \Omega, \quad \text{де} \quad \Omega = \pi \sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}} - \text{частота}$$

подовжніх коливання струни закріпленої на кінцях.

В роботі розглядається ускладнена задача про коливання трубопроводу з рухомою рідиною та нульовим натягом при наявності коріолісових та центробіжних сил інерції протікаючої рідини.

Особливості динамічних процесів в гнучких системах розглянуті в працях [6,7,8].

Метою роботи є теоретичне вивчення впливу параметрів рухомого навантаження (потіку рідини) на нелінійні коливання гнучкого трубопроводу з нульовим початковим натягом.

Постановка і розв'язання задачі.

При коливанні трубопроводу виникає його додатковий натяг, що обумовлений пружним видовженням осової лінії при поперечному відхиленні від початкового нульового положення. Натяг труби визначається через

$$a[-\rho \omega^2 - 2\rho_2 v \omega \gamma + (T(u) - \rho_2 v^2)(\lambda^2 + \gamma^2)] \sin \lambda x \cos \psi + a[-2\rho_2 v \omega \lambda + 2\lambda \gamma (T(u) - \rho_2 v^2)] \cos \lambda x \sin \psi = 0. \quad (10)$$

Множники $\sin \lambda x \cos \psi$ та $\cos \lambda x \sin \psi$ ні при яких значеннях фазового кута одночасно не

подовжню жорсткість трубопроводу EF співвідношенням (2).

В загальному випадку [4] натяг T представляється сумою $T = T(u) \pm T_0$, де T_0 - початковий натяг або послаблення закріплення трубопроводу.

В такій постановці рівняння коливань гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною має вигляд

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (T(u) - \rho_2 v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

де $\rho = \rho_1 + \rho_2$ - погонна маса шланга і потоку рідини, $u = u(x, t)$ - поперечний прогин під дією рухомої рідини з врахуванням сил інерції, v - швидкість потоку рідини, $T(u)$ - натяг, що виникає внаслідок видовження трубопроводу при відхиленні від початкового нульового положення.

Проведемо дослідження коливань з частотою основного тона. В роботах [6,7] встановлено двохвиловий характер динамічних процесів в конструкціях з рухомих інерційним навантаженням з яким розв'язок рівняння (7) представимо у формі

$$u(x, t) = a \sin \lambda x (\cos \gamma x \cos \omega t - \sin \gamma x \sin \omega t),$$

або

$$u(x, t) = a \sin \frac{\pi x}{l} \cos \psi(x, t), \quad (8)$$

де $\psi(x, t) = \gamma x + \omega t$ - фазовий кут, $\lambda = \frac{\pi}{l}$.

У відповідності з гіпотезою Кірхгофа [4] при обчисленні $T(u)$ за допомогою виразу (2) та представлення розв'язку у формі (8), отримасмо

$$T(u) = \frac{EFa^2}{4} [\lambda^2 \cos^2 \psi + \gamma^2 \sin^2 \psi]. \quad (9)$$

Підставляючи в рівняння руху (7) прогин $u(x, t)$ та натяг $T(u)$, представлений в формі (8) та (9) отримасмо

набувають нульових значень. Виконання умови (10) можливе лише при умовах:

$$[-\rho\omega^2 - 2\rho_2 v_0 \gamma + (T(u) - \rho_2 v^2)(\lambda^2 + \gamma^2)] \sin \lambda x \cos \psi = 0$$

$$[-2\rho_2 v_0 \lambda + 2\lambda \gamma (T(u) - \rho_2 v^2)] \cos \lambda x \sin \psi = 0, \quad (11)$$

накладених на фазову функцію $\psi(x, t)$.

Застосуємо для побудови розв'язку нелінійних рівнянь (11) метод Б.Г. Гальоркіна [5]. Домножаючи перше рівняння на $\sin \lambda x \cos \psi dx d\psi$, друге на $\cos \lambda x \sin \psi dx d\psi$ та інтегруючи в межах $0 < x < l$, $0 < \psi < 2\pi$, отримаємо два рівняння для визначення частоти коливань ω та експеси γ .

$$-\rho\omega^2 - 2\rho_2 v_0 \gamma + \left(\frac{EFa^2}{16} (3\lambda^2 + \gamma^2) - \rho_2 v^2 \right) (\lambda^2 + \gamma^2) = 0,$$

(12)

$$-\rho_2 v_0 \gamma + \left(\frac{EFa^2}{16} (\lambda^2 + 3\gamma^2) - \rho_2 v^2 \right) \gamma = 0.$$

$$9h^4 \theta^6 + 2h^2 [3(h^2 - 16v_0^2) + 40k_2 v_0^2] \theta^4 + [16v_0^2 (16v_0^2 (1 - k_2) - 2h^2 (1 + k_2)) + h^4] \theta^2 + 16k_2 v_0^2 (16v_0^2 - 3h^2) = 0, \quad (14)$$

$$\omega_{1,2} = -v_0 \sqrt{k_2} \theta \pm \sqrt{v_0^2 k_2 \theta^2 + [(0.25h)^2 (3 + \theta^2) - v_0^2] (1 + \theta^2)}.$$

На рис. 1.а,б зображено графіки залежностей безрозмірних параметрів частоти коливань ω_0 від параметра швидкості руху потоку рідини v_0 , при фіксованих значеннях безрозмірного параметра амплітуди відхилення h (1 - $h = 0,1$; 2 - $h = 0,2$; 3 - $h = 0,3$) та значенні погонних мас трубопроводу і рухомої рідини $\rho_2 = 2\rho_1$.

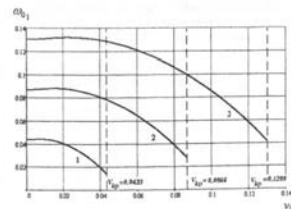


Рис. 1.а. Залежність ω_{01} від v_0 при фіксованих значеннях h .

В безрозмірних параметрах: $\theta = \gamma \frac{l}{\pi} = \frac{\gamma}{\lambda}$,

$$h = \frac{a}{l}, \quad k_2 = \frac{\rho_2}{\rho}, \quad v_0^2 = \frac{\rho_2 v^2}{EF \pi^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{\rho l^2 \omega^2}{EF \pi^4}$$

система (12) набуває вигляду

$$-16\omega_0^2 - 32\omega_0 v_0 \sqrt{k_2} \theta + [h^2 (3 + \theta^2) - 16v_0] (1 + \theta^2) = 0, \quad (13)$$

$$16\omega_0 v_0 \sqrt{k_2} + [h^2 (1 + 3\theta^2) - 16v_0] \theta = 0;$$

розв'язок якої записується у формі

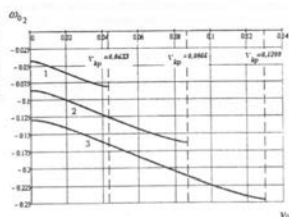


Рис. 1.б. Залежність ω_{02} від v_0 при фіксованих значеннях h .

При зростанні параметра швидкості, значення частот зменшуються, набувають найменших значень, що вказує на існування першої критичної швидкості яка відповідає втраті прямолінійної форми рівноваги під дією центробіжних сил рухомого навантаження.

$$v_{0кр} = \frac{\sqrt{3}}{4} h. \quad (15)$$

Значення критичної швидкості в розмірних параметрах визначаються за формулою

$$v_{kp} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}} a. \quad (16)$$

При швидкості $v=0$, ексцес $\gamma=0$ та нульовому початковому натягу $T_0=0$ частота власних коливань пропорційна амплітуді a і визначається формулою

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{4} \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}}. \quad (17)$$

Цей результат співпадає з класичним [1], що представлений формулою (6).

Після визначення частоти коливань ω та ексцесу у розв'язок подається формулою (8).

Висновки. Отримані результати аналітично-чисельного дослідження нелінійних коливань гнучкого трубопроводу з нульовим початковим натягом дають можливість сформулювати такі висновки:

При швидкості $v=0$, частота власних коливань пропорційна амплітуді відхилення a . Із збільшенні швидкості руху рідини має місце нелінійний характер залежності частоти власних коливань від швидкості руху рідини.

При швидкості руху рідини $v > \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \sqrt{\frac{EF}{\rho l^2}} a$ трубопровід втрачає прямолинійну форму під дією центробіжних сил, що унеможлиблює коливний рух.

Список використаних джерел

1. Пановко Я. Г. Колебания в механических системах / Я. Г. Пановко, М. З. Коловский // Развитие общей механики в России и Украине в 20-80-е годы XX века. – М. : Наука; К. : Феникс, 1998. – С. 211–232.
2. Якушев Н. З. Динамика, деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок. Ч. 3, гл. 1. Динамика балок, стержней и арок под действием подвижных нагрузок / Н. З. Якушев // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1985 – Вып. 18. – С. 3–56.
3. International Offshore (Ocean) and Polar Engineering Conference [Електронний ресурс] – Режим доступу до журн.: <http://www.isopec.org>.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика: [перевод с немецкого Я. Г. Пановко] / Г. Каудерер – М. : Изд. иностранной литературы, 1961 – 778с.
5. Бабаков И. М. Теория колебаний / Бабаков И. М. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
6. Горошко О. О. Двухвильові процеси в механічних системах / Горошко О. О., Дем'яненко А. Г., Киба С. П. – К. : Либідь, 1991. – 188 с.
7. Горошко О. О. Одночастотні динамічні процеси в системах з рухомим інерційним навантаженням / О. О. Горошко, С. В. Кикоть // Комплексний аналіз і течії з вільними границями. К.: Ін-т математики, 2010. – Т. 7, № 2. – С. 347–356. – (Праці / Ін-т математики НАН України).
8. Василевський Ю. Е. Нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною в околі критичних швидкостей течії / Ю. Е. Василевський, О. С. Лимарченко // Вісник Київського університету. Серія : фіз.-мат. науки. – 2009. – № 1. – С. 41–46.

Надійшла до редколегії 12.01.2012

УДК 539.3

Григоренко О.Я., д.ф.-м.н., проф., Вовкодів
О.В., ас., Яремченко С.М., к.ф.-м.н., с.н.с.**Напружено-деформований стан нетонких
сферичних оболонок змінної товщини при
різних способах закріплення країв.**

Розроблено підхід до дослідження напружено-деформованого стану нетонких сферичних оболонок змінної товщини, що базується на гіпотезі прямої лінії. За допомогою метода сплайн-колокації зведено двовимірну крайову задачу, яка описує напружено-деформований стан оболонки, до одновимірної, а одновимірну крайову задачу розв'язано методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз напружено-деформованого стану оболонок в залежності від граничних умов.

Ключові слова: сферична оболонка, змінна товщина, напружено-деформований стан.

E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru, oxanaukr2111@hotmail.com, yaremch@gmail.com

Статтю представив член редколегії акад. НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

В сучасній техніці для створення надміцних та наднадійних конструкцій широко застосовуються сферичні оболонки змінної товщини. Для оцінки міцності та надійності таких конструкцій потрібно знати характеристики їх напружено-деформованого стану. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці ефективних методів та підходів до розрахунку оболонок даного класу.

В даній статті розглядається напружено-деформований стан нетонких ортотропних сферичних оболонок товщина яких змінюється в двох координатних напрямках при різних видах закріплення їх сторін. Дослідження проводяться в рамках неklasичної теорії оболонок на основі уточненої моделі прямолінійного елемента [1, 2, 4].

Слід відмітити, що задачам статички сферичних оболонок сталої товщини присвячена значна кількість робіт, тоді як задачам про напружено-деформований стан сферичних оболонок змінної товщини в уточненій постановці присвячено небагато робіт.

В даній роботі для розв'язання поставленої задачі запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який базується на зведенні двовимірної

Grigorenko A.Ya., prof., Vovkodav O.V., PhD student, Yaremchenko S.N., Ph.D.

Stress-strain state of non-thin variable thickness spherical shells on various types of fixing the ends.

The approach based on straight line hypothesis is developed for investigation of stress-strain state of not thin spherical shells with variable thickness. Using the spline collocation method the two-dimensional boundary value problem, which describes stress-strain state of shell, was reduced to one-dimensional and the one dimensional boundary value problem was solved by stable numerical discrete orthogonalization method. The shells stress-strain state analysis was carried out in dependency on boundary condition.

Key words: spherical shell, variable thickness, stress-strain state.

крайової задачі до системи звичайних диференціальних рівнянь з допомогою застосування методу сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків [3]. Отримана одновимірна крайова задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Запропонована методика достатньо апробована, і ефективно використовується для розв'язання як статичних так і динамічних задач [5, 6].

2. Постановка задачі

Розглянемо нетонкі ортотропні сферичні оболонки змінної в двох координатних напрямках товщини в уточненій постановці, що базується на гіпотезі прямої лінії. Оболонка віднесена до ортогональної системи координат θ, φ, γ , де θ, φ – сферичні координати, а γ – нормальна до поверхні зведення координата. За прийнятою гіпотезою переміщення оболонок представимо у вигляді

$$u_\theta(\theta, \varphi, \gamma) = u(\theta, \varphi) + \gamma \psi_\theta(\theta, \varphi);$$

$$u_\varphi(\theta, \varphi, \gamma) = v(\theta, \varphi) + \gamma \psi_\varphi(\theta, \varphi);$$

$$u_\gamma(\theta, \varphi, \gamma) = w(\theta, \varphi), \quad (1)$$

де $u_\theta, u_\varphi, u_\gamma$ – відповідні переміщення; u, v, w – переміщення точок координатної

поверхності в напрямках θ, φ, γ ; $\psi_\theta, \psi_\varphi$ – повні кути повороту прямолінійного елемента. У відповідності з (1) вирази для деформації записуються у вигляді

$$e_\theta(\theta, \varphi, \gamma) = \varepsilon_\theta(\theta, \varphi) + \gamma \kappa_\theta(\theta, \varphi);$$

$$e_\varphi(\theta, \varphi, \gamma) = \varepsilon_\varphi(\theta, \varphi) + \gamma \kappa_\varphi(\theta, \varphi);$$

$$e_{\theta\varphi}(\theta, \varphi, \gamma) = \varepsilon_{\theta\varphi}(\theta, \varphi) + \gamma 2\kappa_{\theta\varphi}(\theta, \varphi);$$

$$e_{\theta\gamma}(\theta, \varphi, \gamma) = \gamma_\theta(\theta, \varphi); \quad e_{\varphi\gamma}(\theta, \varphi, \gamma) = \gamma_\varphi(\theta, \varphi), \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \theta \right) + \frac{w}{r};$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \cos \theta \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta};$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \right);$$

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \cos \theta \left(\psi_\theta - \frac{u}{r} \right) \right) - \frac{w}{r^2};$$

$$2\kappa_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \varphi} + \cos \theta \left(\frac{v}{r} - \psi_\varphi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right);$$

$$\gamma_\theta = \psi_\theta - \vartheta_\theta; \quad \gamma_\varphi = \psi_\varphi - \vartheta_\varphi; \quad \vartheta_\theta = \frac{1}{r} \left(u - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right);$$

$$\vartheta_\varphi = \frac{1}{r} \left(v - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \quad (3)$$

$\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$ – тангенціальні $\varepsilon_{\theta\varphi}$ – зсувна деформації, а $\kappa_\theta, \kappa_\varphi, \kappa_{\theta\varphi}$ – деформації згину та скручення деформації координатної поверхні; $\vartheta_\theta, \vartheta_\varphi$ – кути повороту нормалі без врахування поперечних зсувів; $\gamma_\theta, \gamma_\varphi$ – кути повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

Рівняння рівноваги має вигляд:

$$\cos \theta (N_\theta - N_\varphi) + \sin \theta \left(\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + Q_\theta \right) + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \cos \theta N_{\theta\varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + Q_\varphi \right) = 0;$$

$$\cos \theta Q_\theta + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta - N_\varphi + r q_r \right) = 0;$$

$$\cos \theta (M_\theta - M_\varphi) + \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta \right) = 0;$$

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \cos \theta M_{\theta\varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r Q_\varphi \right) = 0. \quad (4)$$

де $N_\theta, N_\varphi, N_{\theta\varphi}, N_{\varphi\theta}$ – тангенціальні зусилля; Q_θ, Q_φ – перерізуючі зусилля; $M_\theta, M_\varphi, M_{\theta\varphi}, M_{\varphi\theta}$ – згинаючі та скручуючі моменти.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок симетричної структури по товщині відносно вибраної координатної поверхні мають вигляд:

$$N_\theta = C_{11}\varepsilon_\theta + C_{12}\varepsilon_\varphi; \quad N_\varphi = C_{12}\varepsilon_\theta + C_{22}\varepsilon_\varphi;$$

$$N_{\theta\varphi} = C_{66}\varepsilon_{\theta\varphi} + 2k_2 D_{66}\kappa_{\theta\varphi};$$

$$N_{\varphi\theta} = C_{66}\varepsilon_{\varphi\theta} + 2k_1 D_{66}\kappa_{\varphi\theta};$$

$$M_\theta = D_{11}\kappa_\theta + D_{12}\kappa_\varphi; \quad M_\varphi = D_{12}\kappa_\theta + D_{22}\kappa_\varphi;$$

$$M_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta\varphi};$$

$$Q_\theta = K_1\gamma_\theta; \quad Q_\varphi = K_2\gamma_\varphi. \quad (5)$$

$$C_{11} = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_\theta \nu_\varphi}; \quad C_{12} = \nu_\varphi C_{11}; \quad C_{22} = \frac{E_\varphi h}{1 - \nu_\theta \nu_\varphi};$$

$$C_{66} = G_{\theta\varphi} h; \quad D_{11} = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_\theta \nu_\varphi)}; \quad D_{12} = \nu_\varphi D_{11};$$

$$D_{22} = \frac{E_\varphi h^3}{12(1 - \nu_\theta \nu_\varphi)}; \quad D_{66} = \frac{G_{\theta\varphi} h^3}{12};$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h G_{\theta\gamma}; \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{\varphi\gamma}. \quad (6)$$

У формулах (6) $E_\theta, E_\varphi, \nu_\theta, \nu_\varphi$ – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона в напрямках θ і φ ; $G_{\theta\varphi}, G_{\theta\gamma}, G_{\varphi\gamma}$ – модулі зсуву; $h = h(\theta, \varphi)$ – товщина оболонки.

За розв'язувальні функції виберемо компоненти вектора переміщень u, v, w та повні кути повороту $\psi_\theta, \psi_\varphi$. Після певних перетворень з вказаних основних рівнянь уточненої теорії оболонок отримуємо систему п'яти розв'язувальних рівнянь в частинних похідних другого порядку зі змінними коефіцієнтами, які скорочено можна записати так:

$$L\bar{U} = 0 \quad (7)$$

де L – лінійний диференціальний оператор другого порядку, а $\bar{U}$ – вектор з компонентами

$\{u, v, w, \psi_\theta, \psi_\varphi\}$. Додавши до (7) граничні умови на границі оболонки отримаємо двовимірну крайову задачу.

3. Метод розв'язання

Оскільки в систему (7) входять похідні від розв'язувальних функцій по координаті φ не

вище другого порядку. Тому при апроксимації розв'язку по координаті φ можна обмежитись сплайн-функціями третього степеня. Шукаючи розв'язок крайової задачі для системи рівнянь (7) з відповідними граничними умовами представимо у вигляді [4, 8, 9, 10]:

$$\bar{U} = \sum_{j=0}^N \bar{a}_j(\theta) * \bar{\phi}_j(\varphi). \quad (11)$$

де $a_j = u_j(\theta), v_j(\theta), w_j(\theta), \psi_{\theta j}(\theta), \psi_{\varphi j}(\theta)$ – шукані функції змінної θ , $\phi_j(\varphi)$ ($i = \overline{1,5}$) – лінійні комбінації B-сплайнів на рівномірній сітці $\Delta: 0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_N = b$, що точно задовольняють граничні умови на контурах $\varphi = 0$ і $\varphi = b$. Тут * позначено покомпонентне множення векторів.

Підставляючи вирази (11) в розв'язувальні рівняння (10) і граничні умови та використовуючи метод сплайн-колокації, будемо вимагати точного їх задоволення в $N+1$ точках колокації $\xi_k \in [0, b], k = \overline{0, N}$. В результаті отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку $10(N+1)$, яку можна представити в нормальній формі Коші у вигляді:

$$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = A(\theta)\bar{R} + \bar{f}(\theta) \quad (12)$$

де $\bar{R}$ – шукана вектор-функція; $\bar{f}(\theta)$ – вектор правих частин; $A(\theta)$ – квадратна матриця.

4. Результати розрахунків

За допомогою розробленого чисельно-аналітичного підходу було розв'язано задачу про напружено-деформований стан сферичної ізотропної, замкненої в напрямку паралелі оболонки, що знаходиться під дією рівномірного нормального тиску $q = q_0 = \text{const}$. Радіус оболонки $r = 20$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга E_0 . Товщина оболонки змінюється за законом: $h = (1 + 0,5 \cos \varphi)$. У даному випадку в точках $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$ можна використати умови симетрії:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \nu = 0, \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \varphi} = 0, \psi_{\varphi} = 0.$$

Було розглянуто 4 види закріплення контурів вздовж параметра θ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$):

(1) обидва край шарнірно оперті

$$N_{\theta} = 0, M_{\theta} = 0, v = w = 0, \psi_{\varphi} = 0$$

при $\theta = \theta_1$ і $\theta = \theta_2$;

(2) обидва край жорстко закріплені

$$u = v = w = 0, \psi_{\theta} = \psi_{\varphi} = 0 \text{ при } \theta = \theta_1 \text{ і } \theta = \theta_2;$$

(3) один край жорстко закріплений, інший шарнірно опертий

$$u = v = w = 0, \psi_{\theta} = \psi_{\varphi} = 0 \text{ при } \theta = \theta_1,$$

$$N_{\theta} = 0, M_{\theta} = 0, v = w = 0, \psi_{\varphi} = 0 \text{ при } \theta = \theta_2;$$

(4) один край жорстко закріплений, інший шарнірно закріплений

$$u = v = w = 0, \psi_{\theta} = \psi_{\varphi} = 0 \text{ при } \theta = \theta_1,$$

$$M_{\theta} = 0, u = v = w = 0, \psi_{\varphi} = 0 \text{ при } \theta = \theta_2$$

На рис. 1–4 показано як змінюється прогин в залежності від варіанта закріплення контурів $\theta = \text{const}$. На рис. 1 і 2 показано прогини для оболонки де

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \text{ на рис 3 і 4}$$

$$\frac{2\pi}{5} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{5}, \text{ причому на рис 1 і 3 показано}$$

значення у перерізі $\varphi = 0$, а на рис. 2 і 4 – при $\varphi = \pi$.

Очевидно, що прогини в перерізі $\varphi = \pi$ більші ніж на протилежному боці оболонки, адже в цьому перерізі оболонка втричі тонша, ніж при $\varphi = 0$. Слід також зауважити, що кількісні якісні характеристики прогину суттєво змінюються залежно від виду закріплення країв. Для оболонки де

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \text{ найбільш цікавим є}$$

випадок 3. У цьому випадку хоч правий край шарнірно опертий, а лівий жорстко закріплений, максимальні прогини спостерігаються навпаки біля лівого краю. Якщо ж правий край шарнірно закріпити (випадок 4), то максимальні прогини будуть уже біля правого краю. Для вужчої сферичної оболонки

$$\frac{2\pi}{5} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{5} \text{ для 3-го}$$

варіанта закріплення максимальні прогини будуть саме біля шарнірно опертого краю. Також можна відзначити, що максимальні прогини у

$$\text{вужчій оболонці } \frac{2\pi}{5} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{5} \text{ будуть для всіх}$$

варіантів закріплення більші, ніж для оболонки де $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ як у перерізі $\varphi = \pi$ так і при $\varphi = 0$.

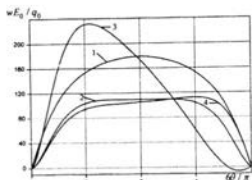


Рис. 1 Розподіл прогинів вздовж меридіана для оболонки $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ при $\varphi = 0$.

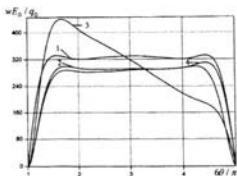


Рис. 2 Розподіл прогинів вздовж меридіана для оболонки $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ при $\varphi = \pi$.

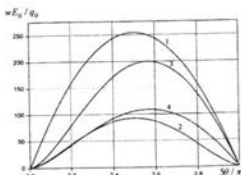


Рис. 3. Розподіл прогинів вздовж меридіана для оболонки $\frac{2\pi}{5} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{5}$ при $\varphi = 0$.

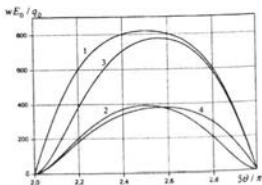


Рис. 4. Розподіл прогинів вздовж меридіана для оболонки $\frac{2\pi}{5} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{5}$ при $\varphi = \pi$.

Список використаних джерел

1. Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.; Л.: Гл. изд. техн.-теор. лит., 1949. – 784 с.
2. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. / Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
3. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Ю.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 246с.
5. Grigorenko A.Ya., Mal'sev S.A. Natural vibrations of thin conical panels of variable thickness // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 11. – P.1221- 1231.
6. Grigorenko A.Ya., Parkhomenko A.Yu. Free vibrations of shallow nonthin shells with variable thickness and rectangular platform// Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, №8. – p. 877 - 889.

Надійшла до редколегії 14.12.2012

УДК 539.595

Губська В.В., аспірант
Лимарченко О.С., доктор технічних наук,
професор

**Задача про вимушені нелінійні коливання
резервуару у формі усіченого конуса, частко-
во заповненого рідиною**

Досліджується задача виходу системи на
усталений режим. Система складається з резер-
вуару у формі усіченого конуса і рідини з віль-
ною поверхнею. Поведінка системи розгля-
дається в рамках нелінійної моделі на трива-
лому проміжку часу при гармонічному збу-
дженні руху системи періодичною силою, при-
кладеною до резервуару. Показано, що не для
всіх діапазонів частот збудження спостеріга-
ються чисто періодичні рухи.

Ключові слова: нелінійна динаміка, вільна
поверхня рідини, вихід на усталений режим.

*E-mail: ViktoriaGubskaya@gmail.com, Olelim2010@yahoo.com

Статтю представив член реколегії професор М.О. Перестюк

Вступ

Розглядається задача динаміки рідини з
вільною поверхнею в резервуарі у формі
оберненого усіченого конуса. Поставлено задачу
дослідити вихід системи на усталений режим в
рамках багатомодової нелінійної моделі.

У відомих роботах [2, 4, 5] для дослідження
усталених коливань використовувались лише
малорозмірні моделі. Такі дослідження прово-
дилися за припущенням, що коливання в системі
відбуваються лише з частотами кратними частоті
вимушених коливань. Проте експериментальні
дослідження [3, 6] показали, що при збудженні
коливань за основним тоном обов'язково від-
бувається збудження вищих гармонік спектру зі
своїми власними частотами, які можуть бути не
кратними частоті збудження системи. В роботі
[6] для випадку резервуару прямокутної форми
показано, що в реальних системах вихід на
усталений режим коливань вільної поверхні не
проявляється в чистому вигляді.

Для вивчення задачі використано модель [1],
яка була протестована на прикладі перехідних
процесів для задач динаміки резервуару у формі
тіла обертається з рідиною з вільною поверхнею.
Ставиться задача дослідити на довгому проміжку
часу поведінку системи при гармонічному
збудженні руху силою, прикладеною до резерву-

Gubskaya V.V., postgraduate student
Limarchenko O.S., doctor of engineering, professor

**Problem of forced oscillations of tank of trun-
cated conic shape, partially filled by liquid**

The problem about attainment of the system on
stationary mode is under consideration. The system
consists of reservoir in the form of truncated cone
and liquid with a free surface. Behavior of the sys-
tem is considered within the framework of nonlinear
model over the long period of time under periodic
force, applied to the reservoir. It was shown that
not for all ranges of excite frequency purely peri-
odic motions are manifested.

Key Words: nonlinear dynamics of liquid, free
surface of liquid, attainment on stationary mode.

ару. Поведінку системи розглянуто для частот в
дорезонансному діапазоні, в малому околі
резонансної частоти, а також для частот більших
за резонансні.

Диференціальні рівняння руху системи

Математична модель, отримана на основі [1],
представлена в амплітудних параметрах a_i
коливань рідини та руху резервуару $\vec{e}$:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{e}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_i, t),$$

$$r = 1, N+3 \quad (1)$$

При цьому коефіцієнти p_{rn} визначаються
через алгебраїчні форми від першого до третього
порядку з коефіцієнтами, які визначаються через
квадратури від форм коливань (координатних
функцій). Для побудови координатних функцій
був використаний метод допоміжної області,
який на відміну від класичного методу враховує
виконання умови неперетікання вище рівня не-
збудженої вільної поверхні. Для оцінки точності
отриманого розв'язку наведемо результати визна-
чення відносної похибки виконання умови непе-
ретікання для оберненого усіченого конуса з ра-
діусом нижньої основи 0,2 м, радіус верхньої
основи 1 м. Похибка приймалася у вигляді

$\delta = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \bigg|_{z_0} / \max \frac{\partial \varphi}{\partial n} \bigg|_{z_0}$, де знаменник відповідає мак-

симальному збуренню на вільній поверхні рідини. Результати визначення похибок порівнювалися з класичним методом [2, 3].

Класичний метод

форма резервуару	R=0,2					
номер форми	m=0 k=1	m=0 k=2	m=1 k=1	m=1 k=2	m=2 k=1	m=2 k=2
чисельний параметр	2.148050	0.487967	1.131083	4.704048	1.984960	2.803285
δ в середі	-0.000237	0.024315	-0.003675	0.000802	-0.000534	-0.000032
δ на дні	0.001008	-0.054538	0.029306	-0.006273	0.002205	0.000144
δ при $r=0,2$	0.000114	-0.025981	-0.000531	0.000103	-0.000532	-0.000003
δ при $r=0$	-0.001197	0.282965	-0.003276	0.000428	-0.001362	-0.000081
δ при $r=0,2$	-0.998571	1.197026	0.999044	2.187511	-1.208301	0.983349
	-0.281891					

Модифікований метод

форма резервуару	R=0,2					
номер форми	m=0 k=1	m=0 k=2	m=1 k=1	m=1 k=2	m=2 k=1	m=2 k=2
чисельний параметр	0.264940	0.964778	1.130620	3.210533	1.984788	2.803937
δ в середі	-0.000111	0.000096	-0.000122	0.002642	-0.000390	-0.000018
δ на дні	0.000605	-0.000790	0.031848	-0.013732	0.002222	0.000125
δ при $r=0,2$	0.000000	-0.000036	0.000234	-0.000107	0.000007	0.000003
δ при $r=0$	-0.000008	-0.000123	0.000506	0.000241	0.000005	-0.000007
δ при $r=0,2$	-0.000106	-0.001848	0.003752	-0.001644	0.000028	-0.000096

З результатів видно, що отримані функції з точністю 10^{-3} і вище задовольняють умові неперетікання на стінці, і з точністю порядку 10^{-3} на продовженні стінки над вільною поверхнею. За методом допоміжної області похибки виконання умови неперетікання вище рівня вільної поверхні вдалося покращити в 100-500 разів відносно класичного методу. При розв'язанні реальних задач похибки будуть в 5-10 разів менше, оскільки амплітуди коливань не перевершують 0,15-0,2.

Вихід системи на усталений режим

Розглянемо усічений конічний резервуар з радіусом нижньої основи 0,2 м. Рідина припускається ідеальною і нестисливою. Відношення маси резервуару до маси рідини 0,01. Коливання резервуару відбуваються під дією зовнішньої періодичної сили, що має амплітуду зміни $0,5 \text{ м/с}^2$ на одиницю маси системи. Рух резервуару відбувається тільки в горизонтальній площині. Розглядається поведінка системи за 50-80 періодів коливань по головній формі. Проаналізуємо амплітуди збурень рідини на стінці резервуару в часі.

Розглянемо випадок коливань з частотою, близькою до резонансної, для першого випадку вона становить 3,328 1/с. На графіку показано розвиток коливань на періоді до 150 с (приблизно 80 періодів коливань за першою формою).

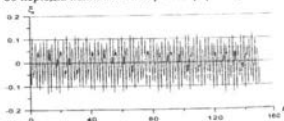


Рис.1 Зміна амплітуди збурень рідини з часом

З графіка видно, що коливання відбуваються з помітною модуляцією при практично незмінному середньому значенні амплітуд.

Для більш детального вивчення на графіках 1 а, 1 б, 1 в, 1 г розглянуті зміни амплітуд на менших інтервалах часу. На графіку 1 а часовий проміжок являє собою інтервал 60-80 с, на графіку 1 б – 80-100 с, Рис.1 в – 100-120 с, Рис.1 г – 120-150 с.

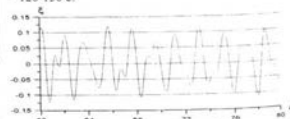


Рис.1 а Часовий проміжок 60-80 с

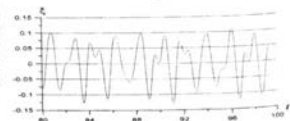


Рис.1 б Часовий проміжок 80-100 с

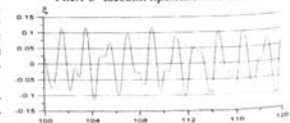


Рис.1 в Часовий проміжок 100-120 с

З графіків видно, що усталені коливання в системі практично не спостерігаються, а закон коливань по першій формі істотно спотворений більш високими гармоніками спектру (проявляються супергармоніки та двогорбі піки).

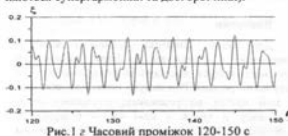


Рис.1 з Часовий проміжок 120-150 с

На фоні квазіперіодичного процесу, що практично співпадає з частотою коливань по першій формі спостерігається істотний прояв вищих форм з періодами не кратними періоду зовнішнього збудження, що в кінцевому підсумку приводить до того, що усталені форми коливань не будуть спостерігатися.

Розглянемо випадок, коли частота зовнішнього збудження більша за резонансну і становить 5 1/с, амплітуда для даного прикладу була прийнята 0,2 м.

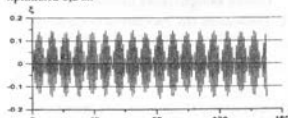


Рис.2 Зміна амплітуди збуджень рідини з часом

Загальна картина розвитку процесу відбувається при вираженій модуляції та практично незмінному середньому значенні амплітуди (Рис. 2). На графіках 2 а, 2 б, 2 в, 2 г більш детально показано зміну амплітуд на менших часових проміжках.

З малюнків видно, що вплив вищих гармонік значно слабше, ніж в попередньому випадку (супергармоніки та двогорбі піки зустрічаються рідше), спостерігається модуляційна періодичність з періодом приблизно шість періодів першої форми.

Розглянуто також випадок, коли частота зовнішнього збудження менша за резонансну і становить 2 1/с.

Для дорезонансного випадку спостерігається зміна середнього значення амплітуди коливань,

також можна відмітити значний вплив вищих гармонік на коливальний процес.

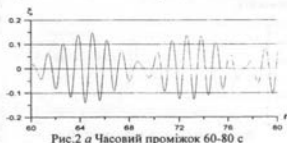


Рис.2 а Часовий проміжок 60-80 с

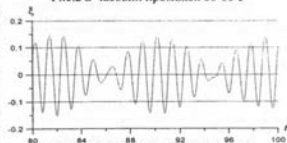


Рис. 2 б Часовий проміжок 80-100 с

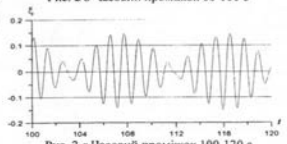


Рис. 2 в Часовий проміжок 100-120 с

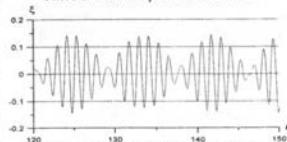


Рис.2 г Часовий проміжок 120-150 с

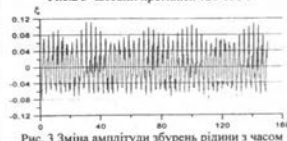


Рис. 3 Зміна амплітуди збуджень рідини з часом

На Рис. 3 а, 3 б, 3 в, 3 г більш детально показана зміна амплітуд на менших часових проміжках.

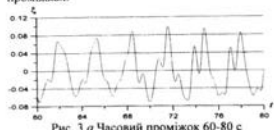


Рис. 3 а Часовий проміжок 60-80 с

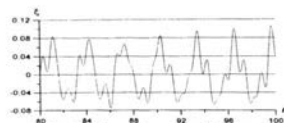


Рис. 3 б Часовий проміжок 80-100 с

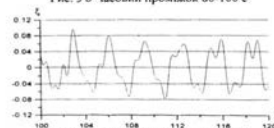


Рис. 3 в Часовий проміжок 100-120 с

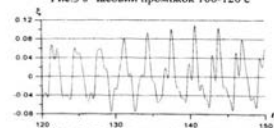


Рис. 3 г Часовий проміжок 120-150 с

З графіків видно, що вплив вищих гармонік досить сильний, супергармоніки та двогорбі піки яскраво виражені.

З отриманих результатів можна зробити висновок, що при частотах вимушених коливань менших за резонансну середнє значення амплітуди змінюється в досить широкому діапазоні, помітна модуляція коливань і значний вплив вищих гармонік на коливальний процес. Коли частоти коливань близькі до резонансної, середнє значення амплітуди практично не змінюється, модуляції помітні, спостерігається істотний

вплив вищих форм коливань. При частотах коливань більших за резонансну спостерігається виражена модуляція та практично незмінне середнє значення амплітуди, вплив вищих гармонік значно слабше, ніж в попередніх випадках.

Висновки

Для задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в резервуарі у формі оберненого усеченого конуса досліджено вихід системи на ustalений режим. Розглянуто поведінку системи в зоні частот до резонансу, в малому околі резонансу, а також в зоні частот більших за резонансу. В усіх випадках вихід на режим ustalених коливань не відбувався, хоча для частот, більших за резонансу, проявлявся ефект виходу на майже ustalені коливання з суттєвою модуляцією. У випадку збудження коливань з частотою меншою за резонансну суттєво проявляється зміна середнього значення амплітуд коливань. Головною причиною розбіжності одержаних результатів від одержаних раніше є відмова від гіпотези про нехтування коливаннями з власними частотами.

Список використаних джерел

1. *Limarchenko O.S.* Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // *Ukr. Math. Journ.* – 2007. – 59. – No. 1. – P. 44-70.
2. *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью, М., Машиностроение, 1977. – 208 с.
3. *Михаилов Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
4. *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications / Cambridge University Press. – 2005. – 950 p.
5. *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью, Киев, Наукова думка, 2010. – 407 с.
6. *Faltinsen O.M., Rognbakke O.F., Timokha A.N.* Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // *Physics of fluids.* – 18. – 2006. – P. 1-14.

Надійшла до редколегії 20.12.11

УДК 534 + 531.7 + 53.082.5 + 621.375.8

Смелянов В.В.

Отто К.В.

Розумнюк В.І., к.ф.-м.н. В.І.

Отто Г.К.

Яровой Л.К., к.т.н. Л.К.

**Лазерний доплерівський віброметр зі
зворотнім зв'язком в
напівпровідниковому лазері**

Запропонований та створений лазерний доплерівський віброметр зі зворотнім зв'язком в напівпровідниковому лазері для отримання сигналів вібрації нанометрових амплітуд на значній відстані від об'єкту спостережень. Відмінною особливістю віброметра є наявність Брегівської комірки для гетеродинного зсуву частоти. Продемонстровано, що віброметр при потужності лазерного джерела в 20 мВт вимірює коливання амплітудою 4 нм на відстані до 40 метрів.

Ключові слова: лазерні віброметри, віброметрія, лазерні діоди зі зворотнім зв'язком, нано-вимірювання.

*Email: yarovoi@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., акад. НАН України Перестюк М.О.

Зворотній зв'язок що виникає у лазері при наявності зовнішнього резонатора, впливає на частоту і інтенсивність генерації [1]. Явище модуляції оптичної енергії лазера при зміні розміру зовнішнього резонатора, яке в закордонній літературі має назву self-mixing effect (ми будемо використовувати термін автофотозмішування), ефективно використовується для безконтактного дослідження вібрації, зокрема, при визначенні параметрів механічного руху різного роду об'єктів [2]. Термін "зовнішній резонатор" не слід розуміти, як додаткове дзеркало – його роль може виконувати будь-який досліджуваний об'єкт, що хоч трохи розсіює зондувальне випромінювання. Саме тому, що в віброметрах з автофотозмішуванням відбите випромінювання, що повертається у лазер, автоматично підсилюється та фазується з опорним каналом, ці прилади в порівнянні із "класичними" лазерними доплерівськими аналометрами (ЛДА) та віброметрами (ЛДВ) [3] дозволяють отримати надзвичайну чутливість до слабого відбитого випромінювання. Варто зазначити, що існуючі нині ЛДВ з автофотозмішуванням,

V.V. Yemelyanov

K.V. Otto

V.I. Rozumnyuk, PhD V.I.

G.K. Otto

L.K. Yarovoi, PhD L.K.

Laser Doppler self-mixing vibrometer

We propose and develop a laser Doppler selfmixing for the receipt of vibration signals of nanometer amplitude range on considerable distance from the object of supervisions. By the excellent feature of the vibrometer is presence of Bragg cell for the heterodyne shift of laser frequency. It is shown, that the vibrometer at power of laser source in 20 mW is confidently measured by oscillation amplitude of 4 nm with the distance up to 40 meters.

Key Words: laser Doppler vibrometry, self-mixing, laser diodes, nano-measuring

застосовують лише для вимірювання на невеликих відстанях (від декількох сантиметрів до одного метра), і, крім того, вони мають надто складні схеми демодуляції сигналу швидкості. Останнє пов'язано з тим, що в загальному випадку амплітуда вихідного сигналу залежить також від відстані до досліджуваного об'єкту.

Метою дослідження є створення приладу, котрий дозволить вимірювати механічні коливання в нанометровому діапазоні на відстані десятків метрів з використанням звичайного доплерівського демодулятора ЛДВ.

Послідовний розрахунок сигналу лазерних вимірювачів, що працюють на ефекті автофотозмішування, побудований на теорії лазерних джерел з зворотнім зв'язком через зовнішній резонатор [2]. Встановлено, що важливу роль відіграє коефіцієнт зворотного зв'язку C , який пов'язаний з коефіцієнтом відбиття другого дзеркала лазера, і коефіцієнтом відбиття зовнішнього дзеркала (мішені) та параметром лазера [1]:

$$C = \frac{\tau_{\text{ext}}}{\tau_L} r_{\text{ext}} \frac{1 - |r_2|^2}{r_2} \epsilon \sqrt{1 + \alpha^2} \quad (1)$$

© Смелянов В.В., Отто Г. К., Розумнюк В.І.

Отто К. В., Яровой Л.К., 2012

У формулі позначені r_{21} - коефіцієнт відбиття вихідного дзеркала лазера, τ_L - повний час пробігу випромінювання в резонаторі лазера, $\tau_{\text{пр}}$ - час руху зондувальної хвилі до об'єкту та в зворотному напрямку, ε та α - параметри лазерного діода (зазвичай $\varepsilon \approx 0,5$ та $\alpha \approx 3$). За умови сильного або помірного зворотного зв'язку, тобто $C \leq 1$, спостерігається спотворення сигналу, пов'язане з впливом випромінювання, що повертається з зовнішнього резонатора в лазер на частоту генерації. За умови слабого зворотного зв'язку $C \ll 1$ цим впливом можна знехтувати [2].

В останньому випадку випромінювання $e_1 = E_1 \exp(-i(\omega_{\text{пр}} t + \Phi_1))$, що повертається в резонатор, підсилюється, та потрапляє на фотодетектор, який зазвичай розташований за заднім дзеркалом (гранню) напівпровідникового лазера, $\omega_{\text{пр}}$ - кругова оптична частота, $\Phi_1(t)$ - фаза відбитого сигналу, що в загальному випадку залежить від часу. Частинна сигналу, первинного лазерного випромінювання, що циркулює всередині лазера, а саме, $e_0 = E_0 \exp(-i(\omega_{\text{пр}} t))$, також потрапляє на фотодетектор де відбувається фотозмішування з сигналом $e_1(t)$.

Таким чином, зміна складова току фотодетектора швидко осцилює на частоті гетеродина $2\omega_0$ і відносно повільно змінюється відповідно з рухом об'єкту. Саме наявність подвоєної частоти гетеродину у аргументі косинусу, яка відрізняє формулу (4) від закону зміни потужності лазерного випромінювання вимірювачах зі зворотним зв'язком [4], робить вимірювання нечутливим до початкової фази, тобто до відстані до об'єкту. Дійсно, оскільки частота є похідною від фази $\omega = \frac{d}{dt}\Phi$, частоту сигналу фотодетектора можна записати як

$$\omega = 4\pi f_G - 2kv_0 \sin(\Omega t) \quad (4)$$

де $v_0 = \Omega x_0$ - амплітуда миттєвої швидкості, Ω - частота вібрації, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильовий вектор випромінювання лазера.

Член $2kv_0 \sin(\Omega t)$ відповідає миттєвій швидкості об'єкта, тому вимірюючи частоту

Суттєвою відмінністю схеми віброметра, що розглядається, є наявність оптичного гетеродину, який реалізований у вигляді коміркі Брегга на виході напівпровідникового лазера. Комірка Брегга призначена для зсуву оптичної частоти лазера на частоту гетеродина f_G .

Розрахуємо фазу сигналу $e_1(t)$, що повертається в лазер після відбиття від поверхні рухомого об'єкту, розташованого на відстані S , за умови, що величина зворотного зв'язку незначною.

Нехай об'єкт здійснює коливання за гармонічним законом $x(t) = x_0 \cos(\Omega t)$. Тоді з урахуванням, що хвиля двічі проходить комірку Брегга, її фаза на вихідному дзеркалі буде мати величину:

$$\Phi_1 = \frac{4\pi}{\lambda} S + \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \cos(\Omega t) + 4\pi f_G \cdot t \quad (2)$$

Струм $i_{\text{фд}}$ фотодетектора є пропорційним сумарній інтенсивності лазерного випромінювання. Після перетворень отримаємо рівняння:

$$i_{\text{фд}} \propto E_1^2 + E_0^2 + 2E_0 E_1 \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} S + \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \cos(\Omega t) + 4\pi f_G \cdot t\right) \quad (3)$$

$\omega(t)$ отримуємо інформацію про швидкість об'єкту. Цей результат еквівалентний принципу роботи ЛДВ з розділеними опромінюванням та прийомом відбитого випромінювання, а формула (4) відрізняється від такого «класичного» лазерного віброметра [3] лише в подвоєнні частоти гетеродину.

Сигнал биття опорної хвилі з відбитою від досліджуваного об'єкту впливає також на струм живлення лазерного джерела. Як показано в [5], при модуляції довжини зовнішнього резонатору струм живлення змінюється в протифазі до зміни інтенсивності випромінювання. Присутність оптичного гетеродину змінює лише частоту модуляції інтенсивності (3), тому частота струму живлення лазера буде також описуватися формулою (3).

Нами був складений макет лазерного віброметра, що працює на ефекті автофотозмішування. Спрощена блок-схема віброметра зображена на рис.1 Основний елемент віброметра - лазерний діод L . Вимогою до лазерного джерела є генерація одночастотного випромінювання з

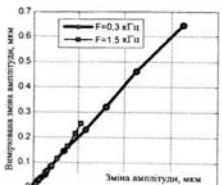
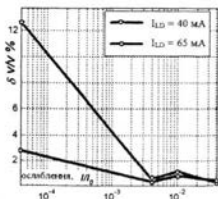


Рис.2 Експериментальне визначення лінійності характеристики віброметра

Вплив зворотного зв'язку в зовнішньому резонаторі лазера на вихідний сигнал віброметра досліджувався шляхом зміни послаблення оптичного променя, котрий повертається у лазерний резонатор. Таку залежність було отримано при введенні у зондувальний промінь нейтральних світлофільтрів 0,5, 0,1 та 0,01 оптичної щільності. Враховуючи 4% відбиття від фольги, що вкриває об'єкт, величина відносного ослаблення відбитого випромінювання складала 0,04, 0,01, 4×10^{-4} та 4×10^{-6} . Таким чином, параметр $C(1)$ завжди залишався менше одиниці і віброметр працював у лінійному режимі.

Для цих значень ослаблення та при амплітуді коливань $a_0 = 14$ нм на рис.3 наведено результати експериментально отриманої відносної похибки вимірювання вихідного сигналу. Як видно з рисунку, при відносному ослабленні прийнятого сигналу від 0,04, до 4×10^{-6} похибка значення амплітуди вібрації не перевищує 1%. При зменшенні відбитого сигналу до величини 4×10^{-6} похибка зростає, але не зростає настільки швидко, як параметр Δ лазера. Зокрема, поблизу порога генерації ($I = 40$ мА) флуктуації є найбільшими і перевищують 10%. В той же час с області, наприклад, $I = 65$ мА, нестабільність вихідного сигналу зменшується до 3%.

Отримані результати дозволяють сподіватися на ефективність вимірювань на значній відстані. І такі дослідження були виконані віброметром з телескопічною системою при відстані до об'єкта

Рис.3 Залежність похибки вимірювання швидкості вібрації від ослаблення оптичного сигналу. Амплітуда $X = 4$ нм

37 м (в коридорі першого поверху механіко-математичного факультету).

Візуальне спостереження сфокусованого випромінювання за допомогою ІЧ візуалізатора показало значну видиму просторову нестабільність світлової плями, і це пов'язано з тим, що трасу лазерного променя перетинали комунікації опалення, спричиняючи значну турбулентність повітря. Ці флуктуації призводять не лише до амплітудної модуляції, але й до фазової, що саме і може бути одним з чинників довготермінової нестабільності сигналу.

Особливо вразливою від турбулентності є зона поблизу віброметра, тобто там де розмір зондувального пучка має найширший переріз. Тому, для зменшення впливу турбулентності, параметри телескопічної системи були оптимізовані з точки зору зменшення діаметра вихідного дзеркала. В результаті розмір плями зондувального променя склав 1-2 мм на відстані 50 м.

Спектри сигналів віброметра, котрі надано на рис.4, отримано на відстані 37 м від поверхні дифузора, що коливався з амплітудою 4 нм на частоті 1,05 кГц. Спектр, зображений синьою лінією, відповідає поверхні дифузора акриловій відбиваючої фольгою, а сіра лінія – це спектр сигналу у випадку, коли на поверхні, що коливається, наліплено білий папір. В цьому, другому випадку, величина зворотного зв'язку є зменшеною приблизно на три порядки, що спричиняє зріст шумів і певної нестабільності демодульованого сигналу, однак, як можна бачити, суттєво не впливає на його амплітуду.

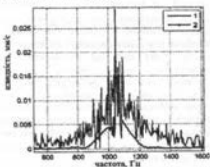


Рис.4 Спектр амплітуди сигналу. Відстань 37 м

Спостереження сигналу в часовій області дає додаткові можливості для з'ясування механізмів виникнення шумів при малих сигналах. Проблема виникнення шумів при фотодетектуванні когерентних сигналів досліджено у багатьох фундаментальних роботах [6], а також в спеціальних працях, присвячених лазерній віброметрії [7]. В нашому випадку привернемо увагу до ще одного чинника, який безумовно впливає на якість вихідного сигналу ЛДВ.

На рисунку представлені експериментальні сигнали ЛДВ: рис.5А – високочастотна компонента фотоструму $i_{\text{ам}}$, а вихідний сигнал віброметра – рис.5Б. Можна бачити, що при зношенні фотоструму нижче певної межі відбувається значне підвищення амплітуди вихідного сигналу.

Таку аномальну поведінку сигналу ЛДВ можна, на нашу думку, пояснити за допомогою ефекту трихвильового фотомішування (ТХФ).

Мова йде про специфічні інтерференційні явища, які відбуваються в частотній області фотомішування на детекторі трьох, і більше, когерентних хвиль. На відміну від ідеальних умов, коли на фотодетекторі ЛДВ змішуються сигнали та референтна хвиля, в реальному експерименті також існують паразитні відбиття від оптичних елементів віброметра, пилу та крапель відокремленої траєкторії розповсюдження лазерного променя, віддзеркалення від елементів поблизу досліджуваного об'єкту, котрі або не рухаються, або рухаються з іншою швидкістю. Таке віддзеркалення обумовлює існування в процесі фотомішування прийнятної третьої хвилі. Вплив цієї хвилі на вихідний сигнал віброметра (який є, підкреслимо, пропорційним миттєвій частоті фотоструму детектора $i_{\text{ам}}$) може бути різним в

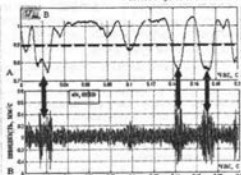


Рис.5 Експериментальні сигнали ЛДВ в присутності хвилі - завади

залежності від співвідношення інтенсивностей фаз корисного сигналу та завади, амплітуди коливання тощо. Для амплітуди коливання об'єкту, що перевищує половину довжини хвилі зондувального випромінювання, спостерігається збурення вихідного сигналу у вигляді додаткової хвилястості, яка може переростати у гігантські піки, амплітуда яких набагато перевищує амплітуду досліджуваного сигналу.

Коли ж амплітуда є менше, ніж половина довжини лазерної хвилі, то при оптимальних умовах може виникнути, так би мовити, екстраординарне підсилення сигналу ЛДВ.

Теоретичне обґрунтування цих ефектів та їх експериментальне дослідження можна знайти в [8-10] для класичного лазерного доплерівського віброметра. Спрощену модель процесу ТХФ можна пояснити за допомогою векторної діаграми на Рис.6., де зображені вектори сигнальної хвилі E_1 і завади E_2 за умови їх протифазного існування. Сума цих векторів, результат інтерференції, позначена як ΔE .

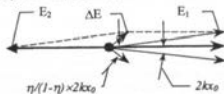


Рис.6 Векторна діаграма взаємодії хвиль в ЛДВ

Нехай фаза сигнальної хвилі коливається з частотою Ω , тоді вектор E_1 коливається проти стану рівноваги в межах $\pm 2kx_0 \cos(\Omega t)$. При цьому, як можна бачити, кут коливання

суперпозиції векторів ΔE буде набагато більшим. Конкретно амплітуда коливання буде збільшена в $\eta/(\eta-1)$ разів, де $\eta = E_1/E_2$, за умови $\Delta\phi = \pi$, та $x_0 \ll \lambda$ [10].

Слід зауважити, що третя – референтна хвиля – хоча і відсутня на діаграмі, однак відіграє важливу роль у процесі гетеродинування для отримання сигналу миттєвої швидкості. Що стосується Рис. 6, то, з урахуванням референтної хвилі, діаграма буде лише обернута навколо центру координат з кутовою частотою $2\pi f_G$ (у нашому випадку $4\pi f_G$).

Отже, за певних умов, а саме, при близькості амплітуди сигнальної хвилі і

завадити $\Delta\phi = \pi$, відбувається зменшення амплітуди суперпозиції цих двох хвиль ΔE та відповідне підсилення амплітуди її коливання.

Саме така поведінка сигналів і спостерігається на Рис. 5. Тому наведені результати можна інтерпретувати таким чином, що при випадковому зменшенні амплітуди сигнальної хвилі до рівня завади (яка, так чи інакше, завжди присутня) відбувається їх взаємна компенсація та вникається механізм аномального підсилення частотного сигналу при ТХФ. Зауважимо, що це відбувається за умови, коли стала фазова різниця між хвилями близька до π .

Висновки

Запропоновано схему лазерного вібретра з зворотним зв'язком у напівпровідниковому лазері з оптичним гетеродином та відбором сигналу безпосередньо від панчого живлення лазерного діоду, котра дозволяє вимірювати механічні коливання та акустичні вібрації з амплітудою від 4 нм на відстані до 40 метрів. На такий відстані прилад працює без спеціальної відбиваючої фольги, тобто, на випромінюванні відбитому від поверхні світлого кольору та при потужності лазерного джерела не більше 20 мВт.

Список використаних джерел

1. K. Petermann. *Laser diode modulation and noise*. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. – 1991. – 308 p.
2. Lorenzo Scalise, Yanguang Yu, Guido Giuliani, Guy Plantier, and Thierry Bosch. Self-Mixing Laser Diode Velocimetry: Application to Vibration and Velocity Measurement. // IEEE transactions on instrumentation and measurement. – II.2004. – vol. 53, №1. – P. 223-232
3. Guido Giuliani, Simone Botzi-Pietra, Silvano Donati. Self-mixing laser diode vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2003. – №14. – P. 24-32
4. Ryoji Kawai, Yusuke Asakawa, Kenju Otsuka. Ultrahigh-Sensitivity Self-Mixing Laser Doppler Velocimetry with Laser-Diode-Pumped Microchip LiNdP O Lasers. // IEEE Photonics Technology Letters. – VI.1999. – vol. 11. – №6. – P. 706-708.

Також встановлено, що струм лазера впливає на величину похибки вимірювання. При оптимальній величині струму нестабільність сигналу може бути зменшена до 3%.

При роботі на значних відстанях спостерігалися ефекти, пов'язані з механізмами трихвильового фотозмішування в ЛДВ, які призводять до локального аномального підсилення вихідного сигналу.

На думку авторів, такий вібретр знайде застосування в будівництві, діагностиці великих інженерних споруд, промисловості та наукових дослідженнях

5. Усанов, Д. А., Скрипаль, А. В. Измерение нанометровых вибраций полупроводниковым лазером на квантово-размерных структурах, работающим в автодином режиме. // Письма в ЖТФ. – 2003. – т. 29. – №9. – С. 51-57.
6. Osche G.R Optical detection theory for laser applications // Springer. – 2004. – 418 p.
7. L.E. Drain. The Laser Doppler Technique. // John Wiley, New York. – 1980.
8. Yarovi L., Siegmund G. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2004. – vol. 15. – P. 2150-2156.
9. Ombeline de La Rochefoucauld, Shyam M. Khana S., Olson E. Recording depth and signal competition in heterodyne interferometry // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – vol. 117, № 3. – P. 1267-1284.
10. Яровой П. К. Особенности работы лазерного доплеровского вибретра с три хвильным фотозмішуванням в нанометровому діапазоні. // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. 2011 – випуск 26. – С. – 39-43.

Надійшла до редколегії 30.01.2012

УДК 517.9

Іващук О.В., асистент

**Періодичні розв'язки імпульсної системи
з двома точками розриву в нефіксовані
моменти часу**

Для імпульсної системи з двома точками розриву в нефіксовані моменти часу встановлено умови існування періодичного розв'язку.

Ключові слова: Періодичні розв'язки, імпульсні системи, метод усереднення Крилова-Боголюбова.

*E-mail: o.ivashchuk@gmail.com

Статтю представив член редколегії академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Метод усереднення Крилова-Боголюбова [1] застосовується для дослідження широкого класу задач, в тому числі і систем з імпульсною дією. Обґрунтування використання методу усереднення Крилова-Боголюбова при дослідженні імпульсних систем було проведено в роботах Самойленка А.М., Перестюка М.О. [2, 3, 4]. Також розглядалося питання про існування граничного розривного циклу імпульсної системи з однією точкою розриву та було встановлено умови існування періодичних розв'язків імпульсних систем.

Крім того, в роботах Самойленка А.М., Перестюка М.О. (зокрема [2]) було встановлено умови за яких імпульсна система породжує розривний граничний цикл.

Дана робота присвячена питанню обґрунтування застосування методу усереднення Крилова-Боголюбова до системи з двома точками розриву в нефіксовані моменти часу. Встановлено умови існування періодичних розв'язків системи (1) з імпульсною дією (2) виходячи з рівнянь перших наближень, що відповідають даній системі.

Основний результат даної роботи полягає в тому, що для імпульсної системи з двома точками розриву в нефіксовані моменти часу встановлено умови на коефіцієнти та функції системи при яких дана система має 2π -періодичний розв'язок. При дослідженні використовувався метод усереднення Крилова-Боголюбова та результати з теорії чисельно-

O.V.Ivashchuk, Assistant Professor

**Periodic solution of impulsive system with
two break points at variable times**

We get conditions for the existence of periodic solution of system with impulses at variable times.

Key Words: periodic solutions, impulsive system, Krylov-Bogoliubov averaging method.

аналітичних методів дослідження періодичних розв'язків [5].

2. Постановка задачі

Розглянемо систему

$$\dot{x} = \lambda Hx + \varepsilon X(x), \|x\| \neq r_0, \quad (1)$$

$$\text{де } x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, X(x): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda H = \text{diag}(\lambda_1 H_2, \lambda_2 H_2), \quad \lambda_k > 0, k=1, 2 \quad \varepsilon > 0 - \text{малый параметр.}$$

Позначимо $x_k = (x_{2k-1}, x_{2k})$, $k=1, 2$ і поруч з (1) розглянемо умову

$$\Delta \|x_k\| \Big|_{\substack{t=t_1 \\ [x_2] \in \sigma_1}}^{\substack{t=t_2 \\ [x_2] \in \sigma_2}} = \begin{cases} \varepsilon I_{12}, x_k \leq 0, \\ \varepsilon I_{21}, x_k > 0, k=1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Нехай для $X_k(x)$, $k=1..4$ в області $D = B_R(0)$, $R > r_0$ виконуються наступні умови:

А) $|X_k(x)| \leq M_k$, $k=1..4$.

В) $X_k(x)$, $k=1..4$ - неперервні та задовольняють умову Ліпшица по x .

Розв'язки системи (1), (2) можуть мати наступний вигляд:

1) Розв'язки, які не зазнають імпульсної дії при $t \geq 0$. Це розв'язки системи (1), які задовольняють умову $\|x\| \neq r_0, \forall t \geq 0$.

2) Розв'язки, які зазнають імпульсної дії при $t \geq 0$ скінченну кількість разів. Це розв'язки

системи (1), для яких $\|x\| = r_0$ лише для скінченної кількості значень $t \geq 0$.

3) Розв'язки, які зазнають імпульсної дії при $t \geq 0$ нескінченну кількість разів. Це розв'язки системи (1), для яких $\|x\| = r_0$ для нескінченної кількості значень $t \geq 0$.

Розв'язки перших двох видів або прямують до нескінченності при $t \rightarrow \infty$, або притягуються до циклів системи (1). Розв'язки третього виду або прямують до нескінченності при $t \rightarrow \infty$, або притягуються до розривних циклів системи (1), (2), які не є циклами системи (1), і породжують періодичні траєкторії з двома імпульсними збуреннями за період.

Наша задача вказати умови на коефіцієнти системи (1), (2) при яких породжуються 2π -періодичні розв'язки цієї системи, що зазнають імпульсних збурень двічі за період.

$$\begin{aligned} F_1(r_1, r_2, \varphi, \psi) &= X_1(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \cos \varphi - X_2(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \sin \varphi, \\ G_1(r_1, r_2, \varphi, \psi) &= -\frac{1}{r_1} (X_1(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \sin \varphi + X_2(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \cos \varphi), \\ F_2(r_1, r_2, \varphi, \psi) &= X_3(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \cos \varphi - X_4(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \sin \varphi, \\ G_2(r_1, r_2, \varphi, \psi) &= -\frac{1}{r_2} (X_3(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \sin \varphi + X_4(r_1 \cos \varphi, -r_1 \sin \varphi, r_2 \cos \psi, -r_2 \sin \psi) \cos \varphi). \end{aligned}$$

Умова (2) після заміни набуде вигляду

$$\Delta r_k|_{\psi=0} = \begin{cases} \varepsilon I_{1k}, \psi \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], \\ \varepsilon I_{2k}, \psi \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}, k=1,2 \end{cases} \quad (5)$$

Введемо наступні позначення $r = (r_1, r_2)$, $r_0 = (r_{01}, r_{02})$, $I_k = (I_{1k}, I_{2k})$, $k=1,2$.

Припустимо, що система (1), (2) має періодичний розв'язок. Відповідно, система (4), (5) теж має 2π -періодичний по ψ розв'язок $r_1 = r_1(\psi)$, $r_2 = r_2(\psi)$, $\varphi = \varphi(\psi)$, який має рівно два виходи на $r = r_0$ в моменти $\psi = \psi_1 \in [0, \pi]$ та $\psi = \psi_2 \in (\pi, 2\pi)$.

Це означає, що на відрізку $[0, 2\pi]$ 2π -періодичний розв'язок системи (4), (5) повинен складатися з трьох гілок:

1) $r = r(\psi, 0, C)$, $\varphi = \varphi(\psi, 0, \varphi_0)$, $\psi \in [0, \psi_1]$ - розв'язок системи (4), який в деякий момент $\psi_1 \in [0, \pi]$ набуває значення $r = r_0$, $\varphi = \varphi_1$.

2) $r = r(\psi, \psi_1, r_0 + \varepsilon I_1)$, $\varphi = \varphi(\psi, \psi_1, \varphi_1)$, $\psi \in (\psi_1, \psi_2)$ - розв'язок системи (4), який в деякий момент $\psi_2 \in (\pi, 2\pi)$ набуває значення $r = r_0$, $\varphi = \varphi_2$.

3. Існування 2π -періодичних розв'язків

Виконавши заміну

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos \varphi \\ x_2 = -r_1 \sin \varphi \\ x_3 = r_2 \cos \psi \\ x_4 = -r_2 \sin \psi \end{cases} \quad (3)$$

від (1) перейдемо до системи

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{d\psi} = \frac{\varepsilon F_1(r_1, r_2, \varphi, \psi)}{\lambda_2 + \varepsilon G_2(r_1, r_2, \varphi, \psi)}, \\ \frac{dr_2}{d\psi} = \frac{\varepsilon F_2(r_1, r_2, \varphi, \psi)}{\lambda_2 + \varepsilon G_2(r_1, r_2, \varphi, \psi)}, \\ \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\lambda_2 + \varepsilon G_1(r_1, r_2, \varphi, \psi)}{\lambda_2 + \varepsilon G_2(r_1, r_2, \varphi, \psi)}, r \neq r_0, \end{cases} \quad (4)$$

де

$$3) \quad r = r(\psi, \psi_2, r_0 + \varepsilon I_2), \quad \varphi = \varphi(\psi, \psi_2, \varphi_2).$$

$\psi \in (\psi_2, 2\pi]$ - розв'язок системи (4), який в деякий момент $\psi = 2\pi$ набуває значення $r = C$, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi N$, $N \in \mathbb{N}$.

Такий 2π -періодичний розв'язок системи (4), (5), якщо він існує, повинен задовольняти умови:

а) $\exists \psi_1 \in [0, \pi]: r_k(\psi_1, 0, r_0 + \varepsilon I_1) = r_{0k}$, $k=1,2$, (причому $\psi_1 = \min\{\psi \in [0, \pi]: r(\psi) = r_0\}$) і $\varphi(\psi_1, 0, \varphi_0) = \varphi_1$ (для деякого початкового значення φ_0 , яке підлягає визначенню).

б) $\exists \psi_2 \in (\pi, 2\pi): r_k(\psi_2, \psi_1, r_0 + \varepsilon I_1) = r_{0k}$, $k=1,2$, (причому $\psi_2 = \min\{\psi \in [\psi_1, 2\pi]: r(\psi) = r_0\}$) і $\varphi(\psi_2, \psi_1, \varphi_1) = \varphi_2$.

с) $r_k(2\pi, \psi_2, r_0 + \varepsilon I_2) = C_{0k}$, $k=1,2$ і $\varphi(2\pi, \psi_2, \varphi_2) = \varphi_0 + 2\pi N$, $N \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення

$$\bar{F}(\rho_1, \rho_2, \theta) = F^{(0)}(\rho_1, \rho_2, \theta),$$

$$\bar{F}(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{in} F^{(n)}(\rho_1, \rho_2, \theta) e^{in\psi},$$

$$F^{(n)}(\rho_1, \rho_2, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho_1, \rho_2, \theta + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi, \psi) e^{-in\psi} d\psi.$$

$$r_0^{\varepsilon} = (r_{01} + \varepsilon r_{11} + \varepsilon^2 \dots, r_{02} + \varepsilon r_{12} + \varepsilon^2 \dots),$$

$$\varphi_0^{\varepsilon} = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \dots,$$

і представимо розв'язок системи (4) у вигляді

$$\begin{cases} r_k(\psi, \psi_0, r_0^{\varepsilon}, \varphi_0^{\varepsilon}) = r_{0k} + \varepsilon(r_{1k} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_1(r_{01}, r_{02}, \varphi_0)(\psi - \psi_0) + \\ + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_{01}, r_{02}, \varphi_0, \psi) - \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_{01}, r_{02}, \varphi_0, \psi_0)) + \varepsilon^2 \dots, k=1, 2 \\ \theta(\psi, \psi_0, r_0^{\varepsilon}, \varphi_0^{\varepsilon}) = \varphi_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\psi - \psi_0) + \varepsilon(\varphi_1 + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_{01}, r_{02}, \varphi_0)(\psi - \psi_0) + \\ + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_{01}, r_{02}, \varphi_0, \psi) - \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_{01}, r_{02}, \varphi_0, \psi_0)) + \varepsilon^2 \dots \end{cases} \quad (6)$$

Оскільки даний розв'язок повинен рівнянь, розв'язавши яку знайдемо значення задовольняти умови а)-с), то отримаємо систему ψ_1, ψ_2 та умови на коефіцієнти системи (4), (5)

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \varphi_2 = \varphi_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = N \in \mathbb{N}, \\ C_{1k} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_1(r_0, \varphi_0) \psi_1 + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0, \psi_1) - \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0, 0) + \varepsilon \dots = 0, \\ I_{1k} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1 (\psi_2 - \psi_1) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_2 - \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_1 + \varepsilon \dots = 0, \\ I_{2k} - C_{1k} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2 (2\pi - \psi_2) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, 2\pi - \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, \psi_2 + \varepsilon \dots = 0, \\ \varphi_{01} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) \psi_1 + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0, \psi_1) - \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0, 0) + \varepsilon \dots = \varphi_{11} + \varepsilon \dots, \\ \varphi_{11} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1 (\psi_2 - \psi_1) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_2 - \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_1 + \varepsilon \dots = \varphi_{21} + \varepsilon \dots, \\ \varphi_{21} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2 (2\pi - \psi_2) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, 2\pi - \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, \psi_2 + \varepsilon \dots = \varphi_{01} + \varepsilon \dots \end{cases} \quad (7)$$

Розглянемо систему (7) при $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} C_{1k} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_1(r_0, \varphi_0) \psi_1 + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0, \psi_1) - \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0, 0) = 0, \\ I_{1k} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1 (\psi_2 - \psi_1) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_2 - \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_1 = 0, \\ I_{2k} - C_{1k} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2 (2\pi - \psi_2) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, 2\pi - \frac{1}{\lambda_2} \bar{F}_k(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, \psi_2 = 0, \\ \varphi_{01} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) \psi_1 + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0, \psi_1) - \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0, 0) = \varphi_{11}, \\ \varphi_{11} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1 (\psi_2 - \psi_1) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_2 - \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_1, \psi_1 = \varphi_{21}, \\ \varphi_{21} + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2 (2\pi - \psi_2) + \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, 2\pi - \frac{1}{\lambda_2} \bar{G}_1(r_0, \varphi_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi_2, \psi_2 = \varphi_{01}. \end{cases} \quad (8)$$

Оскільки всі рівняння (7) є неперервними по $C_{11}, C_{12}, \varphi_0, \psi_1, \psi_2, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}, \varepsilon$ то для існування розв'язків системи (7) при малих ε достатньо, щоб система (8) мала розв'язок і цей розв'язок не перетворювався на нуль якобіан функцій, що утворюють ліві частини рівнянь системи (8).

Отже, при достатньо малих ε за вказаних умов та за умови існування розв'язків системи (8) існують близькі до них розв'язки системи (7).

Від умови (5) можна перейти до наступної:

$$\Delta \varepsilon|_{r=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_{14}, \psi = \psi_1 + 2\pi n, \\ \varepsilon I_{24}, \psi = \psi_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{d\psi} &= \frac{\varepsilon F_1(r_1, r_2, \varphi, \psi)}{\lambda_2 + \varepsilon G_1(r_1, r_2, \varphi, \psi)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon \tilde{I}_{11} \delta(\psi - \psi_1 - 2\pi n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon \tilde{I}_{21} \delta(\psi - \psi_2 - 2\pi n), r \neq r_0, \\ \frac{dr_2}{d\psi} &= \frac{\varepsilon F_2(r_1, r_2, \varphi, \psi)}{\lambda_2 + \varepsilon G_2(r_1, r_2, \varphi, \psi)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon \tilde{I}_{12} \delta(\psi - \psi_1 - 2\pi n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon \tilde{I}_{22} \delta(\psi - \psi_2 - 2\pi n), r \neq r_0, \\ \frac{d\varphi}{d\psi} &= \frac{\lambda_1 + \varepsilon G_1(r_1, r_2, \varphi, \psi)}{\lambda_2 + \varepsilon G_2(r_1, r_2, \varphi, \psi)}, r \neq r_0, \end{aligned}$$

Виконаємо заміну

$$\begin{cases} r_1 = \rho_1 + \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda_2} \tilde{F}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi) + \frac{I_{11}}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_1)}{n} + \frac{I_{21}}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_2)}{n} \right), \\ r_2 = \rho_2 + \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda_2} \tilde{F}_2(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi) + \frac{I_{12}}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_1)}{n} + \frac{I_{22}}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_2)}{n} \right), \\ \varphi = \theta + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \psi + \frac{\varepsilon}{\lambda_2} \tilde{G}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi), \end{cases} \quad (15)$$

Враховуючи арифметику над δ -функцією та розклавши праву частину по степенях ε , отримаємо

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{d\psi} = \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_1(\rho_1, \rho_2, \theta) + \frac{I_{11} + I_{21}}{2\pi} \right) + \varepsilon^2 \mathcal{R}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon), \\ \frac{d\rho_2}{d\psi} = \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_2(\rho_1, \rho_2, \theta) + \frac{I_{12} + I_{22}}{2\pi} \right) + \varepsilon^2 \mathcal{R}_2(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon), \\ \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{\lambda_2} \overline{G}_1(\rho_1, \rho_2, \theta) + \varepsilon^2 \mathcal{Q}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon), \psi \neq \psi_i + 2\pi n, i = 1, 2, n \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Тут $\mathcal{R}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon)$, $\mathcal{R}_2(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon)$, $\mathcal{Q}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon)$ - неперервні по ρ_1, ρ_2, θ і кусково неперервні по ψ з точками розриву першого роду в $\psi = \psi_i + 2\pi n, i = 1, 2, n \geq 1$.

Якщо існує положення рівноваги системи (10), то це положення рівноваги породжує 2π -періодичний розв'язок системи (4), (5).

Поруч з системою

Шуканий 2π -періодичний розв'язок системи (4), (9) буде розв'язком системи (4), (5), а отже зробивши зворотню заміну з нього можна отримати розв'язок системи (1), (2).

Таким чином, знаючи моменти виходу розв'язків системи (4) на $r = r_0$, можна від задачі (4), (9) перейти до наступної системи

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_1(\rho_1, \rho_2, \theta) + \frac{I_{11} + I_{21}}{2\pi} + \varepsilon \mathcal{R}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon) = 0, \\ \frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_2(\rho_1, \rho_2, \theta) + \frac{I_{12} + I_{22}}{2\pi} + \varepsilon \mathcal{R}_2(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon) = 0, \\ \frac{1}{\lambda_2} \overline{G}_1(\rho_1, \rho_2, \theta) + \varepsilon \mathcal{Q}_1(\rho_1, \rho_2, \theta, \psi, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

розглянемо систему

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_1(\rho_1, \rho_2, \theta) + \frac{I_{11} + I_{21}}{2\pi} = 0, \\ \frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_2(\rho_1, \rho_2, \theta) + \frac{I_{12} + I_{22}}{2\pi} = 0, \\ \frac{1}{\lambda_2} \overline{G}_1(\rho_1, \rho_2, \theta) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Накладемо на функції $F_i(r, \varphi, \psi), i=1, 2$, $G_i(r, \varphi, \psi)$ та коефіцієнти вихідної системи

$$\begin{cases} r_1(\psi) = r_{01} + \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_1(r_{01}, r_{02}, \varphi_0, \psi) + \frac{I_{11}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_1)}{n} + \frac{I_{21}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_2)}{n} \right), \\ r_2(\psi) = r_{02} + \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda_2} \overline{F}_2(r_{01}, r_{02}, \varphi_0, \psi) + \frac{I_{12}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_1)}{n} + \frac{I_{22}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n(\psi - \psi_2)}{n} \right), \\ \varphi(\psi) = \varphi_0 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2} \psi + \frac{\varepsilon}{\lambda_2} \overline{G}_1(r_{01}, r_{02}, \varphi_0, \psi). \end{cases} \quad (13)$$

Таким чином встановлено умови існування 2π -періодичного розв'язку систем (1), (2) і доведено наступну теорему

Теорема Нехай для системи (1), (2)

$$\dot{x} = \lambda Hx + \varepsilon X(x), \|x\| \neq r_0$$

$$\Delta \| (x_{2k-1}, x_{2k}) \|_{\| (x_{2k-1}, x_{2k}) \| = r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_{1k}, x_k \leq 0, \\ \varepsilon I_{2k}, x_k > 0, k=1, 2. \end{cases}$$

де $x =: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, X(x): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda H = \text{diag}(\lambda_1 H_2, \lambda_2 H_2), \lambda_k > 0, k=1, 2, \varepsilon > 0$ - малий параметр, виконуються в деякій області $D = \{x | \alpha < \|x\| < \beta\}$ наступні умови:

1) $X_k(x), k=1..4$ - неперервні, обмежені та задовольняють умову Ліпшица її x ,

2) Існують $C_{11}, C_{12}, I_{11}, I_{12}, I_{121}, I_{22}, \varphi_0, \psi_1 \in [0, \pi]$ та $\psi_2 \in (\pi, 2\pi)$ - розв'язки системи рівнянь (8) і цей розв'язок не перетворює на нуль якобіан функцій, що утворюють ліві частини рівнянь системи (8),

3) $(r_{01}, r_{02}, \varphi_0)$ є розв'язком системи (12) і не перетворює на нуль якобіан функцій, що визначають ліві частини рівнянь цієї системи.

Тоді система (1), (2) має 2π -періодичний розв'язок, перше наближення якого можна подати у вигляді у вигляді (13).

додаткову умову: Повинен існувати розв'язок $(r_{01}, r_{02}, \varphi_0)$ системи (12), такий що не перетворює на нуль якобіан функцій, що визначають ліві частини рівнянь цієї системи.

Якщо такий розв'язок існує, то існує близький до нього розв'язок системи (11), а отже існує положення рівноваги системи (10). Тоді існує 2π -періодичний розв'язок системи (4), (5), перше наближення якого можна подати у вигляді

4. Приклад

Як приклад розглянемо систему рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \varepsilon (1 - x_1 x_2) \frac{dx_1}{dt}, \quad (14)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = \varepsilon (1 - x_1^2) \frac{dx_2}{dt}, \| (x_k, \dot{x}_k) \| \neq r_{0k}, k=1, 2.$$

$$\Delta \| (x_k, \dot{x}_k) \|_{\| (x_k, \dot{x}_k) \| = r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_{1k}, x_k \leq 0, \\ \varepsilon I_{2k}, x_k > 0, \end{cases} \quad (15)$$

де $r_0 = (r_{01}, r_{02}) = (0, 8; 1, 1)$.

Виконавши в (14), (15) заміну $x_1 = x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, x_2 = x_3, \frac{dx_2}{dt} = x_4 \text{ перейдемо до}$$

системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2 (1 - x_1 x_2), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_3 + \varepsilon x_4 (1 - x_3^2), \| (x_{2k-1}, x_{2k}) \| \neq r_{0k}, k=1, 2. \end{cases}$$

$$\Delta \| (x_{2k-1}, x_{2k}) \|_{\| (x_{2k-1}, x_{2k}) \| = r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_{1k}, x_k \leq 0, \\ \varepsilon I_{2k}, x_k > 0. \end{cases}$$

Праві частини даної системи в області

$$D = B_R(0), \forall R > r_0, \text{ задовольняють умови } \mathbf{A}), \mathbf{B}).$$

Виконавши в останній системі заміну (3) перейдемо до системи

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \varepsilon \left(\frac{r_1}{2} - \frac{r_1}{2} \cos 2\varphi - \frac{r_1^2 r_2}{4} \cos \varphi \cos \psi + \frac{r_1^2 r_2}{4} \cos 3\varphi \cos \psi \right), \\ \dot{\varphi} = 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{r_1 r_2}{4} \sin \varphi \cos \psi - \frac{r_1 r_2}{4} \sin 3\varphi \cos \psi \right), \\ \dot{r}_2 = \varepsilon \left(\frac{(2-r_1^2)r_2}{4} - \frac{r_1^2 r_2}{4} \cos 2\varphi - \frac{(2-r_1^2)r_2}{4} \cos 2\psi + \frac{r_1^2 r_2}{4} \cos 2\varphi \cos 2\psi \right), \\ \dot{\psi} = 1 + \varepsilon \left(\frac{2-r_1^2}{4} \sin 2\psi - \frac{r_1^2}{4} \cos 2\varphi \sin 2\psi \right), r \neq r_0. \end{cases} \quad (16)$$

Умова (15) після заміни набуде вигляду

$$\Delta \varepsilon|_{\psi=0} = \begin{cases} \varepsilon I_{1k}, \psi \in [0, \pi], \\ \varepsilon I_{2k}, \psi \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \quad (17)$$

Розв'язавши систему (8) знайдемо наближені значення параметрів системи та моментів виходу розв'язку задачі (14), (15) на $r = r_0$:

$$\psi_1 \approx 2.872, \psi_2 \approx 5.492\varphi_0 \approx \pi, C_1 \approx -1.524, C_2 \approx -1.449, \\ I_{11} \approx -0.881, I_{12} \approx -1.3, I_{21} \approx -2.186, I_{22} \approx -1.603.$$

Список використаних джерел

1. Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. / Н.Н. Боголюбов, Н.М. Крылов — К.: Изд. АН УССР, 1937. — 321 с.
2. Самойленко А.М. К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию / А.М. Самойленко // Укр. мат. журн. — 1967. — Т.19, №5. — с. 96-104.
3. Самойленко А.М. Метод усреднения в системах с толчками. / А.М. Самойленко // Математическая физика. — Киев: Наукова думка, 1971, вып. 9, с. 63—96.

Умови теореми виконуються, а отже (14), (15) має 2π – періодичний розв'язок.

5. Висновки

В роботі встановлено умови на коефіцієнти та функції системи (1), (2) при яких породжуються 2π – періодичні розв'язки цієї системи, що зазнають імпульсних збурень двічі за період.

4. Самойленко А.М. О методе усреднения в системах с импульсным воздействием. / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // Укр. мат. журн. — 1974. — Т.24, №5. — с. 411-418.
5. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто — Киев: Вища школа, 1976. — 184 с.
6. Самойленко А.М. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. / Н.А. Перестюк, В.А. Плотников, А.М. Самойленко, Н.В. Скрипник — Киев: Ин-т математики НАН Украины. 2007. - 428 с.

Надійшла до редколегії

24.01.12

УДК 517.98

Ю. В. Ільченко, аспірантка

Обмежені розв'язки абстрактного диференціального рівняння з запізненням аргументу та необмеженим операторним коефіцієнтом

Знайдено обмежений на осі розв'язок абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку зі зсувом аргументу та (α, β) -степеневим операторним коефіцієнтом.

Ключові слова: лінійне диференціальне рівняння, зсуви аргументу, банахів простір, операторні коефіцієнти.

Ilchenko.yulia@gmail.com

Статтю представив доктор ф.-м.н., професор, академік НАН України М.О.Перестюк

Вступ.

У зв'язку зі стрімким розширенням областей, в яких застосовуються диференціальні рівняння зі зсувами аргументу природно почався також бурхливий розвиток теорії цих рівнянь. Важливим напрямком в теорії цих рівнянь є дослідження існування обмежених на всій осі розв'язків для абстрактних функціонально-диференціальних рівнянь. Вивченням цього питання займався В.Ю. Слюсарчук [1], В.Г. Курбатов [2], А.В. Чайковський [3, 4] та інші вчені. Наприклад, в роботі А.В. Чайковського [3] досліджено питання існування та єдиності обмежених розв'язків абстрактного лінійного диференціального рівняння зі зсувами аргументу у випадку обмежених операторних коефіцієнтів та знайдено зображення такого розв'язку за допомогою деякого аналога функції Гріна. В цій роботі буде проведено деяке узагальнення отриманого результату.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом θ , $L(B)$ – простір усіх лінійних неперервних операторів в B , I – одиничний оператор.

Теорема (А. В. Чайковський). Нехай $A_0, A_1 \in L(B)$. Тоді для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}, B)$ існує єдиний обмежений розв'язок рівняння

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

Y. V. Ilchenko, PhD student

The bounded solutions of abstract differential equation with argument's delay and unbounded operator coefficient

The bounded on the axis solution of differential equations with argument's delay and (α, β) -power operator coefficient was found.

Key words: linear differential equation, argument's shifts, Banach space, operator coefficients.

тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \exists (i\varphi I + A_0 + A_1 e^{i\varphi})^{-1}. \quad (2)$$

При цьому справджується зображення

$$x(t) = \int_{t-1}^t (e^{(A_0 + A_1 M)(t-s)} (I - M e^{A_0 + A_1 M})^{-1} y)(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Якщо A_0, A_1 – необмежені, то дане зображення не можна використовувати для запису розв'язку, оскільки неможливо визначити відповідні експоненти. В цій роботі буде розглянуто рівняння вигляду (1), але в якому лише A_1 є обмеженим, а $A_0 - (\alpha, \beta)$ -степеневий, означення такого оператора подано в [5], приведемо його нижче.

Введемо в розгляд контур $\Gamma_{\beta, \alpha} = \{z = (x, y) \mid |y| = \alpha x^\beta\}$, при $\alpha > 0, \beta \geq 1$, орієнтований проти годинникової стрілки, $\Omega_{\beta, \alpha}$ – область, що лежить зліва при вказаному напрямку обходу $\Gamma_{\beta, \alpha}$.

Означення 1: Лінійний оператор $A : D(A) \rightarrow B$ назовемо (α, β) -степеневим, де $\alpha \in (0; 1], \beta \geq 1$, якщо $D(A) = B$, при деякому $\alpha > 0$ його спектр $\sigma(A)$ розміщений в області $\Omega_{\beta, \alpha}$, і виконується наступна оцінка:

$$\forall z \in C \setminus \Omega_{\beta, \alpha} : \|(zI - A)^{-1}\|_{B \rightarrow B} \leq \frac{M}{1 + |z|^\alpha}.$$

Наведемо кілька властивостей (α, β) -степеневих операторів, які доведені в [5].

Допоміжні результати.

Лема 1. Нехай $A - (\alpha, \beta)$ -степеневий оператор. Тоді мають місце наступні твердження:

1) інтеграл (2) абсолютно збіжний і викинується оцінка:

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall t \in (0; 1] : \quad \|e^{-At}\| \leq \frac{C_1}{t^{\beta(1-\alpha)}}.$$

2) $\exists C_2 > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall t > 1 :$

$$\|e^{-At}\| \leq C_2 e^{-\varepsilon t}.$$

Теорема 1. Нехай $A - (\alpha, \beta)$ -степеневий оператор. Тоді

$$1) \quad \forall x \in B \quad \forall t > 0 : e^{-At}x \in D(A),$$

$$2) \quad \exists K > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall t > 0 :$$

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{Ke^{-\varepsilon t}}{t^{2\beta-\alpha\beta}}.$$

Теорема 2. Нехай $A - (\alpha, \beta)$ -степеневий оператор. Тоді

$$\forall t > 0 \quad \exists (e^{-At})' = -Ae^{-At}.$$

Лема 2. Нехай $A - (\alpha, \beta)$ -степеневий оператор. Тоді:

$$A^{-2} \left(\frac{I - e^{-At}}{t} - A \right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Лема 3. Нехай $A - (\alpha, \beta)$ -степеневий оператор. Тоді: $\forall b \in B : t^{\beta(1-\alpha)}(e^{-At} - I)b \rightarrow 0, t \rightarrow 0+.$

2. Якщо додатково $b \in D(A)$, то

$$(e^{-At} - I)b \rightarrow 0, t \rightarrow 0+.$$

Лема 4. Нехай $A - (\alpha, \beta)$ -степеневий оператор. Тоді:

$$A^{-1}e^{-At} \rightarrow A^{-1}, \quad t \rightarrow 0+,$$

причому

$$\|e^{-At}A^{-1} - A^{-1}\| = O(t^\alpha), \quad t \rightarrow 0+.$$

Також має місце наступне твердження:

Лема 5. Нехай $A - (\alpha, \beta)$ -степеневий оператор, функція $y : \mathbf{R} \rightarrow D(A)$ має всі похідні до порядку n включно, $n \geq 0$, де $n = [\beta(2-\alpha)] - 1$, і похідна n -го порядку гельдерова з показником $\gamma \in [\beta(2-\alpha) - n - 1; 1]$, тобто

$$\exists L > 0, \forall s_1, s_2 \in \mathbf{R} : \|y^{(n)}(s_1) - y^{(n)}(s_2)\| \leq L|s_1 - s_2|^\gamma.$$

Тоді функція

$$x(t) := e^{At}x_0 + \int_{-\infty}^t e^{-A(t-s)}y(s)ds, \quad t \geq t_0 \quad (3)$$

є розв'язком задачі Коші:

$$x'(t) := -Ax(t) + y(t), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4)$$

Доведення. Доведення цього факту випливає з викладеного в [5]. $\square$

Основні результати.

Має місце наступна теорема:

Теорема 3. Нехай $A_0 : D(A_0) \subset B \rightarrow B$, оператор $(-A_0) \in (\alpha, \beta)$ -степеневим, $A_1 \in L(B)$ - обмежений оператор, тоді для довільної функції $y : \mathbf{R} \rightarrow D(A)$ яка має всі похідні до порядку $n+1$ включно, $n \geq 0$, де $n = [\beta(2-\alpha)] - 1$, і похідна n -го порядку гельдерова з показником $\gamma \in [\beta(2-\alpha) - n - 1; 1]$, функція

$$x(t) = \int_{t-1}^t (e^{A_0(t-s)}e^{A_1M(t-s)}(I - Me^{A_0}e^{A_1M})^{-1}y)(s)ds, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

є обмеженим неперервно диференційовним розв'язком диференціального рівняння (1).

Доведення. Введемо наступне позначення:

$$G(t, s) := y(t) + y'(t)(s-t) + \frac{y''(t)}{2!}(s-t)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(t)}{n!}(s-t)^n, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Перепишемо (5) як:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t-1}^t e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} (y(s) - G(t, s) + G(t, s)) ds = \\ &= \int_{t-1}^t e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} (y(s) - G(t, s)) ds + \\ &+ \int_{t-1}^t e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} G(t, s) ds = \\ &=: I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Розглянемо окремо функцію $I_1(t)$. З наведених в лемі 1 оцінок, а також з урахуванням обмеженості оператора A_1 , отримуємо:

$$\begin{aligned} \|I_1(t)\| &\leq \int_{t-1}^t C \frac{(t-s)^{\gamma}(t-s)^n}{(t-s)^{\beta(1-\alpha)}} ds \leq \\ &\leq \int_{t-1}^t C \frac{ds}{(t-s)^{\beta(1-\alpha)-\gamma-n}}, \end{aligned}$$

де C деяка стала. А оскільки за умовою теореми показник $\gamma \in (\beta(2-\alpha) - n - 1; 1]$, то звідси функція $I_1(t)$ визначена.

Визначеність функції $I_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$ доводиться безпосереднім інтегруванням:

$$\begin{aligned} \forall l \geq 0: \quad &\int_{t-1}^t A_0 e^{A_0(t-s)} \frac{y^{(l)}(t)}{l!} (t-s)^l ds = \\ &= A_0^{-l-1} y^{(l)}(t-1) - A_0^{-l-1} y^{(l)}(t) - \\ &- \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} A_0^{-k-1} (t-1)^{l-k} e^{A_0(t-1)} y^{(l)}(t-1) + \\ &+ \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} A_0^{-k-1} (t)^{l-k} e^{A_0(t)} y^{(l)}(t), \end{aligned}$$

та з урахуванням обмеженості оператора A_1 .

Продиференціюємо по t обидві частини

рівності для $x(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} (y(t) - G(t, t)) - \\ &- e^{A_0} e^{A_1 M} (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} (y(t-1) - G(t, t-1)) + \\ &+ (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} G(t, t) - \\ &- e^{A_0} e^{A_1 M} (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} G(t, t-1) + \\ &+ \int_{t-1}^t A_0 e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} (y(s) - G(t, s)) ds + \\ &+ \int_{t-1}^t A_1 M e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} (y(s) - G(t, s)) ds + \\ &- \int_{t-1}^t e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} G'_t(t, s) ds + \\ &+ \int_{t-1}^t A_0 e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} G(t, s) ds + \\ &+ \int_{t-1}^t A_1 M e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} G(t, s) ds - \\ &+ \int_{t-1}^t e^{A_0(t-s)} e^{A_1 M(t-s)} \times \\ &\times (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} G'_t(t, s) ds = \\ &=: (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} y(t) - \\ &- e^{A_0} e^{A_1 M} (I - M e^{A_0} e^{A_1 M})^{-1} y(t-1) + \\ &+ J_1(t) + J_2(t) - J_3(t) + J_4(t) + J_5(t) + J_6(t). \end{aligned}$$

Неважко показати, що функції, отримані в правій частині, визначені. Розглянемо, наприклад, функцію $J_1(t)$. Як було помічено вище, з наведених в теоремі 1 оцінок, а також з урахуванням обмеженості оператора A_1 , матимемо:

$$\begin{aligned} \|J_1(t)\| &\leq \int_{t-1}^t C' \frac{(t-s)^{\gamma}(t-s)^n}{(t-s)^{\beta(2-\alpha)}} ds \leq \\ &\leq \int_{t-1}^t C' \frac{ds}{(t-s)^{\beta(2-\alpha)-\gamma-n}}, \end{aligned}$$

де C' деяка стала. Врахувавши те, що показник $\gamma \in (\beta(2-\alpha) - n - 1; 1]$, отримуємо визначеність функції $J_1(t)$. Визначеність J_2 випливає з доведеного для I_1 , а J_3, J_4, J_5 можна обчислити безпосереднім інтегруванням. Отже, оскільки отримані підінтегральні функції мажоруються інтегровними функціями, тому диференціювання дійсно можливе.

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (I - Me^{A_0}e^{A_1M})^{-1}y(t) - \\ &- e^{A_0}e^{A_1M}(I - Me^{A_0}e^{A_1M})^{-1}y(t-1) + \\ &+ \int_{t-1}^t A_0e^{A_0(t-s)} \times \\ &\times e^{A_1M(t-s)}(I - Me^{A_0}e^{A_1M})^{-1}y(s)ds + \\ &+ \int_{t-1}^t A_1Me^{A_0(t-s)} \times \\ &\times e^{A_1M(t-s)}(I - Me^{A_0}e^{A_1M})^{-1}y(s)ds = \\ &= y(t) + A_0x(t) + A_1Mx(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отже, побудована функція дійсно є розв'язком рівняння (1).

□

Приклад.

Розглянемо рівняння в частинних похідних, яке зводиться до лінійного диференціального рівняння в банаховому просторі вигляду (1):

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, s) = -(s + is^\beta)x(t, s) + a(s)x(t-1, s) + y(t, s),$$

де $y \in C([0, +\infty)^2)$ – деяка відома функція, $x \in C([0, +\infty)^2) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, +\infty))$ – шукана, $\beta > 1$ – фіксоване число, $a(s) \in C([0, +\infty))$ – деяка обмежена функція.

Нехай Z – простір обмежених неперервних на $[0, +\infty)$ функцій з рівномірною метрикою. Тоді цю систему можна переписати у вигляді рівняння

$$x'(t) = -A_0x(t) + A_1x(t-1) + y(t), \quad t \geq 0,$$

де $y(t)$, $t \geq 0$ – відома функція з класу $C([0, +\infty), Z)$, $x(t)$, $t \geq 0$ – шукана функція з класу $C([0, +\infty), Z) \cap C^1((0, +\infty), Z)$, $A_0 : D(A_0) \subset Z \rightarrow Z$ – лінійний оператор, визначений формулою

$$(A_0z)(s) = (s + is^\beta)z(s), \quad s \geq 0, \quad z \in D(A_0),$$

$$D(A_0) = \{z \mid z(0) = 0, A_0z \in Z\},$$

A_1 – оператор множення на функцію $a(s)$, визначений в просторі Z .

В [5] було показано, що так введений оператор $A_0 \in (\alpha, \beta)$ – степеневим. Отже, розв'язок даного рівняння можна представити у вигляді (5).

Висновки.

В роботі було знайдено обмежений на осі розв'язок абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку зі зсувом аргументу та (α, β) – степеневим операторним коефіцієнтом для деякого класу обмежених функцій. Це дає можливість розширити уже отримані результати для аналогічних рівнянь з обмеженими операторними коефіцієнтами. Розв'язок рівняння записано у явному вигляді.

Список використаних джерел.

- 1) Савосирчук В. Е. Оценки спектров и обратимость функциональных операторов // Матем. сборник. – 1978. – 105(147), №2. – С. 268–285.
- 2) Курбатов В. Г. Об оценке спектральных радиусов запаздывающих операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций // Функц. анализ и его приложения. – 1975. – Т. 9, Вып. 3. – С. 56–60.
- 3) Чайковський А. В. Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2010. – №8. – С.33–37.
- 4) Чайковський А. В. Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі // Укр. матем. журн. – 2001. – 53, №5. – С. 688–693.
- 5) Івченко Ю. В., Чайковський А. В. Задача Коші для диференціального рівняння в банаховому просторі з узагальненим сильно позитивним операторним коефіцієнтом // Укр. Мат. Журн. – 2011. – №63. – С. 1053–1070.

Надійшло до редколегії 31.01.2012

УДК 532.5

Тетяна С. Краснопольська, д.ф.-м.н.
В'ячеслав М. Спектор*, аспірант**Хрестоподібні хвилі у прямокутному каналі скінченних розмірів**

Побудовано нову математичну модель збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини та запропоновано методику отримання рішення, яке описує безпосередню передачу енергії від хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі. Вперше отримано рішення для хрестоподібних хвиль у прямокутних скінченних каналах.

Ключові слова: хвилі на вільній поверхні рідини, хрестоподібні хвилі, метод суперпозиції Ламе.

Tatyana S. Krasnopol'skaya, Dr.Sc.
Vyacheslav M. Spektor*, PhD student**Cross-waves in a rectangular channel of finite dimensions**

A new mathematical model of cross-waves generation in fluid free surface in a rectangular channel of finite dimensions was worked out. A method of finding a solution, which describes direct energy transmission from wavemaker oscillations to cross-waves, was proposed. A solution for cross-waves generation in a rectangular channel of a finite dimensions was firstly built.

Key Words: waves in fluid free surface, cross-waves, method of superposition Lamé.

*E-mail: v.m.spektor@gmail.com

Статтю представив член редколегії акад. НАН України М.О. Перестюк

Вступ

Занурені в рідину тіла, що коливаються, створюють навколо себе на її вільній поверхні хвилі різного походження. Деякі з такого роду хвиль досі не отримали повного пояснення механізму свого збудження. Це, насамперед, так звані «хрестоподібні хвилі» («cross-waves»), які вперше були віднайдені та описані Фарадеєм в його відомій роботі 1831 р. [1]. В цій роботі Фарадей докладно описав наступний експеримент: при зануренні в рідину вертикально одним кінцем дерев'яної дощечки та її горизонтальних коливаннях по обидва боки дощечки, перпендикулярно до неї, виникали хвилі, що нагадують зубці гребінки, яка лежить горизонтально. Такі хвилі, які утворюють прямий кут в горизонтальній площині з напрямком руху дощечки, отримали назву «хрестоподібні», «cross-waves». Окрім хрестоподібних хвиль тіла-хвилепродуктори, що коливаються на поверхні рідини, збуджують також звичайні резонансні хвилі, які розповсюджуються уздовж напрямку коливань хвилепродуктора. Такі хвилі збуджуються при низьких частотах і мають амплітуди, менші по величині, ніж хрестоподібні. Інтерес представляє аналіз переходу від одного класу хвиль до іншого, класифікація та умови резонансів, порівняння теоретичних висновків з результатами експериментальних досліджень. Саме таким питанням присвячена дана робота, в якій розглядаються можливі хвильові структури

на вільній поверхні рідини в прямокутному басейні, коли один його торць є хвилепродуктором.

Математичне формулювання задачі

При припущенні, що рідина є невязкою і нестисливою, розглянемо хвилі на її поверхні в басейні довжини L , ширини b та глибини h (рис. 1). Для теоретичного розгляду задачі введемо декартову систему координат з початком O на вільній незбудженій поверхні рідини. Хвилепродуктор розташований в торці при $x = 0$.

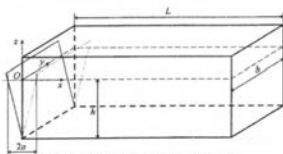


Рис. 1. Басейн з хвилепродуктором

Переміщення хвилепродуктора в напрямку $\vec{x}$ описуються функцією

$$u(x, t) = F(z) \sin(\omega t) = \left(a + \frac{a}{h} z\right) \sin(\omega t), \quad (1)$$

де $2a$ - розмах коливань хвилепродуктора на поверхні рідини; ω - кругова частота.

При експериментальних дослідженнях частота хвильпродуктора $f_e = \omega / (2\pi)$ змінювалась в діапазоні $0 < f_e \leq 3$ Гц. При відносно низьких частотах f_e збуджуються лише хвилі в напрямку Ox , потім при підвищенні f_e і в напрямку Oy , тобто хрестоподібні хвилі. Вважаючи рідину ідеальною, а її рух безвихровим, вводимо для поля швидкостей потенціал $\varphi(x, y, z, t)$, при $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Тоді для φ з умови нерозривності маємо рівняння

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ при } F(z) \cos \omega t \leq x \leq L, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq \xi(x, y, t), \quad (2)$$

де $\xi(x, y, t)$ - зміщення вільної поверхні.

Динамічна і кінематична умова на вільній поверхні мають, відповідно, вигляд

$$\varphi_z + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g\xi = P(t) \text{ при } z = \xi(x, y, t); \quad (3)$$

$$\varphi_z = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\xi + \xi_t \text{ при } z = \xi(x, y, t), \quad (4)$$

де g - прискорення вільного падіння; $P(t)$ - довільна функція часу [2], нижні індекси x, y, z, t позначають часткові похідні.

Крім того, маємо наступні однорідні граничні умови. Нормальна складова швидкості рідини дорівнює нулеві при жорстких границях

$$\begin{cases} \varphi_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ \varphi_y = 0 & \text{при } y = 0; y = b; \\ \varphi_x = 0 & \text{при } x = L. \end{cases} \quad (5)$$

Кінематична умова на хвильпродукторі, що де коливається, має вигляд

$$\varphi_x = \omega F(z) \cos \omega t + F'(z) \varphi_z \sin \omega t \text{ при } x = F(z) \sin \omega t. \quad (6)$$

Експериментальні спостереження свідчать про те, що спочатку хвильпродуктор створює вимушені стоячі хвилі в напрямку свого руху по осі Ox , а потім поблизу хвильпродуктора з'являються стоячі хвилі в напрямку, перпендикулярному його руху, вздовж осі Oy , причому кількість гребенів хвиль змінюється при збільшенні швидкості коливань ω хвильпродуктора. Таким чином, хрестоподібні хвилі (cross-waves) мають резонансний характер, кожна окрема хвильова структура має свою «власну» частоту.

Вважаємо, що ці хвильові структури можуть бути апроксимовані такими динамічними характеристиками, як власні форми, що є розв'язками лінійних задач. Тому необхідно

розглянути лінійні крайові задачі, що відповідають нелінійній проблемі (2)-(6). Крім того, вважаємо, що розмах коливань хвильпродуктора $2a$ малий порівняно з характерним розміром, тобто можна ввести, скажімо, малий параметр $\varepsilon_0 = a\omega^2 / g$.

Розв'язок лінійної задачі (7)-(8) може бути знайдений методом Грінберга, що традиційно застосовується. Ми ж пропонуємо використовувати аналітичний метод суперпозиції, оскільки він дає ясну фізично прозору картину перекачування енергії від хвильпродуктора в коливання вільної поверхні рідини. Ідею метода суперпозиції вперше висунув Ляме [3]. Згідно цього методу, потенціал φ може бути записаний у вигляді суми трьох гармонічних функцій

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (9)$$

Потенціал φ_0 є розв'язком наступної граничної задачі

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad (10)$$

$$\text{при } 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq b; -h \leq z \leq 0;$$

$$\begin{cases} (\varphi_0)_z = (\xi_0(t))_t & \text{при } z = 0; \\ (\varphi_0)_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ (\varphi_0)_x = (\tilde{F}_0(t))_t & \text{при } x = 0; \\ (\varphi_0)_x = 0 & \text{при } x = L; \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при } y = 0; \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при } y = b. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \xi_0(t) = \frac{1}{bL} \int_0^b \int_0^L \xi(x, y, t) dx dy; \\ \tilde{F}_0(t) = \frac{1}{hb} \int_0^b \int_0^L \tilde{F}(z, y, t) dy dz; \\ \left(\text{якщо від } u \text{ не залежить, то} \right. \\ \left. \tilde{F}_0(t) = \frac{1}{h} \int_0^L \tilde{F}(z, t) dz \right). \end{cases} \quad (12)$$

Якщо $F(z) = a + \frac{a}{h}z$, то

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(t) &= \frac{\sin \omega t}{h} \int_{-h}^0 \left(a + \frac{a}{h}z \right) dz = \\ &= \frac{\sin \omega t}{h} \left(az - \frac{a}{2h}z^2 \right) \Big|_{-h}^0 = \frac{a \sin \omega t}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

$\xi_0(t)$, $\tilde{F}_0(t)$ описують коливання середнього рівня вільної поверхні рідини та усереднене по поверхні переміщення хвильпродуктора. Ці величини зв'язані співвідношенням

$$(\xi_0)_t, bL - \tilde{F}_{0,t}(t)hb = 0, \quad (14)$$

що виражає закон збереження маси для нестисливої рідини. Таким чином, для випадку руху хвильпродуктора, що розглядається (1), (13)

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah \sin \alpha x}{2L} = \left(\frac{ah}{2L} \right) \sin \alpha x. \quad (15)$$

Потенціал φ_1 визначається з розв'язку наступної лінійної задачі

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (16)$$

при $0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq b$; $-h \leq z \leq 0$;

$$\begin{cases} (\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t & \text{при } z = 0; \\ (\varphi_1)_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = 0; \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = L; \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = 0; \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = b, \end{cases} \quad (17)$$

При цьому для φ_1 граничні умови (17) є однорідними в напрямках абсцис і ординат, тобто Ox та Oy , а неоднорідними (похідна по z не дорівнює нулю) в напрямку Oz . Тому φ_1 згідно теоремі Стєклова про розв'язок задачі Штурма-Ліувіля буде представлятися у вигляді суми по повним і ортогональним системам власних функцій по x та y , а по z функції не будуть становити собою повну систему.

Для потенціалу φ_2 гранична задача формулюється наступним чином

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (18)$$

при $0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq b$; $-h \leq z \leq 0$;

$$\begin{cases} (\varphi_2)_z = 0 & \text{при } z = 0; \\ (\varphi_2)_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ (\varphi_2)_x = (\tilde{F} - \tilde{F}_0)_t & \text{при } x = 0; \\ (\varphi_2)_x = 0 & \text{при } x = L; \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при } y = 0; \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при } y = b. \end{cases} \quad (19)$$

Оскільки φ_2 має однорідні граничні умови по y та z , і неоднорідні по x , то потенціал φ_2 може бути представлений у вигляді суми по повним і ортогональним системам власних функцій по y

та z . Слід відзначити, що потенціал φ_2 не створює змін швидкості ξ на вільній поверхні при $z = 0$, він створює компоненту тиску, як впливає з динамічної умови на вільній поверхні (3). Причому ця компонента має частоту коливань хвильпродуктора $\tilde{F}(t)$ в лінійному наближенні задачі.

Важливо зауважити, що крайові задачі (10)-(11), (16)-(17) і (18)-(19) є задачами Неймана, коли задана нормальна похідна гармонічної функції. Для отримання розв'язку без особливостей в кутових точках друга теорема Гріна вимагає, щоб ці задані значення задовольняли умови нульового потоку через границю. Ця властивість задовольняється для всіх трьох граничних задач. Розв'язок крайової задачі для φ_0 може бути знайдено у вигляді

$$\varphi_0 = -\tilde{F}_0(t) \frac{(x-L)^2}{2L} + \xi_0 \frac{(z+h)^2}{2h} \quad (20)$$

(тут точка означає похідну по часу). При цьому, з огляду на умову (14), яка дає $\dot{\xi}_0 = \dot{\tilde{F}}_0 \frac{h}{L}$, рівняння Лапласа для

$$\varphi_0 = \frac{\tilde{F}}{2L} [-(x-L)^2 + (z+h)^2] \quad (21)$$

задовольняється тотожно.

Розв'язок лінійної задачі (16)-(17) може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \times \\ \times \frac{\text{ch} [k_{nm}(z+h)]}{\text{ch} (k_{nm}h)} \end{aligned} \quad (22)$$

по повним системам функцій $\cos(n\pi x/L)$ та $\cos(m\pi y/b)$ з невідомими амплітудами $\varphi_{nm}(t)$, де

$$k_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}. \quad (23)$$

Система функцій $\cos(n\pi x/L)$ та $\cos(m\pi y/b)$ є повною ортогональною системою, тому довільна функція, яка залежить від x та y , може бути представлена як ряд Фур'є по цим функціям. Тому функція переміщень, тобто хвиль, вільної поверхні рідини $\xi(x, y, t) - \xi_0(t)$ може бути представлена у вигляді

$$\xi(x, y, t) - \xi_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (24)$$

Гранична умова (17) виду $(\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t$ дає співвідношення між амплітудами рядів (22) та (24)

$$\varphi_{nm} = \xi_{nm} (k_{nm} \operatorname{th}(k_{nm} h))^{-1}. \quad (25)$$

Потенціал швидкості $\varphi_2(x, y, z, t)$ може бути записаний в формі рядів Фур'є по повним системам $\cos(m\pi y/b)$ і $\cos(j\pi z/h)$, тому загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi_2 = \sum_m \sum_j \Phi_{mj}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \times \frac{\operatorname{ch}[\alpha_{mj}(x-L)]}{\operatorname{ch}(\alpha_{mj} L)}; \quad (26)$$

$$\alpha_{mj} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{b^2} + \frac{j^2 \pi^2}{h^2}}. \quad (27)$$

Використовуючи граничну умову (19) при $x=0$ виду $(\varphi_2)_x = (\bar{F} - \bar{F}_0)_t$, маємо

$$\dot{\bar{F}}_{mj}(t) = \bar{\Phi}_{mj}(t) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{mj} L)}{\alpha_{mj} \operatorname{sh}[\alpha_{mj}(-L)] h b} \times \int_0^b \int_0^h (\bar{F} - \bar{F}_0) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} dy dz. \quad (28)$$

Хрестоподібні резонансні хвилі

Нехай частота коливань хвилепродуктора ω (1) в два рази перевищує значення одної з власних частот ω_{nm} коливань вільної поверхні рідини

$$\omega \approx 2\omega_{nm}. \quad (55)$$

В такому випадку коливання вільної поверхні рідини апроксимуємо власною формою, яка має частоту ω_{nm} , а саме

$$\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} + \xi_{00}. \quad (56)$$

Відшукувати амплітуду резонансної форми, функцію $\xi_{nm}(t)$, будемо в такій формі:

$$\xi_{nm}(t) = \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \left[p_1(\tau_1) \cos \frac{\omega t}{2} + q_1(\tau_1) \sin \frac{\omega t}{2} \right], \quad (57)$$

де $\lambda_1 = k_{nm}^{-1} \operatorname{th}(k_{nm} h)$; $\varepsilon_1 = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}$ - новий малий параметр; τ_1 - безрозмірний повільний час

$$\tau_1 = \frac{1}{4} \varepsilon_1 \omega t. \quad (58)$$

Гаррет [4] вперше показав, що хрестоподібні хвилі виникають при існуванні коливань середнього рівня рідини, а якщо не відбувається коливань середнього рівня - тоді не буде хрестоподібних хвиль. Проте, він все-таки вказував, що для збудження хрестоподібних хвиль коливання середнього рівня можуть бути недостатні. Хрестоподібні хвилі мають отримувати енергію безпосередньо від коливання хвилепродуктора, але довести це математично він не зміг. Коливання середнього рівня рідини $\xi_{00}(t)$ мають вигляд (15), тобто

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah}{2L} \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{2\omega_{nm}^2 L} \sin \omega t. \quad (59)$$

Якщо довжина басейну $L \gg h$, то $h/L = \varepsilon_1 \gamma$, і тоді $\xi_{00}(t)$ є величина порядку $O(\varepsilon_1^2)$, тобто нехтовно мала. Будемо розглядати саме такий випадок, коли $h/L = 0.05$, такі параметри геометрії басейну в Інституті Гідромеханіки Національної Академії Наук України. Проте, вплив потенціалу φ_0

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{a\omega}{4L} \cos \omega t [-(L-x)^2 + (z+h)^2] = \\ &= \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm} L} [(z+h)^2 - (L-x)^2] = \\ &= \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm}} \left[\frac{1}{L} (z+h)^2 - \frac{1}{L} (L-x)^2 \right] \end{aligned} \quad (60)$$

буде враховуватись при використанні нелінійних граничних умов (3), (4) та (6).

Якщо коливання вільної поверхні апроксимуються функцією виду (56), то

$$\varphi_1 \approx \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch}[k_{nm}(z+h)]}{\operatorname{ch}(k_{nm} h)}. \quad (61)$$

Застосовуючи нелінійну граничну умову (6) для потенціалу $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$, використовуючи розкладання в околиці $x=0$ і, при збереженні членів $O(\varepsilon_1^{1/2})$, в результаті отримуємо вираз для φ_2 .

Отже, кінематична умова на границі хвилепродуктора (6), що коливається

при $x = F(z) \sin \omega t$, та не залежить від y , має вигляд

$$(\varphi_0)_x + (\varphi_1)_x + (\varphi_2)_x = \omega F(z) \cos \omega t + F''(z) [(\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z + (\varphi_2)_z] \quad (62)$$

при

$$x = F(z) \sin \omega t = a \left(1 + \frac{1}{h} z \right) \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h} z \right) \sin \omega t.$$

$$(\varphi_1)_x = 0 \text{ при } x = 0, \text{ тому } (\varphi_1)_x \text{ буде } O(\varepsilon_1^{3/2})$$

при $x = \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h} z \right) \sin \omega t$, оскільки $(\varphi_1)_x$

розкладаємо в ряд Тейлора, в результаті маємо

$$(\varphi_1)_x = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch} k_{nm}(z+h)}{\operatorname{ch} k_{nm} h} \times \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h} z \right) \sin \omega t = O(\varepsilon_1^{3/2}), \quad (63)$$

при тому, що $\varphi_{nm}(t)$ має порядок $\varepsilon_{nm}(t)$ (57).

$$(\varphi_0)_x = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm}^2} \left(2 - \frac{2x}{L} \right) = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm}^2} + O(\varepsilon_1^2). \quad (64)$$

Тому з (62) отримуємо, враховуючи співвідношення типу

$$\varphi_{nm} = \varepsilon_{nm} (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{-1}, \quad (65)$$

що шуканий компонент потенціалу

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$ має вид розкладу у ряди вигляду

$$\varphi_2 = \varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\Phi}_{0j}(t) \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} + \varepsilon_1 \sin \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\Phi}_{nj}(t) \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{nj}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{nj}},$$

де

$$\bar{\Phi}_{0j} = \frac{-4g}{\omega_{nm} \alpha_{0j} \operatorname{th} \alpha_{0j} L} \int_{-h}^0 \cos \frac{j\pi z}{h} dz, \quad (66)$$

$$\bar{\Phi}_{nj} = - \frac{g \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}{\omega_{nm}^2 \alpha_{nj} \operatorname{th} \alpha_{nj} L (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)} \times \times \int_{-h}^0 \cos \frac{j\pi z}{h} dz, \quad j \neq 0; \\ \bar{\Phi}_{n0} = \frac{-g \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h}{h} \right]}{\omega_{nm}^2 h \alpha_{n0} \operatorname{th} \alpha_{n0} L (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)}, \quad j = 0.$$

Отже, φ_2 має вигляд

$$\varphi_2 = \varepsilon_1 \left[\cos \omega t \bar{\Phi}_{00} + \right. \\ \left. + \cos \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Phi}_{0j} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{nm}(t) \sin \omega t \bar{\Phi}_{n0} \cos \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{n0}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{n0}} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Phi}_{nj} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{nj}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{nj}} \right]. \quad (68)$$

Відзначимо, що члени розкладання φ_2 , які при множинику $\varepsilon_1 \varepsilon_{nm}(t) \sin \omega t$ мають порядок $O(\varepsilon_1^{3/2})$, оскільки виконується співвідношення

$$\ddot{\varepsilon}_{n0} + \omega_{n0}^2 \varepsilon_{n0} + \gamma_1 \varepsilon_{n0} \ddot{\varepsilon}_{n0} + \gamma_2 \varepsilon_{n0}^2 \dot{\varepsilon}_{n0} = \gamma \sin \omega t, \quad (69)$$

Всі відомі роботи іноземних вчених [5-10], які присвячені поясненню існування хрестоподібних хвиль, використовували аналітичний розв'язок для аналога потенціалу $\varphi^* = \varphi_0 + \varphi_2$, який був знайдений Хавелоком у 1929 році [12, 13] для напівнескінченного прямокутного басейну. Це рішення використовувалося науковими школами під керівництвом Майлза [8, 10], Ліхтера [9] та Махоні [5] і Джонсом [7]. Рішення для напівнескінченного прямокутного басейну має вигляд не рядів Фур'є як рішення (68), а як обернене Фур'є перетворення, тобто має інтегральний вид. Воно вочевидь є іншим і відрізняється від рішення, яке ми вперше побудували для потенціалу у скінченному прямокутному басейні (68).

Для знаходження амплітуди хрестоподібних хвиль $\varepsilon_{nm}(t)$ необхідно враховувати динамічну граничну умову (3) і кінематичну (4). Для цього

розкладемо ці умови в ряд Тейлора, при тому, що $\varphi_1 \in O(\varepsilon_1^{1/2})$, φ_0 і $\varphi_2 \in O(\varepsilon_1)$.

При утриманні членів порядку $O(\varepsilon_1^{3/2})$ в умові (4), помноживши на $\cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{L}$ та інтегруючи по всій вільній поверхні рідини при $z = 0$, маємо

$$\begin{aligned} & \varphi_{nm}(t) k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h + \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm} L} \xi_{nm} - \\ & - (\varepsilon_1 \cos \omega t) \xi_{nm}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \bar{\Phi}_{0j} \times \\ & \times 2 \int_0^L \cos^2 \frac{\pi x}{L} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx = \dot{\xi}_{nm}(t) + \\ & + \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm} L} \xi_{nm} \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\pi}{L} (L-x) \sin 2 \frac{\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Таким чином, остаточно можемо записати

$$\varphi_{nm}(t) = \frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t, \quad (70)$$

де

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} \left[\frac{g}{\omega_{nm} L} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \bar{\Phi}_{0j} \times \right. \\ & \times 2 \int_0^L \cos^2 \frac{\pi x}{L} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx + \\ & \left. + \frac{g}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{\pi x}{L} dx \right] \end{aligned}$$

Доданок $\varepsilon_1 D \xi_{nm}(t) \cos \omega t$ виражає вплив потенціалів φ_0 і φ_2 на величину $\varphi_{nm}(t)$ - амплітуди φ_1 . Цей член буде приводити, як ми побачимо далі, до параметричного резонансу, як члени з співмножниками $\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t$ в (68).

Розкладемо в ряд Тейлора динамічну умову (3), залишивши члени $O(\varepsilon^{3/2})$.

Підставимо (60), (61), (68), (69) і (70) в (71) та помножимо на $\cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{L}$.

Проінтегруємо по всій вільній поверхні рідини при $z = 0$.

$$\begin{aligned} & \dot{\xi}_{nm} - \varepsilon_1 (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h) \dot{\xi}_{nm} D \cos \omega t + \\ & + \varepsilon_1 (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h) \xi_{nm} D \omega \sin \omega t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} + \frac{9}{16} \varepsilon_{nm}^2 k_{nm}^2 \dot{\xi}_{nm} + \frac{3}{4} \varepsilon_{nm} k_{nm}^2 \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ & + \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm} D_1 \sin \omega t + \varepsilon_1 \omega D_1 \xi_{nm} \cos \omega t = 0, \quad (72) \end{aligned}$$

де

$$D_1 = \bar{\Phi}_{n0} b_{m0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Phi}_{mj} b_{mjn}.$$

Враховуючи, що $\dot{\xi}_{nm} \approx -\omega_{nm}^2 \xi_{nm} + O(\varepsilon_1)$, одержуємо рівняння лінійних коливань з двома коефіцієнтами, які періодично змінюються в часі, тобто рівняння типу Мат'є:

$$\begin{aligned} & \dot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ & + \varepsilon_1 D_2 \xi_{nm} \sin \omega t + \varepsilon_1 D_3 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0, \quad (74) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} D_2 &= k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \omega D - \omega_{nm}^2 D_1; \\ D_3 &= -k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D + 2 \omega_{nm} D_1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $D_1 < 0$, оскільки згідно (67)

$$\bar{\Phi}_{n0} < 0.$$

Головний резонанс рівнянь виду (74) реалізується при $\omega \approx 2 \omega_{nm}$ (55), тому ми й вибрали представлення у вигляді (57), коли

$$\begin{aligned} \xi_{nm}(t) &= \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \left[p_1(\tau_1) \cos \frac{\omega t}{2} + q_1(\tau_1) \sin \frac{\omega t}{2} \right]; \\ \lambda_1 &= \frac{\operatorname{th}(k_{nm} h)}{k_{nm}}. \end{aligned}$$

Отже, маємо рівняння для резонансної амплітуди

$$\begin{aligned} & \dot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ & + \varepsilon_1 D_3 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t - \varepsilon_1 D_4 \xi_{nm} \sin \omega t = 0, \quad (75) \end{aligned}$$

де

$$D_4 = \omega_{nm}^2 D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D \omega.$$

При цьому ми припускаємо виконання резонансної умови близькості частот ω і $2 \omega_{nm}$, тобто нехай

$$\omega^2 - 4 \omega_{nm}^2 = \frac{\varepsilon_1}{2} \omega^2 \beta_1.$$

Крім того, ми представимо амплітуду ξ_{nm} у вигляді (57), (58).

Використовуючи метод усереднення Боголюбова-Митропольського, запишемо

$$\dot{\xi}_{nm}(t) = \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \frac{\omega}{2} \left[q_1 \cos \frac{\omega t}{2} - p_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right], \quad (76)$$

звідки диференціюванням одержуємо

$$\ddot{\xi}_{nm}(t) = -\frac{\omega^2}{4} \xi_{nm} + \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \frac{\omega}{2} \left[\frac{dq_1}{dt} \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{dp_1}{dt} \sin \frac{\omega t}{2} \right]. \quad (77)$$

А диференціюючи (65) і порівнюючи з (76), можемо записати

$$\frac{dq_1}{d\tau_1} \cos \frac{\omega t}{2} + \frac{dp_1}{d\tau_1} \sin \frac{\omega t}{2} = 0. \quad (78)$$

Користуючись (75) та підставляючи в (65) і (76), одержуємо друге рівняння, яке з (78) складає систему для визначення $\frac{dp_1}{d\tau_1}$ і $\frac{dq_1}{d\tau_1}$, а саме

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau_1} \sin \frac{\omega t}{2} - \frac{dq_1}{d\tau_1} \cos \frac{\omega t}{2} = \\ = -\beta_1 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) - \\ - \frac{9}{8} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right)^3 + \\ + \frac{3}{2} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(q_1 \cos \frac{\omega t}{2} - p_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right)^2 \times \\ \times \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) + \\ + 4 \frac{D_1}{\omega} \left(q_1 \cos \frac{\omega t}{2} - p_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \cos \omega t - \\ - 8 \frac{D_1}{\omega^2} \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (79)$$

В результаті з системи (78)-(79) одержуємо,

Після усереднення по швидкому часу $\frac{\omega}{2} t$

остаточно запишемо

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\beta_1 q_1 - \frac{A_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) q_1 + \beta_3 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = \beta_1 p_1 + \frac{A_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) p_1 - \beta_3 q_1, \end{cases} \quad (80)$$

де

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} &= \frac{27}{32} k_{nm}^2 \lambda_1^3 - \frac{3}{2} \frac{1}{4} k_{nm}^2 \lambda_1^2 = \\ &= \frac{3}{8} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{15}{32} k_{nm}^2 \lambda_1^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{2D_1}{\omega} - \frac{4D_1}{\omega^2} = D_1 + \frac{D(k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{1/2}}{g^{1/2}} = \\ &= \tilde{\Phi}_{n0} b_{n0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{nj} b_{njn} + \\ &+ \frac{1}{(k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{1/2}} \left[\frac{2g^{1/2}}{\omega_{nm} L} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \tilde{\Phi}_{0j} \times \right. \\ &\times \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx + \\ &\left. + \frac{g^{1/2}}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Додамо також в'язке демпфірування виду

$$\varepsilon \delta \dot{\xi}_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b},$$

тоді для компонент резонансної хвилі система (80) отримає вигляд [11]

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\alpha p_1 - \vartheta q_1 + \beta_3 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = -\alpha q_1 + \vartheta p_1 - \beta_3 q_1, \end{cases} \quad (82)$$

де $\vartheta = \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) \right]$; $\alpha = \frac{\delta}{\omega_{nm}}$, δ -

декремент затухання хвилі.

Положення рівноваги, яке відрізняється від

$p_1 = q_1 = 0$ одержуємо з умов $\frac{dp_1}{d\tau_1} = 0$, $\frac{dq_1}{d\tau_1} = 0$:

$$\begin{aligned} -\alpha(p_1^2 + q_1^2) + \beta_3(p_1^2 - q_1^2) &= 0; \\ 2 \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) \right] p_1 q_1 - 2\beta_3 p_1 q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (83)$$

звідки маємо

$$p_1^2 + q_1^2 = \frac{2(\beta_3 - \beta_1)}{A_1}; \quad (84)$$

$$-\frac{2(\beta_3 - \beta_1)}{A_1} \alpha + \beta_3(p_1^2 - q_1^2) = 0;$$

В результаті можна записати, що регулярні сталі хрестоподібні хвилі характеризуються співвідношенням

$$q_1^2 = p_1^2 - \frac{\alpha}{A_1} \frac{\beta_3 - \beta_1}{\beta_3}, \quad (85)$$

звідки остаточно одержуємо амплітуди хрестоподібних хвиль

$$p_1^2 = \chi(1 + \chi_1); \quad q_1^2 = \chi(1 - \chi_1), \quad (86)$$

де

$$\chi = \frac{\beta_3 - \beta_1}{A_1}; \quad \chi_1 = \frac{\alpha}{2\beta_3}.$$

Амплітуди хрестоподібних хвиль мають ненульове значення у випадку, коли існує

$$\frac{\beta_3 - \beta_1}{A_1} > 0, \quad \text{тобто коли } \beta_3 > \beta_1, \quad \text{що означає}$$

існування значного за величиною коефіцієнта

$$\text{збудження } \frac{\beta_3}{A_1} \quad (81). \quad \text{Зауважимо, що цей}$$

коефіцієнт має ненульові компоненти як від потенціалу φ_1 , так і від потенціалу φ_2 , аналітичний вигляд якого знайдено вперше для скінченного прямокутного басейну у вигляді (68). Цей коефіцієнт буде ненульовим при наявності коливань хвиленродуктора, він урахує

Список використаних джерел

1. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces / *M. Faraday* // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* – 1831. – A 121. – 299–340.
2. Лэмб Г. Гидродинамика / Г. Лэмб. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 928 с.
3. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides / *G. Lamé.* – Paris: Bachelier, 1852. – 335 p.
4. *Garrett C. J. R.* Cross waves / *C. J. R. Garrett* // *J. Fluid Mech.* – 1970. – 41. – P. 837–849.
5. *Mahony J. J.* Cross-waves. Part 1. Theory / *J. J. Mahony* // *J. Fluid Mech.* – 55, 2. – P. 229–244.
6. *Barnard B. J. S.* Cross-waves. Part 2. Experiments / *B. J. S. Barnard, W. G. Pritchard* // *J. Fluid Mech.* – 55, 2. – P. 245–255.
7. *Jones A. F.* The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric

безпосередню перекачку енергії від коливань хвиленродуктора в резонансному хрестоподібному хвилі.

Висновки

Побудовано нову математичну модель збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини та запропоновано методику отримання рішення на основі застосування методу суперпозиції Ляме, яке описує безпосередню перекачку енергії від хвиленродуктора в хрестоподібні хвилі. Вперше отримано аналітичний розв'язок для хрестоподібних хвиль у скінченних по розмірам прямокутних басейнах. Цей розв'язок суттєво відрізняється від існуючого та широко використовуваного розв'язку, отриманого Хавелоком для хвиль у напівнескінченному прямокутному басейні.

- resonance / *A. F. Jones* // *J. Fluid Mech.* – 1984. – 138. – P. 53–74.
8. *Miles J. W.* Parametrically excited, standing cross-waves / *J. W. Miles* // *J. Fluid Mech.* – 1988. – 186. – P. 119–127.
9. *Ayanle H.* Spanwise modal competition in cross-waves / *H. Ayanle, A. J. Bernoff, S. Lichter* // *Physica D.* – 1990. – 43. – P. 87–104.
10. *Miles J. W.* Parametrically forced surface waves / *J. W. Miles, D. Henderson* // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1990. – Vol. 22. – P. 143–165.
11. *Miles J. W.* Internally resonant surface waves in circular cylinder / *J. W. Miles* // *J. Fluid Mech.* – 1984. – 149. – P. 1–14.
12. *Havelock T. H.* Forced surface waves on water / *T. H. Havelock* // *Phil. Mag.* – 1929. – 8 (7). – P. 569–576.
13. *Mandal B. N.* The plane vertical wavemaker problem – revisited / *B. N. Mandal, A. Chakrabarti* // *Appl. Math. Lett.* – 1988. – 1, 3. – P. 255–258.

Надійшла до редколегії 22.11. 2011

УДК 517.9

А.П. Крєневич, к.ф.-м.н., доцент

Чисельне інтегрування диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

Для системи диференціальних рівнянь вигляду $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt$ запропоновано чисельний метод знаходження її розв'язків.

Ключові слова: нелінійна система; система, не розв'язана відносно похідної; чисельне інтегрування.

E-mails: krenevich@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

1 Вступ

Стрімкі темпи розвитку техніки і технологій породжують численні задачі, пов'язані з розв'язанням тих чи інших математичних задач. Сучасна математика активно розвивається і разом з нею розвиваються аналітичні методи розв'язання задач. Проте, для більшості сучасних прикладних задач властива ситуація, коли знайти точний розв'язок аналітичними методами або неможливо, або це вимагає величезних витрат часу. У зв'язку з цим з'являються нові методи наближених обчислень, які покликані розв'язати ту чи іншу прикладну задачу з достатньою точністю.

У цій роботі викладено ідею методу чисельного розв'язання нелінійного диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної.

2 Основні результати

Розглядається система диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

$$d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt, \quad (1)$$

де $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$.

Тут f, g – неперервні за сукупністю змінних d -вимірні функції, такі, що існують додатні сталі L_g, L_f, K і для всіх $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$, виконуються нерівності

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq L_g |x - y|, \quad (2)$$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_f |x - y|, \quad (3)$$

A.P. Krenevych, PhD, Associate Professor

Numerical method of integration of systems not solved relative to the derivative

We proposes the numerical method of finding of the solutions of the nonlinear differential system $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt$.

Key Words: nonlinear system, system not solved relative to the derivative; numerical methods.

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad (4)$$

причому $L_g < 1$.

У роботі вивчається проблема відшукування наближених розв'язків рівняння (1) при довільній початковій умові.

У випадку, коли функція $g(t, x)$ є неперервно-диференційованою за сукупністю змінних, причому її похідна по змінній x у жодній з пар точок (t, x) не дорівнює 1, то рівняння (1) легко зводиться до звичайного диференціального рівняння

$$x' = \frac{f(t, y) + g_t(t, x)}{1 - g_x(t, x)}, \quad (5)$$

для знаходження розв'язків якого можна використати будь-який з відомих методів (чи точних, чи наближених) розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

Проте, якщо функція $g(t, x)$ є довільною неперервною функцією, то постає питання безпосереднього розв'язання вихідного рівняння (1).

З [1] відомо, що система (1) має єдиний розв'язок при довільній початковій умові

$$x(0) = x_0, \quad (6)$$

і є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 - g(0, x_0) + g(t, x(t)) + \int_0^t f(s, x(s))ds. \quad (7)$$

У певному сенсі інтегральне рівняння є зручнішим за вихідне диференціальне рівняння, до того ж, воно містить у собі повну постановку задачі.

Зауважимо, що з єдиності розв'язку рівняння (7) і неперервності функції $g(t, x)$ випливає, що відшукування розв'язку рівняння (7) – коректно поставлена задача.

Таким чином, розв'язання диференціального рівняння (1), не розв'язаного відносно похідної, зводиться до питання відшукування розв'язків інтегрального рівняння (7).

У роботі [1] для доведення існування і єдиності розв'язку рівняння (7) застосовувався метод послідовних наближень, побудований за схемою:

$$x_0(t) = x_0. \quad (8)$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 - g(0, x_0) + g(t, x_n(t)) +$$

$$+ \int_0^t f(s, x_n(s)) ds, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

і доведено, що послідовність $\{x_n(t) : n \geq 1\}$ збігається рівномірно на проміжку $[0, T]$ до розв'язку рівняння (7). Проте, цей метод важко запрограмувати, оскільки на кожній ітерації потрібно аналітично обчислювати значення інтегралів. Тому більш практичним у цій ситуації використати інший чисельний метод, наприклад, різницький метод або метод Гальоркіна. Наведемо основні етапи застосування методу Гальоркіна.

Виберемо довільний чисельний проміжок $[0, T]$, на якому будемо шукати розв'язок (7). Введемо функцію

$$F(t, s, x) = \begin{cases} 0, & t > s, \\ f(s, x), & t \leq s. \end{cases} \quad (10)$$

і перепишемо рівняння (7) у вигляді

$$x(t) = x_0 - g(0, x_0) + g(t, x(t)) + \int_0^t F(t, s, x(s)) ds. \quad (11)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді розкладу по повній системі функцій $\{\varphi_k(t) : k \geq 1\}$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \quad (12)$$

Оскільки на функцію $x(t)$ не накладається жодних крайових умов, то від системи $\{\varphi_k(t) : k \geq 1\}$ вимагатимемо лише повноту. Для відшукування наближеного розв'язку виберемо перші N функцій з системи $\{\varphi_k(t) : k \geq 1\}$. Розклад (12) набуде вигляду

$$x(t) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t), \quad (13)$$

Підставляючи розклад (13) у рівняння (11) і вимагаючи ортогональності нев'язки

$$\varepsilon_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t) - x_0 + g(0, x_0) -$$

$$- g\left(t, \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t)\right) - \int_0^t F\left(t, s, \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(s)\right) ds$$

до всіх функцій $\{\varphi_k(x) : 1 \leq k \leq N\}$ отримаємо нелінійну алгебраїчну систему для знаходження c_k , які і визначають наближений розв'язок рівняння (7).

3 Висновки

У роботі розглянуто клас нелінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Для таких рівнянь запропоновано чисельний метод знаходження їхніх розв'язків. Ці результати стануть у нагоді при дослідженні та оцінці точних розв'язків вищезгаданих рівнянь та можуть практично застосовуватися для конкретних задач, що виникають при моделюванні різних фізичних процесів

Список використаних джерел

1. Крєневич А.П., Боговіс А.Р. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки – 2009. – №1. – С. 55–59.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
3. Самарский А. А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987.

Надійшла до редколегії 10.09.2011

УДК 519.9

Рустамова А.В., аспірант

**Умови існування слабких квазіперіодичних
розв'язків лагранжових систем на
одиничній сфері**

Встановлено достатні умови існування слабких квазіперіодичних розв'язків для натуральних лагранжових систем з квазіперіодичною за часом силовою функцією на двовимірній одиничній сфері.

Ключові слова: лагранжева система, многовид, квазіперіодичний розв'язок.

E-mail: anna_rustamova@hotmail.com

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

Вступ

Нехай $i: S^2 \rightarrow E^3$ – гладке ізометричне вкладення одиничної двовимірної сфери S^2 у евклідов простір $(E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Домовимося отожденовати, використовуючи при цьому однакові позначення, множини S^2 та $i(S^2)$, а також вектори $\xi \in TS^2$ та $i_*\xi \in E^3$ (i_* – похідна відображення i). Нехай (θ, ϕ) – стандартні координати широти – довготи на S^2 , $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Для цих координат ріманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$, індукована на дотичному розшаруванні TS^2 скалярним добутком простору $(E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, має вигляд

$$d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Розглянемо на S^2 натуральну лагранжеву систему з лагранжіаном $L = T + W$, де

$$T = \frac{\| \dot{x} \|^2}{2} = \frac{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2}{2}$$

– кінетична енергія, $\| \cdot \|$ – норма, породжена скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $W(\omega, \theta, \phi)$ – квазіперіодична за часом силова функція,

A. Rustamova, post-graduate student

**Existence conditions of weak quasiperiodic
solutions for Lagrangian systems on a unit
sphere**

We establish sufficient conditions for the existence of weak Besicovitch quasiperiodic solutions for natural Lagrangian systems on a two-dimensional unit sphere with time-quasiperiodic force function.

Key Words: Lagrangian system, manifold, quasiperiodic solution.

породжена гладкою функцією $W: T^m \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($T^m = \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$ – m -вимірний тор) з частотним вектором $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$, де $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, m}$ – раціонально незалежні компоненти. Позначимо через $H(T^m, E^3)$ простір інтегровних з квадратом евклідової норми функцій $u(\cdot): T^m \rightarrow E^3$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 = (2\pi)^{-m} \int_{T^m} \langle \cdot, \cdot \rangle d\varphi$ – скалярний добуток у ньому. Простір $H_0^1(T^m, E^3)$ утворюють інтегровні з квадратом норми функції, які мають узагальнені в сенсі Соболя похідні $D_\omega u$ за напрямком ω .

Застосування варіаційного методу до задачі про квазіперіодичні розв'язки лагранжевої системи $(S^2; T + W)$ полягає у відшукуванні функції $x = u(\omega t)$ такої, що $u(\phi)$ реалізує (локальний) мінімум функціоналу

$$J[u] = \int_{T^m} \left[\frac{1}{2} \|D_\omega u(\varphi)\|^2 + W(\varphi, u(\varphi)) \right] d\varphi \quad (1)$$

у класі функцій $u \in H_0^1(T^m, E^3)$, $u(T^m) \subset S^2$.

У роботах [4], [5] зазначений метод було обгрунтовано у випадку, коли ріманова кривина многовиду M недоводатна. В статті [6] було застосовано й обгрунтовано варіаційний метод відшукування слабого квазіперіодичного розв'язку натуральної системи Лагранжа з квазіперіодичною

силовою функцією на многовиді M довільної, зокрема, додатної ріманової кривини. Труднощі, пов'язані з відмовою від умови недостатності ріманової кривини, вдалося подолати завдяки використанню спеціальним чином параметризованих геодезичних конформно еквівалентної ріманової метрики

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V|_{T_x M} := e^{V(x)} \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_x M},$$

де $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – відповідним чином дібрана гладка функція. Дана робота присвячена застосуванню результатів [6] до визначення максимальної області $\Omega \subset S^2$ існування квазіперіодичного розв'язку системи $(S^2; T+W)$ та відшукування функції $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Основні результати

Символами ∇_ξ , ∇f , $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, ρ_V позначимо відповідно коваріантну похідну зв'язності Леві-Чівіта за напрямком $\xi \in TM$, градієнт функції $f(\cdot): M \rightarrow \mathbb{R}$ [1], метричний тензор, індукований скалярним добутком $e^{V(x)} \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_x M}$ (конформно еквівалентну ріманову метрику) та метрику на M , узгоджену з конформно еквівалентною рімановою метрикою. Надалі індекси координат векторів писатимемо вгорі, як це прийнято в тензорному аналізі. Нагадаємо, що для функції $V(\cdot)$, тензор Гессе $H_V(x)$ в точці x [2, розд.3.5] визначається рівністю

$$\langle H_V(x)\xi, \eta \rangle := \langle \nabla_\xi \nabla V(x), \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in T_x M.$$

Крім того для всіх $\xi \in T_x M$, в [6] були введені наступні позначення

$$\langle G_V(x)\xi, \xi \rangle := \langle H_V(x)\xi, \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle \nabla V(x), \xi \rangle^2,$$

$$\lambda_V(x) := \min_{\xi \in T_x M \setminus \{0\}} \langle H_V(x)\xi, \xi \rangle / \langle \xi, \xi \rangle^2,$$

$$\mu_V(x) := \min_{\xi \in T_x M \setminus \{0\}} \langle G_V(x)\xi, \xi \rangle / \langle \xi, \xi \rangle^2.$$

Сформулюємо також гіпотези, які нам потрібні буде перевірити для голономної в'язі, заданої у вигляді одиничної двовимірної сфери, тобто $M = S^2$.

H1: існують обмежена функція $V(\cdot) \in C^\infty(S^2; \mathbb{R})$ та обмежена область $D \subset S^2$, такі що

$$\lambda_V(x) + \frac{1}{2} \langle \nabla V(x), \xi \rangle^2 \geq 0 \quad \forall x \in D; \quad (2)$$

H2: існує нескритичне значення $v \in V(D)$ і зв'язна компонента Ω відкритої множини підрівня $V^{-1}((-\infty, v))$ з наступними властивостями:

(а) для будь-яких $x, y \in \Omega$ область D містить єдиний мінімальний відрізок ρ_V -геодезичної з кінцями x, y ;

(б) друга квадратична форма $\partial\Omega$ є додатно визначеною в кожній точці $x \in \partial\Omega$ (для всіх $x \in \partial\Omega$ обмеження форми $H_V(x)$ на $T_x \partial\Omega$ є додатно визначеною формою);

(в) функція $V(\cdot)$ задовольняє нерівність

$$\mu_V(x) \geq 2K^*(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (3)$$

де

$$K^*(x) := \max_{\sigma_x(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2} \frac{R(\eta, \xi)\xi, \eta}{\|\eta\|^2 \|\xi\|^2 - \langle \eta, \xi \rangle^2};$$

H3: функція $W(\cdot)$ задовольняє наступні нерівності

$$\lambda_W(\varphi, x) + \frac{1}{2} \langle \nabla W(\varphi, x), \nabla V(x) \rangle > 0 \quad \forall (\varphi, x) \in T^* \times \Omega$$

$$\langle \nabla W(\varphi, x), \nabla V(x) \rangle > 0 \quad \forall (\varphi, x) \in T^* \times \partial\Omega,$$

де $\lambda_W(\varphi, x)$ є мінімальним власним значенням форми Гессе $H_W(\varphi, x)$ функції $W(\varphi, \cdot): M \rightarrow \mathbb{R}$.

Слід зазначити, що виродження ріманової метрики

$$d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

в точці $\theta = 0$ можна позбутися заміною системи координат. Сформульоване нижче твердження буде доведене в наступному розділі.

Твердження 1 Нехай $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, визначимо

$$D := [0, \frac{\pi-\varepsilon}{2}] \times S^1,$$

$$V|_D = -2\text{Incos}\theta,$$

$$v = -2\text{Incos}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon).$$

Тоді умови (H1), (H2) виконуються для довільного гладкого продовження функції V на всю сферу S^2 .

Зауваження 3 твердження 1 зокрема випливає, що будь-які дві точки верхньої півсфери без екватора можна одним чином з'єднати

мінімальним відрізком ρ_V -геодезичної ріманової метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_V = \frac{1}{\cos^2 \theta} \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Природним наслідком цього твердження та теореми 2 з [6] є

Теорема 1 Нехай функція $W: \mathbb{T}^m \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ для всіх $(\varphi, \theta) \in \mathbb{T}^m \times S^1$ задовольняє наступні нерівності

$$\lambda_w(\varphi; \theta, \theta) + \operatorname{tg} \theta W'_\theta(\varphi; \theta, \theta) > 0 \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon], \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \theta \cdot W''_\theta(\varphi; \theta, \theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}-\varepsilon} > 0. \quad (5)$$

Тоді натуральна система на одиничній двовимірній сфері S^2 з лагранжіаном $L = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + W(\omega t, x)$ має слабкий квазіперіодичний розв'язок в області $[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon] \times S^1 \subset S^2$.

Простим прикладом силової функції $W(\omega t; \theta, \phi)$, що задовольняє умови (4), (5) є функція, яка не залежить від координати ϕ та має додатні першу і другу похідні по θ в D . Дійсно, для $W(\varphi; \theta, \phi) = W(\varphi; \theta)$ при

$$V(x) = -2 \ln \cos \theta$$

та дотичному векторі $e = (e^1, e^2)$, де $e^1 = \cos \alpha$,

$e^2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$, нерівності (4), (5) набувають вигляду

$$W''_\theta(\varphi; \theta) \cdot \cos^2 \alpha + W'_\theta(\varphi; \theta) \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \alpha + \operatorname{tg} \theta \cdot W'_\theta(\varphi; \theta) > 0 \quad \forall (\varphi, \theta) \in \mathbb{T}^m \times [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon],$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \cdot W'_\theta(\varphi; \frac{\pi}{2} - \varepsilon) > 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^m.$$

(обчислення форми Гессе $H_w(\varphi, x)$ такі ж, як для $\langle \nabla_x \nabla V, e \rangle$ на початку наступного розділу). Зокрема, умови (4), (5) виконуються, якщо $W'_\theta(\varphi; \theta) > 0$ та $W''_\theta(\varphi; \theta) > 0$ для всіх $\theta \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ і для всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$.

Вибір конформно еквівалентної ріманової метрики

В цьому розділі ми будемо шукати область $D \subset S^2$ та гладку функцію $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ такі, щоб виконувались нерівності (2), (3). Для полегшення обчислень будемо шукати функцію $V(x) = V(\theta, \phi)$ залежною тільки від першої координати $\theta \in [0, \pi]$

точки $x \in S^2$, тобто $V(x) = V(\theta)$. Коефіцієнтами ріманової метрики одиничної сфери S^2

$$g_{ij} d\theta d\phi = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

є $g_{11} = 1$, $g_{22} = \sin^2 \theta$ та $g_{12} = g_{21} = 0$.

Обчислимо коваріантну похідну вектора

$$\nabla V = (V'(\theta), 0)^T := (X^1, X^2)^T$$

по довільному одиничному дотичному вектору e , де

$$e^1 = \cos \alpha, \quad e^2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta},$$

параметр $\alpha \in [0, 2\pi]$, тобто

$$\nabla_e \nabla V = \begin{pmatrix} \nabla_1 X^1 & \nabla_1 X^2 \\ \nabla_2 X^1 & \nabla_2 X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix},$$

де $\nabla_i X^j = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + \sum_{m=1,2} \Gamma_{im}^j X^m$ [3, с.254].

Символи Кристофеля обчислимо за формулою [3, с.290].

$$\Gamma_{ii}^m = \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} g^{jm} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \right).$$

Дістаємо

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg} \theta,$$

всі інші $\Gamma_{ij}^m = 0$, а тоді

$$\nabla_1 X^1 = V'(\theta),$$

$$\nabla_2 X^2 = V'(\theta) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\nabla_2 X^1 = \nabla_1 X^2 = 0.$$

Отже,

$$\langle \nabla_e \nabla V, e \rangle = V'' \cdot (e^1)^2 + V' \sin \theta \cos \theta (e^2)^2 = V'' \cos^2 \alpha + V' \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \alpha.$$

Оскільки для двовимірної одиничної сфери $K^*(\theta, \phi) = 1$, нерівності (2), (3) набувають вигляду

$$V''(\theta) - \frac{1}{2} (V'(\theta))^2 \geq 0,$$

$$\left(V''(\theta) - \frac{1}{2} (V'(\theta))^2 \right) \cdot \cos^2 \alpha + V'(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \alpha \geq 2.$$

Друга нерівність справджується тоді, і тільки тоді, коли

$$\min \left\{ V'' - \frac{1}{2} U^2, U \operatorname{ctg} \theta \right\} \geq 2, \quad (6)$$

$$U = U(\theta) := V'(\theta).$$

причому перша нерівність тоді виконується автоматично.

Підберемо таку функцію U , щоб

$$U' - \frac{1}{2}U^2 = U \operatorname{ctg} \theta.$$

Це - рівняння Бернуллі, його розв'язком є функція $U(\theta) = 2 \operatorname{tg} \theta$,

для якої виконується нерівність (6), оскільки

$$\min_{U(\theta) \geq 2 \operatorname{tg} \theta} \{U'(\theta) - \frac{1}{2}U^2(\theta)\} \operatorname{ctg} \theta = 2.$$

Нарешті, проінтегрувавши рівняння

$$V'(\theta) = 2 \operatorname{tg} \theta,$$

знайдемо функцію

$$V(\theta, \phi) = V(\theta) = -2 \ln \cos \theta.$$

Отже, конформно еквівалентна ріманова метрика має вигляд

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} g_{\phi} d\phi d\phi = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta^2 + \operatorname{tg}^2 \theta d\phi^2.$$

Тепер перевіримо виконання умов (а.Н2).

Оскільки у випадку

$$L_V(x, t) = e^{V(x)} \langle x, t \rangle = \frac{\theta^2}{\cos^2 \theta} + \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \phi^2, \quad (7)$$

рівняння Ейлера-Лагранжа для екстремалей еквівалентні рівнянню геодезичних, то потрібно показати, що існує мінімальна екстремаль лагранжевої системи з лагранжіаном (7), що з'єднує довільні дві точки області D . Зробимо заміну $z = \operatorname{tg}^2 \theta$; $0 \leq z < \infty$ коли $\theta \in D$.

Враховуючи рівності

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{2 \operatorname{tg} \theta d\theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{та} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta},$$

отримасмо

$$L_V(z, z, \phi) = \frac{z^2}{4z(1+z)} + z \cdot \phi^2. \quad (8)$$

Оскільки ϕ є циклічною координатою, то досить розглянути випадок, коли початковою точкою є $(z_0, 0)$ з $z_0 > 0$, а кінцева точка має координати (z_1, ϕ_1) , де $\phi_1 \in (0, \pi]$, $z_1 \geq 0$. Рівняння Лагранжа для лагранжіана (8) мають вигляд

$$z - \frac{(1+2z)z^2}{2z(1+z)} - 2z(1+z)\phi^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(z\phi) = 0.$$

Очевидно, що ця система не має таких розв'язків, що $z(t) = 0$, $z(t) \neq 0$, $\phi(t) \neq 0$. Маємо дві сталі руху

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{4z(1+z)} + z \cdot \phi^2 &= c_1^2, \\ c_1 &= z_0 \sqrt{\frac{1}{4z_0(1+z_0)} + \frac{z_0 \phi_0^2}{z_0^2}}, \\ z\phi &= c_2 := z_0 \phi_0. \end{aligned}$$

Для фіксованих $c_1 \neq 0$, $c_2 \geq 0$, z -компонента визначається рівнянням

$$\frac{z^2}{4z(1+z)} + \frac{c_2^2}{z} = c_1^2.$$

Іншими словами зміна z -компоненти описується рухом консервативної системи з одним ступенем вільності, кінетична енергія якої $\frac{z^2}{4z(1+z)}$, а

потенціальна $\frac{c_2^2}{z}$.

Випадок, коли $c_2 = 0$ означає, що $\phi_0 = 0$ та $\phi(t) = 0$. Тому відповідна точка рухається вздовж меридіану $\phi = 0$.

Якщо $z_0 > 0$, тоді $z(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, оскільки

$$t = \frac{\sqrt{z_0(1+z_0)}}{z_0} \int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)}} \rightarrow +\infty$$

при $z(t) \rightarrow +\infty$.

Якщо ж $z_0 < 0$, тоді початкова точка спочатку досягає полюса ($z = 0$) за скінченний проміжок часу

$$\begin{aligned} t_+(z_0) &= \frac{\sqrt{z_0(1+z_0)}}{z_0} \int_{z_0}^0 \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)}} = \\ &= \frac{\sqrt{z_0(1+z_0)}}{z_0} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{1}{2} + z_0 + \sqrt{z_0^2 + z_0} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{z_0(1+z_0)}}{|z_0|} \ln \left(1 + 2z_0 + 2\sqrt{z_0^2 + z_0} \right). \end{aligned}$$

Далі вона проходить через полюс та продовжує рухатись з додатною похідною $z(t)$ вздовж меридіану $\phi = \pi$. З вище зазначеного випливає, що

$$z(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Таким чином будь-які дві точки $(z_0, 0)$ та (z_1, π) можна з'єднати найкоротшою p_* -геодезичною

Зауважимо, що наявність сингулярності у рівнянні руху

$$z = \frac{(1+2z)z^2}{2z(1+z)},$$

в точці $(z(t_*(z_0)), z(t_*(z_0))) = (0, 0)$ при $c_2 = 0$ обумовлена сингулярністю координатної системи. Як зазначено вище, такої сингулярності можна позбутися заміною системи координат.

Тепер нехай $c_2 > 0$ та $\phi_1 \in (0, \pi)$. Оскільки $\phi = \frac{c_1}{z} > 0$, то природно побудувати потрібну екстремаль як графік функції $z = \zeta(\phi)$. Роблячи заміну

$$dt = \frac{z d\phi}{c_2}$$

ми отримуємо для ζ рівняння у неявному вигляді

$$\frac{(\zeta')^2}{4\zeta^3(1+\zeta)} + \frac{1}{\zeta} = E := \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2, \quad \zeta' := \frac{d\zeta}{d\phi}. \quad (9)$$

Ми маємо показати, що існує єдиний розв'язок $\zeta(\phi)$ граничної задачі

$$\zeta(0) = z_0, \quad \zeta(\phi_1) = z_1$$

для довільно вибраного значення "енергії" E . Зауважимо, що достатньо розглянути випадок, коли $z_1 \geq z_0$ (якщо це не так, зробимо заміну $z_1 \mapsto z_0$, $\pi - \phi \mapsto \phi$). Щоб довести існування потрібного значення E , застосуємо метод пристрілки. Для цього розглянемо енергію, як функцію змінної $\alpha = -\zeta'(0)$, а саме

$$E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4z_0^3(1+z_0)} + \frac{1}{z_0}.$$

Тепер покажемо, що для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$ існує єдиний розв'язок $\zeta(\phi; \alpha)$ рівняння (9), що задовольняє початкові умови

$$\zeta(0; \alpha) = z_0, \quad \zeta'_\phi(0; \alpha) = -\alpha,$$

причому його графік перетинає лінію $z = z_1$ в єдиній точці $(\phi(\alpha), z_1) \in \zeta(\alpha) \in (0, \pi)$, і, крім того,

$$\zeta(\phi; \alpha) < z_1 \quad \forall \phi \in (0, \phi(\alpha)). \quad (10)$$

а також, що відображення $\phi(\cdot): \mathbb{R} \mapsto (0, \pi)$ є епіморфізмом. З цього випливатиме, що мінімальна екстремаль рівнянь Ейлера-Лагранжа з лагранжіаном (7), яка з'єднує точки $(\theta_0, 0)$, $(\theta_1, \phi_1) \in D$, міститься в D .

Для $\alpha \in (-\infty, 0]$ визначимо $\zeta(\phi; \alpha)$ як розв'язок початкової задачі

$$z' = 2z \sqrt{(1+z)(E(\alpha)z - 1)}, \quad \zeta(0) = z_0.$$

Цей розв'язок однозначно визначається з рівняння

$$\phi = \Phi(\zeta; z_0, \alpha) := \int_{z_0}^{\zeta} \frac{dz}{2z \sqrt{(1+z)(E(\alpha)z - 1)}}$$

та, очевидно, є монотонно зростаючою функцією від ϕ . Для фіксованого $\zeta = z_1$, функція $\Phi(z_1; z_0, \cdot): (-\infty, 0] \mapsto \mathbb{R}$, монотонно спадає від 0 до

$$\begin{aligned} \Phi(z_1; z_0, 0) &= \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{2z \sqrt{(1+z)(z/z_0 - 1)}} = \\ &= \frac{1}{4} \left[\pi - 2 \arctg \left(\frac{2z_0 + z_1 z_0 - z_1}{2 \sqrt{z_0(z_1 - z_0)(z_1 + 1)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Коли $\alpha > 0$, функція $\zeta(\phi; \alpha)$ для

$$\phi \in [0, -\Phi(\frac{1}{E(\alpha)}; z_0, \alpha)]$$

є монотонно спадною та коректно визначається з рівняння

$$\phi = -\Phi(\zeta; z_0, \alpha),$$

а при

$$\phi > -\Phi(\frac{1}{E(\alpha)}; z_0, \alpha)$$

функція $\zeta(\phi; \alpha)$ є монотонно зростаючою та визначається рівнянням

$$\phi = -\Phi(\frac{1}{E(\alpha)}; z_0, \alpha) + \Phi(\zeta; \frac{1}{E(\alpha)}, \alpha) = \Psi(\zeta; z_0, \alpha).$$

Зауважимо, що

$$\Phi(\frac{1}{E(\alpha)}; z_0, \alpha) = -\Phi(z_0; \frac{1}{E(\alpha)}, \alpha)$$

та

$$\begin{aligned} \Psi(z_1; z_0, \alpha) &= 2\Phi(z_0; \frac{1}{E(\alpha)}, \alpha) + \Phi(z_1; z_0, \alpha) = \\ &= \Phi(z_0; \frac{1}{E(\alpha)}, \alpha) + \Phi(z_1; \frac{1}{E(\alpha)}, \alpha). \end{aligned}$$

Після заміни змінної

$$u = E(\alpha)z$$

отримасмо наступне представлення

$$\Psi(z_1; z_0, \alpha) = \sum_{i=0}^1 \int_1^{E(\alpha)z_i} \frac{du}{2u \sqrt{(1 + \frac{u}{E(\alpha)})(u-1)}}.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Psi(z_1; z_0, \alpha) = \int_1^{\infty} \frac{du}{u \sqrt{u-1}} = \pi,$$

та, очевидно, $\Psi(z_1; z_0, \cdot) : (0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}_+$ є монотонно зростаючою функцією. Тому, відображення $\phi(\cdot) : \mathbf{R} \mapsto (0, \pi)$ визначене наступним чином

$$\phi(\alpha) := \begin{cases} \Phi(z_1; z_0, \alpha), & \alpha \in (-\infty, 0], \\ \Psi(z_1; z_0, \alpha), & \alpha \in (0, +\infty) \end{cases}$$

є епіморфізмом.

Залишилось перевірити виконання умови (6.H2).

Область $\Omega \supseteq [0, \frac{\pi}{2} - \epsilon) \times S^1 \subset D$. Друга квадратична форма $\partial\Omega$ є скалярним добутком

$$\langle H_V(x)x, x \rangle$$

в точці

$$x(t) = (\theta(t), \phi(t)) = (\frac{\pi}{2} - \epsilon, \phi(t)) \in \partial\Omega$$

на векторі

$$x(t) = (\dot{\theta}(t), \dot{\phi}(t)) = (0, \dot{\phi}(t)) \in T_x \partial\Omega.$$

Зважаючи на попередні розрахунки маємо

$$\begin{aligned} \langle H_V(x)x, x \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \nabla_1 T^1 & \nabla_1 T^2 \\ \nabla_2 T^1 & \nabla_2 T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} V''(\theta) & 0 \\ 0 & V'(\theta) \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \dot{\phi}^2 \cdot V'(\theta) \sin \theta \cos \theta = 2\dot{\phi}^2 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \epsilon) > 0. \end{aligned}$$

Висновки

В даній роботі розглянуто застосування варіаційного методу відшукування слабкого квазіперіодичного розв'язку натуральної системи Лагранжа з квазіперіодичною силовою функцією на двовимірній одиничній сфері S^2 . Зокрема, визначено максимальну область $\Omega \subset S^2$, в якій система має слабкий квазіперіодичний розв'язок.

Список використаних джерел

1. Бишоп Р., Криптенден Р. Геометрия многообразий. - М.: Мир, 1967. - 336 с.
2. Громов Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. - М.: Мир, 1971. - 343 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. - М.: Наука, 1986. - 760 с.
4. Захарін С.Ф., Парасюк І.О. Узагальнені квазіперіодичні розв'язки лагранжівих систем на ріманових многовидах недоводатної кривини // Вісн. Київ. Ун-ту. - 1999. - Вип.3. - С.15-20.
5. Захарін С.Ф., Парасюк І.О. Про гладкість узагальнених квазіперіодичних розв'язків лагранжівих систем на ріманових многовидах недоводатної кривини // Нелінійні коливання. - 1999. - т.2, №2. - С.180-193.
6. Парасюк І.О., Рустамова А.В. Умови існування слабких квазіперіодичних розв'язків лагранжівих систем на ріманових многовидах [Електронний ресурс] // arXiv:1112.1550v1[math-ph].

Надійшла до редколегії 17.01.12

УДК 519.9

Семків М.Я., аспірант

Поширення нормальних SH-хвиль у
хвилеводі з розрізом

Проведено аналіз дифракції нормальних SH-хвиль на розрізі скінченної довжини. Побудовано аналітичний розв'язок задачі. Обчислено коефіцієнти відбиття нормальних SH-хвиль на межі утворення розрізу та коефіцієнти проникнення нормальних SH-хвиль на межі кінця розрізу і побудовано їх графіки залежності від частоти.

Ключові слова: хвилевід з тріщиною, дифракція хвиль, SH-хвиль.

E-mail: mishaemkiv@gmail.com

Статтю представив член редколегії академік НАН України Перестюк М.О.

1 Вступ

Задачі поширення пружних хвиль у хвилеводах з неоднорідностями типу розрізів і порожнин займають важливе місце в механіці пружних хвиль, оскільки з однієї сторони безпосередньо дають відповіді на потреби техніки, а з іншої сторони сприяють розвитку чисельно-аналітичного апарату дифракції хвиль.

Задачам дифракції пружних хвиль у хвилеводах із зазначеними вище неоднорідностями присвячена значна кількість наукових праць, відзначимо роботи [2 - 3]. Але задача про дифракцію пружної хвилі у хвилеводі зі скінченною тріщиною потребує, як показує аналіз літературних джерел [2, 3], подальшого аналітичного дослідження. В роботі [1] розв'язано задачу про дифракцію нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі на півнескінченному розрізі, отримано точний аналітичний розв'язок.

У даній роботі розв'язано задачу про дифракцію нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі на розрізі скінченної довжини, побудовано чисельно-аналітичний розв'язок, отримано вирази для переміщень у кожній із часткових областей.

M.Ya. Semkiv, PhD Student

Normal SH-wave propagation in elastic
waveguide with crack

The analysis of diffraction of elastic waves on crack is performed. The analytical solution is built. The energetic reflection coefficient as well as energetic transmission coefficient are calculated. The graphs of reflection and transmission coefficients depending of dimensionless frequency were built.

Key Words: waveguide with crack, wave diffraction, SH-wave.

2 Постановка крайової задачі у
спектральному представленні

Розглядається однорідний пружний хвилевід $x_1 \in R$, $x_3 \in [0, a]$ з розрізом скінченної довжини $0 \leq x_1 \leq l$, $x_3 = b$. Стінки хвилеводу а також береги розрізу вільні від напружень. Середовище хвилеводу характеризується густиною ρ і швидкістю поперечних хвиль c_t .

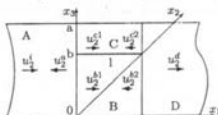


Рис. 1 Геометрія задачі

Виділимо у хвилеводі чотири області існування пружної хвилі A, B, C і D як показано на рис. 1. Відмітимо, що таке розбиття хвилеводу дозволяє надалі в кожній з областей використати метод розділення змінних. В області A поширюється нормальна SH-хвиля, що викликає зміщення вздовж осі Ox_2 і

здається у вигляді

$$u_2^q = A \cos \frac{q\pi x_3}{a} e^{-\gamma_{qa} x_1}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

де A – амплітуда наближаючої хвилі; q – номер нормальної хвилі. Сталі поширення тут і далі задані виразом:

$$\begin{cases} \gamma_{ma} = +\sqrt{(m\pi/a)^2 - k_t^2}, & (m\pi/a)^2 > k_t^2, \\ \gamma_{ma} = -i\sqrt{k_t^2 - (m\pi/a)^2}, & (m\pi/a)^2 < k_t^2. \end{cases}$$

де $k_t = \omega/c_t$. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ тут і надалі не пишемо. Переміщення в областях A , B , C і D дифрагованого поля позначимо u_2^a , u_2^b , u_2^c , u_2^d відповідно.

Переміщення u_2^i , u_2^a , (в області A), u_2^b , u_2^c (в областях B , C відповідно) і u_2^d (в D) задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k_t^2 \right] u_2^s = 0, \quad (s = i, a, b, c, d) \quad (2)$$

та граничну умову на вільних межах хвильоводу і розрізу, а саме $\sigma_{32} = \mu \partial u_2 / \partial x_3 = 0$ (тут u_2 відповідає зміщенню в кожній з підобластей, μ – коефіцієнт Пуассона):

1. $\frac{\partial(u_2^i + u_2^a)}{\partial x_3} = 0$, при $x_3 = \{0, a\}$, $x_1 < 0$;
2. $\frac{\partial u_2^b}{\partial x_3} = 0$, при $0 < x_1 < l$, $x_3 = \{0, b\}$;
3. $\frac{\partial u_2^c}{\partial x_3} = 0$, при $0 < x_1 < l$, $x_3 = \{b, a\}$;
4. $\frac{\partial u_2^d}{\partial x_3} = 0$, при $x_3 = \{0, a\}$, $x_1 > l$.

Умови спряження на межі поділу підобластей $x_1 = 0$, $x_3 = [0, a]$ і $x_1 = l$, $x_3 = [0, a]$, які встановлюють рівність зміщень і напружень $\sigma_{12} = \mu \partial u_2 / \partial x_1$ на зазначених межах у суміжних областях мають вигляд:

5. $u_2^i + u_2^a = u_2^b$, $x_1 = 0$, $x_3 = [0, b]$;
6. $\frac{\partial(u_2^i + u_2^a)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^b}{\partial x_1}$, $x_1 = 0$, $x_3 = [0, b]$;
7. $u_2^i + u_2^a = u_2^c$, $x_1 = 0$, $x_3 = [b, a]$;
8. $\frac{\partial(u_2^i + u_2^a)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^c}{\partial x_1}$, $x_1 = 0$, $x_3 = [b, a]$;
9. $u_2^i = u_2^d$, $x_1 = l$, $x_3 = [0, b]$;
10. $\frac{\partial u_2^i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^d}{\partial x_1}$, $x_1 = l$, $x_3 = [0, b]$;

$$11. u_2^d = u_2^c, \quad x_1 = l, \quad x_3 = [b, a];$$

$$12. \frac{\partial u_2^d}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^c}{\partial x_1}, \quad x_1 = l, \quad x_3 = [b, a];$$

13. Переміщення і напруження у падаючій і дифрагованих хвилях задовольняють умові на гострому ребрі, тобто $u \sim r^{1/2}$; $\partial u / \partial x_1$, $\partial u / \partial x_3 \sim r^{-1/2}$, при $x_1 = \{0, l\}$, $x_3 = b$.

Дифраговані поля у часткових областях хвильоводу можна записати у вигляді суперпозиції нормальних SH-хвиль:

$$\begin{aligned} u_2^a &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x_3}{a} e^{\gamma_{na} x_1}, \\ u_2^b &= \sum_{n=0}^{\infty} (B_{n1} e^{-\gamma_{nb} x_1} + B_{n2} e^{\gamma_{nb}(x_1-l)}) \cos \frac{n\pi x_3}{b}, \\ u_2^c &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi(x_3-b)}{c} e^{-\gamma_{nc} x_1} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi(x_3-b)}{c} e^{\gamma_{nc}(x_1-l)}, \\ u_2^d &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \frac{n\pi x_3}{a} e^{-\gamma_{na}(x_1-l)}, \end{aligned} \quad (3)$$

Таке представлення полів задовольняє граничні умови 1–4. Розписуючи умови спряження 5–12 і використовуючи властивість ортогональності набору функцій типу $\cos(n\pi x_3/a)$, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{2ab}{\pi} i k_t A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb} A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} \right) = \\ = \left(\frac{1}{\gamma_{qa} + \gamma_{mb}} + \frac{\rho_{mb}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mb}} \right) A', \\ \frac{2ag}{\pi} i k_t A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A'_n}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc} A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} \right) = \\ = \left(\frac{1}{\gamma_{qa} + \gamma_{mc}} + \frac{\rho_{mc}}{\gamma_{qa} - \gamma_{mc}} \right) A', \end{cases} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} A' &= A q \sin \frac{q\pi b}{a}, \quad A'_n = n \sin \frac{n\pi b}{a} A_n, \\ \rho_{ms} &= e^{-2\gamma_{ms} l}, \quad s = b, c. \end{aligned} \quad (5)$$

а коефіцієнти B_{n1} , B_{n2} і C_{n1} , C_{n2} можна виразити через коефіцієнти A_n при використанні умов спряження і ортогональності функцій, що туди входять.

3 Модифікований метод лишків (ММЛ)

Для отримання розв'язку системи рівнянь (4) застосуємо ММЛ [2]. Відмітимо суттєву особливість рівнянь (4), яка буде використана у ММЛ. У даних рівняннях множники ρ_{ms} експоненціально спадають при $m \rightarrow \infty$. Якщо у рівняннях (4) опустити члени пропорційні ρ_{ms} , то новоутворене рівняння можна розв'язати точно [1]. Отже будемо будувати розв'язок системи (4) як збурення точного розв'язку простішої системи ($\rho_{ms} \equiv 0$).

Розглянемо інтеграли

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \left[\frac{g(w)}{w - \gamma_{ms}} + \rho_{ms} \frac{g(w)}{w + \gamma_{ms}} \right] dw, \quad s = b, c, \quad (6)$$

де C_R – коло радіуса R в комплексній площині змінної w , що проходить у напрямку проти годинникової стрілки. Функція $g(w)$ задовольняє умови:

- 1) $g(w)$ – аналітична функція змінної w у всіх точках області C_R , за винятком полюсів першого порядку $w = \gamma_{ns}$ і $w = -\gamma_{qs}$, ($n, q = 0, 1, 2, \dots$).
- 2) $g(\gamma_{ms}) + \rho_{ms} g(-\gamma_{ms}) = 0$, ($s = b, c$).
- 3) Лишок функції $g(w)$ в точці $w = -\gamma_{qs}$, що позначається $\text{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qs}} g(w)$ дорівнює $A' = Aq \sin(q\pi b/a)$.
- 4) Поведінка функції $g(w)$ на нескінченності має алгебраїчний характер. Більш точно $g(w) = O(w^{-1/2})$, $|w| \rightarrow \infty$.
- 5) $g(-ik_L) + \rho_0 g(ik_L) = 0$.

При $R \rightarrow \infty$ контур C_R охоплює всі нулі і полюси зазначені у властивостях функції $g(w)$. Виразивши інтеграли (6) у вигляді сум лишків у полюсах функції $g(w)$ і порівнюючи результати до нуля, отримуємо

$$\begin{aligned} & [g(-ik_L) + \rho_0 g(ik_L)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_{ns} - \gamma_{ms}} + \frac{\rho_{ms}}{\gamma_{ns} + \gamma_{ms}} \right) \text{res}_{w \rightarrow \gamma_{ns}} g(w) = \\ & = \left(\frac{1}{\gamma_{qs} + \gamma_{ms}} + \frac{\rho_{ms}}{\gamma_{qs} - \gamma_{ms}} \right) A', \end{aligned} \quad (7)$$

Тут враховано, що згідно з умовою 4, $\text{res}_{w \rightarrow -\gamma_{qs}} g(w) = A'$ і $\gamma_{0b} = \gamma_{0c} = -ik_L$.

Порівнюючи (4) і (7), отримуємо

$$\begin{aligned} A_n n \sin \frac{\pi \pi b}{a} &= \text{res}_{w \rightarrow \gamma_{ns}} g(w), \\ A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При $\rho_{ms} \equiv 0$ $g(w)$ переходить в $f(w)$, де виходячи з [1], $f(w)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{q \sin(q\pi b/a)}{\gamma_{qs} + w} \frac{1 + w/ik_L}{1 - \gamma_{qs}/ik_L} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{w + \gamma_{qs}}{\pi} \left[b \ln \frac{q}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\ &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{w}{\gamma_{ns}})(1 - \frac{w}{\gamma_{nb}})(1 + \frac{2\pi n}{\gamma_{ns}})}{(1 + \frac{w}{\gamma_{nb}})(1 + \frac{2\pi n}{\gamma_{ns}})(1 - \frac{w}{\gamma_{ns}})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Задовольняючи умови 1 - 5 для функції $g(w)$ отримаємо явний вигляд даної функції

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{q \sin(q\pi b/a)}{\gamma_{qs} + w} \frac{1 - w/\Gamma_0}{1 + \gamma_{qs}/\Gamma_0} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{w + \gamma_{qs}}{\pi} \left[b \ln \frac{q}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\} \times \\ &\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \gamma_{qs}/\gamma_{ns})(1 - w/\Gamma_{nb})(1 - w/\Gamma_{ns})}{(1 - w/\gamma_{ns})(1 + \gamma_{qs}/\Gamma_{nb})(1 + \gamma_{qs}/\Gamma_{ns})}. \end{aligned} \quad (10)$$

де невідомі зміщені нулі $\{\Gamma_{ms}\}$ задовольняють рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \gamma_{ms}/\Gamma_0}{1 + \gamma_{ms}/\Gamma_0} \frac{\gamma_{qs} - \gamma_{ms}}{\gamma_{qs} + \gamma_{ms}} \times \\ & \times \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \gamma_{ms}/\Gamma_{nb})(1 - \gamma_{ms}/\Gamma_{ns})(1 + \gamma_{ms}/\gamma_{ns})}{(1 + \gamma_{ms}/\Gamma_{nb})(1 + \gamma_{ms}/\Gamma_{ns})(1 - \gamma_{ms}/\gamma_{ns})} = \\ & = -\rho_{ms} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_{ms}}{\pi} \left[b \ln \frac{q}{b} + c \ln \frac{a}{c} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\rho_{ms} = \exp \{-2\gamma_{ms}\}$, $s = (b, c)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Таким чином, отримали рівняння (11) дають змогу визначити систему зміщених нулів $\{\Gamma_{ms}\}$ і далі шукати функцію $g(w)$. Розв'язання системи рівнянь (11) можна провести за допомогою, наприклад, матричного методу [2].

4 Чисельні результати

Для ілюстрації отриманих в даній роботі результатів, розглянемо хвилевід, геометричні параметри якого наступні: $b = 3/4a$, $c = 1/4a$, $l = a$. Хвилевід розмір області A змінюється в межах $\pi < k_L a < 2\pi$.

Коефіцієнт відбиття V_a (відношення середнього потоку потужності відбитої хвилі u_2^0 в області A до середнього потоку потужності q -ої моди, що набігає в області A на межу поділу підобластей $x_1 = 0$, $x_2 = [0, a]$), визначається формулою [4]:

$$V_a = \sum_{n=0}^{N_a} V_n, \quad V_n = \frac{|\gamma_{na}|}{|\gamma_{qa}|} |A_n|^2, \quad (12)$$

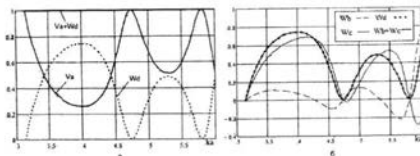


Рис. 2 Залежності енергетичних коефіцієнтів відбиття і проходження від хвильової величини k_1a

Згідно з виразом (12), V_a подано у вигляді суми енергетичних коефіцієнтів збурення V_n нормальних SH-хвиль області A.

Коефіцієнт проникнення W_d (відношення середнього потоку потужності хвилі u_d^2 , що пройшла в область D до середнього потоку потужності q-ої моди, що набігає в області A) дорівнює

$$W_d = \sum_{n=0}^{N_a} W_n, \quad W_n = \frac{|\gamma_{na}|}{|\gamma_{qa}|} |D_n|^2, \quad (13)$$

Аналогічно коефіцієнти проникнення хвилі в підобласті B і C (див. Рис. 1) визначаються як відношення середнього потоку потужності хвиль в підобластях B або C до середнього потоку потужності q-ої нормальної хвилі, що набігає на розріз в підобласті A.

На Рис. 2(а) зображені залежності коефіцієнтів відбиття V_a і проходження W_d першої моди від хвильового розміру $k_1a = a\omega/c_1$. На Рис. 2(б) показано окремо залежності коефіцієнтів проходження в області B, C і D від хвильової ширини k_1a .

5 Висновки

В даній статті розглянуто задачу поширення нормальних SH-хвиль у хвилеводі з розрізом скінченної довжини. За допомогою модифікованого методу лишків аналітичної функції було зведено нескінченну систему рівнянь відносно невідомих амплітудних коефіцієнтів до швидкозбіжної допоміжної системи, яку було розв'язано чисельно. Представлено вирази для амплітуд дифрагованих полів у вигляді збіжних нескінченних рядів. На основі отриманих результатів побудовано графіки залежності енергетичних коефіцієнтів

відбиття і проникнення в підобласті від хвильової ширини хвилевода k_1a .

Показано, що в діапазоні зміни величини $\pi < k_1a < 2\pi$ графіки енергетичних коефіцієнтів мають характерні особливості, а саме: (1) можна виділити діапазони зміни величини k_1a де коефіцієнт відбиття V_a більший за коефіцієнт проходження W_d і навпаки; (2) мають місце частоти, при яких область тріщини в хвилеводі стає запертою для падаючої хвилі, тобто коефіцієнт відбиття $V_a = 1$; (3) показано, що поле вектора інтенсивності в околі тріщини може суттєво змінюватися в залежності від хвильового розміру k_1a , причому існують значення величини k_1a при яких спостерігаються від'ємні потоки енергії в областях B або C хвилеводу.

Список використаних джерел

1. Семків М. Я. Дифракція нормальних SH-хвиль у хвилеводі з розрізом // Акустичний вісник 2012 (Готується до друку).
2. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: МИР, 1974.
3. Buyukaksoy A., Polat B. A bifurcated waveguide problem. Springer-Verlag, 1999, 51, 196–202pp.
4. Грінченко В. Т., Бовк І. В., Маципура В. Т. Основи акустики. – К.: Наукова думка, 2007, 640с.
5. Marcuritz N. Waveguide handbook. – New York: Dover Publications, 1964, 423p.

Надійшла до редакції 30.01.2012

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.9

Бейко І.В., д-р техн. наук, проф.,
Зінко П.М., канд. фіз.-мат. наук, доцент**Числові алгоритми асимптотично-розв'язуючих операторів для розв'язування крайових задач математичної фізики з підвищеною точністю***На основі теорії асимптотично-розв'язуючих операторів побудовані нові алгоритми підвищеної точності для чисельного розв'язування крайових задач. Наведені тестові результати числових експериментів.**Ключові слова:* числові алгоритми, розв'язуючі оператори, крайові задачі, варіаційне численняI.V. Beyko, Doctor of Science, Prof.,
P.M. Zinko, Ph.D., Associate Professor**Numerical algorithms of asymptotically-solving operators for solving boundary value problems of mathematical physics with high accuracy***Based on the theory of asymptotic solve operators the new numerical algorithms of high degree of accuracy are designed for solving boundary problems. Test results of numerical experiments are given.**Key Words:* numerical algorithms, solving operators, boundary value problems, calculus of variationsE-mail: ivan.beyko@gmail.com, zinko@unicyb.kiev.ua
Статтю представив: д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Побудова чисельних алгоритмів підвищеної точності для розв'язування широких класів оптимізаційних задач прикладної математики, що зводяться до крайових задач математичної фізики, здійснюється у даній роботі з використанням асимптотично-розв'язуючих операторів. Із варіаційного числення відомо, що задача відшукування функції u , яка на кусково-гладкій границі Γ області D задовольняє умові $u(x) = g(x)$ і мінімізує функціонал $J(u)$,

$$J(u) = \int_0^1 F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) dx,$$

зводиться до крайової задачі для рівнянням із частинними похідними

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

із вище заданими умовами на границі Γ . У більш загальному випадку додаткові умови задаються системами диференціальних рівнянь. Прикладом такої задачі є задача відшукування вектор-функції

$$u(t, x) = (u^1(t, x), u^2(t, x), u^3(t, x)), t \in [0, T],$$

$$x \in [0, l],$$

яка мінімізує функціонал

$$J(u) = \Phi\left(Q, \frac{\partial Q}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k Q}{\partial t^k}\right)_{t=T}$$

на замкнутих обмежених множинах

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, (u^i(t, x)) \in Q, Q \subset R^m, i = \overline{1, 3}$$

і на траєкторіях $Q(x, t)$ керованого процесу, який описується нелінійним рівнянням із частинними похідними

$$\frac{\partial^{k+1} Q}{\partial t^{k+1}} = f\left(t, x, u^i, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \frac{\partial Q}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k Q}{\partial t^k}\right)$$

та узагальненими початковими і крайовими умовами

$$Q(x, t) \Big|_{t=0} = Q^0(x); \frac{\partial^i Q}{\partial t^i} \Big|_{t=0} = Q^{0i}(x), i = \overline{1, k};$$

$$\Phi\left(t, x, u^i, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Big|_{t=0} = 0;$$

$$\Phi_2\left(t, x, u^i, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Big|_{t=l} = 0; t \in [0, T], x(t) \in [0, l].$$

Одним із можливих методів розв'язання такої задачі оптимального керування є її зведення до задачі мінімізації функціоналу

$$\Phi^*(\bar{u}) = \bar{\Phi}_T \left(\bar{Q}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^4 \bar{Q}}{\partial t^4} \right)_{t=T}$$

на розв'язках $\bar{Q}(\bar{u}, t) =$
 $= (\bar{Q}_1(\bar{u}, t), \bar{Q}_2(\bar{u}, t), \dots, \bar{Q}_N(\bar{u}, t))$ (зосереджених
у вузлах вибраної на інтервалі $[0, T]$ сітки)
системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \bar{Q}(\bar{u}, t) = f^i \left(t, \bar{u}, \bar{Q}, \frac{d\bar{Q}}{dt}, \dots, \frac{d^4 \bar{Q}}{dt^4} \right)$$

із зосередженими у тих же вузлах керуваннями
 $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \dots, \bar{u}_N(t))$ при умовах

$$\bar{Q}_j(\bar{u}, 0) = Q^0(jh); \frac{d^i \bar{Q}_j(\bar{u}, 0)}{dt^i} = Q^i(jh),$$

$$h = T / (N - 1), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, N}.$$

Наближений розв'язок такої задачі із зосередженими параметрами можемо будувати числовими алгоритмами підвищеної точності для систем звичайних диференціальних рівнянь з використанням градієнтних методів розв'язування відповідних крайових задач для п-систем Л.С.Понтрягіна.

У даній роботі скористаємося структурою диференціальних рівнянь із частинними похідними для побудови числових алгоритмів підвищеної точності без застосування методу прямих і без апроксимації задачі оптимізації із розподіленими параметрами задачею оптимізації системи із зосередженими параметрами.

У випадку одновимірної крайової задачі параболічного типу, пов'язаної із відшукуванням у прямокутнику $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ розв'язку $u(x, t)$ рівняння [2]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + \varphi(x, t), \quad (1)$$

який задовольняє початковій умові

$$u(x, 0) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

і крайовим умовам

$$u(0, t) = \eta_1(t), \quad u(1, t) = \eta_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

будемо вважати, що коефіцієнт теплопровідності $k = k(x)$ є обмеженим знизу і зверху, відповідно, константами c_1 і c_2

$$0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

і будемо вважати, що задача (1) – (4) має єдиний розв'язок та існують всі необхідні нам похідні від шуканих функцій $u(x, t)$ і $k(x)$.

Введемо рівномірну сітку ω_Δ з кроком $\Delta > 0$ на відрізку $0 \leq x \leq 1$:

$$\omega_\Delta = \{x_i = i \cdot \Delta, i = 0, 1, \dots, N, \Delta = 1 / N\}.$$

Перший доданок правої частини в (1) представимо в такому вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = k(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dk(x)}{dx} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (5)$$

Згідно формули Тейлора для функції $k(x)$ можна записати рівності:

$$k(x + \Delta) = k(x) + \frac{dk(x)}{dx} \cdot \Delta + \frac{d^2 k(x)}{dx^2} \cdot \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{d^3 k(x)}{dx^3} \cdot \frac{\Delta^3}{3!} + O(\Delta^4),$$

$$k(x - \Delta) = k(x) - \frac{dk(x)}{dx} \cdot \Delta + \frac{d^2 k(x)}{dx^2} \cdot \frac{\Delta^2}{2!} - \frac{d^3 k(x)}{dx^3} \cdot \frac{\Delta^3}{3!} + O(\Delta^4).$$

З двох останніх співвідношень знаходимо

$$\frac{dk(x)}{dx} = \frac{1}{2\Delta} (k(x + \Delta) - k(x - \Delta)) + O(\Delta^2). \quad (6)$$

Для апроксимації другої похідної $\partial^2 u(x, t) / \partial x^2$ скористаємось відомою формулою [2]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (u(x + \Delta, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta, t)) / \Delta^2 + O(\Delta^2). \quad (7)$$

Підставимо праві частини формул (6), (7) в (5) і після нескладних перетворень одержимо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{1}{\Delta^2} \left[(k(x) - \frac{k(x + \Delta) - k(x - \Delta)}{4}) u(x - \Delta, t) - 2k(x) u(x, t) + \left(k(x) + \frac{k(x + \Delta) - k(x - \Delta)}{4} \right) u(x + \Delta, t) \right] + O(\Delta^2).$$

Введемо наступні позначення

$$u(x_i, t) = u_i(t), \quad k(x_i) = k_i, \quad \bar{\psi}_i(t) = \varphi(x_i, t),$$

$$i = \overline{0, N}.$$

Тоді, від рівняння з частинними похідними (1), з врахуванням сітки ω_Δ і апроксимації (8), прийдемо до такої системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $u_i(t)$, $i = \overline{1, N - 1}$

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} \right) u_{i-1}(t) - 2k_i u_i(t) + \left(k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} \right) u_{i+1}(t) \right] + \bar{\psi}_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (9)$$

Із формули (2) випливає наступна початкова умова для системи (9)

$$u_i(0) = \mu(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (10)$$

Якщо в системі (9) покласти

$$\begin{cases} \frac{du_1(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [-2k_1 u_1(t) + (k_1 + V_1) u_2(t)] + \psi_1(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_2 - V_2) u_1(t) - 2k_2 u_2(t) + (k_2 + V_2) u_3(t)] + \psi_2(t), \\ \frac{du_i(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i) u_{i-1}(t) - 2k_i u_i(t) + (k_i + V_i) u_{i+1}(t)] + \psi_i(t), \\ \frac{du_{N-2}(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_{N-2} - V_{N-2}) u_{N-3}(t) - 2k_{N-2} u_{N-2}(t) + (k_{N-2} + V_{N-2}) u_{N-1}(t)] + \psi_{N-2}(t), \\ \frac{du_{N-1}(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_{N-1} - V_{N-1}) u_{N-2}(t) - 2k_{N-1} u_{N-1}(t)] + \psi_{N-1}(t). \end{cases} \quad (11)$$

Вивіши вектор функцій

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t))^T \quad i$$

$$f(u(t), t) = (f_1(u(t), t), f_2(u(t), t), \dots, f_{N-1}(u(t), t))^T$$

(тут tr – знак транспонування, а $f_i(u(t), t)$ дорівнюють правій частині рівностей (9)), задачу Коші (9), (10) можемо переписати в такому вигляді

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u(t), t), \quad (12)$$

$$u(0) = (\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_{N-1}))^T.$$

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (12) використаємо формулу [6, 12]

$$V_i = (k_{i+1} - k_{i-1}) / 4, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\bar{\psi}_i(t) = \bar{\psi}_i(t), \quad i = \overline{2, N-2},$$

$$\bar{\psi}_1(t) = \bar{\psi}_1(t) + (k_1 - V_1) u_0(t),$$

$$\bar{\psi}_{N-1}(t) = \bar{\psi}_{N-1}(t) + (k_{N-1} + V_{N-1}) u_N(t),$$

то одержимо

$$\begin{aligned} u(t+h) &= p(t+h) + \\ &+ \int_t^{t+h} \left[E + (t+h-\tau) \frac{\partial f(p(t+h), t+h)}{\partial u} \right] \times \\ &\times [f(p(\tau), \tau) - \hat{p}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Прогнозу функцію $p(t)$ виберемо у вигляді перших двох доданків формули Тейлора

$$p(\tau) = u(t) + (\tau - t) f(u(t), t) + O(h^2), \quad (14)$$

$$\tau \in [t; t+h].$$

Із формули (14) легко отримати рівності:

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = f(u(t), t), \quad (15)$$

$$p(t+h) = u(t) + hf(u(t), t).$$

Матриця Якобі для системи рівнянь (11) наступна

$$\frac{\partial f(\cdot, \cdot)}{\partial u} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} -2k_1 & k_1 + V_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ k_2 - V_2 & -2k_2 & k_2 + V_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & k_i - V_i & -2k_i & k_i + V_i & 0 \dots \\ \dots & \dots & 0 & k_{N-2} - V_{N-2} & -2k_{N-2} & k_{N-2} + V_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & k_{N-1} - V_{N-1} & -2k_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Для побудови явних різницьових схем підставимо (14), (15) у (13) і одержимо

$$u(t+h) = u(t) + \int_t^{t+h} f(p(\tau), \tau) d\tau - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial f(\cdot, \cdot)}{\partial u} \cdot f(u(t), t) + \frac{\partial f(\cdot, \cdot)}{\partial u} \int_t^{t+h} (t+h-\tau) f(p(\tau), \tau) d\tau. \quad (16)$$

Виконавши громіздкі обчислення в (16), приходимо [9] до наступної основної явної внутрішньої формули знаходження наближеного розв'язку задачі (1)–(3)

$$u_i(t+h) = u_{i-1}\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\alpha_i/6 + u_{i-2}\alpha_{i-1}\alpha_i[0.5 - (\bar{k}_{i-2} + \bar{k}_{i-1} + \bar{k}_i)/3] + u_{i-1}\alpha_i[1 - \bar{k}_{i-1} - \bar{k}_i + (\alpha_{i-1}\beta_{i-2} + 4\bar{k}_{i-1} + \alpha_{i-1}\beta_{i-1} + 4\bar{k}_i(\bar{k}_{i-1} + \bar{k}_i) + \alpha_{i-1}\beta_i)/6] + u_i[1 - 2\bar{k}_i + 2\bar{k}_i^2 - 4\bar{k}_i^3/3 + \alpha_i\beta_{i-1}(0.5 - (\bar{k}_{i-1} + \bar{k}_i)/3) + \alpha_{i-1}\beta_i \times (0.5 - (\bar{k}_i + \bar{k}_{i+1})/3) - \bar{k}_i(\alpha_{i-1}\beta_{i-1} + \alpha_{i-1}\beta_i)/3] + u_{i+1}\beta_i[1 - \bar{k}_i - \bar{k}_{i+1} + (\alpha_{i-1}\beta_{i-1} + 4\bar{k}_{i-1}^2 + \alpha_{i-1}\beta_i + 4\bar{k}_i(\bar{k}_i + \bar{k}_{i+1}) + \alpha_{i-1}\beta_{i+1})/6] + u_{i+2}\beta_i\beta_{i+1}[0.5 - (\bar{k}_i + \bar{k}_{i+1} + \bar{k}_{i+2})/3] + u_{i+3}\beta_i\beta_{i+1}\beta_{i+2}/6 + h[\psi_{i-2}\alpha_{i-1}\alpha_i - 2\psi_{i-1}\alpha_i(\bar{k}_{i-1} + \bar{k}_i) + \psi_i(\alpha_{i-1}\beta_{i-1} + 4\bar{k}_{i-1}^2 + \alpha_{i-1}\beta_i) - 2\psi_{i+1}\alpha_i(\bar{k}_i + \bar{k}_{i+1}) + \psi_{i+2}\beta_i\beta_{i+1}]/6 + \int_t^{t+h} [\psi_i(\tau) + (t+h-\tau) \times (\alpha_i\psi_{i-1}(\tau) - 2\bar{k}_i\psi_i(\tau) + \beta_i\psi_{i+1}(\tau))] h d\tau, \quad (17)$$

$$i = \overline{3, N-3},$$

де $\alpha_i = h(k_i - V_i)/\Delta^2$; $\beta_i = h(k_i + V_i)/\Delta^2$; $\bar{k}_i = h\dot{k}_i/\Delta^2$; $u_i = u_i(t)$; $\psi_i = \psi_i(t)$.

Якщо ж замість формули (13) для знаходження наближеного розв'язку задачі (12) використаємо наступну спрощену формулу [6, 12]

$$u(t+h) = p(t+h) + \int_t^{t+h} \left[f(p(\tau), \tau) - \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \quad (18)$$

тоді отримаємо

$$u_i(t+h) = u_{i-2}\alpha_{i-1}\alpha_i/2 + u_{i-1}\alpha_i[1 - \bar{k}_{i-1} - \bar{k}_i] + u_i[1 - 2\bar{k}_i + 2\bar{k}_i^2 + \alpha_{i-1}\beta_{i-1}/2 + \alpha_{i-1}\beta_i/2] + u_{i+1}\beta_i[1 - \bar{k}_i - \bar{k}_{i+1}] + u_{i+2}\beta_i\beta_{i+1}/2 + h[\alpha_i\psi_{i-1} - 2\bar{k}_i\psi_i + \beta_i\psi_{i+1}]/2 + \int_t^{t+h} \psi_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{2, N-2}. \quad (19)$$

Формула (19) в порівнянні з формулою (17) є менш громіздкою, проте вона їй уступає в порядку точності обчислення наближеного розв'язку задачі (1)–(3).

Для побудови неявної різницевої схеми із формули (18), з урахуванням рівностей (15), одержуємо

$$u(t+h) = u(t) + hf(u(t), t) + \int_t^{t+h} [f(p(\tau), \tau) - f(u(t), t)] d\tau. \quad (20)$$

Використавши в (20) формулу трапецій [1] для наближеного обчислення інтегралів (похибка якої $O(h^3)$), одержимо

$$u(t+h) = u(t) + \frac{h}{2} [f(u(t), t) + f(p(t+h), t+h)]. \quad (21)$$

Відмітимо [9, 10], що наближене значення $u(t+h)$, яке обчислюється згідно (21), апроксимувє розв'язок задачі Коші (10), (11) в точці $t+h$ з похибкою $O(h^3)$.

Запишемо i -ту ($i = 1, 2, \dots, N-1$) компоненту в (11) у такому вигляді

$$\frac{du_i(t)}{dt} = - \frac{2k_i}{\Delta^2} u_i(t) + \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i)u_{i-1}(t) + (k_i + V_i)u_{i+1}(t)] + \psi_i(t) = \quad (22)$$

$$= F_i(u_i(t), t) = F_i^{(1)}(u_i(t)) + F_i^{(2)}(t) = f_i(u_i(t), t).$$

З формул (20), (21), (22) для i -ї компоненти впливають співвідношення

$$u_i(t+h) = u_i(t) + \frac{h}{2} \{ F_i(p_i(t+h), t+h) + F_i(u_i(t), t) \} = u_i(t) + \frac{h}{2} \left\{ - \frac{2k_i}{\Delta^2} u_i(t) + \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i)u_{i-1}(t) + (k_i + V_i)u_{i+1}(t)] + \psi_i(t) - \frac{2k_i}{\Delta^2} [u_i(t) + hf_i(u_i(t), t)] + \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i)u_{i-1}(t+h) + (k_i + V_i)u_{i+1}(t+h)] + \psi_i(t+h) \right\} = u_i(t) + \frac{h}{2} \left\{ - \frac{2k_i}{\Delta^2} u_i(t) + \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i)u_{i-1}(t) + (k_i + V_i)u_{i+1}(t)] + \psi_i(t) - \right.$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2k_i}{\Delta^2} \left[u_i(t) + h \left[-\frac{2k_i}{\Delta^2} u_i(t) + \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i) u_{i-1}(t) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (k_i + V_i) u_{i+1}(t)] + \psi_i(t) \right] \right] + \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i) \times \\ & \quad \times u_{i-1}(t+h) + (k_i + V_i) u_{i+1}(t+h)] + \psi_i(t+h) \}. \end{aligned}$$

Звідси, після зведення подібних членів, отримаємо

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{2\Delta^2} (k_i - V_i) u_{i-1}(t+h) + u_i(t+h) - \\ & -\frac{h}{2\Delta^2} (k_i + V_i) u_{i+1}(t+h) = \\ & = u_i(t) \left[1 - \frac{2h}{\Delta^2} k_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{2k_i}{\Delta^2} \right)^2 \right] + \\ & + u_{i-1}(t) \left[\frac{h}{2\Delta^2} (k_i - V_i) - \left(\frac{h}{\Delta^2} \right)^2 k_i (k_i - V_i) \right] + \\ & + u_{i+1}(t) \left[\frac{h}{2\Delta^2} (k_i + V_i) - \left(\frac{h}{\Delta^2} \right)^2 k_i (k_i + V_i) \right] + \\ & + \frac{h}{2} \left[\left[1 - \frac{2k_i h}{\Delta^2} \right] \psi_i(t) + \psi_i(t+h) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{cases} y_1 & -\varepsilon_1 y_2 \\ -\gamma_2 y_1 & +y_2 & -\varepsilon_2 y_3 \\ & -\gamma_3 y_2 & +y_3 & -\varepsilon_3 y_4 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\gamma_{N-2} y_{N-3} & +y_{N-2} & -\varepsilon_{N-2} y_{N-1} \\ & & & & -\gamma_{N-1} y_{N-2} & +y_{N-1} \end{cases}$$

де $\gamma_i = \sigma(k_i - V_i)$; $\varepsilon_i = \sigma(k_i + V_i)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Для розв'язування системи (25) можемо, наприклад, застосувати наступну класичну схему:

- 1) обчислюємо послідовності:

$$a_i = \frac{\varepsilon_i}{1 - \gamma_i a_{i-1}}, \quad i = \overline{2, N-2}; \quad a_1 = \varepsilon_1;$$

$$b_i = \frac{g_i + \gamma_i b_{i-1}}{1 - \gamma_i a_{i-1}}, \quad i = \overline{2, N-2}; \quad b_1 = g_1;$$

- 2) обчислюємо значення y_{N-1} ,

$$y_{N-1} = \frac{g_{N-1} + \gamma_{N-1} b_{N-2}}{1 - \gamma_{N-1} a_{N-2}};$$

- 3) обчислюємо послідовність:

$$y_i = b_i + a_i y_{i+1}, \quad i = \overline{N-2, 1}.$$

Позначимо $h/(2\Delta^2) = \sigma$, тоді (23) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & -\sigma(k_i - V_i) u_{i-1}(t+h) + u_i(t+h) - \sigma(k_i + V_i) \times \\ & \times u_{i+1}(t+h) = u_i(t) [1 - 4k_i \cdot \sigma + 8\sigma^2 \cdot k_i^2] + \\ & + u_{i-1}(t)(k_i - V_i) [\sigma - 4\sigma^2 k_i] + u_{i+1}(t)(k_i + V_i) \times \\ & \times [\sigma - 4\sigma^2 k_i] + \frac{h}{2} [(1 - 4k_i \sigma) \psi_i(t) + \psi_i(t+h)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Праву частину рівності (24) позначимо через $\bar{g}_i$, $i = \overline{1, N-1}$;

покладемо $y_i = u_i(t+h)$, $i = \overline{0, N}$ (причому із (3) випливають рівності $y_0 = \eta_1(t+h)$, $y_N = \eta_2(t+h)$);

$g_i = \bar{g}_i$, $i = \overline{2, N-2}$; $g_1 = \bar{g}_1 + \sigma(k_1 - V_1) y_0$;
 $g_{N-1} = \bar{g}_{N-1} + \sigma(k_{N-1} + V_{N-1}) y_N$ і таким чином приходимо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (з трьох діагональної матрицею) для знаходження наближеного розв'язку $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ крайової задачі (1)–(3)

$$\begin{aligned} & = g_1, \\ & = g_2, \\ & = g_3, \\ & \vdots \\ & -\gamma_{N-2} y_{N-3} + y_{N-2} - \varepsilon_{N-2} y_{N-1} = g_{N-2}, \\ & -\gamma_{N-1} y_{N-2} + y_{N-1} = g_{N-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Даний алгоритм випробуваний на тестовому прикладі

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + 1) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) - 3x^2 - x(2t - 1)$$

з відомим аналітичним розв'язком

$$u(x, t) = t + tx + \frac{x^2}{2}.$$

За аналогічною схемою нами побудовані числові алгоритми розв'язування крайових задач параболічного типу у двовимірному і трьохвимірному випадках.

Описані алгоритми використовувалися для розв'язування задач моделювання радіотехнічних сигналів [15], системи рівнянь Ходкіна–Хакслі [16] та для опису процесів фільтрації в продуктивному шарі газоконденсатних свердловин [11].

Список використаних джерел

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
3. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища школа, 1983. – 512 с.
4. Бейко И.В., Бейко М.Ф. К численному построению оптимальных управлений // Моделирование нестационарных процессов. – К.: ИМ АН УССР, 1977. – С. 173–190.
5. Бейко И.В. Функции для оценивания полезности информации в конструктивной теории оптимальных агрегированных моделей // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №3. – С. 43–54.
6. Бейко И.В. Розвиток методів розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей // Вісник Київ. університету. Серія: Кібернетика. – 2002. – Вип.3. – С. 10–15.
7. Бейко И.В. Применение развязывающих операторов для решения задачи Коши и построения экстремальных алгоритмов развязывающей декомпозиции // Вычислительная и прикладная математика. Респ. междувед. науч. сб. – 1981, вып. 45. – С. 110–118.
8. Зинько П.М. Числові алгоритми побудови наближених розв'язків крайових задач за неявними схемами. Одновимірна задача // Вісник Київ. університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – вип. 3. – С. 233–238.
9. Зинько П.М. Побудова явних різницьових схем для неоднорідного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами // Вісник Київ. університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – вип. 1. – С. 177–181.
10. Зинько П.М. Неявна різницьова схема для розв'язування неоднорідного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами // Вісник Київ. університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – вип. 2. – С. 186–191.
11. Бейко І.В., Бодачівська Л.Ю., Зинько П.М. Системний аналіз процесів підвищення техніко-експлуатаційних характеристик свердловин // Вісник Київ. університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – вип. 2. – С. 101–104.
12. Бейко И.В., Зинько П.Н., Щур В.И. Методы разрешающих операторов для решения задачи Коши, использующие полиномы Лагранжа // Киев. университет им. Т. Шевченко. – Киев, 1986. – 39с. – Рус. – Деп. в УкрНИИТИ 22.06.86, №1468.
13. Бейко И.В. Численный анализ граф-операторных уравнений методом разрешающих операторов и s-экстремальных моделей // II Республиканская конференция „Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе”. – Киев: КГУ, 1978. – С.124–125.
14. Бейко І.В. Уніфікована методологія розв'язуючих операторів як новітня інформаційна технологія для відшукування нових знань і прийняття оптимальних рішень (англійською мовою) // Proc. "The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment", AFCEA, Europe Seminar, Kiev, 28–30 May 1998. – С. 44–50.
15. Зинько П.М. Про використання алгоритмів теорії розв'язуючих операторів при моделюванні деяких радіотехнічних процесів // International conference "Problems of decision making under uncertainties", September 12–17, 2005, Berdyansk, Ukraine, 157–158 p.
16. Зинько П.М. Дослідження системи рівнянь Ходкіна-Хакслі з допомогою деяких алгоритмів теорії розв'язуючих операторів // International workshop "Problems of decision making under uncertainties", May 21–25, 2006, Shidnytsia, Ukraine, 104–105 p.
17. Бейко І.В., Зинько П.М. Чисельні алгоритми асимптотично-розв'язуючих операторів для розв'язування задач Коші з підвищеною точністю // Вісник Київ. націон. ун-ту, сер.: «Кібернетика». – 2009. – №9. – С. 4–10.

Надійшла до редколегії 16.02.12

УДК 519.168

Бондарець І. М., студент

**Метод побудови дерев прийняття рішень
за лінійний час**

У роботі розглядається оптимальний метод побудови дерев прийняття рішень з лінійною складністю алгоритму з орієнтацією на обробку великих масивів тестових прикладів. Це стало можливим завдяки використанню масиву вказівників на тестові приклади.

Ключові слова: дерева прийняття рішень, алгоритм C4.5, індекс приросту інформації.

I. N. Bondarest, student

**Method for constructing decision trees with
linear complexity of algorithm**

This paper considers a method for constructing decision trees with linear complexity of algorithm oriented for processing of large test cases arrays. It was made possible by applying an array of pointers to test cases.

Key Words: decision tree, C4.5 algorithm, information gain index.

E-mail: ibondarets@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Постановка проблеми. Робота присвячена модифікації існуючих методів побудови дерев прийняття рішень в задачах інтелектуальної обробки даних. Деревя прийняття рішень показують найкращі результати для задач класифікації та займають провідне місце по значимості серед алгоритмів в області інтелектуальної обробки даних [1].

Аналіз останніх досліджень. На сьогоднішній день є багато підходів до побудови дерев прийняття рішень. Це алгоритми ID3, C3.0, C4.5, C5.0, CART [2, 4, 5, 6]. Але всіх їх об'єднує одна й та ж ідея, яка полягає у виборі найважливішого атрибуту, що найкраще впливає на результат, та рекурсивна побудова синів дерева для відповідних значень цього атрибуту.

Новизна та ідея. В представлений роботі запропоновано новий підхід, який дає можливість будувати дерева прийняття рішень за лінійний час.

Мета статті. Розробити узагальнений метод побудови дерев прийняття рішень за лінійний час.

Сформулюємо постановку задачі побудови дерев прийняття рішень. Розглянемо класичний випадок - задачу класифікації. Надалі алгоритм може бути відповідно модифікований і для інших задач.

Постановка задачі. (Побудова дерева прийняття рішень). Нехай: A - набір тестів; N - кількість прикладів; M - кількість атрибутів

($M < N$); Q_i - атрибути, $|Q_i|$ - кількість значень атрибуту Q_i , $i = 1, \dots, M$, відповідно $Q = \{1, 2, 3, \dots, |Q|\}$; S - результат, s - кількість класів результату; T - дерево рішень. **Дерево рішень** - це спосіб представлення правил в єдиній ієрархічній, послідовній структурі, де кожному об'єкту відповідає єдиний вузол, який дає рішення. Необхідно на основі набору прикладів A побудувати дерево прийняття рішень.

**1. Класичний розв'язок задачі побудови
дерева прийняття рішень****1.1. Загальний класичний алгоритм**

Загальний алгоритм розв'язання задачі складається з наступних кроків:

1. Множина A містить приклади, які відносяться до одного класу (або майже всі відносяться до одного класу), тоді дерево рішень - це лист, що визначає даний клас. Інакше перейти до пункту 2.

2. Множина A не містить жодного прикладу, тобто є порожньою множиною. Тоді дерево - це листок. Клас, наприклад, обираємо із множини, що асоціюється з батьком вершини по правилу більшості. Інакше перейти до пункту 3.

3. Якщо A містить приклади, що відносяться до різних класів, то в такому випадку необхідно обрати атрибут Q^* , який має найкращий зв'язок з результатом та розбити множину A на підмножини $A_1, A_2, \dots, A_{q^*}$, що для всіх

прикладів з A_i : $Q^*=i$. Атрибут Q ставимо у вершину та виключаємо з тестових прикладів. Заново рекурсивно запускаємо алгоритм на цих підмножинах та будемо піддерева $T_1, T_2, \dots, T_q^*$, які є нащадками дерева T [2].

При побудові дерев прийняття рішень особлива увага акцентується на виборі найкращого критерію атрибута. Для цього можна використати теоретико-інформаційний підхід або статистичний критерій.

Теоретико-інформаційний підхід. Цей підхід полягає у виборі критерію $\text{Gain}(X)$, який застосовується в алгоритмі ID3:

$$\text{Gain}(A) = \text{Info}(A) - \text{Info}(A, A_i) \quad (1)$$

де, $\text{Info}(A)$ – ентропія множини A ,

$$\text{Info}(A, A_i) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i \log(A_i)}{A} \quad (2)$$

Множини $A_1, A_2, \dots, A_n$ отримані при розбитті множини перевіркою X . Вибирається атрибут з максимальним значенням за критерієм (1). Також можна використовувати критерій GainRatio , який враховує не лише кількість інформації, необхідної для запису результату, а й кількість інформації для розділення за вибраним атрибутом [6].

Статистичний критерій. Алгоритм Cart використовує індекс Gini, який оцінює відстань між розподілом класів

$$\text{Gini}(c) = 1 - \sum_{j=1}^c p_j^2 \quad (3)$$

де c – поточний вузол, а p_j – ймовірність класу j в вузлі c [3].

1.2. Приклад побудови дерева прийняття рішень класичним алгоритмом

Задача про чемпіонат (ЗЧ). Розглянемо приклад чемпіонату по футболу. Нехай нам необхідно визначити, чи виграє футбольна команда при певних умовах. Такими умовами можуть бути, наприклад, положення суперника в турнірній таблиці, місце проведення матчу (домашній чи виїзний), погодні умови (йде дощ чи ні, або сильна злива).

Формалізуємо задачу. Тоді маємо атрибути $Q = \{\text{Суперник}, \text{Місце}, \text{Дощ}\}$, $S = \{\text{Перемога}\}$; $Q(\text{Суперник}) = \{\text{Вище}, \text{Нижче}\}$, $Q(\text{Місце}) = \{\text{Дома}, \text{В гостях}\}$, $Q(\text{Дощ}) = \{\text{Так}, \text{Ні}\}$, $S(\text{Перемога}) = \{\text{Так}, \text{Ні}\}$. Розглянемо наступну множину тестових прикладів, таблиця 1:

Тестові приклади

№	Суперник	Місце	Дощ	Перемога
1	Вище	Дома	Так	Так

Таблиця 1

2	Вище	Дома	Ні	Так
3	Вище	Дома	Ні	Так
4	Нижче	Дома	Сильна злива	Ні
5	Нижче	В гостях	Ні	Ні
6	Вище	В гостях	Ні	Ні

Для прикладу будемо розв'язувати задачу, використовуючи критерій $\text{Gain}(X)$ (1), тоді матимемо наступні кроки:

Крок 1. $H(A, \text{Суперник}) = H(A, \text{Місце}) > H(A, \text{Дощ})$. Обираємо критерій «Місце». Отримали наступне дерево, рис.1:

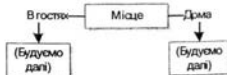


Рис.1. Дерево прийняття рішень після кроку 1.

Згідно класичного алгоритму, необхідно таблицю сортуємо за полем «Місце», розбиваючи на дві підтаблиці та застосовуючи алгоритм до кожної з них, таблиця 2.

Таблиця 2

Таблиця тестових прикладів після першого кроку

Місце	Суперник	Дощ	Перемога
В гостях	Нижче	Ні	Ні
	Вище	Ні	Ні
Дома	Вище	Так	Так
	Вище	Ні	Так
	Нижче	Ні	Так
	Нижче	Сильна злива	Ні

Крок 2. Будемо дерево для наступних тестів, таблиця 3:

Таблиця 3

Таблиця тестових прикладів після кроку 2

Суперник	Дощ	Перемога
Нижче	Ні	Ні
Вище	Ні	Ні

Дерево матиме вигляд, рис.2:



Рис.2. Дерево прийняття рішень після кроку 2.

Крок 3. Будуємо дерево для наступних тестів, таблиця 4:

Таблиця 4

Таблиця тестових прикладів після кроку 3

Суперник	Дош	Перемога
Вище	Так	Так
Вище	Ні	Так
Вище	Ні	Так
Нижче	Сильна злива	Ні

$H(A, \text{Суперник}) = 1 > P(A, \text{Дош})$. Обираємо критерій «Суперник». Відповідне дерево, рис.3:



Рис. 3. Дерево прийняття рішень після кроку 3.

Далі знову розбиваємо тести на дві підмножини та маємо однозначний вибір. Остаточне дерево, рис. 4:



Рис.4. Остаточне дерево прийняття рішень.

3. Модифікований алгоритм побудови дерева прийняття рішень.

3.1. Алгоритм модифікованого методу прийняття рішень.

1. Введемо допоміжний масив, який задамо наступним чином: $\text{Link}[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.
2. Введемо змінні a, b . Спочатку $a = 1, b = n$.
3. Вводимо процедуру $\text{NodeBuild}(a, b)$, яка будує дерево на проміжку таблиці $[a, b]$. Доступ до прикладів отримуємо наступним чином:

$$T[A^*][\text{link}[i]], i = a, b \quad (4)$$

де, A^* - найкращий поточний атрибут, що має K значень, $|A_i|$ - кількість прикладів на проміжку $[a, b]$, де A приймає значення i .

4. Аналогічно до пунктів 1 та 2 класичного алгоритму.

6. Здійснюємо перший прохід. Шукаємо найкращий атрибут A^* . При цьому запам'ятовуємо кількості значень атрибутів для різних значень результату. Таким чином, ми зможемо знайти порядок розташування прикладів для наступного кроку.

7. Другий прохід:

7.1. Вводимо додаткові змінні $P_i = 0, i = 1, K$

7.2. Тоді для сортування вказівників ми для всіх класів атрибуту: $i = 1, K - 1$ проходимо по таблиці на проміжках $[a + \sum_{j=1}^{i-1} |A_j| + P_i, a + \sum_{j=1}^i |A_j|)$ як показано в (4) та якщо значення із класу $i \neq i$, то міняємо значення вказівника із поточної позиції та $\text{link}[\sum_{j=1}^i |A_j| + P_i]$ місцями; P_i збільшуємо на 1.

7.3. Якщо на поточній позиції знаходиться правильне значення, то йдемо до наступного. Таким чином, за неповний прохід по масиву маємо відсортований масив вказівників.

8. Для всіх $i = 1, \dots, k$ запускаємо процедуру

$$\text{NodeBuild}(a + \sum_{j=1}^{i-1} |A_j|, a + \sum_{j=1}^i |A_j|)$$

3.2. Приклад побудови дерева прийняття рішень модифікованим алгоритмом

Продемонструємо роботу модифікованого алгоритму на прикладі задачі про чемпіонат (34) із попереднього розділу. Основні кроки алгоритму будуть наступними:

Крок 1. Спочатку $\text{Link} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Як найінформативніший критерій обираємо «Місце». Дерево має вигляд, рис. 1. Кількості атрибутів: $q_1 = 2, q_2 = 4$. Та змінні $a = 1, b = 6, P_1 = 0, P_2 = 0$, де P_1 - поточна позиція, P_2 - зсув для другого значення. Проходимо по масиву, таблиця 5:

Таблиця 5

Модифікація масиву вказівників Link на першому кроці згідно пункту 7 модифікованого алгоритму

Масив Link	P_1	P_2	Опис дій
[1, 2, 3, 4, 5, 6]	0	0	-
[3, 2, 1, 4, 5, 6]	0	1	swap(Link[1], Link[3])
[4, 2, 1, 3, 5, 6]	0	2	swap(Link[1], Link[4])
[5, 2, 1, 3, 4, 6]	0	3	swap(Link[1], Link[5])
[5, 2, 1, 3, 4, 6]	1	3	Значення на допустимому місці
[5, 6, 1, 3, 4, 2]	1	4	swap(Link[2], Link[6])
[5, 6, 1, 3, 4, 2]	2	4	Значення на

		допустимому місці
--	--	-------------------

Квадратними дужками у «Масив Link» відображається та частина масиву, яка змінюється.

Крок 2. $a = 1$, $b = 2$. Проходимо по масиву та масмо однозначну ідентифікацію. Дерево на рис.2.

Крок 3. $a = 3$, $b = 6$. Знаходимо, що оптимальним критерієм буде «Суперник». Кількості атрибутів: $q_1^* = 1$, $q_2^* = 3$. Проходимо по масиву, таблиця 6:

Таблиця 6

Модифікація масиву вказівників Link на другому кроці згідно пункту 7 модифікованого алгоритму

Масив Link	P_1	P_2	Опис дії
5, 6, [1, 3, 4, 2]	0	0	-
5, 6, [3, 1, 4, 2]	0	1	swap(Link[1], Link[2])
5, 6, [4, 1, 3, 2]	0	2	swap(Link[1], Link[3])
5, 6, [2, 1, 3, 4]	0	3	swap(Link[1], Link[4])
5, 6, [2, 1, 3, 4]	1	3	Значення на допустимому місці

Знову, розбиваючи тести на дві підмножини, масмо однозначний вибір (дерево на рис.4).

4. Обґрунтування складності.

Теорема 1. Часова складність розв'язання задачі побудови дерев прийняття рішень для M атрибутів та N прикладів класичним алгоритмом становить $O(MN \log(N))$ операцій та витратами $O((M+1)N)$ пам'яті.

Доведення. Оскільки, на кожному рівні дерева сумарно необхідний прохід по N прикладах та $M-L$ атрибутам, де L – висота рівня. Та враховуючи необхідність сортування прикладів за час $O(N \log N)$, то загальна складність алгоритму буде $O(MN \log N + M^2 N) = O(MN \log N)$. Для зберігання тестів необхідно $O((M+1)N)$ пам'яті. Враховуючи, що розміром додаткових змінних можна знехтувати, то загальний об'єм пам'яті складатиме $O((M+1)N) = O(N)$.

Теорема 2. Часова складність розв'язання задачі побудови дерев прийняття рішень для M атрибутів та N прикладів модифікованим алгоритмом становить $O(2MN)$ операцій та витратами $O((M+1+K)N)$ пам'яті, де K – розмір одного вказівника.

Доведення. У зв'язку із зменшенням кількості атрибутів на кожному кроці на 1, максимальна висота дерева складає M . Враховуючи, що на кожному рівні дерева сумарно необхідний прохід по N прикладах для

визначення найкращого критерію на кожному кроці та сортування вказівників за максимальний час $O(N)$, а також один прохід для ініціалізації масиву link, то загальна складність алгоритму буде $O(2MN+N)$. Для зберігання тестів необхідно $O((M+1)N)$ пам'яті, а пам'ять, яка необхідна для зберігання вказівників становить $O(KN)$. Тому загальна оцінка складності пам'яті становить $O((M+1+K)N)$.

5. Практична частина

Для реалізації запропонованого алгоритму була написана спрощена програма на мові C. В ній кількість значень атрибутів та результату повинно бути рівно 2. Отримасмо бінарне дерево.

6. Висновки

У роботі запропоновано метод побудови дерев прийняття рішень з лінійною обчислювальною складністю. Це дозволяє ефективно будувати дерево для великих наборів тестових прикладів. Алгоритм являється особливо ефективним, коли оперативної пам'яті достатньо для збереження масиву вказівників, хоча цей масив не обов'язково зберігати в оперативній пам'яті. Маючи вершину, подальшу побудову нижчих рівнів можна розпаралелити на різні незалежні процеси.

Список використаних джерел

- Xindong Wu, Vipin Kumar, J. Ross Quinlan, Joydeep Ghosh, Qiang Yang, Hiroshi Motoda, Geoffrey J. McLachlan, Angus Ng, Top 10 Algorithms in Data Mining, Knowledge and Information Systems, №14, 2008, 1-37.
- L. Breiman, J. H. Friedman, R. A. Olshen, and C. J. Stone. Classification and Regression Trees. CRC Press, 1984, 1-25
- C. Strobl, A.-L. Boulesteix, and T. Augustin. Unbiased split selection for classification trees based on the Gini index. Computational Statistics and Data Analysis, 2007, 483–501.
- H. A. Chipman, E. I. George, and R. E. McCulloch. Bayesian CART model search (with discussion). Journal of the American Statistical Association, 1998, 935–960
- J. R. Quinlan. C4.5: Programs for Machine Learning. Morgan Kaufmann, San Mateo, 1993, 1-10
- Quinlan, J. R. 1986. Induction of Decision Trees. Mach. Learn. 1986, 81-106.

УДК 519.876.5:624.131.542

Власюк* А.П., д. т. н., проф.,
Мартинюк* П.М., к.ф.-м.н., доц.**Математичне моделювання процесів
консолідації ґрунтів з урахуванням
нелінійного закону фільтрації в умовах
тепло-солепереносу**

Побудовано математичну модель фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням нелінійного закону Дарсі-Герсеванова за наявності переносу солей в неізотермічних умовах. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом радіальних базисних функцій. Проведено ряд чисельних експериментів, які засвідчили залежність розподілу надлишкових напорів від взаємних факторів.

Ключові слова: нелінійний закон фільтрації; фільтраційна консолідація; тепло-солеперенесення; метод радіальних базисних функцій.

*E-mail: Vlasjuk.rv@gmail.com, Martinyuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ. Як відомо, історично першим законом фільтрації в недеформівному пористому середовищі став закон Дарсі, який полягає в лінійній залежності швидкості фільтрації від градієнта напору [1]

$$\mathbf{u} = -K_h \nabla h. \quad (1)$$

Тут $\mathbf{u}$ - вектор швидкості фільтрації; $h(\mathbf{X}, t)$ - напір; K_h - тензор коефіцієнтів фільтрації. Узагальнення закону (1) полягають в наступному:

1. Коефіцієнт фільтрації значно залежить від концентрації розчинених солей $c(\mathbf{X}, t)$ в поровій воді [2-4] та від температури $T(\mathbf{X}, t)$ пористого середовища [3-5]. Тобто, в законі (1) $K_h = K_h(c, T)$.

2. В глинистих ґрунтах при нерівномірній концентрації порового соляного розчину має місце явище хімічного осмосу [3, 6, 7]. Аналогічно, при нерівномірному температурному полі, порова рідина може рухатись під впливом градієнта температури (термічний осмос) [3]. Тоді закон (1) набуває вигляду [3, 4]

$$\mathbf{u} = -K_h(c, T) \nabla h + K_c \nabla c + K_T \nabla T, \quad (2)$$

де K_c , K_T - тензори коефіцієнтів хімічного та термічного осмосів.

A.P.Vlasyuk, Doctor of technical sciences,
P. M. Martinyuk, Candidate of physics and
mathematics sciences

**The mathematical modeling of soil
consolidation with taking into account
nonlinear Darcy law, heat and salt transfer**

The mathematical model of soil filtration consolidation problem with taking into account nonlinear Darcy-Gersevanov's law and salt transfer in no isothermal conditions has been formulated. The numerical solution of the correspondent boundary-value problem has been found by the radial basis function method. The numerical experiments have been lead.

Key Words: nonlinear Darcy-Gersevanov's law; filtration consolidation; heat and mass transfer; radial basis function method.

3. При дослідженні процесів фільтраційної консолідації насичених пористих середовищ, коефіцієнт фільтрації ґрунтів залежить від їх коефіцієнта пористості e [8-12]. В свою чергу, згідно принципу гідросмисності М. М. Герсеванова, коефіцієнт пористості є функцією суми головних напружень Θ в скелеті ґрунту [11, 13]. Далі, згідно основної розрахункової моделі Флоріна [11, 13], сума головних напружень в ґрунті, який перебуває в стані консолідації, визначається через надлишкові напори в поровій рідині. Тобто, коефіцієнт фільтрації ще залежить, крім того, і від напорів. Тоді закон (2) набуває вигляду

$$\mathbf{u} = e \mathbf{v} - K_h(c, T, h) \nabla h + K_c \nabla c + K_T \nabla T. \quad (3)$$

Тут: $\mathbf{v}$ - вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту. Без урахування впливу тепло-солепереносу закон (3) є законом Дарсі-Герсеванова [11, 13]. Цей закон описує процеси фільтрації в деформованих пористих середовищах.

4. Дане узагальнення полягає в припущенні, що градієнт напору і швидкість фільтрації не пов'язані прямо пропорційною залежністю [14-16]. Згідно роботи [15] на даний час найчастіше використовуються наступні нелінійні закони Дарсі:

$$\mathbf{u} + \alpha_1 |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u} = -K_h \nabla h,$$

Рівняння (4) описує процес фільтраційної консолідації масиву ґрунту Ω в умовах тепло-масопереносу та при залежності коефіцієнтів тензорів K_h і K_e , K_T від c , T , h і c , T відповідно. Рівняння (5), (6) описують його сольовий та тепловий режими. Тут: γ - питома вага порової рідини; α , ξ - коефіцієнти стискуваності та бічного тиску ґрунту відповідно; c_T - об'ємна теплосмність; ρ - густина порового розчину; c_p - питома теплосмність порового розчину; γ_m - коефіцієнт швидкості масообміну; C_m - концентрація граничного насичення; D_e , D_T - тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії; λ - тензор коефіцієнтів теплопровідності; $\mathbf{n}$ - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі; $\Gamma_1^{(k)} \cup \Gamma_2^{(k)} = \Gamma$; $\Gamma_1^{(c)} \cup \Gamma_2^{(c)} = \Gamma$; $\Gamma_1^{(T)} \cup \Gamma_2^{(T)} = \Gamma$; $\Gamma_1^{(k)} \cap \Gamma_2^{(k)} = \emptyset$; $\Gamma_1^{(c)} \cap \Gamma_2^{(c)} = \emptyset$; $\Gamma_1^{(T)} \cap \Gamma_2^{(T)} = \emptyset$; Γ - межа області Ω .

Крайова задача (4)-(13) є нелінійною. Тому знайти її аналітичний розв'язок неможливо. Отже, потрібно застосовувати чисельні методи. Зупинимось на безсітковому методі радіальних базисних функцій (РБФ) [22], який добре зарекомендував себе в задачах фільтраційної консолідації [4].

3. Чисельне розв'язування задачі. Для чисельного розв'язування задачі (4)-(13) безсітковим методом РБФ покисмо замикання області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ вузловими точками $X_i = (x_i^x; y_i^x; z_i^x)$, $i = \overline{1, \omega}$ та колокаційними точками $Y_i = (x_i^f; y_i^f; z_i^f)$, $i = \overline{1, k}$. Введемо наступні позначення: k^Ω - множина номерів колокаційних точок, які лежать в області Ω ; $k_1^{(k)}$ - множина номерів колокаційних точок, які лежать на межі $\Gamma_1^{(k)}$; $k_2^{(k)}$ - множина номерів колокаційних точок, які лежать на межі $\Gamma_2^{(k)}$. Аналогічні позначення введемо для меж $\Gamma_1^{(c)}$, $\Gamma_1^{(T)}$, $i = \overline{1, 2}$. Вимагаємо $k \geq \omega$. В загальному випадку множини вузлових та колокаційних точок не співпадають, однак такий варіант не виключається. Крім того, для відшукування кожної невідомої функції $h(X, t)$, $c(X, t)$ та $T(X, t)$ можна задавати окремі вузлові сітки. Лише для уникнення зайвої індексації та громіздкості викладок ми цього в статті робити не будемо.

Наближені розв'язки крайової задачі (4)-(13) шукаємо у вигляді

$$h(X, t) = \sum_{i=1}^{\omega} h_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_h), \quad c(X, t) = \sum_{i=1}^{\omega} c_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_c),$$

$$T(X, t) = \sum_{i=1}^{\omega} T_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_T), \quad (14)$$

де $h_i(t)$, $c_i(t)$, $T_i(t)$, $i = \overline{1, \omega}$, - невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\varphi_i(r_i, \varepsilon)$, $i = \overline{1, \omega}$, - відомі РБФ, причому $r_i = \|X - X_i\|_2$; $\varepsilon_h > 0$, $\varepsilon_c > 0$, $\varepsilon_T > 0$ - параметри форми.

Тоді, використовуючи метод колокацій в точці [23], зокрема його модифікований варіант, де множини вузлових та колокаційних точок не співпадають [22], з крайової задачі (4)-(13) отримуюмо наступну задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{h}(t) = \{h_i(t)\}_{i=1}^{\omega}$,

$$\mathbf{C}(t) = \{\mathbf{h}_i(t)\}_{i=1}^{\omega}, \quad \mathbf{T}(t) = \{T_i(t)\}_{i=1}^{\omega}:$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (16)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{h} =$$

$$= \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)},$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad (18)$$

де

$$\mathbf{h}^{(0)} = \{h_i(0)\}_{i=1}^{\omega}, \quad \mathbf{C}^{(0)} = \{c_i(0)\}_{i=1}^{\omega}, \quad \mathbf{T}^{(0)} = \{T_i(0)\}_{i=1}^{\omega};$$

$$\mathbf{M}^{(a)} = \{m_{ij}^{(a)}\}_{i,j=1}^{\omega}, \quad \mathbf{L}^{(a)} = \{l_{ij}^{(a)}\}_{i,j=1}^{\omega},$$

$$\mathbf{F}^{(a)} = \{f_i^{(a)}\}_{i=1}^{\omega}, \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad \mathbf{L}^{(21)} = \{l_{ij}^{(21)}\}_{i,j=1}^{\omega};$$

$$\mathbf{L}^{(1a)} = \{l_{ij}^{(1a)}\}_{i,j=1}^{\omega}, \quad \alpha = \overline{2, 3}; \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(a)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(a)}\}_{i,j=1}^{\omega},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(a)} = \{\tilde{f}_i^{(a)}\}_{i=1}^{\omega}, \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad m_{ij}^{(1)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h),$$

$$m_{ij}^{(2)} = n \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), \quad m_{ij}^{(3)} = c_T \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \quad i \in k^\Omega;$$

$$f_i^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in k_1^{(T)}; \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T) + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k_2^{(T)}; \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in k_1^{(T)}; \end{cases}$$

$$f_i^{(2)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (D_e \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c) + \\ + \gamma_m \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), & i \in k_1^{(c)}; \\ (-D_e \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k_2^{(c)}; \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), & i \in k_1^{(c)}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 J_{\theta}^{(21)} &= \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T)), i \in k_1^{\Omega}; \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), i \in k_2^{(c)}; \end{cases} \\
 J_{\theta}^{(22)} &= \begin{cases} -a_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_\varepsilon \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c)), i \in k_1^{\Omega}; \\ (\mathbf{K}_\varepsilon \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), i \in k_2^{(k)}; \end{cases} \\
 J_{\theta}^{(23)} &= \begin{cases} -a_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T)), i \in k_1^{\Omega}; \\ (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), i \in k_2^{(k)}; \end{cases} \\
 J_{\theta}^{(24)} &= \begin{cases} -a_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_\varepsilon \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_k)), i \in k_1^{\Omega}; \\ (-\mathbf{K}_\varepsilon \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_k), \mathbf{n}), i \in k_2^{(k)}; \\ \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_k), i \in k_1^{(k)}; \end{cases} \\
 f_i^{(2)} &= \begin{cases} \gamma_m C_m, i \in k_0; \\ C_i(\mathbf{Y}_i, t), i \in k_1^{(c)}; \end{cases} \quad f_i^{(1)} = H_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k_1^{(k)}; \\
 f_j^{(3)} &= T_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k_1^{(T)}; \quad \tilde{m}_j^{(1)} = \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_k); \\
 \tilde{m}_j^{(2)} &= \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c); \quad \tilde{m}_j^{(3)} = \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T); \\
 \tilde{f}_i^{(1)} &= h_0(\mathbf{Y}_i); \quad \tilde{f}_i^{(2)} = c_0(\mathbf{Y}_i); \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i); \\
 r_{\mu} &= \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_{L_2}, \quad i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, \omega}; \\
 a_1 &= (1 + \bar{\varepsilon})(1 + (\bar{r} - 1)\xi)/\gamma \mu.
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо при деякому наборі індексів коефіцієнт однієї із матриць або векторів задачі Коші (15)-(18) згідно вищевикладених формул не визначений, то він приймається рівним нулю. Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (15)-(18) можна використати чисто неявну різницеву схему або схему предиктор-коректор [3, 4, 16].

4. Результати чисельних експериментів. Виявлення впливу прийняття нелінійного закону фільтрації на процес фільтраційної консолидації ґрунту в умовах тепло-солепереносу проведено на прикладі двовимірної задачі. Товщина масиву двофазного глинистого ґрунту $l = 10 \text{ м}$ і координати точок межі області консолидації покладалась наступними: $A(-10; 0)$, $B(-10; 10)$, $F(10; 10)$, $D(10; 0)$, $E_1(-5; 0)$, $E_2(5; 0)$. Розмірність визначається в метрах. На частину $E_1 E_2$ верхньої основи миттєво прикладається смугове навантаження інтенсивністю $q = 2.2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Деякі з вихідних даних наступні:

$$\begin{aligned}
 \xi &= 0.75, \quad D_1 = D_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{доба}, \\
 \gamma_m &= 0 \text{ доба}^{-1}, \quad \rho = 1100 \text{ кг/м}^3, \\
 D_{\gamma_1} &= D_{\gamma_2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{доба}, \quad \gamma = 10^4 \text{ Н/м}^3, \\
 k_{\gamma_1} &= k_{\gamma_2} = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{доба}, \\
 c_{\theta} &= 4.2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{град}, \quad c_T = 2137 \text{ кДж/м}^3 \cdot \text{град},
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 108 \text{ кДж/м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба},$$

$$k_{\gamma_1} = k_{\gamma_2} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}.$$

Граничні умови прийняті наступними:

$$\begin{aligned}
 (q_e, \mathbf{n})|_{ABFD \cup AE_1 \cup E_2 D} &= 0, \quad c|_{E_1 E_2} = C_m, \\
 (q_T, \mathbf{n})|_{ABFD \cup AE_1 \cup E_2 D} &= 0, \quad T|_{E_1 \cup E_2 D} = T_1, \\
 T|_{E_1 E_2} &= T_{\max},
 \end{aligned}$$

$$(u, \mathbf{n})|_{BF \cup E_1 E_2} = 0, \quad H|_{BAE_1 \cup FDE_2} = H_1.$$

Тут $C_m = 160 \text{ г/л}$, $T_{\max} = 50^\circ \text{ C}$, $T_1 = 20^\circ \text{ C}$, $H_1 = 0 \text{ м}$.

В законі (10) знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

Початковий розподіл напорів визначався з умов, що в початковий момент часу весь тиск від прикладеного навантаження передається на порову рідину. Тоді [13, ст. 320] $h_0(x, y) = \frac{\Theta_0}{2\gamma}$.

Сума Θ_0 головних напружень в скелеті ґрунту визначалась для півплощини згідно формули [13, ст. 171]

$$\Theta_0(x, y) = \frac{2q}{\pi} \left(\arctg \frac{a-x}{y} + \arctg \frac{a+x}{y} \right),$$

де $(-a)$ та a координати по x точок E_1 та E_2 відповідно (див. рис. 1).

Початковий розподіл концентрації солей та температури визначався як

$$\begin{aligned}
 c_0(x, y) &= \begin{cases} C_m, (x, y) \in E_1 E_2, \\ C_{\min}, (x, y) \notin E_1 E_2; \end{cases} \\
 T_0(x, y) &= \begin{cases} T_{\max}, (x, y) \in E_1 E_2, \\ T_1, (x, y) \in AE_1 \cup E_2 D, \\ T_{\min}, (x, y) \notin AD. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Тут: $C_{\min} = 8 \text{ г/літр}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{ C}$.

Ґрунт щодо фільтраційних властивостей вважався ізотропним. Для коефіцієнта фільтрації використовувалась наступна залежність:

$$k_s(c, T, h) = k(c, T) \cdot \exp(\beta \cdot (e - e_0)).$$

Тут: $e_0 = 0.62$ - початкове значення коефіцієнта пористості; $\beta = 12$. Множник $\exp(\beta \cdot (e - e_0))$ визначає ступінь впливу зміни коефіцієнта пористості на коефіцієнт фільтрації. Даний множник брався згідно роботи [12], де $k(e) = a \cdot \exp(\beta \cdot e)$. Залежність $k(c, T)$ апроксимувалась методом РБФ [4].

Коефіцієнт пористості покладалась залежним від суми Θ головних напружень в скелеті ґрунту [12]

$$e(\Theta) = e_0 - c \cdot \ln(1 + b \cdot \Theta),$$

де $c = 6.2 \cdot 10^{-2}$, $b = 6.5 \cdot 10^{-3} \text{ Па}^{-1}$. Функція Θ визначалась з умов основної розрахункової моделі Флоріна [11, 13]

$$\Theta(x, y, t) = \Theta_0(x, y) - 2\eta(x, y, t).$$

Область покривалась вузловою та колокаційною сітками. Кількість вузлів – 456, колокаційних точок – 1071. В якості базисної використовувалась мультиквадратична радіальна функція з параметрами форми $\epsilon_h = \epsilon_c = \epsilon_T = 0.425$. Для дискретизації в часі використовувалась схема предиктор-коректор з кроком $\tau = 30$ діб.

Тестовий приклад відповідає випадку фундаменту цеху хімічного виробництва з підвищеною температурою та витіканням хімічних речовин в ґрунтову основу споруди.

Результати чисельних експериментів в графічному вигляді представлені на рис. 2-5.

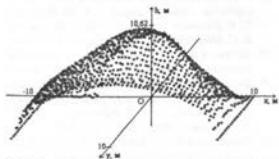


Рис.2. Графік розподілу поля надлишкових напорів з урахуванням залежності $k_h(c, T, h)$ при $t = 270$ діб

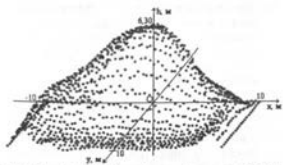


Рис.3. Графік різниці між розподілом надлишкових напорів з урахуванням залежностей $k_h(c, T, h)$ та $k_h(c, T)$ при $t = 270$ діб

5. Висновки. Як видно з рис. 3, у випадку залежності $k_h(c, T, h)$ надлишкові напори в масиві ґрунту розсіюються повільніше, ніж у

випадку без урахування залежності коефіцієнта фільтрації від напору $h(x, y, t)$. Причому, максимальна різниця сягає 60 % від величини самих напорів. Зрозуміло, що нехтувати таким впливом при дослідженні процесів консолідації ґрунтових основ промислових та цивільних будівельних об'єктів не можна.

Отже, в даній роботі поставлена і чисельно розв'язана задача про нелінійну фільтраційну консолідацію ґрунту в умовах тепло-солепереносу. Як свідчать результати чисельного експерименту, ступені розсіювання надлишкових напорів значно різняться при прийнятті чи неприйнятті залежності коефіцієнта фільтрації від самих напорів.

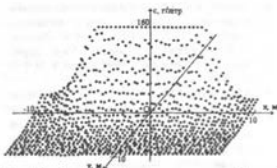


Рис.4. Графік розподілу поля концентрації солей при $t = 270$

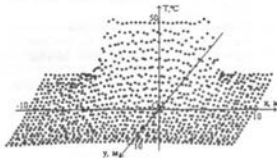


Рис.5. Графік розподілу поля температури при $t = 270$ діб

Список використаних джерел

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664с.
2. Власюк А. П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації солевих розчинів у піщаних ґрунтах / А. П. Власюк, М. Т. Кузюло. // Меліорація та водне господарство. – Київ: Аграрна наука. – 2000. – Вип. 87. – С. 43-46.

3. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с.
4. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
5. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – Киев: Наук. думка, 1991. – 264 с.
6. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей / А. П. Власюк, О. В. Жеребятів. // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва. – 1998. – Вип. 1. Ч. 1. – С. 40-43.
7. МIRONENKO В. А. Проблемы гидрогеоэкологии. Т.1. Теоретическое изучение и моделирование геомиграционных процессов / В. А. МIRONENKO, В. Г. Румянши. – М.: Изд-во МГТУ, 1998. – 611 с.
8. ЖИЛЕНКОВ В. Н. Водоупорные свойства ґрунтов ядер и экранов высоких плотин / В. Н. ЖИЛЕНКОВ. – Ленинград: Энергия, 1968. – 116 с.
9. ЖИЛЕНКОВ В. Н. Водопроницаемость экраняющих покрытий из глинистого ґрунта / В. Н. ЖИЛЕНКОВ. // Изв. ВНИИГ. – 1977. – Т. 115. – С. 101-109.
10. АБЕЛЕВ М. Ю. Вопросы применения теории фильтрационной консолидации для сильно сжимаемых водонасыщенных глинистых ґрунтов / М. Ю. АБЕЛЕВ, Н. А. Цытович. // Основания, фундаменты и механика ґрунтов. – 1964. – №3. – С. 11-14.
11. ФЛОРИН В. А. Основы механики ґрунтов / В. А. ФЛОРИН. – М.: Госстройиздат. – Т.2, 1961. – 544 с.
12. ГОРЕЛИХ Л. В. Консолидация растущего слоя трехфазного ґрунта с учётом изменений его свойств в процессе уплотнения / Л. В. ГОРЕЛИХ, Б. М. НУЛЛЕР. // Изв. ВНИИГ. – 1968. – Т. 86. – С. 223-227.
13. ИВАНОВ П. Л. Ґрунты и основания гидротехнических сооружений. Механика ґрунтов / П. Л. ИВАНОВ. – М.: Высш. шк., 1991. – 447 с.
14. ХРИСТИАНОВИЧ С. А. Движение ґрунтовых вод, не следующее закону Дарси / С. А. ХРИСТИАНОВИЧ. // Прикл. матем. и мех. – 1940. – Т. 4, №1. – С. 33-52.
15. CAKMAK A. Analysis of nonlinear Darcy-Forchheimer flows in porous media: a dissertation in mathematics for the degree of Doctor of Philosophy / Cakmak Adem. – Texas Tech University, 2009. – 67 p.
16. СЕРГИЕНКО И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. СЕРГИЕНКО, В. В. СКОПЕЦКИЙ, В. С. ДЕЙНЕКА. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
17. МЕСЯЧ С. Р. Фильтрация воды в глинистых ґрунтах при больших размерах образцов и малых градиентах напора / С. Р. МЕСЯЧ, Т. Л. ПЕТРОВИЧ. // Основания, фундаменты и механика ґрунтов. – 1993. – №1. – С. 8-9.
18. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. ВЕРИГИН, С. В. ВАСИЛЬЕВ, В. С. САРКИСКИ, Б. С. ШЕРЖУКОВ. – М.: Недра, 1977. – 271 с.
19. ШКОЛА А. В. Численное решение уравнения нелинейной консолидации фильтрационно-анизотропного массива ґрунта при его плоском деформировании / А. В. ШКОЛА, Т. В. РАБОЧАЯ. // Світ геотехніки. – 2008. – №1. – С. 22-23.
20. Булавацький В. М. Системний підхід к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацький, В. В. Скопецкий. // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №6. – С. 71-79.
21. Булавацький В. М. Математичне моделювання динаміки консолідаційних процесів з урахуванням релаксаційних ефектів / В. М. Булавацький, В. В. Скопецкий. // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №6. – С. 59-66.
22. Least-squares collocation meshless method / X. Zhang, X.-H. Liu, K.-Z. Song, M.-W. Lu // Int. J. Numer. Methods Engin. – 2001. – Vol. 51. – Pp. 1089-1100.
23. Власова Е. А. Приближенные методы математической физики / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 700 с.

Надійшла до редколегії 15.02.2012

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

Власюк* А.П., д.т.н., проф., Федорчук** Н.А.,
аспірант**Математичне моделювання одновимірної
задачі напружено-деформованого стану
грунтового масиву в умовах тепло-
масоперенесення при фільтрації солевих
розчинів**

В статті сформульовано постановку та
проведено математичне моделювання задачі
напружено-деформованого стану (НДС)
грунтового масиву в умовах тепло-
масоперенесення при фільтрації підземних вод.
Чисельний розв'язок відповідної одновимірної
крайової задачі знайдено методом скінченних
різниць. Як приклад, досліджено задачу
напружено-деформованого стану грунтового
масиву обмеженої товщини. Наведено
результати чисельних експериментів та їх
аналіз.

Ключові слова: напружено-деформований
стан, тепло-масоперенесення, метод скінченних
різниць.

A.P. Vlasyuk, Doctor of science, prof.,
N.A. Fedorchuk, PhD student**Mathematical modeling of one-dimensional
problem of stressed deformed state of soil
mass under heat-mass transfer conditions
during the filtration of salt solutions**

In the article was formulated the statement and
carried out the mathematical modelling of problem
of stressed deformed state (SDS) of soil mass under
heat-mass transfer conditions during the filtration
of underground waters. There is obtained the
numerical solution of respective boundary value
problem by the method of finite differences. As an
example, the stressed deformed state of soil mass of
limited thickness problem has been investigated.
Numerical experiments and their analyses have
been carried out.

Key words: stressed deformed state, heat-mass
transfer, method of finite differences.

*E-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

**E-mail: N.A.Fedorchuk@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

1. Вступ. Питання дослідження напружено-
деформованого стану (НДС) ґрунтових основ, що
викликане інтенсивним розвитком промислового
та цивільного будівництва, має важливе значення
для аналізу стійкості, надійності та безпеки
експлуатації об'єктів, що побудовані на таких
ґрунтах. Суттєві зміни НДС можуть викликати
зміну ґрунтового профілю масиву, в якому
відбуваються процеси фільтрації підземних вод,
тепло-масоперенесення розчинених
фільтраційними потоками речовин, і зрештою
привести до непередбачуваних негативних явищ
та аварій споруд.

Тому в даній роботі проведено математичне
моделювання та досліджено напружено-
деформований стан ґрунтового масиву обмеженої
товщини в умовах тепло-масоперенесення при
фільтрації солевих розчинів.

2. Постановка задачі. Нехай дано масив
ґрунту товщиною l при наявності в ньому тепло-

масоперенесення при фільтрації солевих
розчинів (рис.1).

Шар ґрунту вважається пружно-деформівним
в межах лінійної теорії пружності з пружними
параметрами (коефіцієнтами Ламе) $\lambda(c)$, $\mu(c)$,
які залежать від концентрації солевого розчину.
На ґрунт діє сила тяжіння, архімедова та
фільтраційна сили.

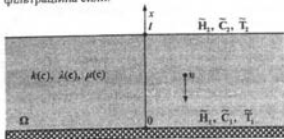


Рис.1. Ґрунтовий масив в умовах тепло-
масоперенесення при фільтрації солевих
розчинів

Нехай на нижній поверхні ґрунту на межі $x=0$ задано п'єзометричний напір $\bar{H}_1$, концентрація розчинених у воді солей $\bar{C}_1$ та температура $\bar{T}_1$, а значення п'єзометричного напору $\bar{H}_2$, концентрації солей $\bar{C}_2$ та температури $\bar{T}_2$ – на поверхні ґрунту ($x=l$), причому $\bar{H}_2 > \bar{H}_1$, $\bar{C}_2 > \bar{C}_1$, $\bar{T}_2 > \bar{T}_1$. В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процес фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Потрібно розрахувати НДС з врахуванням процесів тепло-масоперенесення при умові, що відсутні зміщення нижньої та верхньої меж ґрунту або лише нижньої межі ґрунту (скельної основи).

3. Математична модель задачі. Математичну модель одновимірної задачі НДС ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення, враховуючи результати робіт [1–11], можна описати наступною крайовою задачею.

Рівняння НДС ґрунту в зміщеннях мають вигляд

$$(\lambda(c) + 2\mu(c)) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d(\lambda(c) + 2\mu(c))}{dx} \frac{du}{dx} - (\lambda(c) + 2\mu(c)) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} = X, \quad (1)$$

$$X = \gamma_w + \frac{dp}{dx}, \quad (2)$$

де $x \in [0; l]$, $u(x)$ – зміщення в ґрунті вздовж осі OX ; X – масова сила; $\lambda(c)$, $\mu(c)$ – коефіцієнти Ламе; $c(x, t)$ – концентрація порового сольового розчину в ґрунтовому масиві; $T(x, t)$ – температура; γ_w – питома вага ґрунту, що знаходиться в зваженому стані; p – фільтраційний тиск сольового розчину, який визначається за формулою

$$p = \gamma_p (h - x), \quad (3)$$

h – п'єзометричний напір; γ_p – питома вага рідини; α_T – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур (T_0, T) , що визначається виразом [12]

$$\alpha_T = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha d\bar{T},$$

де $\bar{T} = T - T_0$, $\alpha = \frac{\Delta l}{l \bar{T}}$ – коефіцієнт лінійного розширення, Δl – зміна лінійних розмірів досліджуваного зразка.

Крайові умови для зміщень мають вигляд

$$L_1 u(0) = 0, \quad L_2 u(l) = 0, \quad (4)$$

де L_i , $i=1, 2$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно при $x=0$ та $x=l$.

Рівняння масоперенесення в неізомертичних умовах має наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - u(c) \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_\infty) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) = n_p \frac{\partial c}{\partial t} \quad (5)$$

Тут: $u(c)$ – швидкість фільтрації; $t > 0$; $D(c)$, D_T – коефіцієнти конвективної дифузії та термодифузії; n_p – пористість; γ – константа швидкості масообміну; C_∞ – концентрація граничного насичення.

Крайові умови для концентрації мають вигляд

$$c(x, 0) = \bar{C}_0(x), \quad (6)$$

$$L_3 c(0, t) = \bar{C}_1(t), \quad L_4 c(l, t) = \bar{C}_2(t), \quad (7)$$

де $\bar{C}_0(x)$ – задана функція; L_i , $i=3, 4$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови для концентрації сольових розчинів.

Рівняння теплоперенесення має наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_p u(c) \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Тут: λ_T , c_T – коефіцієнти ефективної теплопровідності вологого ґрунту та об'ємної теплоємності ґрунту відповідно; ρ – густина порового розчину; c_p – питома теплоємність порового розчину.

Крайові умови для температури мають вигляд

$$T(x, 0) = \bar{T}_0(x), \quad (9)$$

$$L_5 T(0, t) = \bar{T}_1(t), \quad L_6 T(l, t) = \bar{T}_2(t), \quad (10)$$

де $\bar{T}_0(x)$ – задана функція; L_i , $i=5, 6$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови для температури.

Фільтрація підземних вод в ґрунтовому шарі описується наступною крайовою задачею:

$$u(c) = -k(c) \frac{dh}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad (11)$$

$$h(0) = \bar{H}_1, \quad h(l) = \bar{H}_2. \quad (12)$$

Тут: $k(c)$ – коефіцієнт фільтрації; $\bar{H}_1$, $\bar{H}_2$ – напори відповідно на нижній та верхній межах ґрунту.

4. Чисельний розв'язок крайової задачі. Для чисельного розв'язування поставленої задачі покريمо область $\bar{Q} = [0; l] \times [0; t_1]$ рівномірною сіткою $\bar{Q}^{(n, \kappa)} = [0; n h] \times [0; m \tau]$ з кроками h та τ відповідно по змінній x та часу t . Нехай n – кількість кроків по просторовій змінній, m – кількість кроків по часу.

Для дискретизації рівняння (1) використаємо неявну різницеву схему, а для рівнянь (5) та (8) – монотонну різницеву схему О.А.Самарського [13]. В результаті отримаємо наступні скінченно-різничеві аналоги даних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} & (x_i^{(j)}(c_i^{(j)}) + 2\mu_i^{(j)}(c_i^{(j)})) \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \\ & + \left(\frac{(x_{i+1}^{(j)}(c_{i+1}^{(j)}) - x_{i-1}^{(j)}(c_{i-1}^{(j)}))}{2h} + \frac{2\mu_{i+1}^{(j)}(c_{i+1}^{(j)}) - \mu_{i-1}^{(j)}(c_{i-1}^{(j)})}{2h} \right) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \\ & - (x_i^{(j)}(c_i^{(j)}) + 2\mu_i^{(j)}(c_i^{(j)})) x_i \frac{T_{i+1}^{(j)} - T_{i-1}^{(j)}}{2h} = x_i^{(j)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (n_x)_i \frac{c_i^{(j+1)} - c_i^{(j)}}{\tau} &= \frac{\eta_i^{(j)}}{h} \left(d_{i+1}^{(j)} \frac{c_{i+1}^{(j+1)} - c_i^{(j+1)}}{h} - d_i^{(j)} \frac{c_i^{(j+1)} - c_{i-1}^{(j+1)}}{h} \right) + \\ &+ \frac{(v^*)_i^{(j)}}{D_i^{(j)}(c_i^{(j)})} d_{i+1}^{(j)} \frac{c_{i+1}^{(j+1)} - c_i^{(j+1)}}{h} + \frac{(v^*)_i^{(j)}}{D_i^{(j)}(c_i^{(j)})} d_i^{(j)} \frac{c_i^{(j+1)} - c_{i-1}^{(j+1)}}{h} - \\ &- \gamma_i(c_i^{(j+1)} - C_i) + \\ &+ \frac{1}{h} \left((d_r)_i^{(j)} \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_{i-1}^{(j+1)}}{h} - (d_r)_i^{(j)} \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i+1}^{(j+1)}}{h} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c_i^{(j)} \frac{T_i^{(j+1)} - T_i^{(j)}}{\tau} &= \frac{\bar{\eta}_i^{(j)}}{h} \left((\bar{x}_r)_i^{(j)} \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_i^{(j+1)}}{h} - \right. \\ &- (\bar{x}_r)_i^{(j)} \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i+1}^{(j+1)}}{h} \left. \right) + \alpha_i \left(\frac{(v^*)_i^{(j)}}{(\bar{x}_r)_i^{(j)}} (\bar{x}_r)_i^{(j)} \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_i^{(j+1)}}{h} + \right. \\ &+ \frac{(v^*)_i^{(j)}}{(\bar{x}_r)_i^{(j)}} (\bar{x}_r)_i^{(j)} \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i+1}^{(j+1)}}{h} \left. \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$,
та закону (11)

$$u_i^{(j)} = -k_i^{(j)}(c_i^{(j)}) \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2h}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (16)$$

З рівняння нерозривності (11) маємо

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} \left(k(c) \frac{dh}{dx} \right) = 0.$$

Звідки маємо

$$k(c) \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{d(k(c))}{dx} \frac{dh}{dx} = 0. \quad (17)$$

Для дискретизації рівняння (17) використаємо монотонну різницеву схему О.А.Самарського [13]. В результаті отримаємо скінченно-різничевий аналог даного диференціального рівняння

$$\frac{x_i^{(j)} h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{h} + (r^*)_i^{(j)} \frac{h_{i+1} - h_i}{h} + (r^-)_i^{(j)} \frac{h_i - h_{i-1}}{h} = 0, \quad (18)$$

$$i = \overline{1, k-1}, \quad j = \overline{1, m},$$

де

$$a_i^{(j)} = \frac{1}{2} (k_i^{(j)}(c_i^{(j)}) + k_{i+1}^{(j)}(c_{i+1}^{(j)})),$$

$$d_i^{(j)} = \frac{1}{2} (D_i^{(j)}(c_i^{(j)}) + D_{i+1}^{(j)}(c_{i+1}^{(j)})), \quad (d_r)_i^{(j)} = \frac{1}{2} ((D_r)_i^{(j)} + (D_r)_{i+1}^{(j)}),$$

$$(\bar{x}_r)_i^{(j)} = \frac{1}{2} ((\bar{x}_r)_i^{(j)} + (\bar{x}_r)_{i+1}^{(j)}),$$

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{1 + \frac{h_i |u_i^{(j)}|}{2D_i^{(j)}(c_i^{(j)})}} = 1 - \frac{h_i |u_i^{(j)}|}{2D_i^{(j)}(c_i^{(j)})} + O(h_i^2),$$

$$\bar{\eta}_i^{(j)} = \frac{1}{1 + \frac{h_i \alpha_i |u_i^{(j)}|}{2(\bar{x}_r)_i^{(j)}}} = 1 - \frac{h_i \alpha_i |u_i^{(j)}|}{2(\bar{x}_r)_i^{(j)}} + O(h_i^2),$$

$$x_i^{(j)} = \frac{1}{1 + 0.5 h_i |r_i^{(j)}|},$$

$$r_i^{(j)} = \frac{1}{k_i^{(j)}(c_i^{(j)})} \frac{k_{i+1}^{(j)}(c_{i+1}^{(j)}) - k_{i-1}^{(j)}(c_{i-1}^{(j)})}{2h},$$

$$(r^*)_i^{(j)} = \frac{-r_i^{(j)} + |r_i^{(j)}|}{2} \geq 0, \quad (r^-)_i^{(j)} = \frac{-r_i^{(j)} - |r_i^{(j)}|}{2} \leq 0,$$

$$(v^*)_i^{(j)} = \frac{-v_i^{(j)} + |v_i^{(j)}|}{2} \geq 0, \quad (v^-)_i^{(j)} = \frac{-v_i^{(j)} - |v_i^{(j)}|}{2} \leq 0.$$

Для початкових умов (6), (9) отримаємо наступні скінченно-різничеві аналоги:

$$c_i^{(0)} = \bar{C}_i(h_i), \quad T_i^{(0)} = \bar{T}_i(h_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Для знаходжень значень зміщень, концентрацій солей, температури та напору використовувався метод прогонки [14].

Як відомо (див. напр., [1, 12]), деформації та напруження в одновимірному випадку з врахуванням неізотермічного режиму обчислюються за формулами

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \sigma = E(c) \left(\frac{du}{dx} - \alpha_r \bar{T} \right),$$

де $E(c)$ – модуль Юнга, залежність якого від концентрації сольових розчинів отримана в [6].

Відповідно їх скінченно-різницею аналогі матимуть вигляд

$$\varepsilon_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \sigma_i = E^{(j)}(c_i^{(j)}) \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \alpha_f (T_s^{(j)} - T_0^{(j)}) \right),$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, m}.$$

5. Результати чисельних експериментів. Як приклад, розглянуто одновимірну задачу НДС ґрунтового масиву товщиною $l = 10 \text{ м}$ з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів. Значення вхідних даних брались наступними:

$$\begin{aligned} n_p &= 0,4, & D &= D_f = 0,002 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, & \alpha_f &= 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{град}}, \\ \gamma_p &= 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, & \gamma_m &= 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, & \rho &= 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\ \rho_p &= 1650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & \rho_f &= 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & c_p &= 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \\ c_f &= 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, & \lambda_f &= 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \\ \bar{C}_1(t) &= 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, & \bar{C}_2(t) &= 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \\ \bar{T}_1(t) &= 5^\circ \text{C}, & \bar{T}_2(t) &= 25^\circ \text{C}, & \bar{H}_1 &= 0 \text{ м}, & \bar{H}_2 &= 1 \text{ м}, \\ \bar{C}_0(x) &= 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, & \bar{T}_0(x) &= 5^\circ \text{C}. \end{aligned}$$

Прийнято наступні залежності коефіцієнта фільтрації, коефіцієнтів Ламе і модуля Юнга від концентрації соляного розчину [6, 7]:

$$k(c) = a_1 \cdot c^3 + a_2 \cdot c^2 + a_3 \cdot c + a_4 \cdot c^3 + a_5 \cdot c^2 + a_6 \cdot c + a_0,$$

де $a_1 = 5,9404 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = -1,6703 \cdot 10^{-1}$,
 $a_3 = 1,7051 \cdot 10^{-1}$, $a_4 = -7,4311 \cdot 10^{-2}$, $a_5 = 1,0563 \cdot 10^{-2}$,
 $a_6 = 1,0054 \cdot 10^{-3}$;

$$\lambda(c) = a_1^* \cdot c^3 + a_2^* \cdot c^2 + a_3^* \cdot c + a_0^*,$$

де $a_1^* = -1798,96$, $a_2^* = 4314,732$, $a_3^* = -2615,37$,
 $a_0^* = 2545,743$;

$$\mu(c) = a_1^* \cdot c^3 + a_2^* \cdot c^2 + a_3^* \cdot c + a_0^*,$$

де $a_1^* = -1205,28$, $a_2^* = 2880,321$, $a_3^* = -1741,92$,
 $a_0^* = 1696,324$;

$$E(c) = a_1^* \cdot c^3 + a_2^* \cdot c^2 + a_3^* \cdot c + a_0^*,$$

де $a_1^* = -0,000393$, $a_2^* = 0,1878866$, $a_3^* = -22,70202$,
 $a_0^* = 4410,552$, $c \in [0,1]$ – безрозмірна величина.

Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 4 рокам.

Нижче наведено результати чисельних експериментів у вигляді графіків.

Як видно з рис. 2, 3 та 4, при врахуванні впливу тепло-масоперенесення на НДС ґрунтового масиву зміщення, деформації та напруження з часом зростають. З рис. 5, 6, 7 видно, що напір в умовах тепло-масоперенесення, концентрація солей в неізотермічному режимі та температура при фільтрації сольових розчинів також зростають з часом.

Як видно з рис. 8, 9 та 10, при врахуванні впливу тепло-масоперенесення зміщення, деформації та напруження зростають швидше, ніж у випадку його відсутності.

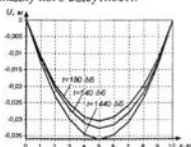


Рис.2. Графіки розподілу зміщень з врахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

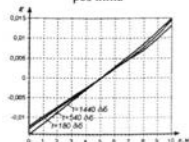


Рис.3. Графіки розподілу деформацій з врахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

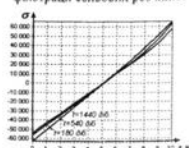


Рис.4. Графіки розподілу напружень з врахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

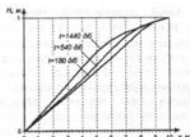


Рис.5. Графіки розподілу напорів з врахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

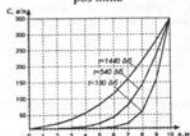


Рис.6. Графіки розподілу концентрації солей в неізотермічному режимі

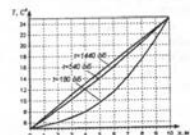


Рис.7. Графіки розподілу температури при фільтрації сольових розчинів

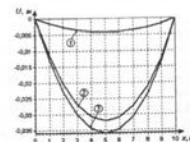


Рис.8. Графіки розподілу зміщень при $t = 1440$ дб: 1) без тепло-масоперенесення; 2) при наявності масоперенесення; 3) при наявності тепло-масоперенесення

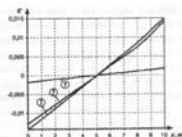


Рис.9. Графіки розподілу деформацій при $t = 1440$ дб: 1) без тепло-масоперенесення; 2) при наявності масоперенесення; 3) при наявності тепло-масоперенесення

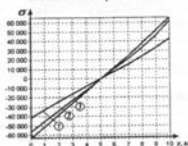


Рис.10. Графіки розподілу напружень при $t = 1440$ дб: 1) без тепло-масоперенесення; 2) при наявності масоперенесення; 3) при наявності тепло-масоперенесення

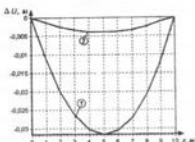


Рис.11. Графіки різниць між розподілом зміщень при $t = 1440$ дб: 1) з врахуванням та без врахування тепло-масоперенесення; 2) з врахуванням тепло-масоперенесення та без врахування теплоперенесення

6. Висновки. В роботі сформульовано постановку та розроблено відповідну математичну модель НДС ґрунтового масиву з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів. Для даної математичної моделі побудовано монотонно-різницьку схему. Отримано чисельний розв'язок

поставленої крайової задачі методом скінченних різниць. Проведено ряд чисельних експериментів з дослідження впливу тепло-масоперенесення на НДС ґрунтового масиву при фільтрації солових розчинів. Показано, що тепло-масоперенесення значно змінює картину НДС в порівнянні ніж без впливу тепло-масоперенесення. А саме, як видно із рис. 8, 9 та 10, зміщення, деформації і напруження збільшуються при врахуванні тепло-масоперенесення в порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масоперенесення. Крім того, зміщення, деформації і напруження також збільшуються з врахуванням тепло-масоперенесення по відношенню до відповідних величин при врахуванні лише масоперенесення (рис. 8–11). Масоперенесення в неізотермічних умовах дещо впливає на картину НДС в порівнянні із масоперенесенням в ізотермічних умовах. При

переході в даній математичній моделі до ізотермічного режиму (при $\alpha_T = 0$) отримуємо чисельні результати, які повністю співпадають із результатами роботи [9] по дослідженню впливу масоперенесення при фільтрації солових розчинів на картину НДС ґрунтового масиву.

В загальному, як показали проведені дослідження, впливом тепло-масоперенесення на НДС ґрунту нехтувати не можна, а отже і залежністю коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від концентрації солових розчинів. Оскільки це може призвести до неправильних прогнозів, а звідси і до непередбачуваних негативних наслідків як під час будівництва, так і в процесі експлуатації гідротехнічних, енергетичних об'єктів, а також споруд цивільного будівництва.

Список використаних джерел:

1. Сергійов І.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергійов, В.В. Скопирей, В.С. Дейнека – К: Наукова думка, 1991. – 432с.
2. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергійов, В.В. Скопирей. – К: Наукова думка, 1998. – 615с.
3. Власюк А.П. Розв'язування одновимірної стаціонарної задачі НДС ґрунтових масивів в умовах масоперенесення / А.П. Власюк, Є.І. Катерина // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ., 1999. – Вип.1. – С. 50–55.
4. Власюк А.П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки / А.П. Власюк // Вісник РДТУ – Рівне. – Вип. 3(5), Ч.2. – 2000. – С. 57–62.
5. Кузю М.Т. Про деякі математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / М.Т. Кузю, Л.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористува. – Рівне, 2005. – Вип. 2(30). – С. 282–287.
6. Кузю М.Т. Дослідження впливу концентрації солових розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів / М.Т. Кузю, Л.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористува. – Рівне, 2006. – Вип. 4(36), Ч.2. – С. 209–214.
7. Філатова Л.А. Математичне моделювання НДС ґрунтових масивів при наявності рівня ґрунтових вод / Л.А. Філатова, М.Т. Кузю // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористува. – Рівне, 2006. – Вип. 4(36), Ч.2. – С. 203–208.
8. Філатова Л.А. Математичне моделювання НДС багатошарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / Л.А. Філатова // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – Вип. 1. – 2008. – С. 161–165.
9. Філатова Л.А. Математичне моделювання одновимірної задачі НДС шару ґрунту з врахуванням масоперенесу при фільтрації солових розчинів / Л.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористува. – Рівне, 2009. – Вип. 4(36), Ч.2. – С. 332–339.
10. Власюк А.П. Математичне моделювання НДС багатошарового ґрунтового масиву в умовах теплопереносу при наявності рівня ґрунтових вод / А.П. Власюк, Н.А. Федорчук // Тез. доп. XII Міжнарод. конференції ім. акад. М. Кривчука, Київ, 2008. – С. 73.
11. Власюк А.П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на НДС багатошарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / А.П. Власюк, Н.А. Федорчук // Тез. доп. Міжнарод. наук. конференції "Прийняття рішень в умовах невизначеності". – Київ-Рівне, 2008. – С. 73–75.
12. Коваленко А.Д. Термоупругість / А.Д. Коваленко. – К: Вища школа, 1975. – 216с.
13. Самарський А.А. Теорія різностових схем / А.А. Самарський. – М: Наука, 1989. – 616с.
14. Самарський А.А. Методи рішення сеточних урівнень / А.А. Самарський, В.С. Никольскі. – М: Наука, 1978. – 592с.

Надійшло до редакції 12.03.2012

УДК 627.324.2/3:532.72

Власюк А.П., д.т.н., професор,
Цвєткова Т.П., аспірант**Математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні солових розчинів в областях повного і неповного насичення**

Проведено математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні солових розчинів в областях повного і неповного насичення. Чисельні розв'язки відповідних крайових задач отримано методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень. Розроблено відповідне програмне забезпечення, з використанням якого проведено чисельні експерименти та зроблено їх аналіз.

Ключові слова: математична модель, крайова задача, масоперенос, вологоперенос, повне і неповне насичення, концентрація, різницьві схеми, конформне відображення.

*E-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru, Tsvetkova@ukr.net
Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

1. Вступ. В даній роботі застосовано чисельні конформні відображення до розв'язування задачі масопереносу при фільтрації та вологоперенесенні солових розчинів в насичено-ненасичених ґрунтах.

Вирішенням даних проблем займалося ряд вчених. Теорія фільтрації і масопереносу у водонасичених ґрунтах достатньо добре висвітлена в роботах [1, 9, 10, 12] (див. також там літературу). Теоретичні основи вологопереносу в ґрунтах закладені в роботах [1, 7-9]. Однак, в даних роботах вивчалися лише процеси вологопереносу без врахування масопереносу. В даній роботі розглядається сумісно двовимірною задачею масопереносу солових розчинів як у водонасичених, так і у водоненасичених ґрунтових середовищах. Її розв'язок отримано методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень.

2. Постановка задачі. Розглядається задача плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації солового розчину до горизонтального систематичного дренажу при наявності вільної поверхні (кривої депресії) ґрунтових вод (рис. 1).

A.P. Vlasyuk, Doctor of science, prof.,
T.P. Tsvetkova, PhD student**Mathematical model of the mass transfer during the filtration and the moisture transfer of salt solutions in full and partial saturation soils**

Mathematical model of the mass transfer during the filtration and the moisture transfer of salt solutions in full and partial saturation soils is formulated. Numerical solutions of respective boundary problems are obtained by means of finite differences method using numerical conformal transformations. Proper software is developed using which numerical experiments and their analysis are performed.

Key words: mathematical model, boundary problem, mass transfer, moisture transfer, full and partial saturation soils, concentration, difference scheme, conformal mapping.

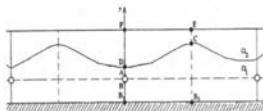


Рис. 1. Фільтрація солового розчину до горизонтального систематичного дренажу

В результаті цього, в ґрунтовому масиві утворюється дві області: Ω_1 – область повного насичення, зайнята фільтраційним потоком, Ω_2 – область неповного насичення (область вологопереносу). Внаслідок симетрії картини, розглянемо лише виділений її фрагмент ABB_1B_2EF .

Розглянемо задачу масопереносу в насичено-ненасиченій області (рис. 1).

Потрібно дослідити процес фільтрації сольових розчинів до дрена в області повного насичення G_1 та процес вологопереносу з врахуванням масопереносу в області неповного насичення G_2 .

3. Математична модель задачі

3.1. Математична модель задачі в області повного насичення в змінних x, y . Математична модель задачі масопереносу при фільтрації сольових розчинів в області повного насичення G_1 в змінних x, y має вигляд [6]

$$\frac{\partial \left(D(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_y \frac{\partial c_1}{\partial y} = (1)$$

$$- \gamma(c_1 - C^*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$\vec{v} = -k(c_1) \text{grad} h, \quad \text{div} \vec{V} = 0, \quad (2)$$

де $D(c_1)$ – коефіцієнт конвективної дифузії; $c_1(x, y, t)$ – концентрація сольового розчину в області повного насичення; v_x, v_y – компоненти швидкості фільтрації, які знаходяться з розв'язку задачі фільтрації; C^* – концентрація граничного насичення; γ – коефіцієнт масообміну; σ – пористість ґрунту.

Після перетворення (1), (2), отримаємо

$$D(c_1) \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_1}{\partial y} -$$

$$- \gamma(c_1 - C^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$k(c_1) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial k(c_1)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k(c_1)}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0,$$

де $v_1 = v_x(c_1) - \frac{\partial D(c_1)}{\partial x}, v_2 = v_y(c_1) - \frac{\partial D(c_1)}{\partial y},$

$$v_x = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Крайові умови для концентрації $c_1(x, y, t)$ сольових розчинів наступні:

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{AD \cup AB \cup BC \cup B_1C_1} = 0, \quad (3)$$

$$c_1 \Big|_{DC} = \tilde{C}_1, \quad c_1 \Big|_{AB} = \tilde{C}_2.$$

Рівняння фільтрації рідини (2) до горизонтального дренажу доповнюється такими граничними умовами:

$$h \Big|_{AB} = h \Big|_{r=r_0} = H_1, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AB, B_1C_1} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=r} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (4)$$

$$h \Big|_{CD} = y, \quad \frac{dh}{dn} \Big|_{CD} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

3.2. Математична модель задачі в області неповного насичення в змінних x, y . Математична модель задачі масопереносу солей в області неповного насичення G_2 в змінних x, y має вигляд [6, 13]

$$\left(\frac{\partial \left(D(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) - v_1(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} -$$

$$- v_2(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - f(\omega) c_2 = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t},$$

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}(K(h) \text{grad} h), \quad (6)$$

$$V_x = -k(h) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -k(h) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{DC} = 0, \quad c_2 \Big|_{FE} = \tilde{C}_1, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} \Big|_{DE \cup CE} = 0, \quad (8)$$

$$c_2 \Big|_{r=0} = \tilde{C}_0(x, y),$$

$$h \Big|_{DC} = y, \quad h \Big|_{FE} = \tilde{H}_1, \quad \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{DE \cup CE} = 0, \quad (9)$$

$$h \Big|_{r=0} = \tilde{H}_0(x, y).$$

Тут (5) є рівняння конвективної дифузії для області неповного насичення, (6) – рівняння вологоперенесення при неповному водонасиченні, (7) – закон Дарсі для області неповного насичення. В (6) $\mu(h) = \frac{\partial \omega}{\partial h}$ – при неповному насиченні ($p < 0$); $K(h)$ – коефіцієнт фільтрації, що визначається як

$$K(h) = \frac{a_1}{b_1 + p^\alpha} = \frac{a_1}{b_1 + [\rho g(h + y)]^\alpha}.$$

4. Чисельний метод розв'язування задачі

Для чисельного розв'язування задачі скористаємося методом скінчених різниць [11] із застосуванням чисельних конформних відображень в обернений постановці [3-5]. У зв'язку з цим відобразимо складену область (рис. 2, а) на параметричний прямокутник (рис. 2, б). Відображувану область (рис. 2, а) складатиметься з двох криволінійних чотирикутників зі спільною

невідомою межею (кривою депресії), яка знаходиться в процесі розв'язування задачі.

При прямому конформному відображенні координати точок областей G_z і G_ζ зв'язані умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z.$$

Будемо шукати обернене конформне відображення параметричного прямокутника G_ζ на криволінійний чотирикутник G_z , яке задається функціями $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Тоді задача побудови оберненого конформного відображення полягає в наступному: знайти пару спряжених гармонічних функцій $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, пов'язаних умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (\xi, \eta) \in G_\zeta,$$

які на межах області G_ζ на кривою депресії CD задовольняють наступним граничним умовам:

$$AB: x^2(0, \eta) + (y(0, \eta) - y_0)^2 = r^2, \quad 0 < \eta < b_0,$$

$$BB_1: x(\xi, 0) = 0, \quad 0 < \xi < a_1,$$

$$B_1B_2: y(\xi, 0) = 0, \quad a_1 < \xi < a_2,$$

$$B_2C: x(\xi, 0) = a, \quad a_2 < \xi < a_3,$$

$$CD: \xi = a_3, \quad (x, y) \in CD,$$

$$CE: x(\xi, 0) = a_4, \quad a_3 < \xi < a_0,$$

$$EF: y(a_0, \eta) = b, \quad 0 < \eta < b_0,$$

$$FD: x(\xi, b_0) = 0, \quad a_3 < \xi < a_0.$$

Таке конформне відображення реалізовано з використанням алгоритму чисельного конформного відображення [3, 4]. В результаті чисельного конформного відображення встановлено взаємно-однозначну відповідність між масивами точок (x_j, y_j) та (ξ_j, η_j) областей G_z і G_ζ .

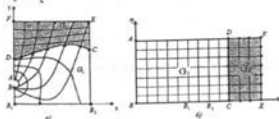


Рис. 2. Чисельне конформне відображення виділеного фрагмента області G_z .

повного та неповного насичення на параметричний прямокутник G_ζ .

В зв'язку з цим, перетворимо вихідну крайову задачу до змінних ξ, η . Рівняння фільтрації у змінних ξ, η після перетворень матиме вигляд

$$\bar{A}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \bar{B}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \bar{D}_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \bar{E}_1 \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0, \quad (10)$$

де коефіцієнти $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1, \bar{E}_1$ обчислюються за формулами

$$\bar{A}_1 = \frac{K(c_1)}{I_1}, \quad \bar{C}_1 = \frac{K(\bar{a}_1)}{I_1}, \quad \bar{B}_1 = 0,$$

$$\bar{D}_1 = \frac{1}{I_1} \left[\frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \xi} y_0 - \frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \eta} y_c \right] y_0 - \frac{1}{I_1} \left[\frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \xi} x_0 + \frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \eta} x_c \right] x_c,$$

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{I_1} \left[\frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \xi} y_0 - \frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \eta} y_c \right] y_c + \frac{1}{I_1} \left[\frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \xi} x_0 + \frac{\partial K(\bar{a})}{\partial \eta} x_c \right] x_c.$$

$I_1 = y_c^2 + y_0^2$ - якобіан оберненого відображення.

Граничні умови для напору в результаті переходу до змінних ξ, η приймуть вигляд

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} \Big|_{AB} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{y_0}{I_1} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \left(-\frac{y_0}{I_1} \right) = \frac{1}{I_1} \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} y_0 - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_c \right) = 0,$$

$$h \Big|_{AB} = h(0, \eta) = H_1, \quad h \Big|_{CD} = y_0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} \Big|_{BB_1 \cup B_2C} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0, x=a} = \frac{\partial h}{\partial \xi} y_0 - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_c = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} \Big|_{DA \cup EF} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=b} = \left(-x_0 \frac{\partial h}{\partial \xi} + x_c \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \Big|_{y=b} = 0.$$

Компоненти швидкості фільтрації, згідно (7) знаходяться наступним чином:

$$V_\xi = -\frac{k(c_1)}{I_1} \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} y_0 - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_c \right),$$

$$V_\eta = -\frac{k(c_1)}{I_1} \left(-\frac{\partial h}{\partial \xi} x_0 + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_c \right).$$

Отриману задачу (10) в змінних ξ, η області параметричного прямокутника розв'яжемо за формулою Гаусса-Зейделя:

$$h_{i,j}^{(k+1)} = P_1 h_{i-1,j}^{(k+1)} + P_2 h_{i+1,j}^{(k)} + P_3 h_{i,j-1}^{(k+1)} + P_4 h_{i,j+1}^{(k)}.$$

$$i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n},$$

$$\text{де } P_1 = \frac{\bar{A}_1 \bar{D}_1}{h_1^2 - 2h_0}, \quad P_2 = \frac{\bar{A}_1 + \bar{D}_1}{h_1^2 + 2h_0}, \quad P_3 = \frac{\bar{A}_1 - \bar{E}_1}{h_2^2 - 2h_0},$$

$$P_4 = \frac{\overline{A}_1 + \overline{E}_1}{h_1^2 + 2h_1}, \quad P_0 = 2\overline{A}_1 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right).$$

Тоді компоненти швидкості фільтрації знаходяться згідно формул

$$V_{x,i,j} = \frac{k(\eta)}{I_1} \left(\frac{(h_{i,j} - h_{i,j-1})(y_{q,i} - y_{q,i-1})}{4h_1 h_2} - \frac{(h_{j,i} - h_{j,i-1})(x_{q,i} - x_{q,i-1})}{4h_1 h_2} \right),$$

$$V_{y,i,j} = \frac{k(\eta)}{I_1} \left(\frac{(h_{j,i} - h_{j,i-1})(x_{q,i} - x_{q,i-1})}{h_1 h_2} - \frac{(h_{i,j} - h_{i,j-1})(y_{q,i} - y_{q,i-1})}{h_1 h_2} \right),$$

$$I_1 = \frac{1}{4h_1 h_2} [(x_{q,i,j} - x_{q,i,j-1})(y_{q,i} - y_{q,i-1}) - (x_{q,i-1} - x_{q,i-2})(y_{q,i,j} - y_{q,i,j-1})].$$

Рівняння масопереносу для області повного насичення G_1 у змінних ξ, η приймає вигляд

$$\overline{A}_1 \frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial \xi^2} + \overline{B}_1 \frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}_1 \frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial \eta^2} + \overline{D}_1 \frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi} + \overline{E}_1 \frac{\partial \overline{q}}{\partial \eta} + \overline{G}_1 = \sigma_1 \frac{\partial \overline{q}}{\partial \tau}, \quad (11)$$

$$\text{де } \overline{A}_1 = \frac{D(C_1)}{I_1}, \quad \overline{C}_1 = \frac{D(C_1)}{I_1}, \quad \overline{B}_1 = 0, \quad \overline{G}_1 = -\gamma(C_1 - C_*),$$

$$\overline{D}_1 = \frac{1}{I_1} (-v_x y_q + v_y x_q), \quad \overline{E}_1 = \frac{1}{I_1} (v_x y_c + v_y x_c).$$

Для розв'язання задачі масопереносу при повному водонасиченні використаємо локально-однолінійний метод О.А.Самарського [11] з використанням монотонної різничевої схеми.

Вздовж осі O_ξ маємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial \xi^2} + \frac{\overline{D}_1}{A_1} \frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi} - \frac{0.5 \overline{G}_1}{A_1} = \frac{0.5}{A_1} \sigma_1 \frac{\partial \overline{q}}{\partial \tau}, \\ \overline{q}(\xi, \eta, 0) = \overline{C}_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Монотонна різничева схема для (12) має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\overline{N}_{i,j}^{k+1/2} - 2\overline{N}_{i,j}^{k+1} + \overline{N}_{i,j}^{k+3/2}}{h_1^2} + r_{1i}^2 \frac{\overline{N}_{i+1,j}^{k+1/2} - \overline{N}_{i,j}^{k+1}}{h_1} + r_{1i}^2 \frac{\overline{N}_{i,j}^{k+1/2} - \overline{N}_{i,j-1}^{k+1}}{h_1} - \\ - \frac{0.5}{A_1} \gamma \left(\overline{N}_{i,j}^{k+1/2} - \overline{N}^* \right) = \frac{0.5}{A_1} \sigma_1 \frac{C_{i,j}^{k+1/2} - C_{i,j}^k}{0.5\tau}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\text{де } \mu_1 = \frac{1}{1 + 0.5h_1 |r_1^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \overline{D}_1}{2A_1}}, \quad r_{1i}^2 \equiv 0, \quad r_{1i}^2 = \frac{\overline{D}_1}{A_1}.$$

Тоді з (13) маємо

$$a_1 C_{i+1,j}^{k+1/2} - c_1 C_{i,j}^{k+1/2} + b_1 C_{i,j}^{k+1/2} = -f_1, \quad (14)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1i}^2}{h_1}, \quad b_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_{1i}^2}{h_1},$$

$$c_1 = \frac{-2\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1i}^2}{h_1} + \frac{r_{1i}^2}{h_1} - \frac{0.5\gamma}{A_1} - \frac{\sigma_1}{A_1 \tau},$$

$$f_1 = \frac{\sigma_1}{A_1 \tau} \overline{N}_{i,j}^k - 0.5\gamma \overline{N}^*.$$

Розв'язок (14) знаходимо методом прогонки

$$C_{i,j}^{k+1/2} = \alpha_{i+1,j}^1 C_{i+1,j}^{k+1/2} + \beta_{i+1,j}^1, \quad (15)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1,j}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{i,j}^1 a_1}, \quad \beta_{i+1,j}^1 = \frac{a_1 \beta_{i,j}^1 + f_1}{c_1 - \alpha_{i,j}^1 a_1}.$$

Вздовж осі O_η маємо наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial \eta^2} + \frac{\overline{E}_1}{A_2} \frac{\partial \overline{q}}{\partial \eta} - \frac{0.5 \overline{G}_2}{A_2} = \frac{0.5}{A_2} \sigma_1 \frac{\partial \overline{q}}{\partial \tau}, \\ \overline{q}(\xi, \eta, 0) = \overline{C}_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial \overline{q}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial \overline{q}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=L} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Застосувавши до (16) монотонну різничеву схему, отримаємо

$$\begin{aligned} \mu_2 \frac{\overline{N}_{i,j}^{k+1} - 2\overline{N}_{i,j}^{k+1/2} + \overline{N}_{i,j}^{k+3/2}}{h_2^2} + r_{2i}^2 \frac{\overline{N}_{i,j+1}^{k+1} - \overline{N}_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_{2i}^2 \frac{\overline{N}_{i,j}^{k+1} - \overline{N}_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} - \\ - \frac{0.5 \overline{G}_2}{A_2} \overline{N}_{i,j}^{k+1} = \frac{0.5}{A_2} \sigma_1 \frac{\overline{N}_{i,j}^{k+1} - \overline{N}_{i,j}^{k+1/2}}{0.5\tau}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\text{де } \mu_2 = \frac{1}{1 + 0.5h_2 |r_2^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_2 \overline{E}_1}{2A_2}}, \quad r_{2i}^2 \equiv 0, \quad r_{2i}^2 = \frac{\overline{E}_1}{A_2}.$$

З (17) маємо

$$a_2 C_{i,j+1}^{k+1} - c_2 C_{i,j}^{k+1} + b_2 C_{i,j}^{k+1} = -f_2, \quad (18)$$

$$\text{де } a_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2i}^2}{h_2}, \quad b_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_{2i}^2}{h_2},$$

$$c_2 = \frac{-2\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2i}^2}{h_2} + \frac{r_{2i}^2}{h_2} - \frac{0.5\gamma}{A_2} - \frac{\sigma_1}{A_2 \tau},$$

$$f_2 = \frac{\sigma_1}{A_2 \tau} \overline{N}_{i,j}^{k+1/2} - 0.5\gamma \overline{N}^*.$$

Розв'язок (18) знаходиться у вигляді

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^2 C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^2, \quad (19)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 a_2}, \quad \beta_{i,j+1}^2 = \frac{a_2 \beta_{i,j}^2 + f_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 a_2}.$$

Рівняння вологоперенесення в змінних ξ, η має вигляд

$$\overline{A}_2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \overline{B}_2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{N}_2 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \overline{D}_2 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \overline{E}_2 \frac{\partial h}{\partial \eta} = \mu(h) \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad (20)$$

де коефіцієнти $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1, \bar{E}_1$ мають вигляд

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= \frac{K(h)}{I_1}, \quad \bar{C}_1 = \frac{K(h)}{I_1}, \quad \bar{B}_1 = 0, \\ \bar{D}_1 &= \frac{1}{I_1^2} \left[\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} y_0 - \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} y_1 \right] y_0 + \frac{1}{I_1^2} \left[\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} x_0 + \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} x_1 \right] x_0, \\ \bar{E}_1 &= \frac{1}{I_1^2} \left[\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} y_0 - \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} y_1 \right] y_1 + \frac{1}{I_1^2} \left[\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} x_0 + \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} x_1 \right] x_1.\end{aligned}$$

Аналогічно попередньому, використавши локально-одновимірний метод О.А.Самарського, маємо

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{D}_1}{A_1} \frac{\partial h}{\partial \xi} = \frac{0.5 \mu(h)}{A_1} \frac{\partial h}{\partial \xi}, \\ h(\xi, \eta, 0) = \bar{H}_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} \Big|_{CE} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Застосовувавши до (21) монотонну різницеву схему, отримаємо

$$\begin{aligned}\mu_3 \frac{H_{i,j}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j}^{k+1}}{h_1^2} + r_{3*}^2 \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{h_1} + r_{3-}^2 \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{h_1} = \\ = \frac{0.5 \mu(h)}{A_1} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{0.5 \tau}, \quad (22)\end{aligned}$$

$$\text{де } \mu_3 = \frac{1}{1 + 0.5 h_1 |r_3^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \bar{D}_1}{2 A_1}}, \quad r_{3-}^2 = 0, \quad r_{3*}^2 = \frac{\bar{D}_1}{A_1}.$$

З (22) отримаємо прогоничний вигляд

$$a_3 H_{i,j}^{k+1} - c_3 H_{i,j}^{k+1} + b_3 H_{i,j}^{k+1} = -f_3, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\text{де } a_3 = \frac{\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3-}^2}{h_1}, \quad b_3 = \frac{\mu_3}{h_1^2} + \frac{r_{3*}^2}{h_1}, \quad f_3 = \frac{\mu(h)}{A_1 \tau} H_{i,j}^k, \\ c_3 = \frac{-2\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3*}^2}{h_1} + \frac{r_{3-}^2}{h_1} - \frac{\mu(h)}{A_1 \tau}.\end{aligned}$$

Згідно методу прогонки, розв'язок знаходиться у вигляді

$$H_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j}^3 H_{i,j}^{k+1} + \beta_{i,j}^3, \quad (24)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j}^3 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}, \quad \beta_{i,j}^3 = \frac{a_3 \beta_{i,j}^3 + f_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}.$$

Для проведення поперечної прогонки маємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{E}_1}{A_1} \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{0.5 \mu(h)}{A_1} \frac{\partial h}{\partial \eta}, \\ h(\xi, \eta, 0) = \bar{H}_0(\xi, \eta), \quad h \Big|_{\partial \Omega} = y, \quad h \Big|_{FE} = \bar{H}_1. \end{cases} \quad (25)$$

Аналогічно попередньому, застосовувавши до (25) монотонну різницеву схему, отримаємо

$$\begin{aligned}\mu_4 \frac{H_{i,j}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j}^{k+1}}{h_2^2} + r_{4*}^2 \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_{4-}^2 \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{h_2} = \\ = \frac{0.5 \mu(h)}{A_1} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{0.5 \tau}, \quad (26)\end{aligned}$$

$$\text{де } \mu_4 = \frac{1}{1 + 0.5 h_2 |r_4^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_2 \bar{E}_1}{2 A_1}}, \quad r_{4-}^2 = 0, \quad r_{4*}^2 = \frac{\bar{E}_1}{A_1}.$$

З (26) маємо

$$a_4 H_{i,j}^{k+1} - c_4 H_{i,j}^{k+1} + b_4 H_{i,j}^{k+1} = -f_4, \quad (27)$$

$$\text{де } a_4 = \frac{\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4-}^2}{h_2}, \quad b_4 = \frac{\mu_4}{h_2^2} + \frac{r_{4*}^2}{h_2}, \quad f_4 = \frac{\mu(h)}{A_1 \tau} H_{i,j}^{k+1},$$

$$c_4 = \frac{-2\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4*}^2}{h_2} + \frac{r_{4-}^2}{h_2} - \frac{\mu(h)}{A_1 \tau}.$$

Чисельний розв'язок задачі (27) знаходимо методом прогонки у вигляді

$$H_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j}^4 H_{i,j}^{k+1} + \beta_{i,j}^4, \quad (28)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j}^4 = \frac{b_4}{c_4 - \alpha_{i,j}^4 a_4}, \quad \beta_{i,j}^4 = \frac{a_4 \beta_{i,j}^4 + f_4}{c_4 - \alpha_{i,j}^4 a_4}.$$

Рівняння масопереносу для області неперемітного насичення в змінних ξ, η має вигляд

$$\bar{A}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + \bar{B}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} + \bar{D}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \xi} + \bar{E}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \eta} - f(\omega) c_2 = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial \tau}, \quad (29)$$

де коефіцієнти $\bar{A}_4, \bar{B}_4, \bar{C}_4, \bar{D}_4, \bar{E}_4$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}\bar{A}_4 &= \frac{D(c_2)}{I_1}, \quad \bar{C}_4 = \frac{D(c_2)}{I_1}, \quad \bar{B}_4 = 0, \\ \bar{D}_4 &= -\frac{v_1(\omega, c_2)}{I_1} y_0 + \frac{v_1(\omega, c_2)}{I_1} x_0, \\ \bar{E}_4 &= \frac{v_1(\omega, c_2)}{I_1} y_1 - \frac{v_2(\omega, c_2)}{I_1} x_1.\end{aligned}$$

Проводячи стандартну процедуру, описану вище, маємо для проведення поперечної прогонки таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{D}_4}{A_4} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{0.5}{A_4} f(\omega) h = \frac{0.5}{A_4} \sigma_2 \frac{\partial h}{\partial \tau}, \\ h_2(\xi, \eta, 0) = \bar{C}_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} \Big|_{CE} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Застосуємо до (30) монотонну різницеву схему

$$\begin{aligned} \mu_3 = & \frac{\hat{N}_{i,j}^{k+1/2} - 2\hat{N}_{i,j}^{k+1} + \hat{N}_{i,j}^{k+3/2}}{h_i^2} + r_{3+}^2 \frac{\hat{N}_{i+1,j}^{k+1/2} - \hat{N}_{i,j}^{k+1/2}}{h_i} + r_{3-}^2 \frac{\hat{N}_{i,j}^{k+1/2} - \hat{N}_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_i} - \\ & - \frac{0.5}{A_4} f(\omega) \hat{N}_{i,j}^{k+1/2} = \frac{0.5}{A_4} \sigma_2 \frac{\hat{N}_{i,j}^{k+1/2} - \hat{N}_{i,j}^k}{0.5\tau}, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\text{де } \mu_3 = \frac{1}{1 + 0.5h_i |r_3^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_i D_3}{2A_4}}, \quad r_{3-}^2 = 0, \quad r_{3+}^2 = \frac{\bar{D}_4}{A_4}.$$

З (31) отримаємо

$$a_3 C_{i,j}^{k+1/2} - c_3 C_{i,j}^{k+1} + b_3 C_{i+1,j}^{k+1/2} = -f_3, \quad (32)$$

$$\text{де } a_3 = \frac{\mu_3}{h_i^2} - \frac{r_{3-}^2}{h_i}, \quad b_3 = \frac{\mu_3}{h_i^2} + \frac{r_{3+}^2}{h_i}, \quad f_3 = \frac{\sigma_2}{A_4 \tau} \hat{N}_{i,j}^k,$$

$$c_3 = \frac{-2\mu_3}{h_i^2} - \frac{r_{3+}^2}{h_i} + \frac{r_{3-}^2}{h_i} - \frac{0.5 f(\omega)}{A_4} - \frac{\sigma_2}{A_4 \tau}.$$

Згідно методу прогонки, чисельний розв'язок задачі знаходимо у вигляді

$$C_{i,j}^{k+1/2} = \alpha_{i,j}^3 C_{i+1,j}^{k+1/2} + \beta_{i,j}^3, \quad (33)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j}^3 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}, \quad \beta_{i,j}^3 = \frac{a_3 \beta_{i+1,j}^3 + f_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}.$$

Для проведення поперечної прогонки маємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{h}_2}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{E}_4}{A_4} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} - \frac{0.5}{A_4} f(\omega) \bar{h}_2 = \frac{0.5}{A_4} \sigma_2 \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \tau}, \\ \bar{h}_2(\xi, \eta, 0) = \bar{C}_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L} = \bar{C}_1. \end{cases} \quad (34)$$

Аналогічно попередньому, застосовувавши до (34) монотонну різницеву схему, отримаємо

$$\begin{aligned} \mu_6 = & \frac{\hat{N}_{i,j-1}^{k+1} - 2\hat{N}_{i,j}^{k+1} + \hat{N}_{i,j+1}^{k+1}}{h_j^2} + r_{6+}^2 \frac{\hat{N}_{i,j-1}^{k+1} - \hat{N}_{i,j}^{k+1}}{h_j} + r_{6-}^2 \frac{\hat{N}_{i,j}^{k+1} - \hat{N}_{i,j+1}^{k+1}}{h_j} - \\ & - \frac{0.5}{A_4} f(\omega) \hat{N}_{i,j}^{k+1} = \frac{0.5}{A_4} \sigma_2 \frac{\hat{N}_{i,j}^{k+1} - \hat{N}_{i,j}^{k+1/2}}{0.5\tau}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\text{де } \mu_6 = \frac{1}{1 + 0.5h_j |r_6^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_j \bar{E}_4}{2A_4}}, \quad r_{6-}^2 = 0, \quad r_{6+}^2 = \frac{\bar{E}_4}{A_4}.$$

З (35) маємо

$$a_6 C_{i,j-1}^{k+1} - c_6 C_{i,j}^{k+1} + b_6 C_{i,j+1}^{k+1} = -f_6, \quad (36)$$

$$\text{де } a_6 = \frac{\mu_6}{h_j^2} - \frac{r_{6-}^2}{h_j}, \quad b_6 = \frac{\mu_6}{h_j^2} + \frac{r_{6+}^2}{h_j},$$

$$c_6 = \frac{-2\mu_6}{h_j^2} - \frac{r_{6+}^2}{h_j} + \frac{r_{6-}^2}{h_j} - \frac{0.5 f(\omega)}{A_4} - \frac{\sigma_2}{A_4 \tau},$$

$$f_6 = \frac{\sigma_2}{A_4 \tau} \hat{N}_{i,j}^{k+1/2}.$$

Чисельний розв'язок задачі (35) знаходимо згідно методу прогонки у вигляді

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j}^6 C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j}^6, \quad (37)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j}^6 = \frac{b_6}{c_6 - \alpha_{i,j}^6 a_6}, \quad \beta_{i,j}^6 = \frac{a_6 \beta_{i,j+1}^6 + f_6}{c_6 - \alpha_{i,j}^6 a_6}.$$

5. Програмна реалізація та результати чисельних експериментів.

Проведена програмна реалізація чисельного розв'язку даної задачі в інтегрованому середовищі візуально-подійного програмування Delphi 7.0.

Створена програма є комплексом чисельного розв'язування шести задач, що включають побудову чисельного конформного відображення криволінійної області повного насичення з вільною межею на параметричний прямокутник; розв'язання задачі фільтрації в області повного насичення; розв'язання задачі масопереносу в області повного насичення; побудову чисельного конформного відображення криволінійної області на параметричний прямокутник в області неповного насичення; розв'язання задачі вологоперенесення в області неповного насичення; розв'язання задачі масопереносу в області неповного насичення.

На основі програмної реалізації задачі були проведені чисельні експерименти, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вихідних даних задачі та детально дослідити процеси масопереносу при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах. В результаті застосування чисельних конформних відображень [3-5], отримали наступну конформну різницеву сітку в областях повного і неповного (рис. 3):

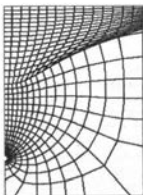


Рис.3. Конформна різницєва сітка у виділеному фрагменті області повного і неповного насичення

Результатом розв'язання задачі фільтрації в областях повного (рис. 4) та неповного насичення (рис. 5) є наступні графіки:

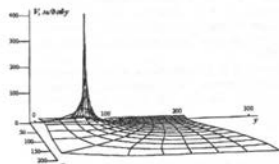


Рис.4. Графік поля швидкостей фільтрації в області повного насичення

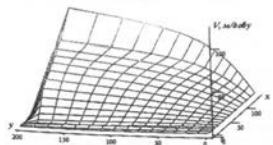


Рис.5. Графік розподілу поля швидкостей фільтрації в області неповного насичення

Графіки розподілу п'єзометричного напору та напорів води мають вигляд (рис. 6, 7)

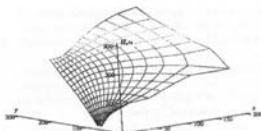


Рис. 6. Графік розподілу п'єзометричного напору

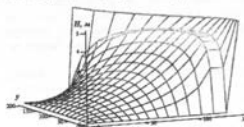


Рис.7. Графік розподілу напорів води

В результаті чисельного розв'язання задач масопереносу в областях повного і неповного насичення отримали графіки розподілів концентрації (рис. 8, 9).

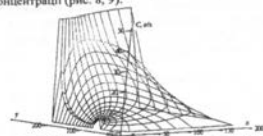


Рис.8. Графік розподілу концентрації в області повного насичення

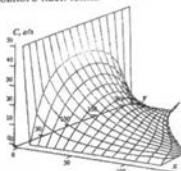


Рис.9. Розподіл концентрації в області неповного насичення

Як видно з рис. 4, 6 швидкість фільтрації та п'єзометричний напір найбільших своїх значень

набувають в околі дренн. Напір вологи (рис. 7) зростає по всій області вологоперенесення, набуваючи найбільших значень в околі вільної поверхні.

Із графіка розподілу поля концентрації області повного насичення (рис. 8) видно, що поверхня концентрації найбільших своїх значень набуває в околі вільної поверхні, а найменших – в околі дренн, де швидкість фільтрації досягає найбільших значень. Поверхня концентрації монотонно спадає по всій області фільтрації.

В області неповного насичення розподіл поля концентрації (рис. 9) найбільших своїх значень набуває на верхній межі і монотонно спадає по всій області вологопереносу.

В цілому, розподіл поля концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого середовища з глибиною зменшується.

6. Висновки. В роботі проведено математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в зонах повного і неповного насичення. Чисельні розв'язки відповідних крайових задач отримано методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень. Розроблено відповідне програмне забезпечення, з використанням якого проведено чисельні експерименти та зроблено їх аналіз.

Список використаних джерел

- Веригин Н.Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н.Н. Веригин, Б.С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967). – М.: Наука, 1969. – С. 237-313.
- Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. - Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с.
- Власюк А.П. Комп'ютерна візуалізація гідродинамічних полів в областях з криволінійними межами / А.П.Власюк, Т.П. Дячук // Вісник НУВГП. – Збірник наукових праць. Рівне – 2006. – Вип. 4 (36). – Ч.2. – с. 74-84.
- Власюк А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими узлами" / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук // Препр. АН УССР. Ин-т математики; 89.79. – К.: 1989 г. – 55 с.
- Власюк А.П. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук // Преп. НАН України. Інститут атематики; 94.36. – Київ, 1994 – 23с.
- Власюк А.П. Математичне моделювання масоперенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах в нелінійній постановці / А.П. Власюк, Т.П. Цвєткова // Тези XVII Міжнародної конференції «Прийняття рішень в умовах невизначеності» - Східниця, 2011. – С. 48-50
- Гусев Е.М. Проблемы теории переноса жидкости в ненасыщенных пористых средах / Гусев Е.М. // Физика почвенных вод. М.: Наука. – 1981. – 158 с.
- Даутов Р.З. Моделирование неустойчивости влагопереноса в ненасыщенных пористых средах / Р.З. Даутов, А.Г. Егоров // Исследования по прикладной математике, Казань, изд-во Казанского ун-та, Вып. 24, – 2004.
- Ляшко И.И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод / И.И. Ляшко. – К.: Наук. Думка, 1998. – 256 с.
- Ляшко И.И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий. – К.: Наук.думка, 1991 – 262 с.
- Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
- Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
- Цвєткова Т.П. Математичне моделювання масопереносу з врахуванням осмосу на вологоперенос в одновимірному випадку / Т.П. Цвєткова // IV Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», Серія: Технічні науки. Випуск 4. Збірник наукових праць. – Кам'янець-Подільський НУ ім. І. Огієнка, 2010. – 227-233 с.

Надійшла до редколегії 08.09.2011

УДК 519.7

Ф.Г. Гарашенко, д. т. н., проф.,
О.Г. Мороз, студентка**Ідентифікація нелінійної системи
Гаммерштейна за допомогою генетичного
алгоритму**

Запропоновано підхід до ідентифікації моделі Гаммерштейна за допомогою генетичного алгоритму (ГА) та мережі радіальних базисних функцій (РБФ). Невідома нелінійна статична частина наближується мережею РБФ. Налаштування параметрів структури мережі РБФ здійснюється за допомогою ГА.

Ключові слова: ідентифікація, генетичний алгоритм, модель Гаммерштейна.

E-mail: moroz_o.g@mail.ru; garash@unicyb.kiev.ua
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусайнов Д.Я.

Більшість моделей реальних об'єктів у повному діапазоні режимів функціонування мають нелінійні характеристики. Ідентифікація таких систем є дуже актуальною для проведення їх точного аналізу, прогнозування або управління розробкою. Основні труднощі при розв'язанні задачі ідентифікації нелінійних систем обумовлені складністю їх структури і неповнотою математичного опису та інформації про них. Тому часто систему доводиться апроксимувати взаємодіючими між собою елементарними блоками відомої структури (так званою блок-орієнтованою моделлю). Деякі з цих блоків можуть описувати лінійні динамічні підсистеми, інші – статичні нелінійні елементи. Лінійні підсистеми можуть бути параметричними або непараметричними. Нелінійні елементи можуть бути, в свою чергу, параметричними або ні, з пам'яттю або без неї. Нарешті, блоки можуть бути зв'язані по-різному (послідовно, паралельно, зі зворотним зв'язком тощо).

Така значна гнучкість блок-орієнтованих моделей дозволяє їм охоплювати широкий клас складних нелінійних систем і мотивувє зростання інтересу до них. Проте, варто відзначити, що блоки (лінійні і нелінійні) моделі можуть (що звичайно стається) не відповідати фізичним компонентам системи. Тому точки з'єднання між блоками є, як правило, штучними, а отже не можна сподіватися, що вони будуть доступними для вимірювання. Неможливість таких вимірювань, разом з системними нелінійностями,

Fedir G. Garashchenko, Dr.Sci.Tech., prof.,
Olga G. Moroz, student

**Identification of Hammerstein nonlinear
system by using genetic algorithm**

Approach is proposed to identification of Hammerstein model by using genetic algorithm (GA) and radial basis function (RBF) networks. An unknown nonlinear static part to be estimated is approximately represented by an RBF network. The adjusting parameters for the RBF network structure are properly determined by using the GA.

Key words: identification, genetic algorithm, Hammerstein model.

робить ідентифікацію блок-орієнтованої моделі досить складною задачею. Тому на сьогодні ця задача, в тій чи іншій мірі, розв'язана тільки для відносно простих структур блок-орієнтованих моделей, зокрема моделі Гаммерштейна [1-7]. Ці моделі являють собою послідовне з'єднання нелінійного статичного і лінійного динамічного блоків і, незважаючи на свою простоту, виявилися здатними досить точно описувати різноманітні нелінійні процеси та системи, наприклад, хімічні процеси [3], фізіологічні системи [2], теплові системи [4], електричну стимуляцію м'язів [5], кодування мовних сигналів [2], магнітно-реологічні амортизатори [6], електроприводи [1] тощо.

У даній роботі, на відміну від існуючих методів ідентифікації моделі Гаммерштейна, пропонується це робити за допомогою мережі радіальних базисних функцій (РБФ) [8] та генетичного алгоритму (ГА) [9].

Постановка задачі

Розглянемо дискретно-часову нелінійну динамічну систему, яку можна описати моделлю Гаммерштейна (рис. 1):

$$\begin{cases} A(q^{-1}) \cdot y(k) = B(q^{-1}) \cdot x(k-1) + e(k) \\ x(k) = f(u(k)) \\ A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m} \end{cases}, \quad (1)$$

де $u(k)$ - вхідний сигнал; $y(k)$ - вихідний сигнал; $x(k)$ - проміжний сигнал, який не підлягає вимірюванню; $e(k)$ - білий гаусівський шум вимірювання; q^{-1} - оператор зворотного зсуву; n та r - відомі степені поліномів $A(q^{-1})$ та $B(q^{-1})$ відповідно; $f(\cdot)$ - невідома нелінійна функція.

Проблема полягає в тому, щоб по відомих вхідних і вихідних сигналах системи ідентифікувати параметри $\{a_i\}$ та $\{b_j\}$ лінійної динамічної частини моделі та нелінійну статичну функцію $f(\cdot)$.

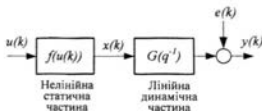


Рис.1 Модель Гаммерштейна

Ідея розв'язання задачі

Основна трудність при розв'язанні даної задачі пов'язана з оцінкою нелінійної статичної функції $f(\cdot)$. Зазвичай, цю оцінку шукають у класі поліномів

$$f(u(k)) = \gamma_0 + \gamma_1 u(k) + \gamma_2 u^2(k) + \dots + \gamma_m u^m(k),$$

де параметри $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ та m потрібно оцінити. У даній роботі невідома нелінійна статична частина, що підлягає оцінюванню, буде представлена мережею РБФ (рис.2), оскільки відомо, що нею можна як завгодно точно апроксимувати будь-яку функцію [8]. Вагові параметри цієї мережі та параметри системи лінійної динамічної частини можна оцінити за допомогою методу найменших квадратів.

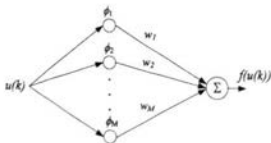


Рис. 2 Мережа радіальних базисних функцій

Очевидно, що точність ідентифікації залежить від структури мережі РБФ, тобто від кількості РБФ, їх центрів і відстаней. Найкраще значення цих параметрів РБФ будемо визначати за допомогою ГА, який є процедурою пошуку, заснованою на механізмі природного відбору. Отже спочатку ми опишемо алгоритм ідентифікації моделі Гаммерштейна у разі заданої структури мережі РБФ, потім запропонуємо ГА для вибору оптимальної структури мережі РБФ і, на завершення, перевіримо ефективність нашого підходу на прикладах.

Ідентифікація системи при фіксованій структурі мережі РБФ.

Нелінійну статичну функцію представимо як суму зважених РБФ:

$$f(u(k)) = \sum_{i=1}^M w_i \phi_i(u(k)) + \varepsilon(k), \quad (2)$$

де

$$\phi_i(u(k)) = \exp\left\{-\frac{\|u(k) - c_i\|^2}{d_i^2}\right\}, \text{ - функція Гауса;}$$

M - кількість РБФ; c_i - i -ий центр РБФ; d_i - i -та відстань РБФ; w_i - ваговий параметр, пов'язаний з i -ою РБФ; $\|\cdot\|$ - евклідова норма; $\varepsilon(k)$ - похибка наближення.

Враховуючи (2) систему (1) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=1}^r a_i y(k-i) = \\ &= \sum_{i=0}^r b_i \sum_{j=1}^M w_j \phi_j(u(k-1-i)) + \\ &+ \sum_{i=0}^r b_i \varepsilon(k-1-i) + e(k) \end{aligned} \quad (3)$$

Змінивши в подвійній сумі рівняння (3) порядок додавання, одержимо:

$$\begin{aligned} y(k) &+ \sum_{i=1}^r a_i y(k-i) = \\ &= \sum_{i=1}^M w_i \sum_{j=0}^r b_j \phi_i(u(k-1-j)) + v(k) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{де } v(k) = \sum_{j=0}^r b_j \varepsilon(k-1-j) + e(k).$$

Введемо позначення:

$$\theta_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T;$$

$$\theta_i = [\theta_i(1), \theta_i(2), \dots, \theta_i(r+1)]^T \quad (i = 1, 2, \dots, M);$$

$$\varphi_i(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n)]^T;$$

$$\varphi_i(k) = [\phi_{i1}(k), \phi_{i2}(k), \dots, \phi_{in}(k)]^T \quad (i = 1, 2, \dots, M);$$

$$\theta = [\theta_0^T, \theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_M^T]^T;$$

$$\varphi(k) = [\varphi_0^T(k), \varphi_1^T(k), \varphi_2^T(k), \dots, \varphi_M^T(k)]^T;$$

$$Y = [y(n_s + 1), y(n_s + 2), \dots, y(n_s + N)]^T;$$

$$v = [v(n_s + 1), v(n_s + 2), \dots, v(n_s + N)]^T;$$

$$\Phi = [\varphi^T(n_s + 1), \varphi^T(n_s + 2), \dots, \varphi^T(n_s + N)]^T,$$

де $n_s \geq \max(n, r+1)$, $\phi_{ij}(j) = \phi_i(u(k-j))$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, r+1$), $\theta_i(k) = b_{i-1} w_i$.

Тоді (4) можна записати у матричному вигляді:

$$Y = \Phi \cdot \theta + v \quad (5)$$

Рівняння (5) являє собою загальну модель лінійної (відносно оцінюваних параметрів θ) регресії. Методом найменших квадратів [1,10] отримаємо таку оцінку вектора параметрів:

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=n_s+1}^{n_s+N} \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=n_s+1}^{n_s+N} \varphi(k) y(k) \right], \quad (6)$$

де N - кількість вхідних і вихідних даних.

Якщо покласти $w_i = 1$, що не обмежує загальності, то параметри лінійної динамічної частини оцінюються як

$$[\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_r]^T = [I_{(n+r+1)(n+r+1)} : 0] \hat{\theta}. \quad (7)$$



Рис. 3. Кодування структури мережі РБФ

Далі, параметри нелінійної статичної частини знаходимо за формулою:

$$\hat{w}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r+1} \hat{\theta}_i(j) \hat{\theta}_i(j)}{\sum_{j=1}^{r+1} \hat{\theta}_i^2(j)} \quad (i = 2, 3, \dots, M). \quad (8)$$

Таким чином, оцінка нелінійної статичної функції, буде такою:

$$\hat{f}(u(k)) = \sum_{i=1}^M \hat{w}_i \phi_i(u(k)). \quad (9)$$

Отже, якщо структура мережі РБФ $\Delta = (M, \{c_1, \dots, c_M\}, \{d_1, \dots, d_M\})$ відома, то формули (6)-(9) дають можливість здійснити повну ідентифікацію моделі Гаммерштейна. Проте від структури мережі РБФ в значній мірі залежить ступінь відповідності вихідних сигналів моделі $\hat{y}_i(k)$ реальним вихідним сигналам системи $y_i(k)$. Тому виникає проблема знаходження такої мережі РБФ, для якої ця відповідність буде найкращою. Розв'язати цю проблему можна за допомогою ГА.

Оптимізація мережі РБФ за допомогою ГА.

Оскільки мережі РБФ можуть суттєво відрізнятися за кількістю параметрів, то їх представлення, необхідне для формування початкової популяції ГА, пов'язане з певними труднощами. Тому пропонується структуру мережі РБФ кодувати двійковим рядком бітів S , що складається з трьох блоків: S_1 , S_2 , S_3 як показано на рис. 3. Блок S_1 кодує число M і має довжину M_{max} . S_2 та S_3 - блоки, що кодують центри $\{c_i\}$ та відстані $\{d_i\}$ відповідно. Кожен з цих блоків має M_{max} підблоків.

Декодування довільного k -го рядка S для отримання реальної структури мережі РБФ $\Delta_k = (M_k, \{c_1, \dots, c_{M_k}\}, \{d_1, \dots, d_{M_k}\})$, що йому

відповідає, здійснюється таким чином. Якщо j -й біт від лівого кінця в S_i є i -ю "1" від лівого кінця в S_1 , то j -ті підблоки від лівого кінця, як S_2 так і

S_j , декодуються для i -х центру та відстані мережі РБФ за формулами:

$$c_i = \frac{c_{\max} - c_{\min}}{2^{L_i} - 1} D_2 + c_{\min},$$

$$d_i = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2^{L_i} - 1} D_3 + d_{\min},$$

де D_j – десяткове значення двійкових чисел в j -му підблоці S_i ($i = 2, 3$), а $[c_{\min}, c_{\max}]$ та $[d_{\min}, d_{\max}]$ – діапазони пошуку $\{c_i\}$ та $\{d_i\}$.

Генетичний алгоритм полягає у виконанні таких основних кроків:

Крок 1: Ініціалізація.

Генерація випадковим чином Q рядків двійкових бітів для створення початкової псевдопопуляції Ω .

Крок 2: Декодування.

Псевдопопуляція Ω декодується в дійсну популяцію $\Omega_d = \{\Delta_1, \dots, \Delta_Q\}$ мереж РБФ.

Крок 3: Ідентифікація.

Знаходження оцінок вектора параметрів $\hat{\theta}_i$ та функції $\hat{f}_i(u(k))$ ($i=1, 2, \dots, Q$) по формулах (7)–(10), для кожної мережі $\Delta_i \in \Omega_d$.

Крок 4: Обчислення цільової функції.

Використовуючи $\hat{\theta}_i$ та $\hat{f}_i(u(k))$, для кожної мережі $\Delta_i \in \Omega_d$ ($i = 1, 2, \dots, Q$), обчислюємо значення цільової функції F_i за формулою:

$$F_i = -N \log \left\{ N^{-1} \sum_{k=s_i+1}^{s_i+N} (y_i(k) - \hat{y}_i(k))^2 \right\} + 2P_i,$$

де $P_i = n + M(r + 1)$ – кількість параметрів ідентифікації, а $\hat{y}_i(k)$ – вихідний сигнал моделі, що оцінюється.

Крок 5: Репродукція.

Відтворення кожного рядка з ймовірністю $F_i/(F_1 + \dots + F_Q)$ фактично являє собою лінійне масштабування цільової функції і використовується, щоб уникнути небажаної передчасної конвергенції.

Крок 6: Кросингвер.

Вибираються випадковим чином два рядки популяції і з ймовірності кросингверу P_c приймається рішення про можливість їх "схрещування". Якщо це рішення позитивне, то випадковим чином вибирається точка кросингверу і здійснюється обмін частинами рядків. Ймовірності кросингверу P_c зазвичай

вибирають більше 50%. В результаті отримаємо двох нових представників популяції.

Крок 7: Мутація.

Інверсія бітів рядка відповідно до ймовірності мутації P_m , яка не перевищує 5%.

Крок 8: Повторення.

Кроки 2–7 повторюються від покоління до покоління заздалегідь задане число разів G , після чого субоптимальні параметри мережі РБФ $\hat{\Delta}_{best}$ визначаються рядком з кращим значенням цільової функції за всі минулі покоління. Таким чином отримано оцінку моделі $\hat{\Delta}_{best}$ і відповідні оцінки $\hat{\theta}_{best}$ та $\hat{f}_{best}(u(k))$.

Чисельне моделювання

Ефективність запропонованого підходу оцінимо шляхом його порівняння з традиційним підходом тобто таким, коли нелінійна статична частина моделі апроксимується поліномом і генетичний алгоритм не застосовується. Тестові системи Гаммерштейна будуть ті ж, що використовувались при оцінці ефективності традиційного підходу [7].

Приклад 1. Розглянемо тестову систему

$$\begin{cases} A(q^{-1}) \cdot y(k) = B(q^{-1}) \cdot x(k-1) + e(k) \\ x(k) = f(u(k)) = u(k) + 0.5u^3(k) \\ A(q^{-1}) = 1 + 0.8q^{-1} + 0.6q^{-2} \\ B(q^{-1}) = 0.4 + 0.2q^{-1} \end{cases}$$

Вихідний сигнал генерується рівномірно розподілений в діапазоні $[-3.0, 3.0]$ вхідом. Кількість вхідних і вихідних даних $N = 300$. Базові конструктивні параметри ГА вибрані таким чином:

- (1) об'єм популяції $Q = 30$;
- (2) максимальна кількість РБФ $M_{\max} = 10$;
- (3) довжина рядка $L_2 = L_3 = 15$;
- (4) діапазон пошуку центрів РБФ $[c_{\min}, c_{\max}] = [-3.0, 3.0]$;
- (5) діапазон пошуку відстаней РБФ $[d_{\min}, d_{\max}] = [10^{-4}, 10]$;
- (6) ймовірність кросингверу $P_c = 0.8$;
- (7) ймовірність мутації $P_m = 0.03$;
- (8) генетичні оператори повторюються до $G = 150$ -го покоління.

Основні результати. Оптимальна структура мережі РБФ: $\hat{\Delta}_{\text{best}} = (5, \{-2.61, -1.84, -1.19, -0.81, 2.25\}, \{7.08, 9.04, 0.65, 9.06, 6.79\})$.

На рис. 4 показані оцінки $\hat{f}_1(u(k))$ та $\hat{f}_2(u(k))$ дійсної нелінійної статичної функції $f(u(k))$, що отримані за допомогою запропонованого методу та традиційним способом відповідно. Як бачимо,

функція $\hat{f}_1(u(k))$ значно ближче до дійсної нелінійної функції $f(k)$, ніж функція $\hat{f}_2(u(k))$ на заданій області даних.

В табл. 1 наведені оцінки параметрів лінійної динамічної частини даної системи при оптимальній мережі РБФ, знайдений за допомогою ГА.

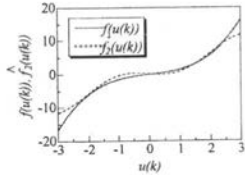
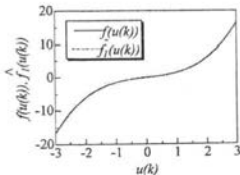


Рис. 4. Дійсна нелінійна функція та її оцінки

Таблиця 1.

Оцінка параметрів лінійної динамічної частини системи для різних способів наближення нелінійної функції

Дійсне значення параметрів моделі		Оцінки параметрів моделі при наближенні функції $f(u(k))$	
		мережею РБФ	поліномом
a_1	0.8	0.806	0.811
a_2	0.6	0.599	0.589
b_0	0.4	0.400	0.400
b_1	0.2	0.201	0.322

Приклад 2. Розглянемо тестову систему

$$\begin{cases}
 A(q^{-1}) \cdot y(k) = B(q^{-1}) \cdot x(k-1) + e(k) \\
 x(k) = f(u(k)) = \begin{cases} -2.0 & (-3.0 \leq u(k) < -1.8) \\ 5u(k)/3 + 1.0 & (-1.8 \leq u(k) < -0.6) \\ 0.0 & (-0.6 \leq u(k) < 0.6) \\ 5u(k)/3 - 1.0 & (0.6 \leq u(k) < 1.8) \\ 2.0 & (1.8 \leq u(k) \leq 3.0) \end{cases} \\
 A(q^{-1}) = 1 + 0.8q^{-1} + 0.6q^{-2} \\
 B(q^{-1}) = 0.4 + 0.2q^{-1}
 \end{cases}$$

Умови моделювання - ті ж, що і в прикладі 1.

Основні результати. Оптимальна структура мережі РБФ: $\hat{\Delta}_{\text{best}} = (5, \{-2.25, -1.14, -0.49, 0.65, 1.96\}, \{2.49, 1.43, 1.73, 0.87, 3.75\})$.

На рис. 5 показані оцінки $\hat{f}_1(u(k))$ та $\hat{f}_2(u(k))$ дійсної нелінійної статичної функції $f(u(k))$, отримані за допомогою РБФ і ГА та традиційним способом відповідно. Очевидно, що оцінка $\hat{f}_1(u(k))$, отримана запропонованим методом, дуже близька до дійсної нелінійної функції $f(u(k))$ на заданій області даних, тоді як оцінка $\hat{f}_2(u(k))$, отримана поліноміальною моделлю має досить велике відхилення від дійсної нелінійної функції.

В табл. 2 наведені оцінки параметрів лінійної динамічної частини системи при оптимальній мережі РБФ, знайдений за допомогою генетичного алгоритму.

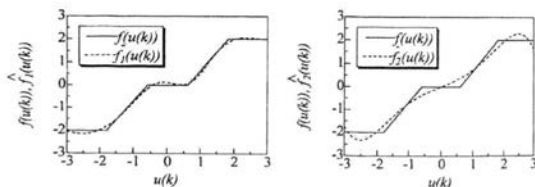


Рис. 5 Дійсна нелінійна функція та її оцінки

Таблиця 2.

Оцінка параметрів лінійної динамічної частини системи для різних способів наближення нелінійної функції

Дійсне значення параметрів моделі		Оцінки параметрів моделі при наближенні функції $f(u(k))$	
		мережею РБФ	поліномом
a_1	0.8	0.818	0.801
a_2	0.6	0.597	0.590
b_0	0.4	0.400	0.400
b_1	0.2	0.205	0.186

Висновки

Проведений обчислювальний експеримент підтвердив ефективність даного підходу для ідентифікації моделі Гаммерштейна. На відміну від інших відомих підходів він простіший в реалізації і для отримання заданої похибки потребує менше часу.

Список використаних джерел

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователей – М., 1991;
2. Nelles O. Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models. – 2001;
3. Sung S. System identification method for Hammerstein processes. Industrial and Engineering Chemistry Research 41, 4295–4302 (2002)
4. Chaari A., Elleuch K., Kharrat M., Kamoun S. Identification of discrete time nonlinear system described by Hammerstein model: Application to a thermal system ACSE Journal, Volume (6), Issue (2), June, 2006 63-69
5. Hunt K.J., Munih M., Donaldson N.D., Barr F.M. Investigation of the Hammerstein hypothesis in the modeling of electrically stimulated muscle. IEEE Transactions on Biomedical Engineering 45, 998–1009 (1998)
6. Wang J., Sano A., Chen T., Huang B. Identification of Hammerstein systems without explicit parameterization of nonlinearity. International Journal of Control 82, 937–952 (2009)
7. Adachi S., Murakami H. Generalized Predictive Control System Design Based on Non-linear Identification by Using Hammerstein Model // Trans. of the Institute of Systems, Control and Information Engineers. –1991– Vol.8, №3, – P.115-121;
8. Руденко О. Г., Бодянский С. В. Штучні нейронні мережі. – 2006
9. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. – М., 2006;
10. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. – М., 1983;

Надійшла до редколегії 16.01.2012

УДК 519.21

Гололобов*Д.О., аспірант

**Емпірична оцінка невідомого параметра
випадкового поля із сильним
перемішуванням**

У даній статті розглядається оцінка невідомого параметра двовимірного однорідного у вузькому сенсі випадкового поля з неперервним часом, для якого виконується умова сильного перемішування. Наводяться умови, за яких має місце збіжність за розподілом даної оцінки.

Ключові слова: випадкове поле, умова сильного перемішування, збіжність за розподілом.

*E-mail: dmitrygololobov9@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Заславський В.А.

У даній статті розглянуто задачу оцінювання методом емпіричних середніх невідомого параметра двовимірного однорідного у вузькому сенсі випадкового поля з неперервним часом, для якого виконується умова сильного перемішування. Метою роботи є обґрунтування можливості використання методу емпіричних середніх до даної задачі.

Розглянемо наступну задачу.

Нехай

$$\xi(\vec{t}) = \xi(\vec{t}, \omega) = \xi(t_1, t_2, \omega),$$

$$\vec{t} = \{t_1, t_2\} \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^2$$

— однорідне у вузькому сенсі випадкове поле з неперервним часом, визначене на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ із значеннями у деякому метричному просторі $(Y, \mathcal{B}(Y))$. Нехай також I — замкнена підмножина множини $\mathbb{R}^l$, $l \geq 1$, можливо, $I = \mathbb{R}^l$; $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ — невід'ємна функція, що задовольняє наступні умови:

1) функція $f(u, z)$, $u \in I$ неперервна для всіх $z \in Y$;

2) для кожного $\vec{u} \in I$ відображення $f(\vec{u}, z)$, $z \in Y \in \mathcal{B}(Y)$ - вимірним.

Розглянемо спостереження:

D.A. Gololobov*, the post-graduate student

**Empirical estimate of indefinite parameter for
random field with strong mixing**

Parametric estimate for a homogeneous in a strict sense two-dimensional random field with a continuous time and strong mixing is considered. Conditions, under which converge in distribution of the parameter empirical estimate holds, are established.

Key Words: random field, strong mixing condition, converge in distribution.

$$\{\xi(\vec{t}), \vec{t} \in [0, T]^2\}, T > 0; T \in \mathbb{R}^2.$$

Задача полягає у наступному:

знайти

$$\min_{u \in I} E\{f(u, \xi(\vec{0}))\} = \min_{u \in I} F(u). \quad (1)$$

Ця задача апроксимується задачею [1, p.226]:

знайти

$$\begin{aligned} & \min_{u \in I} \frac{1}{T^2} \iint_{[0, T]^2} f(u, \xi(\vec{t})) d\vec{t} = \\ & = \min_{u \in I} \frac{1}{T^2} \iint_{[0, T]^2} f(u, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 = \\ & = \min_{u \in I} F_T(u, \omega) = \min_{u \in I} F_T(u). \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 1. Нехай траєкторії випадкового поля $\xi(\vec{t}) = \xi(t_1, t_2)$ неперервні з імовірністю 1, функція f неперервна на $I \times Y$ та

$$E\{f(\vec{u}, \xi(\vec{0}))\} < \infty, \vec{u} \in I.$$

Припустимо, що $\vec{u}_0$ та $\vec{u}(T) = \vec{u}(T, \omega)$ деякі точки мінімумів функцій $F(\vec{u})$ (див.(1)) та $F_T(\vec{u})$ (див.(2)) відповідно; $T > 0, \omega \in \Omega, P(\Omega) = 1$; для всіх $T > 0$ відображення $\vec{u}(T, \omega), \omega \in \Omega \in \mathcal{G}_T$ -вимірним; $\vec{u}(T) = \vec{u}_0; T \rightarrow \infty$ з імовірністю 1; та задовольняються наступні умови:

1) $\vec{u}_0$ є внутрішньою точкою множини I ;

2) існує замкнений окіл S точки $\bar{u}_0$ такий, що для всіх $z \in Y$ функція $f(\bar{u}, z), \bar{u} \in S$ є двічі неперервно диференційовною на S ;

$$3) E \left\{ \max_{u \in S} \|\bar{\nabla} f(\bar{u}, \xi(\bar{0}))\| \right\} < \infty,$$

де

$$\bar{\nabla} f(\bar{u}, z) = \left(\frac{df}{du} \right)_{j=1}^l, \bar{u} = (u_j)_{j=1}^l \in S, z \in Y;$$

4) для всіх $T > 0$ з імовірністю 1

$$\int_0^T \int \max_{u \in S} \|\Phi(\bar{u}, \xi(t_1, t_2))\| dt_1 dt_2 < \infty,$$

де

$$\Phi(\bar{u}, z) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_k}(\bar{u}, z) \right)_{j,k=1}^l;$$

$$5) E \left\{ \max_{u \in S} \|\Phi(\bar{u}, \xi(\bar{0}))\| \right\} < \infty;$$

$$6) \det A_0 \neq 0, \text{ де } A_0 = E \left\{ \Phi(\bar{u}_0, \xi(\bar{0})) \right\};$$

7) поле $\xi(\bar{r}) = \xi(t_1, t_2)$ задовольняє умову сильного перемішування [2, pp. 43-44]

$$\sup_{\substack{A_1 \in \mathcal{F}(I_1) \\ A_2 \in \mathcal{F}(I_2)}} |P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)| \leq \Psi(d)$$

з коефіцієнтом:

$$\Psi(d) = O(d^{-2-\varepsilon}), d \rightarrow \infty; \varepsilon > 0;$$

$$8) \text{ для всіх } \delta > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$E \left\{ \left\| \bar{\nabla} f(\bar{u}_0, \xi(\bar{0})) \right\|^{2+\delta} \right\} < \infty;$$

9) функція $\bar{\nabla} f(\bar{u}_0, z), z \in Y$ є неперервною;

10) $\det g(\bar{0}) \neq 0$, де $g(\bar{\lambda}) = (g_{jk}(\bar{\lambda}))_{j,k=1}^l \in$ спектральною щільністю поля

$$\left\{ \bar{\nabla} f(\bar{u}_0, \xi(t_1, t_2)), t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

тоді $T \left(\bar{u}(T) - \bar{u}_0 \right)$ збігається за розподілом до

$$N(\bar{0}, (2\pi)^2 (A_0)^{-1} g(\bar{0}) (A_0)^{-1}), T \rightarrow \infty.$$

$$11) \text{ для всіх } \delta_1 > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$E \left\{ \left(f(\bar{u}_0, \xi(\bar{0})) \right)^{2+\delta_1} \right\} < \infty;$$

12) $g_1(\bar{0}) \neq 0$, де $g_1(\bar{\lambda}), \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) \in$ спектральною щільністю поля

$$\left\{ f(\bar{u}_0, \xi(t_1, t_2)), t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тоді $T \left(F_T(\bar{u}(T)) - F(\bar{u}_0) \right)$ збігається за розподілом до

$$N(\bar{0}, (2\pi)^2 g_1(\bar{0})).$$

Далі наведемо допоміжні твердження, які знадобляться при доведенні теореми 1.

Теорема 2. [3, р. 9] Нехай $\xi(\bar{r}) \in \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}^m, p \geq 1, m \geq 1$ однорідне у строгому сенсі випадкове поле, траєкторії якого неперервні з імовірністю 1.

Припустимо, що $\xi(\bar{r})$ задовольняє умову сильного перемішування [2, pp. 43-44] з коефіцієнтом

$$\Psi(d) = O(d^{-m-\varepsilon}), d \rightarrow \infty; \varepsilon > 0;$$

і

$$E \left\{ \xi(\bar{r}) \right\} = \bar{0}; E \left\{ \left\| \xi(\bar{r}) \right\|^{2+\delta} \right\} < \infty$$

для деякого $\delta > \frac{2m}{\varepsilon}$. Вважатимемо, що

$\det g(\bar{0}) \neq 0$, де $g(\bar{\lambda})$ — матриця спектральної щільності $\xi(\bar{r})$. Тоді

$$\min_{u \in I} \frac{1}{T^{m/2}} \int_{[0,T]^m} \xi(\bar{r}) d\bar{r} \Rightarrow N(\bar{0}, (2\pi)^{-m} g(\bar{0})),$$

при $T \rightarrow \infty$.

Теорема 3. [3, pp. 22-24] Нехай $\{\xi_n, i \in N\}$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових елементів на повному імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ із значеннями у деякому метричному просторі $(Y, \mathcal{B}(Y))$. Нехай I — замкнена підмножина множини $\mathcal{R}^l, l \geq 1$, можливо, $I = \mathcal{R}^l$; Припустимо, що $f: X \times Y \rightarrow \mathcal{R}^2$ — невід'ємна функція, що задовольняє наступні умови:

1) функція $f(\bar{u}, z), \bar{u} \in I$ неперервна для всіх $z \in Y$;

2) для кожного $\bar{u} \in I$ відображення $f(\bar{u}, z), z \in Y \in \mathcal{B}(Y)$ — вимірним.

Розглянемо спостереження $\{\xi_n, i = \overline{1, n}\}$, $n \in N$. Задача полягає у пошуку точок мінімуму функції

$$F(\bar{u}) = E \left\{ f(\bar{u}, \xi_1) \right\}, \bar{u} \in I, \quad (3)$$

та її мінімального значення. Ця задача апроксимується задачею пошуку точок мінімуму і мінімального значення для емпіричної функції

$$F_n(\tilde{u}) = F_n(\tilde{u}, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{u}, \xi_i), \tilde{u} \in I. \quad (4)$$

Припустимо, що

$$E\{f(\tilde{u}, \xi_1)\} < \infty, \tilde{u} \in I.$$

Нехай $\tilde{u}_0$ і $\tilde{u}_n = \tilde{u}_n(\omega)$ є деякими точками мінімумів функцій (3) та (4) відповідно; $n \geq 1, \omega \in \Omega, P(\Omega) = 1$; для довільного n відображення $\tilde{u}_n(\omega), \omega \in \Omega$ є $\mathcal{G}_n$ -вимірним.

Нехай $\tilde{u}_n = \tilde{u}_0, n \rightarrow \infty$ з імовірністю 1 і задовольняються наступні умови:

- 1) $\tilde{u}_0$ є внутрішньою точкою множини I ;
- 2) існує такий замкнений окіл S точки $\tilde{u}_0$, що для будь-якого $z \in Y$ функція $f(\tilde{u}, z), \tilde{u} \in S$ є двічі неперервно диференційовною на S ;

- 3) $E\left\{\max_{u \in S} \|\tilde{\nabla} f(\tilde{u}, \xi_1)\|\right\} < \infty$, де

$$\tilde{\nabla} f(\tilde{u}, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_j}(\tilde{u}, z) \right)_{j=1}^l, \\ \tilde{u} = (u_j)_{j=1}^l \in S, z \in Y,$$

(внаслідок властивостей вимірних функцій для всіх $\tilde{u} \in S$ відображення $\tilde{\nabla} f(\tilde{u}, z), z \in Y$ є $\mathfrak{B}(Y)$ -вимірним);

- 4) $E\left\{\max_{u \in S} \|\Phi(\tilde{u}, \xi_1)\|\right\} < \infty$, де

$$\Phi(\tilde{u}, z) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{u}, z) \right)_{j,k=1}^l;$$

- 5) $\det A_0 \neq 0$, де $A_0 = E\{\Phi(\tilde{u}_0, \xi_1)\}$;

- 6) Якщо $E\left\{\|\tilde{\nabla} f(\tilde{u}_0, \xi_1)\|^2\right\} < \infty$, та $\det C \neq 0$,

де

$$C = E\{\tilde{\nabla} f(\tilde{u}_0, \xi_1) \tilde{\nabla} f(\tilde{u}_0, \xi_1)^T\},$$

тоді $\sqrt{n}(\tilde{u}_n - \tilde{u}_0)$ збігається за розподілом до

$$N(\tilde{0}, (A_0)^{-1} C (A_0)^{-1}), n \rightarrow \infty,$$

де $N(\tilde{a}, B)$ є нормальним розподілом із значенням $\tilde{a}$ і кореляційною матрицею B ;

$$7) E\left\{\left(f(\tilde{u}_0, \xi_1)\right)^2\right\} < \infty;$$

$$8) \sigma^2 = E\{f(\tilde{u}_0, \xi_1) - E\{f(\tilde{u}_0, \xi_1)\}\}^2 > 0.$$

Тоді $\sqrt{n}(F_n(\tilde{u}_n) - F(\tilde{u}_0))$ збігається за розподілом до $N(0, \sigma^2)$.

Доведення теореми 3 див. в [3, pp. 24-30].

Далі розглянемо доведення основної теореми.

Доведення теореми 1. Згідно із умовою 3) теореми 1 і теоремою Фубіні з імовірністю 1 для всіх $T > 0$

$$\int_0^T \int_0^T \max_{u \in S} \|\tilde{\nabla} f(\tilde{u}, \xi(t_1, t_2))\| dt_1 dt_2 < \infty.$$

Тоді за умовою 2) теореми 1, формулою Тейлора і теоремою Лебега про граничний перехід дістанемо з імовірністю 1 для всіх $T > 0$ функція $F_T(\tilde{u}), \tilde{u} \in S$ є диференційовною на S і

$$\tilde{\nabla} F_T(\tilde{u}) = \left(\frac{\partial F_T}{\partial u_j}(\tilde{u}) \right)_{j=1}^l = \\ = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \tilde{\nabla} f(\tilde{u}, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 < \infty, \tilde{u} \in S.$$

Згідно із умовами 2) та 4) теореми 1 функція $F_T(\tilde{u}), \tilde{u} \in S$ є двічі неперервно диференційовною і

$$\left(\frac{\partial^2 F_T}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{u}) \right) = \\ = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{u}, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 < \infty, \\ j, k = \overline{1, l}, \tilde{u} \in S$$

має певно для всіх $T > 0$.

По аналогії з теоремою 3 із даної роботи та теоремою 11 із [3, р. 32-36], для всіх $T > 0, \omega \in \Omega(T); P(\Omega(T)) \rightarrow 1, T \rightarrow \infty$, дістанемо

$$\tilde{\nabla} F(\tilde{u}_0) + A(T)(\tilde{u}(T) - \tilde{u}_0) = \tilde{0}, \quad (5)$$

де

$$A(T) = A(T, \omega) = \\ = \left(\frac{\partial^2 F_T}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{u}^j(T, \omega), \omega) \right)_{j,k=1}^l;$$

$$\tilde{u}^j(T, \omega) = \tilde{u} + (\Theta_j(T, \omega) - \tilde{u}_0);$$

$$0 < \Theta_j(T, \omega) < 1$$

і для всіх $T > 0$ відображення
 $\Theta_j(T, \omega), \omega \in \Omega(T) \in \mathcal{G}$ -вимірним.

Позначимо

$$A_i(T) = A_i(T, \omega) = \begin{cases} A(T, \omega), \omega \in \Omega(T) \\ A_0, \omega \in \Omega \setminus \Omega(T) \end{cases},$$

$$T > 0, \omega \in \Omega.$$

Тоді для всіх $T > 0, \omega \in \Omega_i(T)$,
 $P(\Omega_i(T)) \rightarrow 1, T \rightarrow \infty$ рівність (5) можна
переписати наступним чином:

$$T(\tilde{u}(T) - \tilde{u}_0) =$$

$$= -(A_i(T))^{-1} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \tilde{\nabla} f(\tilde{u}_0, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2.$$

За умовами 7)-10) теореми 1 та лемою 2,
дістанемо, що

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \tilde{\nabla} f(\tilde{u}_0, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2$$

збігається до $N(\tilde{0}, (2\pi)^2 g(\tilde{0})), n \rightarrow \infty$.

Аналогічно до теореми 3 із даної роботи,
теореми 11 із [3, pp. 32-36] та теореми 4 із [4, pp.
226-227], для всіх $T > 0, \omega \in \Omega(T)$,
 $P(\Omega(T)) \rightarrow 1, T \rightarrow \infty$,
отримасмо:

$$T(F_T(\tilde{u}(T)) - F(\tilde{u}_0)) =$$

$$= \left(\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \tilde{\nabla} f(\tilde{u}_0, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 \right) \times$$

$$\times (\tilde{u}(T) - \tilde{u}_0) +$$

$$+ \frac{T}{2} (\tilde{u}(T) - \tilde{u}_0)' A_3(T) (\tilde{u}(T) - \tilde{u}_0) +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T f(\tilde{u}_0, \xi(t_1, t_2)) -$$

$$- E\{f(\tilde{u}_0, \xi(\tilde{0}))\} dt_1 dt_2,$$

де

$$A_3(T) = A_3(T, \omega) =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\partial^2 F_T}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{v}(T, \omega), \omega) \right)_{j,k=1}^l, \omega \in \Omega(T), \right.$$

$$A_0, \omega \in \Omega \setminus \Omega(T)$$

$$T > 0, \omega \in \Omega,$$

$$\tilde{v}(T) = \tilde{v}(T, \omega) =$$

$$= \tilde{u}_0 + \Theta(T, \omega) (\tilde{v}(T, \omega) - \tilde{u}_0);$$

$$0 < \Theta(T, \omega) < 1,$$

і для всіх $T > 0$ відображення
 $\Theta(T, \omega), \omega \in \Omega(T) \in \mathcal{G}$ -вимірним.

Згідно до умов 7), 11), 12) теореми 1 та
лемою 2

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T f(\tilde{u}_0, \xi(t_1, t_2)) - E\{f(\tilde{u}_0, \xi(\tilde{0}))\} dt_1 dt_2$$

збігається за розподілом до

$$N(\tilde{0}, (2\pi)^2 g(\tilde{0})), T \rightarrow \infty.$$

Отже, $T(F_T(\tilde{u}(T)) - F(\tilde{u}_0))$ збігається за
розподілом до

$$N(\tilde{0}, (2\pi)^2 g(\tilde{0})).$$

Теорему доведено.

Список використаних джерел

- Knopov P. S., Kasitskaya E. J. Properties of empirical estimates in stochastic optimization and identification problems // Annals of Operations Research 56 (1995), pp. 225-239.
- Rosenblatt M. A central limit theorem and a strong mixing condition // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, Vol. 42, no. 1, pp. 43-47.
- Knopov P. S., Kasitskaya E. J. Empirical estimates in stochastic optimization and identification, Kluwer Academic Publishers: Boston/London/Dordrecht. — 2002. — 250 p.
- Knopov P. S. On some classes of M-estimates for non-stationary regression models // Theory

of stochastic processes Vol. 3(19), no. 1-2, 1997,
pp. 222-227.

Надійшла до редакції 20.02.12

УДК 517.929.4

I.A. Джалладова, д.ф.-м.н., професор КНЕУ,
Київ, Україна,
М. Ружечкова, к.ф.-м.н., професор Жілінського
університету, Жіліна, Словаччина,
М. Міхалкова, аспірант Жілінського
університету, Жіліна, Словаччина

Стабілізація класу систем диференціальних рівнянь з марковськими параметрами і білим шумом

Для систем лінійних різницевих рівнянь з білим шумом і з керуваннями, що лінійно входять в праву частину і з коефіцієнтами при фазових змінних і керуванні що, залежать від марковського випадкового процесу знайдено необхідні умови оптимальності, які дозволяють синтезувати оптимальне керування. З використанням апарату функцій Ляпунова, обчислено та мінімізоване значення критерію якості за рахунок вибору коефіцієнтів керування.

Ключові слова: метод функцій Ляпунова, стійкість у середньому квадратичному, стабілізація, критерій якості керування

E-mail: irada-05@mail.ru, miroslava.razickova@fph.uniza.sk

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Деніс Яхьєвич

Вступ. В роботах [1,2,3,5,6] для систем лінійних різницевих рівнянь з керуваннями, що лінійно входять в праву частину і з коефіцієнтами при фазових змінних і керуванні що, залежать від марковського скінченнозначного випадкового процесу знайдено необхідні умови оптимальності, які дозволяють синтезувати оптимальне керування, а також здійснено оптимізацію лінійної системи з випадковими коефіцієнтами при випадковому вході. З використанням апарату функцій Ляпунова, обчислено та мінімізоване значення критерію якості за рахунок вибору коефіцієнтів керування. В даній роботі отримані результати розповсюджуються на більш широкий клас

I.A.Dzhalladova, Doc of Sci., Professor. Kyiv National Economical University, Kyiv, Ukraine, M.Ruzhickova, Ph.D., Professor University of Zilina, Zilina, Slovakia, M.Mikhalkova, Ph.D.St., University of Zilina, Zilina, Slovakia

Stabilization of the class of the system differential equations with markovian parameters and white noise

For the systems of linear difference equations with white noise and with control, what linearly enter into right part and with coefficients at faze variables and manipulation what, depend from markovian occasional process is found necessary conditions of stabilization, which admit of synthesize optimality manipulation. With use the apparatus of functions Lyapunovs, calculated and minimized meaning criterion of Qualities for account of the choice of the coefficients of manipulation.

Key Words: method of Lyapunov functions, stability in mean square, stabilization, criterion of qualities

такого типу систем, але права частина ще залежить від білого шуму.

1. Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ розглянуто систему керування

$$X_{n+1} = A(\xi_n)X_n + B(\xi_n)U_n + C(\xi_{n+1})W_n, \quad (1)$$

з початковою умовою $X(0) = x_0 \in E_m$, де ξ_n — марковський ланцюг, який набуває значення $\theta_1, \dots, \theta_n$ з ймовірностями $q_n(k) (l, s = 1 \dots n; k = 1, 2, \dots)$, що задовольняють умови [4]

$$P(k+1) = \Pi(k)P(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$P(k) = \prod_{j=1}^n \pi_{kj}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

або

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js}(k) p_s(k), \quad j = \overline{1, n},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$\pi_{js}(k) \geq 0, \quad \sum_{s=1}^n \pi_{js}(k) = 1, \quad s, j = \overline{1, n},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad p_s(k) \geq 0, \quad \sum_{s=1}^n p_s(k) = 1, \quad s = \overline{1, n},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Припускаємо, що

$$C(\xi_{n+1})W_n = \sum_{j=1}^n C_j(\xi_{n+1})w_{jn}, \quad w_{jn},$$

$j = \overline{1, r}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ - послідовність незалежних одна від одної випадкових величин, які задовольняють умови

$$< w_{jn} > = 0$$

$$< w_{jn} > = 1, \quad j = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$< w_{jn} w_{il} > = 0 \quad (j-l)^2 + (n-k)^2 \neq 0,$$

$$j, l = 1, 2, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Отже, Функционал, який

розглянуто на просторі $C^1(G) \times U$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} < X_n^* Q(\xi_n) X_n + U_n^* L(\xi_n) U_n > \quad (4)$$

де $Q(\theta_s), \quad L(\theta_s) \quad s = 1, \dots, q$ - симетричні додатно визначені матриці називатимемо критерієм якості керування U .

Вектор

$$U_n = S(\xi_n) X_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

де функція $S(\xi_n)$ є симетричною додатно визначеною матрицею, на якому досягає мінімуму критерій якості (4) називатимемо оптимальним керуванням.

Задача стабілізації полягає у знаходженні оптимального керування (5), що належить можливим допустимим керуванням U , тобто фактично у знаходженні рівнянь для визначення $S(\xi_n)$.

2. Алгоритм побудови оптимального керування.

Введемо позначення:

$$G = (S_n) = A(S_n(S(\xi_n);$$

$$H(\xi_n) = Q(\xi_n) + S^*(\xi_n) L(\xi_n) S(\xi_n)$$

Із системи рівнянь (1) отримаємо систему лінійних різницьових рівнянь

$$X_{n+1} = G(\xi_n) X_n + C(\xi_{n+1}) W_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

для якої треба знайти границю

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} < X_n^* H(\xi_n) X_n >. \quad (7)$$

Припустимо, що нульові розв'язки однорідної системи лінійних різницьових рівнянь

$$X_{n+1} = G(\xi_n) X_n \quad (8)$$

є асимптотично стійкими у середньому квадратичному, тобто, для будь якого розв'язку системи (8) виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0, \quad D_n = < X_n X_n^* >.$$

В цьому випадку границя V (7) не залежить від початкового значення X_0 і з системи рівнянь (6) знаходимо при $X_0 = 0$ вираз для X_n

$$X_n = C(\xi_n) W_{n-1} + G(\xi_{n-1}) C(\xi_{n-1}) W_{n-2} + \\ + G(\xi_{n-1}) G(\xi_{n-2}) C(\xi_{n-2}) W_{n-3} + \dots \\ \dots + G(\xi_{n-1}) G(\xi_{n-2}) \dots G(\xi_1) G(\xi_1) W_0$$

Враховуючи умови (2), виконуються рівності

$$< W_k W_k^* > = E, \quad k = \overline{0, n-1},$$

$$< W_k W_j^* > = 0, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{0, n-1}.$$

Позначимо

$$G(n, n) = E,$$

$$G(n, n-1) = G(n, n-2) = G(\xi_{n-1}) G(\xi_{n-2}),$$

$$G(n, 1) = G(\xi_{n-1}) G(\xi_{n-2}) \dots G(\xi_1).$$

Тоді вираз для X_n можна переписати у вигляді

$$X_n = \sum_{s=1}^n G(n, s) C(\xi_s) W_{s-1} = \\ = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n G(n, s) C_j(\xi_s) w_{j, s-1}. \quad (9)$$

Знайдемо вираз для величини

$$v_n = < X_n^* H(\xi_n) X_n >.$$

Для цього застосуємо властивості скалярних добутків матриць

$$A \circ B = \sum_{k=1}^n a_{kk} b_{kk}, \quad A = \left| a_{kk} \right|_1^n, \\ B = \left| b_{kk} \right|_1^n.$$

І з формул (2), (9) знаходимо вирази для змінних v_n

$$v_n = \left(H(\xi_n) \circ X_n X_n^* \right) = \\ = \left\langle H(\xi_n) \circ \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^n G(n,s) C_j(\xi_s) w_{j,s-1} \right\rangle = \\ = \sum_{i=1}^r \sum_{s=1}^n w_{i,s-1} C_i^*(\xi_s) G^*(n,s) = \\ = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^n \left\langle C_j^*(\xi_s) G^*(n,s) H(\xi_n) G(n,s) C_j(\xi_s) \right\rangle$$

При отриманні формули (10) використовуємо лише операцію математичного сподівання випадкових величин w_{js} ($j = 1, 2; s = 0, 1, 2, \dots$).

Позначимо

$$v_{jn} = \sum_{s=1}^n C_j^*(\xi_s) G^*(n,s) H(\xi_n) G(n,s) C_j(\xi_s) > \\ v_n = \sum_{j=1}^r v_{jn}. \quad (11)$$

Вважаємо, що ξ_s - ергодичний Марковський ланцюг, причому у встановленому режимі, тобто

$$\left\langle C_j^*(\xi_n) H(\xi_n) C_j(\xi_n) \right\rangle = \left\langle C_j^*(\xi_0) H(\xi_0) C_j(\xi_0) \right\rangle;$$

$$\left\langle C_j^*(\xi_{n-1}) G(\xi_{n-1}) H(\xi_n) G(\xi_{n-1}) C_j(\xi_{n-1}) \right\rangle =$$

$$\left\langle C_j^*(\xi_0) G^*(\xi_0) H(\xi_1) G(\xi_0) C_j(\xi_0) \right\rangle > \dots$$

Тоді формула (11) матиме вигляд

$$v_{jn} = \sum_{s=1}^n C_j^*(\xi_0) G^*(n-s,0) H(\xi_{n-s}) G(n-s,0) C_j(\xi_0) > \quad (12)$$

3. Частинний випадок. Розглянемо однорідну систему керування

$$X_{n+1} = A(\xi_n) X_n + B(\xi_n) U_n, \\ X_0 = C_j(\xi_0) \quad (13)$$

Оптимальні керування виду (3) шукаємо, виходячи з умови мінімуму квадратичного функціонала

$$I_j = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* Q(\xi_n) X_n + U_n^* L(\xi_n) U_n >$$

Використовуючи позначення (5), отримаємо систему різницьових рівнянь з випадковими коефіцієнтами

$$X_{n+1} = G(\xi_n) X_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ X_0 = C_j(\xi_0) \quad (14)$$

Для цієї системи шукаємо функціонал

$$I_j = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* H(\xi_n) X_n \right\rangle.$$

Вважатимемо, що X_0 - випадковий вектор, $X_0 = C_j(\xi_0)$. З системи рівнянь (14) знаходимо

$$X_0 = C_j(\xi_0), \\ X_1 = G(\xi_0) C_j(\xi_0), \\ X_2 = G(\xi_1) G(\xi_0) C_j(\xi_0) \dots$$

і для функціонала I_j знаходимо вираз

$$I_j = \left\langle \sum_{s=0}^{\infty} C_j^*(\xi_0) G^*(s,0) H(\xi_s) G(s,0) C_j(\xi_0) \right\rangle$$

З формул (12) при заміні індексу сумування s на n дістанемо вираз

$$v_{jn} = \sum_{s=0}^{n-1} \left\langle C_j^*(\xi_0) G^*(n-s,0) H(\xi_s) G(n-s,0) C_j(\xi_0) \right\rangle$$

При $n \rightarrow \infty$ отримаємо рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{jn} = I_j, \quad (j = 1, \dots, r)$$

Якщо владється довести, що функціонал I_j ($j = 1, \dots, r$) досягає мінімуму за рахунок вибору матриць $S_k = S(\theta_k)$ в керуванні (3), незалежно від вибору початкового випадкового вектора $X_0 = C_j(\xi_0)$, $j = 1, r$ то один і той же набір матриць S_k ($k = 1, \dots, q$) мінімізує одночасно всі функціонали I_j ($j = 1, \dots, r$) і, отже, і їх суму

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^r v_{jn} = \sum_{j=1}^r I_j$$

При цьому в системах керування (1), (13) буде одне й теж оптимальне керування (3). І можна замінити задачу стабілізації системи керування (1) задачею стабілізації системи керування (13).

4. Випадок системи рівнянь (1) без шумового впливу. На ймовірнісному просторі

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ розглянуто систему керування без шумового впливу

$$X_{n+1} = A(\xi_n)X_n + B(\xi_n)U_n. \quad (15)$$

Оптимальне керування

$$U_n = S(\xi_n)X_n \quad (16)$$

шукається за умови мінімуму функціонала

$$I = \langle \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* Q(\xi_n) X_n + U_n^* L(\xi_n) U_n \rangle. \quad (17)$$

Припускаємо, що відомі щільності ймовірностей гі системи $(X(0), \xi(0))$ вигляду

$$f(0, x, \xi) = \sum_{s=1}^q f_s(0, x) \delta(\xi - \theta_s). \quad (18)$$

Використовуючи позначення (5), приходимо до системи різницьових рівнянь

$$X_{n+1} = G(\xi_n)X_n,$$

для якої шукається функціонал

$$I = \langle \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* H(\xi_n) X_n \rangle.$$

Для обчислення функціонала I використовуємо метод функцій Ляпунова [4]. Введемо функції Ляпунова

$$v_k(X) = X^* C_k X = \sum_{n=0}^{\infty} \langle X_n^* H(\xi_n) X_n | X_0 = X, \xi_0 = \theta_k \rangle \quad (19)$$

Якщо функції $v_k(x)$ будуть знайдено, то при відомій щільності ймовірностей (18) значення функціонала I обчислюється за формулою

$$I = \int_{E_m} \sum_{k=1}^q v_k(x) f_k(0, x) dx, \quad dX = dx_1 \dots dx_m \quad (20)$$

де E_m - фазовий простір змінних

$$X = (x_1, \dots, x_m)^T.$$

Вводимо матриці других частинних моментів [5]

$$D_k(n) = \int x x^T f_k(n, x) dx, \quad (k = 1, \dots, q)$$

При цьому знаходимо вираз для I (20)

$$I = \sum_{k=1}^q \int_{E_m} C_k \cdot X X^T f_k(0, X) dX = \sum_{k=1}^q C_k \cdot D_k(0) \quad (21)$$

Дістанемо систему матричних рівнянь для матриць C_k . Виокремимо один перший доданок в ряді (19). Із стану $\xi_0 = \theta_k$

випадковий процес попадає в стан $\xi_1 = \theta_s$ з ймовірностями π_{sk} ($s = 1, \dots, q$). При цьому отримаємо значення $X_1 = G(\theta_k)X$.

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned} A_k &= A(\theta_k), B_k = B(\theta_k), C_k = C(\theta_k), \\ Q_k &= Q(\theta_k), L_k = L(\theta_k), S_k = S(\theta_k), \\ G_k &= G(\theta_k), H_k = H(\theta_k), (k = 1, \dots, q) \end{aligned}$$

З формул (19) отримаємо систему

$$v_k(X) = X^* H_k X + \sum_{s=1}^q \pi_{sk} v_s(G_k X),$$

яку можна записати у вигляді

$$X^* C_k X = X^* H_k X + \sum_{s=1}^q \pi_{sk} X^* G_k^* C_s G_k X, \quad (k = 1, \dots, q).$$

Враховуючи довільність вектора X отримаємо систему матричних рівнянь

$$C_k = H_k + \sum_{s=1}^q \pi_{sk} G_k^* C_s G_k, \quad (k = 1, \dots, q). \quad (22)$$

Далі використовуємо залежність

$$\begin{aligned} D \circ (ABC) &= B \circ A^* D C = A \circ D(BC)^* = \\ &= C \circ (AB)^* D. \end{aligned}$$

І використовуючи залежність (24), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{DI}{DS_k} &= 2L_k^* S_k D_k(0) + \\ &+ 2 \sum_{s=1}^q \pi_{sk} B_k^* C_s (A_k + B_k S_k) D_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, q}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\det D_k(0) \neq 0, \quad k = \overline{1, q},$$

то в точці екстремуму виконуються

$$L_k^* S_k + \sum_{s=1}^q \pi_{sk} B_k^* C_s (A_k + B_k S_k) = 0, \quad k = \overline{1, q}. \quad (25)$$

Введемо позначення

$$\psi_k + \sum_{s=1}^q \pi_{sk} C_s, \quad k = \overline{1, q}. \quad (26)$$

Тоді система (25) приймає вид

$$L_k^* S_k + B_k^* \psi_k (A_k + B_k S_k) = 0, \quad k = \overline{1, q}.$$

Звідси в умові оптимальності знаходимо вираз для матриць S_k і отримаємо

$$S_k = -(L_k + B_k^* \psi_k B_k)^{-1} B_k^* \psi_k A_k, \quad k = \overline{1, q}. \quad (27)$$

Виключаючи з системи (23) матриці отримасмо наступне

$$C_k = Q_k + A_k^* \psi_k (A_k + B_k S_k), \quad k = \overline{1, q}.$$

Цю систему можна записати в у вигляді

$$C_k = Q_k + A_k^* \psi_k A_k - A_k^* \psi_k B_k (L_k + B_k^* \psi_k B_k)^{-1} B_k^* \psi_k A_k \quad (28)$$

Отримана система рівнянь може бути розв'язана методом послідовних наближень

$$C_k^{(n+1)} = Q_k + A_k^* \psi_k^{(n)} A_k - A_k^* \psi_k^{(n)} B_k (L_k + B_k^* \psi_k^{(n)} B_k)^{-1} B_k^* \psi_k^{(n)} A_k$$

$$\psi_k^{(n)} = \sum_{s=1}^q \pi_{sk} C_k^{(n)}, \quad k = \overline{1, q}, \quad (29)$$

$$C_k^{(0)} = 0, \quad \psi_k^{(0)} = 0, \quad k = \overline{1, q}; \quad C_k = \lim_{n \rightarrow \infty} C_k^{(n)},$$

$$\psi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_k^{(n)}, \quad k = \overline{1, q}. \quad (30)$$

5. Основний результат. Систему рівнянь (28) можна також записати у вигляді

$$C_k = Q_k + A_k^* \psi_k (E + B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k)^{-1} A_k, \quad k = \overline{1, q} \quad (31)$$

Дійсно, доведемо виконання тотожності

$$A_k^* \psi_k A_k - A_k^* \psi_k B_k (L_k + B_k^* \psi_k B_k)^{-1} B_k^* \psi_k A_k =$$

$$= A_k^* \psi_k (E + B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k)^{-1} A_k, \quad k = \overline{1, q}.$$

Ці тотожності виконуються у випадку, якщо справджується

$$E - (E + B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k)^{-1} =$$

$$= B_k (L_k + B_k^* \psi_k B_k)^{-1} B_k^* \psi_k.$$

А цей вираз можна переписати у вигляді

$$(E + B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k)^{-1} B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k =$$

$$= B_k (L_k + B_k^* \psi_k B_k)^{-1} B_k^* \psi_k$$

Остання рівність буде виконуватися, якщо виконується тотожність

$$(E + B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k)^{-1} B_k L_k^{-1} = B_k (L_k + B_k^* \psi_k B_k)^{-1}$$

яку можна перетворити до вигляду

$$B_k L_k^{-1} (L_k + B_k^* \psi_k B_k) = (E + B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k) B_k.$$

Розкривши дужки, при $\det L_k \neq 0$ дістанемо тотожність.

Теорема 1. Якщо при $n \rightarrow \infty$, $Q_k > 0$, $L_k > 0$, $k = \overline{1, q}$ збігається метод послідовних наближень

$$C_k^{(n+1)} = Q_k + A_k^* \psi_k^{(n)} (E + B_k L_k^{-1} B_k^* \psi_k^{(n)})^{-1} A_k,$$

$$C_k^{(0)} = 0; \quad \psi_k^{(n)} = \sum_{s=1}^q \pi_{sk} C_k^{(n)}; \quad C_k = \lim_{n \rightarrow \infty} C_k^{(n)},$$

або метод послідовних наближень (29), (30), то для системи керування (15) існує оптимальне керування

$$U_n = S(\xi_n) X_n, \quad S_k = S(\theta_k), \quad k = \overline{1, q}.$$

яке визначається формулами (27), (26), і при цьому керуванні функціонал I досягає мінімуму по елементам матриць S_k , $k = \overline{1, q}$.

Доведення. Система нелінійних різницьових рівнянь (31) еквівалентна системі рівнянь (28), а також системі рівнянь (23) при значеннях матриць S_k (27). З системи (31) випливає, що $C_k \geq Q_k > 0$, $k = \overline{1, q}$. Із існування матриць $C_k > 0$, $k = \overline{1, q}$ випливає існування основних стохастичних функцій Ляпунова (19) і збіжність ряду (17).

Отже, при знайденому керуванні $U_n = S(\xi_n) X_n$ нульовий розв'язок системи (15) буде асимптотично стійким у середньому квадратичному. Оскільки у формулі (21) $D_k(0) \geq 0$, $k = \overline{1, q}$, то функціонал I буде мати мінімум, якщо всі матриці C_k , $k = \overline{1, q}$ будуть мати мінімум відносно матриць S_k , $k = \overline{1, q}$. Нагадаємо, що $C_k \geq C$, якщо $X^* C_k X \geq X^* C X$ при будь-якому $X \neq 0$.

Знайдемо другу варіацію $\delta^2 C_k$ матриць C_k , $k = \overline{1, q}$ при варіації матриць S_k . Матриці S_k , знайдені з рівнянь (27), які еквівалентні рівнянням $\delta C_k = 0$, $k = \overline{1, q}$ із матричних рівнянь з точністю до нескінченно малих вищого порядку

$$C_k + \delta^2 C_k = Q_k + (S_k^* + \delta S_k^*) L_k (S_k + \delta S_k) +$$

$$+ \sum_{s=1}^q \pi_{sk} (A_s^* + (S_s^* + \delta S_s^*) B_s^*) \times$$

$$\times (C_k + \delta^2 C_k) (A_k + B_k (S_k + \delta S_k)).$$

знаходимо систему рівнянь

$$\delta^2 C_k = \sum_{s=1}^q \pi_{sk} (A_s^* + (S_s^* + \delta S_s^*) B_s^*) \times$$

$$\times (C_k + \delta^2 C_k) (A_k + B_k (S_k + \delta S_k)) \quad k = \overline{1, n}. \quad (32)$$

Для системи рівнянь (23) із існування розв'язку $C_k > 0$, $k = \overline{1, n}$ впливає збіжність методу послідовних наближень (29). Тому систему рівнянь (32) можна розв'язати методом послідовних наближень, який збігається при $n \rightarrow \infty$. При цьому отримуємо нерівності

$$\delta^2 C_k \geq \delta S_k^* (L_k + B_k^* \psi_k B_k) \delta S_k \geq 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (33)$$

З нерівностей (33) випливає, що матриці S_k , $k = \overline{1, n}$, які знайдені згідно формул (27), визначають мінімум симетричних матриць C_k , $k = \overline{1, n}$, оскільки $\delta C_k = 0$, $\delta^2 C_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$. Теорема доведена.

З результатів теореми 1 випливає, що вибір оптимального керування вигляду $U_n = S(\xi_n) X_n$ не залежить від початкового значення X_0 . Якщо $X_0 = C_j(\xi_0)$, то маємо

$$D_k(0) = \langle X_0 X_0^* \rangle = P_k C_j(\theta_k) C_j^*(\theta_k).$$

Позначимо

$$C_{jk} = C_j(\theta_k), \quad j = \overline{1, 2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

У цьому випадку функціонал I (20) приймає значення

$$I = \sum_{k=1}^n C_k \circ P_k C_{jk} C_{jk}^* = \sum_{k=1}^n P_k C_{jk}^* C_k C_{jk}$$

Наведемо основний результат роботи.

Теорема 2. Нехай коефіцієнти неоднорідної дискретної системи керування (1) залежать від марковської ергодичного ланцюга ξ_n , визначеного системою різницьових рівнянь (2). Якщо проекції вектора $w_n = (w_{1n}, \dots, w_{2n})^*$ -послідовності некорельованих випадкових величин з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією, то оптимальне керування вигляду (3), яке мінімізує квадратичний функціонал (4), співпадає з оптимальним керуванням вигляду (3), в системі (15), що мінімізує квадратичний функціонал вигляду (17). При цьому

$$v = \sum_{j=1}^r \sum_{k=2}^q P_k C_{jk}^* C_k C_{jk}$$

де P_k - граничні ймовірності для марковского ланцюга, а $C_k > 0$ - симетричні матриці, які

визначаються системою матричних рівнянь (28) або (31).

Наведений результат суттєво полегшує синтез оптимальних регуляторів, оскільки розв'язок системи рівнянь (28) або (31) методом послідовних наближень простіший ніж оптимізація розв'язків неоднорідної системи (1) з функціоналом (4). Для стаціонарних систем аналогічний результат отриман вперше в роботі [5].

Список використаних джерел

1. Гихман И.И. Управляемые случайные процессы / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — К.: Наук. думка, 1977. — 252 с.
2. Джалладова І.А. Оптимізація стохастичних систем / І.А. Джалладова. — К.: КНЕУ, 2005. — 284 с.
3. Зубов В.И. Методы Ляпунова и их применение / В.И. Зубов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. — 241 с.
4. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977 — 488 с.
5. Валеев К.Г. Джалладова І.А. Оптимізація випадкових процесів / Валеев К.Г. Джалладова І.А. — К.: КНЕУ, 2007. — 324 с.
6. Dzhalladova I.A. Josef Diblik, D.Khusainov, Bashtinec J. Estimates of Exponential Stability for Solutions of Stochastic Control System with Delay. Abstract and Applied Analysis, vol/ 2011, Article ID 9204122011 doi10.1155/2011/920412/http://www.hindawi.com/journals/aaa/contents/14.
7. Dzhalladova I.A. M. Rujchekova. The Optimization of Solutions of the Dynamic Systems with Random Structure; Abstract and Applied Analysis, vol/ 2011, Article ID 486742011. doi10.1155/2011/48674/http://www.hindawi.com/journals/aaa/contents/18.

Надійшла до редколегії 13.03.12

УДК 004.93

Донченко В.С., д.ф.-м.н., проф.,
Зінко Т.П., аспірант**Комбінована процедура класифікації
мовних сигналів**

В статті розглядається лінійна дискримінація, як задача квадратичної оптимізації, побудова дерева кластеризації за алгоритмом k-середніх та дихотомічна класифікація мовних сигналів на основі формантних векторів ознак.

Ключові слова: псевдообернення, кластеризація, метод k-середніх, класифікація, спектрограма, квадратична оптимізація, форманти, лінійна дискримінація, розпізнавання мови.

E-mail: voldon@unicyb.kiev.ua, tzinko@ukr.net

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

V.S. Donchenko, Doctor of Science, Prof.,

T.P. Zinko, Postgrad. stud.

**Combined procedure for speech signals
classification**

The linear discrimination as a quadratic optimization problem, the construction of tree-clustering by k-means algorithm and dichotomic classification of speech signals based on formant vectors signs this paper are considers.

Key Words: pseudo inverse, clustering, k-means method, classification, spectrogram, quadratic optimization, formants, linear discrimination, speech recognition.

Вступ

Стаття представляє собою продовження попередньої статті авторів [1]. В ній представлені загальні підходи до розв'язання задачі розпізнавання, детально описані засади математичного апарату гармонійного аналізу, який звичайним чином використовується у аналізі мовних сигналів та підхід до побудови вектору ознак на основі важливих спектральних характеристик мовного сигналу, якими є форманти. Зазначимо, що ґрунт для формування вектору ознак на основі формантних характеристик є спектрограма аналізованого мовного утворення (*wave form* або *wf*), що представляє собою запис електричних коливань з мікрофону, як правило, у цифровому вигляді.

Як зазначено у вступі попередньої статті, задача класифікації мовних сигналів є варіантом загальної задачі групування інформації. Загалом, задача групування інформації: чи у вигляді задачі відновлення функції, представлені своїми значеннями, чи у вигляді задачі кластеризації, класифікації чи розпізнавання образів, представляє важливий клас прикладних задач із широким колом застосування [1-4]. Специфіка мовного сигналу пов'язана з тим, що він породжений складно влаштованим акустичним

мовним трактом, який змінює із часом свою геометричну форму. Основні цілі його обробки визначаються наступними задачами:

1. Стиснення мовного сигналу для передачі в каналі (напр., телефоні) з мінімальною втратою інформативності.
2. Зміни спектру голосу диктора за умови збереження розбірливості його мови.
3. Сегментація мовного сигналу дикторів на виділенні різних промовців (*Speech Recognition*).
4. Декомпозиція розмови дикторів, тобто розшарування сигналів по належності диктору при умові одночасної розмови.
5. Виділення характерних ознак голосу диктора та подальша його ідентифікація.
6. Оцінка емоційного стану голосу диктора.
7. Розпізнавання мови.

Останні 6 задач можна назвати задачами класифікації мовних сигналів, оскільки вони пов'язані із прийняттям рішення про належність сигналу або частини сигналу до певного класу (множини).

При розв'язанні кожної із перерахованих задач виникає проблема, яка пов'язана із вибором вектору ознак, за яким будуть характеризуватися акустичні сигнали. Вибором тих чи інших векторів ознак визначаються у роботі [1].

Важливою задачею у задачі розпізнавання є побудова «представника об'єкта» в математичній моделі розпізнавання, аналіз якого і є основою побудови алгоритму розпізнавання. Загальноприйнято, що таким представником є впорядкований набір – числовий вектор інформативних числових характеристик векторів ознак. Хоча в багатьох задачах, зокрема у представленні аудіо сигналу, таким представником природно вважати матрицю.

Важливим класом задач класифікації та розпізнавання є задача розпізнавання з учителем, коли кожен із класів представлений певним набором «представників» – навчальними вибірками відповідних класів. Алгоритми навчання встановлюють відповідність між входною послідовністю векторів ознак і послідовністю відповідних класів (ім'я диктора, емоційний стан, фонема і т. ін.) За великих об'ємів даних, що підлягають розпізнаванню, важливим є забезпечення належної швидкості розпізнавання. Одним із засобів розв'язання проблеми може вважатися дихотомічна класифікація, за якої кількість кроків з проходження розгалужень може бути близькою до двійкового логарифму загальної кількості об'єктів, що піддаються розпізнаванню. Стандартний недолік нестійкості дихотомії при великих об'ємах навчальних вибірок в рамках задачі кластеризації, коли важко розрізнити групи класів, перевага у швидкості розпізнавання за проходженням відповідного дерева надає їй конкурентних переваг, особливо, якщо комбінувати її з іншими методами, які можуть компенсувати згаданий недолік. Нижче пропонується двокрокова процедура класифікації, в якій дихотомія застосовується на першому кроці за невеликих навчальних вибірок, які формуються за спеціальних вимог відповідності класам. Цей етап дихотомічної кластеризації з метою розпізнавання може бути виконаний одним із стандартних методів, наприклад, k -середніх, що використовується стандартним чином: із евклідовими відстанями, чи модифікованими відстанями відповідності [8,9]. На другому етапі навчальні вибірки дихотомічних класів збільшуються ширшим колом представників. На цьому етапі дискримінація класів здійснюватиметься за допомогою техніки, що є узагальненням варіантом лінійної дискримінації [10]. Узагальнення полягає у модифікації вектора ознак, яке реалізує задачу лінійної дискримінації за нелінійними перетвореннями

ознак, які формують первісний набір ознак, за якими здійснюється розпізнавання. Зауважимо, що процес зміни ознак через нелінійне перетворення первісних є контрольованим, здійснюється рекурентно та конструктивно і переносить на задачі розпізнавання техніку нелінійних рекурентних регресійних перетворювачів [11-12, 16-18] для задачі відновлення функцій, представлених своїми значеннями. Зауважимо також, що як і випадку першого етапу задач групування інформації (як в задачі відновлення функцій), конструктивність розглядів забезпечується застосуванням розвиненої в роботах М.Ф.Кириченка (див., наприклад, основоположну статтю [5]) техніки псевдообернення за Муром-Пенроузом [13, 14].

У даній статті детально описується двокрокова процедура побудова дерева розпізнавання, яка узгоджує еталонне та довільне відтворення мовних сигналів, що піддаються розпізнаванню.

1. Двокрокова процедура класифікації

Дихотомічна класифікація має свої переваги та свої недоліки. До перших відноситься швидкість, до других – певна нестійкість. Використання переваг та зменшення впливу негативних властивостей дихотомічної класифікації пропонується здійснити розбиттям процедури класифікації на два етапи. На першому пропонується застосувати дихотомію на наборі еталонних елементів. Для мовного застосування це означає, що дихотомія застосовується до слів промовлених у спеціальних умовах: за відсутності шумів, кваліфікованим промовцем і т. ін. Саме за такою спеціально сформованою множиною слів і здійснюється побудова дихотомічного дерева класифікації. Така побудова може здійснюватися за одним із стандартних алгоритмів кластеризації із звичайною чи спеціально побудованою відстанню відповідності. На практиці часто використовують алгоритм кластеризації k -середніх, в якому формується деяка цільова функція $\Phi(\cdot)$, яка виражає якість поточного розбиття множини точок $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ на K кластерів із центрами в точках c_i , $i = \overline{1, K}$, K -задане. В початковий момент центри кластерів вибираються довільним чином, далі для кожної точки множини ітеративно визначаємо її приналежність до одного із K кластерів і

обчислюємо нові значення $\Phi(\cdot)$ для центрів кластерів, намагаючись при цьому мінімізувати функцію $\Phi(\cdot)$. В літературі можна знайти різні модифікації цього методу.

Нижче у статті робота алгоритму ілюструється використанням методу k -середніх ($k=2$). На другому етапі використовується варіант лінійної дискримінації [5], реалізований засобами псевдообернення, з можливим нелінійним перетворенням координат вектору ознак для дискримінації навчальних вибірок, сформованих за кожним із слів, включенням у відповідний клас m -слів, промовлених в різних умовах: різними промовцями, за іншого рівня шумів і т. ін. У цьому варіанті, як це зазначено у цитованій вище статті, задача лінійної дискримінації зводиться до задачі квадратичної оптимізації у певній області.

Для задач розпізнавання приналежності досліджуваних об'єктів до того чи іншого класу будемо вважати відомим до якого із класів відносяться вектори навчальної вибірки $x(j)$, $j=\overline{1, n}$ в просторі ознак. Тоді необхідно розглянути наступні постановки задач:

□ визначити необхідні і достатні умови лінійної віддільності скінченної множини точок в багатовимірному просторі;

□ визначити необхідні і достатні умови лінійної смугової віддільності точок $x(j)$, $j=\overline{1, n}$ на два класи;

□ визначити оптимальну по товщині нелінійну смугу роздільності точок $x(j)$, $j=\overline{1, n}$ на два класи;

□ впорядкувати координати $x_i(j)$, $i=\overline{1, m-1}$, $j=\overline{1, n}$, $x_m(j)=1$ згідно їх впливу або на розміри (товщину) лінійної оптимальної смуги або на критерій лінійної смугової віддільності;

□ сформулювати правила заміни слабо впливаючих (неінформативних) координат вектора ознак на більш інформативні із множини конкуруючих ознак;

□ для вибраних згідно прикладної доцільності класів нелінійних перетворень запропонувати засоби визначення оптимального як самого нелінійного перетворення з обраного класу деякої координати $x_i(j)$, так й індексу i цієї координати;

□ згенерувати суперпозицію оптимальних перетворень координат вектора ознак з метою досягнення умов оптимальної смугової роздільності точок в новому просторі ознак.

Формулюючи задачу лінійної дискримінації у згаданому вище вигляді, нижче будемо слідувати роботі [5].

2. Лінійна дискримінація, як задача квадратичної оптимізації

За лінійної функції: задача класифікації полягає у визначенні коефіцієнтів a_i , $i=\overline{1, m}$, лінійного перетворення a^T , $\Delta > 0$ та $y = (y(1), \dots, y(n))^T \in \Omega_*(\Delta) \subseteq R^n$ таким чином, щоб

$$a^T x(j) = y(j) \geq \Delta, j \in J_1 \quad (1)$$

$$a^T x(j) = y(j) \leq -\Delta, j \in J_2 \quad (2)$$

$$J_1 \cup J_2 = \{1, \dots, n\},$$

$$J_1 \cap J_2 = \emptyset.$$

Параметр $\Delta > 0$ забезпечує робастність поділу на два кластери. Множину векторів $y \in R^n : y^T = (y(1), \dots, y(n))$, $y(j) \geq \Delta$, $j \in J_1$, $y(j) \leq -\Delta$, $j \in J_2$ позначатимемо в подальшому $\Omega_\Delta(y)$.

Якщо для обраного варіанту простору задача лінійної дискримінації не є розв'язною треба змінювати простір ознак і в роботі [5] реалізована концепція зміни векторів ознак нелінійними їх перетвореннями в ході виконання певної «контрольованої» рекурентної процедури. Детальніше з відповідним підходом можна ознайомитися в самій цитованій роботі.

Подання складових задач в матричному вигляді: стовпчиковому

$$X = (x(1) : \dots : x(n)) \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \dots \\ x_{(n)}^T \end{pmatrix}$$

та рядковому:

$$X = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \dots \\ x_{(n)}^T \end{pmatrix}, x_{(i)} \in R^n, i=\overline{1, m},$$

перетворює задачу лінійної дискримінації на задачу пошуку вектору $a \in R^n$, константи $\Delta > 0$ та $y = (y(1), \dots, y(n))^T \in \Omega_*(\Delta) \subseteq R^n$ таким чином, щоб:

$$a^T X = y^T : y \in \Omega_*(\Delta) \subseteq R^n, \Delta > 0. \quad (3)$$

Транспонування у векторній рівності з матрицею X в (3) зводить задачу лінійної

дискримінації у вигляді (3) до дослідження СЛАР $X^T a = u$ на розв'язність щодо $a \in R^m$, з якимось із значень правої частини, яка може вибиратися з множини $\Omega_y(\Delta) : u \in \Omega_y(\Delta)$

$$X^T a = u, u \in \Omega_y(\Delta) \subseteq R^n : \Delta > 0. \quad (4)$$

Зауваження. Задача (4), є задачею дослідження СЛАР $X^T a = u$ на її розв'язність в множині $\Omega_y(\Delta), \Delta > 0$ можливих значень правої частини.

Застосування теорії псевдообернення до дослідження розв'язності СЛАР $X^T a = u$ (див., наприклад, [5]) дозволяє стверджувати, що вона є розв'язною за a тоді і тільки тоді, коли виконується умова $y^T Z(X) y = 0$, в якій $Z(X)$, нагадаймо, є ортогональним проектором, що визначається у відповідності до співвідношення $Z(X) = I_n - X^* X$, I_n – одинична матриця $n \times n$, X^* – псевдообернена для матриці X .

Теорема 1. Задача (4) є еквівалентною задачі квадратичної оптимізації з мінімізації в області $\Omega_y(\Delta)$ симетричної, невід'ємно визначеної квадратичної форми з матрицею $Z(X)$ з наступною перевіркою умови рівності нулю мінімального значення.

Доведення. Дійсно, за невід'ємної визначеності матриці квадратичної форми її значення зростають за збільшення норми аргументу, коли його компоненти стають досить великими. Отже, мінімум міститься в обмеженій області $\Omega_y^M(\Delta) \subset \Omega_y(\Delta), M > 0$, яка отримується з $\Omega_y(\Delta)$ обмеженням значенням максимального значення модуля кожної з координат значенням M . За неперервності досліджуваної квадратичної форми, її мінімум на $\Omega_y^M(\Delta)$ досягається в певній точці $y_* \in \Omega_y^M(\Delta) \subset \Omega_y(\Delta)$, яка і є точкою мінімуму і для всієї області:

$$y_* = \arg \min_{\Omega_y^M(\Delta)} y^T Z(X) y = \arg \min_{\Omega_y(\Delta)} y^T Z(X) y. \quad (5)$$

Якщо

$$y_*^T Z(X) y_* = 0,$$

то для точки мінімуму $y_* : y_* \in \Omega_y(\Delta)$ виконується умови розв'язності СЛАР в задачі лінійної дискримінації (4), а, отже дискримінантна лінійна форма a^T задачі визначається як:

$$a = X^* y_*. \quad (6)$$

Якщо ж умова розв'язності для точки мінімуму $y_* \in \Omega_y(\Delta)$ не виконується:

$$y_*^T Z(X) y_* = \delta > 0,$$

то вона не виконується і для всіх $y \in \Omega_y(\Delta)$, оскільки, очевидним чином,

$$\forall y \in \Omega_y(\Delta) \quad y^T Z(X) y \geq y_*^T Z(X) y_* = \delta > 0.$$

Останнє міркування і завершує доведення теореми.

3. Реалізація двокрокової процедури класифікації мовних сигналів

Робота, описаної вище, двокрокової процедури класифікації, яка має загальний характер, реалізована в рамках розв'язку задачі класифікації мовних сигналів. Вхідною інформацією процедури є вектори ознак, побудовані за формантними характеристиками відповідних w_f , формування яких детально описано в попередній статті авторів [1]. Загальна схема формування дерева ознак представлена на Рис. 1.



Рис. 1. Загальна схема побудови дерева ознак.

Алгоритм складається з двох частин. Перша реалізує побудову дерева дихотомічної класифікації еталонних мовних сигналів за тим чи іншим варіантом кластеризації. Для ілюстрації цього етапу в реалізації, представлений у статті, використаний алгоритм k -середніх ($k = 2$).

Виходом цього етапу є дерево класифікації еталонних сигналів.

На другому етапі реалізації алгоритму формується множина навчальних вибірок класів першого етапу відповідних рівнів за векторами ознак нееталонних мовних сигналів та застосовується процедура дискримінації класів відповідного рівня за оптимізаційною процедурою теореми 1.

Описаний вище алгоритм реалізований в середовищі MatLab R2010b.

4. Експериментальні дослідження

В рамках експериментальних досліджень описаного в попередньому пункті алгоритму двокрокової класифікації піддавалися множина слів загальною кількістю 64. Застосування першого кроку двокрокової процедури за методом k -середніх ($k=2$) дало дерево, яке представлено на рис. 2.

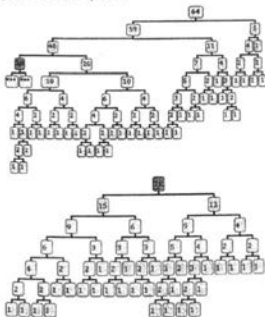


Рис. 2. Розбиття множини векторів ознак на класи методом k -середніх ($k=2$)

Другий крок процедури полягає у побудові гіперплощини (пошуку вектору $a \in R^n$, $n=2$), яка б розмежувала, наприклад, дві множини векторів ознак двох слів, промовлених в однакових умовах з приблизно однаковою інтонацією одним промовцем по 10 разів. Отже, отримаємо множину векторів ознак $X \in R^{20 \times 40}$. Після розв'язання задачі квадратичної мінімізації (5)

отримаємо точку мінімуму $y_0 \in R^{20}$. Підставимо її у формулу (6) і отримаємо дискримінантну лінійну форму $a^T \in R^{40}$:

$$a^T = 1.0e+13 \cdot$$

-0.1064	7.4119	3.5948	-3.1626
7.3681	-4.0884	-2.0709	-0.0566
-7.2759	2.4352	-1.5135	0.6580
-0.6661	0.5342	-3.6777	1.0379
-1.0552	0.9414	1.9385	1.4864
5.2733	2.1349	0.0816	1.3388
-0.8650	-3.3719	-5.0205	-5.3598
3.1872	-1.0806	-2.3997	-2.1219
-3.1476	1.4491	0.3518	2.5511
-1.0864	-0.1121	-1.8603	4.1146

Загалом, використання дерева класифікації для розпізнавання заново промовленого слова за гістограмним вектором ознак, навіть за виконанням тільки одного кроку, продемонструвало його високу ефективність.

Висновки

В роботі, що є другою частиною з двох публікацій (див. попередню [1]), представлена концепція двокрокової процедури класифікації, одною із складових якої є дихотомія та побудова дерева класифікації за еталонними об'єктами, а другим – є дискримінація розширених навчальних вибірок класів, побудованих за дихотомічним розбиттям набору еталонних об'єктів першого етапу процедури. Застосування запропонованої двокрокової процедури ілюструється на задачі розпізнавання слів для мовних сигналів. За такої предметної реалізації процедури об'єктом аналізу є вектори ознак сигналів, побудовані за формантним характеристиками аналізованих об'єктів. Обґрунтування використання векторів ознак на основі формантних характеристик та спосіб їхньої побудови детально описані в попередній статті авторів [1]. В роботі звернута увага на варіант узагальнення «векторів ознак» до представлення сигналу матрицею в рамках математичної моделі на основі гармонійного аналізу. Таким узагальненням представником об'єкту у випадку мовних сигналів може бути спектрограма в цілому. Можливості використання таких узагальнених представників об'єктів у вигляді матриць визначатиметься наявністю адекватного математичного апарату, який би відповідав техніці псевдообертання за Муром-Пенроузом для векторів ознак (див. наприклад, [7]).

Запропоновані підходи реалізовано в середовищі Matlab R2010b.

Список використаних джерел

- Донченко В.С. Побудова векторів ознак на основі виділення формант для класифікації мовних сигналів / В.С. Донченко, Т.П. Зінко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. –К. –2011. –с. 134–142.
- Vapnik V.N. Statistical Learning Theory / Vapnik V.N. –New York: Wiley, 1998.
- Simon Haykin. Neural Networks. A Comprehensive Foundation / Simon Haykin. – Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458. 1999. –842 p.
- Ивахненко А.Г. Самоорганизующиеся системы распознавания и автоматического управления / Ивахненко А.Г. – К.: Техника, 1969. –395 с.
- Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц / Кириченко Н.Ф. // Кибернетика и системный анализ. –К. –1997. –№2. –С.98–107.
- Кириченко Н.Ф. Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации / Н.Ф. Кириченко, Н.П. Лепеха // Кибернетика и системный анализ. –К. –2002. – №4. –С. 107–124.
- Донченко В.С. Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструктивные методы описания базовых структур и их использование / Донченко В.С. // International Journal "Information technologies & Knowledge. –2011. –Vol. 5, №3. –P. 203–216.
- Кириченко Н.Ф. Псевдообращение в задачах кластеризации / Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко // Кибернетика и системный анализ. –2007. –№4. –С. 98–122.
- Кириченко Н.Ф. Гиперплоскости в «множествах и расстояниях соответствия»: кластеризация / Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко // Artificial Intelligence and Decision Making. –International book series "INFORMATION SCIENCE&COMPUTING". –Sofia. –2008. №7. –P. 25–36.
- Кириченко Н.Ф. Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации / Н.Ф. Кириченко, Ю.Г. Кривонос, Н.П. Лепеха // Кибернетика и системный анализ. –2007. – №3. –С. 47–57.
- Кириченко Н. Ф. Псевдообратные и проекционные матрицы в задачах синтеза функциональных преобразователей / Н.Ф. Кириченко, Ю.В. Крак, А.А. Полищук // Кибернетика и системный анализ. –2004. – №3. –С. 116–129.
- Кириченко Н.Ф. Нелинейные рекурсивные регрессионные преобразователи: динамические системы и оптимизация / Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко, Д.П. Сербаев // Кибернетика и системный анализ. –2005. – №3. –С. 58–68.
- Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix / Moore E.H. // Bulletin of the American Mathematical Society. –1920. –P. 394–395.
- Penrose R. A generalized inverse for matrices / Penrose R. // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. –1955. –P. 406–413.
- Алберт А. Перспекция, псевдоинверсия, рекуррентные оценивания; [пер. з англ.]. –М.: Наука, –1977. –305 с.
- Donchenko V.S. Recursive regression transformation and dynamical systems / V.S. Donchenko, M.F. Kirichenko, D.P. Serbaev // Proceedings of the Seventh International Conference "Computer Data analysis and Modeling: robustness and computer intensive methods". –September 6-10. –Minsk, –2004. –Vol. 1. –P. 147–151.
- Донченко В.С. Представление нейронных сетей динамическими системами / В.С. Донченко, Д.П. Сербаев // Proceedings of the XI-th International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution". –June 20-30. –Varna, 2005. –Vol. 2. –P. 605–608.
- Donchenko V. Generalizing of neural nets: Functional nets of special type / V. Donchenko, M. Kirichenko, Yu. Krivonos // International Journal Information Theories and Applications. –2007. –№3. –Vol.14. –P. 259–266.
- Донченко В. Базовые структуры евклидовых пространств: конструктивные методы описания и использования / В. Донченко, Ю. Кривонос, В. Омардибиров // New Trends in Classification and Data Mining. –ITHEA, Sofia, Bulgaria. –2010. –P. 155–170.
- Аграновский А.В. Теоретические аспекты алгоритмов обработки и классификации речевых сигналов / А.В. Аграновский, Д.А. Леднов // –М.: Изд-во "Радио и связь", –2004. –164 с.

Надійшла до редколегії 28.12.11

УДК 004.075

Дорошенко А.Ю., д.ф.-м.н., проф.,
Акуловський В.Г., к.т.н., доц.

Вихідне проектування алгоритмів при алгебраалгоритмічному підході

Показана можливість реалізації елементів стратегії вихідного проектування алгоритмів шляхом побудови похідних алгоритмічних конструкцій у рамках алгебри алгоритмів з даними.

Ключові слова: алгебра, алгоритми, проектування алгоритмів

e-mail: dor@isofts.kiev.ua, valeryakulovskiy@rambler.ru

Статтю представив: д.ф.-м.н. проф. Буй Д.Б.

Вступ

Важливість ролі, яку дані грають в програмуванні, досить давно усвідомлена програмістською спільнотою [1]. Більше того, в публікації [2] стверджується, що інформація про дані для розуміння програм важливіше, ніж інформація про управління. Таким чином, в описі алгоритму разом з описом потоків управління мають бути відображені і дані.

Тут доречно привести наступну цитату.

"Стало ясно, що рішення про структуру даних не можна приймати без знання алгоритмів, що застосовуються до цих даних, і навпаки, структура і вибір алгоритмів істотним чином залежать від структури даних. Коротше кажучи, побудова програм і структури даних нерозривно пов'язані" [3 стор., 8].

З наведеної цитати випливає, що опис потоків управління і даних має здійснюватись узгоджено (комплексно).

При цьому роль даних і їх вплив на процес проектування алгоритмів у рамках відомих алгебричних формалізмів вивчені і використовуються далеко недостатньо, а для реалізації такого впливу на процес проектування алгоритмів необхідно було перш за все "імплантувати" дані у формальний апарат. На наявність такої можливості було вказано ще у роботі [4], з якої відомо, що потенціал моделі ЕОМ Глушкова використаний далеко не

UDC 004.075

Doroshenko A., Dr. Sc., Prof.
Akulovskiy V., Ph.D., Ass. Prof.

The bottom-up design of algorithms at algebra-algorithmic approach

The elements of strategy of bottom-up design of algorithms are shown by the construction of derivative algorithmic constructions within the framework of algebra of algorithms with data.

Keywords: algebra, algorithms, design of algorithms

повністю, і при деяких додаткових припущеннях вона може трактуватися по-різному.

В результаті модифікації моделі ЕОМ авторами цієї статті була запропонована алгебра алгоритмів з даними (система алгоритмічної алгебри (САА/Д)), що є двоосновною алгебричною системою $\langle U, L, \Omega \rangle$, основами якої є множина Д-операторів U і множина логічних умов L , а її сигнатура $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ складається з логічних операцій Ω_1 , що набувають значень на множині L , і множини операцій Ω_2 , що набувають значень на множині Д-операторів U [5]. У рамках цього формального апарату для опису алгоритмів використовуються Д-оператори, тобто оператори виду $(D)\lambda(I)$, на вході і виході яких специфіковані оброблювані дані. Використання Д-операторів забезпечує можливість формалізованого опису потоків управління спільно з оброблюваними даними.

Функцією алгебри є опис алгоритмів, тому можливість реалізації різних стратегій проектування є однією з істотних вимог до її формального апарату. Ця робота присвячена реалізації, у рамках запропонованого формального апарату, стратегії вихідного проектування алгоритмів.

Суть стратегії полягає в тому, щоб в результаті об'єднання початкових алгоритмічних

конструкцій отримувати загальніші випадки таких конструкцій, які на більш високому рівні опису алгоритму дозволять абстрагуватися від деякої частини даних і функціональності. При цьому має бути забезпечена еквівалентність початкових і похідних конструкцій з точки зору обробки даних. В даному випадку як початкові і похідні алгоритмічні конструкції розглядаються Д-оператори.

Опис алгебри в обсязі, необхідному для розуміння отриманих результатів, приведений у розділі 1.

1. Алгебра алгоритмів з даними

Модифікована модель ЕОМ, що являє собою (аналогічно відомій моделі ЕОМ Глушкова) два взаємодіючі автомати – управляючий (У) і операційний (О) – доповнена зовнішнім середовищем (ЗС) (рис. 1).

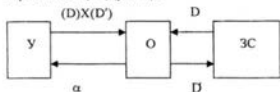


Рис. 1. Модифікована модель ЕОМ

Зовнішнє середовище (пам'ять, зовнішні пристрої) – це множина носіїв (джерел і/або приймачів) даних, які визначені таким чином.

Визначення 1. Даними будемо називати впорядковану пару $D = \langle N_A, K \rangle$, де N_A – носій даних, розташованих за адресами $A_j \in A$, A – множина адрес, $K = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – кортеж значень, що зберігається носієм даних і змінюється в процесі виконання алгоритму. Стан даних визначається поточним кортежем значень.

Виходячи з визначення, вважатимемо, що зовнішнє середовище – це множина даних $D^C = \{D_1, \dots, D_n\}$, що характеризується в кожен момент часу деяким набором значень, який, змінюючись в ході обчислювального процесу, визначає її поточний стан.

Модель функціонує наступним чином.

Операційний автомат (О) має внутрішні дані, носії яких не мають адреси. Це регістрові дані $D' = \langle N', K' \rangle$ і логічна умова $\alpha = \langle n^o, z \rangle$, при цьому $D' \notin D^C$ і $\{\alpha\} \notin D^C$. Множина станів ЗС, регістрових даних і логічної умови визначає стан

операційного автомата і називається інформаційною.

Д-оператори є управляючими діями, що послідовно подаються автоматом У на вхід автомата О, стан якого змінюється в результаті їх виконання.

Регістрові дані зберігаються операційним автоматом до надходження наступного Д-оператора і тільки до цього моменту. Після виконання цього (наступного) Д-оператора регістрові дані втрачаються.

Логічна умова, що характеризує стан деяких елементів ЗС і/або регістрових даних, коли вона отримана в результаті виконання Д-оператора, передається з виходу операційного автомата на вхід управляючого, замикаючи зворотний зв'язок між цими автоматами, після чого логічна умова втрачається. Автомат, що управляє, відповідно до значення отриманої логічної умови, подає на вхід автомата О один з декількох можливих Д-операторів, який стає наступним в кортежі Д-операторів, що надходять з виходу автомата У.

Функціонування моделі носить дискретний характер, де на кожному кроці цього процесу є виконання наступного Д-оператора. Між завершенням виконання попереднього і початком виконання наступного Д-оператора ніякі дії моделлю не виконуються. Такий покроковий процес функціонування моделі триває до його завершення або може тривати невизначено довго.

На основі цієї моделі побудовано алгебричний апарат, для якого принципово важливим є поняття стану обчислювального процесу, заснованого на визначенні 1.

Визначення 2. Поточним станом обчислювального процесу (ОП) на i -ому кроці його виконання називатимемо множину даних $D_i^t = D_i^{Ct} \cup D_i^{Rt} \cup \{\alpha_i\}$ таку, що $D_i^{Ct} \cap D_i^{Rt} \cap \{\alpha_i\} = \emptyset$, де D_i^{Ct} – поточний стан зовнішнього середовища (статична складова стану), D_i^{Rt} – поточний стан регістрових даних і α_i – логічна умова (динамічна складова стану). Статична складова стану обчислювального процесу має місце на кожному його кроці, тобто для $\forall i$ $D_i^t \supseteq D_i^{Ct} \neq \emptyset$. Динамічна складова визначена тільки після деяких кроків обчислювального процесу, тобто, $\exists i$, де $D_i^{Rt} \neq \emptyset$ і $\exists j$, де $\{\alpha_j\}$ не пусто.

Загальний випадок Д-оператора розглядається таким чином.

Визначення 3. Д-оператор $(D)X(D)$ змінює стан ОП, переводячи його з будь-якого початкового стану D^i в результуючий стан D_{i+1}^j . Стан ОП змінюється в результаті обробки Д-оператором $(D)X(D)$ даних $D \subseteq D^i$, специфікованих на його вході, і продукування даних $D \subseteq D_{i+1}^j$, специфікованих на його виході. При цьому стан ЗС змінюється, якщо $D \subseteq D_{i+1}^j \subseteq D_{i+1}^k$. Інакше продукується динамічна складова ОП ($D = D^i$ або $D^i = \{\alpha\}$). Для D_i^k в першому випадку виконується $(D_i^k \setminus D) \subseteq D_{i+1}^k$, в другому – $D_{i+1}^k \subseteq D_i^k$. Для D_{i+1}^k в першому випадку виконується $(D_{i+1}^k \setminus D) \subseteq D_i^k$, в другому – $D_{i+1}^k \subseteq D_i^k$.

Нарешті розглянемо однієї із сигнатури алгебри операцію, яку використовуватимемо в даному випадку.

Композиції Д-операторів (позначається $**$) $(D_1)X_1(D_1') * (D_2)X_2(D_2')$ означає послідовне виконання спочатку Д-оператора $(D_1)X_1(D_1')$, потім Д-оператора $(D_2)X_2(D_2')$.

На основі приведених елементів САА/Д вирішуватимемо поставлену задачу.

1.2. Похідні Д-оператори

Розглянемо можливість отримання похідних Д-операторів в результаті об'єднання Д-операторів, пов'язаних операцією композиції. Для цього приведемо її властивості і розглянемо особливості.

Твердження 1. В результаті виконання композиції Д-операторів $(D_1)X_1(D_1') * (D_2)X_2(D_2')$ ОП послідовно переходить з деякого початкового стану D^i в стани D_{i+1}^j і D_{i+2}^k , для яких виконується $D_1 \subseteq D^i$, $D_2 \subseteq D_{i+1}^j$ і $D_2 \subseteq D_{i+2}^k$.

Доведення очевидне і випливає з визначення 3 і опису моделі ЕОМ, з якої відомо, що в проміжку між виконанням Д-операторів дані не змінюються.

Принципово важливою особливістю, яку необхідно врахувати при розгляді композиції Д-операторів, є те, що результат її виконання є сукупним результатом виконання двох Д-операторів, що входять в нього. І цей результат обумовлений взаємодією між Д-операторами, що входять в цю композицію.

Розглянемо наступні аспекти такої взаємодії.

По-перше, обробка даних, почата Д-оператором, який є в композиції першим, може бути продовжена другим Д-оператором. По-

друге, кожен з них в загальному випадку обробляє і продукує деяку підмножину даних, які на функціонування іншого Д-оператора не впливають. У зв'язку з цим, розглядаючи дані на виході першого і вході другого Д-операторів, визначимо наступні поняття.

Визначення 4. Д-оператори в композиції $(D_1)X_1(D_1') * (D_2)X_2(D_2')$ назвемо інформаційно пов'язаними (надалі пов'язаними), якщо для специфікованих у них даних виконується співвідношення $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ і незв'язаними, якщо $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Дані $D^i = D_1 \cap D_2$ називатимемо зв'язувальними. Множини незв'язувальних даних $D_1^b = D_1$, $D_2^b = D_2 \setminus D^i$, $D_1^b = D_1 \setminus D^i$ таких, що $D_1^b, D_2^b, D^b \subseteq D^k$ і на значення, що приймаються кожним з них, інший Д-оператор не впливає, називатимемо власними.

З визначення випливає, що регістрові дані і логічні умови до власних даних не належать.

Відмітимо так само, що D_1 , не будучи зв'язувальними даними, не є так само і власними, оскільки на значення, що приймаються цими даними, Д-оператор X_2 впливає за допомогою зв'язувальних даних.

Для побудови похідного Д-оператора введемо наступне нове поняття.

Визначення 5. В композиції Д-операторів $(D_1)X_1(D_1') * (D_2)X_2(D_2')$ дані $D_{i+1}^j \subseteq D_{i+1}^k$, що продукуються першим Д-оператором, але не специфіковані на його виході $D_1' \not\subseteq D_1$, і оброблювані другим Д-оператором, але не специфіковані на його вході $D_2' \not\subseteq D_2$, називатимемо неспостережуваними.

Для перетворення композиції в похідний Д-оператор визначимо її еквівалентність.

Визначення 6. Д-оператор $(D)X(D)$, що переводить ОП із стану D^i в стан D_{i+1}^j , еквівалентний композиції Д-операторів $(D_1)X_1(D_1') * (D_2)X_2(D_2')$, що переводить ОП із стану D^i в стан D_{i+2}^k , якщо при рівності початкових станів ОП $D^i = D^j$ в результаті їх виконання будуть отримані результуючі стани $D_{i+1}^j = D_{i+2}^k$.

Доведемо, що композиції Д-операторів може бути перетворена в новий Д-оператор.

Теорема. З композиції Д-операторів $(D_1)X_1(D_1') * (D_2)X_2(D_2')$ буде отриманий

еквівалентний цій композиції Д-оператор $(D)\mathfrak{A}(D')$ за умови, що на його вході і виході специфіковані $D = D_1 \cup D_2^B$ і $D' = D_1^B \cup D_2$.

Доведення. У композиції Д-операторів, відповідно до твердження 1 і визначення 4 $D_1^B \subseteq D_1$, $(D_1^B \cup D_2^B \cup D') \subseteq D_{n+1}$, $D_2 \subseteq D_{n+2}$.

Подальші міркування засновані на визначеннях 3 - 5.

Д-оператор X_1 не впливає на власні дані D_1^B , а Д-оператор X_2 – на власні дані D_1^B . Внаслідок чого для цих даних, не діялихся на те, що D_1^B не специфіковані на вході першого Д-оператора $D_1^B \not\subseteq D_1$, а D_1^B не специфіковані на виході другого Д-оператора $D_1^B \not\subseteq D_2$, для них виконується $D_1^B \subseteq D_1$ і $D_1^B \subseteq D_{n+2}$, тобто ці дані у відповідних станах ОП – неспостережувані.

Перемістимо власні входні D_1^B і вихідні D_1^B дані, відповідно, на вхід першого і вихід другого Д-операторів. Внаслідок чого отримаємо композицію Д-операторів у виді $(D_1^B \cup D_2^B)X_1(D_1^B) * (D_1^B)X_2(D_2 \cup D_1^B)$, де $D_1^B \cup D_2^B \subseteq D_1$, $D_1^B \subseteq D_{n+1}$ і $D_1^B \cup D_2 \subseteq D_{n+2}$.

При цьому початкове D_1 і результуючі D_{n+2} стани обчислювального процесу не змінилися, оскільки в результаті переміщення ми специфікували дані, які вже мали місце в цих станах, але не були специфіковані (були неспостережуваними).

Оскільки функції Д-оператора X_1 не змінилися, то, незважаючи на наявність специфікацій власних даних D_1^B , він, обробляючи дані D_1^B і, залишаючи D_1^B без змін, продукує дані $D_1 = (D_1^B \cup D_1^B)$. Але множина власних даних $D_1^B \subseteq D_1$, що не змінилася в результаті виконання Д-оператора X_1 , в незмінному вигляді збереглася в стані D_{n+1} . Таким чином, Д-оператор X_2 отримав для обробки незмінний стан ОП $D_{n+1} = (D_1^B \cup D_2^B \cup D_1^B)$. Функції Д-оператора X_2 так само не змінилися. Тому він обробляє множину даних $D_2^B \cup D_1^B$, залишаючи D_1^B без змін. В результаті виконання X_2 продукується множина даних D_2 , але оскільки D_1^B не змінилося, отримаємо $D_{n+2} \subseteq (D_1^B \cup D_2)$.

Таким чином, перетворена композиція Д-операторів при незмінних станах D_1 і D_{n+1} і

незмінній функціональності Д-операторів продукує стан ОП D_{n+2} , отриманий для перетвореної композиції Д-операторів, який співпадає з таким же станом, отриманим в результаті виконання початкової композиції.

Перемістивши зв'язуючі дані в розряд неспостережуваних (неспецифікованих) і враховуючи, що не специфіковані в стані D_{n+1} дані D_1^B і D_2^B є неспостережуваними за побудовою, отримаємо співвідношення $(D_1 \cup D_2^B)X_1(\emptyset) * (\emptyset)X_2(D_2 \cup D_1^B)$, де $(D_1^B \cup D_2^B \cup D_1^B) = D' \subseteq D_{n+1}$. В стані D_{n+1} специфіковані дані відсутні, а неспостережувані дані обробляються. У зв'язку з відсутністю специфікованих даних, виключимо стан ОП D_{n+1} з розгляду, а композицію $X_1(\emptyset) * (\emptyset)X_2$ позначимо $\mathfrak{A}$. В результаті отримано похідний Д-оператор, еквівалентний, за визначенням 6, початковій композиції Д-операторів $(D_1 \cup D_2^B)\mathfrak{A}(D_2 \cup D_1^B) = (D_1)X_1(D_1^B) * (D_2)X_2(D_2)$.

Теорема доведена.

Наслідок 1. В результаті об'єднання Д-операторів, пов'язаних операцією композиції, отримаємо похідний Д-оператор, функціональність якого вища, ніж у будь-якого з початкових Д-операторів, а зв'язувальні дані стають неспостережуваними, тобто ці дані і функціональність, спрямована на їх обробку, інкапсулюються в похідному Д-операторі.

Наслідок 2. Похідний Д-оператор у разі, коли Д-оператори в композиції не пов'язані, має такий склад специфікованих даних $(D_1 \cup D_2)\mathfrak{A}(D_2 \cup D_1)$, а неспостережувані дані відсутні.

Таким чином, можливість побудови похідних Д-операторів доведена для загального випадку. Проте слід звернути увагу на те, що, незважаючи на відсутність у визначенні обмежень на композиції Д-операторів, вони все ж мають місце. Для того, щоб розглянути обмеження на використання операції композиції покажемо наявність деяких властивостей Д-операторів у цій операції. Виходячи з визначення загального випадку Д-операторів, введемо базовий набір Д-операторів.

Визначення 7. Базовий набір включає наступні Д-оператори:

- $(D)X(D)$, що змінює стан $3C(D) \subseteq D^X$, а на динамічну складову ОП не впливає;

- $(D\alpha)(D^j)$, що продукує динамічні дані $D^d \neq \emptyset$ ($D \subseteq D^{\infty}$, $\{a\}$ пуста), а на статичну складову ОП не впливає ($D_j^{\infty} = D_{n+1}^{\infty}$);

- $(D^*)P(\alpha)$, який надалі називатимемо предикатом, аналізуючи відношення $D^* \subseteq D^{\infty}$ (у загальному випадку n -арне) на множинах D або D^d ; продукує логічну умову α , а на статичну складову ОП не впливає ($D_j^{\infty} = D_{n+1}^{\infty}$).

З визначення випливає, що в результаті виконання Д-оператора $(D)X(D)$ ОП переходить в один з трьох можливих станів: $\tilde{D}_{n+1}^d = D_{n+1}^{\infty}$, $\tilde{D}_{n+1}^d = D_{n+1}^{\infty} \cup D_{n+1}^d$, $\tilde{D}_{n+1}^d = D_{n+1}^{\infty} \cup \{\alpha_{n+1}\}$ таких, що в першому випадку змінюється стан ЗС, в другому і третьому, при збереженні її стану, продукуються, відповідно, регістрові дані $\tilde{D}_{n+1}^d \subset D_{n+1}^d$ і логічна умова $\{\alpha_{n+1}\} \subset \tilde{D}_{n+1}^d$.

Динамічна складову ОП має наступні властивості.

Твердження 2. Регістрові дані або логічна умова, отримані в стані $\tilde{D}_{n+1}^d$ ($D_{n+1}^d \subset \tilde{D}_{n+1}^d$ або $\{\alpha_{n+1}\} \subset \tilde{D}_{n+1}^d$), в який обчислювальний процес перейде після виконання Д-оператора $(D)X(D^d)$ або $(D^*)P(\alpha)$, є результатом виконання тільки цього Д-оператора і ніякі інші динамічні дані або логічна умова в стані $\tilde{D}_{n+1}^d$ не визначені (не існують). Динамічні дані і логічні умови, отримані в стані $\tilde{D}_{n+1}^d$, не визначені (втрачаються) в усіх інших станах, тобто для будь-якого $\tilde{D}_j^d$, при $j < p$ і $j < k$, виконується $\tilde{D}_j^d = \emptyset$ і $\{\alpha_j\}$ пуста.

Доведення елементарне і випливає з опису моделі ЕОМ і визначення 2. Враховуючи твердження 2, в подальшому викладі опускатимемо нижній індекс, записуючи регістрові дані і логічні умови у виді D^d і α . Для доказу наявності двох наступних властивостей введемо поняття тотожного Д-оператора.

Визначення 8. Д-оператор $(D)X(D)$ називатимемо тотожним і позначати Z , якщо в результаті його виконання виконується співвідношення $\tilde{D}^d = D^d$.

Наявність наступних властивостей доведемо за допомогою наступних тверджень.

Твердження 3. Операція композиції має наступну властивість $(D)X(D^*) \circ Z = Z \circ (D)X(D^*) = (D)X(D^*)$.

Доведення легко побачити з визначення операції, визначення 8 і тверджень 1, 2.

Твердження 4. Якщо регістрові дані і логічні умови, отримані в результаті виконання Д-операторів $(D)O(D^d)$ і $(D^*)P(\alpha)$, не обробляються (не використовуються), то ці Д-оператори тотожні $(D)X(D^d) = Z$ і $(D^*)P(\alpha) = Z$.

Доведення. В результаті виконання Д-операторів $(D)O(D^d)$ і $(D^*)P(\alpha)$ обчислювальний процес, у відповідності з визначенням 7, перейде із стану $\tilde{D}_j^d$ в стан $\tilde{D}_{n+1}^d$ такий, що $\tilde{D}_j^d \neq \tilde{D}_{n+1}^d$, але $\tilde{D}_j^d = \tilde{D}_{n+1}^d$. Якщо регістрові дані D^d або логічна умова α в одержаному стані $\tilde{D}_{n+1}^d$ ($D^d \subset \tilde{D}_{n+1}^d$ або $\{\alpha\} \subset \tilde{D}_{n+1}^d$) не використовуються (не обробляються), то їх наявність не впливає на хід обчислювального процесу як в стані $\tilde{D}_{n+1}^d$ (за умовою твердження), так і у всіх наступних станах у відповідності з твердженням 2. Такий стан речей дозволяє трактувати стан $\tilde{D}_{n+1}^d$ як $\tilde{D}_{n+1}^d = \tilde{D}_j^d$, звідки, згідно з визначенням 8, випливає $(D)X(D^d) = Z$ і $(D^*)P(\alpha) = Z$.

Твердження доведено.

На основі одержаних властивостей покажемо обмеження на використання операції композиції, виключивши з розгляду композицію предикатів.

Твердження 5. У композиції Д-оператора предикат $(D^*)P(\alpha)$ може йти тільки другим, а Д-оператор $(D)O(D^d)$ може розташовуватися першим тільки за умови, що за ним йде предикат такий, що $D^d \subseteq D^*$.

Доведення. Оскільки в композиції виду $(D^*)P(\alpha) \circ (D_1)X_1(D_1^d)$ логічна умова α , відповідно до визначення 7, не обробляється ($\{\alpha\} \cap D_2 = \emptyset$) то, відповідно до твердження 4, $(D^*)P(\alpha) = Z$, а відповідно до твердження 3, $(D^*)P(\alpha) \circ (D_1)X_1(D_1^d) = (D_1)X_1(D_1^d)$. Тобто предикат може бути в композиції тільки другим.

Оскільки в композиції виду $(D)O(D^d) \circ (D_1)O_1(D_1^d)$, відповідно до визначення 7, регістрові дані не обробляються ($D^d \cap D_1 = \emptyset$) то, відповідно до твердження 4, $(D)O(D^d) = Z$, і відповідно до твердження 3, $(D)O(D^d) \circ (D_1)O_1(D_1^d) = (D_1)O_1(D_1^d)$.

У разі композиції $(D)O(D^d) \cdot (D^*)P(\alpha)$, якщо $D^d \not\subseteq D^*$, то при $D^d \cap D^* = \emptyset$ отримусмо випадок, розглянутий вище, а при $D^d \cap D^* \neq \emptyset$ множина даних $D^d \setminus D^*$, відповідно до твердження 2, буде втрачена. Тобто, Д-оператор $(D)O(D^d)$ може бути в композиції першим тільки за вказаної умови.

Твердження доведено.

Відповідно до обмежень, показаних в твердженні 5, приведемо можливі варіанти композиції Д-операторів, ще раз відмітивши, що композиція предикатів не розглядається: $(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D_2)O_2(D_2^*)$; $(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D)O(D^d)$; $(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D^*)P(\alpha)$; $(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D)O(D^d) \cdot (D^*)P(\alpha)$.

З приводу зв'язувальних і власних даних в приведеному наборі композицій будемо стверджувати наступне.

Твердження 6. У композиціях Д-операторів $(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D^*)P(\alpha)$ і $(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D)O(D^d) \cdot (D^*)P(\alpha)$ множини даних D' і D^d є зв'язувальними.

Доведення очевидне і випливає з визначень 4 і 7.

На основі теореми і твердження 6 перетворимо можливі варіанти композиції Д-операторів

$$(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D_2)O_2(D_2^*) = (D)B_1(D'),$$

$$\text{де } D = D_1 \cup D_2^*, \quad D' = D_1 \cap D_2^*;$$

$$(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D)O(D^d) = (D)B_2(D, D^d),$$

$$\text{де } D = D_1 \cup D^d, \quad D' = D_1 \cap D^d;$$

$$(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D^*)P(\alpha) = (D)B_3(D', \alpha),$$

$$\text{де } D = D_1, \quad D' = D_1^*;$$

$$(D_1)O_1(D_1^*) \cdot (D^*)P(\alpha) = (D)B_4(\alpha),$$

$$\text{де } D = D_1, \quad D' = \emptyset.$$

При цьому зв'язувальні дані, зокрема D' і D^d , інкапсульовані в цьому Д-операторі.

З наслідку 2, твердження 6 і приведених міркувань випливає наступне.

Похідний Д-оператор у разі, коли Д-оператори в композиції не пов'язані, має наступний склад специфікованих даних. У $(D)B_1(D')$ $D = D_1 \cup D_2$, $D' = D_1 \cap D_2$, у $(D)B_2(D, D^d)$ $D = D_1 \cup D_2$, $D' = D_1$.

Висновок

З отриманих результатів випливає, що в результаті об'єднання довільних Д-операторів (як інформаційно пов'язаних, так і не пов'язаних) можна одержати Д-оператори, що є загальнішими, тобто дозволяють абстрагуватися від деякої їх функціональності (особливостей виконання). У разі пов'язаних Д-операторів, відповідно до наслідку 1, вдається абстрагуватися від деяких даних.

Можливість побудови похідних Д-операторів на цьому не вичерпується, оскільки на основі отриманих можуть будуватися все більш потужні Д-оператори, і цей процес може бути продовжений необмежено, що дозволяє реалізувати висхідний підхід до проектування алгоритмів.

Крім того, похідні Д-оператори розширюють можливості алгебричного апарату, а можливість їх побудови може використовуватися для перетворення алгоритмів.

Очевидним наступним кроком у розвитку запропонованого формального апарату є вирішення оберненої задачі, тобто декомпозиції Д-операторів і реалізація низхідного підходу до проектування алгоритмів.

Список використаних джерел

1. Холл П. Вычислительные структуры: введение в численные программирование. – М.: Мир, 1978, 214 с.
2. Шнейдерман Б. Психология программирования: человеческие факторы в вычислительных и информационных системах. – М.: Радио и связь, 1984, 304 с.
3. Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы. – М.: Мир, 1985. 656 с.
4. Ющенко Е.Л., Цейтлин Г.Е., Грицай В.П., Терзян Т.К. Многоуровневое структурное проектирование программ: Теоретические основы, инструментарий. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 208 с.
5. Дорошенко А.Е., Акуловский В.Г. Алгебра алгоритмов с данными и прогнозирование вычислительного процесса // Проблемы програмування. – 2011. – №3. – С. 3–10.

Надійшла до редколегії 29.02.2012

УДК 519.254

Жирицький* В.П.

Структура та представлення тестових завдань закритої форми у системі дистанційного навчання «VITAVA»

У статті розглянуто структуру тестових завдань закритої форми, наведені представлення тестових завдань за допомогою елементів веб-інтерфейсу в системі дистанційного навчання «VITAVA».

Ключові слова: тестові завдання, замкнута форма, структура тестових завдань, представлення тестових завдань.

*E-mail: v.zhiritskiy@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ

Забезпечення об'єктивного контролю рівня знань студентів – одна з найважливіших і найважчих процедур для освітніх закладів, в яких існує проблема масової верифікації знань великої кількості студентів. Перевірка знань традиційними способами мають ряд недоліків – великі часові затрати, недостатню об'єктивність та інше[1].

Розвиток інформаційних технологій та впровадження дистанційних систем навчання запропонували можливість використання комп'ютерного тестування для швидкого отримання оцінки рівня знань студентів. Такий спосіб оцінювання не залежить від втомі чи психічного стану екзаменатора, тобто є більш об'єктивним, ніж традиційний. Але і тут є певні проблеми, які полягають у використанні неясних тестових завдань в тесті, а це означає, що об'єктивність оцінки залежить від інструменту вимірювання – тесту.

Постановка проблеми

Кілька останніх років спостерігається тенденція щодо створення Intranet- та Internet-орієнтованих систем дистанційного навчання, які спрощують процес підготовки тестових завдань, відбір тестових завдань для тесту і представлення результатів тестування у різних предметних областях.

На жаль, під час розробки систем дистанційного навчання, велику увагу

V.P. Zhyrytskyy

The structure and presentation of test items of a closed form in the distance learning system «VITAVA»

This paper is devoted to the structure of the closed form of test's tasks, given presentation of test's tasks by using elements of a web interface in the distance learning system «VITAVA».

Keywords: test items, closed form, structure of test items, presentation of test items.

пріділяють функціональним можливостям систем по управлінню навчальним матеріалом – створення дистанційних курсів, підручників, модулів, бібліотек, та інше і значно меншу увагу приділяють програмному забезпеченню підсистеми тестування рівня знань студентів. На нашу думку, цей факт є важливим недоліком, оскільки від якості тесту як інструменту вимірювання залежить достовірність інформації про рівень знань студентів, можливість об'єктивного порівняння студентів між собою та інше.

Комп'ютерні технології надають можливість використовувати різноманітні методи відбору тестових завдань, нарахування балів та оцінювання відповідей студентів. На окремих етапах процесу тестування рівня знань, таких як відбір тестових завдань, їх оцінювання, визначення кінцевого результату тесту, необхідним є використання інформації про структуру тестових завдань, методів і алгоритмів, які покращуватимуть якість тестових завдань, а отже і якість тесту, процесу тестування і об'єктивність отриманих результатів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

За останні десятиліття зроблено суттєвий крок в напрямку дослідження якості тестів, тестових завдань, підходів, методів та алгоритмів реалізації базових задач, які виникають на основних етапах тестування рівня знань за допомогою автоматизованих систем.

Проблемами аналізу результатів оцінювання займалися В.С.Аванесов, С.С.Шишов, та ін.[2; 6]. Значний внесок у розробку математичних моделей, підходів, методів та алгоритмів реалізації базових задач зробили: Деловський В.О., Оксамитна Л.П., Катаєва Є.Ю., Коджа Т.І. та ін. Створенню адаптивних систем тестування присвячені роботи П.Л.Брусилівського, Н.П.Капустина, Л.В.Зайцевої, О.А.Ракової та ін.

Проте, незважаючи на наявність наукових праць з проблем використання інформаційних технологій в цій галузі, питання створення ефективних інструментів оцінювання тестових завдань як інструментів вимірювання недостатньо розроблені у вітчизняній системі освіти.

Формулювання цілі статті

Сьогодні актуальною науковою задачею є дослідження інструментів оцінювання тестових завдань, використання методів і алгоритмів, які б враховували специфіку тестування рівня знань студентів у Intranet- та Internet-орієнтованих системах дистанційного навчання.

Метою даної статті є

- представлення структури тестових завдань закритої форми у системі дистанційного навчання «VITAVA»;
- представлення видів тестових завдань закритої форми за допомогою елементів веб-інтерфейсу.

Виклад основного матеріалу

Вибір однієї вірної відповіді.

Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді» (single choice) належить до завдань закритої форми з запропонованими відповідями, серед яких присутня одна вірна відповідь. Даний вид тестових завдань є найбільш розповсюдженим в системах комп'ютерного тестування і рекомендований Державним стандартом вищої освіти України [5].

Структуру тестового завдання «Вибір однієї вірної відповіді» представимо у вигляді:

$$\langle z, W, B, z \rangle, \quad (1)$$

де z – твердження тестового завдання.

W – множина відповідей на тестове завдання, яку представимо у вигляді:

$$W = V \cup D, \quad (2)$$

$$V \cap D = \emptyset, \quad (3)$$

де V – множина вірних відповідей. Оскільки в цьому виді тестового завдання лише одна відповідь є вірною, то кількість елементів множини вірних відповідей дорівнює:

$$|V| = 1. \quad (4)$$

D – множина дистракторів. Дистрактор (відволікаюча відповідь) – відповідь на тестове завдання, яка схожа на вірну відповідь, але не є такою. Множина D повинна містити хоча б один елемент, отже кількість її елементів представимо у вигляді:

$$|D| \geq 1. \quad (5)$$

Система дистанційного навчання «VITAVA» дозволяє застосовувати два алгоритми оцінювання – простий та вдосконалений, які можуть бути назначені кожному тестовому завданню.

Простий алгоритм оцінювання полягає в тому, що за вірно обрану відповідь система нараховує один бал, а за невірно обрану відповідь не нараховує бали.

B – дихотомічна функція оцінювання j -го тестового завдання:

$$B(w_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } w_j \in V, \\ 0, & \text{якщо } w_j \in D, \end{cases} \quad (6)$$

де $w_j \in W$ – відповідь студента на j -те тестове завдання.

Вдосконалений алгоритм оцінювання полягає в тому, що система нараховує вказану кількість балів $K_1 > 0$ за вірно обрану відповідь і $K_2 \neq 0$ за невірно обрану відповідь. За пропуск тестового завдання система не нараховує бали.

Подамо представлені вище умови у вигляді функції оцінювання:

$$B(w_j) = \begin{cases} K_1, & \text{якщо } w_j \in V, \\ K_2, & \text{якщо } w_j \in D, \\ 0, & \text{якщо відповіді не було.} \end{cases} \quad (7)$$

Якщо $K_2 < 0$, то система зменшує кількість балів за обрану невірну відповідь.

Система надає можливість представляти відповіді студенту в перемішаному порядку для уникнення запам'ятовування. За це відповідає елемент s , який приймає наступні значення:

$$s = \begin{cases} 0, & \text{якщо відповіді необхідно представляти в послідовному порядку,} \\ 1, & \text{якщо відповіді необхідно представляти в перемішаному порядку.} \end{cases} \quad (8)$$

Нехай $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{js}$ елементи множини W . Тоді, якщо $s=0$, то система представляє відповіді на j -те тестове завдання w_{ji} послідовно, відсортованими по другому індексу у зростанні, а якщо $s=1$, то система створює перестановку других індексів і представляє відповіді на j -те тестове завдання w_{ji} відсортованими по другому індексу перестановки.

Перейдемо до інтерфейсного представлення даного виду тестового завдання.

В системі дистанційного навчання «VITAVA» діалог студента з системою відбувається через веб-інтерфейс, який передбачає найбільш зручне представлення тестових завдань виду «Вибір однієї вірної відповіді» за допомогою елементів веб-інтерфейсу - перемикачі (radio-button).

Зміст та відповіді на тестове завдання може бути представлено у вигляді поняття, графіку, формули.

Можливо представити шість основних способів побудови таких тестових завдань:

1. Поняття – Формула
2. Формула – Поняття
3. Поняття – Графік
4. Графік – Поняття
5. Графік – Формула
6. Формула – Графік

Перший спосіб «Поняття - Формула» полягає в тому, що зміст тестового завдання формулюється у вигляді тексту, а відповіді – у вигляді формул. Формули можуть бути представлені за допомогою рисунків або за допомогою мови розмітки математичних виразів MathML, що побудована на базі розмітки XML.

Другий спосіб «Формула - Поняття» пропонує відображення з точністю до навіпки.

Третій спосіб «Поняття - Графік» полягає в тому, що тестові завдання формулюються у вигляді тексту, а відповіді - у вигляді графіків. Графіки можуть бути представлені за допомогою рисунків.

Четвертий спосіб «Графік - Поняття» пропонує відображення з точністю до навіпки.

П'ятий спосіб «Графік - Формула» і шостий спосіб «Формула - Графік» полягає в тому, що зміст тестового завдання і відповіді формулюються у вигляді формул і графіків.

Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді» представлено на рис. 1.

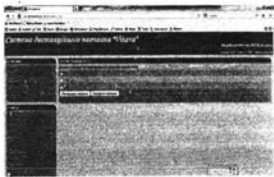


Рис. 1. Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді»

Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді

Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді» належить до завдань закритої форми з запропонованими варіантами відповідей, які відображаються з затримкою, серед яких присутня одна вірна відповідь.

Основним методом перевірки вмінь і навичок студентів з математичних і технічних дисциплін є розв'язок рівнянь, нерівностей, доведення певних математичних тверджень. Основною особливістю таких тестових завдань є відносно прості відповіді при досить складній та громіздкій процедурі розв'язку.

Тестове завдання з математичних і технічних дисциплін часто формулюється у вигляді задачі на обчислення конкретних значень заданих величин. У змісті тестового завдання формулюється умова задачі, а у відповідях наводяться числові значення відповідей. Для відповіді на таке тестове завдання студент повинен відшукати алгоритм розв'язку задачі, обчислити відповідь, а після цього вибрати вірну відповідь зі списку запропонованих.

При використанні традиційних тестових завдань закритої форми, вірну відповідь досить легко обчислити шляхом підстановки варіантів відповідей в умову задачі. При можливості використання математичних калькуляторів

застосування тестових завдань «Вибір однієї вірної відповіді» в математиці взагалі стає проблематичним.

Наприклад, тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді»: знайти розв'язок рівняння:

$\frac{x+1}{x^2+3} + (x+1)^2 = 0$ з відповідями $\{-1; 0; 1\}$ методом підстановки відповідей вирішується за кілька секунд, хоча для його розв'язку необхідно знати відповідні методи розв'язку рівнянь.

Для усунення перерахованих вище недоліків в системі дистанційного навчання «VITAVA» при створенні тестових завдань закритої форми з математичних та технічних дисциплін запропоновано використовувати новий вид тестового завдання – «Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді».

Структуру тестового завдання «Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді» представимо у вигляді:

$$\langle z, W, B, s, t \rangle, \quad (9)$$

де всі складові елементи, крім t , – аналогічні тестовому завданню «Вибір однієї вірної відповіді», а елемент t відповідає за час затримки відповіді.

Перейдемо до інтерфейсного представлення даного виду тестового завдання.

В системі дистанційного навчання «VITAVA» діалог студента з системою відбувається через веб-інтерфейс, який передбачає найбільш зручне представлення тестових завдань виду «Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді» за допомогою елементів веб-інтерфейсу – перемикачі (radio-button).

У вікні веб-браузера виводиться зміст тестового завдання, рекомендований час на вирішення тестового завдання і кнопка «Відповісти». Студент будь-яким способом (в умі, на папері, за допомогою комп'ютера, та ін.) розв'язує поставлене тестове завдання і натискає кнопку «Відповісти». Після чого у вікні веб-браузера з'являються відповіді на короткий проміжок часу (15 - 30 секунд). За цей час студент повинен вибрати вірну відповідь. Часу повинно вистачити лише на вибір відповіді, а не на підстановку відповідей і підбір вірної відповіді. Після закінчення часу, кнопка «Відповісти» зникає незалежно від того, відповів чи не відповів студент на дане тестове завдання.

Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді» представлено на рис. 2.

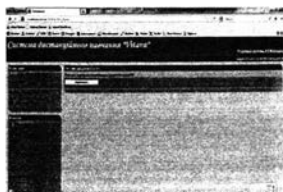


Рис. 2. Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді»

Вибір однієї вірної відповіді «Так/Ні»

Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді «Так/Ні» (yes/no) належить до завдань закритої форми і є різновидом тестового завдання «Вибір однієї вірної відповіді» з двома відповідями, серед яких присутня одна вірна відповідь. В цьому випадку студенту пропонується вибрати вірну відповідь серед двох запропонованих відповідей. Оскільки ймовірність вгадування вірної відповіді становить п'ятдесят відсотків, то цей вид тестового завдання рекомендується використовувати лише для отримання загальної інформації, а не для оцінювання рівня знань студентів[2].

Структуру тестового завдання «Вибір однієї вірної відповіді «Так/Ні» представимо у вигляді:

$$\langle z, W, B \rangle, \quad (10)$$

де z – твердження тестового завдання.

W – множина відповідей на тестове завдання, яку представимо у вигляді:

$$W = V \cup D, \quad (11)$$

$$V \cap D = \emptyset, \quad (12)$$

де V – множина вірних відповідей. Оскільки в цьому виді тестового завдання лише одна відповідь є вірною, то кількість елементів множини вірних відповідей дорівнює:

$$|V| = 1. \quad (13)$$

D – множина дистракторів. Множина D містить один елемент отже:

$$|D| = 1. \quad (14)$$

Перейдемо до інтерфейсного представлення даного виду тестового завдання.

В системі дистанційного навчання «УІТАВА» діалог студента з системою відбувається через веб-інтерфейс, який передбачає найбільш зручне представлення тестових завдань виду «Вибір однієї вірної відповіді «Так/Ні» за допомогою елементів веб-інтерфейсу - перемикачі (*radio-button*).

Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді «Так/Ні» представлено на рис.3.



Рис. 3. Тестове завдання «Вибір однієї вірної відповіді «Так/Ні»

Вибір декількох вірних відповідей

Тестове завдання «Вибір декількох вірних відповідей» (*multiple choice*) належить до завдань закритої форми з запропонованими варіантами відповідей, серед яких присутні декілька вірних. Даний вид тестових завдань є найбільш розповсюджений в системах комп'ютерного

тестування і рекомендований Державним стандартом вищої освіти України [3].

Структуру тестового завдання «Вибір декількох вірних відповідей» представимо у вигляді:

$$\langle z, W, B, t, g \rangle, \quad (15)$$

де z – твердження тестового завдання;

W – множина відповідей на тестове завдання, яку представимо у вигляді:

$$W = V \cup D, \quad (16)$$

$$V \cap D = \emptyset, \quad (17)$$

де V – множина вірних відповідей. Оскільки в цьому виді тестового завдання декілька відповідей можуть бути вірними, то кількість елементів множини вірних відповідей:

$$|V| \geq 1. \quad (17)$$

D – множина дистракторів. Множина D повинна містити хоча б один елемент, отже:

$$|D| \geq 1. \quad (18)$$

Система дозволяє застосовувати два алгоритми оцінювання – простий та вдосконалий, які можуть бути призначені кожному тестовому завданню.

Простий алгоритм оцінювання полягає в тому, що студент повинен вказати всі вірні відповіді. Тільки в такому випадку відповідь на тестове завдання зараховується і студент отримує ту кількість балів, яка дорівнює сумі балів за вірні відповіді.

B – функція оцінювання тестового завдання:

$$B(w_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum_{i=1}^H X_i(w_j) = |V| \text{ для } w_j \in V \text{ і } \sum_{i=1}^H X_i(w_j) = 0 \text{ для } w_j \in D, \\ 0, \text{ якщо інше,} \end{cases} \quad (19)$$

де H – кількість відповідей на j -те тестове завдання,

w_j – i -та відповідь на j -те тестове завдання, $X_i(w_j)$ – характеристична функція для елементів $w_j \in W$, яка приймає значення:

$$X_i(w) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } w \in A, \\ 0, \text{ якщо } w \notin A, \end{cases} \quad (20)$$

Вдосконалий алгоритм оцінювання полягає в тому, що студент може вказати не всі вірні відповіді. В такому випадку йому для зарахування відповіді на тестове завдання

необхідно набрати граничну кількість балів, які вказані для тестового завдання. Студент отримує ту кількість балів, яка дорівнює сумі балів за вказані відповіді лише у випадку зарахування відповіді на тестове завдання. Вибір невірної відповіді в цьому випадку приводить до визначення відповіді на тестове завдання як невірної. За відмову від відповіді студент отримує нуль балів.

B – функція оцінювання тестового завдання:

$$B(w_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum_{i=1}^H X_i(w_j) \geq g \text{ для } w_j \in V \text{ і } \sum_{i=1}^H X_i(w_j) = 0 \text{ для } w_j \in D, \\ 0, \text{ якщо інше,} \end{cases} \quad (21)$$

де g – гранична кількість балів для зарахування відповіді як вірної.

Система надає можливість представляти відповіді студенту в перемішаному порядку для

$$s = \begin{cases} 0, & \text{якщо відповіді необхідно представляти в послідовному порядку,} \\ 1, & \text{якщо відповіді необхідно представляти в перемішаному порядку.} \end{cases} \quad (22)$$

Нехай $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jd}$ елементи множини W . Тоді, якщо $s=0$, то система представляє відповіді на j -те тестове завдання w_{jd} послідовно, відсортованими по другому індексу у зростанні, а якщо $s=1$, то система створює перестановку других індексів і представляє відповіді на j -те тестове завдання w_{jd} відсортованими по другому індексу перестановки.

Перейдемо до інтерфейсного представлення даного виду тестового завдання.

В підсистемі тестування системи дистанційного навчання «VITAVA» діалог студента з системою відбувається через веб-інтерфейс, який передбачає найбільш зручну форму представлення тестових завдань «Вибір декількох вірних відповідей» за допомогою елементів веб-інтерфейсу прапорців (checkbox).

Тестове завдання «Вибір декількох вірних відповідей» представлено на рис. 4.



Рис. 4. Тестове завдання «Вибір декількох вірних відповідей»

уникнення запам'ятовування. За це відповідає елемент s , який приймає наступні значення:

Висновки

У статті представлена структура тестових завдань закритої форми, функції оцінювання тестових завдань, які дозволили реалізувати різні алгоритми оцінювання в системі дистанційного навчання «VITAVA».

Інформація про структуру тестових завдань закритої форми може бути використана при розробці інших інструментів тестування та алгоритмів оцінювання на основі веб-технологій.

Список використаних джерел

1. Аванесов В.С. Теория и методика педагогических измерений (материалы публикаций). – М.: ЦТ и МКОУГТУ-УПИ, 2005. – 98 с.
2. Аванесов, В. С. Форма тестовых заданий [Текст] / В. С. Аванесов. – М. : Центр тестирования, 2005. – 155 с.
3. Комплекс нормативних документів для розробки складових систем стандартів вищої освіти. Засоби діагностики якості вищої освіти // Інформаційний вісник "Вища освіта". – 2003. - №10. – С 67-82.
4. Чельшкова М.Б. Теория и практика конструирования педагогических тестов: Учебное пособие. – М.: Логос, 2002. – 432 с.
5. Чельшкова М.Б. Разработка педагогических тестов на основе современных математических моделей: Учебное пособие. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1995. – 32 с.
6. Шишов С.Е., Кальней В.А. Мониторинг качества образования в школе. М.: 1998

Надійшла до редколегії 14.02.12

УДК 51-77

Коляденко М.А., аспірант

**Аналіз автоматичних торгових систем.
Оцінка результатів діяльності систем на
прикладі даних "Fund-52"**

У даній роботі проводиться опис, класифікація та аналізується вплив автоматизованих торгових систем на сучасний фондовий ринок. Приводяться рекомендації для розробки систем на практиці. Також пропонується загальний метод оцінки ефективності роботи подібних систем на прикладі результатів розробленої торгової системи "Fund-52".

E-mail: mak_kol@ukr.net

Статтю представив доктор фізико-математичних наук Буй Д. Б.

Автоматична торгова система (АТС) – це програма (або пристрій), що здійснює автоматичну відправку і зняття заявок на купівлю/продаж акцій за чітко визначеною логікою, відповідно до торгової системи (торгової стратегії, алгоритму). Також можливе виконання програмою додаткових функцій на розезд автора системи – контроль виставлених заявок, моніторинг угод, аналіз торгівлі з наданням графіків, звітів і т.д. Стрімкий розвиток АТС та їх активне впровадження в торгівлі процеси – відмінна риса в управлінні капіталом на сучасних торгових майданчиках.

Перелічимо основні переваги АТС:

– Швидкість. АТС може відслідковувати десятки, сотні котировань цінних паперів, робити миттєво складні обчислення, приймати рішення і відразу виставляти заявки. Людина не може так швидко аналізувати таку кількість інформації. Трейдери, які використовують у своїй стратегії великі обсяги складних обчислень, які довірили торгівлю механічній торгівельній системі, отримують перевагу перед конкурентами, що торгують вручну. Трейдери, які не використовують подібних систем, змушені скорочувати кількість торгових фінансових інструментів, збільшувати часові інтервали (таймфрейми) для аналізу поточної ситуації.

– Точність. АТС не робить помилок в реалізації стратегії (якщо помилка не знаходиться в коді програми), всі вхідні і вихідні дані можуть перераховуватись з точністю до

Koliadenko M.A., Postgrad. Stud.

**Analysis of automatic trading systems.
Evaluation of automatic trading systems on
example of "Fund-52" system**

Brief description, classification and impact of automatic trading systems on a current stock market are provided in this article. Recommendations on systems development are provided, generic results evaluation approach is described with example of "Fund-52" automatic trading system evaluation.

декількох знаків після коми, якщо це необхідно. Виставляючи заявку, програма не набере випадково зайвий нуль і не поставити кому не в тому місці. Трейдери, що торгують вручну, іноді можуть помилятися як у розрахунках, так і при виставленні заявок. Від деяких подібних помилок може захистити грамотно спроектований торгівельний термінал, але шанс на помилку однаково залишається.

– Масштабованість. Якщо ви захочете розробити додаткову функціональність вашій АТС, вам буде потрібно лише дописати код. Наприклад, ви можете одержувати гарні та корисні звіти і графіки в будь-який час, ви можете розробити оповіщення від системи по SMS, можна постійно ускладнювати АТС. Торгуючи вручну, вам доведеться витратити більше свого часу, якщо захочете розширити можливості своєї торгівлі, або навіть наймати додаткових помічників.

– АТС не приймає рішення на основі емоцій. Дуже багато трейдерів, брокерів та спеціалістів приймають рішення на основі емоційному імпульсу, роблять угоди, які суперечать логіці торгової системи, і в більшості випадків такі угоди приносять величезні збитки. Торгова система завжди строго дотримується своєї логіки [1].

Усі професійні учасники торгів освоюють та стрімко розвивають цей напрям. Таким чином, основна тенденція сучасних фондових ринків

полягає з одного боку у зменшенні середнього збільшенні кількості цих позицій та всепоглинаючому розвитку алгоритмічних

розміру однієї інвестиційної позиції, а з іншого у стратегій, що і відображає дослідження Aite Group (див. рис. 1) [2].

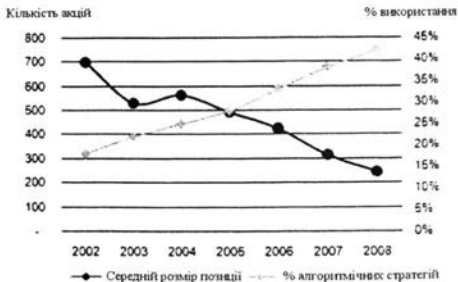


Рис. 1. Розвиток автоматичних систем

Розвиток алгоритмічних систем в торгівлі цінними паперами відбувається і в іншому напрямку – розробці execution-стратегій. Ці стратегії призначені забезпечити купівлю або продаж великих пакетів акцій (облігацій та ін.) з мінімальним відхиленням кінцевої середньозваженої ціни угоди від поточних ринкових котирувань інструмента. Дана

категорія стратегій активно застосовується інвестиційними фондами і брокерськими компаніями в усьому світі, а на їхню частку доводиться до 50% обсягу торгів, генерованих алгоритмічними системами. Існує три найпоширеніші алгоритми, що застосовуються в execution-стратегіях (див. рис. 2).

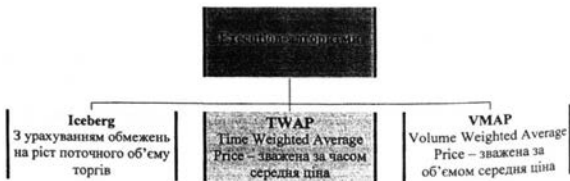


Рис. 2. Напрямки execution-стратегій

Iceberg – передбачається виконання загального об'єму угод за допомогою відправлення заявок таким чином, щоб сумарний поточний об'єм торгів не перевищував заданий рівень. Управління заявками здійснюється до повного продажу (купівлі) доручених активів. Описаний алгоритм дозволяє здійснювати операції з великими пакетами акцій, стримуючи волатильність та не привертаючи уваги інших учасників торгів.

TWAP – загальний об'єм доручення рівномірно виконується за задане число ітерацій протягом визначеного проміжку часу за допомогою відправлення ринкових заявок за цінами кращого попиту або пропозиції.

VWAP – заявки на купівлю (продаж) поступово відправляються протягом визначеного проміжку часу таким чином, щоб середньозважена ціна активу не перевищувала рівень, розрахований на початку роботи алгоритму [3].

Протягом торгової сесії об'єм угод, підпорядкований описаним алгоритмам, найбільший після відкриття ринку та зростає під кінець робочого дня. Більш детально дану закономірність відображає наступна діаграма (див. рис. 3) [2].

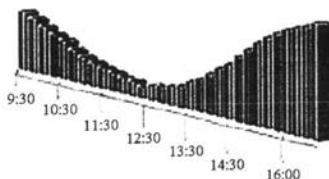


Рис. 3. Застосування execution-алгоритмів протягом робочої сесії

Розробка торгової системи – кропка і об'єма робота, яка повинна виконуватись поетапно та відповідно до чітко обумовлених правил. Схематично побудова АТС повинна відбуватися в такій послідовності.

1. Вивчення правил та принципів роботи фондового ринку, ознайомлення з основними віхами розвитку бірж від їх заснування (XV століття) до наших днів.
2. Огляд основних праць стосовно управління капіталом та стратегій інвестування коштів в фінансові активи.
3. Дослідження сучасних технологічних нововведень на світових торгових майданчиках. Аналіз гібридного фондового

ринку та автоматизованих електронних систем торгівлі акціями.

4. Практичне освоєння торгівлі цінними паперами. Безпосередня торгівля акціями відповідно до різних стратегій управління капіталом. Тестування роботи електронних систем та визначення закономірностей роботи спеціалістів на фондових біржах.
5. Виявлення та аналіз паттернів. Дослідження індикаторів технічного аналізу. Відбір та доопрацювання найдієвіших моделей поведінки ціни акцій.
6. Розробка стратегії управління капіталом. Формування правил відбору цінних паперів,

- визначення термінів утримання позицій та алгоритму диверсифікації коштів.
7. Бек-тестування роботи торгової системи за рік. Щоденний збір статистичних даних з провідних фондових бірж.
 8. Статистичний аналіз зібраних даних. Комплексне порівняння результатів роботи системи з середньоринковими.
 9. Програма реалізації АТС.
 10. Впровадження та перевірка роботи системи на практиці.

На сьогоднішній день функціонує безліч торгових систем, кожна з яких реалізує найвибагливіші стратегії гравців фондового ринку. Постає питання про оцінку фінансових результатів різних АТС. Величина прибутку в абсолютному чи відносному вираженні не може бути достатнім критерієм, адже повинна підтримуватись висока стабільність та прогнозованість діяльності. Добре відомі випадки, коли протягом багатьох років АТС могли показувати високу прибутковість, проте внаслідок різкої зміни кон'юктури ринку раптові збитки приводили цілі фонди до банкрутства. Найяскравішим прикладом може слугувати історія з компанією "Long-Term Capital Management" (LTCM), торгової системи якої були

розроблені Нобелівськими лауреатами, проте нехтування фундаментальними правилами ризик-менеджменту привели до одного з найгучніших банкрутств на Wall Street [4].

Запропонуємо власну методику оцінки ефективності роботи АТС на прикладі розробленої торгової системи "Fund-52", статистичні дані для якої збиралися щоденно з фондових бірж протягом всього 2010 року [5]. В якості інструментів оцінки використаємо коефіцієнт Шарпа та графічні методи, а для всебічного аналізу діяльності будемо порівнювати результати з трьома класичними інвестиційними стратегіями:

- 1) аналогічні за розмірами вкладення в фонд SPY, який вважається зведеним показником прибутковості 500 найбільших компаній, на основі яких розраховується індекс S&P 500;
- 2) консервативна стратегія Buy & Hold, яка передбачає утримання позиції протягом всього терміну без будь-яких змін;
- 3) купівля річних казначейських облігацій США, які вважаються найнадійнішими в світі;

Підсумкові результати для кожної стратегії слід звести у вигляді таблиці, представленої на таб. 4.

Таблиця 4. Таблиця прибутковості стратегій

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		Capital 150000								
3	Month	AvgPort	AvgBP (\$)	Profit 52	% (52)	Profit SPY	% (SPY)	Profit B&H	% (B&H)	T-Bills (1 Y)
4	12/2009	19	87149	920,57	0,61%	-3153,82	-2,10%	703,21	0,47%	0,26%
5	01/2010	14	54579	2292,67	1,53%	1077,98	0,72%	-5476,92	-3,65%	0,45%
6	02/2010	4	25039	2424,44	1,62%	946,98	0,63%	4530,29	3,02%	0,33%
7	03/2010	26	113961	615,00	0,41%	790,18	0,53%	8465,56	5,64%	0,32%
8	04/2010	32	150686	10185,54	6,73%	6987,09	4,66%	2447,71	1,63%	0,42%
9	05/2010	3	9963	-770,09	-0,51%	-671,89	-0,45%	-12765,96	-8,51%	0,43%
10	06/2010	3	12884	-911,40	-0,61%	-1609,79	-1,07%	-8316,80	-5,54%	0,35%
11	07/2010	7	40525	-295,33	-0,20%	100,79	0,07%	9533,90	6,36%	0,32%
12	08/2010	4	19096	1037,53	0,69%	701,25	0,47%	-6707,54	-4,47%	0,28%
13	09/2010	18	78110	1623,85	1,08%	1882,39	1,25%	11927,52	7,95%	0,25%
14	10/2010	20	87935	-111,46	-0,07%	-1518,79	-1,01%	5896,14	3,93%	0,26%
15	11/2010	21	98735	6010,07	4,01%	5313,82	3,54%	0,00	0,00%	0,22%
16	Summ			23021,39	15,35%	10846,19	7,23%	10237,11	6,82%	

Пояснення по стовпчиках.

Month – місяць, за який зводилися дані.

AvrPort – середня за один день величина портфелю (кількість акцій).

AvrBP – середня за один день величина задіяного капіталу.

Profit 52 – прибуток системи Fund-52

% (52) – відносне значення прибутку Fund-52.

Profit SPY – прибуток фонду SPY.

% (SPY) – відносне значення прибутку SPY.

Profit (B&H) – прибуток стратегії Buy & Hold.

% (B&H) – відносне значення прибутку Buy & Hold.

T-Bills (1 yr) – прибутковість річних казначейських облігацій США (безризикова ставка) [6].

Як бачимо, прибутковість АТС "Fund-52" більш ніж в двічі перевищує середньоринкові показники. Проте навіть ці значення не є вирішальним. Особливої уваги заслуговує стабільність фінансових результатів. З 12 місяців тільки 4 були збитковими, а величина збитків найбільшої серії від'ємних місяців складає всього 1 977 \$, що становить тільки 1.3% від задіяного капіталу. Найбільша ж помісячне пониження фонду SPY склало -3 154 \$, і то це значення забезпечене дотриманням стратегії управління капіталом з системи "Fund-52". Якщо ж дотримуватися класичного підходу Buy & Hold, то найбільший накопичувальний помісясний збиток дорівнював -21 083 \$, тобто -14%. Переваги використовуваної стратегії управління ризиком очевидні.

В якості інструменту для об'єктивного порівняння результатів описаних стратегій використаємо коефіцієнт Шарпа – показник ефективності інвестиційного портфеля (активу), який обчислюється як відношення середньої

премії за ризик до середнього відхилення портфелю.

$$S = \frac{E[R - R_f]}{\sigma} = \frac{E[R - R_f]}{\sqrt{\text{Var}[R - R_f]}}$$

R – доходність портфеля (активу).

R_f – доходність від альтернативного вкладення (як правило, береться безризикова процентна ставка).

$E[R - R_f]$ – математичне сподівання.

σ – стандартне відхилення доходності портфеля (активу).

За R_f візьмемо ставку відсотку річних казначейських облігацій США, визначену на початку кожного місяці спостерджуваного періоду [6].

Таким чином, отримуємо наступні проміжні значення:

$$E(F52) = 1.28\%, \quad \sigma(F52) = 2.05\%,$$

$$E(SPY) = 0.60\%, \quad \sigma(SPY) = 1.82\%,$$

$$E(B\&H) = 0.57\%, \quad \sigma(B\&H) = 4.96\%.$$

$$E(T\text{-Bills}) = 0.32\%.$$

А відповідні коефіцієнти Шарпа матимуть наступні значення:

$$S(F52) = 0.47,$$

$$S(SPY) = 0.15,$$

$$S(B\&H) = 0.05.$$

Тепер перейдемо до другого етапу оцінки ефективності роботи АТС, а саме – графічного подання результатів. Для більш точного відображення потрібно будувати графіки на основі щоденних результатів, тому постійний моніторинг за фондовими показниками надзвичайно важливий (див. рис. 5).

Графіки доходності фондів

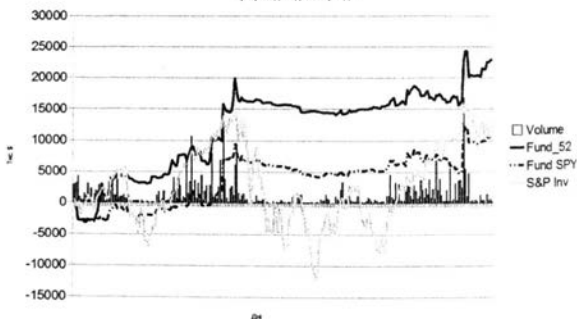


Рис. 5. Графіки доходності стратегій

Крива чорного кольору – прибутковість АТС “Fund-52”, пунктирна – фонду SPY, а світлішого кольору – стратегії Buy & Hold. Стовпчики темного кольору показують величину портфелю кожного дня для системи “Fund-52”. Коли ринок іде на нові вершини – портфель розширяється, коли в стадії рецесії – зменшується, в деякі дні кошти не вкладуються взагалі.

Як бачимо, наведений графік відображає постійно переважаючу стабільність та прибутковість “Fund-52”, а коефіцієнт Шарпа підтверджує цю тезу математично. Варто зазначити, що подібні результати – необхідна властивість будь-якої АТС, адже для застосування будь-яких нововведень потрібно, щоб вони як мінімум переважали консервативні підходи.

Список використаних джерел

- Блеск и нищета торговых роботов. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.trade-bot.ru/2008/05/bleck-i-nischeta-torgovyih-robotov/>
- Bill Harts. Algorithmic Trading Overview – 2009 – Р. 4-7.
- Серебренников Д. Введение в алготрейдинг // Futures & Options. – 2011 – №04 – С.23-24.
- Donald MacKenzie. Long-Term Capital Management and the Sociology of Arbitrage // Economy and Society. – 2003 – №32 – Р. 350.
- Коляденко М.А. Розробка торгової системи управління капіталом на фондовому ринку // Матеріали VIII міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна: економіка”. – 2010 – С. 496-497.
- Daily Treasury Yield Curve Rates – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield&year=2010>

Надійшла до редколегії 05.04.2012

УДК 519.718.2

Королик Р.П., асп.,
Пічкур В.В., д.ф.м.н., доц.**Про практичну стійкість дискретних
множинних систем**

В роботі обґрунтовано компактність та властивості границі максимальної за включенням множини практичної стійкості дискретних множинних систем. Для лінійної дискретної множинної системи доведено опуклість оптимальної множини початкових умов, одержано співвідношення для знаходження функції Мінковського та оберненої функції Мінковського.

Ключові слова: дискретна множинна система, максимальна за включенням множина, практична стійкість.

E-mail: korolik@email.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Дискретні системи мають суттєве прикладне значення в зв'язку з тим, що ряд економічних, біологічних, соціальних та технічних процесів описуються дискретними моделями. Крім того, різниці співвідношення застосовуються при побудові числових методів для різних класів задач. Тому є актуальним дослідження якісних характеристик дискретних систем. Так, в роботах [5, 6] висвітлюються методи теорії стійкості, в [1, 3] отримані оцінки і властивості максимальних множин практичної стійкості дискретних систем.

В роботі досліджено властивості максимальної за включенням множини практичної стійкості дискретних множинних систем. У випадку лінійної динамічної складової отримана функція Мінковського та обернена функція таких множин. Результати мають алгоритмічну спрямованість.

Ми будемо використовувати такі позначення: R^n – евклідовий n -вимірний простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток в R^n , який породжує евклідову норму $\| \cdot \|$, $\text{int } A$, ∂A – сукупність внутрішніх точок і границя множини $A \subset R^n$ відповідно, $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ – одинична сфера, $K_r(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| \leq r\}$ – замкнена

Р. П. Korolik, grad. student,
Pichkur V.V. doctor of science**On practical stability of discrete set systems.**

This paper is focused on the compactness and properties of the frontier of maximum set of practical stability of discrete set system. For linear discrete set system convexity of the optimal set of initial conditions are proved, Minkowski function and inverse Minkowski function are obtained.

Key Words: discrete set system, maximum set of initial conditions, practical stability.

куля радіусу r з центром в точці $a \in R^n$, $\text{comp}(R^n)$, $\text{conv}(R^n)$ – сукупність всіх непорожніх опуклих компактів з R^n відповідно, $[0, N]$ – множина індексів, $c(A, \psi)$ – опорна функція, $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$.

Властивості максимальної за включенням множини. Розглянемо систему вигляду

$$x(k+1) = f_i(x(k)), \quad (1)$$

$$B_i : R^m \rightarrow \text{comp}(R^n), \quad (2)$$

де $x \in R^n$, $f_i : D \rightarrow D \subset R^n$ – m -вимірна функція, яка в області D задовольняє таку умову: для будь якої точки x з множини D існує окіл цієї точки $U \subset D$ і константи $C_i > 0$, $M_i > 0$ такі, що виконуються

$$M_i \|x - y\| \leq \|f_i(x) - f_i(y)\| \leq C_i \|x - y\|, \quad (3)$$

$k \in [0, N-1]$. Багатозначне відображення (2) є неперервним в області D .

Система (1), (2) називається дискретною множинною системою, при цьому (1) називається динамічною складовою, відображення (2) – множинною складовою множинної дискретної

системи (1), (2). Позначимо $x(k) = x(k, x_0)$ - розв'язок системи (1) при $x(0) = x_0$, $k \in [0, N]$.

Розв'язком системи (1), (2) називається багатозначне відображення

$$F: [0, N] \times D \rightarrow \text{comp}(R^n)$$

таке, що його значення визначаються за правилом

$$F(k, x_0) = B_k(x(k)).$$

Тут $x(k) = x(k, x_0)$ - розв'язок системи (1), $k \in [0, N]$, $x_0 \in D$.

Нехай $G_0 \subset D$ - множина допустимих початкових станів, $\Phi(k) \in \text{comp}(R^n)$, $\Phi(k) \subset D$ - множина фазових обмежень, $B_k(0) \subset \Phi(k)$, $k \in [0, N]$, $f_k(0) = 0$, $k \in [0, N-1]$.

Означення 1 [4]. Будемо говорити, що для системи (1), (2) виконується умова δ , якщо існує $\delta > 0$, таке, що хоча б для одного $k \in [0, N]$ справджується співвідношення

$$B_k(x)/\Phi(k) \neq \emptyset, \|x\| > \delta.$$

З (3) випливає те, що кожній точці $x = x(k, x_0)$ поставлена однозначно відповідність $\varphi(k, x) = x_0$. Позначимо

$$M = \{x_0 : x_0 = \varphi(x, k), \|x\| \leq \delta\} = \bigcap_{k=0}^N \varphi(K_\delta(0), k).$$

Множина M є обмеженою.

Означення 2. Система (1), (2) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ -стійкою, якщо

$$B_k(x(k, x_0)) \subset \Phi(k)$$

для всіх $x_0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 3. Говорять, що сукупність $G_* \subset \Phi(0)$ є максимальною за включенням множиною практичної стійкості системи (1), (2) при фазових обмеженнях $\Phi(k)$ на інтервалі $[0, N]$, якщо система (1), (2) $\in \{G_*, \Phi(k), 0, N\}$ -стійкою і $G_0 \subseteq G_*$ для всіх множин $G_0 \subseteq \Phi(0)$, для яких має місце $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ -стійкість системи (1), (2).

Теорема 1. Множина G_* - компакт.

Доведення. Обмеженість G_* випливає з умови δ , оскільки G_* належить M .

Покажемо замкненість G_* . Для цього зафіксуємо довільну послідовність $\{x_p\} \in G_*$,

$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = x_0$. Покажемо, що $x_0 \in G_*$. Для всіх $k \in [0, N]$ має місце

$$B_k(x(k, x_p)) \subset \Phi(k), \quad p = 1, 2, \dots, \quad k \in [0, N].$$

Зафіксуємо $k \in [0, N]$. Відображення $B_k(x)$ - неперервне. З (3) випливає неперервна залежність розв'язків (1) від початкових умов. Тому відображення $z \mapsto B_k(x(k, z))$ є неперервним, $z \in D$. Зафіксуємо $k \in [0, N]$. З неперервності відображення $z \mapsto B_k(x(k, z))$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться номер p_0 такий, що для всіх $p > p_0$ має місце включення

$$B_k(x(k, x_p)) \subseteq K_\varepsilon(B_k(x(k, x_p))) \subseteq K_\varepsilon(\Phi(k)).$$

Звідси

$$B_k(x(k, x_p)) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon(\Phi(k)) = \Phi(k).$$

Отже, $x_0 \in G_*$. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то існує $\bar{k} \in [0, N]$, для якого $\partial B_{\bar{k}}(x(\bar{k}, x_0)) \cap \partial \Phi(\bar{k}) \neq \emptyset$, при цьому для будь-якого $k \in [0, N]$ виконується $B_k(x(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$.

Доведення. Нехай $\partial B_k(x(k, x_0)) \cap \partial \Phi(k) = \emptyset$ для довільного $k \in [0, N]$ і справджується $B_k(x(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$. Це означає, що знайдеться $\varepsilon_i > 0$ для всіх $i = 0, 1, \dots, N$ таке, що $B_i(x(i, z_0))^{c_i} \subset \text{int} \Phi(i)$. З неперервності відображення $z \mapsto B_i(x(i, z))$, $z \in D$ випливає, що знайдеться $\delta > 0$ таке, що при $z_0 \in K_\delta(x_0)$ справджується

$$B_i(x(i, z_0)) \subset (B_i(x(i, x_0)))^{c_i},$$

де $\varepsilon_0 = \min \varepsilon_i > 0$ $i = 0, 1, \dots, N$. Тому $B_i(x(i, z_0)) \subset \Phi(i)$, $i = 0, 1, \dots, N$, $z_0 \in K_\delta(x_0)$. Отже, $K_\delta(x_0) \subset G_*$. Це означає, що $x_0 \in \text{int} G_*$. А це суперечить умові теореми. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай виконується включення $B_k(x(k, x_0)) \subset \Phi(k)$, $k \in [0, N]$, а також існує таке $\bar{k} \in [0, N]$, що

$$\partial B_{\bar{k}}(x(\bar{k}, x_0)) \cap \partial \Phi(\bar{k}) \neq \emptyset.$$

Тоді $x_0 \in \partial G_*$.

Доведення. З умови теореми випливає, що $x_0 \in G_*$. Припустимо, що $x_0 \in \text{int} G_*$. Тоді існує

таке $\delta > 0$, для якого $K_\delta(x_0) \subset G$. Використовуючи міркування, подібні до тих, що були застосовані при доведенні попередньої теореми, ми можемо записати, що при деякому $\epsilon_1 > 0$ для $z_0 \in K_\delta(x_0)$ справедливе таке співвідношення

$$B_\delta(x(k, z_0)) \subset (B_\delta(x(k, x_0)))^{Y^*} \subset \Phi(k),$$

$$k = 0, 1, \dots, N. \text{ Це означає}$$

$$\partial B_\delta(x(k, x_0)) \cap \partial \Phi(k) = \emptyset, k \in [0, N].$$

Прийшли до суперечності. Теорему доведено.

Наслідок 1. Для того, щоб $x_0 \in \partial G$, необхідно і достатньо, щоб $B_\delta(x(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ та існувало таке $k \in [0, N]$, що $\partial B_\delta(x(k, x_0)) \cap \partial \Phi(k) \neq \emptyset$.

Наслідок 2. Точка $x_0 \in \text{int } G$, тоді і тільки тоді, коли $B_\delta(x(k, x_0)) \subset \text{int } \Phi(k)$, $k \in [0, N]$.

Випадок лінійної дискретної множинної системи. Розглянемо лінійну однорідну дискретну множинну систему

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad (4)$$

$$B_k: R^n \rightarrow \text{conv}(R^n), \quad (5)$$

де $A(k)$ - невироджена матриця розмірності $n \times n$, $k \in [0, N-1]$. Нехай $\Phi(k) \subset \text{conv}(R^n)$ - множина фазових обмежень, $k \in [0, N]$. Запишемо загальний розв'язок системи (4) у вигляді

$$x(k) = \Theta(k)x_0, \quad k \in [1, N],$$

де $\Theta(k) = A_{k-1} \dots A_0$ - невироджена матриця, $k \in [1, N]$. Припустимо, що має місце таке співвідношення

$$c(B_k(x), \psi) = \langle x, g_k(\psi) \rangle + h_k(\psi), \quad (6)$$

де $g \in C(R^n, R^n)$, $\|g\| \leq \mu \|g\|$, $\mu > 0$. Тут функція $c(B(k, 0), \psi) = h_k(\psi)$, $\psi \in S$, $k \in [0, N]$.

Теорема 4. Якщо $\Phi(k) \in \text{conv}(R^n)$, то $G_k \in \text{conv}(R^n)$.

Доведення. Виберемо довільні точки $x_0, y_0 \in G_k$. Тоді

$$B_k(\Theta(k)x_0) \subset \Phi(k), \quad B_k(\Theta(k)y_0) \subset \Phi(k),$$

$$k \in [0, N]. \text{ Звідси}$$

$$c(B_k(\Theta(k)x_0), \psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$$

$$c(B_k(\Theta(k)y_0), \psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$$

$\psi \in S$. Тоді при $\lambda \in [0, 1]$ виконується

$$c(B_k(\Theta(k)(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0)), \psi) \leq$$

$$\leq \lambda c(B_k(\Theta(k)x_0), \psi) + (1-\lambda)c(B_k(\Theta(k)y_0), \psi) \leq$$

$$\leq c(\Phi(k), \psi), \quad k \in [0, N].$$

За властивостями опорних функцій [2] точка $\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \in G_k$. Теорему доведено.

Теорема 5. Для того, щоб $x_0 \in \partial G_k$, необхідно і достатньо, щоб

$$\max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle g_k(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)} = 1$$

за умови $c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi) > 0$. Тут $\psi \in S$, $k \in [0, N]$.

Доведення. Якщо $x_0 \in \partial G_k$, то

$$c(B_k(x(k, x_0)), \psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$$

для довільних $\psi \in S$, $k \in [0, N]$. Використовуючи наслідок 1 теореми 3, одержуємо, що існує $\xi \in S$, $\bar{k} \in [0, N]$, для яких $c(B_k(x(\bar{k}, x_0)), \xi) = c(\Phi(\bar{k}), \xi)$.

Враховуючи (6), отримуємо, що при $\psi \in S$, $k \in [0, N]$ має місце нерівність $\langle g_k(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle + h_k(\psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$.

в якій досягається рівність при $\xi \in S$, $\bar{k} \in [0, N]$. Оскільки $c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi) > 0$, $\psi \in S$, $k \in [0, N]$,

$$\text{то звідси маємо}$$

$$\frac{\langle g_k(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)} \leq 1, \quad \psi \in S, \quad k \in [0, N].$$

Крім того,

$$\frac{\langle g_k(\xi), \Theta(k)x_0 \rangle}{c(\Phi(k), \xi) - h_k(\psi)} = 1, \quad \xi \in S, \quad \bar{k} \in [0, N].$$

Достатність випливає з того, що при доведенні необхідності використовувались твердження, що мають необхідний і достатній характер. Теорему доведено.

Теорема 6. Функція Мінковського множини G_k має вигляд

$$m_k(x_0) = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle g_k(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi)}, \quad (7)$$

де $c(\Phi(k), \psi) - h_k(\psi) > 0$, $\psi \in S$, $k \in [0, N]$.

Доведення. За означенням функція Мінковського

$$m_k(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in G_k \right\}, \quad x_0 \in R^n.$$

Якщо $\frac{x_0}{\lambda} \in G$, то $\Theta(k)\frac{x_0}{\lambda} \in \Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. З властивостей опорних функцій випливає [2]

$$\frac{1}{\lambda} \langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle + h_s(\psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$$

для всіх $\psi \in S$ та $k \in [0, N]$. Тоді

$$\lambda \geq \frac{\langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - h_s(\psi)},$$

для довільних $\psi \in S$, $k \in [0, N]$. Звідси за означенням функції Мінковського

$$m_s(x_0) = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - h_s(\psi)}.$$

Теорему доведено.

За властивостями функції Мінковського

$$G_s = \{x \in R^n : m_s(x) \leq 1\}.$$

Теорема 7. Обернена функція Мінковського множини G_s має вигляд

$$d_s(x_0) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_s(\psi)}{\langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle}, \quad (8)$$

за умови $\langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle > 0$, $\psi \in S$, $k \in [0, N]$.

Доведення. За означенням оберненої функції Мінковського

$$d_s(x_0) = \sup \{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_s\}, \quad x_0 \in R^n.$$

Використовуючи співвідношення (6) та властивості опорних функцій маємо

$$\lambda \langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle + h_s(\psi) \leq c(\Phi(k), \psi) \quad \text{для}$$

всіх $\psi \in S$ та $k \in [0, N]$. Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_s(\psi)}{\langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle},$$

$\psi \in S$, $k \in [0, N]$ при умові

$$\langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle > 0. \text{ Остаточнo отримаємо}$$

$$d_s(x_0) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - h_s(\psi)}{\langle g_s(\psi), \Theta(k)x_0 \rangle}.$$

Теорему доведено.

За властивостями оберненої функції Мінковського

$$G_s = \bigcup_{e \in S} \{x = ke : k \in [0, d_s(e)]\}.$$

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайдемо функцію Мінковського, обернену функцію Мінковського множини G_s для задачі практичної стійкості множинної дискретної системи вигляду

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad B_s(x) = K_{p(k)}(x)$$

за умови, що обмеження

$$\Phi(k) = K_{r(k)}(0), \quad r(k) > 0, \quad k \in [0, N].$$

З співвідношення (8) випливає, що у цьому випадку функція Мінковського має вигляд

$$m_s(x_0) = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle \psi, \Theta(k)x_0 \rangle}{r(k) - p(k)}.$$

Розв'язуючи задачу на умовний екстремум

$$\max_{\psi \in S} \langle \psi, \Theta(k)x_0 \rangle = \|\Theta(k)x_0\|,$$

одержуємо

$$m_s(x_0) = \max_{k \in [0, N]} \frac{\|\Theta(k)x_0\|}{r(k) - p(k)}.$$

Обернена функція Мінковського згідно співвідношення (8) може бути записана так

$$d_s(x_0) = \min_{k \in [0, N]} \frac{r(k) - p(k)}{\|\Theta(k)x_0\|}.$$

Висновки. В статті обґрунтовано компактність та властивості границі максимальної за включенням множини практичної стійкості дискретних множинних систем. Для лінійної дискретної множинної системи доведено опуклість оптимальної множини початкових умов, одержано її функцію Мінковського та обернену функцію Мінковського.

Список використаних джерел

1. Башняков А.Н., Пичкур В.В., Хитко И.В. О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы // Проблемы управления и информатики. – 2011. – №2. – С.5-11.
2. Благодатских В.И. Теория дифференциальных включений. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 88 с.
3. Бублик Б.Н., Гарашенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Київ: Наукдумка, 1985. – 304 с.
4. Пичкур В.В. Дослідження задач практичної стійкості диференціальних включень. – К.: Київський університет, 2005. – 141 с.
5. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
6. Martynyuk A.A. Stability analysis of discrete systems // International Applied Mechanics – 2000. – Vol.36, No. 7. – P. 3-34.

Надійшла до редколегії 08.02.2012 р.

УДК 519.21

Лівінська Г.В., асист.,
Лебедєв Є.О., д. ф.-м. н., проф.**Гаусівська апроксимація мереж із
змінною інтенсивністю вхідного потоку**

Розглядаються багатоканальні стохастичні мережі. Ззовні на кожний вузол мережі надходить пуасонівський потік вимог, характеристики якого залежать від часу. У перевантаженому режимі функціонування побудований апроксимативний гаусівський процес і доведена функціональна гранична теорема.

Ключові слова: багатоканальна стохастична мережа, перевантажений режим, гаусівська апроксимація.

E-mail: leb@unicyb.kiev.ua, livinskaav@gmail.com
Статтю представив д. т. н. проф. Заславський В. А.

Робота присвячена актуальній тематичі – побудові апроксимативних неперервних пуасонівських процесів для багатовимірних стрибкоподібних процесів. Основна математична модель, що досліджується у статті, представляє собою мережу масового обслуговування, яка складається з “ r ” обслуговуючих вузлів. На i -ий вузол мережі надходить пуасонівський потік вимог $v_i(t)$ з ведучою функцією $\Lambda_i(t)$, $i=1,2,\dots,r$. Кожен з “ r ” вузлів функціонує як багатоканальна стохастична система. При надходженні вимоги у таку систему одразу починається її обслуговування. Час обслуговування у i -ому вузлі показниково розподілений з параметром μ_i , $i=1,2,\dots,r$. Після завершення обслуговування в i -ому вузлі вимога з імовірністю p_0 надходить для обслуговування в j -ий вузол і з імовірністю $p_{r+1}=1-\sum_{j=1}^r p_0$ залишає мережу, $P=\|p_0\|$ - матриця маршрутизації мережі. Додатковий вузол з номером “ $r+1$ ” інтерпретується як “вихід” з мережі.

У відповідності до системи позначень, яка прийнята в теорії стохастичних мереж (напр. [1][2]), описану вище модель будемо позначати символом $[M_r | M | \infty]$.

G.V. Livinska, ass. prof.,
E.O. Lebedev, Ph.D., prof.

**Gaussian approximation of networks with
variable intensity of input flow**

The multi-channel stochastic networks are considered. From the outside a Poisson input flow of calls which characteristics are time dependent arrives at each node of the networks. In heavy traffic for service process an approximate Gaussian one is constructed and functional limit theorem is proved.

Key words: multi-channel stochastic network, overloaded regime, Gaussian approximation.

Нехай $Q_i(t)$, $i=1,2,\dots,r$ - число вимог у i -ому вузлі мережі у момент часу t . Процесом обслуговування вимог у мережі типу $[M_r | M | \infty]$ будемо називати r -вимірний процес $Q'(t)=(Q_1(t),\dots,Q_r(t))$. Головна мета дослідження – вивчити процес $Q(t)$, $t \geq 0$, в умовах критичного навантаження в мережі.

Режим критичного навантаження обумовлюється наступною поведінкою параметрів мережі.

- 1) Для кожного $i=1,2,\dots,r$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_i(t)/t = \lambda_i > 0$.

Розглянемо два важливих для застосувань випадки, коли умова 1) виконується. У зв'язку з цим припустимо (на короткий час), що пуасонівський потік $v_i(t)$ регулярний:

$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u) du$, де $\lambda_i(u)$ - миттєві значення параметра (див., наприклад, [1], стор. 100). Такий потік природно називати пуасонівським потоком із змінним параметром.

Якщо для регулярного потоку $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = \lambda_i > 0$,

то умова 1) виконується. Нехай тепер $\lambda_i(t)$ періодична з періодом T_i функція. Тоді умова 1)

виконується для $\lambda_i = \int_0^{T_i} \lambda_i(u) du$.

2) Інтенсивності обслуговування у кожному вузлі залежать від "n" (номера серії) таким чином, що $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu_i(n) = \mu_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Разом умови 1), 2) означають, що $[M_i | M | \infty]^-$ мережа функціонує у переважаному режимі.

3) У початковий момент часу $t=0$ мережа порожня: $Q_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

У контексті умов 1) – 3) розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - q^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

де $q^{(n)}(nt) = (q_1^{(n)}(nt), \dots, q_r^{(n)}(nt))$,

$$q_j^{(n)}(nt) = \sum_{u=1}^{nt} d\Lambda_j(u) p_j^{(n)}(nt - u), \quad j = 1, \dots, r,$$

$p_j^{(n)}(t)$ - елементи матриці

$$P^{(n)}(t) = \|p_j^{(n)}(t)\|_{j,k} = \exp\{\Delta(\mu^{(n)})(P - I)t\},$$

$$\mu^{(n)} = (\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_r^{(n)}),$$

$\Delta(x) = \|\delta_{ij} x_i\|$ - діагональна матриця з вектором $x' = (x_1, \dots, x_r)$ на головній діагоналі; $I = \|\delta_{ij}\|$ - одинична матриця.

Для того, щоб описати границю для послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, введемо два незалежних гаусівських процеси $\xi^{(n)}(t) = (\xi_1^{(n)}(t), \dots, \xi_r^{(n)}(t))$, $i = 1, 2$.

Процес $\xi^{(n)}(t)$ визначається середніми значеннями $E\xi^{(n)}(t) = 0$ і кореляційними матрицями

$$R^{(n)}(t) = E\xi^{(n)}(t)E\xi^{(n)}(t) - E\xi^{(n)}(t)E\xi^{(n)}(t) = \int_0^t P'(u)\Delta(\lambda)P(u)du$$

$$R^{(n)}(s, t) = E\xi^{(n)}(s)E\xi^{(n)}(t) - E\xi^{(n)}(s)E\xi^{(n)}(t) = R^{(n)}(s)P(t - s), \quad s < t,$$

де $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $P(t) = \exp\{\Delta(\mu)(P - I)t\}$.

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$ $E\xi^{(2)}(t) = 0$,

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t \Delta(\lambda'P(u)) - P'(u)\Delta(\lambda)P(u)du,$$

$$R^{(2)}(s, t) = R^{(2)}(s)P(t - s), \quad s < t.$$

Наступна теорема є головним результатом роботи.

Теорема 1. Нехай для $[M_i | M | \infty]^-$ мережі виконуються умови 1) – 3). Тоді на будь-якому скінченному проміжку послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, збігається у рівномірній топології до процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Перед доведенням теореми, отримаємо ряд допоміжних результатів.

Лема 1. Нехай $v(t)$ - пуассонівський процес з ведучою функцією $\Lambda(t)$, для якого виконується умова 1). Тоді на будь-якому скінченному проміжку $W^{(n)}(t) = n^{-1/2}(v(nt) - \Lambda(nt))$, $n \geq 1$, збігається у рівномірній топології до вінерівського процесу $W(t)$ з нульовим переносом і коефіцієнтом дифузії λ .

У подальшому через $W_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, будемо позначати незалежні вінерівські процеси з нульовими переносами і коефіцієнтами дифузії λ_i відповідно. При виконанні умови 1) вони апроксимують вхідні потоки $v_i(t)$.

Для $W'(t) = (W_1(t), \dots, W_r(t))$ нам буде потрібен такий результат (див. лема 1, [2]).

Лема 2. Скінченновимірні розподіли $\int_0^t dW'(u)P(t-u)$ співпадають із скінченновимірними розподілами гаусівського процесу $\xi^{(1)}(t)$.

Обслуговування окремо взятої вимоги у вузлах $[M_i | M | \infty]^-$ мережі відбувається незалежно від інших вимог. Для того щоб конструктивно задати процес обслуговування, розглянемо ланцюг Маркова $x(t)$, $t \geq 0$, в множині станів $\{1, \dots, r, r+1\}$, який задається інфінітезимальними характеристиками

$$a_{ij} = \begin{cases} -\mu_i(1 - p_{ii}), & i = j = 1, \dots, r; \\ \mu_i p_{ij}, & i \neq j, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, r, r+1; \\ 0, & i = r+1, \quad j = 1, \dots, r, r+1; \end{cases}$$

і початковим

$$p'(0) = (p_1(0), \dots, p_{r+1}(0)).$$

розподілом

Якщо $p_i(0) = 1$, то відповідний ланцюг будемо позначати $x^{(i)}(t)$. Стан "r+1" для ланцюга $x(t)$ є поглинаючим. Перехідні ймовірності $p_{ij}(t) = P\{x(t) = j \mid x(0) = i\} = P\{x^{(i)}(t) = j\}$,

$i, j = 1, \dots, r$, є елементами матриці $P(t) = \exp\{\Delta(\mu)(P - I)t\}$.

Трасекторія вимоги від моменту надходження в мережу через i-ий вузол і до моменту виходу з

неї може бути описана ланцюгом $\chi^{(i)}(t)$, при цьому поглинання в стані " $r+1$ " інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

Зв'яжемо з ланцюгом $\chi^{(i)}(t)$, $t \geq 0$, r -вимірний процес індикаторного типу $\chi^{(i)r}(t) = (\chi_1^{(i)r}(t), \dots, \chi_r^{(i)r}(t))$, $t \geq 0$, наступним чином

$$\chi^{(i)}(t) = \begin{cases} e_j, & \chi^{(i)}(t) = j, \quad j = 1, 2, \dots, r; \\ e_0, & \chi^{(i)}(t) = r+1; \end{cases}$$

де e_j - r -вимірний вектор, j -та компонента якого дорівнює 1, а інші дорівнюють нулю; e_0 - нульовий r -вимірний вектор.

Для довільного натурального N і $z'(i) = (z_1(i), \dots, z_r(i))$, $i = 1, 2, \dots, N$, $|z(i)| \leq 1$, через $\Phi^{(n)} = \Phi^{(n)}(t_1, \dots, t_N, z(1), \dots, z(N))$ будемо позначати сумісну генератрису векторів $\chi^{(n)}(t_1), \dots, \chi^{(n)}(t_N)$, $0 < t_1 < \dots < t_N$,

$$\Phi' = (\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(r)}).$$

Лема 3. Для довільного $N = 1, 2, \dots$ і $0 < t_1 < \dots < t_N$

$$\Phi = \tilde{1} + \sum_{i=1}^N P(\Delta t_i) \Delta[z(i)] \dots P(\Delta t_{i-1}) \Delta[z(i-1)] \times \\ \times P(\Delta t_i) \chi(z(i) - \tilde{1}), \quad (1)$$

де $\tilde{1}$ - r -вимірний вектор, складений з одиниць; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($t_0 = 0$), $i = 1, 2, \dots, N$.

Доведення (1) можна отримати методом математичної індукції за параметром N .

Доведення теореми 1.

Проаналізуємо поведінку при $n \rightarrow \infty$ одновимірних розподілів процесу $\xi^{(n)}(t)$, $t \geq 0$.

При фіксованій траєкторії вхідного потоку $v(t)$ розподіл $Q(t)$ співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^{v_m(t)} \chi^{(n,k)}(t - t_k^{(n)}),$$

де $\chi^{(n,1)}(t), \chi^{(n,2)}(t), \dots$ - послідовність незалежних випадкових процесів, скінченновимірні розподіли яких співпадають з $\chi^{(n)}(t)$, $t_k^{(n)}$ - момент надходження k -ої вимоги на m -ий вузол мережі.

Враховуючи цей факт, а також формулу (2) при $N=1$, генератрису $\Phi(t, z)$, $z' = (z_1, \dots, z_r)$, $|z| \leq 1$, вектора $Q(t)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(t, z) = E \prod_{m=1}^r \prod_{k=1}^{v_m(t)} (1 - p_m'(t - t_k^{(n)}) \chi(z - \tilde{1})). \quad (3)$$

де $p_m'(\tau) = (p_{m1}(\tau), \dots, p_{mr}(\tau))$ - m -ий рядок матриці $P(\tau)$.

Нехай $\varphi^{(n)}(s)$, $s' = (s_1, \dots, s_r) \in R_r$ - характеристична функція $\xi^{(n)}(t)$. З урахуванням (3)

$$\varphi^{(n)}(s) = E e^{s' \xi^{(n)}} = \exp\{-in^{-1/2} q^{(n,r)}(nt) s\} \times \\ \times E \exp\left\{\sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^{v_m^{(n)}} \ln[1 - p_m^{(n,r)}(nt - t_k^{(n)}) (e^{s' \chi^{(n,k)}} - \tilde{1})]\right\},$$

де $(e^{s' \chi^{(n,k)}})' = (e^{s_1 \chi_1^{(n,k)}}, \dots, e^{s_r \chi_r^{(n,k)}})$.

Позначимо через $(s^2)' = (s_1^2, \dots, s_r^2)$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{-in^{-1/2} q^{(n,r)}(nt) s\} \times \\ \times E \exp\left\{\sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^{v_m^{(n)}} \ln[1 - p_m^{(n,r)}(nt - t_k^{(n)}) (e^{s' \chi^{(n,k)}} - \tilde{1})]\right\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{-in^{-1/2} q^{(n,r)}(nt) s\} E \exp\{in^{-1/2} \int_0^{nt} dv'(\tau) P(\tau - t) s - \\ - \frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^{nt} dv'(\tau) P(\tau - t) s^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \int_0^{nt} dv_m(\tau) s' p_m(\tau - t) p_m'(t - \tau) s\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^{nt} d\Lambda'(\tau) P(\tau - t) s^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \int_0^{nt} d\Lambda_m(\tau) s' p_m(\tau - t) p_m'(t - \tau) s\right\} \times \\ \times E \exp\left[\int_0^{nt} dv^{(n,r)}(\tau) P(\tau - t) s\right],$$

де $W^{(n,r)}(\tau) = (W_1^{(n)}(\tau), \dots, W_r^{(n)}(\tau))$,

$$W_k^{(n)}(\tau) = n^{-1/2} (v_k(n\tau) - \Lambda_k(n\tau)), \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Використовуючи умову 1) і твердження лем 1, 2, знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(s) = \exp\left\{-\frac{1}{2} s' \int_0^t P(u) du s^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \int_0^t s' p_m(u) p_m'(u) du s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} s' \int_0^t P'(u) \Delta(\lambda) P(u) du s\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2} s' \int_0^t [\Delta(\lambda' P(u)) - P'(u) \Delta(\lambda) P(u)] du s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} s' \int_0^t P(u) \Delta(\lambda) P(u) du s\right\}.$$

Граничний вираз є характеристичною функцією $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$. Таким чином збіжність одновимірних розподілів доведено.

Розглянемо тепер двовимірні розподіли.

При фіксованій траєкторії вхідного потоку розподіл $(Q(t_1), Q(t_2))$, $0 < t_1 < t_2$, співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^r \left(\sum_{k=1}^{r_m(t_1)} \chi^{(m,k)}(t_1 - \tau_k^{(m)}) + \sum_{k=1}^{r_m(t_2)} \chi^{(m,k)}(t_2 - \tau_k^{(m)}) + \sum_{k=r_m(t_1)+1}^{r_m(t_2)} \chi^{(m,k)}(t_2 - \tau_k^{(m)}) \right) \cdot$$

Використовуючи формулу (2) для $N = 2$, сумісну генератрису $\Phi(t_1, t_2, z(1), z(2))$ векторів $Q(t_1), Q(t_2)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(t_1, t_2, z(1), z(2)) = E \left(\prod_{m=1}^r \prod_{k=1}^{r_m(t_1)} [1 + p_m'(t_1 - \tau_k^{(m)}) \chi(z(1) - \bar{1}) + p_m'(t_1 - \tau_k^{(m)}) \Delta(z(1))] P(\Delta_2) \chi(z(2) - \bar{1}) \times \prod_{k=r_m(t_1)+1}^{r_m(t_2)} [1 + p_m'(t_2 - \tau_k^{(m)}) \chi(z(2) - \bar{1})] \right) \cdot$$

Звідси знаходимо границю сумісної характеристичної функції $\varphi^{(n)}(s(1), s(2))$, $s(1), s(2) \in R_+$, векторів $\xi^{(n)}(t_1)$ і $\xi^{(n)}(t_2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(s(1), s(2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \exp \{ i \xi^{(n)}(t_1) s(1) + i \xi^{(n)}(t_2) s(2) \} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ -i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)}(nt_1) s(1) - i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)}(nt_2) s(2) \right\} \times \\ \times E \exp \left\{ \sum_{m=1}^r \left(\sum_{k=1}^{r_m(t_1)} \ln [1 + p_m^{(n)}(nt_1 - \tau_k^{(m)}) \chi(e^{i s(1)/\sqrt{n}} - \bar{1}) + p_m^{(n)}(nt_1 - \tau_k^{(m)}) \Delta(e^{i s(1)/\sqrt{n}})] P(\Delta_2) \chi(e^{i s(2)/\sqrt{n}} - \bar{1}) \right) + \sum_{k=r_m(t_1)+1}^{r_m(t_2)} \ln [1 + p_m^{(n)}(nt_2 - \tau_k^{(m)}) \chi(e^{i s(2)/\sqrt{n}} - \bar{1})] \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ -i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)}(nt_1) s(1) - i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)}(nt_2) s(2) \right\} \times$$

$$\times E \exp \left\{ i \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_1} dv'(\pi\tau) P(t_1 - \tau) s(1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^{t_1} dv'(\pi\tau) P(t_1 - \tau) s^2(1) + \right.$$

$$\left. + i \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_2} dv'(\pi\tau) P(t_1 - \tau) \Delta(e^{i s(1)/\sqrt{n}}) P(\Delta_2) s(2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^{t_2} dv'(\pi\tau) P(t_1 - \tau) P(\Delta_2) s^2(2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \int_0^{t_1} s'(1) p_m(t_1 - \tau) p_m'(t_1 - \tau) s(1) dv_m(\pi\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \int_0^{t_2} s'(1) p_m(t_1 - \tau) p_m'(t_1 - \tau) P(\Delta_2) s(2) dv_m(\pi\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \int_0^{t_2} s'(2) P'(\Delta_2) p_m(t_1 - \tau) p_m'(t_1 - \tau) P(\Delta_2) s(2) dv_m(\pi\tau) + \right.$$

$$\left. + i \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_2} dv'(\pi\tau) P(t_2 - \tau) s(2) - \frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^{t_2} dv'(\pi\tau) P(t_2 - \tau) s^2(2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \int_0^{t_2} s'(2) p_m(t_2 - \tau) p_m'(t_2 - \tau) s(2) dv_m(\pi\tau) \right\} =$$

$$= E \exp \left\{ i \int_0^{t_1} dW'(\tau) P(t_1 - \tau) s(1) + i \int_0^{t_2} dW'(\tau) P(t_1 - \tau) s(2) \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} s'(1) \int_0^{t_1} [\Delta(\lambda' P(u)) - P'(u) \Delta(\lambda) P(u)] du s(1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} s'(2) \int_0^{t_2} [\Delta(\lambda' P(u)) - P'(u) \Delta(\lambda) P(u)] du s(2) - \right.$$

$$\left. - s'(1) \int_0^{t_2} [\Delta(\lambda' P(u)) - P'(u) \Delta(\lambda) P(u)] du P(\Delta_2) s(2) \right\}.$$

Отримана границя є характеристичною функцією двовимірного розподілу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$. Аналогічно перевіряється збіжність N -вимірних розподілів для $N > 2$.

Отриману збіжність скінченновимірних розподілів можна підсилити до збіжності $\xi^{(n)}(t)$ в рівномірній топології. Для цього слід використати збіжність нормованого вхідного потоку $W^{(n)}(t)$ до $W(t)$ в рівномірній топології і представлення процесу обслуговування як суми процесів індикаторного типу на вхідному потоці.

Теорему доведено.

Отримані апроксимативні процеси можна використовувати для підрахунку функціоналів якості обробки інформації, розв'язку оптимізаційних задач.

Список використаних джерел

1. Гнєденко Б.В., Коваленко І.Н. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнєденко, И.Н. Коваленко. – Москва: КомКнига, 2005. – 400 с.
2. Лебедєв С.О. Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування / С.О. Лебедєв // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 68. – С. 86-97.

Надійшла до редколегії 07.02.12

УДК 519.8

Машченко С.О., д. ф.-м. н., доц.,
Бовсунівський О.М., аспірант**Задача багатокритеріальної оптимізації
з нечіткою множиною критеріїв**

Розглядається задача багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв. Досліджується поняття об'єднання нечіткої множини чітких відношень, які породжуються критеріальними функціями. Визначаються поняття нечіткої множини слабо ефективних альтернатив та максимізуючої альтернативи цієї множини, досліджуються їхні властивості.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, нечітка множина типу 2, прийняття рішень, раціональний вибір.

*E-mail: msomail@yandex.ru, bovs@email.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Процес прийняття рішень за множиною критеріїв інколи може бути ускладнений тим, що особа, яка приймає рішення (ОПР), не може чітко вказати множину актуальних для неї критеріїв. З іншого боку, така складність може, навпаки, спростити розв'язання задачі прийняття рішень за умовою побудови спеціального математичного апарату, який дозволить використати функцію належності нечіткої множини актуальних для ОПР критеріїв як джерело додаткової інформації про її перевагу на множині критеріїв. У цій статті досліджується задача багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв та пропонується метод її розв'язання.

Розглянемо задачу вибору альтернатив з множини X евклідового простору E . Нехай на X визначені деякі функції $f_i(x)$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, які ми будемо трактувати як певні критерії, що характеризують корисність альтернатив $x \in X$ для ОПР. Будемо вважати, що ОПР прагне максимізувати ці критерії. Якщо ОПР однозначно може вказати за якими критеріями $f_i(x)$, $i \in N' \subseteq N$, слід обирати раціональну альтернативу, то ми одержимо відому [1] задачу багатокритеріальної оптимізації на множині критеріїв $N' \subseteq N$. У деяких випадках може бути так, що ОПР не може чітко вказати які критерії $f_i(x)$, $i \in N$, характеризують

S.O.Mashchenko, D.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.,
O.M.Bovsunivskyi*, Postgrad. Stud.**The multicriterion optimization problem
with the fuzzy set of criteria**

The multicriterion optimization problem with the fuzzy set of criteria is considered in this paper. The definition of union of fuzzy set of clear relations which are generated by criterion functions is explored. The definition of fuzzy set poorly of effective alternatives and maximizing alternative of this set are determined, their properties are explored.

Keywords: the multicriterion optimization, the fuzzy set of type 2, a decision making, a rational choice.

її ціль, але може задати деяку нечітку підмножину $\tilde{N} \subseteq N$ цих критеріїв. Тоді перед ОПР поставне задача виду:

$$f_i(x) \rightarrow \max_{x \in X}, i \in \tilde{N}, \quad (1)$$

яку будемо називати задачею багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв.

Позначимо $\eta: N \rightarrow [0, 1]$ функцію належності нечіткої множини $\tilde{N}$ критеріїв $f_i(x)$, $i \in N$, які характеризують ціль ОПР.

У даній роботі пропонується підхід до вибору альтернатив задачі (1), який ґрунтується на побудові агрегованої нечіткої цілі ОПР як нечіткого відношення $\tilde{R} = \bigcup_{i \in N} R_i$. Повне бінарне відношення $R_i \subseteq X \times X$ визначається через критерій $f_i(x)$ наступним чином:

$$R_i: xR_i y \Leftrightarrow f_i(x) \geq f_i(y), \forall x, y \in X, i \in N. \quad (2)$$

Нечітке відношення $\tilde{R} = \bigcup_{i \in N} R_i$ є об'єднанням нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких відношень R_i , $i \in N$. Згідно з [1] воно є нечітким відношенням типу 2, тобто значення функції належності цього відношення утворюють нечітку множину.

Нехай $r_j: X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ - характеристична функція належності відношення R_j , $j \in N$ (тобто

$$xR_i y \Leftrightarrow r_i(x, y) = 1).$$

$$\text{Для кожного } x, y \in X \text{ позначимо: } N^U(x, y) = \\ = \{i \in N \mid \exists j \in N : (r_i(x, y), \eta(j)) > (r_j(x, y), \eta(i))\} \quad (3)$$

- множини тих індексів критеріїв корисності, які не покращуються зі збільшенням характеристичних функцій $r_i(x, y)$ відношень R_i , $i \in N$, та функції належності $\eta(i)$ нечіткої множини $\tilde{N}$;

$$\eta^U(x, y, i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^U(x, y), \\ 0, & i \notin N^U(x, y), \end{cases} \quad (4)$$

- функцію належності нечіткої підмножини множини N з носієм $N^U(x, y)$.

Об'єднанням нечіткої множини $\tilde{N}$ нечітких відношень R_i , $i \in N$, називається [2] $\tilde{R} = \bigcup_{i \in N} R_i$ - нечітке відношення типу 2, яке визначене на множині X , та задається трійками (x, y, r') , $x, y \in X$, $r' = r(x, y, z)$, де $r : X \times X \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ - функція належності нечіткого відображення $\tilde{R}(x, y)$, яке виконує роль "нечіткої функції належності" нечіткого відношення $\tilde{R}$ типу 2, і для $z \in \{0, 1\}$ має вигляд

$$r' = \begin{cases} \max_{i \in N} \{\eta^U(x, y, i) \mid r_i(x, y) = z\}, & r_i(x, y) = z, \\ 0, & r_i(x, y) \neq z. \end{cases} \quad (5)$$

Значення нечіткого відображення $\tilde{R}(x, y)$ при фіксованих $x^0, y^0 \in X$ утворюють нечітку підмножину $\tilde{R}(x^0, y^0)$ множини $\{0, 1\}$ з функцією належності $r(x^0, y^0, z)$, $z \in \{0, 1\}$. Відмітимо, що множина $\{0, 1\}$ приймається за універсальну множину образів нечіткого відображення $\tilde{R}(x, y)$, оскільки за (5) $z \neq r_i(x, y) \in \{0, 1\} \Rightarrow r(x, y, z) = 0$ для $\forall x, y \in X$, $i \in N$. Значення $r(x, y, 1)$ можна розуміти як ступінь належності пари $(x, y) \in X \times X$ відношенню $\tilde{R}$. Відповідно значення $r(x, y, 0)$ можна розуміти як ступінь неналежності $(x, y) \in X \times X$ відношенню $\tilde{R}$.

Операція об'єднання нечіткої множини нечітких відношень пов'язана з класичною теорією нечітких множин (типу 1) наступним чином. Нехай $\tilde{R}(x, y)$ - нечітка множина оптимальних значень цільової функції

дискретної задачі нечіткого математичного програмування (ЗНМП): $\tilde{F}(x, y) = \max_{j \in N} r_{(x, y)}(j)$, - максимізувати функцію (чітку) $r_{(x, y)}(j) = r_j(x, y)$ на нечіткій множині $\tilde{N}$. Відповідно до методики С.А. Орловського [2], рішенням ЗНМП $\tilde{F}(x, y) = \max_{j \in N} r_{(x, y)}(j)$, де $\tilde{N}$ - нечітка множина з функцією належності $\eta : N \rightarrow [0, 1]$, називається нечітка множина з функцією належності виду:

$$\eta_{(x, y)}(i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N_{(x, y)}, \\ 0, & i \notin N_{(x, y)}, \end{cases} \quad (6)$$

де множина

$$N_{(x, y)} = \{i \in N \mid \exists j \in N : (r_{(x, y)}(j), \eta(j)) > (r_{(x, y)}(i), \eta(i))\}.$$

В свою чергу, нечітке значення $\tilde{F}(x, y) = \max_{j \in N} r_{(x, y)}(j)$ задається функцією належності:

$$r_{(x, y)}(z) = \begin{cases} \max_{i \in N} \{\eta_{(x, y)}(i) \mid r_{(x, y)}(i) = z\}, & r_{(x, y)}(i) = z, \\ 0, & r_{(x, y)}(i) \neq z. \end{cases} \quad (7)$$

Це означення дещо відрізняється від [2], а саме тим, що формула (5) записана з урахуванням дискретності значень функції $r_{(x, y)}(i) \in \{0, 1\}$.

Позначимо для $\forall x, y \in X$ $\eta^U(x, y, i) = \eta_{(x, y)}(i)$, $r(x, y, z) = r_{(x, y)}(z)$. Тоді з (4)-(5) і (6)-(7) отримаємо, що для будь-яких фіксованих значень $x, y \in X$ нечітка множина $\tilde{R}(x, y) \subseteq \{0, 1\}$, яка є образом нечіткого відображення $\tilde{R}(x, y)$, буде нечіткою множиною значень функції належності $r(x, y, z)$ нечіткого відношення $\tilde{R} = \bigcup_{i \in N} R_i$ типу 2 тоді й лише тоді, коли $\tilde{R}(x, y)$ буде нечіткою множиною оптимальних значень цільової функції дискретної ЗНМП: $\tilde{F}(x, y) = \max_{j \in N} r_{(x, y)}(j)$, - максимізувати чітку функцію $r_{(x, y)}(j) = r_j(x, y)$ на нечіткій множині $\tilde{N}$.

Наведене вище порівняння показує, якого характеру узагальненням класичної операції об'єднання відношень є об'єднання нечіткої множини чітких відношень. Адже, якщо для чіткої множини N , значення характеристичної функції належності об'єднання чітких відношень $r(x, y) = \max_{j \in N} r_j(x, y) = \max_{j \in N} r_{(x, y)}(j)$ утворюють чітку множину значень цільової функції задачі

чіткого дискретного програмування, то для нечіткої множини $\tilde{N}$ значення $\tilde{r}(x, y) = \max_{j \in N} r_j(x, y) = \max_{j \in N} r_{(x, y)}(j)$ утворюють нечітку множину значень цільової функції дискретної ЗНМП.

Конструктивно побудувати функцію належності $r(x, y, z)$ дозволяє наступна теорема.

Позначимо: $I^* = \{i \in N \mid \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j)\}$.

Теорема 1. Нехай $R_i, i \in N$, - чіткі відношення, які задані на множині X відповідними характеристичними функціями $r_i(x, y), x, y \in X, i \in N$; $\eta(i), i \in N$, - функція належності нечіткої множини $\tilde{N}$. Для того, щоб нечітке відношення $\tilde{R}$ типу 2, яке задане функцією належності $r(x, y, z)$; $x, y \in X$; $z \in \{0, 1\}$, відповідала об'єднанню нечіткої множини $\tilde{N}$ відношень $R_i, i \in N$, тобто, $\tilde{R} = \bigcup_{i \in N} R_i$ необхідно й достатньо, щоб для $x, y \in X$:

$$r(x, y, 1) = \begin{cases} \max_{j \in N} \eta(j), & \exists j \in N: r_j(x, y) = 1, \\ 0, & r_j(x, y) = 0, \forall j \in N, \end{cases} \quad (8)$$

$$r(x, y, 0) = \begin{cases} \max_{j \in N} \eta(j), & r_i(x, y) = 0, \forall i \in I^*, \\ 0, & \exists i \in I^*: r_i(x, y) = 1, \end{cases}$$

Доведення. Для початку покажемо, що формула (5) еквівалентна наступній:

$$r(x, y, z) = \begin{cases} \max_{i \in N^{ij}(x, y, z)} \eta(i), & N^{ij}(x, y, z) \neq \emptyset, \\ 0, & N^{ij}(x, y, z) = \emptyset, \end{cases} \quad (9)$$

де для $\forall x, y \in X \quad \forall z \in \{0, 1\}$

$$N^{ij}(x, y, z) = \{i \in N \mid z = r_i(x, y) = \max_{j \in N} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j)\} \quad (10)$$

Відзначимо, що з (4), (5) випливає, що $\tilde{R} = \bigcup_{i \in N} R_i \Leftrightarrow r(x, y, z) =$

$$= \begin{cases} \max_{i \in N^{ij}(x, y, z)} \{\eta(i) \mid r_i(x, y) = z\}, & r_i(x, y) = z, \\ 0, & r_i(x, y) \neq z, \end{cases} \quad (11)$$

$x, y \in X, z \in \{0, 1\}$. Тому, для доведення еквівалентності (5) та (9) достатньо показати, що (11) еквівалентно (9), (10). Отож, покажемо, що

$$N^{ij}(x, y) = \{i \in N \mid r_i(x, y) = \max_{j \in N} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j)\}, \quad x, y \in X. \quad (12)$$

Нехай для деяких $x, y \in X, i \in N$ виконуються наступні співвідношення:

$$r_i(x, y) = \max_{j \in N} r_j(x, y), \quad \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j) \quad (13)$$

Припустимо супротивне, що $i \notin N^{ij}(x, y)$. Тоді згідно (3) $\exists i \in N$, для якого $r_i(x, y) > r_i(x, y)$, $\eta(i) \geq \eta(i)$ або $r_i(x, y) \geq r_i(x, y)$, $\eta(i) > \eta(i)$.

У першому випадку, звідси слідує, що $r_i(x, y) > \max_{j \in N} r_j(x, y)$. У другому випадку, одержимо $\eta(i) > \max_{j \in N} \eta(j)$, а це, очевидно, суперечить (13).

Нехай $i \in N^{ij}(x, y)$. Припустимо супротивне, що справедлива нерівність $r_i(x, y) < \max_{j \in N} r_j(x, y)$ або $\eta(i) < \max_{j \in N} \eta(j)$.

У першому випадку робимо висновок, що $\exists i \in N$, для якого $\eta(i) \geq \eta(i)$, $r_i(x, y) > r_i(x, y)$. Тоді $(r_i(x, y), \eta(i)) > (r_i(x, y), \eta(i))$ і за (3) $i \notin N^{ij}(x, y)$.

Аналогічно у другому випадку, $\exists k \in N$, для якого $r_k(x, y) > r_i(x, y)$, $\eta(k) \geq \eta(i)$. Тоді $(r_k(x, y), \eta(k)) > (r_i(x, y), \eta(i))$ і за (3) $i \notin N^{ij}(x, y)$. Таким чином, отримали суперечність і має місце (12), а звідси випливає рівність $N^{ij}(x, y, z) = N^{ij}(x, y) \cup \{i \in N \mid r_i(x, y) = z\}$, тоді формула (11) еквівалентна (9), (10), а тому формули (5) та (9) є еквівалентними.

Тепер для доведення теореми достатньо показати еквівалентність (8) та (9).

Для початку запишемо (10) для $z=1$ у двох можливих випадках. Спочатку нехай $r_i(x, y) = 0, \forall i \in N$. Тоді за (8) $r(x, y, 1) = 0$. З іншого боку, з (10) випливає, що $N^{ij}(x, y, 1) = \emptyset$ і тоді за (9) $r(x, y, 1) = 0$.

У другому випадку, нехай $\exists i \in N: r_i(x, y) = 1$. Визначимо за (9) значення $r(x, y, 1)$. Для цього відповідно до (10) побудуємо наступну множину: $N^{ij}(x, y, 1) = \{i \in N \mid 1 = r_i(x, y) = \max_{j \in N} r_j(x, y), \eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j)\}$. Покажемо, що виконуються

$N^U(x, y, 1) = \text{Arg max}_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$. Позначимо через

$\eta_i^*(x, y) = \max_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$. Нехай $i \in \text{Arg max}_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$,

тоді $\eta(i) = \eta_i^*(x, y)$ та $\max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y) =$
 $= \max\{\max_{\eta(j) \geq \eta_i^*(x, y)} r_j(x, y), \max_{\eta(j) > \eta_i^*(x, y)} r_j(x, y)\} =$
 $= \max\{1, \max_{\eta(j) > \eta_i^*(x, y)} r_j(x, y)\} = 1 = r_i(x, y)$. Звідси

очевидно, що $i \in N^U(x, y, 1)$.

Тепер навпаки, нехай $i \in N^U(x, y, 1)$. Тоді
 $1 = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y)$ та $\eta(i) = \eta_i^*(x, y)$.

Звідси $i \in \text{Arg max}_{r_j(x, y)=1} \eta(j)$, тоді за (9)

$r(x, y, 1) = \eta_i^*$, а тому формули (8), (9) є еквівалентними для $z = 1$.

Далі запишемо (10) для $z = 0$ у двох можливих випадках. Позначимо: $\eta_0^* = \max_{j \in N} \eta(j)$,

$I^* = \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j)$. Спочатку нехай $r_i(x, y) = 0$,

$\forall i \in I^*$. Тоді за (8) $r(x, y, 0) = \eta_0^*$. Визначимо значення $r(x, y, 0)$ за формулою (9). Для цього побудуємо відповідно до (10) множину:

$N^U(x, y, 0) = \{i \in N \mid 0 = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y),$

$\eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j) = \{i \in I^* \mid 0 = r_i(x, y) =$

$= \max_{j \in I^*} r_j(x, y)\} = I^*$. Звідси за (9) $r(x, y, 0) = \eta_0^*$.

У другому випадку, нехай $\exists i \in I^* : r_i(x, y) = 1$. Тоді за (8) $r(x, y, 0) = 0$. Визначимо значення $r(x, y, 0)$ згідно (9). Для цього за (10) побудуємо $N^U(x, y, 0) = \{i \in N \mid 0 = r_i(x, y) = \max_{\eta(j) \geq \eta(i)} r_j(x, y),$

$\eta(i) = \max_{j \in N} \eta(j) = \eta_0^*\} = \{i \in I^* \mid 0 = r_i(x, y) =$

$= \max_{j \in I^*} r_j(x, y) = 1\} = \emptyset$. Звідси за (9) $r(x, y, 0) = 0$,

а тому формули (8), (9) є еквівалентними для $z = 0$. Теорему доведено.

Перейдемо до визначення та пошуку нечітких слабо-ефективних альтернатив.

Спочатку сформулюємо визначення множини WEA слабо-ефективних альтернатив для задачі багатокритеріальної оптимізації з чіткою множиною N критеріїв:

$$f(x) \rightarrow \max_{x \in X}, i \in N.$$

Множина

$$SO = \{x^* \in X \mid \forall y \in X : f_j(y) > f_j(x^*), \forall j \in N\}$$

Називається [3] множиною слабо-ефективних (оптимальних за Слейтером) альтернатив задачі багатокритеріальної оптимізації з чіткою множиною критеріїв.

Нехай $S = R \setminus R^{-1}$ - відношення домінування, індуковане агрегованим відношенням переваги $R = \bigcup_{i \in N} R_i$, де відношення переваги R_i визначаються відповідно до (2). Оскільки відношення переваги R_i , $i \in N$, є повними, то відношення $R = \bigcup_{i \in N} R_i$ буде також повним. Тому

$S = \bar{R}^{-1} = \bigcap_{i \in N} \bar{R}_i^{-1}$. Таким чином, множина SO складається з альтернатив, які не домінуються за відношенням $S = \bigcap_{i \in N} \bar{R}_i^{-1}$. Тоді очевидно,

$$SO = \{x \in X \mid \nexists \bar{y} \bar{x}, \forall y \in X\}.$$

Перейдемо до формалізації множини нечітких слабо-ефективних альтернатив $FWEA$ для задачі (1) багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв.

Нехай $R_{\bar{z}} = \bigcup_{j \in N} R_j$ - нечітке відношення переваги ОПР (як показано вище типу 2), яке задається нечітким відображенням з функцією належності $r(x, y, z)$, $x, y \in X$, $z \in \{0, 1\}$. Побудуємо нечітку множину (позначимо її $FWEA$) альтернатив, які не домінуються за відношенням $R_{\bar{z}}$ іншими альтернативами.

Спочатку побудуємо асиметричну частину агрегованого нечіткого відношення переваги ОПР $R_{\bar{z}}$. Позначимо це відношення домінування $S_{\bar{z}} = R_{\bar{z}} \setminus R_{\bar{z}}^{-1} = R_{\bar{z}} \cap \bar{R}_{\bar{z}}^{-1}$. Воно буде задаватися нечітким відображенням з функцією належності $s: X \times \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ наступного виду:

$$s(x, y, z) = \max_{\substack{z_1, z_2 \in \{0, 1\} \\ z = \min\{z_1, z_2\}}} \min\{r(x, y, z_1), r(y, x, 1 - z_2)\},$$

$$x \in X, z \in \{0, 1\}. \quad (14)$$

Розглянемо нечітку множину типу 2, яка задається нечітким відображенням з функцією належності $\mu: X \times \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ наступного виду:

$$\mu(x, z) = \min_{y \in X} s(y, x, 1 - z), \quad x \in X, z \in \{0, 1\}. \quad (15)$$

Значення $\mu(x, 1)$ можна розуміти як "ступінь недомінованості" альтернативи $x \in X$ для ОПР.

Відповідно значення $\mu(x, 0)$ можна розуміти як ступінь домінуваності альтернативи $x \in X$ для ОНР.

Ідея вибору множини, яка складається з альтернатив недомінованих за нечітким відношенням R_R , приводить до наступного означення.

Нечітку множину з функцією належності $\mu^{FWEA}: X \rightarrow [0, 1]$ вигляду $\mu^{FWEA}(x) = \mu(x, 1)$, будемо називати множиною нечітких слабо-ефективних альтернатив і позначати $FWEA$. Множину $\text{supp}(FWEA) = \{x \in X \mid \mu^{FWEA}(x) > 0\}$ будемо називати носієм $FWEA$.

Оскільки ОНР, як правило, цікавить вибір якоїсь єдиної альтернативи, то їм варто вибрати нечітку слабо-ефективну альтернативу x^* з максимальним ступенем недомінованості $\mu^{FWEA}(x)$. Ці міркування приводять до наступного поняття.

Альтернативу $x^* \in X$ називатимемо максимізуючою нечіткою слабо-ефективною альтернативою задачі (1), якщо $\mu^{FWEA}(x^*) = \max_{x \in X} \mu^{FWEA}(x)$.

Твердження. Для задачі багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв завжди існує максимізуюча нечітка слабо-ефективна альтернатива.

Доведення. За означенням $\mu^{FWEA}(x^*) = \max_{x \in X} \mu^{FWEA}(x) = \max_{x \in X} \mu(x, 1) = \max_{x \in X} \min_{y \in X} z(y, x, 0)$.

З (14) випливає, що

$$z(x, y, 0) = \max\{\min\{r(x, y, 0), r(y, x, 1)\}, \min\{r(x, y, 0), r(y, x, 0)\}, \min\{r(x, y, 1), r(y, x, 1)\}\}. \quad (16)$$

У свою чергу за формулами (8) з теореми 1 очевидно, що функції $r(x, y, z)$ для $\forall x \in X, \forall z \in \{0, 1\}$, можуть приймати лише скінченні значення із скінченної множини $\{0\} \cup \{\eta(j), j \in N\}$, то і функція $z(x, y, 0)$ може також приймати лише скінченні значення із скінченної множини. Звідси випливає, що завжди існує $\max_{x \in X} \min_{y \in X} z(y, x, 0)$. Твердження доведено.

Тепер за допомогою співвідношень (2) опишемо множину нечітких слабо-ефективних альтернатив $FWEA$ в термінах критеріальних функцій.

Нескладно побачити, що функція належності (8) нечіткого відношення $R_R = \bigcup_{x \in X} R_x$ типу 2 прийме такий вигляд:

$$r(x, y, 1) = \begin{cases} \max_{j \in N, f_j(x) \geq f_j(y)} \eta(j), & \exists j \in N: f_j(x) \geq f_j(y), \\ 0, & f_j(x) < f_j(y), \forall j \in N, \end{cases}$$

$$r(x, y, 0) = \begin{cases} \max_{j \in N} \eta(j), f_j(x) < f_j(y), \forall i \in \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j), \\ 0, & \exists i \in \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j): f_i(x) \geq f_i(y). \end{cases}$$

Запишемо відношення домінування (16) в термінах критеріальних функцій.

1. Нехай $f_j(x) < f_j(y), \forall j \in N$. Тоді $r(x, y, 1) = 0$, $r(x, y, 0) = r(y, x, 1) = \max_{j \in N} \eta(j)$, $r(y, x, 0) = 0$. Тому

$$z(x, y, 0) = \max\{\max_{j \in N} \eta(j), 0, 0\} = \max_{j \in N} \eta(j).$$

2. Нехай $f_j(x) > f_j(y), \forall j \in N$. Тоді $r(x, y, 1) = r(y, x, 0) = \max_{j \in N} \eta(j)$, $r(x, y, 0) = r(y, x, 1) = 0$.

Тому $z(x, y, 0) = \max\{0, 0, 0\} = 0$.

3. Нехай вектори критеріїв є непорівнянними $f(x) \not\sim f(y)$. Тоді

$$r(x, y, 1) = \max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\},$$

$$r(y, x, 1) = \max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}.$$

Позначимо: $I^* = \text{Arg} \max_{j \in N} \eta(j)$.

3.1. Нехай $f_i(x) < f_i(y)$ для $\forall i \in I^*$. Тоді $r(x, y, 0) = \max_{j \in N} \eta(j)$, $r(y, x, 0) = 0$. Тому

$$z(x, y, 0) = \max\{\max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}, \\ 0, \min\{\max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}, \\ \max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\}\}.$$

Оскільки $\max\{a, \min\{a, b\}\} = a$, то одержимо

$$z(x, y, 0) = \max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}.$$

3.2. Нехай $f_i(x) > f_i(y)$ для $\forall i \in I^*$. Тоді $r(x, y, 0) = 0$, $r(y, x, 0) = \max_{j \in N} \eta(j)$. Тому

$$z(x, y, 0) = \max\{0, 0, \min\{r(x, y, 1), r(y, x, 1)\}\} = \\ = \min\{\max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}, \\ \max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\}\}.$$

Оскільки $f_i(x) > f_i(y), \forall i \in I^*$, то $\max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\} \leq \max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\}$. Тому $z(x, y, 0) = \max\{\eta(i) \mid i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}$.

3.3. Нехай $\exists i \in I^*$, що $f_i(x) \geq f_i(y)$, та $\exists j \in I^*$, що $f_j(y) \geq f_j(x)$. Тоді $r(x, y, 0) = 0$, $r(y, x, 0) = 0$,

$$\begin{aligned} s(x, y, 0) &= \max\{0, 0, \min\{r(x, y, 1), r(y, x, 1)\}\} = \\ &= \min\{\max\{\eta(i) | i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}, \\ &\quad \max\{\eta(i) | i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\}\} \end{aligned}$$

Оскільки $\exists i \in I^*$, що $f_i(x) \geq f_i(y)$, то $\max\{\eta(i) | i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\} = \max\{\eta(i) | i \in N\}$.

Оскільки $\exists i \in I^* : f_i(x) \geq f_i(y)$, то $\max\{\eta(i) | i \in N, f_i(x) \leq f_i(y)\} = \max\{\eta(i) | i \in N\}$. Звідси випливає, що $\max\{\eta(i) | i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\} = \max\{\eta(i) | i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\}$. Таким чином, можна записати, що $s(x, y, 0) = \max\{\eta(i) | i \in N, f_i(y) \geq f_i(x)\}$.

З розглянутих вище випадків 1-3 очевидно випливає

$$s(x, y, 0) = \begin{cases} \max_{i \in N} \eta(i), & f_i(x) < f_i(y), \forall i \in N, \\ 0, & f_i(x) > f_i(y), \forall i \in N, \\ \max_{f_i(y) \geq f_i(x)} \eta(i), & f(x) \prec f(y). \end{cases} \quad (17)$$

З наведених вище міркувань випливає наступна теорема.

Теорема 2. Альтернатива x^* є максимізуючою нечіткою слабо-ефективною альтернативою задачі (1) тоді й лише тоді, коли вона є розв'язком задачі

$$\max_{x \in X} \min_{y \in X} \max\{\eta(i) | i \in N, f_i(x) \geq f_i(y)\}. \quad (18)$$

Доведення. Нехай x^*, y^*, i^* утворюють розв'язок задачі (18). Спочатку покажемо, що $x^* \in SO$.

З (18) випливає $\eta(i^*) \geq \eta(i)$, $\forall i \in M(x^*, y^*)$, де $M(x^*, y^*) = \{i \in N | f_i(x^*) \geq f_i(y^*)\}$. Причому $M(x^*, y^*) \supseteq M(x^*, y^*) \supseteq M(x, y^*)$ для $\forall x, y \in X$.

Розглянемо два випадки.

1. $M(x^*, y^*) = N$. Тоді $f_i(x^*) \geq f_i(y^*)$ для $\forall i \in N$. Оскільки $M(x^*, y^*) \supseteq M(x, y^*)$ для $\forall y \in X$, то $f_i(x^*) \geq f_i(y)$ для $\forall i \in N$, $\forall y \in X$. Тому $x^* \in SO$.

2. $M(x^*, y^*) \subset N$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO$. Тоді $\exists z \in X$ для якого $f_i(z) > f_i(x^*)$, $\forall i \in N$. Звідси $M(z, y^*) = \{i \in N | f_i(z) > f_i(x^*) \geq f_i(y^*)\} = N \supset M(x^*, y^*)$, тобто $M(z, y^*) \supset M(x^*, y^*)$. Отримали суперечність. Таким чином, $x^* \in SO$.

Припустимо супротивне, що $x^* \notin FWEA$. Тоді за означенням $\mu^{FWEA}(x^*) = \mu(x^*, 1) = 0$. Тому за

(15) $\exists y \in X$, для якої $s(y, x^*, 0) = 0$. Тоді з (17) випливає, що $f_j(y) > f_j(x^*)$, $\forall j \in N$. Звідси неважко переконатися, що $x^* \notin SO$. Одержали суперечність. Таким чином, $x^* \in FWEA$.

Нехай $x^* \in \text{supp}(FWEA)$. Покажемо, що x^* є розв'язком задачі (18). Спочатку покажемо, що $x^* \in SO$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO$. Тоді $\exists y \in X$, для якої $y \succ x^*$. Тому $y \succ x^*, \forall j \in N$.

Звідси за (2) $f_j(y) > f_j(x^*)$, $\forall j \in N$. Звідки за (17) випливає, що $s(y, x^*, 0) = 0$. Тоді

$$\mu^{FWEA}(x^*) = \mu(x^*, 1) = 0. \text{ Тому } x^* \notin \text{supp}(FWEA).$$

Таким чином, $x^* \in SO$. Це означає, що для $\forall y \in X$ або $f_j(x^*) > f_j(y)$, $\forall j \in N$, і тоді за (17) $s(y, x^*, 0) = \max_{j \in N} \eta(j)$; або $f(x^*) \prec f(y)$ і тоді за

$$(17) \quad s(y, x^*, 0) = \max_{f_i(x^*) \geq f_i(y)} \eta(i). \text{ Звідси очевидно}$$

випливає, що для $\forall y \in X \quad s(y, x^*, 0) = \max_{f_i(x^*) \geq f_i(y)} \eta(i)$.

Тоді оскільки за (15) $\mu(x^*, 1) = \min_{y \in X} s(y, x^*, 0)$, а

за означенням $\mu^{FWEA}(x^*) = \mu(x^*, 1)$, то цілком зрозуміло, що x^* є розв'язком задачі (18). Теорему доведено.

У закінченні слід відмітити, що розглянутий у роботі підхід до розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв природно узагальнює добре відомий [3] класичний метод вибору ефективних альтернатив з рахунком кількості домінуючих критеріїв в задачах багатокритеріальної оптимізації з чіткою множиною критеріїв. Зокрема, він співпадає з цим методом, якщо функція належності нечіткої множини критеріїв тотожно дорівнює одиниці.

Список використаних джерел

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
2. Машенко С.О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия / С.О. Машенко // Кибернетика и вычислительная техника. – 2010, вып.159. – С. 19 – 29.
3. Волошин О.Ф. Модели та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. виш. навч. закл. / О.Ф. Волошин, С.О. Машенко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 336 с.

Надійшла до редколегії 13.01.2012

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк О.С., к. ф.-м. н.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н., доц.**Двозначні та багатозначні композиційно-номінативні логіки**

Досліджено композиційно номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів на пропозиційному, реномінативному та кванторному рівнях. Встановлено зв'язки між цими логіками та 3-значними і 4-значними логіками однозначних предикатів, зокрема, сильною логікою Каліні та логікою Белнапа.

Ключові слова: логіка, багатозначна логіка, композиційно-номінативна логіка, предикат.

E-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Поняття і методи математичної логіки дозволяють свою ефективність при розв'язанні широкого кола задач інформатики й програмування. Водночас це індукує зворотний вплив програмування на логіку, вимагає зробити її ближчою й адекватнішою до потреб програмування та моделювання. Принципові обмеження класичної логіки предикатів виводять на перший план задачу побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Низку різноманітних логічних систем [1], що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності, розроблено на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу [2]. Композиційно-номінативні логіки (КНЛ) базуються на загальних класах часткових відображень над іменними (номінативними) даними – на класах квазіарних відображень.

Характерним для програмування й моделювання є широке використання часткових відображень над складними даними, причому такі відображення можуть бути неоднозначними. Тому постає проблема дослідження КНЛ із нетрадиційними семантиками. Класична логіка – це логіка тотальних однозначних предикатів. Логіки однозначних часткових предикатів називають логіками з неокласичною семантикою, саме такі КНЛ вивчалися в [1]. Логіки тотальних неоднозначних предикатів називають логіками з пересиченою семантикою, логіки часткових неоднозначних предикатів природно назвати логіками із загальною семантикою. Пропозиційні логіки із такими нестандартними семантиками досліджувались О.Д. Смирнвою [3]. Семантичні властивості КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів на номінативних рівнях вивчалися, зокрема, в [4–6].

M.S.Nikitchenko, Doctor Sciences (Phys.-Math.),
Professor, O.S.Shkilniak, PhD, S.S.Shkilniak,
Doctor Sciences (Phys.-Math.), Ass. Professor.**Two-valued and many-valued composition-nominative logics**

Composition-nominative logics of partial single-valued, total multi-valued, and partial multi-valued quasiary predicates are investigated on propositional, renominative, and quantifier levels. The connection of these logics with 3-valued and 4-valued logics of single-valued predicates, in particular, with Kleene's strong logic and the logic of Belnap, are formulated.

Key words: logic, many-valued logic, composition-nominative logic, predicate.

Метою даної роботи є дослідження композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів та встановлення зв'язків між цими логіками і 3-значними та 4-значними логіками однозначних предикатів. Таке дослідження проведене для логік пропозиційного, реномінативного і кванторного рівнів.

Поняття, які в роботі не визначаються, будемо тлумачити в сенсі [1, 4–6].

1. Багатозначні логіки

Досліджені в [1, 4–6] логіки належать до традиційних двозначних, тобто множини істинності значень в цих логіках двоелементна (тут її позначатимемо як $\{T, F\}$). Водночас в останні роки зростає зацікавленість багатозначними логіками (див., напр., [7]). Такі логіки вперше з'явилися на початку 20 століття. В 1920 р. Я.Лукасевич запропонував 3-значні логіки для опису модальних висловлень, третє істиннісне значення трактува-

лось як "можливо", "нейтрально", "невизначено". Варто зауважити, що опис модальностей за допомогою 3-значної логіки був не зовсім адекватний, далі розвиток модальних логік пішов іншими шляхами. В 1921 р. Е.Пост запропонував n -значні логіки. Це було зроблено цілком формально, без семантичного обґрунтування. Найвідомішими з 3-значних є сильна та слабка логіки С.Кліні [8], запропоновані для використання в теорії рекурсії. Сильна логіка Кліні застосовується в системах алгоритмічних алгебр [9], мовах табличних баз даних [10]. Відома також 3-значна логіка Бочвара (логіка абсурду), де третє істинніснє значення трактується як "безсмістовно". Вона фактично є слабкою логікою Кліні, розширеною так званими зовнішніми логічними зв'язками, в яких для результатів ототожнено хибність та безсмістовність.

Серед 4-значних логік особливої уваги заслуговує логіка Белнапа [11]. Це в першу чергу зумовлено її застосуванням для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією. Логіка Белнапа має сильний епістемічний відтінок, вона є зручним засобом формалізації відповідей на питання, якщо інформаційна система містить суперечливі дані. При описі епістемічного стану системи треба брати до уваги як можливість суперечливості інформації, так і її відсутність. Згідно Белнапа, інформаційна система працює в режимі запитання-відповідь. При цьому інформаційні повідомлення, які система отримує з різних джерел, можуть бути підтверджені чи спростовані. Тому необхідно, щоб система в жодному разі не ігнорувала суперечливу інформацію і була в змозі продовжити в розумний спосіб функціонування навіть тоді, коли виявлено суперечності. Традиційна 2-значна логіка в таких ситуаціях не працює, адже для неї наявність суперечності руйнує систему.

Таким чином, можна виділити 4 випадки.

У першому випадку отримане системою повідомлення було підтверджено і ніколи не було спростовано. Таке повідомлення вважається істинним, воно позначається як T .

У другому випадку отримане системою повідомлення було спростовано та ніколи не було підтверджено. Таке повідомлення вважається хибним, воно позначається як F .

У третьому випадку отримане системою повідомлення було як підтверджено, так і спростовано. Така ситуація вельми типова, наприклад, експериментальні результати різних груп дослідників можуть істотно відрізнятися. Крім того, людині властиво помилятися. Таке повідомлення

можна вважати парадоксальним та позначати його як TF (у Белнапа – як *Both*).

Нарешті, система може не мати ні підтвердження, ні спростування повідомлення, тоді про його істинніснє значення нічого не відомо. У цьому випадку вважаємо таке істинніснє значення повідомлення невизначеним, повідомлення позначаємо як $\perp$ (у Белнапа – як *None*).

Таким чином, отримуємо логіку з множиною істиннісних значень $\{T, F, TF, \perp\}$. Відповідно до смислів цих значень, Белнап отримав єдине продовження класичних логічних зв'язок $\neg, \vee, \wedge$ із $\{T, F\}$ на $\{T, F, TF, \perp\}$. При цьому він виходив із мінімальних припущень – монотонності, стандартних визначень класичних $\neg, \vee, \wedge$ та наступних природних обмежень для $\vee$ і $\wedge$: $P \wedge Q = P \Leftrightarrow P \vee Q = Q$ та $P \vee Q = Q \Leftrightarrow P \wedge Q = P$.

Фактично логіка Белнапа є 4-значною логікою тотальних однозначних предикатів. Водночас її можна трактувати як 3-значну логіку часткових однозначних предикатів з множиною істиннісних значень $\{T, F, TF\}$. Таке трактування виглядає більш прийнятним з погляду обчислюваності, адже при переході від часткових до тотальних відображень обчислюваність може порушуватися.

Зауважимо, що використання 3-значних логік тотальних однозначних предикатів, зокрема, сильної логіки Кліні, для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією видається неадекватним, адже $\perp$ та TF ототожнювати не можна, вони мають різний статус. Те саме стосується 2-значної логіки часткових однозначних предикатів, яка відповідає сильній логіці Кліні.

2. Композиції квазіарних предикатів

Довільну (часткову неоднозначну, взагалі кажучи) функцію вигляду $P: D \rightarrow \{T, F\}$ будемо називати 2-предикатом на множині D .

Подібним чином можна визначити n -предикати, $n \geq 3$, для яких множина істиннісних значень n -елементна.

Зауважимо, що ми використовуємо термін " n -предикат", а не " n -значний предикат", для того, щоб не змішувати поняття n -значного предиката як багатозначної функції, що на кожному даному може приймати до n значень, та як однозначної функції із n -елементною множиною значень.

Областю істинності й областю хибності 2-предиката P на D назовемо множини:

$$T(P) = P^{-1}(T) = \{d \in D \mid T \in P(d)\};$$

$$F(P) = P^{-1}(F) = \{d \in D \mid F \in P(d)\}.$$

Якщо P однозначний, то $T(P) \cap F(P) = \emptyset$.

Якщо P тотальний, то $\mathcal{P}(P) \cup \mathcal{F}(P) = D$.

Надалі за умовчанням термін "предикат" означатиме "2-предикат".

Згідно композиційно-номінативного підходу, побудову КНЛ починаємо з гранично-абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня розгляду даних. Можна виділити пропозиційний, сингулярний (в роботі не розглядаємо) та номінативний рівні.

Для 2-предикатів композиції пропозиційного рівня (логічні зв'язки) $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ задамо через області істинності та хибності предикатів $\neg(P)$, $\vee(P, Q) \rightarrow (P, Q)$, $\&(P, Q)$, $\leftrightarrow(P, Q)$.

Такі предикати традиційно позначаємо як $\neg P$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \& Q$, $P \leftrightarrow Q$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\neg P) &= \mathcal{F}(P); \\ \mathcal{F}(\neg P) &= \mathcal{P}(P); \\ \mathcal{P}(P \vee Q) &= \mathcal{P}(P) \cup \mathcal{P}(Q); \\ \mathcal{F}(P \vee Q) &= \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(Q); \\ \mathcal{P}(P \& Q) &= \mathcal{P}(P) \cap \mathcal{P}(Q); \\ \mathcal{F}(P \& Q) &= \mathcal{F}(P) \cup \mathcal{F}(Q); \\ \mathcal{P}(P \rightarrow Q) &= \mathcal{F}(P) \cup \mathcal{P}(Q); \\ \mathcal{F}(P \rightarrow Q) &= \mathcal{P}(P) \cap \mathcal{F}(Q); \\ \mathcal{P}(P \leftrightarrow Q) &= (\mathcal{P}(P) \cap \mathcal{P}(Q)) \cup (\mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(Q)); \\ \mathcal{F}(P \leftrightarrow Q) &= (\mathcal{P}(P) \cap \mathcal{F}(Q)) \cup (\mathcal{F}(P) \cap \mathcal{P}(Q)). \end{aligned}$$

Для логічних зв'язок маємо такі відомі властивості: комутативність і асоціативність $\vee$, $\&$ та $\leftrightarrow$; дистрибутивність $\vee$ відносно $\&$ та $\&$ відносно $\vee$; ідемпотентність $\vee$ та $\&$; закони контрапозиції, зняття подвійного заперечення, де Моргана. Ці властивості вірні для загального випадку часткових неоднозначних предикатів.

Водночас властивість $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$ справджується лише для однозначних предикатів (див. [3]).

На номінативному рівні дані називаються номінатами. Цей рівень дуже багатий, він розпадається на низку підрівнів. Найважливішим є підрівень однозначних номінатів – іменних множин (ІМ). Іменні множини – це множини пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – значення цього імені. Зауважимо, що поняття іменної множини під різними назвами дуже поширене в математиці й програмуванні.

ІМ над A – це однозначна функція вигляду $\delta: V \rightarrow A$. Тут V та A трактуємо як множини предметних імен та предметних значень.

Клас всіх ІМ над A позначаємо V_A .

ІМ подасмо у вигляді $[v_1 \rightarrow a_1, \dots, v_j \rightarrow a_j, \dots]$.

Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$, при $i \neq j$.

Для ІМ вводим функцію $asn: V_A \rightarrow 2^V$ так:

$$asn(\delta) = \{v \in V \mid v \rightarrow a \in \delta \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Визначаємо $\delta \parallel X = \{v \rightarrow a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$.

Операцію накладки вводим так:

$$\delta_1 \vee \delta_2 = \delta_2 \cup \{v \rightarrow a \in \delta_1 \mid v \notin asn(\delta_2)\}.$$

Операцію реномінації $r_{x_1 \dots x_n}^{y_1 \dots y_n}: V_A \rightarrow V_A$, параметризовану за множиною пар імен, задамо так:

$$r_{x_1 \dots x_n}^{y_1 \dots y_n}(\delta) = [v_j \rightarrow \delta(x_1), \dots, v_j \rightarrow \delta(x_n)] \cup (\delta \parallel (V \setminus \{v_1, \dots, v_n\})).$$

Замість $y_1, \dots, y_n$ також скорочено пишемо $\bar{y}$.

Функцію вигляду $P: V_A \rightarrow \{T, F\}$ називають V -квазіарним предикатом на A .

Клас таких предикатів позначаємо Pr^A .

На рівні ІМ можна виділити реномінативний та першопорядковий рівні. Із першопорядкових тут обмежимося розглядом логік кванторного рівня.

Базовими композиціями КНЛ реномінативного рівня є $\neg$, $\vee$ та реномінації R_x^V .

Базовими композиціями КНЛ кванторного рівня є $\neg$, $\vee$, R_x^V та квантифікації $\exists x$.

Дамо визначення параметричних композицій $R_x^V: Pr^A \rightarrow Pr^A$, $\exists x: Pr^A \rightarrow Pr^A$ та $\forall x: Pr^A \rightarrow Pr^A$.

Для цього задамо предикати $R_x^V(P)$, $\exists xP$, $\forall xP$:

$$\mathcal{P} R_x^V(P) = r_x^V(\mathcal{P}(P));$$

$$\mathcal{F} R_x^V(P) = r_x^V(\mathcal{F}(P));$$

$$\mathcal{P}(\exists xP) = \{d \in V_A \mid \exists P(d \vee x \rightarrow a) \text{ для деякого } a \in A\};$$

$$\mathcal{F}(\exists xP) = \{d \in V_A \mid \exists P(d \vee x \rightarrow a) \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$\mathcal{P}(\forall xP) = \{d \in V_A \mid \forall P(d \vee x \rightarrow a) \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$\mathcal{F}(\forall xP) = \{d \in V_A \mid \exists P(d \vee x \rightarrow a) \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Властивості композицій реномінації наведені в [1, 4]. Властивості реномінативного рівня (згортка тотожної пари імен, згортка реномінацій, дистрибутивність реномінацій щодо пропозиційних композицій) формулюються однаково для різних класів логік квазіарних предикатів.

Основні властивості, пов'язані з композиціями квантифікації, наведено в [1, 4, 5]. Подамо для прикладу закони де Моргана для кванторів:

$$\neg \forall xP = \exists x \neg P \text{ та } \neg \exists xP = \forall x \neg P.$$

Семантичними моделями КНЛ є предикатні композиційні системи. Це трійки вигляду (D, Pr, C) , де D – множина даних, Pr – множина предикатів, заданих на D , C – множина композицій (операцій) породження нових предикатів, вона задається множиною базових композицій відповідного рівня абстракції розгляду. Предикатна композиційна система задає дві алгебри: алгебру даних (D, Pr) та композиційну алгебру предикатів (Pr, C) , терми якої трактуються як формули мови логіки.

Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів множини їх композицій позначимо C_P, C_R, C_Q , вони задаються відповідно множинами базових композицій $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \vee, R_K^V\}$, $\{\neg, \vee, R_K^V, \exists x\}$.

Множини тотальних однозначних, часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів будемо позначати як ${}_{TS}Pr$, ${}_{PS}Pr$, ${}_{TM}Pr$, ${}_{PM}Pr$. Для V -квазіарних предикатів на A маємо такі відповідні позначення: ${}_{TS}Pr^A$, ${}_{PS}Pr^A$, ${}_{TM}Pr^A$, ${}_{PM}Pr^A$.

3. Логіки тотальних неоднозначних і часткових однозначних предикатів та 3-значні логіки

Розглянемо композиційні предикатні алгебри часткових однозначних 2-предикатів $({}_{PS}Pr, C_P)$, $({}_{PS}Pr^A, C_R)$, $({}_{PS}Pr^A, C_Q)$ та тотальних неоднозначних 2-предикатів $({}_{TM}Pr, C_P)$, $({}_{TM}Pr^A, C_R)$, $({}_{TM}Pr^A, C_Q)$ відповідно пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів.

Неокласична семантика часткових однозначних предикатів та пересичена семантика тотальних неоднозначних предикатів дуальні [4].

Дуальні предикати $Q \in {}_{PS}Pr$ та $Q' \in {}_{TM}Pr$ пов'язані так: $\overline{P(Q)} = F(Q)$ та $\overline{P(Q')} = \overline{T(Q)}$. Те ж саме вірно для дуальних квазіарних предикатів на номінативних рівнях: для $Q \in {}_{PS}Pr^A$ та $Q' \in {}_{TM}Pr^A$ маємо $\overline{P(Q)} = F(Q)$ та $\overline{P(Q')} = \overline{T(Q)}$.

Беручи до уваги дуальність неокласичної та пересиченої семантики [4], отримуємо:

$$\begin{aligned}(\neg P)' &= \neg(P'); \\ (P \vee Q)' &= (P') \wedge (Q'); \\ (R_K^V(P))' &= R_K^V(P'); \\ (\exists x P)' &= \exists x(P').\end{aligned}$$

Звідси дістаємо ізоморфізм алгебр відповідно рівня.

Теорема 1. Ізоморфними є наступні пари композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів:

- 1) $({}_{PS}Pr, C_P)$ та $({}_{TM}Pr, C_P)$ ізоморфні;
- 2) $({}_{PS}Pr^A, C_R)$ та $({}_{TM}Pr^A, C_R)$ ізоморфні;
- 3) $({}_{PS}Pr^A, C_Q)$ та $({}_{TM}Pr^A, C_Q)$ ізоморфні.

Розглянемо зв'язок логіки тотальних неоднозначних 2-предикатів та сильної логіки Кліні тотальних однозначних 3-предикатів. Істиннісні значення такої логіки позначимо T, F, TF . Логічні зв'язки (пропозиційні композиції) цієї логіки позначимо відміткою K .

Нагадаємо, що Клініські зв'язки $\neg_K, \vee_K, \&_K, \rightarrow_K$ задаються так.

$$(\neg_K P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T, \\ TF, & \text{якщо } P(d) = TF. \end{cases}$$

$$(P \vee_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ TF, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ TF, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \rightarrow_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ TF, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для Клініських зв'язок, зокрема, маємо:

$$P \&_K Q = \neg_K (\neg_K P \vee_K \neg_K Q);$$

$$P \rightarrow_K Q = \neg_K P \vee_K Q.$$

Таким чином, за базові можна взяти композиції $\neg_K$ та $\vee_K$, тоді $\&_K$ та $\rightarrow_K$ є похідними.

Пропозиційною композиційною алгеброю Кліні тотальних 3-предикатів назвемо композиційну предикатну алгебру (Pr_K, C_K) , де Pr_K – множина тотальних однозначних 3-предикатів на D , а C_K задається базовими композиціями $\neg_K$ та $\vee_K$.

Трактуючи невизначеність як спеціальне значення (тут аналогічне TF), отримуємо повну відповідність визначень Клініських зв'язок та пропозиційних композицій логіки часткових однозначних 2-предикатів [1, 4], тому останні теж називають Клініськими.

Варто зазначити, що це є підставою для традиційного переходу від часткових до тотальних відображень. Проте такий перехід порушує адекватність подання багатьох властивостей часткових відображень, зокрема, обчислюваності.

Таким чином, отримуємо ізоморфізм пропозиційної композиційної алгебри $({}_{PS}Pr, C_P)$ та алгебри Кліні (Pr_K, C_K) .

Враховуючи теорему 1, отримуємо:

Теорема 2. Пропозиційна композиційна алгебра Кліні (Pr_K, C_K) , пропозиційна композиційна алгебра $({}_{PS}Pr, C_P)$ часткових однозначних 2-предикатів та пропозиційна композиційна алгебра $({}_{TM}Pr, C_P)$ тотальних неоднозначних 2-предикатів ізоморфні.

Варто зазначити, що сильною 3-значною логікою Кліні також природно виникає (див. [12]) із класичної 2-значної логіки при застосуванні конструкторів розповсюдження 1-арних та 2-арних операцій із множини на її булеан.

Отримані результати можна поширити на реномінативний та першопорядковий рівні. Із першопорядкових в даній роботі розглядаємо логіку базового, кванторного рівня.

Композиція реномінації одностипно визначається для функцій різних класів, зокрема, для 2-предикатів, 3-предикатів, 4-предикатів.

Для однозначних предикатів композиції $\exists x$ та $\forall x$ задаються так:

$$\begin{aligned} (\exists x P)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо існує } b \in A: P(d\forall x \rightarrow b) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d\forall x \rightarrow a) \downarrow = F \text{ для всіх } a \in A, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \\ (\forall x P)(d) &= \begin{cases} F, & \text{якщо існує } b \in A: P(d\forall x \rightarrow b) = F, \\ T, & \text{якщо } P(d\forall x \rightarrow a) \downarrow = T \text{ для всіх } a \in A, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

Для тотальних однозначних 3-предикатів відповідні композиції $\exists x$ та $\forall x$ задаються цілком аналогічно:

$$\begin{aligned} (\exists x P)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо існує } b \in A: P(d\forall x \rightarrow b) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d\forall x \rightarrow a) \downarrow = F \text{ для всіх } a \in A, \\ & TF, \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases} \\ (\forall x P)(d) &= \begin{cases} F, & \text{якщо існує } b \in A: P(d\forall x \rightarrow b) = F, \\ T, & \text{якщо } P(d\forall x \rightarrow a) \downarrow = T \text{ для всіх } a \in A, \\ & TF, \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

Предикатну алгебру $(\kappa Pr^A, C_{\kappa A})$, де κPr^A – множина тотальних однозначних 3-предикатів на A , а $C_{\kappa A}$ задається базовими композиціями $\neg$, $\forall$, R_2^3 , назовемо реномінативною композиційною алгеброю Кліні.

Предикатну алгебру $(\kappa Pr^A, C_{\kappa Q})$, де κPr^A – множина тотальних однозначних 3-предикатів на A , а $C_{\kappa Q}$ задається базовими композиціями $\neg$, $\forall$, R_2^3 , $\exists x$, назовемо (першопорядковою) кванторною композиційною алгеброю Кліні.

Теорема 3. 1) Реномінативна композиційна алгебра Кліні $(\kappa Pr^A, C_{\kappa A})$ та реномінативна композиційна алгебра часткових однозначних 2-предикатів $(\kappa Pr^A, C_A)$ ізоморфні;

2) кванторна композиційна алгебра Кліні $(\kappa Pr^A, C_{\kappa Q})$ та кванторна композиційна алгебра часткових однозначних 2-предикатів $(\kappa Pr^A, C_Q)$ ізоморфні.

Таким чином, остаточно отримуємо:

Наслідок 1. Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

- 1) $(\kappa Pr, C_P)$, $(\kappa Pr, C_P)$ та (Pr_K, C_K) ізоморфні;
- 2) $(\kappa Pr^A, C_A)$, $(\kappa Pr^A, C_A)$ та $(\kappa Pr^A, C_{\kappa A})$ ізоморфні;
- 3) $(\kappa Pr^A, C_Q)$, $(\kappa Pr^A, C_Q)$ та $(\kappa Pr^A, C_{\kappa Q})$ ізоморфні.

4. Логіки часткових неоднозначних і часткових однозначних предикатів та 4-значні логіки

Логікам часткових однозначних та тотальних неоднозначних 2-предикатів відповідає певна логіка тотальних однозначних 3-предикатів – сильна 3-значна логіка Кліні. Постає питання, які саме логіки часткових неоднозначних та тотальних неоднозначних предикатів будуть відповідати логікам часткових неоднозначних 2-предикатів. Зрозуміло, що це мають бути логіка часткових однозначних 3-предикатів та логіка тотальних однозначних 4-предикатів. Істиннісні значення першої логіки позначимо як T, F, TF , а її логічні зв'язки та квантори – як $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\exists x$, $\forall x$. Істиннісні значення другої логіки позначимо як $T, F, TF, \perp$, її логічні зв'язки та квантори будемо позначати як $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\exists x$, $\forall x$.

Трактуючи невизначеність як спеціальне значення $\perp$, отримуємо повну відповідність логіки часткових неоднозначних 3-предикатів та логіки тотальних неоднозначних 4-предикатів, тому спочатку розглянемо першу з цих логік.

Кожному частковому неоднозначному 2-предикату $P: D \rightarrow \{T, F\}$ зіставимо частковий неоднозначний 3-предикат $P_S: D \rightarrow \{T, F, TF\}$:

$$P_S(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } d \in T(P) \text{ та } d \in F(P), \\ F, & \text{якщо } d \in F(P) \text{ та } d \in T(P), \\ TF, & \text{якщо } d \in T(P) \text{ та } d \in F(P), \\ \text{невизн.} & \text{якщо } d \in T(P) \text{ та } d \in F(P). \end{cases}$$

З іншого боку, кожному частковому неоднозначному 3-предикату P_S зіставимо частковий неоднозначний 2-предикат P :

$$\begin{aligned} T(P) &= \{d \in D \mid P_S(d) = T \text{ або } P_S(d) = TF\}; \\ F(P) &= \{d \in D \mid P_S(d) = F \text{ або } P_S(d) = TF\}. \end{aligned}$$

Тут маємо $T(P) \cup F(P) = \{d \in D \mid P_S(d) = T \text{ або } P_S(d) = F \text{ або } P_S(d) = TF\} \subseteq D$, тобто 2-предикат P може бути нетотальним.

Тепер отримуємо:

$$\begin{aligned} (\neg P_S)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } d \in T(\neg P) \text{ та } d \in F(\neg P), \\ F, & \text{якщо } d \in F(\neg P) \text{ та } d \in T(\neg P), \\ TF, & \text{якщо } d \in T(\neg P) \text{ та } d \in F(\neg P), \\ \text{невизн.} & \text{якщо } d \in T(\neg P) \text{ та } d \in F(\neg P), \end{cases} \\ (\neg P)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } d \in F(P) \text{ та } d \in T(P), \\ F, & \text{якщо } d \in T(P) \text{ та } d \in F(P), \\ TF, & \text{якщо } d \in F(P) \text{ та } d \in T(P), \\ \text{невизн.} & \text{якщо } d \in F(P) \text{ та } d \in T(P). \end{cases} \end{aligned}$$

Це відповідає наступному визначенню логічної зв'язки $\neg$:

$$(\neg S)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } S(d) = F, \\ F, & \text{якщо } S(d) = T, \\ TF, & \text{якщо } S(d) = TF, \\ \text{невизн.} & \text{якщо } S(d) = \perp. \end{cases}$$

Отже, для так заданої зв'язки $\neg_S$ отримуємо

$$\neg_S P_S = (\neg P)_S.$$

Шляхом нескладних, але громіздких викладок, для диз'юнкції отримуємо (тут $P \vee Q \in \mu P r^A$):

$$(P \vee Q)_S(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } d \in T(P \vee Q) \text{ та } d \notin F(P \vee Q), \\ F, & \text{якщо } d \in F(P \vee Q) \text{ та } d \notin T(P \vee Q), \\ TF, & \text{якщо } d \in T(P \vee Q) \text{ та } d \in F(P \vee Q), \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } d \notin T(P \vee Q) \text{ та } d \notin F(P \vee Q), \end{cases} = \begin{cases} T, & \text{якщо } P_S(d) = T \text{ або } Q_S(d) = T \\ & \text{або } (P_S(d) = TF \text{ та } Q_S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (P_S(d) \uparrow \text{ та } Q_S(d) = TF), \\ F, & \text{якщо } P_S(d) = F \text{ та } Q_S(d) = F, \\ TF, & \text{якщо } (P_S(d) = TF \text{ та } Q_S(d) = TF) \\ & \text{або } (P_S(d) = TF \text{ та } Q_S(d) = F) \\ & \text{або } (P_S(d) = F \text{ та } Q_S(d) = TF), \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } (P_S(d) = F \text{ та } Q_S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (P_S(d) \uparrow \text{ та } Q_S(d) = F) \\ & \text{або } (P_S(d) \uparrow \text{ та } Q_S(d) \uparrow). \end{cases}$$

Це відповідає такому визначенню логічної зв'язки $\vee_S$:

$$(R \vee_S S)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } R(d) = T \text{ або } S(d) = T \\ & \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (R(d) \uparrow \text{ та } S(d) = TF), \\ F, & \text{якщо } R(d) = F \text{ та } S(d) = F, \\ TF, & \text{якщо } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = TF) \\ & \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = F) \\ & \text{або } (R(d) = F \text{ та } S(d) = TF), \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } (R(d) = F \text{ та } S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (R(d) \uparrow \text{ та } S(d) = F) \\ & \text{або } (R(d) \uparrow \text{ та } S(d) \uparrow). \end{cases}$$

Отже, для так заданої зв'язки $\vee_S$ отримуємо

$$P_S \vee_S Q_S = (P \vee Q)_S.$$

Діючи аналогічно, для кон'юнкції отримуємо):

$$(P \& Q)_S(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } d \in T(P \& Q) \text{ та } d \notin F(P \& Q), \\ F, & \text{якщо } d \in F(P \& Q) \text{ та } d \notin T(P \& Q), \\ TF, & \text{якщо } d \in T(P \& Q) \text{ та } d \in F(P \& Q), \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } d \notin T(P \& Q) \text{ та } d \notin F(P \& Q), \end{cases} = \begin{cases} T, & \text{якщо } P_S(d) = T \text{ та } Q_S(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P_S(d) = F \text{ або } Q_S(d) = F \\ & \text{або } (P_S(d) = TF \text{ та } Q_S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (P_S(d) \uparrow \text{ та } Q_S(d) = TF), \\ TF, & \text{якщо } (P_S(d) = TF \text{ та } Q_S(d) = TF) \\ & \text{або } (P_S(d) = TF \text{ та } Q_S(d) = T) \\ & \text{або } (P_S(d) = T \text{ та } Q_S(d) = TF), \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } (P_S(d) = T \text{ та } Q_S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (P_S(d) \uparrow \text{ та } Q_S(d) = T) \\ & \text{або } (P_S(d) \uparrow \text{ та } Q_S(d) \uparrow). \end{cases}$$

Це відповідає такому визначенню зв'язки $\&_S$:

$$(R \&_S S)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } R(d) = T \text{ та } S(d) = T, \\ F, & \text{якщо } R(d) = F \text{ або } S(d) = F \\ & \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (R(d) \uparrow \text{ та } S(d) = TF), \\ TF, & \text{якщо } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = TF) \\ & \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = T) \\ & \text{або } (R(d) = T \text{ та } S(d) = TF), \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } (R(d) = T \text{ та } S(d) \uparrow) \\ & \text{або } (R(d) \uparrow \text{ та } S(d) = T) \\ & \text{або } (R(d) \uparrow \text{ та } S(d) \uparrow). \end{cases}$$

Таким чином, отримуємо

$$P_S \&_S Q_S = (P \& Q)_S.$$

Із визначень випливає, що $\&_S$ можна виразити через $\neg_S$ та $\vee_S$ традиційним способом:

$$R \&_S S = \neg_S (\neg_S R \vee_S \neg_S S).$$

Діючи подібним чином, можна ввести логічну зв'язку імплікацію $\rightarrow_S$.

Імплікація $\rightarrow_S$ виражається через $\neg_S$ та $\vee_S$:

$$R \rightarrow_S S = \neg_S R \vee_S S.$$

Композиція реномінації для різних класів n -предикатів, $n \geq 2$, визначається однотипно.

Розглянемо тепер композицію $\exists x_S$.

Будемо позначати $P_S(d \nabla x \rightarrow a)$ як $\pi(a)$.

Для предиката $\exists x P \in \mu P r^A$ маємо:

$$(\exists x P)_S(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } d \in T(\exists x P) \text{ та } d \notin F(\exists x P), \\ F, & \text{якщо } d \in F(\exists x P) \text{ та } d \notin T(\exists x P), \\ TF, & \text{якщо } d \in T(\exists x P) \text{ та } d \in F(\exists x P), \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } d \notin T(\exists x P) \text{ та } d \notin F(\exists x P), \end{cases} = \begin{cases} T, & \text{якщо } d \nabla x x \mapsto a \in T(P) \text{ для деякого } a \in A \\ & \text{та } d \nabla x x \mapsto b \notin F(P) \text{ для деякого } b \in A, \\ F, & \text{якщо } d \nabla x x \mapsto b \in F(P) \text{ для всіх } b \in A \\ & \text{та } d \nabla x x \mapsto a \notin T(P) \text{ для всіх } a \in A, \\ TF, & \text{якщо } d \nabla x x \mapsto a \in T(P) \text{ для деякого } a \in A \\ & \text{та } d \nabla x x \mapsto b \in F(P) \text{ для всіх } b \in A, \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } d \nabla x x \mapsto a \notin T(P) \text{ для всіх } a \in A \\ & \text{та } d \nabla x x \mapsto b \notin F(P) \text{ для деякого } b \in A, \end{cases} = \begin{cases} T, & \text{якщо } (\pi(a) = TF \text{ або } \pi(a) = T) \\ & \text{для деякого } a \in A \text{ та} \\ & (\pi(b) = T \text{ або } \pi(b) \uparrow) \text{ для деякого } b \in A, \\ F, & \text{якщо } (\pi(b) = TF \text{ або } \pi(b) = F) \\ & \text{для всіх } b \in A \text{ та} \\ & (\pi(a) = F \text{ або } \pi(a) \uparrow) \text{ для всіх } a \in A, \\ TF, & \text{якщо } (\pi(b) = TF \text{ або } \pi(b) = F) \\ & \text{для всіх } b \in A \text{ та} \\ & (\pi(a) = TF \text{ або } \pi(a) = T) \\ & \text{для деякого } a \in A, \\ \text{невизн.}, & \text{якщо } (\pi(a) = F \text{ або } \pi(a) \uparrow) \\ & \text{для всіх } a \in A \text{ та} \\ & (\pi(b) = T \text{ або } \pi(b) \uparrow) \text{ для деякого } b \in A, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } \pi(a) = T \text{ для деякого } a \in A \\ \text{або } (\pi(a) = TF \text{ для деякого } a \in A \\ \text{та } \pi(b) \uparrow \text{ для деякого } b \in A), \\ F, \text{ якщо } \pi(b) = F \text{ для всіх } b \in A, \\ \text{та } \pi(a) = F \text{ або } \pi(a) \uparrow \text{ для всіх } a \in A, \\ TF, \text{ якщо } \pi(b) = TF \text{ або } \pi(b) = F \text{ для всіх } b \in A \\ \text{та } \pi(a) = TF \text{ для деякого } a \in A, \\ \text{невизн., якщо } \pi(a) = F \text{ або} \\ \pi(a) \uparrow \text{ для всіх } a \in A \\ \text{та } \pi(b) \uparrow \text{ для деякого } b \in A. \end{cases}$$

Це відповідає такому визначенню $\exists x_5$:

$$(\exists x_5 R)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = T \text{ для деякого } a \in A \\ \text{або } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = TF \text{ для деякого } a \in A \\ \text{та } R(d \forall x_1 \rightarrow b) \uparrow \text{ для деякого } b \in A), \\ F, \text{ якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow b) = F \text{ для всіх } b \in A, \\ \text{та } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = F \text{ або} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow a) \uparrow \text{ для всіх } a \in A, \\ TF, \text{ якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow b) = TF \text{ або} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow b) = F \text{ для всіх } b \in A \text{ та} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow a) = TF \text{ для деякого } a \in A, \\ \text{невизн., якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = F \text{ або} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow a) \uparrow \text{ для всіх } a \in A \\ \text{та } R(d \forall x_1 \rightarrow b) \uparrow \text{ для деякого } b \in A. \end{cases}$$

Подібним чином вводиться композиція $\forall x_5$.

Отже, ми отримали логіку часткових одно-
значних 3-предикатів із логіки часткових неодно-
значних 2-предикатів природним чином: компози-
ції $\neg, \vee, \&, \rightarrow, \exists x, \forall x$ індукують відповідні
композиції $\neg_5, \vee_5, \&_5, \rightarrow_5, \exists x_5, \forall x_5$.

Предикатну алгебру (sPr, C_{sP}) , де sPr – мно-
жина часткових однозначних 3-предикатів, а C_{sP}
задається базовими композиціями $\neg_5, \vee_5$, наведе-
мо пропозиційною композиційною алгеброю частко-
вих однозначних 3-предикатів.

Предикатну алгебру (sPr^A, C_{sP}) , де sPr^A – мно-
жина часткових однозначних 3-предикатів на A , а
 C_{sP} задається базовими композиціями $\neg_5, \vee_5, R_X^A$,
наведемо реномінативною композиційною алге-
брою часткових однозначних 3-предикатів.

Предикатну алгебру (sPr^A, C_{sQ}) , де sPr^A – мно-
жина часткових однозначних 3-предикатів на A , а
 C_{sQ} задається базовими $\neg_5, \vee_5, R_X^A, \exists x_5$, наведе-
мо (першопорядковою) кванторною композиційною
алгеброю часткових однозначних 3-предикатів.

Таким чином, справджується

Теорема 4. Для композиційних предикатних
алгебр пропозиційного, реномінативного та кван-
торного рівнів маємо:

- 1) (sPr, C_P) та (sPr, C_{sP}) ізоморфні;
- 2) (sPr^A, C_R) та (sPr^A, C_{sR}) ізоморфні;
- 3) (sPr^A, C_Q) та (sPr^A, C_{sQ}) ізоморфні.

Тут (sPr, C_P) , (sPr^A, C_R) , (sPr^A, C_Q) – компо-
зиційні предикатні алгебри часткових неоднозна-
чних 2-предикатів відповідно пропозиційного,
реномінативного, кванторного рівнів.

Враховуючи повну відповідність логіки част-
кових однозначних 3-предикатів і логіки тоталь-
них однозначних 4-предикатів, для останньої ма-
ємо такі визначення композицій $\neg_8, \vee_8, \&_8, \exists x_8$.

$$(\neg_8 S)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } S(d) = F, \\ F, \text{ якщо } S(d) = T, \\ TF, \text{ якщо } S(d) = TF, \\ \perp, \text{ якщо } S(d) = \perp. \end{cases}$$

$$(R \vee_8 S)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } R(d) = T \text{ або } S(d) = T \\ \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = \perp) \\ \text{або } (R(d) = \perp \text{ та } S(d) = TF), \\ F, \text{ якщо } R(d) = F \text{ та } S(d) = F, \\ TF, \text{ якщо } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = TF) \\ \text{або } R(d) = TF \text{ та } S(d) = F \\ \text{або } (R(d) = F \text{ та } S(d) = TF), \\ \perp, \text{ якщо } (R(d) = F \text{ та } S(d) = \perp) \\ \text{або } (R(d) = \perp \text{ та } S(d) = F) \\ \text{або } (R(d) = \perp \text{ та } S(d) = \perp). \end{cases}$$

$$(R \&_8 S)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } R(d) = T \text{ та } S(d) = T, \\ F, \text{ якщо } R(d) = F \text{ або } S(d) = F \\ \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = \perp) \\ \text{або } (R(d) = \perp \text{ та } S(d) = TF), \\ TF, \text{ якщо } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = TF) \\ \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = T) \\ \text{або } (R(d) = T \text{ та } S(d) = TF), \\ \perp, \text{ якщо } (R(d) = T \text{ та } S(d) = \perp) \\ \text{або } (R(d) = \perp \text{ та } S(d) = T) \\ \text{або } (R(d) = \perp \text{ та } S(d) = \perp). \end{cases}$$

$$(\exists x_8 R)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = T \text{ для деякого } a \in A \\ \text{або } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = TF \text{ для деякого } a \in A \\ \text{та } R(d \forall x_1 \rightarrow b) = \perp \text{ для деякого } b \in A), \\ F, \text{ якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow b) = F \text{ для всіх } b \in A, \\ \text{та } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = F \text{ або} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow a) = \perp \text{ для всіх } a \in A, \\ TF, \text{ якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow b) = TF \text{ або} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow b) = F \text{ для всіх } b \in A \text{ та} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow a) = TF \text{ для деякого } a \in A, \\ \text{невизн., якщо } R(d \forall x_1 \rightarrow a) = F \text{ або} \\ R(d \forall x_1 \rightarrow a) = \perp \text{ для всіх } a \in A \\ \text{та } R(d \forall x_1 \rightarrow b) = \perp \text{ для деякого } b \in A. \end{cases}$$

Наведені визначення пропозиційних компози-
цій $\neg_8, \vee_8, \&_8$ можна подати у вигляді таблиць
істинності. Виявляється, що тоді вони збіга-
ються з визначеннями відповідних логічних
зв'язок відомої 4-значної логіки Белнапа [11].

Таким чином, ми отримали логіку Белнапа із логіки часткових неоднозначних 2-предикатів дуже природним чином: логічні зв'язки $\neg_B, \vee_B, \&_B$ індукуються відповідними пропозиційними композиціями $\neg, \vee, \&$.

4-значна логіка Белнапа отримана ним, виходячи із певних мінімальних припущень (див. вище). У нас вона індукована логікою часткових неоднозначних 2-предикатів. Рухаючись різними шляхами, приходимо до одного і того ж результату. Це засвідчує особливу роль логіки Белнапа серед 4-значних логік, подібно до особливої ролі сильної логіки Кліні серед 3-значних.

Предикатну алгебру (Pr_B, C_B) , де Pr_B – множина тотальних однозначних 4-предикатів, а C_B задається базовими композиціями $\neg_B$ та $\vee_B$, назовемо пропозиційною композиційною алгеброю Белнапа.

Предикатну алгебру (sPr^A, C_{sR}) , де sPr^A – множина тотальних однозначних 4-предикатів на A , а C_{sR} задається базовими $\neg_B, \vee_B, R_x^B$, назовемо реномінативною композиційною алгеброю Белнапа.

Предикатну алгебру (sPr^A, C_{sQ}) , де C_{sQ} задається базовими $\neg_B, \vee_B, R_x^B, \exists x_B$, назовемо кванторною композиційною алгеброю Белнапа.

Згідно повної відповідності логіки часткових однозначних 3-предикатів і логіки тотальних однозначних 4-предикатів, із теореми 4 отримуємо:

Наслідок 2. Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

- 1) $(r_B Pr, C_P), (sPr, C_{sP})$ та (Pr_B, C_B) ізоморфні;
- 2) $(r_B Pr^A, C_R), (sPr^A, C_{sR}), (sPr^A, C_{sR})$ ізоморфні;
- 3) $(r_B Pr^A, C_Q), (sPr^A, C_{sQ}), (sPr^A, C_{sQ})$ ізоморфні.

Висновки

В роботі досліджено композиційно номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів на пропозиційному, реномінативному та кванторному рівнях. Встановлено зв'язки між цими логіками та 3-значними і 4-значними логіками однозначних предикатів. Доведено ізоморфізм композиційної алгебри Кліні тотальних однозначних предикатів 3-значної логіки та композиційних алгебр тотальних неоднозначних і часткових однозначних предикатів 2-значної логіки, ізоморфізм композиційної алгебри Белнапа тотальних однозначних предикатів 4-значної логіки та композиційних алгебр часткових одно-

значних предикатів 3-значної логіки і часткових неоднозначних предикатів 2-значної логіки. Це засвідчує особливе місце сильної логіки Кліні серед 3-значних та логіки Белнапа серед 4-значних.

Список використаних джерел

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Нікітченко Н.С. Композиційно-номінативний підхід до уточненню поняття програми / Н.С. Нікітченко // Пробл. програмування. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
3. Смирнова Е.Д. Логика и философия / Е.Д. Смирнова. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.
4. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
5. Нікітченко М.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 176–185.
6. Шкільняк С.С. Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2011. – № 4. – С. 36–48.
7. Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки / А.Т. Ішмуратов. – К.: Абрис, 1997. – 350 с.
8. Клини С. Введение в метаматематику / С. Клини. – М.: ИЛ, 1957. – 526 с.
9. Глушков В.М. Алгебра, языки, программирование / В.М. Глушков, Г.Е. Цейтлин, Е.Л. Ющенко. – К.: Наукова думка, 1974. – 328 с.
10. Редько В.Н. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Д.Б. Буй, Ю.Й. Брона, С.А. Поляков. – К.: Академперіодика, 2001. – 198 с.
11. Белнап Н. Логика вопросов и ответов / Н. Белнап, Т. Стил. – М.: Прогресс, 1981. – 288 с.
12. Буй Д.Б. Загальнозначні теоретико-множинні конструкції повного образу, обмеження, сумісності: властивості та застосування / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута, Л.М. Сильвейструк // Пробл. програмування. – 2010. – № 2–3 – С. 80–88.

Надійшла до редколегії 30.01.2012

УДК 004.3

С.Д. Погорілий¹, д.т.н., проф.,
І.В. Білоконь², аспірант,
Т.Ю. Прочів³, студент**Формування та дослідження паралельних
схем алгоритму Данцига**

Запропоновано використання паралельної реалізації знаходження мінімального шляху орієнтованого графа на прикладі алгоритму Данцига. Виконано модифікацію алгоритму для паралельних систем та його формалізацію з використанням математичного апарату систем алгоритмічних алгебр В.М. Глушкова. Використано концепцію розпаралелювання за даними для архітектур з розподіленою пам'яттю. Проведено трансформацію алгоритму, отримано паралельну схему. Реалізовано паралельний алгоритм з використанням мови програмування C++ та технології MPI. Проведено експериментальні обчислення на кластері.

Ключові слова: алгоритм Данцига, системи алгоритмічних алгебр, розпаралелювання, MPI.

E-mail: ¹ sdp77@i.ua, ² deimos@univ.net.ua, ³ taras.proziv@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

В останні роки характеристики апаратного забезпечення окремо взятих комп'ютерів не завжди достатні для розв'язку за потрібний час деяких задач. Прикладом таких задач можуть бути навіть нескладні задачі з теорії графів, коли кількість вузлів стає великою.

Для вирішення цієї проблеми були створені нові, паралельні архітектури, коли обчислювальні потужності декількох процесорів або комп'ютерів об'єднуються в систему.

І саме тому в теорії програмування виникає нова галузь: програмування для паралельної архітектури. Проектування та розробка паралельного алгоритму являє собою більш складну та нетривіальну задачу в порівнянні з розробкою послідовного програму.

Невірні спроектовані паралельні обчислення можуть не збільшити, а зменшити швидкість роботи програми. Для коректної реалізації алгоритму потрібно: правильно обрати метод розпаралелювання, проаналізований з позиції максимального зростання швидкості роботи,

S. D. Pogorilyy¹, Dr.Sci., professor,
I. V. Bilokon², Postgraduate Student,
T. Y. Protsiv³, Student**Formation and research parallel schemes of
Dantzig algorithm**

The use of parallel implementation for the shortest ways search in connected oriented graph on the example of Dantzig algorithm is proposed. Modification and formalization of algorithm for parallel architectures, using mathematical means of V.M. Glushkov modified systems of algorithmic algebras is performed. The concept of parallelization according to architecture with distributed memory is used. A transformation algorithm returned a parallel scheme. The parallel algorithm using programming language C++ and MPI technology is implemented. Experimental calculations on the cluster are performed.

Key words: Dantzig algorithm, modified systems of algorithmic algebras, paralleling, MPI.

грамотно продумана синхронізація задач між собою, розподілення даних між задачами.

На сьогоднішній момент є актуальною проблема перенесення послідовно працюючих алгоритмів на паралельну архітектуру.

Метою роботи є перетворення алгоритму Данцига з послідовної на паралельну версію з метою зменшення часу виконання та дослідження характеристик цього алгоритму на реальній апаратній платформі. Паралельна версія отримується завдяки формальним перетворенням алгоритму з використанням математичного апарату систем алгоритмічних алгебр В.М. Глушкова [1, 2]. Такий підхід дозволяє полегшити створення програмного продукту та оптимізувати його за вибраними характеристиками. Для формальних перетворень та отримання паралельних алгоритмів використовується модифікована система алгоритмічних алгебр, доповнена декількома новими операціями.

Для оцінки ефективності отриманих схем створюються програмна реалізація з використанням технології MPI [3, 4].

Постановка задачі

Математичні моделі у вигляді графів широко використовуються при моделюванні різноманітних явищ, процесів і систем. Таким чином, за допомогою алгоритмів на графах може бути вирішена велика кількість як теоретичних, так і прикладних задач. Окремим класом таких задач виділяють знаходження найкоротших шляхів до всіх вершин планарного орієнтованого графа.

Алгоритми знаходження найкоротших шляхів до всіх вершин планарного орієнтованого графа дозволяють розв'язувати широке коло задач. До таких задач можна віднести насамперед задачі маршрутизації пакетів у комп'ютерних мережах.

Стрімке зростання швидкодії сучасних мікропроцесорів, що застосовуються в маршрутизаторах, дозволяє розв'язувати задачу маршрутизації більш ефективно з використанням складніших алгоритмів.

Алгоритм Данцига

Алгоритм Данцига розв'язує задачу знаходження найкоротших шляхів до всіх вершин планарного орієнтованого графа [5, 6].

Введемо позначення:

N – розмірність графа, причому його вершини пронумеровані від 0 до $N-1$.

D_0^0 – елемент вхідної матриці D^0 , рівний довжині ребра від вершини i в j (якщо ребра не існує, рівний ∞), $i, j \in [0, N-1]$.

D_{ij} – елемент робочої матриці D , рівний найкоротшому знайденому шляху з вершини i в j .

$edgeNum_{ij}$ – елемент матриці $edgeNum$, рівний кількості ребер, які потрібно пройти на шляху з вершини i в j (якщо шляху не існує, рівний максимальному можливому значенню+1) (N).

Way_{ij} – елемент матриці Way , перша вершина в найкоротшому знайденому шляху з вершини i в вершину j .

$inputMatrix_{ij}$ – елемент матриці $inputMatrix$, що об'єднує в собі елементи матриць D^0 , $edgeNum^0$, Way^0 (звернення до них записуватимемо через крапку; наприклад, $element.D$).

$outputMatrix_{ij}$ – елемент матриці $outputMatrix$, що об'єднує в собі елементи матриць D , $edgeNum$, Way . Після виконання алгоритму тут міститиметься результат.

Запишемо кроки алгоритму.

1) Пронумерувати вершини вихідного графа цілими числами від 0 до $N-1$.
Сформулювати матрицю D^0 (розмірність $N \times N$).

2) Тут через D^m позначається матриця розмірністю $m \times m$. Послідовно визначити елементи матриці D^m з елементів матриці D^{m-1} для m , що приймають значення $1, 2, \dots, N$:

$$d_{m,j}^m = \min\{d_{m,k}^{m-1} + d_{k,j}^{m-1}, k=0, \dots, m-1\}; \quad (1)$$

$$d_{i,m}^m = \min\{d_{i,k}^{m-1} + d_{k,m}^{m-1}, k=0, \dots, m-1\}; \quad (2)$$

$$d_{i,j}^m = \min\{d_{i,m}^{m-1} + d_{m,j}^{m-1}; d_{i,j}^{m-1}\}, i, j=0 \dots m-1; \quad (3)$$

Крім того, для всіх i та m покласти $d_{i,i}^m = 0$.

Після виконання алгоритму отримаємо шукану матрицю D^N .

Формалізація алгоритму з використанням систем алгоритмічних алгебр В.М. Глушкова.

Введемо наступні поняття.

Об'єкт, що інкапсулює властивості шляху з однієї вершини до іншої. Для нього доступні наступні умови:

$a > b$ (а менш оптимальний ніж b),

$a < b$ (а оптимальніший b),

та оператори:

$a=b$ (присвоєння),

$SetWaylff(a, b, c)$ (вважається, що a – це об'єкт, що відповідає за шлях з вершини i в j , $b - z$ і в k , $c - z$ k в j ; даний оператор присвоює об'єкту a значення, яке відповідає послідовному проходженню шляхів b та c , при умові, що воно оптимальніше ніж те, що вже записане в a).

Вхідна матриця складається саме з таких об'єктів. Вся робота алгоритму тепер зводиться до маніпулювання об'єктами цього класу. Переваги такого об'єктно-орієнтованого підходу в тому, що ми абстрагуємося від способу вибору оптимальнішого шляху, тобто ми можемо задавати критерії шляху, не втручаючись в роботу самого алгоритму.

Розглянемо наступний варіант: об'єкт складається з D_{ij} , $edgeNum_{ij}$, Way_{ij} , тобто містить інформацію про вагу шляху, кількість вершин, які потрібно пройти, та номер першої вершини на цьому шляху.

$$(a = b) = (a.D = b.D) \times (a.edgeNum = b.edgeNum) \times (a.Way = b.Way);$$

$$(a > b) = (a.D > b.D) \vee ((a.D = b.D) \wedge (a.edgeNum > b.edgeNum));$$

$$(a < b) = (a.D < b.D) \vee ((a.D = b.D) \wedge (a.edgeNum < b.edgeNum));$$

$$SetWaylff(jElement, i kElement, k jElement) =$$

$$((A_1 \times A_2 \times A_3) \vee E),$$

$$\begin{aligned} & \alpha = ((ikElement.D + kjElement.D > ijElement.D) \vee \\ & ((ikElement.D + kjElement.D = ijElement.D) \wedge \\ & (ikElement.edgeNum + kjElement.edgeNum < \\ & ijElement))); \\ & A_1 = (ijElement.D = ikElement.D + kjElement.D); \\ & A_2 = (ijElement.edgeNum = ikElement.edgeNum + \\ & kjElement.edgeNum); \\ & A_3 = (ijElement.Way = ikElement.Way); \end{aligned}$$

Тобто критерій оптимальності це менша вага, а при рівності ваг – менша кількість вершин, які потрібно пройти. За допомогою елемента *Way* ми згодом зможемо відтворити шлях.

Запишемо основні кроки: розрахунок за формулою (1):

```

Dancug1 = (j = 0) × { (k = 0) × {
    SetWayIf (outputMatrixxy, inputMatrixxy,
    outputMatrixxy × (k++) × (j++));

```

$$Dancug2 = (j = 0) \times \{ (k = 0) \times \{$$

розрахунків за формулою (3):

$$Dancug3 = (j = 0) \times \{ (i = 0) \times \{$$

$$SetWaylf(outputMatrix_y, outputMatrix_m,$$

$$outputMatrix_{x_{-m}}) \times (i++) \} \times (j++);$$

Теперь запишем сам алгоритм:

```
Dancug = (outputMatrix = inputMatrix) * (m = 0) *
{ Dancug1 * Dancug2 * Dancug3 * (m++)};
```

Паралельна версія алгоритму

Можна запропонувати декілька варіантів паралельної версії алгоритму, які мають свої переваги та недоліки. Тому потрібно сформулювати вимоги до алгоритму, а вони випливають зі способу його реалізації: алгоритм виконуватиметься на системі з розподіленою пам'яттю, кожна паралельна гілка матиме вигляд незалежного процесу з власним адресним простором, процеси можуть обмінюватися даними, обмін може бути асинхронним.

Також потрібно зауважити, що передача великої кількості даних за один раз (за один виклик функції передачі даних) працює набагато швидше ніж передачі тієї ж інформації кількома

порціями (причина в тому, що для передачі даних між процесами виконуються різні ресурсосміні допоміжні дії).

Виходячи з загальних міркувань та вищесказаного, алгоритм повинен задовольняти наступним вимогам.

- Навантаження рівномірно розподіляється між процесами.
- Мінімальний обмін даними між процесами.
- Використання асинхронного обміну (уникати очікування на прийом-передачу даних).

Проаналізуємо алгоритм.

Зазначимо, що на кожному кроці ітерацій розрахунки за формулами (1) та (2) не перекриваються (тобто вони можуть виконуватись незалежно), а розрахунок за формулою (3) використовує результати (1) та (2).

Введемо нові позначення до вже зазначених:
numProcs – кількість процесів;
myRank – номер даного процесу (від
numProcs-1).

Розіб'ємо матрицю даних між процесами.

Вхідна матриця використовується на кожному кроці алгоритму, тому вона повинна бути доступною кожному процесу. Кожен процес матиме копію вхідної матриці.

Також кожен процес працюватиме зі своєю проміжною матрицею. Виходячи з того, що алгоритм рекурсивний (з кожним кроком розмірність матриці, яку обробляємо, збільшується на одиницю) найоптимальніше застосувати наступний поділ (див. рис. 1).

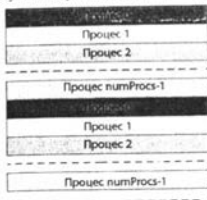


Рис. 1. Розбиття матриці між процесами

Тобто перший процес зберігає рядки з номерами 0, numProcs , $2 \cdot \text{numProcs}$, $3 \cdot \text{numProcs}$ і т.д. (для будь-якого процесу: myRank , $\text{myRank} + \text{numProcs}$, $\text{myRank} + 2 \cdot \text{numProcs}$, ...).

Таким чином навантаження розподілятиметься між процесами рівномірно протягом всього часу роботи. Також слід зазначити, що такий розподіл дозволяє проводити розрахунок за формулою (2) без обміну даними з іншими процесами.

Введемо позначення.

$currentLinesPerProcess = m \div numProcs$ – кількість рядків, які обробляють процеси на даному кроці m .

$numProcsWhereLinesPlus1 = m \bmod numProcs$ – кількість процесів, які будуть обробляти на 1 рядок більше (тобто $currentLinesPerProcess + 1$ рядків). Решта $currentLinesPerProcess$.

$currentLinesPerThisProcess^{myRank}$ – кількість рядків, яку обробляє процес з номером $myRank$ на кроці m . Обчислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} myRank < numProcsWhereLinesPlus1 \\ (currentLinesPerThisProcess^{myRank} = \\ currentLinesPerProcess + 1) \\ \vee (currentLinesPerThisProcess^{myRank} = \\ currentLinesPerProcess). \end{aligned}$$

$intermediateMatrix_y^{myRank}$ – елемент проміжної матриці даного процесу (i -тий рядок j -тий стовпчик).

З вищесказаного випливає, що $intermediateMatrix_{line\ m}^{myRank} = outputMatrix_{myRank + 1 \times numProcs}$. Де $outputMatrix$ це результуюча матриця з послідовного алгоритму.

$\gamma_j^i \in \{j, j + numProcs, j + 2numProcs\} \wedge j < N$ – умова того, що i -тий рядок належить j -тому процесу.

Очевидно, що оскільки кожний рядок згідно з нашим поділом належить одному і тільки одному процесу, то γ_j^i є локально замкненими умовами: $\gamma_j^i = \bigvee_{j=0}^{numProcs-1} \gamma_j^i = 1$.

$T(\lambda)$ – контрольна точка; $S(\lambda)$ – точка синхронізації;

$isend(i, object, \lambda)$ – функція асинхронно посилася i -тому процесу дані $object$, процес не блокується, після того, як дані надіслані, встановлюється контрольна точка $(T(\lambda))$.

$irecv(i, object, \lambda)$ – асинхронно очікується прийняття даних в змінну $object$, процес не блокується, після того, як дані надіслані, встановлюється контрольна точка λ .

$$waitall(\lambda, N) = \prod_{j=0}^{N-1} S(\lambda_j) \quad \text{— очікуємо на } N$$

точок синхронізації.

Розрахунок за формулою (2) проводиться без обміну даними між процесами.

Для розрахунку (1) без обміну даними не обійтись. На цьому кроці ми знаходимо елементи m -того рядка. Для знаходження i -го елемента нам потрібно i -тий стовпчик проміжної (intermediate) матриці. Врахуємо, що $numProcs \ll N$. Тому краще, для мінімізації обміну між процесами, застосовувати формулу (1) для всіх доступних в кожному процесі стовпчиків, а вже найоптимальніший результат надсилати відповідальному за стовпчик процесу, який з отриманих результатів вибере найкращий.

Потрібно делегувати збір та вибір найоптимальнішого елемента. Елементи розподілимо порівну між процесами (тобто процес на m -тому кроці буде обробляти стільки ж стовпчиків скільки і рядків). Процес буде відповідати за елементи рядка від $from$ до $from + currentLinesPerThisProcess - 1$, де

$$\begin{aligned} (from = (currentLinesPerProcess + 1) * myRank) \\ \times \\ (from = myRank * \\ myRank + numProcsWhereLinesPlus1) \\ numProcsWhereLinesPlus1) \vee E). \end{aligned}$$

Для розрахунку за формулою (3) нам потрібно отримати від інших процесів елементи m -того рядка, але частину елементів (від $from$ до $from + currentLinesPerThisProcess - 1$) визначає даний процес, тому розрахунок можна розбити на дві частини: розрахунок за формулою (3) з наявних даних та розрахунок з отриманих даних.

Перетворимо послідовну версію алгоритму з урахуванням позначень.

Для спрощення розіб'ємо алгоритм на складові.

1) Ініціалізація. У кожного процесу є своя копія $inputMatrix$. Потрібно задати початкові значення $intermediateMatrix$ (вони збігаються з відповідним значеннями $inputMatrix$):

$$\begin{aligned} Init = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} ((i = myRank) \times (line = 0) \times \{ \\ (intermediateMatrix_{myRank}^{myRank} = inputMatrix_{j \times numProcs} \\ (line + 1) \times (i + numProcs))) \\ = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PInit(myRank). \end{aligned}$$

2) Розрахунок за формулою (2) на m -тому кроці:

$$\text{Dancug2} = (j = 0) \times \left\{ (k = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \right. \\ \text{SetWaylf}(\text{outputMatrix}_{jm}, \text{outputMatrix}_{jk}, \text{inputMatrix}_{km}) \\ \times (k++) \times (j++) \};$$

Тимчасово позначимо

$$A = (k = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \text{SetWaylf}(\text{outputMatrix}_{jm}, \\ \text{outputMatrix}_{jk}, \text{inputMatrix}_{km}) \times (k++) \}.$$

Підставимо в попередню формулу:

$$\begin{aligned} \text{Dancug2} &= (j = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \gamma_j (A \times (j++)) = \\ &= (j = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \gamma_j^0 \vee \gamma_j^1 \vee \dots \vee \gamma_j^{\text{numProcs}-1} \\ &= A \times (j++) = (j = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \gamma_j^{\text{myRank}} \\ &= A \times (j++) = (j = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \gamma_j^{\text{myRank}} A \times \\ &= (j++) = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((j = \text{myRank}) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \\ &= \gamma_j^{\text{myRank}} (A \times (j++ = \text{numProcs}))) = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} \\ &= ((j = \text{myRank}) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. (A \times (j++ = \text{numProcs})))) \\ &= \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((j = \text{myRank}) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. (A \times (j++ = \text{numProcs})))) \\ &= \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((j = \text{myRank}) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. ((k = 0) \times \\ &= \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \text{SetWaylf}(\text{outputMatrix}_{jm}, \text{outputMatrix}_{jk}, \\ &= \text{inputMatrix}_{km}) \times (k++) \times (j++ = \text{numProcs}))))). \end{aligned}$$

Оскільки тепер у нас немає матриці outputMatrix , запишемо отриману формулу через $\text{intermediateMatrix}$:

$$\begin{aligned} \text{Dancug2} &= \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((j = \text{myRank}) \times (line = 0) \times \\ &= \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. ((k = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \text{SetWaylf}(\text{intermediateMatrix}_{line k}, \\ &= \text{intermediateMatrix}_{line k}, \text{inputMatrix}_{km}) \times \\ &= \times (k++) \times (line++) \times (j++ = \text{numProcs})))) = \\ &= \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} P\text{Dancug2}(\text{myRank}). \end{aligned}$$

Тут $line$ – це номер рядка в проміжній матриці.

3) Розрахунок за формулою (1) з наявних у даного процесу даних.

Введемо $MRow^{\text{myRank}}$ – це допоміжний рядок, де зберігатимуться елементи m -того рядка.

В послідовній версії було:

$$\begin{aligned} \text{Dancug1} &= (j = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \\ &= \text{SetWaylf}(\text{outputMatrix}_{mj}, \text{inputMatrix}_{mk}, \\ &= \text{outputMatrix}_{kj}) \times (k++) \times (j++) \}. \end{aligned}$$

Перетворимо цю схему для обробки даних, наявних у даного процесу:

$$\begin{aligned} \text{Dancug1.1} &= \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((MRow^{\text{myRank}} = \\ &= \text{inputMatrix}_{mj} \times (j = \text{myRank}) \times \\ &= (line = 0) \times \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. ((k = 0) \times \\ &= \left\{ \begin{array}{l} j \geq m \\ k \geq m \end{array} \right. \text{SetWaylf}(MRow_k^{\text{myRank}}, \text{inputMatrix}_{mj}, \\ &= \text{intermediateMatrix}_{line k}^{\text{myRank}}) \times (k++) \times \\ &= (line++) \times (j++ = \text{numProcs}))) = \\ &= \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} P\text{Dancug1.1}(\text{myRank}). \end{aligned}$$

Після даного кроку в $MRow^{\text{myRank}}$ будуть міститися вирахувані за формулою (1) елементи m -того рядка, виходячи з даних, що належать даному процесу.

4) Асинхронна розсилка всім процесам елементів m -того рядка, за які вони відповідають.

Як вже було сказано, i -тий процес відповідає за елементи від $from$ до $from + currentLinesPerThisProcess$.

$$\begin{aligned} i\text{Send1} &= \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((process = 0) \times \\ &= \left\{ \begin{array}{l} process \geq \text{numProcsWhereLinesPlus1} \end{array} \right. i\text{send}(process, \\ &= MRow_{from from + currentLinesPerProcess}^{\text{myRank}}, \lambda_{process}^{\text{myRank}}) \times \\ &= (process++) \times \left\{ \begin{array}{l} process \geq \text{numProcs} \end{array} \right. i\text{send}(process, \\ &= MRow_{from from + currentLinesPerProcess-1}^{\text{myRank}}, \lambda_{process}^{\text{myRank}}) \\ &= \times (process++) \} = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} P\text{iSend1}(\text{myRank}). \end{aligned}$$

5) Асинхронний прийом даних від кожного процесу (елементів m -того рядка від $from$ до $from + currentLinesPerThisProcess$):

$$iRecv1 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} ((process = 0) \times \{ process \geq numProcs \\ irecv(process, receiveBuff_{process}^{myRank}, \eta_{process}^{myRank}) \times \\ (process++) \}) = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PiRecv1(myRank).$$

6) Чекаємо, доки отримаємо всі дані:

$$WaitRecv1 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} waitall(\eta_{myRank}^{myRank}, numProcs) = \\ \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PWaitRecv1(myRank).$$

7) Чекаємо, доки передадуться всі дані:

$$WaitSend1 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} waitall(\lambda_{myRank}^{myRank}, numProcs) = \\ \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PWaitSend1(myRank).$$

8) Вибір з усіх отриманих елементів найоптимальнішого (не обробляємо дані отримані від себе, бо вони вже є в $MRow^{myRank}$):

$$Dancug1.2 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} ((process = 0) \times \\ \{ (line = 0) \times (i = from_{myRank}) \times \\ \{ lines \geq currentLinesPerThisProcess_{myRank} \\ \{ MRow_{myRank} \leftarrow receiveBuff_{process}^{myRank} \} \\ (MRow_{myRank} = receiveBuff_{process}^{myRank}) \vee E \} \times \\ (lines++) \times (process++) \times \\ (process = myRank + 1) \times \{ (line = 0) \times \\ (i = from_{myRank}) \times \{ lines \geq currentLinesPerThisProcess_{myRank} \\ \{ (MRow_{myRank} = \\ MRow_{myRank} \leftarrow receiveBuff_{process}^{myRank} \\ receiveBuff_{process}^{myRank}) \vee E \} \times (lines++) \} \\ \times (process++) \}) = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PDancug1.2(myRank).$$

9) Асинхронно надсилаємо всім процесам найоптимальніші елементи m -того рядка:

$$iSend2 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} ((process = 0) \times \{ process \geq myRank \\ (isend(process, \\ myRank \neq process \\ MRow_{myRank}^{myRank} \\ from_{from} + currentLinesPerThisProcess_{myRank-1} + \lambda_{process}^{myRank}) \\ \times (process++) \}) = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PiSend2(myRank).$$

10) Асинхронний прийом найоптимальніших елементів m -того рядка:

$$iRecv2 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} ((process = 0) \times \\ \{ process \geq numProcsWhereLinesPlus1_{myRank} \neq process \\ isend(process, \\ MRow_{myRank}^{myRank} \\ from_{from} + currentLinesPerThisProcess_{myRank} + \\ \lambda_{process}^{myRank}) \times (process++) \times \{ process \geq numProcs \\ (isend(process, \\ myRank \neq process \\ MRow_{myRank}^{myRank} \\ from_{from} + currentLinesPerThisProcess_{myRank} + \lambda_{process}^{myRank}) \times \\ (process++) \}) = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PiRecv2(myRank).$$

11) Обробляємо наявні у даного процесу дані за формулою (3):

$$Dancug3.1 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} ((line = 0) \times \{ lines \geq currentLinesPerThisProcess \\ (i = from) \times \{ lines \geq currentLinesPerThisProcess \\ SetWayIf(intermediateMatrix_{line}^{myRank}, \\ intermediateMatrix_{line}^{myRank}, MRow_{myRank}) \times (i++) \times \\ (line++) \}) = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PDancug3.1(myRank).$$

12) Чекаємо на отримання даних:

$$WaitRecv2 = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} (waitall(\eta_0^{myRank}, myRank) \times \\ waitall(\eta_{myRank+1}^{myRank}, numProcs - (myRank + 1))) \\ = \bigvee_{myRank=0}^{numProcs-1} PWaitRecv2(myRank).$$

13) Чекаємо на завершення відправлення:

$$\text{WaitSend2} = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} (\text{waitall}(\lambda_0^{\text{myRank}}, \text{myRank}) \times \text{waitall}(\lambda_1^{\text{myRank}}, \text{numProcs} - (\text{myRank} + 1))) = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} P\text{WaitSend2}(\text{myRank}).$$

14) Копіюємо m -тий рядок в проміжну матрицю потрібного процесу:

$$\text{Copy} = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} (\text{myRank} = (m \bmod \text{numProcs})) \\ (\text{intermediateMatrix}_{m \bmod \text{numProcs}} = M\text{Row} \vee E) = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} P\text{Copy}(\text{myRank}).$$

15) Обробляємо дані за формулою (3) для решти отриманих елементів m -того рядка:

$$\text{Dancug3.2} = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((\text{line} = 0) \times \{ \text{line2currentLinesPerThisProcess} \} \{ (i = 0) \times \{ \text{SetWayIf}(\text{intermediateMatrix}_{\text{myRank}}^{\text{line } i}, \text{intermediateMatrix}_{\text{myRank}}^{\text{line } m}, M\text{Row}_i) \times (i++) \times (i = \text{from} + \text{currentLinesPerThisProcess}^{\text{myRank}}) \times \{ \text{SetWayIf}(\text{intermediateMatrix}_{\text{myRank}}^{\text{line } i}, \text{intermediateMatrix}_{\text{myRank}}^{\text{line } m}, M\text{Row}_i) \times (i++) \times (\text{line}++) \} \} = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} P\text{Dancug3.2}(\text{myRank}).$$

16) Передача всіх даних процесу з номером 0:

$$\text{Final} = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} ((\text{line} = 0) \times (j = \text{myRank}) \times \{ \text{isend}(0, \text{intermediateMatrix}_{\text{myRank}}^{\text{line } j}, \lambda_{\text{process}}^{\text{myRank}}) \} \{ (j = 0) \times (process = 0) \times \{ \text{irecv}(process, \text{outputMatrix}_j, \eta_j^{\text{myRank}}) \} \times \text{waitall}(\eta_0^{\text{myRank}}, N) \} \times \text{waitall}(\lambda_0^{\text{myRank}}, \text{linesPerThisProcess})) = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} P\text{Final}(\text{myRank}).$$

Запишемо тепер весь алгоритм через описані частини, розташовуючи їх в оптимальному порядку:

$$\text{Dancug} = \text{Init} \times (m = 0) \times \{ \text{Dancug1.1} \times i \text{Recv1} \times i\text{Send1} \times \text{Dancug2} \times \text{WaitRecv1} \times \text{Dancug1.2} \times \text{WaitSend1} \times i\text{Send2} \times i\text{Recv2} \times \text{Dancug3.1} \times \text{WaitRecv2} \times \text{Copy} \times \text{Dancug3.2} \times \text{WaitSend2} \times (m++) \} \times \text{Final} = \bigvee_{\text{myRank}=0}^{\text{numProcs}-1} (P\text{Init}(\text{myRank}) \times (m = 0) \times \{ P\text{Dancug1.1}(\text{myRank}) \times P\text{iRecv1}(\text{myRank}) \times P\text{iSend1}(\text{myRank}) \times P\text{Dancug2}(\text{myRank}) \times P\text{WaitRecv1}(\text{myRank}) \times P\text{Dancug1.2}(\text{myRank}) \times P\text{WaitSend1}(\text{myRank}) \times P\text{iSend2}(\text{myRank}) \times P\text{iRecv2}(\text{myRank}) \times P\text{Dancug3.1}(\text{myRank}) \times P\text{WaitRecv2}(\text{myRank}) \times P\text{Copy}(\text{myRank}) \times P\text{Dancug3.2}(\text{myRank}) \times P\text{WaitSend2}(\text{myRank}) \times (m++) \} \times P\text{Final}(\text{myRank})).$$

Таким чином ми отримали алгоритм, який виконується в numProcs процесах паралельно.

Проаналізуємо основні властивості даного варіанту паралельної версії алгоритму.

- 1) Зведено до мінімуму передачу даних між процесами.
- 2) Навантаження на кожному кроці ітерації рівномірно розподіляється між усіма процесами.
- 3) Процеси не чекають на завершення обміну даними між ними: прийом-передача даних відбувається асинхронно, і доки дані надсилаються, алгоритм виконує корисну роботу.

Одержана паралельна схема є зручним інструментом дослідження методів віртуалізації у кластерних системах.

Результати експериментів

Було написано програму мовою C++ за наведеною схемою. Використовувалася технологія MPI. Програма тестувалася на кластері.

Таблиця 1

Характеристики процесора

	Core 2 Quad Q6600
Номінальна частота	2.4 ГГц
Кеш другого рівня	2 x 4 Мбайта
Число ядер	4

Апаратна база: Microsoft HPC Кластер, вузли

якого побудовані на базі процесора Intel Core 2 Quad CPU Q6600.

Компілятор: Microsoft (R) C/C++

16.00.30319.01 для x64,

Платформа: x64,

Оптимізація: /O2 (максимальна швидкодія).

Кластер складається з чотирнадцяти вузлів. Результати вимірів залежать від розподілу задач по вузлах. При послідовному заповненні отримуємо графік залежності часу виконання від кількості вершин та ядер (див. рис. 2).

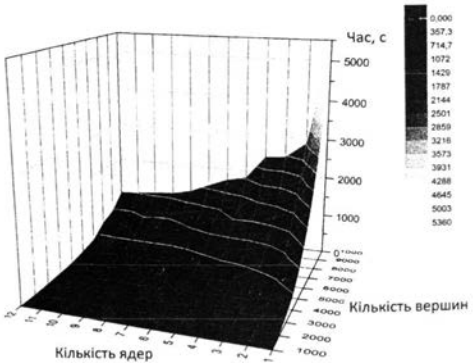


Рис. 2. Час виконання

Таблиця 2

Прискорення													
Ядра \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1000	1,00	2,00	2,69	4,00	1,12	1,85	1,76	1,53	0,43	1,62	1,40	1,26	
2000	1,00	2,00	2,88	3,64	2,36	3,35	4,06	4,19	4,03	3,90	3,41	4,49	
3000	1,00	1,96	2,90	3,50	3,13	4,00	4,94	4,49	5,05	5,73	6,25	6,10	
4000	1,00	2,00	2,82	3,42	3,35	4,35	4,85	5,43	5,49	6,03	6,56	5,77	
5000	1,00	2,00	2,81	3,32	3,66	4,55	4,82	5,83	5,32	4,97	5,87	7,27	
6000	1,00	2,00	2,85	3,46	3,79	4,58	5,19	5,91	6,02	5,56	6,03	7,17	
7000	1,00	2,00	2,76	3,34	3,85	4,46	5,14	5,88	6,13	6,21	6,32	6,95	
8000	1,00	1,81	2,26	2,53	2,54	2,71	3,51	4,64	4,56	4,47	4,75	5,05	
9000	1,00	1,92	2,37	2,55	3,22	3,67	4,14	4,43	5,18	4,94	5,74	5,81	
10000	1,00	1,86	2,16	2,20	2,94	3,14	3,56	4,15	4,57	4,73	4,93	5,18	

Варто зазначити, що при використанні на кожному вузлі не всіх чотирьох ядер (залишаючи сумарну кількість ядер незмінною) швидкодія інколи покращується і ніколи суттєво не погіршується (це пов'язано з тим, що процесам не потрібно боротися за мережеву карту, доступ

до пам'яті, DMA, та залишається вільне ядро для ОС). Можливе сповільнення спричинене більшими затримками мережі, оскільки збільшується кількість вузлів. Для порівняння розглянемо відповідний графік (див. рис. 3).

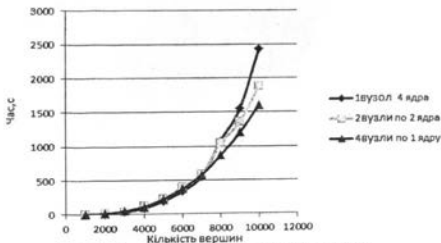


Рис. 3. Порівняння часу виконання для різних архітектур

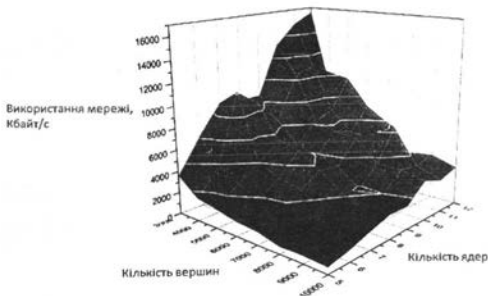


Рис. 4. Використання мережі

Бачимо, що при збільшенні кількості вершин навантаження на мережу зменшується (рис. 4). Це можна пояснити тим, що складність

алгоритму кубічна, а кількість інформації, що передається, зростає лінійно з кількістю вершин.

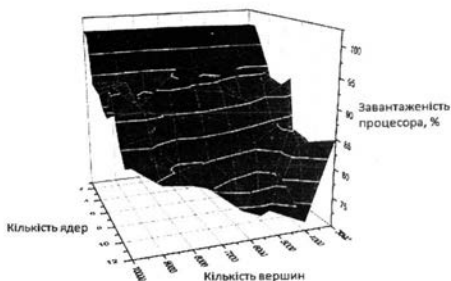


Рис. 5. Середня завантаженість усіх використовуваних ядер

З графіка бачимо, що завантаженість ядер зменшується з кількістю ядер – збільшується очікування на прийом-передачу даних. Взагалі вираз в швидкодії залежить від співвідношення часу затраченого на передачу даних та часу, який ми виграсмо за рахунок розпаралелювання (що залежить від N).

Висновки

1. В статті виконано формалізацію алгоритму Данцига з використанням

математичного апарату САА та отримано послідовну схему.

2. Для паралельного виконання алгоритму виконано його модифікацію, шляхом еквівалентних перетворень.

3. Отриману схему було використано як теоретичну базу та створено програми для обчислень на кластерах. Проведено експериментальні обчислення. Аналіз результатів обчислень показує, що паралельна програма працює швидше в залежності від варіації параметрів архітектури системи.

Список використаних джерел

1. Погорілий С.Д., Калита Д.М. Оптимізація алгоритмів маршрутизації з використанням систем алгоритмічних алгебр // УСМ, № 4, 2000. – С. 20 - 30.
2. Погорілий С.Д. Програмне конструювання: Підручник / За ред. О.В. Третьяка. – 2-е вид. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2005. – 483 с.
3. Форум: Message Passing Interface Forum
Режим доступу: [http://www.mpi-](http://www.mpi-forum.org/docs/mpi-20.html/mpi2-report.html)

[forum.org/docs/mpi-20.html/mpi2-report.html](http://www.mpi-forum.org/docs/mpi-20.html/mpi2-report.html)

4. Богачев К.Ю. Основы параллельного программирования. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 342 с.
5. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 324 с.
6. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: Центр непрерывного математического образования, 2000. – 960 с.

Надійшла до редколегії 10.04.12

УДК 004.4

Россада* Т.В., аспірант

**Формалізація багатозначного
іменування у мовах програм над
номінативними даними**

У статті розглядається та формалізується такий аспект природних та формальних мов, як багатозначність денотату. Дослідження проводяться у рамках композиційно-номінативного підходу до програмування. Визначається мова програм SICON над даними з багатозначним іменуванням, досліджуються її властивості. Доводиться монотонність програм мови SICON відносно збагачення вхідних даних.

Ключові слова: номінативні дані, мови програмування, семантика програм, програмні алгебри.

*E-mail: t.rossada@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Буй Д.Б.

Вступ

При використанні традиційного математичного апарату для розв'язку таких задач, як розробка та формалізація моделей систем з метою їх подальшої програмної обробки, виникає ряд проблем, серед яких – неоднозначність денотатів та недетермінованість систем (моделей). Першу проблему можна тлумачити по-різному, в цій статті буде розглянуто такий її аспект, як багатозначність іменування (полісемія).

Деякі лінгвісти та психологи, досліджуючи полісемію, прийшли до висновку, що остання є природною для людського мислення та необхідною складовою будь-якої мови [1]. Але у формальних системах (мовах програмування та специфікацій, їх формальних моделях) довгий час намагалися притримуватися принципу однозначності іменування, введенням Фреге та збагаченням Расселом [2–3]. Аналіз сучасних мов програмування та специфікацій дозволяє стверджувати, що цей принцип, насправді, не є абсолютним: неоднозначність у формальних системах може не тільки допускатися, але і використовуватися для збільшення виразності. Наприклад, реалізовані у передових фреймворках селектори CSS3 дозволяють працювати з вибраною по деякому критерію колекцією елементів і в разі підвищують виразність мови JavaScript [4]. Тематичне групу-

Rossada T.V., P.G.

**Formalization of multivalued naming in
program languages over nominative data**

Polysemy, the aspect of natural and formal languages, is researched and formalized. Research is conducted in the framework of composition-nominative approach to programming. Programming language SICON over multivalued nominative data is defined and its properties are investigated. Monotonicity of SICON programs with respect to data enrichment is proved.

Key Words: nominative data, programming languages, program semantics, program algebras.

вання знайдених документів (кластеризація), вперше застосоване в інтелектуальній пошуковій системі nigma.ru, значно полегшило пошук необхідної користувачу інформації, підвищило релевантність пошуку. Все це доводить актуальність та корисність дослідження обраної проблематики і необхідності формалізації даного поняття.

Варто зауважити, що системи з багатозначним іменуванням є, у деякому сенсі, недетермінованими: результат обробки таких даних залежить від вибору значення багатозначного імені і не може бути визначений однозначно до початку роботи програми.

У даній роботі досліджуються, аналізуються та формалізуються вищезазначені проблеми стосовно мов програмування. У роботі [5] було доведено, що більша частина існуючих на сьогодні моделей даних може бути подана у вигляді номінативних даних, тому у даній роботі будемо працювати саме з ними.

Усі використані в роботі позначення та поняття трактуються у розумінні [5–6].

1. Номінативні дані з багатозначними іменами

Введення багатозначного денотату дозволяє наблизити формальну модель до реального прототипу. Розглянемо це на спрощеному прикладі складу деталей автомобільного заводу: двигунів, шасі та кузовів автомобілів (рис. 1). Зазвичай такі

дані представляють у вигляді дерева, листками якого є власне об'єкти.

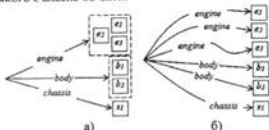


Рис. 1. Варіанти моделювання багатозначного номінативного даного: а) – з використанням множин, б) – з використанням багатозначних імен

Перший варіант, який, у даному випадку, виключає багатозначність імені – подає множини об'єктів як значення (рис. 1 а)). Особливістю, що дещо ускладнює роботу з такими даними, є неоднорідність елементів: доводиться працювати не лише з іменами та значеннями, а й з множинами (зокрема, із множинами значень).

У статті запропонований варіант використання багатозначного денотату, що уникає роботи з множинами значень (рис. 1 б)) за рахунок введення багатозначних імен.

Для визначення й дослідження основних проблем та особливостей роботи з номінативними даними, функціями та композиціями над ними розглянемо підклас реляційних номінативних даних рангу 1, який, по суті, є множиною пар «ім'я $\mapsto$ значення». Цей підклас RNS (з англ. *Relational Nominative Set*) будується на основі множини імен V і множини базових (атомарних) значень W (зафіксуємо їх) та задається формулою $RNS: V \xrightarrow{r} W$, де $\xrightarrow{r}$ означає клас багатозначних реляційних відображень. Реляційність означає, що клас таких відображень є ізоморфним класу бінарних відношень (реляцій) на відповідних множинах. Клас RNS є підкласом загального класу номінативних даних [6].

Для роботи з даними класу RNS визначимо над ними базові операції, функції та їх композиції, що будуть враховувати властивості даних цього класу.

2. Операції над номінативними множинами та їх властивості

Для номінативної множини (даного) $d \in RNS$ запис $v \mapsto w \in d$ означає, що в ім'я v приймає значення w (при цьому w може приймати і інші значення). Предикат $\in_d$ будемо називати предикатом номінативної належності.

Множиною імен даного $d \in RNS$ (позначатимемо $nms(d)$) назвемо усі такі $v \in V$, для яких існує хоча б одне $w \in W$ таке, що $v \mapsto w \in d$.

Для $w \in W$, $v \in V$, $d, d' \in RNS$ визначимо базові теоретико-множинні відношення включення $\subseteq$ (строого включення $\subset$) та рівності $=$:

$$d \subseteq d' \Leftrightarrow \forall v \forall w ((v \mapsto w \in d) \rightarrow (v \mapsto w \in d'));$$

$$d \subset d' \Leftrightarrow d \subseteq d' \wedge d' \neq d;$$

Для $w \in W$, $v \in V$, $d, d' \in RNS$ визначимо базові теоретико-множинні операції об'єднання $\cup$, перетину $\cap$, різниці $\setminus$, різниці $\setminus$ та проєкції $//$ за іменами певного номінативного даного:

$$\begin{aligned} d \cup d' &= \{v \mapsto w | v \mapsto w \in d \vee v \mapsto w \in d'\}; \\ d \cap d' &= \{v \mapsto w | v \mapsto w \in d \wedge v \mapsto w \in d'\}; \\ d \setminus d' &= \{v \mapsto w | v \mapsto w \in d \wedge v \mapsto w \notin d'\}; \\ d \setminus \setminus d' &= \{v \mapsto w | v \mapsto w \in d \wedge v \notin nms(d')\}; \\ d // d' &= \{v \mapsto w | v \mapsto w \in d \wedge v \in nms(d')\}. \end{aligned}$$

Для $w \in W$, $v \in V$, $d, d' \in RNS$ визначимо базові функції іменування $\Rightarrow_r: W \rightarrow RNS$, недетермінованого розіменування $v \mapsto_r: RNS \xrightarrow{r} W$, недетермінованого реляційного оновлення $\uparrow_r: RNS^2 \xrightarrow{r} RNS$ та функцію-константу $\bar{\varnothing}: RNS \rightarrow RNS$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow_r v(w) &= \{v \mapsto w\}; \\ v \mapsto_r(d) &= w \Leftrightarrow v \mapsto w \in d; \\ d \uparrow_r d' &= d' \cup (d \setminus d') \cup r, \text{ де } r \text{ таке, що } r \subseteq (d // d') \text{ (тобто результат недетермінований).} \\ \bar{\varnothing}(d) &= \varnothing. \end{aligned}$$

Сформулюємо основні властивості класу RNS як підкласу загального класу номінативних даних.

Твердження 1 (про замкненість класу RNS відносно базових функцій та операцій). Якщо $d, d' \in RNS$, то $d \cup d'$, $d \cap d'$, $d \setminus d'$, $d \setminus \setminus d'$, $d // d'$, $d \uparrow_r d'$, $\bar{\varnothing}(d) \in RNS$.

Доведення слідує із визначення операцій. Для $\cup$ і $\cap$ виконуються наступні властивості теоретико-множинних операцій: ідемпотентність, комутативність та асоціативність. Також виконуються закони поглинання:

$(d \cup d') \cap d = d$ і $(d \cap d') \cup d = d$ ($d, d' \in RNS$). Крім того, враховуючи властивості відношення $\subseteq$: $d \subseteq d \cup d'$, $d \cap d' \subseteq d$, та вважаючи, що $d \cup d' = \sup(d, d')$, $d \cap d' = \inf(d, d')$, вірним є:

Твердження 2. RNS є решіткою.

Наведені властивості дозволяють ввести триоснову алгебру реляційних номінативних множин: $A_RNS = \langle RNS, W, Bool; \vee, \cap, \cup, \cap, \cup, \cup, \cap, \cup, \cap, \cup, \cap, \cup, \cap \rangle$. До цієї алгебри можна додати n -арні функції та предикати, визначені на множині W (рис. 2).

Функції, визначені на множині RNS , будемо називати *мультиарними*.

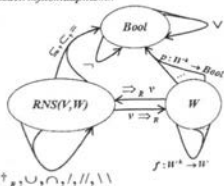


Рис. 2. Алгебра реляційних номінативних множин

3. Алгебра функцій над реляційними номінативними множинами

На множинах RNS , W та $Bool$ визначимо три класи багатозначних відображень:

- клас *мультиарних предикатів*
 $P_n: RNS \xrightarrow{n} Bool$;
- клас *ординарних мультиарних функцій*
 $FO_n: RNS \xrightarrow{n} W$;
- клас *бімультиарних функцій*
 $FB_n: RNS \xrightarrow{n} RNS$.

Введені класи розглядаються як класи багатозначних (недетермінованих) відображень, оскільки їх недетермінованість індукується даними з багатозначним іменуванням. Позначимо $FO_n \cup FB_n$ як F_n .

Визначимо основні операції (композиції) для введених класів відображень.

Базовими композиціями, заданими на класі мультиарних предикатів, є *дис'юнкція* $\vee$ та *заперечення* $\neg$ (трактуються у смислі [7]).

Твердження 3. Клас P_n замкнений відносно $\vee$ та $\neg$.

Базовою композицією на класі ординарних мультиарних функцій, є *суперпозиція* за іменами: $S^{(g_1, \dots, g_n)}(f, g_n, \dots, g_1)(d) = f(d \uparrow_R [v_0 \mapsto g(d), \dots$

$v_n \mapsto g_n(d)])$, де $f, g_1, \dots, g_n \in FO_n$, $n \geq 0$.

Твердження 4. Клас FO_n замкнений відносно композиції суперпозиції.

Доведення. Оскільки $g_1, \dots, g_n \in FO_n$, то $g(d), \dots, g_n(d) \in W$. А тоді, за Тв.1 $d \uparrow_R [v_0 \mapsto g(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)] \in RNS$.

Базовими композиціями, заданими на класі бімультиарних функцій є:

- *множення* $\bullet$ – бінарна композиція, яка за функціями $f, g \in FB_n$ буде функцією $h \in FB_n$ таку, що при $f(d) \downarrow$ і $g(f(d)) \downarrow$ функція h визначена на d і повертає значення $g(f(d))$, а в інших випадках $h(d)$ невизначене;
- *розгалуження* IF – це тернарна композиція, яка за предикатом $p \in P_n$ і функціями $f, g \in FB_n$ буде функцією $h \in FB_n$ таку, що $h(d) = f(d)$, якщо $p(d) \downarrow = True$, $h(d) = g(d)$, якщо $p(d) \downarrow = False$, а в інших випадках $h(d) \uparrow$;
- *цикл* WH – бінарна композиція, яка за предикатом $p \in P_n$ і функцією $g \in FB_n$ буде функцією $h \in FB_n$ таку, що $h(d) = d$, якщо $p(d) \downarrow = False$, $h(d) = g^{(k)}(d)$, якщо $p(g^{(k)}(d)) \downarrow = False$ і $p(g^{(i)}(d)) \downarrow = True$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ (тут $g^{(k)}(d) = g(g(f \dots g(d) \dots))$ – k -кратне застосування функції g до даного d), а в інших випадках $h(d) \uparrow$;
- *присвоєння* AS_n^p , залежить від параметру $v \in V$ – унарна композиція, що задається формулою $AS_n^p(f)(d) = d \uparrow_R [v \mapsto f(d)]$, де $f \in FO_n$.

Твердження 5. Клас FB_n замкнений відносно базових композицій множення $\bullet$, розгалуження IF та циклу WH .

Доведення.

- якщо $f, g \in FB_n$, то для $d \in RNS$: $f(d) \in RNS$, а отже, і $g(f(d)) \in RNS$, а останнє визначає $f \bullet g$;
 - якщо $p \in P_n$ і $f, g \in FB_n$, то $h(d) = f(d)$, якщо $p(d) \downarrow = True$ і $h(d) = g(d)$, якщо $p(d) \downarrow = False$, в обох випадках $h(d) \in FB_n$;
 - якщо $p \in P_n$ і $g \in FB_n$, то або $h(d) = d$, якщо $p(d) \downarrow = False$ (тобто $h(d) \in RNS$), або $h(d) = g^{(k)}(d)$, де k – таке, що $p(g^{(k)}(d)) \downarrow = False$ і $p(g^{(i)}(d)) \downarrow = True$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, а $g^{(k)}(d) \in RNS$, оскільки клас FB_n замкнений відносно операції послідовного виконання;
- Побудовані композиції дозволяють стверджувати, що отримано *алгебру функцій*

$$A_Prog = \langle FB_m, FO_m, P_m; \vee, \neg, \bar{\emptyset}, v \Rightarrow_R, \Rightarrow_R v, \\ S^{[s_1, s_2, s_3]}, AS_p^*, \bullet, IF, WH \rangle \text{ (рис.3).}$$

Таким чином побудована триосновна алгебра мультінарних функцій. Виділимо дві підалгебри: мультісквітонних та мультімонотонних функцій.

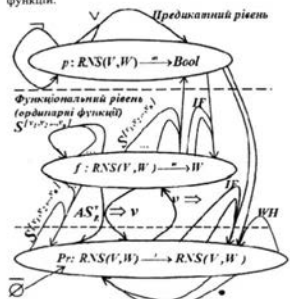


Рис. 3. Алгебра предикатів-функцій-програм

Функцію $f \in F_n$ назовемо *мультиєквітотною*, якщо для довільних $d, d' \in RNS$ таких, що $d \subseteq d'$ виконуваться наступне: для кожного r такого, що $f(d) \downarrow = r$ маємо, що $f(d') \downarrow = r$. Запис $f(d') \downarrow = r$ означає, що функція f на d' визначена і одним із її значень є r . Мультиєквітотність відрізняється від звичайної єквітотності тим, що у випадку недетермінованої функції може бути декілька результатів, тому результат, отриманий на меншому даному, може бути отриманий і на більшому даному. Очевидно, що єквітотна функція буде і мультиєквітотною, але не завжди вірно обернене.

Будемо казати, що функція $f \in F_m$ — мультимонотонна, якщо $\forall d, d' \in RNS$ таких, що $d \sqsubseteq d'$, і $f(d) \downarrow$, для будь-якого r такого, що $f(d) \downarrow = r$ існує r' таке, що $f(d') \downarrow = r'$ і $r \sqsubseteq r'$. Очевидно, що монотонна функція є і мультимонотонною, але обернене твердження вірне лише для детермінованих функцій.

Позначимо підкласи F_n та P_n мультисквітонних та мультимонотонних функцій та предикатів як EFO_n , EFB_n і EP_n та MFO_n , MFB_n і MP_n відповідно. А $EFO_n \cup EFB_n$ і $MFO_n \cup MFB_n$ — як

EF_m і MF_m відповідно. Зазначимо, що кожна мультисквітонна функція є мультимонотонною.

Стверджується, що класи EF_n і EP_n будуть замкненими відносно базових композицій. Також стверджується, що базові функції, предикати та композиції над ними будуть зберігати мультимонотонність, тобто класи MF_n і MP_n будуть замкненими відносно базових операцій, функцій та їх композицій. Доведемо це.

4. Підалгебра мультиеквітонних функцій

Твердження 6 (про мультіеквітність базових операцій та композицій над ними). Якщо $d, d' \in RNS$ і $d \subseteq d'$, то для кожного результату r операції $v \mapsto_r d$ існує такий результат r' операції $v \mapsto_{r'} d'$, що $r = r'$; $\overline{\mathcal{O}}(d) = \overline{\mathcal{O}}(d')$.

Доведення. За визначенням $v \mapsto_r d$: $v \mapsto_r d = r \Rightarrow v \mapsto r \in_e d$. За визначенням відношення $\subseteq$: для кожного r такого, що $v \mapsto r \in_e d$, існує $v \mapsto r \in_e d'$. Знову за визначенням $v \mapsto_{d'} d'$: $v \mapsto r \in_e d' \Rightarrow v \mapsto_{d'} d' = r$; $\overline{\mathcal{O}}(d) = \overline{\mathcal{O}}(d') = \emptyset$ за визначенням.

Твердження 7. Клас мультисеквітонних предикатів замкнений відносно композицій $\vee$ та $\neg$.

Твердження 8. Клас мультіеквівентних функцій замкнений відносно базових композицій. Якщо $p \in EP_m$, $f, g, g_n, \dots, g_n \in EF_m$, де $n \geq 0$, то $S^{(f, g, g_n, \dots, g_n)}(f, g_n, \dots, g_n), f \circ g, IF(p, f, g), WH(p, g) \in EF_m$.

Доведення.

1. Композиція $S^{(v_1, \dots, v_n)}$ визначається за формулою $f(d \uparrow_{\pi} [v_1 \mapsto g(d), \dots, v_n \mapsto g(d)])$, де f — мультіеквівотна функція.

2. Для $\bullet$: для $d, d' \in RNS$ таких, що $d \subseteq d'$, $f(d), f(d') \in RNS$, причому для кожного такого r , що $f(d) \downarrow r$, також виконується $f(d') \downarrow r$ і r є одним із значень $f(d')$. А тоді $g(f(d)) = g(r)$ і $g(f(d')) = g(r)$, а отже $f \bullet g$ є мультизв'язною функцією.

3. Для $d, d' \in RNS$ і $d \subseteq d'$, оскільки p – мультиеквівентний предикат (тобто $p(d) = p(d')$), то можливі два основних випадки: $IF(p.f.g)(d) = f(d)$ і $IF(p.f.g)(d') = f(d')$, якщо $p(d) = T$, і тоді істинність твердження випливає з мультиеквівентності функції f , $IF(p.f.g)(d) = g(d)$ і $IF(p.f.g)(d') = g(d')$, якщо $p(d) = F$, і тоді істинність твердження випливає з мультиеквівентності функції g .

4. Нехай $d, d' \in RNS$ і $d \subseteq d'$. Тоді існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $g^{(m)}(d) \downarrow = WH(p, g)(d)$, $p(g^{(m)}(d)) \downarrow = T$ і $p(g^{(i)}(d)) \downarrow \neq T$ для всіх $0 \leq i < m$. Із мульти-еквівентності p випливає, що $p(g^{(m)}(d')) \downarrow \neq T$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ і $p(g^{(m)}(d')) \downarrow = T$. Тоді, за визначенням циклу, маємо $WH(p, g)(d') \downarrow = g^{(m)}(d)$ і

$WH(p,g)(d) \downarrow = g^{(m)}(d')$. А $g^{(m)}$ є мультіеквівентною, оскільки побудована за допомогою композиції $\bullet$, що зберігає мультіеквівентність.

Таким чином, мультіеквівентність зберігають функції, побудовані з мультіеквівентних функцій за допомогою базових композицій.

Теорема 1. EFO_m , EFB_m і EP_m з заданими базовими функціями та композиціями над ними утворюють підалгебру алгебри функцій A_Prog .

Доведення випливає з тверджень 6–8.

5. Мультимонотонність базових функцій

Твердження 9. Базові бінарні операції $\cup$, $\parallel$, і функція $\uparrow_g$ мови програм над класом RNS є мультимонотонними за першим аргументом; $\cup$ і $\uparrow_g$ є мультимонотонними і за другим аргументом.

Доведення.

1. Для будь-якого $v \mapsto r_e, d \cup d'$: якщо $v \mapsto r_e, d$, то $v \mapsto r_e, d \cup d''$ за визначенням $\cup$; якщо ж $v \mapsto r_e, d'$, то за визначенням $\subseteq$: $v \mapsto r_e, d''$, а отже, за визначенням $\cup$, $v \mapsto r_e, d \cup d''$. А тоді $d \cup d' \subseteq d \cup d''$.

2. За визначенням операції $\parallel$: $d \parallel d' = \{v \mapsto w | v \mapsto w_e, d \wedge v \in nms(d')\}$, де $w \in W$. Очевидно, що якщо $d' \subseteq d''$, то і $nms(d') \subseteq nms(d'')$. А тоді $\{v \mapsto w | v \mapsto w_e, d \wedge v \in nms(d')\} \subseteq \{v \mapsto w | v \mapsto w_e, d \wedge v \in nms(d'')\}$.

3. За визначенням $\uparrow_g$: $r = d \cup d''$ є таким, що $d \uparrow_g d' \downarrow = r$. Але для будь-якого r' такого, що $d \uparrow_g d' \downarrow = r'$, вірно, що $r' \subseteq r$.

Наслідок. Якщо $d_1, d_1', d_2, d_2' \in RNS$, $d_1 \subseteq d_1'$ і $d_2 \subseteq d_2'$, то $d_1 \cup d_2 \subseteq d_1' \cup d_2'$.

Доведемо, що композиції мультимонотонних функцій також є мультимонотонними функціями.

Твердження 10. Клас мультимонотонних функцій замкнений відносно базових композицій $S^{(n_1, \dots, n_k)}$, $A_{g_i}^*$, $\bullet$, IF , WH .

Доведення.

1. Композиція $S^{(n_1, \dots, n_k)}$ мультимонотонних функцій $f, g_1, \dots, g_k$ визначається як $f(d \uparrow_g [v_1 \mapsto g_1(d), \dots, v_k \mapsto g_k(d)])$, де f – мультимонотонна функція.

2. Композиція присвоєння побудована на базовій операції накладання $\uparrow_g$, яка є мультимонотонною за Тв. 9.

3. $(f \bullet g)(d) = g(f(d))$. Для $d, d' \in RNS$ таких, що $d \subseteq d'$: $f(d), f(d') \in RNS$, причому, оскільки f – мультимонотонна функція, є такі значення

$r = f(d)$ і $r' = f(d')$, що $r \subseteq r'$. Оскільки g – мультимонотонна функція, то є такі значення $q = g(r)$ і $q' = g(r')$, що $q \subseteq q'$, тобто $f \bullet g$ є мультимонотонною функцією.

4. Для $p \in EP_m$, $f, g \in MF_m$, $d, d' \in RNS$ і $d \subseteq d'$, оскільки p – мультіеквівентний предикат (тобто $p(d) = p(d')$), то можливі два основних випадки визначення $IF(p, f, g)$: $IF(p, f, g)(d) = f(d)$ і $IF(p, f, g)(d') = f(d')$, якщо $p(d) = T$, і тоді істинність твердження випливає з мультимонотонності функції f ; $IF(p, f, g)(d) = g(d)$ і $IF(p, f, g)(d') = g(d')$, якщо $p(d) = F$. Тоді істинність твердження випливає з мультимонотонності функції g .

5. Для $p \in EP_m$, $g \in MF_m$, $d, d' \in RNS$ і $d \subseteq d'$ $WH(p, g)(d)$ визначається наступним чином: для деякого $m \in \mathbb{N}$ виконується $g^{(m)}(d) \downarrow = WH(p, g)(d)$, $p(g^{(m)}(d)) \downarrow = T$ і $p(g^{(i)}(d)) \downarrow \neq T$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Із мультіеквівентності p випливає, що $p(g^{(i)}(d')) \downarrow \neq T$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ і $p(g^{(m)}(d')) \downarrow = T$. Тоді, за визначенням циклу, $WH(p, g)(d) \downarrow = g^{(m)}(d)$ і $WH(p, g)(d') \downarrow = g^{(m)}(d')$. Функція $g^{(m)}$ є мультимонотонною, оскільки побудована із мультимонотонної функції g за допомогою композиції послідовного виконання, яка зберігає мультимонотонність. Отже цикл є мультимонотонною композицією.

В доведеннях всі наведені співвідношення слід тлумачити з урахуванням багатозначності функцій. Наприклад, запис $p(d) = p(d')$ означає, що якщо $p(d)$ приймає значення r , то серед можливих значень $p(d')$ також є r .

Отримані результати можна використати для доведення властивостей різних мов програмування щодо мультіеквівентності та мультимонотонності їх програм. Для прикладу візьмемо просту мову програмування *SICON* [6].

6. Інтерпретація мови програм *SICON* в алгебрі функцій над RNS

Як зазначалося у [5], основним засобом подання програм є традиційні мови програмування. У [6] введена мова *SICON*, що задовольняє критеріям *формальності, дескриптивної простоти, функціональної повноти та структурної адекватності*.

Головними операціями, на яких ґрунтується мова *SICON*, є параметрична операція розіменування $v \Rightarrow$, бінарна операція накладання ∇ та $\emptyset$. Зауважимо, що накладання явно не фігурує в мові, а використовується у композиції присвоєння.

Мова програм *SICON* є замиканням операцій розіменування та функції-константи $\emptyset$ відносно

композицій присвоєння, множення, розгалуження та циклу. Таким чином подається синтаксична складова мови. Семантично програми мови будуть визначатися в алгебрах програм. У цьому випадку саму програму можна подавати як терм певної алгебри.

Алгебра програм над класом даних RNS визначається сигнатурою $\langle v \Rightarrow, \bar{\emptyset}, S^{(n_1, \dots, n_k)}, As^*, \bullet, IF, WH \rangle$. Операція $v \Rightarrow$ інтерпретується як $v \Rightarrow_R$; As^* , залежне від $v \in V$ – як унарна композиція, що задається формулою $As^*_v(f)(d) = d \uparrow_v [v \mapsto f(d)]$, де $f \in FO_m$, а $d \in RNS$; суперпозиція інтерпретується наступним чином: $S^{(n_1, \dots, n_k)}(f g_1 \dots g_k)(d) = f(d \uparrow_{v_1} [v_1 \mapsto g_1(d)], \dots, v_k \mapsto g_k(d))$. Інтерпретації композицій послідовного виконання, умовного оператора та циклу задаються у цих алгебрах звичайним чином.

Кожен семантичний терм Pr інтерпретується в алгебрах програм над класом даних RNS як певна функція $f: RNS \rightarrow RNS \cup W$ (клас таких функцій позначимо як SF_m), або предикат $p: RNS \rightarrow Bool$ (клас таких предикатів позначимо як SP_m). Функції f класу SF_m такі, що $f: RNS \rightarrow W$, будемо називати *ординарними мультиарними*, а g такі, що $g: RNS \rightarrow RNS$ – *бімультиарними*.

Список використаних джерел

1. Глуцкая Н.В. Полисемантическое слово в речи ребенка дошкольного возраста: дис. на соиск. учен. степ. канд. филол. наук: 10.02.01 / Глуцкая На-дежда Владимировна. – Череповец, 2004.
2. Бирюков Б.В. Готтлоб Фреге: современный взгляд / Б.В. Бирюков // Г. Фреге. Логика и логическая семантика. Сборник трудов – М., 2000. – С. 33.
3. Рассел Б. Исследование значения и истины / Б. Рассел – Москва: Идея-Пресс: Дом интеллектуал. кн., 1999. – 400 с.
4. De Leon I. Take Your Design To The Next Level With CSS3 [електронний ресурс] / Inayaili de Leon // Smashing Magazine. – 2009. – Режим доступу: <http://coding.smashingmagazine.com/2009/06/15/take-your-design-to-the-next-level-with-css3/>.

Наведені композиції та класи функцій утворюють *програму алгебри* $A_Prog_m = \langle SF_m, SP_m, v \Rightarrow, \bar{\emptyset}, S^{(n_1, \dots, n_k)}, As^*, \bullet, IF, WH \rangle$.

Теорема 2 (про монотонність програм мови *SICON* відносно збагачення вхідних даних). Програми мови *SICON* є мультимонотонними за відношенням $\subseteq$.

Доведення. З тверджень 9–10 випливає, що програми, побудовані з базових мультимонотонних функцій шляхом застосування базових композицій, є мультимонотонними.

Висновки

У даній роботі в рамках композиційно-номінативного підходу проаналізовано, досліджено та формалізовано такі проблеми, як неоднозначність денотатів (імен) та недетермінованість систем (моделей). Запропоновано клас *RNS* реляційних номінативних множин.

Введено інтерпретації простої мови програмування *SICON* в алгебрах функцій та композицій над реляційною номінативною множиною, доведена теорема про монотонність програм цієї мови.

5. Нікітченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С. Нікітченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
6. Нікітченко М. Композиційно-номінативні мови програм з асоціативним розмінуванням / М. Нікітченко, С. Іванов // Вісник Львівського університету. Прикладна математика та інформатика. – 2010. – Вип. 16. – С. 124–139.
7. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. Нікітченко, С. Шкільняк. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 528 с. – ISBN 966-439-007-0.

Надійшла до редколегії 22.02.2012

УДК 512.552+519.713

Скобелев В. В., к.ф.-м.н.

Аналіз автоматів, які визначено на еліптичних кривих

Досліджено множини автоматів Мілі і Мура, які визначено на групах точок еліптичних кривих над скінченним полем. Охарактеризовано множини групових та приведених автоматів, а також множини еквівалентних станів автомата, який не є приведеним. Встановлено достатні умови при яких автомат не є сильно зв'язним. Розв'язано задачу ідентифікації початкового стану автомата, а також задачу побудови точної імітаційної моделі автомата.

Ключові слова: еліптичні криві, скінченні поля, автомати, ідентифікація.

E-mail: vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.uaСтаттю представив чл.-кор. НАН України,
Анісімов А.В.**Вступ**

На сучасному етапі розвитку криптографії значна увага приділяється розробці методів ефективного використання еліптичних кривих над скінченними полями у процесі розв'язання задач захисту інформації [1-3]. При цьому, інтерес до використання саме еліптичних кривих над скінченними полями в значній мірі пов'язаний з тим, що множина точок такої кривої має структуру абелевої групи для якої результат групової операції обчислюється достатньо легко, але пошук дискретного логарифму вважається важкою задачею (більш того, відомо, що ця задача не завжди можливо звести до пошуку дискретного логарифму у скінченному полі).

Саме та обставина, що множина точок еліптичної кривої є групою природно призводить до дослідження автоматних моделей, які визначено рівняннями над цією групою. Такі моделі дають змогу ефективно використовувати множини траєкторій, які побудовано на еліптичних кривих за допомогою швидких обчислень у процесі розробки обчислювально-стійких алгоритмів захисту інформації. Ясно, що теоретичне обґрунтування саме обчислювальної стійкості такого алгоритму в значній мірі базується на складності ідентифікації траєкторій, які використовуються у процесі його роботи.

V. V. Skobelev, PhD.

Analysis of automata determined over elliptic curves

There are analyzed the sets of Mealy and Moore automata determined over groups of points of elliptic curves over finite field. There are characterized the sets of permutation and reduced automata as well as the sets of equivalent states of a non-reduced automaton. Sufficient conditions under which an automaton is not strongly connected are established. Problem of identification of initial state of an automaton as well as problem of design of simulation model for an automaton are resolved.

Key Words: elliptic curves, finite fields, automata, identification.

У даній роботі досліджено властивості автоматів Мілі і Мура, які визначено на групах точок еліптичних кривих над скінченним полем.

1. Групи точок еліптичних кривих

Зафіксуємо поле $F = GF(q)$, де $q = p^k$ (p – просте число, а $k \in \mathbb{N}$). Позначимо через Γ_F множину усіх еліптичних кривих над полем F . Вважаємо, що еліптичні криві представлено у стандартній формі, оскільки це припущення не обмежує міркування.

Позначимо через G_γ множину усіх точок еліптичної кривої $\gamma \in \Gamma_F$ (включаючи невластиву точку O). Відомо, що $G_\gamma = (G_\gamma, +)$ ($\gamma \in \Gamma_F$) є абелевою групою, для якої точка O є нулем, а операція “+” характеризується наступним чином: сума кожних трьох точок кривої γ , які належать одній прямій лінії, дорівнює нулю O .

Група G_γ ($\gamma \in \Gamma_F$) має достатньо прозору структуру, а саме: вона є або циклічною групою, або ізоморфна прямій сумі двох абелевих груп $Z_{d_i} = (Z_{d_i}, \oplus_i)$ ($i=1,2$), де d_1 – дільник числа $q-1$, d_2 – дільник числа d_1 , а $\oplus_i$ ($i=1,2$) – сума по модулю d_i .

Значно складніша ситуація має місце при обчисленні порядку $|G_\gamma|$ групи G_γ ($\gamma \in \Gamma_F$).

Дійсно, порядки $|G_r|$ відомі лише для суперсингулярних еліптичних кривих $\gamma \in \Gamma_{GF(2^k)}$ (наприклад, якщо число k є непарним, то в залежності від вигляду стандартної форми суперсингулярної еліптичної кривої $\gamma \in \Gamma_{GF(2^k)}$, а також від числа $k \pmod{8}$ порядок $|G_r|$ дорівнює $2^k + 1$ або $2^k \pm \sqrt{2^{k+1}} + 1$).

Для несуперсингулярної еліптичної кривої $\gamma \in \Gamma_{GF(p^k)}$ та для еліптичної кривої $\gamma \in \Gamma_{GF(p^k)}$ ($p \geq 3$) порядок $|G_r|$ може бути обчислено за допомогою рекурентних формул, теореми Вейля або поліноміального (але достатньо громоздкого) алгоритму Шуфа, чи того або іншого його удосконаленого варіанту (див., напр., [3,4]). Така ситуація обумовлена наступною обставиною.

Згідно з теоремою Хассе порядок групи G_r ($\gamma \in \Gamma_{GF(p^k)}$) задовольняє наступним нерівностям

$$p^k + 1 - 2\sqrt{p^k} \leq |G_r| \leq p^k + 1 + 2\sqrt{p^k}. \quad (1)$$

У [5] встановлено, що якщо $p \geq 3$, а $k=1$, то порядки груп G_r ($\gamma \in \Gamma_k$) розподілені на відрізьку (1) майже рівномірно, а саме: існують такі константи $c_1, c_2 > 0$, що для кожного простого числа $p > 3$ та для кожної множини S натуральних чисел, яка задовольняє умові

$$S \subseteq [p+1-2\sqrt{p}, p+1+2\sqrt{p}]$$

ймовірність P_S того, що для випадково обраної пари $(a, b) \in \mathbb{Z}_p^2$ стандартна форма

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

визначає еліптичну криву $\gamma \in \Gamma_r$, для якої $|G_r| \in S$ задовольняє нерівностям

$$\frac{c_1(|S|-2)}{(2\sqrt{p}+1)\log p} \leq P_S \leq \frac{c_2|S|\log p(\log \log p)^2}{2\sqrt{p}+1}.$$

З цього результату випливає, що при $p \geq 3$ існує достатньо багато класів не ізоморфних еліптичних кривих $\gamma \in \Gamma_{GF(p^k)}$. Як наслідок, при $p \geq 3$ навряд чи належить очікувати можливість суттєвого прориву при обчисленні порядків $|G_r|$ груп G_r ($\gamma \in \Gamma_{GF(p^k)}$).

2. Модель дослідження

Зафіксуємо еліптичну криву $\gamma \in \Gamma_r$ і число $l \in \mathbb{N}_{p+1}$ ($l \geq 2$). Системи рекурентних рівнянь

$$M_1: \begin{cases} q_{i+1} = nq_i + x_{i+1}P_1 \\ y_{i+1} = mq_i + x_{i+1}P_2 \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+), \quad (2)$$

$$M_2: \begin{cases} q_{i+1} = nq_i + x_{i+1}P_1 \\ y_{i+1} = mq_{i+1} \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+), \quad (3)$$

де $q_0 \in G_r$, $x_{i+1} \in \mathbb{Z}_l$ ($i \in \mathbb{Z}_+$) при фіксованих точках $P_1, P_2 \in G_r \setminus \{O\}$ та фіксованих числах $n, m \in \mathbb{N}_{p+1}$ визначають автомат, відповідно, Мілі або Мура, для якого q_i, x_i, y_i є, відповідно, станом, вхідним та вихідним символом у момент часу i .

Множини автоматів, які визначено системами рівнянь (2) та (3) позначимо, відповідно, через $A_{r,j,1}$ і $A_{r,j,2}$. Відзначимо, що для автомата $M_i \in A_{r,j,i}$ ($i=1,2$) множина $\mathbb{Z}_l$ є вхідним алфавітом, а множина G_r є множиною станів, а також вихідним алфавітом.

З визначення множин автоматів $A_{r,j,i}$ ($i=1,2$) випливає, що для потужностей цих множин мають місце рівності

$$|A_{r,j,i}| = (|G_r| - 1)^{5-i} \quad (i=1,2). \quad (4)$$

З (1) і (4) випливає, що у кожному полі $F = GF(q)$, де $q = p^k$ (p – просте число, а $k \in \mathbb{N}$) для кожної еліптичної кривої $\gamma \in \Gamma_r$ мають місце наступні оцінки

$$(q - 2\sqrt{q})^{5-i} \leq |A_{r,j,i}| \leq (q + 2\sqrt{q})^{5-i} \quad (i=1,2). \quad (5)$$

Охарактеризуємо автомати, які належать множині $A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ ($\gamma \in \Gamma_r$).

3. Автоматні характеристики моделей дослідження

З другого рівняння системи рівнянь (2) випливає, що для кожного автомату $M_i \in A_{r,j,1}$ при кожному початковому стані $q_0 \in G_r$ для всіх вхідних символів $x_i, \tilde{x}_i \in \mathbb{Z}_l$ ($x_i \neq \tilde{x}_i$) має місце рівність

$$(x_i - \tilde{x}_i)P_2 = y_i - \tilde{y}_i.$$

Таким чином автомат $M_i \in A_{r,j,1}$ при кожному початковому стані $q_0 \in G_r$ реалізує ін'єктивне відображення вхідної вільної напівгрупи $(\mathbb{Z}_l)^*$ у вихідну вільну напівгрупу $(G_r)^*$ якщо число l менше ніж порядок елемента $P_2 \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Аналогічним чином з системи рівнянь (3) випливає, що для кожного автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ при кожному початковому стані $q_0 \in G_r$ для всіх вхідних символів $x_1, \tilde{x}_1 \in Z_1$ ($x_1 \neq \tilde{x}_1$) має місце рівність

$$m(x_1 - \tilde{x}_1)P_2 = y_1 - \tilde{y}_1.$$

Таким чином автомат $M_2 \in A_{r,j,2}$ при кожному початковому стані $q_0 \in G_r$ реалізує ін'єктивне відображення вхідної вільної напівгрупи $(Z_1)^*$ у вихідну вільну напівгрупу $(G_r)^*$ якщо число $m!$ менше ніж порядок елемента $P_2 \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Автомат називається груповим, якщо для кожного вхідного символу його функція переходів здійснює перетавлення на множині станів. Позначимо через $A_{r,j,i}^g$ ($i=1,2$) множини усіх групових автоматів $M_i \in A_{r,j,i}$.

Теорема 1. Множина автоматів $A_{r,j,i}^g$ ($i=1,2$) складається з усіх таких автоматів $M_i \in A_{r,j,i}$, що число $n \in N_{G_r-1}$ не є кратним порядку для жодного елемента $P \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Доведення. З 1-го рівняння систем (2) та (3) випливає, що для кожного вхідного символу $x_i \in Z_i$ та для довільних станів $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ кожного автомату $M_i \in A_{r,j,i}$ ($i=1,2$) мають місце рівності $q_1 = nq_0 + x_1P_1$ і $\tilde{q}_1 = n\tilde{q}_0 + x_1P_1$.

Таким чином,

$$\tilde{q}_1 - q_1 = n(\tilde{q}_0 - q_0) \quad (6)$$

для кожного вхідного символу $x_i \in Z_i$ та для довільних станів $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ кожного автомату $M_i \in A_{r,j,i}$ ($i=1,2$).

Для кожного елемента $q_0 \in G_r$ якщо елемент $\tilde{q}_0$ пробігає множини $G_r \setminus \{q_0\}$, то елемент $\tilde{q}_0 - q_0$ пробігає множини $G_r \setminus \{O\}$. Тому з (6) випливає, що вхідний символ $x_i \in Z_i$ здійснює перетавлення на множині станів G_r автомату $M_i \in A_{r,j,i}$ ($i=1,2$) у тому та лише у тому випадку, якщо $nP \neq O$ для усіх $P \in G_r \setminus \{O\}$, тобто при умові, що число $n \in N_{G_r-1}$ не є кратним порядку для жодного елемента $P \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Теорему доведено.

З рівності (6) випливають наступні два наслідки.

Наслідок 1. Кожен вхідний символ переводить два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ у один і той же самий стан тільки тоді, коли число $n \in N_{G_r-1}$ є кратним порядку елемента $\tilde{q}_0 - q_0 \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Наслідок 2. Кожен вхідний символ переводить два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ у різні стани тільки тоді, коли число $n \in N_{G_r-1}$ не є кратним порядку елемента $\tilde{q}_0 - q_0 \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Позначимо через $A_{r,j,i}^d$ ($i=1,2$) множини усіх приведених автоматів $M_i \in A_{r,j,i}$, тобто у яких кожні два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) нееквівалентні.

Теорема 2. Множина $A_{r,j,i}^d$ складається з усіх таких автоматів $M_i \in A_{r,j,i}$, що число $m \in N_{G_r-1}$ не є кратним порядку для жодного елемента $P \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Доведення. З 1-го рівняння системи (2) випливає, що

$$q_{i+1} = n^{i+1}q_0 + \left(\sum_{j=0}^i n^{i-j}x_{j+1}\right)P_1 \quad (i \in Z_+). \quad (7)$$

З (7) та з 2-го рівняння системи (2) випливає, що

$$y_{i+1} = mn^i q_0 + m\left(\sum_{j=0}^{i-1} n^{i-j-1}x_{j+1}\right)P_1 + x_{i+1}P_2 \quad (i \in Z_+). \quad (8)$$

Відомо, що стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_i \in A_{r,j,i}$ еквівалентні тільки тоді, коли реакції ініціальних автоматів (M_i, q_0) і $(M_i, \tilde{q}_0)$ на кожне вхідне слово $w \in (Z_1)^{G_r-1}$ однакові.

Таким чином з (8) випливає, що стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_i \in A_{r,j,i}$ еквівалентні тільки тоді, коли

$$mn^t(\tilde{q}_0 - q_0) = O \quad (t = 0, 1, \dots, |G_r| - 1). \quad (9)$$

З (9) випливає, що стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_i \in A_{r,j,i}$ еквівалентні тільки тоді, коли

$$m(\tilde{q}_0 - q_0) = O, \quad (10)$$

тобто при умові, що число m є кратним порядку елемента $\tilde{q}_0 - q_0 \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Для кожного елемента $q_0 \in G_r$, якщо елемент $\tilde{q}_0$ пробігає множину $G_r \setminus \{q_0\}$, то елемент $\tilde{q}_0 - q_0$ пробігає множину $G_r \setminus \{O\}$. Таким чином з (10) випливає, що кожні два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ нееквівалентні у тільки тоді, коли $mP \neq O$ для усіх $P \in G_r \setminus \{O\}$, тобто при умові, що число $m \in N_{G_r-1}$ не є кратним порядку для жодного елемента $P \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Теорему доведено.

З рівності (10) випливають наступні два наслідки.

Наслідок 3. Кожні два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомата $M \in A_{r,j,1}^{nd}$ розрізняються кожним вхідним символом $x \in Z_r$.

Наслідок 4. Для кожного стану $q_0 \in G_r$ автомату $M_1 \in A_{r,j,1} \setminus A_{r,j,1}^{nd}$ множина S_{q_0} усіх станів, які еквівалентні стану q_0 має вигляд

$$S_{q_0} = \{q_0\} \cup S_{q_0}^*,$$

де $S_{q_0}^*$ є множиною усіх таких елементів $q \in G_r \setminus \{q_0\}$, що порядок елемента $q - q_0$ групи G_r є дільником числа m .

Теорема 3. Множина $A_{r,j,2}^{nd}$ складається з усіх таких автоматів $M_2 \in A_{r,j,2}$, що число mn ($n, m \in N_{G_r-1}$) не є кратним порядку для жодного елемента $P \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Доведення. З 1-го рівняння системи (3) випливає, що мають місце рівності (7).

З (7) та з 2-го рівняння системи (3) випливає, що

$$y_{t+1} = mn^{t+1}q_0 + m \left(\sum_{i=0}^t n^{t-i} x_{i+1} \right) P_1 \quad (t \in Z_+). \quad (11)$$

Стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ еквівалентні тільки тоді, коли реакції ініціальних автоматів (M_2, q_0) і $(M_2, \tilde{q}_0)$ на кожне вхідне слово $u \in (Z_r)^{G_r-1}$ однакові. Тому з (11) випливає, що стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ еквівалентні тільки тоді, коли

$$mn^{t+1}(\tilde{q}_0 - q_0) = O \quad (t = 0, 1, \dots, |G_r| - 1). \quad (12)$$

З (12) випливає, що стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ еквівалентні тільки тоді, коли

$$mn(\tilde{q}_0 - q_0) = O, \quad (13)$$

тобто при умові, що число mn є кратним порядку елемента $\tilde{q}_0 - q_0 \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Для кожного елемента $q_0 \in G_r$, якщо елемент $\tilde{q}_0$ пробігає множину $G_r \setminus \{q_0\}$, то елемент $\tilde{q}_0 - q_0$ пробігає множину $G_r \setminus \{O\}$. Таким чином з (13) випливає, що кожні два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ нееквівалентні у тільки тоді, коли $mnP \neq O$ для усіх $P \in G_r \setminus \{O\}$, тобто при умові, що число mn ($n, m \in N_{G_r-1}$) не є кратним порядку для жодного елемента $P \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r .

Теорему доведено.

З рівності (13) випливають наступні два наслідки.

Наслідок 5. Кожні два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомата $M \in A_{r,j,2}^{nd}$ розрізняються кожним вхідним символом $x \in Z_r$.

Наслідок 6. Для кожного стану $q_0 \in G_r$ автомату $M_2 \in A_{r,j,2} \setminus A_{r,j,2}^{nd}$ множина S_{q_0} усіх станів, які еквівалентні стану q_0 має вигляд

$$S_{q_0} = \{q_0\} \cup S_{q_0}^*,$$

де $S_{q_0}^*$ є множиною усіх таких елементів $q \in G_r \setminus \{q_0\}$, що порядок елемента $q - q_0$ групи G_r є дільником числа mn .

Два різних стану автомату називаються близьокими, якщо кожний вхідний символ переводить їх у один і той же самий стан і при цьому автомат видає один і той же самий вихідний символ. Ясно, що стани-близьки є еквівалентними станами автомату. При цьому усі не приведені автомати можливо розбити на дві множини, перша з яких складається з усіх автоматів, які мають стани-близьки, а друга множина складається з усіх не приведених автоматів, у яких кожні два різних еквівалентних станів переводяться кожним вхідним словом у різні еквівалентні стани.

Позначимо через (n, m) найбільший спільний дільник чисел n і m . З наслідків 1, 4 і 6 випливають наступні два наслідки.

Наслідок 7. Два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_1 \in A_{r,j,1} \setminus A_{r,j,1}^{nd}$ є близькоками тільки тоді, коли порядок елементу $\tilde{q}_0 - q_0$ групи G_r є дільником числа (n, m) .

Наслідок 8. Два стани $q_0, \tilde{q}_0 \in G_r$ ($q_0 \neq \tilde{q}_0$) автомату $M_2 \in A_{r,j,2} \setminus A_{r,j,2}^{nd}$ є близькоками тільки тоді, коли порядок елементу $\tilde{q}_0 - q_0$ групи G_r є дільником числа n .

Автомат називається сильно зв'язаним, якщо для кожної упорядкованої пари його станів існує вхідне слово, яке переводить перший стан у другий стан.

Теорема 4. Автомат $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ не є сильно зв'язаним, якщо порядок елементу $P_1 \in G_r \setminus \{O\}$ відрізняється від порядку $|G_r|$ групи G_r .

Доведення. Нехай порядок l елементу $P_1 \in G_r \setminus \{O\}$ відрізняється від порядку $|G_r|$ групи G_r . Тоді $\langle P_1 \rangle = (\{kP_1 \mid k \in \mathbb{N}_l\}, +)$ є власною підгрупою групи G_r .

Підставив $q_0 = P_1$ у (7) отримуємо

$$q_{i+1} = (n^{i+1} + \sum_{r=0}^i n^{i-r} x_{r+1})P_1 \quad (i \in \mathbb{Z}_+),$$

тобто $q_{i+1} \in \{kP_1 \mid k \in \mathbb{N}_l\}$ для кожного вхідного слова $x_1 \dots x_{i+1} \in (\mathbb{Z}_l)^{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}_+$).

Таким чином множина станів $\{kP_1 \mid k \in \mathbb{N}_l\}$ визначає власний підавтомат автомату M . Звідси випливає, що автомат M не є сильно зв'язаним.

Теорему доведено.

4. Ідентифікація моделей дослідження

Розглянемо спочатку задачу ідентифікації початкового стану автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ при умові, що експериментатору відомі значення параметрів $P_1, P_2 \in G_r \setminus \{O\}$ та $n, m \in \mathbb{N}_{G_r \setminus \{O\}}$, які визначають автомат M .

Теорема 5. Для кожного автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ ідентифікація початкового стану з точністю до множини еквівалентних станів зводиться до пошуку будь якого розв'язку $u \in G_r$ рівняння

$$mu = a_0, \quad (14)$$

де $a_0 \in G_r$, яке формується у результаті будь-якого простого експерименту довжини 1 з автоматом M_1 .

Доведення. Нехай $M_1 \in A_{r,j,1}$. З (8) випливає, що

$$mn^i q_0 = a_i \quad (i \in \mathbb{Z}_+)$$

де

$$a_i = y_{i+1} - m(\sum_{r=0}^i n^{i-r} x_{r+1})P_1 - x_{i+1}P_2 \quad (i \in \mathbb{Z}_+),$$

тобто початковий стан автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ є розв'язком системи рівнянь

$$mn^i u = a_i \quad (i \in \mathbb{Z}_+). \quad (15)$$

Оскільки при $i \in \mathbb{N}$ кожне рівняння системи рівнянь (15) є наслідком рівняння (14), то достатньо обмежитися рівнянням (14).

Якщо $M_1 \in A_{r,j,1}$, то з наслідку 3 випливає, що рівняння (14) має один розв'язок. Якщо $M_1 \in A_{r,j,1} \setminus A_{r,j,1}^{nd}$, то з наслідку 4 випливає, що множиною розв'язків рівняння (14) є множина S_{q_0} усіх станів, які еквівалентні стану q_0 .

Теорему доведено.

Відзначимо, що оскільки $a_0 = y_1 - x_1 P_2$, то з теорем 1 випливає, що при ідентифікації початкового стану $q_0 \in G_r$ автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ з точністю до множини еквівалентних станів експериментатор суттєво використовує лише параметри $m \in \mathbb{N}_{G_r \setminus \{O\}}$ та $P_2 \in G_r \setminus \{O\}$, і не використовує жодної інформації стосовно параметрів $n \in \mathbb{N}_{G_r \setminus \{O\}}$ та $P_1 \in G_r \setminus \{O\}$.

Теорема 6. Для кожного автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ ідентифікація початкового стану з точністю до множини еквівалентних станів зводиться до пошуку будь якого розв'язку $v \in G_r$ рівняння

$$mnv = b_0, \quad (16)$$

де $b_0 \in G_r$, яке формується у результаті будь-якого простого експерименту довжини 1 з автоматом M_2 .

Доведення. Нехай $M_2 \in A_{r,j,2}$. З рівності (11) випливає, що

$$mn^{i+1} q_0 = b_i \quad (i \in \mathbb{Z}_+)$$

де

$$b_i = y_{i+1} - m(\sum_{r=0}^i n^{i-r} x_{r+1})P_1 \quad (i \in \mathbb{Z}_+),$$

тобто початковий стан автомату $M_1 \in A_{r,j,2}$ є розв'язком системи рівнянь

$$mn^{i+1}v = b_i \quad (i \in \mathbb{Z}_+). \quad (17)$$

Оскільки при $i \in \mathbb{N}$ кожне рівняння системи рівнянь (17) є наслідком рівняння (16), то достатньо обмежитися рівнянням (16).

Якщо $M_2 \in A_{r,j,2}^{nd}$, то з наслідку 5 випливає, що рівняння (16) має один розв'язок. Якщо $M_{21} \in A_{r,j,2}^{nd} \setminus A_{r,j,2}^{nd}$, то з наслідку 6 випливає, що множиною розв'язків рівняння (16) є множина S_{q_0} усіх станів, які еквівалентні стану q_0 .

Теорему доведено.

Відзначимо, що оскільки $b_0 = y_{i+1} - mP_1$, то при ідентифікації початкового стану $q_0 \in G_r$ автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ з точністю до множини еквівалентних станів експериментатор суттєво використовує усі три параметри $m, n \in \mathbb{N}_{|G_r|-1}$ та $P_2 \in G_r \setminus \{O\}$, які визначають автомат M_2 .

Розглянемо тепер задачу параметричної ідентифікації автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ при умові, що експериментатор, не маючи жодної інформації відносно початкового стану $q_0 \in G_r$ автомату M , може проводити експеримент довільною кратністю та висоти з ініціальним автоматом (M, q_0) .

При цьому під параметричною ідентифікацією автомату M будемо вважати побудову точної імітаційної моделі ініціального автомату (M, q_0) при довільному фіксованому початковому стані $q_0 \in G_r$, тобто пошук такої комбінації параметрів та початкового стану, яка повністю визначає відображення входньої вільної напівгрупи $(Z_r)^*$ у вихідну вільну напівгрупу $(G_r)^*$, яке реалізує ініціальний автомат (M, q_0) .

При побудові імітаційної моделі ініціального автомату (M, q_0) будемо враховувати наступну обставину.

Нехай $F = \{r^i P\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, де $r \in \mathbb{N}$ є фіксованим числом, $P \in G_r$ є фіксований елемент групи G_r , а $I = \mathbb{N}$ або $I = \mathbb{Z}_+$. Позначимо через F_k ($k \in \mathbb{N}$) підпослідовність, яка складається з перших k елементів послідовності F . Оскільки G_r є скінченною групою, то існує таке найменше число $k_{id} \in \mathbb{N}$, що для підпослідовностей $F_{k_{id}}$ має місце один з наступних двох випадків:

1) перші $k_{id} - 1$ елементів підпослідовності $F_{k_{id}}$ є попарно різні елементи множини $G_r \setminus \{O\}$, а останній її елемент є O ;

2) перші $k_{id} - 1$ елементів підпослідовності $F_{k_{id}}$ є попарно різні елементи множини $G_r \setminus \{O\}$, а останній її елемент дорівнює деякому попередньому елементу.

Оскільки підпослідовність $F_{k_{id}}$ повністю визначає послідовність F , то будемо називати $F_{k_{id}}$ ідентифікатором послідовності F .

Відзначимо, що

$$1 \leq k_{id} \leq |G_r| \quad (18)$$

для кожної послідовності $F = \{r^i P\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ елементів групи G_r .

Теорема 7. Побудову імітаційної моделі кожного автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ може бути здійснено у результаті кратного експерименту кратності не більше ніж $|G_r| + 2$ і висоти не більше ніж $|G_r| + 1$. При цьому сумарна довжина входніх слів, які подаються на автомат у ході цього кратного експерименту не більше ніж $|G_r| + 1 + 0,5|G_r|(|G_r| + 3)$.

Доведення. Нехай $M_1 \in A_{r,j,1}$. Представимо рівність (8) у вигляді

$$y_{i+1} = n^i m q_0 + \sum_{i=0}^{i-1} x_{i+1} (n^{i-1-i} m P_1) + x_{i+1} P_2 + x_{i+1} P_2 \quad (i \in \mathbb{Z}_+). \quad (19)$$

Таким чином для побудови точної імітаційної моделі автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ достатньо ідентифікувати елемент $P_2 \in G_r \setminus \{O\}$ групи G_r ,

а також визначити ідентифікатори $F_{k_{id}}^{(1)}$ і $F_{k_{id}}^{(2)}$ відповідно послідовностей $F^{(1)} = \{n^i m q_0\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ і $F^{(2)} = \{n^i m P_1\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$.

З (19) випливає, що:

1) для того, щоб визначити ідентифікатор

$$m q_0, m n q_0, \dots, m n^{k_{id}^{(1)}-1} q_0$$

послідовності $F^{(1)}$ достатньо на ініціальній автомат (M_1, q_0) подати вхідне слово $0^{k_{id}^{(1)}}$, оскільки при цьому

$$m n^i q_0 = y_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, k_{id}^{(1)} - 1);$$

2) після визначення елемента $m q_0$ для того, щоб ідентифікувати елемент $P_2 \in G_r \setminus \{O\}$ групи

G_r достатньо на ініціальний автомат (M_1, q_0) подати вхідний символ $x_1 = 1$, оскільки при цьому

$$P_2 = y_1 - mq_0;$$

3) після визначення ідентифікатора $F^{(1)}$ для того, щоб визначити i -й елемент $(i = 1, \dots, k_{\mathcal{A}}^{(2)})$ ідентифікатору

$$mP_1, mnP_1, \dots, mn^{k_{\mathcal{A}}^{(2)}-1}P_1$$

послідовності $F^{(2)}$ достатньо на ініціальний автомат (M_1, q_0) подати вхідне слово 10^i , оскільки при цьому

$$mn^{i-1}P_1 = y_{i+1} - mn^i q_0.$$

Таким чином побудова точної імітаційної моделі автомату $M_1 \in A_{r,j,1}$ здійснюється кратним експериментом кратності

$$1 + 1 + k_{\mathcal{A}}^{(2)} = k_{\mathcal{A}}^{(2)} + 2 \quad (20)$$

і висоти

$$n = \max\{k_{\mathcal{A}}^{(1)}, k_{\mathcal{A}}^{(2)} + 1\}. \quad (21)$$

При цьому сумарна довжина вхідних слів, які подаються на автомат у ході побудованого кратного експерименту дорівнює

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{A}}^{(1)} + 1 + (2 + \dots + (k_{\mathcal{A}}^{(2)} + 1)) = \\ = k_{\mathcal{A}}^{(1)} + 1 + 0.5k_{\mathcal{A}}^{(2)}(k_{\mathcal{A}}^{(2)} + 3). \end{aligned} \quad (22)$$

З (18) і (20)-(22) випливають оцінки, які вказані у теоремі.

Теорему доведено.

Теорема 8. Побудову імітаційної моделі кожного автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ може бути здійснено у результаті кратного експерименту кратності не більше ніж $|G_r| + 1$ і висоти не більше ніж $|G_r|$. При цьому сумарна довжина вхідних слів, які подаються на автомат у ході цього кратного експерименту не більше ніж $|G_r| + 0.5|G_r|(|G_r| + 1)$.

Доведення. Нехай $M_2 \in A_{r,j,2}$. Представимо рівність (11) у вигляді

$$y_{i+1} = mn^{i+1}q_0 + \sum_{r=0}^i (mn^{i-r}P_1)x_{i+1} \quad (i \in \mathbb{Z}_+). \quad (23)$$

Таким чином, для побудови точної імітаційної моделі автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ достатньо визначити ідентифікатори $F_{\mathcal{A}}^{(1)}$ і $F_{\mathcal{A}}^{(2)}$ послідовностей

$$F^{(1)} = (n^{i+1}mq_0)_{i \in \mathbb{Z}_+} \text{ і } F^{(2)} = (n^i mP_1)_{i \in \mathbb{Z}_+}.$$

З (23) випливає, що:

1) для того, щоб визначити ідентифікатор

$$mnq_0, \dots, mn^{k_{\mathcal{A}}^{(1)}}q_0$$

послідовності $F^{(1)}$ достатньо на ініціальний автомат (M_2, q_0) подати вхідне слово $0^{k_{\mathcal{A}}^{(1)}}$, оскільки при цьому

$$mn^i q_0 = y_i \quad (i = 1, \dots, k_{\mathcal{A}}^{(1)});$$

2) після визначення ідентифікатора $F^{(2)}$ для того, щоб визначити i -й елемент $(i = 1, \dots, k_{\mathcal{A}}^{(2)})$ ідентифікатору

$$mP_1, mnP_1, \dots, mn^{k_{\mathcal{A}}^{(2)}-1}P_1$$

послідовності $F^{(2)}$ достатньо на ініціальний автомат (M_2, q_0) подати вхідне слово 10^{i-1} , оскільки при цьому

$$mn^{i-1}P_1 = y_i - mn^i q_0.$$

Таким чином побудова точної імітаційної моделі автомату $M_2 \in A_{r,j,2}$ здійснюється кратним експериментом кратності

$$1 + k_{\mathcal{A}}^{(2)} \quad (24)$$

і висоти

$$n = \max\{k_{\mathcal{A}}^{(1)}, k_{\mathcal{A}}^{(2)}\}. \quad (25)$$

При цьому сумарна довжина вхідних слів, які подаються на автомат у ході побудованого кратного експерименту дорівнює

$$k_{\mathcal{A}}^{(1)} + (1 + \dots + k_{\mathcal{A}}^{(2)}) = k_{\mathcal{A}}^{(1)} + 0.5k_{\mathcal{A}}^{(2)}(k_{\mathcal{A}}^{(2)} + 1). \quad (26)$$

З (18) і (24)-(22) випливають оцінки, які вказані у теоремі.

Теорему доведено.

Висновки

У роботі досліджено множини $A_{r,j}$ автоматів Мілі і $A_{r,j,1}$ автоматів Мура, які визначено на еліптичній кривій у над скінченним полем. Охарактеризовано множини групових та приведених автоматів, а також множини еквівалентних станів автоматів, які не є приведеними. Подальше дослідження може бути пов'язано з встановленням співвідношень між основними нетривіальними підмножинами автоматів, визначених для еліптичних кривих які пов'язані між собою тим чи іншим співвідношенням.

У роботі встановлено достатні умови при яких автомат не є сильно зв'язаним. Більш детальний аналіз умов, коли автомат не є сильно зв'язаним, а також детальний аналіз структури автоматного графа в залежності від структури групи G_r і параметрів автомату визначас другим напрямком подальших досліджень.

Проведений у роботі аналіз задач ідентифікації автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ дає можливість зробити наступні висновки.

Розв'язання задачі ідентифікації початкового стану (з точністю до множини еквівалентних станів) зводиться до пошуку будь якого розв'язку $w \in G_r$ рівняння виду $kw = Q$ над групою G_r при відомих експериментатору значеннях $k \in N$ і $Q \in G_r$. Таким чином складність задачі ідентифікації початкового стану автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ визначається саме складністю пошуку будь-якого розв'язку рівняння виду $kw = Q$ над групою G_r . Аналіз складності пошуку розв'язку рівняння виду $kw = Q$ при умові, що Q є елементом тої або іншої власної підгрупи групи G_r визначає третій напрямок подальших досліджень.

У роботі задача параметричної ідентифікації автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ розв'язана як задача побудови точної імітаційної моделі автомату за допомогою кратного експерименту. Вибір такого підходу обумовлено наступними обставинами.

Оскільки автомат може не бути сильно зв'язаним, то можливість розв'язання задачі його параметричної ідентифікації за допомогою простого експерименту виглядає вельми сумнівною.

При спробі точного визначення параметрів $n, m \in N_{|G_r|-1}$ експериментатор стикається з проблемою вибору певних розв'язків рівнянь виду $xP = Q$ над групою G_r при відомих йому

значеннях $P, Q \in G_r$. Відзначимо, що множина розв'язків рівняння $xP = Q$ має вигляд

$$x = k \cdot \text{ind}_P Q \quad (k = 1, \dots, [|G_r| \cdot (\text{ind}_P Q)^{-1}]),$$

де $\text{ind}_P Q$ є індекс (дискретний логарифм) елементу Q по основі P . Таким чином для точного визначення параметрів $n, m \in N_{|G_r|-1}$ експериментатор крім розв'язання задач пошуку дискретного логарифму у групі G_r має також визначити відповідне число k . Саме для того, щоб уникнути таких складних обчислень і було обрано побудову точної імітаційної моделі автомату.

Метод побудови точної імітаційної моделі автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$ який запропоновано у доведеннях теорем 7 і 8 має ту властивість, що результати кожного простого експерименту (з яких складається кратний експеримент) легко оброблюються. Але як кратність, так і висота кратного експерименту може бути достатньо високою. Саме ця обставина характеризує високу складність задачі параметричної ідентифікації автомату $M \in A_{r,j,1} \cup A_{r,j,2}$. Аналіз множини наборів параметрів, для яких кратність і висота кратного експерименту може бути порівняна зі значенням порядку $|G_r|$ групи G_r , визначає четвертий напрямок подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. – Минск: Новое знание, 2003. – 382 с.
2. Болотов А.А., Гашиков С.Б., Фролов А.Б., Часовских А.А. Алгоритмические основы

эллиптической криптографии. – М.: МЭИ, 2000. – 100 с.

3. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦНМО, 2003. – 328 с.
4. Lenstra H.W. Factorizing integers with elliptic curves // Ann. of Math. – 1987. – V. 126. – P. 649-673.

Надійшла до редколегії 02.02.2012

УДК 51-77+519.854

Тарасова О. В.

Задача розміщення ефірних подій

У статті запропоновано варіант формалізації задачі медіапланування ефірних подій за умов обмеженого розміщення. На прикладі описано чотирикроковий алгоритм розв'язку задачі.

Ключові слова: задача розміщення з обмеженнями, медіапланування.

O. V. Tarasova

The subject of media events planning in TV broadcasting

The formalization variant of the problem of media planning of television communications is suggested in this article. 4-steps algorithm for solving the problem is demonstrated by the example.

Key Words: location problem with constraints, media planning.

E-mail: olga_ta@bigmir.net

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В. А.

Вступ

Сучасне суспільство характеризується стрімким розвитком медійного простору. В умовах постійного виникнення нових та розвитку існуючих медіаносіїв, медіаканали змушені активно боротися за споживачів інформації. Телебачення, яке історично залишається домінуючим медіаканалом, також не є винятком. Як відголосок світової тенденції, на українському телепросторі формується багатоканальне телебачення середовище. У таких умовах боротьба за споживачів ефіру, а разом з нею і задача медіапланування, стають дедалі більш нагальними [1].

Поняття медіапланування у широкому розумінні з точки зору соціології визначається для всіх медіаканалів як складова управлінської медійної діяльності з ефективного розміщення ефірних подій таким чином, аби досягнути оптимальної кількості цільової аудиторії [2, 3].

Спеціалісти з медіапланування – медіаплани – оперують різноманітними спеціальними формалізованими показниками та процедурами розрахунку для знаходження оптимальних варіантів розташування вже готових до розміщення ефірних подій. Проте через особливості реалій в Україні і Росії найбільш розробленим є саме комерційне телебачення медіапланування.

Зміст задачі медіапланування та її формалізація

На практиці медіаплани мають справу з розміщенням комерційних рекламних блоків (частина ефіру, виділена для неперервного показу рекламних роликів), спонсорських проявів

(спонсорські ролики, спонсорські плашки) та коротких ефірних подій (спеціальні сюжети, програми, ролики). Спеціалісти формують медіаплан (детальний розклад трансляції ефірних подій), як правило, на тиждень погодиною з похвилинним розбиттям. Заборонені для розміщення ефірних подій часові інтервали є відомими наперед і враховуються медіапланером при формуванні медіаплану. Один з базових медійних показників – рейтинг – визначає відносний розмір аудиторії, що контактувала з ефірною підсю. Контрольним показником для визначення ефективності розміщення є зважений сумарний рейтинг, що по суті являє собою сумарний рейтинг розміщених ефірних подій, приведений до 30-секундного ролика [3].

Нехай розглядається задача побудови медіаплану на прикладі задачі розміщення двох рекламних блоків у ефірній годині, що забезпечить оптимальний контакт рекламних блоків з аудиторією. У цьому варіанті медіапланування полягатиме у знаходженні двох інтервалів для розміщення рекламних блоків на часовому інтервалі годинного відрізка, які оптимізують сумарний зважений рейтинг цільової аудиторії.

З точки зору планування важливими характеристиками інтервалу є його початок та довжина за того чи іншого способу розміщення. Саме цими двома характеристиками інтервал описуватиметься надалі. Тобто спосіб розміщення інтервалу в рамках формалізованого опису задачі медіапланування представлтиметься парю (початок, довжина).

Весь годинний інтервал часу $I = [0, 60)$, для якого здійснюється медіапланування представляється таким, що складається із «дозволе-

них» I_0 та «заборонених» I_{∞} одиничних ділянок. Математично він представляється у вигляді: $I = \bigcup I_0 \setminus \bigcup I_{\infty} = [0, 60]$. Наперед відомими є значення функції рейтингу $r(t_i)$, що відповідають кожному одиничному інтервалу з початком $t_i \in I$, та бажане значення сумарного зваженого рейтингу цільової аудиторії w^{opt} . Сумарна довжина рекламних блоків дорівнює 12 хвилин. Довжина першого рекламного блоку l_1 може приймати значення з множини $\{12, 8, 6\}$, довжина другого рекламного блоку l_2 розраховується з рівняння $l_1 + l_2 = 12$. Зважений рейтинг $w(\tau_i, l_i)$ розраховується для кожного рекламного блоку за його розміщенням (τ_i, l_i) , $i = 1, 2$.

В досліджуваному випадку планування полягатиме у знаходженні такого допустимого розміщення (τ_1, l_1) та (τ_2, l_2) для двох рекламних блоків, що не перетинаються між собою і оптимізують сумарний зважений рейтинг цільової аудиторії $K = w(\tau_1, l_1) + w(\tau_2, l_2)$.

Це означатиме розв'язання оптимізаційної задачі. Необхідно оптимізувати функцію сумарного зваженого рейтингу за змінними τ_1, l_1, τ_2, l_2 :

$$K = w(\tau_1, l_1) + w(\tau_2, l_2) \longrightarrow w^{opt}. \quad (1)$$

За наявності «природних» обмежень:

$$\tau_1, \tau_2 \in \bigcup I_0,$$

$$l_1 + l_2 = 12,$$

$$l_i \in \{12, 8, 6\}, \quad (2)$$

$$r(\tau_i) : \tau_i \rightarrow R^+, i \in I,$$

$$w(\tau_i, l_i) = 2 \sum_{\tau_i, l_i=1}^{\tau_i, l_i=12} r(\tau_i), i = 1, 2,$$

де $\bigcup I_0$ - множина допустимих інтервалів,

$\bigcup I_{\infty}$ - множина недопустимих інтервалів,

τ_i - початок рекламного блоку i ,

l_i - довжина рекламного блоку i .

Алгоритм розв'язання задачі

За своїм змістом розглянутий вище формалізм (1)-(2) для задачі медіапланування представляє собою задачу дискретної оптимізації у якості задачі розміщення з обмеженням. За

невеликої розмірності, як в досліджуваному випадку, вони успішно розв'язуються методом простого перебору усіх допустимих варіантів розміщення [4].

Реалізація переборного алгоритму розв'язання задачі наведена нижче у вигляді кроків 1-4. Перебір полягає у знаходженні всіх дозволених пар інтервалів заданої довжини, зважений сумарний рейтинг яких відповідає оптимальному значенню.

Крок 1. На першому кроці для всіх допустимих розміщень інтервалів довжиною 8 та 4 хвилини обчислюються сумарний зважений рейтинг цільової аудиторії.

Нехай $\tau_1 = 0$ та $l_1 = 8$. Якщо усі інтервали від τ_1 до $\tau_1 + l_1 - 1$ належать множині допустимих інтервалів $\bigcup I_0$:

- обчислюємо $w(\tau_1, l_1)$;
- для τ_2 усі розміщення від τ_1 до $\tau_1 + l_1 - 1$ визначаємо як неможливі;
- обчислюємо $l_2 = 12 - l_1 = 4$;
- для всіх допустимих τ_2 обчислюємо $w(\tau_2, l_2)$ та K ;

Крок 2. На другому кроці для всіх допустимих розміщень двох інтервалів довжиною по 6 хвилин обчислюється відповідний сумарний зважений рейтинг цільової аудиторії.

Фіксуємо $\tau_1 = 0$ та $l_1 = 6$. Для нового хронометражу блоку повторюємо всі етапи кроку 1.

Крок 3. На третьому кроці для всіх допустимих розміщень інтервалу довжиною 12 хвилин обчислюється сумарний зважений рейтинг цільової аудиторії.

Фіксуємо $\tau_1 = 0$ та $l_1 = 12$. Для нового хронометражу блоку повторюємо всі етапи кроку 1.

Крок 4. На четвертому кроці формуємо множину оптимальних інтервалів розміщення.

Отриману за попередніх кроків для всіх допустимих розміщень (τ_1, l_1) , (τ_2, l_2) множину значень K порівнюємо із шуканим значенням w^{opt} . За методом найменших квадратів виокремлюємо множину оптимальних розміщень.

Реалізація

Алгоритм пошуку оптимального розміщення двох рекламних блоків у годинному інтервалі реалізовано у середовищі Borland Delphi [5].

Розглянемо програмну реалізацію розробленого алгоритму на такому прикладі: необхідно створити оптимальний медіаплан двох рекламних блоків у годинному інтервалі для $w^{opt} = 24$.

Вхідними даними є значення функції $r(\tau)$ на хвилинних відрізках годинного інтервалу, що надасться у текстовому файлі. Зчитуємо значення функції $r(\tau)$ із файлу як показано на рис. 1.



Рис. 1. Зчитування вхідних даних $r(\tau)$

Зафіксуємо $I_1 = 8$ хвилин. Тоді $I_2 = 4$ хвилини. Зафіксуємо $\tau_1 = 0$ та розрахуємо для всіх допустимих значень τ_2 всі можливі значення цільової функції $K = w(\tau_1, I_1) + w(\tau_2, I_2)$.

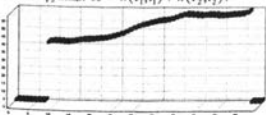


Рис. 2. Значення цільової функції K для $I_1 = 8$, $I_2 = 4$, $\tau_1 = 0$ та всіх допустимих τ_2

Оскільки за умовою задачі блоки не перетинаються, то інтервал від 0 до 7 є забороненим для розміщення другого рекламного блоку $I_2 = 4$. Хвилини від 57 до 59 також є забороненими для другого рекламного блоку в силу його неперервності.

Зафіксуємо $\tau_1 = 1$ та продовжимо по вісі 0х наступний 60-хвилинний інтервал від 60 до 120. Розрахуємо для всіх допустимих для розміщення значень τ_2 множини значень K .

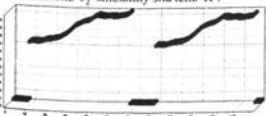


Рис. 3. Значення цільової функції K для $\tau_1 = 0$, $\tau_1 = 1$ та всіх допустимих τ_2

Аналогічно продовжимо подальший розрахунок для всіх допустимих τ_1 , τ_2 на годинному інтервалі. Отримаємо усі варіанти допустимих розміщень двох блоків хронометражем 8 та 4 хвилини, що не перетинаються.

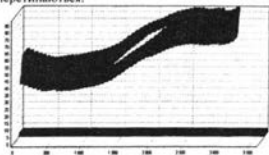


Рис. 4. Значення цільової функції для $I_1 = 8$, $I_2 = 4$ для всіх допустимих τ_1 , τ_2

Відмітимо значення цільової функції K , що відповідають оптимальному значенню критерію іншим кольором.

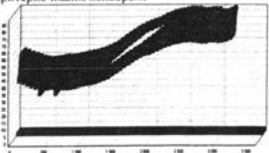


Рис. 5. Оптимальні значення цільової функції

Як видно з графіка на Рис. 4, для заданих фіксованих хронометражів рекламних блоків існує два оптимальних варіанти.

Записуємо оптимальні варіанти розстановки блоків у текстовий файл.

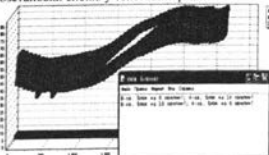


Рис. 6. Оптиміальне розміщення при $l_1 = 8$, $l_2 = 4$ для всіх допустимих τ_1, τ_2

Таким чином, для $w^{opt} = 24$ розміщення двох блоків з хронометражами 8 та 4 хвилини будуть оптимальними у варіантах $\tau_1 = 6$, $\tau_2 = 14$ або $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = 6$ відповідно.

Проведемо аналогічні розрахунки для всіх допустимих розміщень двох блоків хронометражем по 6 хвилини та одного блоку тривалістю 12 хвилини.

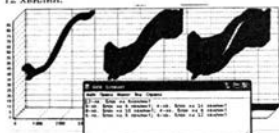


Рис. 7. Множина оптимальних розміщень $l_1 = \{12, 8, 4\}$, $l_2 = 12 - l_1$ для допустимих τ_1, τ_2

За отриманими результатами очевидно, що всі розв'язки зводяться до єдиного: для заданого оптимального значення цільової функції реклама має вийти неперервним блоком у 12 хвилини на 6 хвилині години.

Введемо обмеження. Нехай інтервал з 10 до 20 хвилини заборонений для розміщення реклами. Застосуємо алгоритм за наведених обмежень.

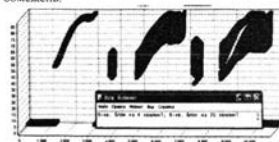


Рис. 8. Множина оптимальних розміщень за наявності забороненого інтервалу

Таким чином, при забороні розміщувати рекламу на проміжку $[10, 20]$ оптимальним буде розміщення одного 6-хвилинного блоку на 4 хвилині та другого 6-хвилинного блоку на 20 хвилині годинного інтервалу.

Висновки

У статті розглянуто задачу медіапланування ефірних комерційних та некомерційних подій. У результаті дослідження:

- запропоновано формалізацію задачі медіапланування ефірних подій, що являє собою задачу дискретної оптимізації у якості задачі розміщення з обмеженнями,
- побудовано чотирикерований алгоритм розв'язку поставленої задачі,
- розроблено програму реалізацію запропонованого алгоритму для автоматизації медіапланування засобами Borland Delphi.

Отримані результати можуть бути використані для медіапланування різних ефірних телеподій, в тому числі комерційних, на різних часових інтервалах. Зокрема, аналогічним чином може будуватися погодинний план медіаної активності на тиждень. За наявності відповідних вхідних даних отримані результати можуть бути використані також для медіапланування на радіо та в Інтернет-порталах.

Список використаних джерел

1. Пашутин Д.Ю. Статистический анализ тенденций развития телевизионного рынка России / Д.Ю. Пашутин // Научно-практический журнал Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. – 2010. – Выпуск 1. – с. 109 – 114.
2. Бузин В.Н. Медиапланирование. Теория и практика: учебное пособие. / В.Н. Бузин, Т.С. Бузина – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 495 с.
3. Маркетинг: большой толковый словарь / [Панкрухин А.П. и др.]; под ред. А.П. Панкрухина. – [2-е изд.]. – М.: Издательство «Омега-Л», 2010. – 264 с.
4. Гилл Ф. Практическая оптимизация. / Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
5. Пашутин Д.Ю. Статистический анализ тенденций развития телевизионного рынка России / Д.Ю. Пашутин // Научно-практический журнал Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. – 2010. – Выпуск 1. – с. 109 – 114.
6. Фаронов В.В. Delphi. Программирование на языке высокого уровня: [учебник для вузов] / Фаронов В.В. – СПб.: Питер, 2006. – 640 с.

Надійшла до редколегії 3.02.12

УДК 519.6

В.М. Терешенко, д.ф.-м. н., доцент,
А.О. Фокін, студент.**Регіональний пошук для Γ_f -regiony**

У роботі запропоновано метод розв'язання задачі регіонального пошуку у довільному Γ_f -regionі. В даному випадку це стало можливим завдяки зведенню задачі до регіонального пошуку у трикутнику та триангуляції запитного regiony.

Ключові слова: регіональний пошук, запитний region, множина точок, триангуляція.

E-mail: vtereshch@gmail.com.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Постановка проблеми. В роботі пропонується підхід до розв'язання задачі регіонального пошуку в Γ_f -regionі. Регіональний пошук - одна з центральних проблем в обчислювальній геометрії. Задачі регіонального пошуку мають велике теоретичне і практичне значення, особливо, що стосується застосування, як в інформатиці так і прикладних науках. Наприклад, одним із таких застосувань є задачі моделювання середовища, де завдяки регіональному пошуку суттєво оптимізуються обчислення, або, наприклад, суто практичне застосування - знаходження міст, які охоплені холодним циклоном, або вірусом, де запитний region представляє собою довільну область.

Задачі регіонального пошуку можна класифікувати по типу області пошуку - запитного regiony. Так, найбільш поширеними та дослідженими є задачі: з ортогональним запитним regionом, з k -симплексним, опуклим, круговим (сферичним) та нелінійним запитним regionом, а також пошук у півпросторі [1, 2].

Аналіз останніх досліджень. Загалом, ще 20 років тому питання регіонального пошуку для складної запитної області, а особливо симплексного регіонального пошуку було відкритим. Найбільш дослідженим був регіональний пошук з ортогональним запитним

V. N. Tereshchenko, Dr. Sci.(Phis.-Math.),
Associate Professor, A. O. Fokin, student.**Range searching for Γ_f -region**

The paper presents the method to solve a range searching problem in the arbitrary Γ_f -region. In this case it was possible due to reduction this problem to a range search in triangle and using the region triangulation.

Key Words: range searching, a query region, set of points, triangulation.

regionом, а для більш загальних запитних областей не було відомо ефективних алгоритмів. Проте, завдяки ряду робіт [2, 3] було досягнуто значного прогресу в розробці ефективних алгоритмів та структур даних і встановлені нетривіальних нижніх оцінок складності. З теоретичної точки зору, на сьогодні проблема геометричного пошуку достатньо глибоко досліджена [4]. Проте пошук практичних ефективних розв'язків для деяких задач і, зокрема, задач для Γ_f -regionів є актуальним.

На сьогоднішній день існує декілька основних підходів для регіонального пошуку для довільних regionів. Один з них полягає у тому, що площа розбивається на прямокутники, довжина і висота яких знаходиться евристично, після цього точки розкидаються в утворені «корзини», коли надходить запитний region, перевіряються лише ті точки, корзини яких потрапили або перетнули region. Зрозуміло, що цей метод зручний лише тоді, коли розподіл точок є оптимальним. Інший підхід полягає у переході до полярних координат, що дозволяє застосувати модифікований метод дерева regionів [5, 6].

Новизна та ідея. В роботі запропоновано два алгоритми, та їх порівняння і особливості застосування.

Мета статті. Розробити узагальнений метод регіонального пошуку в Γ_f - регіоні, який складається з двох алгоритмів.

1. Постановка та алгоритм розв'язання задачі регіонального пошуку для Γ_f - регіону

У багатьох випадках доводиться мати справу з регіонами, границі яких представлені нелінійними функціями. Наприклад: для області обмеженої множиною дотичних кіл з центрами у точках O_i і радіусами R_i знайти точки заданої множини, що потрапляють в таку область. Проте, відносно мало відомо про структури даних для пошуку в таких регіонах. Природний клас нелінійних регіонів є множина комірок Тарські [4,1]. Для цього достатньо розглянути регіони обмежені єдиним зв'язним поліноміальним контуром. Регіони пошуку, які являють собою сукупність зв'язаних областей, передбачають використання багаторівневих структур даних. Регіони, що розглядаються можна подати у такому вигляді:

$$\Gamma_f(a) = \{x \in R^d | f(x,a) \geq 0\},$$

де f - це $(d+p)$ -поліноміал випадкової величини, який указує тип регіонів (еліпс, сектор, конус і т.д.), a є кортеж, який указує конкретний регіон заданого типу.

Одним із підходів зображення Γ_f - регіону є представлення поліноміалу $f(x,a)$ у формі:

$$f(x,a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a) \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(a) \varphi_n(x)$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ - дійсні функції. λ - називається розмірністю лінеаризації поліноміалу. Зокрема, в роботі [4] описано алгоритм для обчислення лінеаризації найменшого виміру. В цій же роботі запропоновано інший підхід до представлення запитного Γ_f - регіону на основі комірок Тарські.

Сформулюємо геометричну постановку задачі регіонального пошуку в Γ_f - регіоні.

Постановка задачі (регіональний пошук в Γ_f - регіоні). Нехай задана множина S із N точок на площині (в E^2 просторі). Необхідно визначити множину тих точок, які потрапляють в запитний регіон, який визначається замкнутою кривою, що задається: $\Gamma_f(a) = \{x \in R^d | f(x,a) \geq 0\}$, рис.1.

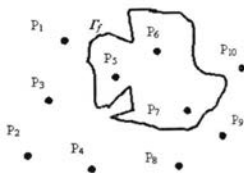


Рис.1. Приклад Γ_f - регіону.

Розв'язання задачі проведемо із застосуванням двох підходів. Спочатку на етапі попередньої обробки представимо $\Gamma_f(a) = \{x \in R^d | f(x,a) \geq 0\}$ у вигляді простого багатокутника. Тоді задача зведеться до задачі регіонального пошуку для простого багатокутника. В основі одного із підходів розв'язання цієї задачі лежить модифікований метод k - d дерева, а в основі іншого триангуляція полігону.

1.1. Модифікований метод k - d дерева.

Не втрачаючи загальності, можна замінити Γ_f регіон на аналогічний йому простий багатокутник (полігон) G (рис.2), зважаючи на те, що координатна сітка при комп'ютерній реалізації є цілочисельною, кожна точка може бути вершиною.

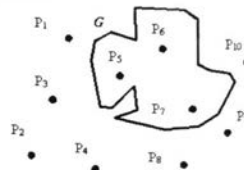


Рис.2. Представлення Γ_f - регіону з рис.1, у вигляді простого багатокутника G .

Використовуючи згладжування, можна регулювати кількість точок у полігоні, а отже й точність пошуку. Таким чином масмо задачу про

пошук точок, які лежать у деякому простому многокутнику (полігоні) G .

Модифікація алгоритму k - d дерева полягає у тому, що використовується звичайний алгоритм пошуку у k - d дереві, але із спеціальним кроком: ми знаходимо для нашого регіону мінімальний (без повороту) оточуючий прямокутник D . Наступним кроком є обробка нашого полігону для застосування методу смуг, завдяки чому ми зможемо перевіряти належність точки многокутнику G . Метод смуг дозволяє розбити площину на $(N+1)$ горизонтальні смуги і, враховуючи упорядкованість смуг по координаті y , за час $O(\log N)$ знайти ту смугу, в якій лежить деяка точка Z .

Таким чином одержимо модифікований метод: регіонального пошуку для многокутника G , оточеного мінімальним прямокутником D . Дерево пошуку для такої модифікації має такий же вигляд як і для класичного методу k - d дерева. Будь-який вузол v цього дерева завантажений такими параметрами: $P(v)$, $R(v)$, $S(v)$, $I(v)$, D . Де $P(v)$ - поточна точка, $R(v)$ - прямокутна область, $S(v)$ - множина точок яка належить $R(v)$, $I(v)$ - розрізаюча пряма, яка проходить через точку $P(v)$, D - запитний регіон. Від взаємного розташування $R(v)$, $S(v)$, $I(v)$, D для кожного вузла $v \in T$ (де T - дерево пошуку), залежить регіональний пошук: $\forall v \in T$ пряма $I(v)$ розбиває $R(v) = R_1(v) \cup R_2(v)$, $R_1(v) \cap D$, $R_2(v) \cap D$.

1) $D \cap R_1(v) \neq \emptyset$ і $R_2(v) \cap D = \emptyset \Rightarrow$ лівий пошук (у $D \cap R_1(v)$);

2) $D \cap R_2(v) \neq \emptyset$ і $R_1(v) \cap D = \emptyset \Rightarrow$ правий пошук (в $D \cap R_2(v)$);

3) $D \cap R_1(v) \neq \emptyset$ і $R_2(v) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$ лівий (в $D \cap R_1(v)$) і правий (у $D \cap R_2(v)$); перевірка належності $P(v)$ до G .

1.2. Алгоритм регіонального пошуку з використанням триангуляції.

Ідея цього алгоритму полягає у тому, що спочатку простий многокутник G триангулюється, а тоді застосовується регіональний пошук для кожного трикутника, після чого одержуємо загальний результат для G .

Швидкість запропонованого алгоритму безперечно залежить від швидкості триангуляції. Для цього можна обрати, наприклад, триангуляцію Делоне, яка вважається найшвидшою триангуляцією з оцінкою $O(M \log(M))$ (де M - кількість вершин у многокутнику G), але складною в реалізації. Докладніше про це описано в роботі [7]. При цьому використовується звичайний пошук в k - d дереві, адже кожний трикутник є шуканою областю і перевірка належності точки трикутнику може бути виконана за константний час.

2. Обґрунтування складності

Перший алгоритм в найгіршому випадку дає складність $O(\sqrt{N} \log(M))$, де N - кількість точок, M - кількість вершин у многокутнику, пам'ять - $O(N + M^2)$. Обґрунтування пам'яті очевидне - N вузлів k - d дерева і M^2 для методу смуг. Обґрунтуємо часову складність пошуку. Як відомо, регіональний пошук для многокутника працює в найгіршому випадку за $O(\sqrt{N})$. В нашому ж випадку в кожному вузлі виконуватиметься локалізація точки за $O(\log(M))$, отже отримаємо часову складність $O(\sqrt{N} \log(M))$.

Другий алгоритм має ще гіршу часову складність - $O(\sqrt{N} M)$, адже складність алгоритму лінійно залежить від кількості вершин в многокутнику (а отже і від кількості трикутників, за теоремою Ейлера). Необхідно для кожного трикутника перевірити точки, які йому належать. На рис. 3 подано час виконання обох алгоритмів.

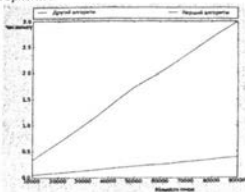


Рис. 3. Графік часової складності алгоритмів.

Як бачимо, у випадку першого алгоритму константа є суттєво меншою, але при збільшенні кількості точок у багатокутнику ця різниця буде зменшуватись і перший алгоритм стане швидшим за другий.

3. Практична частина

Для реалізації алгоритмів обрано мову Python. Триангуляція була написана на мові C. Для реалізації GUI-частини була використана бібліотека WxWidgets. На рис.2. показано приклад програмної реалізації.

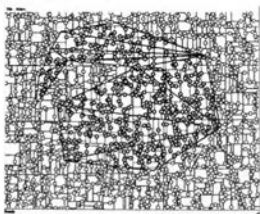


Рис. 4. Приклад роботи програми.

Висновки

У роботі запропоновано два підходи до розв'язання задачі регіонального пошуку для G_f -regiony. Перший підхід заснований на модифікації методу $k-d$ дерева та методі смуг, а в другому підході застосовується триангуляція простого полігону. При цьому алгоритм, запропонований у першому підході, рекомендується використовувати тоді, коли кількість точок у апроксимованому багатокутнику є великою. Ці два підходи

доцільно об'єднати в єдиний узагальнений метод регіонального пошуку, викликаючи один із алгоритмів в залежності від кількості вершин у запитному регіоні. Залишається відкритим питання, чи можна покращити дані оцінки. У цьому можуть допомогти різні евристичні алгоритми, які можуть працювати швидше для оптимально підібраних даних.

Список використаних джерел

1. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. - М.: Мир, 1989. - 478с.
2. *Agarwal P. K., Erickson J.* Geometric Range Searching and Its Relatives. // in Chazelle, Bernard; Goodman, Jacob; Pollack, Richard, Advances in Discrete and Computational Geometry. - AMS, 1998. P. 1-56.
3. *Hausser D., Welzl E.* Epsilon-nets and simplex range queries // Discrete and Computational Geom.-1987. -2. P. 127-151.
4. *Agarwal P. K., Matousek J.* On range searching with semialgebraic sets // Discrete Comput. Geom.- 1994. - 11. P. 393-418.
5. *Терещенко В.М., Михашук М.* Модифікація методу регіонального пошуку для регіонів криволінійними границями / В.М. Терещенко // International Conference Problems of decision making under uncertainties, PDMU-2006, Alushta, 180-183 с.
6. *Терещенко В.М.* Один спосіб розв'язання задач регіонального пошуку для круга у випадку масових запитів / В.М. Терещенко // Обчислювальна та прикладна математика. - 2007. - № 1(94). - С. 99-100.
7. *Seidel R.* A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons // Computational Geometry: Theory and Applications. -1991.- 1(1).- P. 51-64.

Надійшла до редколегії 02.04.12

УДК 519.6

Уманський В. І., аспірант

**Алгоритм порівняння відбитків пальців
за структурою сусідства особливих точок**

З вдосконаленням комп'ютерної техніки стали доступні значні обчислювальні ресурси, що дало поштовх до розвитку систем автоматичної ідентифікації відбитків. Потреба в подібних системах виникає як у комерційних компаній для контролю доступу в виробничі приміщення, так і на державному рівні, де нагальним є питання безпеки кордонів. Розпізнавання відбитків представляє собою досить складну задачу, тому існуючі підходи до її розв'язання є все ще далекими від ідеалу.

В даній роботі представлено новий алгоритм порівняння двох відбитків, що краще за попередників використовує інформацію з околів особливих точок, та його реалізацію мовою C++.

Ключові слова: відбитки пальців, розпізнавання, особливі точки, безпека

V. I. Umansky, PhD student

**Fingerprint comparison algorithm based on
minutiae points' neighbourhood structure**

Recent great improvements in computer technology provided substantial resources for running automated fingerprint recognition systems and thus encouraged research in this area. Such systems are demanded as by commercial companies for access control, as by government where border security is an important issue. Fingerprint recognition is a quite complicated problem and existing approaches for its solution are still far from ideal.

In this paper a new fingerprint comparison algorithm is introduced, which uses minutiae local neighborhood information better than its predecessors and its implementation in C++ programming language.

Key Words: fingerprint, recognition, minutiae, security

*E-mail: vietal@list.ru

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Розпізнавання відбитків пальців має широке застосування – від систем контролю доступу на підприємствах та міжнародних системах контролю безпеки кордонів до можливості авторизації в операційній системі комп'ютера. Протягом останніх десятиріч розроблено значну кількість алгоритмів та підходів для ідентифікації відбитків пальців, тим не менш, як показано в [1], не дивлячись на значні досягнення в даній сфері, існуючі підходи все ще далекі від теоретично можливої якості розпізнавання, що свідчить про необхідність створення нових та покращення існуючих алгоритмів порівняння відбитків пальців.

Серед різноманітних підходів до порівняння двох відбитків найбільш надійними та широко використовуваними є алгоритми, що базуються на особливих точках відбитка – саме за ними виконують порівняння відбитків експерти-криміналісти протягом останніх століть, де особливі точки себе добре зарекомендували. Як зазначено в [2], основним напрямком сучасних досліджень є алгоритми, що використовують інформацію з околів особливих точок для

пошуку пар потенційно відповідних точок порівнюваних відбитків та подальша глобальна консолідація знайдених точок згідно з їх розташуванням на відбитку. Однак, існуючі методи не позбавлені недоліків. Так, в роботі [3] розглядаються лише дві найближчі особливі точки та інваріантні відносно повороту кути та відстані. В роботі [4] в якості локальної характеристики особливої точки розглядається множина сусідніх точок, що знаходяться на відстані не більшої деякої, але кути, що розглядаються, не є інваріантними відносно повороту.

В даній роботі пропонується метод, що враховує недоліки відомих алгоритмів, максимально використовує інформацію з околів особливих точок, є більш стійким до неточностей визначення їх координат, наявних хибних точок та запропоновано новий метод для швидкого порівняння множин сусідніх точок.

Постановка задачі

На вхід подається два зображення відбитків пальців. Результатом роботи алгоритму є булеве значення: істина – якщо вхідна пара зображень

зчитана з одного й того ж пальця, фальш – якщо зображення на вході є відбитками різних пальців. Зазвичай проміжним результатом алгоритму є деяке число, що визначає ступінь близькості двох відбитків, яке в свою чергу порівнюється з порогом, що задається користувачем.

Зображення відбитка пальця (Рис. 1) є відтворенням нерівності поверхні епідермісу кінчика пальця. Структурною характеристикою відбитка є візерунок папілярних ліній – гребенів та западин поверхні пальця, що чергуються. На зображенні відбитка гребні є більш темними, западини – світліми. Товщина папілярних ліній пальця варіюється від 100мкм до 300мкм, в середньому період циклу гребнів-западин складає 500мкм [1]. Важливим є те, що більшість пошкоджень, як, наприклад, невеликі порізи, подряпини, опіки не впливають на глибоку структуру шкіри, і початковий візерунок з часом відновлюється.



Рис. 1 Відбиток пальця, зчитаний зі сканера

Папілярні лінії течуть переважно паралельно, окрім певних регіонів з високою кривизною (так званих регіонів сингулярностей). Загальна форма потоку ліній не є достатньо унікальною, і використовується лише для класифікації відбитків. Набагато більш унікальними є особливі точки – місця закінчення та роздвоєння папілярних ліній. Для роботи алгоритму порівняння відбитків, що базується на топології особливих точок, необхідним є попередній етап їх пошуку, в даній роботі для пошуку особливих точок використано велику бібліотеку NIST NBIS [6].

Множина особливих точок називається темплейтом. Її потужність є нефіксованою (оскільки у відбитках може бути знайдена різна кількість особливих точок). Кожна точка може бути описана великою кількістю атрибутів – таких як її положення на відбитку, орієнтація,

тип (наприклад, роздвоєння чи закінчення), вага, що базується на якості зображення в околі точки і т.д. В запропонованому алгоритмі особливі точки розглядаються як трійки (x, y, θ) , що відповідно визначають координати (x, y) та кут точки θ . Таким чином, на вході маємо:

$$T_1 = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}, m_i = (x_i, y_i, \theta_i), i = \overline{1, p}$$

$$T_2 = \{m'_1, m'_2, \dots, m'_q\}, m'_j = (x'_j, y'_j, \theta'_j), j = \overline{1, q}$$

Точки $m_i \in T_1, m'_j \in T_2$, називаються відповідними якщо просторова відстань між ними менша деякого допуску r_0 , а різниця кутів менша деякого допуску θ_0 :

$$\Delta l(m_i, m'_j) = \sqrt{(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2} \leq r_0$$

$$\Delta \theta(m_i, m'_j) = \min\{|\theta_i - \theta'_j|, 360^\circ - |\theta_i - \theta'_j|\} \leq \theta_0$$

Позначимо геометричне відображення, що повертає точки темплейту навколо початку координат на кут θ проти годинниковою стрілки та зміщує на $(\Delta x, \Delta y)$, як $map()$:

$$map_{\Delta x, \Delta y, \theta}(m'_j) = m''_j = (x''_j, y''_j, \theta'_j + \theta)$$

$$\begin{pmatrix} x''_j \\ y''_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_j \\ y'_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Позначимо індикаторне відображення, що повертає 1 якщо точки m_i та m'_j є відповідними як $corr()$:

$$corr(m_i, m'_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta l(m_i, m'_j) \leq r_0, \Delta \theta(m_i, m'_j) \leq \theta_0 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Тоді загальну задачу порівняння темплейтів двох відбитків можна записати в наступному вигляді:

$$\arg \max_{\Delta x, \Delta y, \theta, C} \sum_{i=1}^p corr(m_i, map_{\Delta x, \Delta y, \theta}(m'_{C(i)}))$$

Алгоритм порівняння темплейтів

Для розв'язання поставленої задачі можливі два підходи: глобальний, що полягає у підборі кута та зміщення перетворення, що максимізує кількість відповідних точок, та локальний, згідно з яким спочатку знаходяться пари точок, що є потенційно відповідними, серед яких виділяються ті, що мають спільний поворот та зміщення. В даній роботі розглядається останній підхід.

Для пошуку потенційно відповідних пар точок для кожної точки будеться структура локального сусідства. Для точки береться деякий

оکیل радіусу d_{max} , в межах якого всі точки розглядаються як сусідні до даної (Рис. 2).



Рис. 2. Локальні характеристики точки

Для кожної такої пари (точка, її сусід) обчислюються такі характеристики як відстань між ними d_{ij} , азимут до точки сусіда в локальній системі координат центральної точки ϕ_{ij} та різниця кутів між напрямками точки-сусіда та центральної точки θ_{ij} . Також виключаються з розгляду точки, що знаходяться занадто близько до центральної точки ($d_{ij} \leq d_{min}$) через великий вплив похибки визначення координат положення точок на азимутальний кут ϕ_{ij} . Крім цього вводиться додаткове обмеження на максимальну кількість розглядуваних сусідніх точок N_{max} , оскільки відсутність такого обмеження для відбитків з дуже високою щільністю точок може призвести до значного погіршення швидкодії алгоритму.

Більш формально локальну характеристику, пов'язану з точкою m_i можна подати як множину

$$M_i = \{v_j\}_{j=1}^{N_{max}}, c_i \leq N_{max} \cdot \delta \epsilon$$

$$v_j = (j, d_{i,j}, \phi_{i,j}, \theta_{i,j}), d_{i,j} \in [d_{min}, d_{max}]$$

Для порівняння структур сусідства особливих точок та пошуку потенційно схожих застосовується техніка кластеризації. Для цього введемо структуру (сховище кластерів) для кожного з вхідних темплейтів T_i та T_j , що являє собою тривимірний масив, виміри якого адресуються квантованими значеннями відстаней d_{ij} та кутів ϕ_{ij} і θ_{ij} , а комітками є хеш-таблиці (власне кластери), що відображають центральні точки на відповідні сусідні точки, що знаходяться на відповідній відстані та під відповідними кутами відносно них.

Позначимо сховище кластерів розмірності $D \times \Phi \times \Theta$, пов'язаний з темплейтом T як C . Тоді, іншими словами, якщо для деякої точки m_i та її сусіда m_j існують i, j, k такі, що виконуються

$$d_{i,j} \in \left[\frac{d_{min}}{D} \cdot i, \frac{d_{max}}{D} \cdot (i+1) \right),$$

$$\phi_{i,j} \in \left[\frac{2\pi}{\Phi} \cdot j, \frac{2\pi}{\Phi} \cdot (j+1) \right),$$

$$\theta_{i,j} \in \left[\frac{2\pi}{\Theta} \cdot i, \frac{2\pi}{\Theta} \cdot (i+1) \right)$$

тоді має місце рівність $C_{i,j,k}(r) = s$. Таким чином, за допомогою такої структури можна за константний ($O(1)$ в середньому) час визначати для кожної пари виду (точка, її сусід) всі інші точки, що мають сусіда, який має таке ж відношене розташування.

Алгоритм складається з таких етапів: будуються локальні характеристики точок та заповнюються кластери. За допомогою кластерів швидко знаходяться пари точок, що мають однаково розташованого одного сусіда, для яких знаходяться всі відповідно розташовані сусіди. На основі знайдених пар відповідних точок та їх відповідних сусідів виконується фільтрація пар, що є узгоджені за афінним перетворенням та розраховується загальна оцінка схожості вхідної пари відбитків.

Тестування розробленого алгоритму



Рис. 3. Візуалізація роботи алгоритму для двох відбитків одного пальця

Для оцінки таких параметрів як рівень помилок першого та другого роду було зібрано тестову базу даних, що налічує понад 2000 зображень відбитків. Всі зображення отримані за допомогою сканера Futronic FS80.

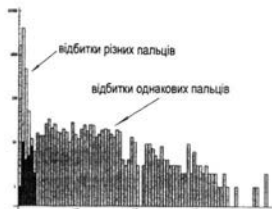


Рис. 4. Гістограми розподілу оцінок схожості для зображень відбитків різних та однакових пальців

Для безпосереднього тестування обрано 60 різних пальців і для кожного по 5 зображень відбитка. Рівень рівних помилок першого та другого роду становить 1.7%, що є порівнянням з результатами алгоритмів [8]. Графіки залежності помилок першого та другого роду від встановленого порогу та гістограми розподілу оцінок схожості відбитків наведено на зображеннях.

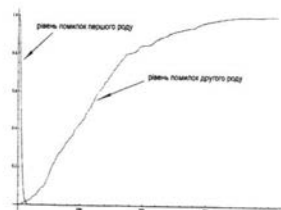


Рис. 4. Графіки залежності помилок першого та другого роду в залежності від встановленого порогу

Висновок

Було розроблено алгоритм ідентифікації відбитка пальців та реалізовано на практиці мовою C++. Для тестування та аналізу розробленого алгоритму в різних режимах роботи було розроблено зручний графічний інтерфейс користувача. Проведено тестування

алгоритму та вимірювання його характеристик. Щодо напрямків подальших досліджень, варто розглянути інші варіанти локальних інваріантних відносно зсуву та повороту відбитка характеристик – таких як трикутники особливих точок та провести порівняльний аналіз.

Список використаних джерел

1. S. Pankanti, S. Prabhakar, A.K. Jain, On the individuality of fingerprints // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 24 (8) (2002) 1010–1025.
2. Maltoni D., Maio D., Jain A., Prabhakar S. "Handbook of fingerprint recognition. Second Edition" // Springer, 2009. C. Author, Name of the book, Publisher, Place of publishing, Year published.
3. Jiang X. and Yau W.Y., "Fingerprint Minutiae Matching Based on the Local and Global Structures," // Proc. Int. Conf. on Pattern Recognition (15th), vol. 2, pp. 1042–1045, 2000.
4. Ratha N.K., Pandit V.D., Bolle R.M. and Vaish, V., "Robust Fingerprint Authentication Using Local Structural Similarity," // Proc. Workshop on Applications of Computer Vision, pp. 29–34, 2000.
5. Jea T.Y. and Govindaraju V., "A minutia-based partial fingerprint recognition system," // Pattern Recognition, vol. 38, no. 10, pp. 1672–1684, 2005.
6. Watson C., Garris M., Tabassi E., Wilson C., McCabe R., Janet S., Ko K. "User's Guide to NIST Biometric Image Software (NBIS)" // NIST
7. "Image quality specifications for single finger capture devices" // NIST, 2006
8. Fingerprint verification competition. <http://bias.csr.unibo.it/fvc2006>

Надійшла до редколегії 23.02.2012

УДК 517.929.4

Шатирко А.В., к. ф.-м. н., ст.н.сп.

**Стабілізація в системах непрямого
регулювання методом функціоналів
Ляпунова-Красовського**

З використанням прямого методу Ляпунова розглянуто задачу стабілізації систем непрямого регулювання з запізнюванням аргументу. Результати сформульовано у вигляді матричних алгебраїчних нерівностей.

Ключові слова: функціонал Ляпунова, абсолютна стійкість, запізнювання аргумента, стабілізація.

E-mail: a_shatyrko@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Хусайнов Денис Яхєвич

Вступ

Задачі абсолютної стійкості нелінійних систем регулювання виникли з практичних проблем отримання умов стійкості систем регулювання з функцією керування заданого класу, а саме функцією, що міститься в заданому секторі [1-6]. Спочатку розглядалися системи, що описані звичайними диференціальними рівняннями. Далі роботи цього напрямку розповсюдились на системи з післядією [7-8].

В роботах [9,10] розглянуто нелінійні системи непрямого регулювання з аргументом, що запізнюється. За допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського вигляду суми квадратичних форм та інтегралу від не лінійності, та так званої S -процедури, отримано умови абсолютної інтервальної стійкості. Також обчислено коефіцієнти експоненціального затухання розв'язків. Але, якщо умови сформульованих теорем не виконуються, виникає потреба за допомогою лінійного оберненого зв'язку стабілізувати систему.

В запропонованій роботі розглянуто системи непрямого регулювання. Для розв'язку задач стабілізації використовується функціонал Ляпунова-Красовського з експоненціальним множником [9,10].

1. Стабілізація одновимірних процесів

A.V.Shatyrko, PhD in Math.

**Stabilization in Lurie-type nondirect control
systems by Lyapunov-Krasovsky's
functional**

Stabilization problem of Lurie-type nonlinear nondirect control systems with time-delay argument is considered. Direct Lyapunov method is used. Sufficient conditions are constructed in terms of matrix algebraic inequalities.

Key Words: Lyapunov functional, absolute stability, time-delay argument, stabilization.

Розглянемо систему непрямого регулювання, яка описується системою двох скалярних рівнянь з аргументом, що запізнюється, наступного вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_1 x(t) + a_2 x(t-\tau) + b f(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) &= c x(t) - \rho f(\sigma(t)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тут $\rho > 0$, $f(\sigma)$ нелінійна функція одного аргументу, яка лежить в заданому секторі першої й третьої чверті системи координат

$$k_1 \sigma^2 \leq f(\sigma) \leq k_2 \sigma^2, \quad k_2 > k_1 > 0. \quad (1.2)$$

При дослідженні абсолютної стійкості системи із запізнюванням (1.1) використовується функціонал Ляпунова-Красовського з інтегральною добавкою та експоненціальним множником вигляду [9,10]

$$\begin{aligned} V[x(t), \sigma(t)] &= h x^2(t) + g \int_{t-\tau}^t e^{-\alpha(t-s)} x^2(s) ds + \\ &+ \beta \int_0^t f(s) ds. \end{aligned} \quad (1.3)$$

За допомогою такого функціоналу можна отримати не лише умови абсолютної стійкості, а й обчислити коефіцієнти експоненціального затухання, що є надзвичайно важливим для оцінки часу перехідного процесу.

Визначення 1.1. Система (1.1) називається абсолютно стійкою, якщо нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$ системи (1.1) є асимптотично стійкий в цілому при довільній функції $f(\sigma)$, що задовольняє умові (1.2).

Позначимо

$$s_{11}^1 = -2a_1 h - g, \quad s_{12}^1 = -h a_2, \\ s_{13}^1 = -\left(hb + \frac{1}{2}\beta c\right), \quad s_{22}^1 = e^{-\alpha\tau} g, \quad s_{33}^1 = \rho, \quad (1.4)$$

$$S_1[g, h, \beta, \zeta] = \begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & 0 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

В роботах [9,10] доведено умови абсолютної стійкості систем загального вигляду з запізнюванням. Стосовно системи (1.1) вони будуть мати наступний вигляд.

Теорема 1.1. Нехай існують сталі $h > 0$, $g > 0$, $\beta > 0$, $\zeta > 0$, при яких матриця $S_1[g, h, \beta, \zeta]$ додатно визначена. Тоді система з запізнюванням (1.1) є абсолютно стійкою.

Розглянемо випадок, коли не існує таких параметрів $h > 0$, $g > 0$, $\beta > 0$, $\zeta > 0$, при яких матриця $S_1[g, h, \beta, \zeta]$ додатно визначена. Введемо обернений зв'язок у вигляді лінійної комбінації поточної фазової координати і координати із запізнюванням, тобто розглянемо систему вигляду

$$\dot{x}(t) = a_1 x(t) + a_2 x(t - \tau) + b f(\sigma(t)) + u(t), \\ \dot{\sigma}(t) = c x(t) - \rho f(\sigma(t)), \quad (1.6) \\ u(t) = c_1 x(t) + c_2 x(t - \tau).$$

Теорема 1.2. Нехай не існує (або не знайдено) $h > 0$, $g > 0$, $\beta > 0$, $\zeta > 0$, при яких матриця $S_1[g, h, \beta, \zeta]$ додатно визначена. Тоді система із запізнюванням (1.6) є абсолютно стійкою при керуванні

$$u(t) = c_1 x(t) + c_2 x(t - \tau)$$

з параметрами c_1 , c_2 , що задовольняють нерівності

$$c_1 < \frac{1}{2h} \left[s_{11}^1 - \frac{1}{s_{22}^1} (s_{12}^1 - c_2 h)^2 - \frac{1}{s_{33}^1} (s_{13}^1)^2 \right]. \quad (1.7)$$

Доведення. Позначимо

$$S_2[g, h, \beta, \zeta] = \begin{bmatrix} s_{11}^1 - 2c_1 h & s_{12}^1 - c_2 h & s_{13}^1 \\ s_{12}^1 - c_2 h & s_{22}^1 & 0 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 \end{bmatrix}.$$

Для системи (1.6) умовою абсолютної стійкості буде додатна визначеність матриці $S_2[g, h, \beta, \zeta]$. Як відомо [11,12], умовою додатної визначеності симетричної матриці є додатність її головних діагональних мінорів, тобто

$$\Delta_1 = s_{11}^1 - 2c_1 h > 0,$$

$$\Delta_2 = (s_{11}^1 - 2c_1 h) s_{22}^1 - (s_{12}^1 - c_2 h)^2 > 0, \\ \Delta_3 = (s_{11}^1 - 2c_1 h) s_{22}^1 s_{33}^1 - \\ - s_{22}^1 (s_{13}^1)^2 - s_{33}^1 (s_{12}^1 - c_2 h)^2 > 0. \quad (1.8)$$

Оскільки $h > 0$, то першу нерівність можна переписати у вигляді

$$c_1 < \frac{1}{2h} s_{11}^1. \quad (1.9)$$

Розглянемо другу нерівність. Запишемо її у вигляді

$$2s_{22}^1 h c_1 < s_{11}^1 s_{22}^1 - (s_{12}^1 - c_2 h)^2.$$

А оскільки $s_{22}^1 = e^{-\alpha\tau} g > 0$, то

$$c_1 < \frac{1}{2h} \left[s_{11}^1 - \frac{1}{s_{22}^1} (s_{12}^1 - c_2 h)^2 \right]. \quad (1.10)$$

Розглянемо третю нерівність. Запишемо її у вигляді

$$2c_1 h s_{22}^1 s_{33}^1 < s_{11}^1 s_{22}^1 s_{33}^1 - s_{22}^1 (s_{13}^1)^2 - s_{33}^1 (s_{12}^1 - c_2 h)^2.$$

Або, враховуючи, що виконуються умови

$$h > 0, \quad s_{22}^1 = e^{-\alpha\tau} g > 0, \quad s_{33}^1 = \rho > 0,$$

масмо нерівність (1.7)

$$c_1 < \frac{1}{2h} \left[s_{11}^1 - \frac{1}{s_{22}^1} (s_{12}^1 - c_2 h)^2 - \frac{1}{s_{33}^1} (s_{13}^1)^2 \right].$$

Порівнюючи співвідношення (1.7), (1.9), (1.10), отримаємо, що параметри c_1 , c_2 треба вибирати впливаючи із нерівності (1.7).

2. Стабілізація систем рівнянь з запізнюванням

Розглянемо систему непрямого регулювання, яка описується у векторно-матричній формі наступним чином

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + b f(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \quad (2.1)$$

Тут $x(t) \in R^n$, $b, c \in R^n$, A , B - квадратні матриці зі сталими коефіцієнтами, $\rho > 0$. Нелінійна функція одного аргументу $f(\sigma)$ лежить в заданому секторі першої й третьої чверті системи координат і задовольняє умову (1.2). Дослідження абсолютної стійкості проводилось за допомогою функціонала

$$V[x(t), \sigma(t)] = x^T(t) H x(t) + b \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma + \\ + \int_{-\tau}^0 e^{-\zeta(t-s)} x^T(t+s) G x(t+s) ds.$$

Позначимо

$$S_{11}^1 = -A^T H - HA - G, \quad S_{12}^1 = -HB, \\ S_{13}^1 = -\left(Hb + \frac{1}{2}\beta c\right), \quad S_{22}^1 = e^{-\zeta\tau} G, \quad s_{33}^1 = \rho, \quad (2.2)$$

$$S_3[G, H, \beta, \zeta] = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 & S_{13}^1 \\ (S_{12}^1)^T & S_{22}^1 & \theta \\ (S_{13}^1)^T & \theta^T & s_{33}^1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

де θ – нульовий вектор. В роботах [9,10] отримані наступні умови абсолютної стійкості системи з запізнюванням.

Теорема 2.1. Нехай існують додатно визначені матриці H , G і параметри $\beta > 0$, $\zeta > 0$, при яких матриця $S_3[G, H, \beta, \zeta]$ додатно визначена. Тоді система з запізнюванням (2.1) є абсолютно стійкою.

Нехай, як і в попередньому випадку, не існує (або не знайдено) додатно визначені матриці H , G і параметри $\zeta > 0$, $\beta > 0$, при яких матриця $S_3[G, H, \beta, \zeta]$ додатно визначена. Введемо обернений зв'язок у вигляді лінійної комбінації поточної фазової координати і координати з запізнюванням, тобто розглянемо систему вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)) + u(t), \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)), \\ u(t) &= C_1 x(t) + C_2 x(t-\tau). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Розглянемо задачу знаходження матриць C_1 , $C_2 \in R^{m \times n}$, при яких система (2.4) вже буде абсолютно стійкою.

При отриманні умов стабілізації будемо використовувати наступні результати.

Твердження 2.1 ([11], стор. 559). Нехай ермітова матриця S представлена у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix},$$

причому матриці A і C квадратні. Для додатної визначеності матриці S необхідно і достатньо, щоб були додатно визначені матриці A і $C - B^* A^{-1} B$.

Твердження 2.2 ([12], стор. 57). Якщо матриця A є невідродженою, то оберненою до матриці

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

буде

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} B R^{-1} C A^{-1} & -A^{-1} B R^{-1} \\ -R^{-1} C A^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.5),$$

$$R = D - C A^{-1} B. \quad (2.6)$$

За допомогою наведених тверджень сформулюємо наступні умови стабілізації.

Теорема 2.2. Нехай існують додатно визначені матриці G , H , матриці керування C_1 , C_2 і параметри $\zeta > 0$, $\beta > 0$, при яких виконуються умови:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Матриці} \\ \Delta_1^4 &= S_{11}^4 = S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1, \\ \Delta_2^4 &= S_{22}^4 - \left[S_{12}^3 - H C_2 \right]^T \times \\ &\quad \times \left[S_{12}^3 - C_1^T H - H C_1 \right]^{-1} \left[S_{12}^3 - H C_2 \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

є додатно визначеними.

2. Виконуються нерівність

$$\begin{aligned} \Delta_3^4 &= \rho - (S_{13}^3)^T \times \\ &\quad \times \left[(S_{11}^4)^{-1} + (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} (S_{12}^4)^T (S_{12}^4)^{-1} \right] S_{13}^3 > 0, \\ R &= S_{22}^4 - (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тоді система (2.4) є абсолютно стійкою

Доведення. Позначимо

$$S_4[G, H, C_1, C_2, \beta, \zeta] = \begin{bmatrix} S_{11}^4 & S_{12}^4 & S_{13}^4 \\ (S_{12}^4)^T & S_{22}^4 & \theta \\ (S_{13}^4)^T & \theta^T & s_{33}^4 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

де S_{22}^3 і s_{33}^3 визначені в (1.4), (2.2), а

$$S_{11}^4 = S_{11}^3 - C_1^T H - H C_1, \quad S_{12}^4 = S_{12}^3 - H C_2. \quad (2.10)$$

Очевидно, що умовою стабілізації системи (2.4) є існування додатно визначених матриць G , H , параметрів $\zeta > 0$, $\beta > 0$ і матриць C_1 , C_2 , при яких матриця $S_4[G, H, C_1, C_2, \beta, \zeta]$ буде додатно визначеною.

Як впливає з твердження 2.1, умовою додатної визначеності матриці $S_4[G, H, C_1, C_2, \beta, \zeta]$ є додатна визначеність матриці

$$M_4 = \begin{bmatrix} S_{11}^4 & S_{12}^4 \\ (S_{12}^4)^T & S_{22}^4 \end{bmatrix}$$

і виконання нерівності

$$s_{33}^4 > \left((S_{13}^4)^T, \theta^T \right) (M_4)^{-1} \begin{pmatrix} S_{13}^4 \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Обчислимо матрицю $(M_4)^{-1}$, попередньо позначивши

$$M_4^{11} = (S_{11}^4)^{-1} + (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} (S_{12}^4)^T (S_{12}^4)^{-1}.$$

Як випливає з співвідношень (2.5), (2.6), буде мати місце наступне

$$(M_4)^{-1} = \begin{bmatrix} M_4^{11} & -(S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4 R^{-1} \\ -R^{-1} S_{22}^4 (S_{11}^4)^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$R = S_{22}^3 - (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4.$$

Звідси, нерівність (2.11) можна переписати у вигляді

$$s_{13}^3 > \left((S_{13}^3)^T \theta^T (M_4)^{-1} \begin{pmatrix} S_{13}^3 \\ \theta \end{pmatrix} \right) = (S_{13}^3)^T M_4^{11} S_{13}^3.$$

Або, після підставлення значення матриці R , нерівність приймає вигляд

$$s_{13}^3 > (S_{13}^3)^T M_4^{11} S_{13}^3.$$

Розглянемо умову додатної визначеності матриці M_4 . Її можна висловити умовами додатної визначеності матриці S_{11}^4 і матриці

$$S_{22}^3 - (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4.$$

Таким чином умовою абсолютної стійкості системи з керуванням вигляду (2.4) є існування матриць C_1 , C_2 , при яких матриці

$$S_{11}^4, S_{22}^3 - (S_{12}^4)^T (S_{11}^4)^{-1} S_{12}^4$$

є додатно визначеними і виконується нерівність

$$s_{13}^3 > (S_{13}^3)^T M_4^{11} S_{13}^3.$$

Зауваження 2.1. Нехай C_0 – довільна додатно визначена матриця, H_0 – розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H_0 + H_0 A = -C_0.$$

За матрицю G можна покласти

$$G_0 = \alpha C_0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тоді

$$\Delta_1^4 = S_{11}^4 = (1 - \alpha) C_0 - C_1^T H_0 - H_0 C_1,$$

$$\Delta_2^4 = e^{-\alpha T} G_0 - [S_{12}^4 - H_0 C_2]^T \times \\ \times [(1 - \alpha) G_0 - C_1^T H_0 - H_0 C_1]^{-1} [S_{12}^4 - H_0 C_2],$$

$$\Delta_3^4 = \rho - (S_{13}^3)^T ((\alpha - 1) C_0 - C_1^T H_0 - H_0 C_1)^{-1} \times \\ \times \left\{ I + (S_{12}^2 - H_0 C_2) \left[e^{-\alpha T} G_0 - (S_{12}^3 - H_0 C_2)^T \times \right. \right.$$

$$\left. \times (S_{12}^2 - H_0 C_2) ((1 - \alpha) G_0 - C_1^T H_0 - H_0 C_1)^{-1} S_{12}^3 \right\}$$

і умови (2.7), (2.8) мають більш конструктивний вигляд.

Список використаних джерел

1. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.-Л. Гостехиздат, 1951. – 251 с.

2. Айзerman М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., Изд.-во АН СССР, 1963. – 261 с.
3. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, №6, 1968. – С.5-36.
4. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. – М., Наука, 1982. – 256 с.
5. Гелис А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., Наука, 1978. – 400 с.
6. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: Гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев, Наукова думка, 2006. – 264 с.
7. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. – 208 с.
8. Хусайнов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского ун-та, 1997. – 236 с.
9. Шатырко А.В., Хусайнов Д.Я. Отримання умов абсолютної стійкості систем непрямого регулювання методом функціоналів Ляпунова-Красовського // Вісник Київ. Ун-ту. Серія: Фіз.-мат. Науки, вип.4, Київ, 2009. – С.145-152.
10. Шатырко А.В., Хусайнов Д.Я. Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією. – К.: ДП «Інформац.-аналіт. Агентство», 2012. – 73 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1968. – 552 с.

Надійшла до редколегії 22.02.12.

РАДІОФІЗИКА

УДК 004.94:533.9

Богданов Р.В.¹, інж., Костиюкевич О.М.², інж.**Комп'ютерне моделювання
магнетронного розпилювального
пристрою з двома зонами ерозії**

Метою даної роботи є побудова комп'ютерної моделі магнетронного розпилювального пристрою для потреб нанотехнологій. Була розроблена програма, що дозволяє проводити якісний аналіз процесів іонізації та прискорення частинок у магнетронному розпилювальному пристрої з двома зонами ерозії, визначати їх розподіл по поверхні катода та енергію. За допомогою даної програми також було відтворене експериментально спостережене явище індивідуального запалювання окремих зон розряду при малих струмах та відповідних імпульсах. Як результат моделювання були отримані енергетичні спектри іонів, які бомбардують катод, їх розподіл по поверхні катода, що має важливе значення для аналізу процесу розпилення катоду-мішені.

Ключові слова: магнетронний розпилювальний пристрій, зони ерозії, комп'ютерне моделювання, енергетичний спектр, метод Монте-Карло.

E-mail: ¹RSemsterFX@gmail.com, ²mirror@ukr.net

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Магнетронне розпилення є одним із сучасних методів виробництва наноматеріалів [1, 6], таких, зокрема, як вуглецеві нанотрубки [16, 17]. Метод комп'ютерного моделювання є важливим інструментом наукового дослідження, що дозволяє передбачати явища, які на реальному експерименті часом складно спостерігати. Моделюванням методом Монте-Карло для магнетронного розряду (подібним, до застосованого у попередній роботі [7]) можна передбачити енергетичні параметри частинок та розподіл активі іонізації у просторі [8, 9], області ефективного розпилення мішені [10], рух розпиленого матеріалу через середовище баластного газу [14], вольт-амперну характеристику розряду [11]. Комп'ютерні програми у цих роботах використовують дані про геометрію та поля в реальних магнетронних

R.V. Bogdanov¹, eng., O.M. Kostiukevych², eng.**The computer simulation of the sputtering
magnetron device with two erosion zones**

The aim of this work is to build the computer model of magnetron sputtering device for a nanotechnology needs. The developed program allows of making the qualitative analysis for processes of ionization and acceleration of particles in the planar sputtering magnetron device with two sputtering zones, to determine their distribution on the cathode surface and energy. In modeling, the program also has had to reproduce the experimentally observed phenomenon of individual zones lighting at appropriate discharge at low currents and appropriate discharge voltages. The energy spectra of ions, which bombard the cathode and their distribution over the cathode surface, were obtained as the results of simulation. The energy of these ions is important for analysis of the process of the cathode-target sputtering.

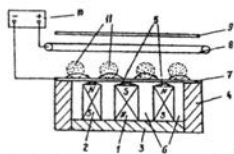
Key words: magnetron sputtering device, erosion zones, computer modeling, energy spectrum, Monte Carlo method.

розпилювальних пристроях (МРП), та дані про перерізи елементарних процесів у баластному газі, на основі яких розраховується динаміка частинок.

У роботах [9, 10, 11] розглянуті моделі МРП із однією зоною ерозії та за відносно невеликих робочих тисків (0,27 Па – 1 Па), з відносно малими геометричними розмірами області щільної плазми. За цих умов на поверхні мішені створюється відносно вузька зона ерозії, яка забезпечує недостатній коефіцієнт ефективності використання матеріалу мішені. Для його підвищення у роботах [10, 11] пропонувалося використання рухомої циліндричної мішені, що обертається навколо протяжної магнітної системи МРП. Іншим шляхом підвищення ефективності використання матеріалу мішені є створення декількох (у випадку [15] – двох) областей щільної розрядної плазми, через створення спеціальної конфігурації магнітної системи МРП.

Метою даної роботи є побудова комп'ютерної моделі, заснованої на параметрах магнетронного розпилювального пристрою з двома зонами ерозії, що є приставкою до вакуумної промислової установки типу ВУП-5 [15].

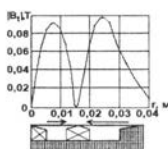
У даній роботі вперше створена комп'ютерна модель даного МРП з двома зонами ерозії [15], що дозволяє провести аналіз режимів горіння розряду та оцінити ефективності процесів розпилення мішеней у ній, для чого була розвинена комп'ютерна програма, побудована в попередній роботі одного з авторів [7].



(а)

1. Експериментальна установка

МРП з двома зонами ерозії катода-мішеней, розглянутий у [15], конструктивно є приставкою до вакуумної промислової установки ВУП-5. Він складається з плоского та круглого катодного вузла (діаметром 74мм) і кільцеподібного анода (мас діаметр 86мм та виготовлений з мідної трубки перерізом 6мм). Система охолоджується конденсаторною оливою. Відстань від катода до анода 1,5см. Підкладка, на яку наноситься покриття, розміщується над анодом на відповідному тримачі (рис. 1а).



(б)

Рис. 1. Магнетронний розпилювальний пристрій (МРП) з двома зонами ерозії [15]: а – схема (1 – циліндричний магніт, 2 – кільцевий магніт; 3, 4 – магнітопровід, 5 – накладки на магніти для створення переважно тангенціального до катода магнітного поля, 6 – порожнини, де циркулює охолоджувальна рідина, 7 – катод-мішень, 8 – кільцевий анод, 9 – підкладка, на яку наноситься покриття, 10 – джерело живлення, 11 – плазмові області горіння жевріючого розряду в середовищі баластного газу); б – топографія тангенціальної до катода компоненти магнітного поля біля його поверхні та умовне зображення половини катодного вузла.

Дві зони ерозії катоду-мішеней створюються за рахунок складного профілю магнітного поля. В областях із максимальною індукцією тангенціального до поверхні катода магнітного поля відбувається найбільш ефективне утримання електронів, що спричиняють іонізацію (рис. 1б) та формуються відповідна картина жевріючого розряду. Для збільшення тангенціальної компоненти індукції у МРП використовується спеціальна форма верхніх торців магнітів (рис. 1а) [15]. У внутрішній зоні тангенціальна компонента спрямована від центру, а у зовнішній – до центру катодного вузла, що додатково покращує магнітне утримання електронів (рис. 1а).

На реальному МРП були виміряні вольт-амперні характеристики розряду при різних тисках робочого газу аргону, серед яких було обрано два, що відповідають типовим режимам магнетронного розпилення $p = 5 \times 10^{-2}$ торр = 6,65 Па, $p = 1 \times 10^{-2}$ торр = 1,33 Па. Мішень при цьому

на катод не встановлювалася, а розряд горів над поверхнею катодного вузла (сталь). Таким чином, було спостережено струми розряду до $I = 150$ мА та відповідні їм розрядні напруги U_p від 210 В до 290 В. Характерні режими горіння розряду фіксувалися цифровою фотокамерою.

2. Комп'ютерна модель МРП

Програма написана мовою С# та включає в себе алгоритм моделювання, заснований на інтегруванні рівнянь руху частинок у схрещених електричному та магнітному полях методом Рунге-Кутта 4-го порядку, а також опис зіткнень між частинками методом Монте-Карло.

В комп'ютерній моделі в початковий момент часу з поверхні катоду запускається певна кількість вторинних електронів з випадкових позицій та без початкової кінетичної енергії. Електрони рухаються з прискоренням в електричному та магнітному полях системи,

знають зіткнень із атомами баластного газу, які змінюють напрям їх руху, призводять до втрати енергії, а також можуть супроводжуватися народженням нових заряджених частинок – іонів баластного газу, таунсендівських електронів, що вибиваються з атомів баластного газу при актах іонізації (α -процес). Також враховуються збудження атоми, які заносяться у відповідний список. Таунсендівські електрони додаються до повної сукупності електронів, та мають спочатку теплові швидкості відповідно розподілу Максвелла. Під дією електричного поля електрони рухаються у напрямку до анода поки не досягнуть його, чи не вийдуть за межі системи. У програмі закладено обмеження на час існування електрона у розряді, а також перевірка на достатню енергію для здійснення актів іонізації чи збудження атомів.

Після завершення часового циклу для всіх електронів, для іонів запускається новий цикл інтегрування рівнянь руху за часом. Іони стартують із визначених раніше позицій актів іонізації та у початковий момент мають теплові швидкості відповідно до розподілу Максвелла. Рух іонів оброблюється до виходу їх з системи, або до моменту досягнення катоду.

На основі цих розрахунків формуються файли, в яких зберігаються наступні дані: позиції актів іонізації та збудження атомів; номери та енергії відповідних електронів та відповідних їм актів іонізації, а для іонів та нейтралів, що досягли поверхні катода, – їх координати та енергії. Ці дані додатково обробляються засобами програми з метою визначення відповідних розподілів та значень, та побудови графіків у будь-якій програмі для обробки табличних даних (*Origin, Microsoft Excel, i m n*).

Система рівнянь руху частинок у схрещених електричному та магнітному полях у прямокутній системі координат має наступний вигляд:

$$\begin{cases} d\vec{r}/dt = \vec{v}; \\ d\vec{v}/dt = (q/m) \cdot (\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})); \\ \vec{r}_{t=0} = \vec{r}_0; \vec{v}_{t=0} = \vec{v}_0; t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

де $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ – радіус-вектор частинки; $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ – вектор швидкості частинки; $\vec{E}(\vec{r})$ – вектор напруженості електричного поля; $\vec{B}(\vec{r})$ – вектор індукції магнітного поля (про апроксимацію полів докладно буде сказано нижче); q – заряд частинки; m – маса частинки. Також для $\vec{r}$ та $\vec{v}$ треба врахувати граничні умови

у момент часу $t = 0$ – відповідно $\vec{r}_0$ та $\vec{v}_0$.

Перше та друге рівняння системи (1) є диференціальними рівняннями виду $du/dt = f(t, u)$ із граничними умовами $u|_{t=0} = u_0$ та $t > 0$, що інтегрувалися по часу t з метою знаходження $u(t)$. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку використовує наступну різницеву схему [2]:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2)$$

де:

$$k_1 = f(t_n, u_n), \quad k_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, u_n + \frac{\tau k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, u_n + \frac{\tau k_2}{2}\right), \quad k_4 = f(t_n + \tau, u_n + \tau k_3),$$

а τ – крок інтегрування за часом; u_n – значення функції u у момент часу t_n ; u_{n+1} – значення функції u у момент часу $t_{n+1} = t_n + \tau$. Через те, що $\vec{r}$ та $\vec{v}$ у системі (1) пов'язані, необхідно одночасно оброблювати пов'язані між собою коефіцієнти $k_{1,2,3,4}$ для $\vec{r}$ та $\vec{v}$, та враховувати відповідні зміни електричного та магнітного полів. Про критерії для кроку інтегрування по часу τ буде сказано нижче.

Ймовірність зіткнень частинок з газом на кожному часовому кроці інтегрування враховувалася методом Монте-Карло на основі відповідних перерізів процесів. Критерій зіткнення на часовому кроці [10]:

$$RN_i < 1 - \exp(-\Delta s_i \sigma(W)), \quad (3)$$

де RN_i – випадкове число в межах від 0 до 1, що генерується в процесі розрахунку; Δs – шлях, пройдений електроном за час τ ; $\sigma(W)$ – переріз зіткнень, що залежить від енергії частинок W ; n_s – концентрація частинок робочого газу за даного тиску. Насправді $\sigma(W)$ є сумою всіх перерізів зіткнень, що можливі для даної частинки за даних умов. Якщо умова (3) виконується, то запускається генерація нових випадкових чисел, що визначають відповідний тип зіткнень на основі співвідношень їх перерізів. Коли тип зіткнення визначено, починається етап розрахунку елементарного процесу зіткнення, результатом якого будуть зміна енергії, напрямку руху початкової частинки та поява нових частинок.

У програмі були враховані такі види зіткнень у робочому газі аргоні, як: пружні зіткнення електронів з атомами; іонізація електронним

ударом (α -процес); збудження атомів електронним ударом (переріз сумарний для рівнів $4s-4p$). Для іонів розглядалися наступні зіткнення з атомами робочого газу: пружні зіткнення, резонансна перестройка, поляризаційні зіткнення (для енергій менше 0,5 eV). При пружних зіткненнях електрон змінює напрямок швидкості випадковим чином, а при іонізаційних процесах енергія електрона також зменшується на величину енергії іонізації атома аргону – 15,8 eV. При збудженні атома електрон втрачає енергію 11,7 eV. Дані про перерізи зіткнень електронів та важких частинок в аргоні були взяті з [3, 13].

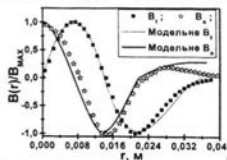
Для електронів часовий крок інтегрування рівнянь руху τ складав 10^{-11} с, що набагато менше періоду циклотронного обертання електрона у магнітному полі, який при індукції магнітного поля $B = 0,1$ Т складає $\tau_c = 35,72 \times 10^{-11}$ с. Ще одним критерієм для часового кроку є середній час між зіткненнями, що для електронів при тиску баластного газу $p = 1$ Па та енергії $W = 16$ eV становить $6,56 \times 10^{-11}$ с при пружному розсіянні на атомах баластного газу, $3,02 \times 10^{-10}$ с – для іонізаційних актів та $1,51 \times 10^{-4}$ с – для актів збудження електронних рівнів атомів. Час моделювання руху одного електрона обмежено 2,5 мкс, що набагато більше за вищевказані величини.

Для іонів крок по часу складає порядку $\tau = 10^{-4}$ с, а при наближенні іонів до катоду – для підвищення точності розрахунку, – він зменшується. Прийнято, що іони рухаються лише під дією електричного поля, оскільки за даних значень індукції магнітного поля їх

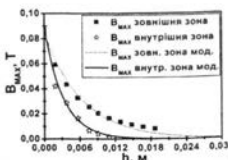
циклотронний радіус набагато перевищує розміри системи.

Геометрично комп'ютерна модель являє собою область, обмежену двома плоско-паралельними електродами круглої форми. Нижній електрод – катод, центр якого є точкою відліку циліндричної системи координат (ЦСК). Верхній електрод – анод. У ЦСК (r, θ, h) розміри системи $(2r \times h)$ складають $(74 \text{ мм} \times 35 \text{ мм})$. (У програмі передбачено етап переходу з циліндричних координат у прямокутні та навпаки). При потрапінні на анод або на «бічні стінки» системи, частинки зникають та їх рух більше не розраховується (але іони можуть відбиватися від аноду).

Для визначення параметрів моделювання, за допомогою вимірювача магнітної індукції ШІ-7 з датчиком Холла були експериментально виміряні тангенціальна та нормальна до катода компоненти індукції магнітного поля катодного вузла даного МРП. Експериментальні залежності значень тангенціальної (B_t) та нормальної (B_n) до катода компоненти індукції магнітного поля для даного МРП та апроксимації цих значень у комп'ютерній програмі моделювання наведені на рис. 2. Значення компонент індукції магнітного поля сягало $B = 0,09$ Т. У діапазоні радіуса катода r від 0 до 13,5 мм – внутрішня зона розряду; в діапазоні радіуса від 13,5 мм до 37 мм – зовнішня зона. При віддаленні від катода по нормалі до його поверхні значення компонент індукції магнітного поля спадають за експоненціальним законом (рис 2,б).



(a)



(б)

Рис. 2. Залежності компонент експериментально виміряного магнітного поля катодного вузла МРП з двома зонами ерозії (точки) та їх апроксимації у програмі (лінії): а – компоненти індукції магнітного поля біля поверхні катода вздовж його радіуса r , нормовані на максимальні значення $B_{\max}$ (B_t – тангенціальна та B_n – нормальна компоненти); б – зміна максимальних значень тангенціального до катода магнітного поля $B_{\max}$ у відповідних зонах розряду та їх зменшення з віддаленням від катода по нормалі на висоту h .

Максимум горизонтальної компоненти магнітного поля у внутрішній зоні знаходиться в точці $r = 7,5$ мм, а в зовнішній – у точці $r = 21,8$ мм (рис. 2а).

Для спрощення моделювання електричне поле було обране одновимірним, а для виключення впливу анода на розрядні процеси відстань від катода до анода обиралася більшою за відстань у реальному МРП ($h_{\max} = 35$ мм). В межах катодного шару електричне поле апроксимувалося класичною залежністю для жевріючого розряду [4]:

$$E_a(h) = -\left(\frac{2V_a}{d_E}\right) \cdot \left(1 - \frac{h}{d_E}\right), \quad (3)$$

де V_a – катодне падіння напруги; d_E – ширина області катодного падіння напруги (катодного шару); h – вертикальна координата у ЦСК, де точка відліку знаходиться на катоді. За межами катодного шару прийнято $E_a(h) = -25$ В/м [7].

Ширина катодного шару d_E залежить від напруженості магнітного поля та тиску робочого газу, а також від густини іонного струму на катод [1], але в першому наближенні її можна вважати незмінною вздовж радіуса катода [10, 11], оскільки ця величина за типових умов складає кілька мм [12].

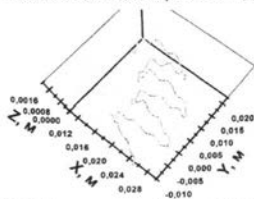
У схрещених електричному та магнітному полях МРС електрони обертаються навколо силових ліній магнітного поля і при зіткненнях з молекулами баластного газу поступово зміщуються в напрямку до анода. При кожному зіткненні електрон перестрибує на траєкторію, що буде віддалятися від катода вздовж нормального до катода електричного поля [1].

Як було сказано вище, індукція магнітного поля при віддаленні від катода зменшується за експоненціальним законом, але в моделі для оцінки ширини катодного шару d_E було використано усереднене по відстані експоненціальне спадання значення індукції магнітного поля. Ширину катодного шару d_E було оцінено на основі енергетичних умов для циклотронного руху електронів у схрещених електричному і магнітному полях та достатньої кількості актів іонізацій у його межах для підтримки самостійного розряду наступним чином:

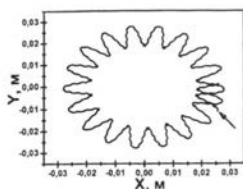
$$d_E = K \cdot h_c = \frac{K}{0,632 \cdot B_{\max}} \sqrt{\frac{2 \cdot \phi_i}{q_e/m_e}}, \quad (4)$$

де h_c – максимальна висота підняття електрона над катодом у схрещених електричному та магнітному полях [1] до того моменту, як він набере достатньої енергії для іонізації атому баластного газу; ϕ_i – потенціал іонізації баластного газу ($\phi_i = 15,8$ еВ для аргону); $B_{\max}$ – максимальне значення тангенціальної до катода компоненти індукції магнітного поля біля поверхні катода, що обиралося у внутрішній зоні; q_e/m_e – питомий заряд електрона; K – ціле число, рівне кількості актів іонізації, які можуть здійснити електрони, поки не вийдуть за межі катодного шару (на якому спадає напруга V_a); 0,632 – коефіцієнт, що враховує усереднення значень індукції магнітного поля.

Приклади моделювання руху поодиноких електронів без врахування зіткнень у модельних полях зображено на рис. 3.



(a)



(b)

Рис.3. Приклади результатів моделювання руху поодинокого електрона без зіткнень в модельних полях: (а) – фрагмент траєкторії в об'ємі, (б) – фрагмент траєкторії у площині катода (стрілкою позначена точка виходу електрона з катода)

Важливим є врахування нормальної до катода компоненти магнітного поля (рис. 2), оскільки вона забезпечує аркоподібну конфігурацію силових ліній, які стігуються до полюсів магнітної системи. За таких умов забезпечується рух більшості емітованих з катоду електронів за азимуту системи з періодичним поверненням їх до катода, після чого електрони з певною ймовірністю відбиваються, поглинаються його поверхнею (рис. 3а) [1].

3. Результати моделювання та їх порівняння з експериментом

Моделювання було проведено для двох тисків аргону $p = 1,33$ Па та $p = 6,65$ Па. Падіння напруги на катодному шарі розряду змінювалося у межах від $V_0 = 210$ В до $V_0 = 290$ В. Приймалося, що ширина катодного шару фіксована, та відповідає тиску баластного газу аргону: при тиску $p = 1,33$ Па, ширина катодного шару – $d_k = 16$ мм ($K = 65$ (див. (4))), а при $p = 6,65$ Па – $d_k = 3,2$ мм ($K = 13$ (див. (4))). З катода запускалися 1000 вторинних електронів.

Електрони здатні здійснювати акти іонізації атомів баластного газу принаймні тоді, коли вони набрали в електричному полі достатню енергію.

Таким чином, для енергії іонізації $\phi_i = 15,8$ еВ та при падінні напруги на катодному шарі $V_0 = 253$ В, кількість іонізаційних актів, здійснена одним електроном, повинна складати порядку $N_i = 16$, що відповідає результатам моделювання (рис. 4).

Магнітне утримання забезпечує збільшення кількості проходів електрона через проміжок прискорення на електричному потенціалі, що збільшує кількість іонізаційних актів, здійснених електронами. Водночас кількість електронів, що здійснили більше 25 іонізаційних актів до виходу з розряду, порівняно мала та може вважатися похибкою обчислювального експерименту.

На ефективність процесу іонізації також впливає ширина катодного шару: у випадку, коли акт іонізації відбувся за його межами, створений таунсендівський електрон (α -процес) не зможе набрати достатньої енергії в слабкому полі та здійснювати подальші іонізації. Це вже суттєво при тиску 6,65 Па та при обраних розмірах катодного шару, як видно з порівняння на рис. 4б та рис. 4г. Максимальна кількість актів іонізації, що здійснена α -електронами при великій ширині катодного шару (16 мм), більша майже у два рази, ніж у випадку меншого катодного шару (3,2 мм) при більшому тиску.

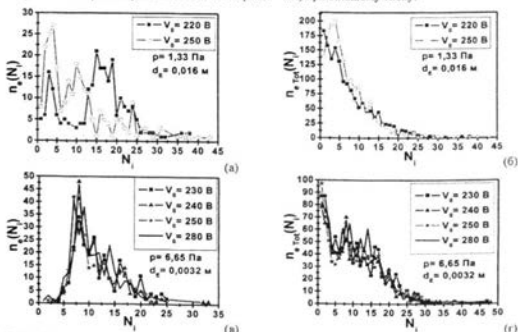


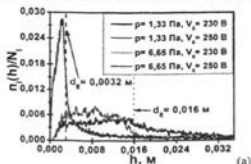
Рис. 4. Розподіл кількості електронів n_e за кількістю здійснених ними актів іонізації N_i при різних тисках: (а, б) – тільки вторинні електрони, (в, г) – із врахуванням α -електронів.

Повна кількість актів іонізації складає величину порядку 10^4 , що дає підстави сподіватися на самопідтримання розряду за рахунок вторинної іон-електронної емісії з катода (γ -процес), коефіцієнт якої зазвичай складає величину порядку $\gamma \sim 0,1$.

Моделювання показало, що кількість актів збудження атомів аргону набагато менша за кількість іонізаційних актів (порядку 1%), що пояснюється набагато меншим перерізом процесу збудження у порівнянні з процесом іонізації за цих енергій. З іншого боку, не можна повністю виключати акти збудження як джерело втрати енергії електронами, оскільки вони мають місце в тих самих областях у площині катода, що й іонізаційні акти, та виражаються у світінні розряду.

3.1. Розподіл позицій актів іонізації та режим горіння розряду

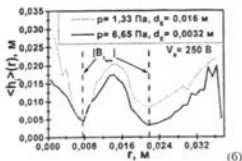
Результатом роботи програми є також розподіл позицій актів іонізації вздовж розрядного проміжку (рис. 5а) [7], а також розподіл середньої позиції іонізації $\langle h_i \rangle$ вздовж радіуса катода (рис. 5б). Катод було поділено на кільцеві області шириною біля 1 мм. Відстань від центру до середини смуги кільця позначена



(а)

радіусом r . Усереднення $\langle h_i \rangle$ відбувалося по всіх актах іонізації, що потрапили в ці області (середнє арифметичне). Як видно з рис. 5а, при тиску 1,33 Па (велика ширина катодного шару) більша частина актів іонізації відбувається у межах катодного шару, а при зростанні падіння напруги V_0 на цьому шарі зростає відносна кількість актів іонізації у ньому. При збільшенні падіння напруги на катодному шарі при тиску 6,65 Па, позиції актів іонізації теж наближаються до катода, але це менш помітно. Це можна пояснити тим, що при більшій напруженості електричного поля електрон може набрати більшу енергію на меншому відрізку шляху і здійснити іонізаційні акти ближче до катода.

В областях із максимальними значеннями тангенціальної до катода компоненти магнітного поля середні позиції іонізації максимальною наближаються до поверхні катода (рис. 5б). В зовнішній зоні при тиску $p = 1,33$ Па, середня віддаль позицій іонізаційних актів $\langle h_i \rangle$ від катода більша за віддаль при тиску $p = 6,65$ Па – як через більшу довжину вільного пробігу електронів, так і через кращі умови їх магнітного утримання, бо магнітне поле у зовнішній зоні складає повільніше з висотою, ніж у внутрішній (рис. 2б).



(б)

Рис. 5. Розподіли: а – позицій актів іонізації вздовж нормалі до катода у розрядному проміжку при різних тисках, розмірах катодного шару d_k та напругах V_0 ; б – середньої позиції іонізаційних актів за висотою $\langle h_i \rangle$ вздовж радіуса катода r (пунктирними лініями позначені положення максимумів тангенціальної до катода компоненти індукції магнітного поля (рис. 2а)).

Під час експерименту спостерігалось та було зафіксовано фотографічно явище індивідуального ініціювання розряду в різних зонах за відповідних напруг та струмів (рис. 6).

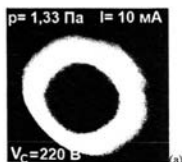
На фотографіях (рис. 6а, в, д) спостерігається світіння збуджених атомів баластного газу, що відбувається в областях за межами катодного шару, в якому енергії електронів занадто великі для збудження атомів. Але у площині перерізу

системи, що паралельна катоду, області інтенсивної іонізації та область світіння збуджених електронним ударом атомів баластного газу має збігатися. Таким чином, вважалося, що в областях із підвищеною кількістю іонізаційних актів також повинно спостерігатися помітне світіння (рис. 6).

Як видно з моделювання (рис. 6б, г), при тиску $p = 1,33$ Па та обраній ширині катодного

шару $d_c = 16\text{ мм}$, спостерігається зміна режимів горіння розряду при різних напругах. При катодній напрузі $V_c = 230\text{ В}$, як при моделюванні, так і в реальному МРПІ, у внутрішній зоні катоду

розряд ускладнений (рис. 6а, б), а при зростанні напруги відбувається його інтенсифікація (рис. 6в, г).



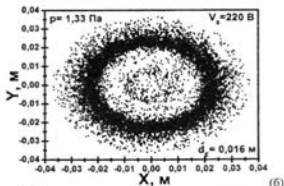
(а)



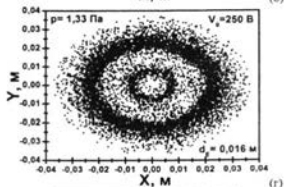
(в)



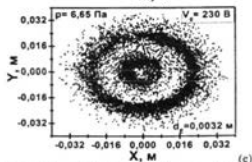
(д)



(б)



(г)



(е)

Рис.6. Порівняння фотографій розряду над катодом МРПІ без мішені при тиску баластного газу $p = 1,33\text{ Па}$ (а, в) та $p = 6,65\text{ Па}$ (д) з результатами комп'ютерного моделювання (б, г, е).

Це явище можна пояснити тим, що тангенціальна до катода компонента індукції магнітного поля B , в внутрішній зоні при віддаленні від катода спадає швидше, ніж у зовнішній, що ускладнює утримання електронів у внутрішній зоні за цих умов (рис. 2б). Водночас, при підвищенні напруги на катодному шарі, енергія електронів зростає, і вони встигають

здійснити більше іонізаційних актів на меншому шляху, що і дозволяє розряду інтенсифікуватися.

Аналогічні режими спостережено при тиску $p = 6,65\text{ Па}$, але повного згасання розряду у внутрішній зоні не відбувається (рис. 6д, е), оскільки тоді ширина катодного шару є порівняно з характерною відстанню спадання тангенціальної компоненти магнітного поля у

внутрішній зоні (рис. 26), що разом покращує умови прискорення електронів на потенціалі катодного шару одночасно з їх ефективним магнітним утриманням.

Ще однією ймовірною причиною погіршення запалювання у внутрішній зоні є те, що нормальна до катода компонента B_z індукції магнітного поля у внутрішній зоні поблизу від катода перевищує відповідну в зовнішній (рис. 2а). Це сприяє дифузії електронів у зовнішню зону, де значення сумарного магнітного поля помітно менше.

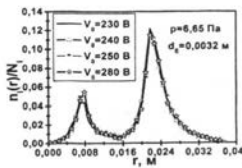
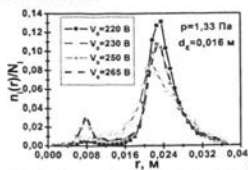


Рис. 7. Результати моделювання розподілів кількості актів іонізації за радіусом катода у магнітронному розряді, нормовані на повну кількість актів іонізації N , за даних тисків $p = 1,33$ Па (а) та $p = 6,65$ Па (б). З поверхні запускалися 10^3 електронів, кінцева кількість іонів складала порядку 10^4 .

Порівняння результатів рис. 6 та рис. 7 показує, що представлення кількості іонізаційних актів у вигляді розподілу за радіусом (рис. 7) відповідає реальному розподілу областей розряду по катоду за відповідних напруг та струмів, а також більш зручне для кількісного аналізу. Максимуми кількості іонізаційних актів відповідають максимумам індукції тангенціального до катода магнітного поля (див. рис. 5б та рис. 2а), що пояснюється кращим магнітним утриманням електронів у цих областях.

3.2. Характеристики частинок, що бомбардують катод

Енергія іонів визначається потенціалом, що спадає на катодному шарі, та шляхом, що вони проходять в електричному полі, яке прискорює їх (рис. 8). Більші енергії іонів (рис. 8а) досягаються у випадку, коли акти іонізації відбуваються за межами катодного шару, що властиве тиску 6,65 Па (рис. 8б).

Енергетичний розподіл іонів, що бомбардують катод, характеризуються помітною частиною моноенергетичних іонів з енергіями,

з метою підрахунку відносної кількості актів іонізації вздовж радіуса катодного вузла, засобами програми була проведена додаткова обробка результатів комп'ютерного моделювання процесів іонізації. Для цього вся площа катода була поділена на концентричні кільця з шириною порядку 1 мм та підрахована кількість актів іонізації $n(r)$, що припадають на відповідне кільце (рис. 7). Для порівняння ця кількість нормувалася на всю кількість актів іонізації за цих умов – N_c .

рівними потенціалу на катодному шарі (рис. 8а, г). Ця частина іонів створена на межі та за межами катодного шару, де вони рухалися лише з тепловими швидкостями. За умов меншої ширини катодного шару ($p = 6,65$ Па), кількість моноенергетичних іонів більша майже у два рази, що можна пов'язати з відповідною зміною середньої відстані позиції іонізації вздовж нормалі до катода $\langle h_r \rangle$ (рис. 8б).

Важливими результатами моделювання є розподіли кількості частинок по поверхні катода вздовж радіуса (рис. 9а, в) та розподіли їх середньої енергії (рис. 9б, г). Ці розподіли будуть визначатися концентрацією іонізаційних актів у відповідній точці розряду, оскільки іони в магнітному полі майже не відхиляються від прямолінійних траєкторій. Іони також зазнають зіткнень із нейтралами та змінюють напрям свого руху та частково перезаряджаються (але кількість цих зіткнень не перевищує 3-6% від загальної кількості частинок за даних умов).

Можна побачити (рис. 9б), що мінімуми енергії іонів відповідають максимумам тангенціального до катода магнітного поля (рис. 2а) ($r = 7,5$ мм, та $r = 21,8$ мм), що наближає позиції іонізації до катода (рис. 5б).

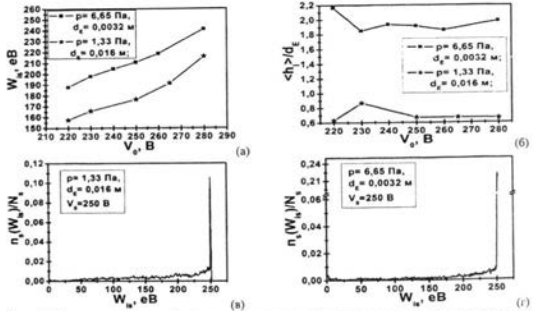


Рис. 8. Параметри іонів, що бомбардують катод за різних тисків та довжин катодного шару: (а) залежність середньої енергії іонів W_0 від різниці потенціалу на катодному шарі V_0 ; (б) середня відстань позиції активізації іонізації від катоду $\langle h \rangle$ [7], нормована на ширину катодного шару d_0 ; (в, г) енергетичні спектри іонів, що бомбардують катод.

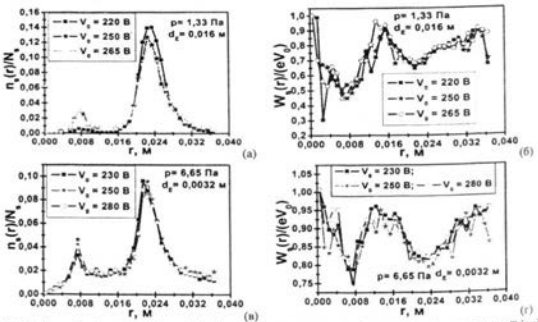


Рис. 9. Розподіл відносної кількості іонів за радіусом катода (а, в); розподіл відносної енергії іонів W_0 , що бомбардують катод вздовж його радіуса, нормованої на максимальну енергію, що може бути досягнута у потенціалі катодного шару eV_0 (б, г).

Визначивши таким чином енергетичні параметри іонів та їх концентрацію за даного режиму розряду, можна передбачити ефективність розпилення мішені у відповідній області, виходячи з теорії Зигмунда [6], згідно якої, кількість розпилених атомів пропорційна кількості бомбардуючи частинок та їх енергії та обернено пропорційна енергії сублімації матеріалу мішені. Очевидно, що у розглянутих випадках умови розпилення у внутрішній зоні розряду будуть гірші, ніж у зовнішній як через меншу кількість частинок, що бомбардують катод, так і через меншу їх середню енергію. Це буде перевірено при подальших експериментальних дослідженнях на даному МРП.

Висновки

У результаті роботи була побудована комп'ютерна модель магнетронного розпилювального пристрою (МРП) з двома зонами ерозії катоду-мішені, яка заснована на методі Монте-Карло. Були відтворені основні експериментальні результати, спостережені за подібних умов на реальному МРП, що є приставкою до промислової вакуумної установки ВУП-5.

За допомогою комп'ютерного моделювання були отримані дані, які безпосередньо з умов експерименту одержати складно, а саме: розподіли відносної кількості іонів, що бомбардують мішень, у відповідних зонах вздовж радіуса катода-мішені; розподіли середньої енергії іонів, що бомбардують катод вздовж радіуса катода-мішені; розподіли позицій іонізаційних актів від катода до анода; розподіл середніх відстаней іонізаційних актів від катода за радіусом катоду-мішені, що разом зумовлюють ефективність підтримки розрядних процесів та енергетичні розподіли іонів, які

бомбардують катод-мішень.

Моделювання продемонструвало, що при відносно великій ширині катодного шару ($d_k = 16$ мм), що відповідає тиску баластного газу аргону $p = 1,33$ Па, більшість іонізаційних актів, що здійснені електронами, відбувається у його межах. Енергія, яка досягається іонами при тиску $p = 1,33$ Па, менше, ніж за умов, коли вони були створені за межами вузького катодного шару ($d_k = 3,2$ мм), характерного для тиску $p = 6,65$ Па. В областях, де тангенціальна компонента магнітного поля максимальна, висота підняття електронів над катодом мінімальна, та енергії, які можуть набрати іони у прискорювальному електричному полі, теж мінімальні. Водночас, у цих областях має місце найбільш ефективне утримання електронів, що забезпечує максимальну кількість іонізаційних актів та, відповідно, найбільшу інтенсивність ерозії катоду-мішені.

При зміні розрядної напруги у межах, характерних для даного МРП, проявляється ефект індивідуального ініціювання внутрішньої та зовнішньої зони розряду, що було спостережено як на реальному експерименті, так і в комп'ютерних розрахунках за допомогою розробленої програми моделювання. Це підтверджує практичну цінність розробленої комп'ютерної моделі. Значучі енергетичні параметри іонів, що бомбардують катод та їх розподіл по його поверхні, за допомогою моделі можна оцінити ефективність розпилення матеріалу у відповідних областях на поверхні катода-мішені, та передбачити умови процесу розпилення мішені, виходячи з теорії Зигмунда. Останнє планується перевірити у подальших експериментах на даному МРП. Побудована комп'ютерна програма буде також використана для подальшого розгляду процесу магнетронного розпилення та умов формування наночастинок.

Список використаних джерел

1. Кузьмичев А.Н. Магнетронные распылительные системы. Книга 1. Ведение в физику и технику магнетронного распыления / А.Н. Кузьмичев. – Киев: Аверс, 2008. – 244 с.
2. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин // Уч. пособие для вузов. – Москва: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
3. Райзер Ю.П. Физика газового разряда: Учебное руководство для вузов. / Ю.П. Райзер // 2е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1992. – 536 с.
4. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток / Грановский В.Л., под ред. Сена Л.А. и Голанда В.Е. – Москва: Наука, 1971. – 492 с.
5. Никоненко В.А. Математическое моделирование, технологических процессов.

- Моделирование в среде Mathcad. Практикум / В.А. Никоненко, под ред. Кузнецова Г.Д. // Методические рекомендации. – М.: МИСиС, 2001. – 48 с. Режим доступа: http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/educat/systemat/nikonenko/main.asp.htm.
6. Весёлов А.Г. Синтез плёнок оксида цинка с прямой и наклонной текстурой в неоднородной газоразрядной плазме / А.Г. Весёлов, А.С. Джумалиев // Журнал технической физики. – М.: 2000. – 70, вып. 4. – С. 118-122.
 7. Богданов Р.В. Комп'ютерне моделювання розпоршування магнетронного розряду: енергетичний розподіл бомбардуючих іонів. / Р.В. Богданов // «Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка» Серія: фізико-математичні науки, – К.: 2011, – випуск №1 2011, – С. 143-148.
 8. Li Jun. Properties of ions impacting upon the cathode surface in a sputtering magnetron discharge / Jun Li // J. Phys. D: Appl. Phys., – 1999, – №29, – P. 1386-1390.
 9. Sheridan T.E. Model of energetic electron transport in magnetron discharges / T.E. Sheridan, M.J. Goekner, J. Goree // J. Vac. Sci. Technol. A., – Jan/Feb 1990. – 8, № 1, P. 30-37.
 10. Musschoot J. Influence of the geometrical configuration on the plasma ionization distribution and erosion profile of a rotating cylindrical magnetron: a Monte Carlo simulation / J. Musschoot, D. Depla, G. Buyle, et al. // Journal of Physics D: Applied Phys., – 2006, – №39, – P. 3989-3993.
 11. Musschoot J. Investigation of the sustaining mechanisms of dc magnetron discharges and consequences for I-V characteristics / J. Musschoot, D. Depla, G. Buyle, et al. // Journal of Physics D: Applied Phys., – 2008, – №41, – P. 1-5.
 12. Жуков В.В. Свойства магнетронного разряда на постоянном токе. Ч.1. Механизм распыления мишени / В.В. Жуков, В.П. Кривобоков, С.Н. Янин // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – 308, – №6, – С. 69-74.
 13. Ткачев А.Н. Коэффициент Таунсенда, кривая ухода и эффективность формирования пучка убегающих электронов в аргоне / А.Н. Ткачев, А.А. Феденев, С.И. Яковченко // Журнал технической физики. – М.: 2007. – 77, вып. 6. – С. 22-27.
 14. Кузьмичев А.Н. Массоперенос в магнетронной распылительной системе. / А.Н. Кузьмичев, А.Н. Гончарук // Сборник докладов 15-го международного симпозиума «Функциональные покрытия на стеклах», – Харьков 21-26 апреля 2003г. С. 105-108.
 15. Кучеренко Е.Т. Магнетронное распылительное устройство с двумя зонами эрозии / Е.Т. Кучеренко // в сб. Плазмотехнология-97. – Запорожье: 1997. – С.121-124.
 16. Антоненко С.В. Магнетронная технология создания графитовых покрытий, нанотрубок, и наноструктур на их основе / С.В. Антоненко // Московский государственный инженерно-физический институт, – М.: 2008. Режим доступа: http://www.edu-cons.net/atlas_last/doc/444/Antonenko_rus.pdf.
 17. Антоненко С.В. ПЭМ исследования углеродных нанотрубок, полученных методом магнетронного распыления на постоянном токе / С.В. Антоненко, С.Н. Мальцев, А.А. Тимофеев // МИФИ Режим доступа: <http://library.mephi.ru/data/scientific-sessions/2001/4/1501.html>

Надійшла до редколегії 25.02.12

УДК 537.52:533.9.082.5:537.872

Веклич А.М., к.ф.-м.н., доц.,
Сорока* П.В., студент**Дослідження плазми електродугового розряду між композитними електродами на основі міді в потоці аргону**

Дана робота присвячена дослідженням плазми електродугового розряду в потоці аргону між композитними Cu-Mo та Cu-Mo-LaB₆ електродами. Методами оптичної емісійної спектроскопії отримано радіальні розподіли температури та електронної концентрації в розрядному каналі для струмів 3.5 та 30 А. В припущенні локальної термодинамічної рівноваги розраховано склад плазми та вміст металів у розрядному проміжку.

Ключові слова: плазма електродугового розряду, композитні Cu-Mo електроди, склад плазми, вміст металів у розрядному проміжку.

*E-mail: soroka.pavlo@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Anisimov I.O.

Вступ

Композитні матеріали на основі міді широко використовуються як матеріали для електродів та контактів комутуючих приладів електротехнічного призначення. Ефективність роботи таких пристроїв визначається ерозійною стійкістю електродного матеріалу і, отже, інтенсивністю процесів переносу маси цього матеріалу у розрядному проміжку. Необхідно зазначити, що кількість парів електродного матеріалу в розряді, який виникає при процесах комутації, залежить від багатьох факторів: структури та складу електродів [1,11], параметрів плазми [2,3], сорту плазмоутворюючого газу [4], стану поверхні електродів [5,12].

Попередні дослідження вільно існуючої у повітрі дуги між композитними Cu-Mo електродами показали формування внаслідок термічної дії електричного розряду характерної вторинної структури робочого шару на поверхні електродів [6,12]. Значну роль у формуванні таких структур відіграє наявний в оточуючій атмосфері та на поверхні електродів кисень. Утворення вторинної структури на поверхні електродів, у свою чергу, спричинило зміну параметрів плазми, зокрема привело до зростання її температури [12]. Саме через цю обставину,

A.N. Veklich, Ph. D., Associate Professor,
P.V. Soroka, student**Investigation of plasma of electric arc discharge between composite electrodes on copper base in argon flow**

Present paper deals with investigations of electric arc discharge plasma in argon flow between Cu-Mo and Cu-Mo-LaB₆ composite electrodes. The radial profiles of temperature and electron density in discharge column at arc currents 3.5 and 30 A were obtained by optical emission spectroscopy. Plasma composition and content of metals in discharge gap were calculated in assumption of local thermodynamic equilibrium.

Key Words: plasma of electric arc discharge, composite Cu-Mo electrodes, plasma composition, content of metals in discharge gap.

для усунення впливу кисню на формування вторинної структури доцільним є виконання аналогічних досліджень плазми між такими композитними електродами у потоці аргону.

Крім того, було виявлено, що для електродів даного типу перенесення металу в розрядному проміжку у повітрі реалізується переважно через парову фазу. На жаль, електроерозійні властивості композитних Cu-Mo електродів у потоці аргону ще недостатньо вивчені.

Метою даної роботи є: дослідити параметри плазми електродугового розряду між композитними Cu-Mo та Cu-Mo-LaB₆ електродами у потоці аргону при силі струму 3.5 та 30 А; у припущенні локальної термодинамічної рівноваги (ЛТР) розрахувати вміст металів у паровій фазі в розрядному проміжку і в такий спосіб дослідити електроерозійні властивості матеріалу електродів.

Експеримент

Дуга запалювалася між неохолоджуваними електродами в потоці аргону 6.33 л/хв при силі струму 3.5 та 30 А. Міжелектродний проміжок складав 8 мм, діаметр електродів – 6 мм. Використовувалися композитні Cu-Mo та

Cu-Mo-LaB₆ електроди, отримані методами порошкової металургії. Співвідношення по масі між Cu та Mo для обох типів електродів складає 50% на 50%. Домішка LaB₆ у композитних Cu-Mo-LaB₆ електродах не перевищує 1%.

Дослідження плазми електродугового розряду в середньому перерізі дуги виконувались методами оптичної емісійної спектроскопії.

Внаслідок часової та просторової нестабільності використовувався метод однократної томографічної реєстрації випромінювання спектральних ліній. Швидкісне сканування просторових розподілів інтенсивності випромінювання забезпечувала ПЗЗ-лінійка (B/W) Sony ILX526A з 3000 пікселів. У поєднанні із спектральним приладом таке технічне рішення дозволяло виконувати записи радіального

розподілу випромінювання у середньому перерізі розряду нестационарної дуги. Для керування процесом збору та обробки експериментальних даних використовували спеціально розроблений програмний інтерфейс [7].

Для визначення температури плазми використовувався метод діаграм Больцмана із залученням спектральних ліній CuI: 510.5; 515.3; 521.8; 570.0; 578.2; 793.3 та 809.3 нм.

Електронну концентрацію в плазмі визначали з підвищення спектральної лінії CuI 515.3 нм, коли домінуючим механізмом її розширення є квадратичний ефект Штарка. Значення константи розширення цієї лінії взято з [8].

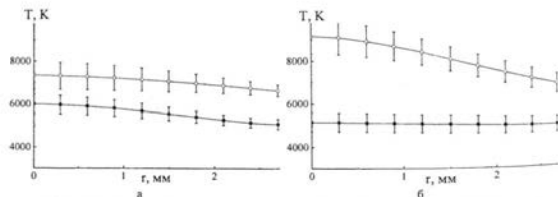


Рис.1 Радіальні розподіли температури плазми між Cu-Mo (а) та Cu-Mo-LaB₆ (б) електродами при силі струму 3.5 (■) та 30 А (○).

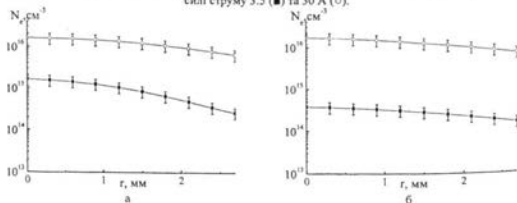


Рис.2 Радіальні розподіли електронної концентрації між Cu-Mo (а) та Cu-Mo-LaB₆ (б) електродами при силі струму 3.5 (■) та 30 А (○).

Нажаль, діапазон ширин спектральних ліній, які можна виміряти наявним інтерферометром Фабрі-Перо (у режимі еталона), не дозволяє виконати вимірювання контурів ліній співвимірних з інструментальним контуром установки. Саме така ситуація реалізується у режимі роботи дуги при силі струму 3.5 А. Тому, для визначення електронної концентрації пропонується скористатися алгоритмом, який спирається на раніше отримані параметри дугового плазми [10].

Результати та обговорення

На рис.1 зображено радіальні розподіли температури плазми електродугового розряду, на рис.2 – радіальні розподіли електронної концентрації при силі струму 3.5 та 30 А. Варто звернути увагу на те, що температура плазми розряду при силі струму 3.5 А для обох типів електродів з урахуванням похибки її вимірювання відрізняється не значно. Помітніше відрізняється значення на осі та просторовий (радіальний) профіль електронної концентрації. З аналізу поведінки температури та концентрації електронів у середньому перерізі між-електродного проміжку випливає, що розрядний канал при наявності у складі електродів домішки LaB_6 є більш однорідним вздовж радіусу. При збільшенні розрядного струму до 30 А температура плазми, природно, зростає для обох типів електродів. Проте, у випадку Cu-Mo-LaB_6 електродів температура є значно вищою. Саме це дає підставу зробити припущення, що у розряді між електродами з домішками LaB_6 кількість

парів металів (міді та/або молібдену) менша. Загальновідомо [2-4,11], що наявність домішок металів у плазмі електродугового розряду призводить до зменшення її температури. Очевидно, можна зробити попередній висновок про те, що електроди Cu-Mo-LaB_6 при збільшенні струму до 30 А мають кращу ерозійну стійкість.

Для перевірки цієї гіпотези на наступному етапі, використовуючи експериментально одержані радіальні розподіли температури та електронної концентрації, розраховано компонентний склад плазми у припущенні ЛТР. У цьому випадку традиційно використовують систему рівнянь, яка складається з рівнянь Саха для компонент плазми (мідь, аргон, молібден), рівняння електронейтральності, рівняння стану газу [9]. Щоб система була замкненою, додатково вводиться ще один параметр. Цим параметром служить співвідношення між концентраціями атомів міді та молібдену, яке легко знайти із відношення інтенсивностей спектральних ліній CuI 510.5 нм та MoI 550.6 нм (рис. 3).

Розрахований у такий спосіб рівноважний склад плазми при силі струму 3.5 та 30 А показано на рис.4 та рис.5. Із рисунків видно, що основний внесок в електропровідність дугового каналу вносить іонізація міді, кількість якої в розряді переважає кількість більш тугоплавкого молібдену. Це виглядає цілком логічним, адже мідь у даних композиціях відіграє роль легкоплавкої компоненти, а молібден забезпечує їх ерозійну стійкість.

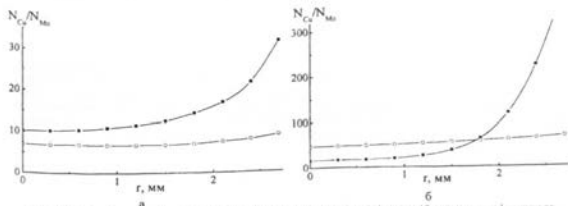


Рис.3 Радіальні розподіли відношення концентрацій атомів міді та молібдену в плазмі дугового розряду між Cu-Mo (а) та Cu-Mo-LaB_6 (б) електродами при силі струму 3.5 (■) та 30 А (○).

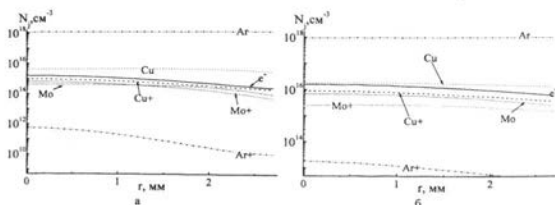
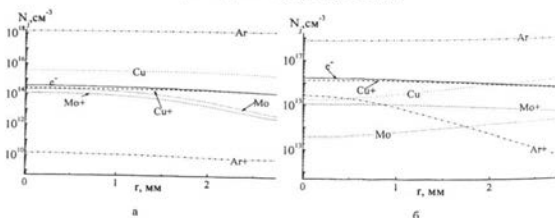


Рис. 4 Радіальні розподіли концентрацій складових плазми електродугового розряду між Cu-Mo електродами при силі струму 3.5 (а) та 30 А (б)

Рис. 5 Радіальні розподіли концентрацій складових плазми електродугового розряду між Cu-Mo-LaB₆ електродами при силі струму 3.5 (а) та 30 А (б).

На рис.6 та рис.7 подано радіальні розподіли вмісту міді ($X_{Cu} \% = (N_{Cu} + N_{Cu^+}) \cdot 100 / \sum n_i$) та молібдену ($X_{Mo} \% = (N_{Mo} + N_{Mo^+}) \cdot 100 / \sum n_i$) в плазмі електродугового розряду між композитними Cu-Mo та Cu-Mo-LaB₆ електродами, відповідно. Для обох типів електродів при силі струму 3.5 А вміст міді в міжелектродному проміжку в межах одного порядку практично співпадає, а вміст молібдену для Cu-Mo електродів приблизно в 5 разів більший ніж для Cu-Mo-LaB₆. Отже, у цьому режимі за рахунок молібденової компоненти електроди з домішкою LaB₆ є більш стійкими до ерозії.

При збільшенні розрядного струму до 30 А вміст парів міді в плазмі зростає приблизно у 7 разів у порівнянні з випадком 3.5 А для обох

типів електродів. У випадку розряду між електродами Cu-Mo-LaB₆ схожа ситуація спостерігається і для вмісту молібдену. У плазмі дуги між електродами Cu-Mo при збільшенні розрядного струму до 30 А вміст молібдену зростає на порядок, що говорить про їх гіршу електроерозійну стійкість у порівнянні з електродами Cu-Mo-LaB₆. Отже, попереднє припущення щодо ерозійних властивостей різних типів електродів, сформульоване лише на основі аналізу профілю температури плазми, цілком підтверджується зробленими висновками.

Зміну ерозійних властивостей молібденової компоненти залежно від наявності у складі композитних електродів домішки LaB₆, очевидно, необхідно пов'язувати з різною структурою робочого шару поверхні електродів.

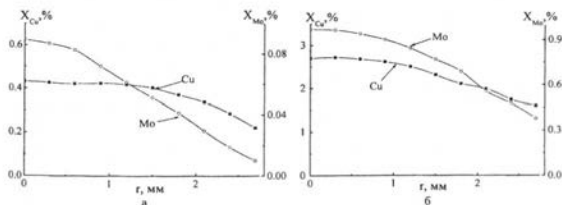


Рис. 6 Радіальні розподіли вмісту міді та молібдену в плазмі електродугового розряду між Cu-Mo електродами при силі струму 3.5 (а) та 30 А(б)

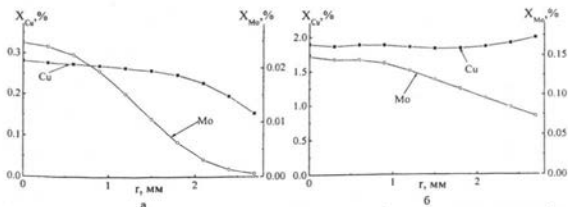


Рис. 7 Радіальні розподіли вмісту міді та молібдену в плазмі електродугового розряду між Cu-Mo-LaB₆ електродами при силі струму 3.5 (а) та 30 А(б)

яка утворилася внаслідок дії електродугового розряду.

Остаточний висновок щодо механізмів ерозії різних компонент у таких електродах, звичайно, можна буде зробити після додаткових металографічних досліджень вторинної структури їх поверхонь.

Висновки

Методами оптичної емісійної спектроскопії плазми у припущенні локальної термодинамічної рівноваги досліджено ефективність перенесення металів у паровій фазі в міжелектродному проміжку електродугового розряду між композитними Cu-Mo та Cu-Mo-LaB₆

електродами у потоці аргону при силі струму 3.5 та 30 А.

Аналіз поведінки радіальних профілів температури плазми та електронної концентрації і виконаний розрахунок рівноважного складу плазми і вмісту металів у паровій фазі плазми дозволяє оцінити ерозійну стійкість матеріалу електродів: у випадку Cu-Mo-LaB₆ електродів при збільшенні струму до 30 А кількість молібдену в паровій фазі значно менша у порівнянні з Cu-Mo електродами. Це призводить до підвищення температури плазми такого типу електродугового розряду.

Подальші металографічні дослідження робочої поверхні таких композитних електродів

дадуть можливість зрозуміти механізми ерозії різних компонент.

Список використаних джерел

1. Babich I.L. Surface Modification of Composite Electrodes by Electric Arc Discharge / I.L. Babich, R.V. Minakova, A.N. Veklich // IEEE Transaction On Plasma Science. – 2008. – 36 – P. 876-877.
2. Jones G R. A spectroscopic investigation of electrode material entrained into the extinguishing arc of an SF₆ circuit breaker / G R Jones, Weilin Hu and S M El-Kholy // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1988. – 21 - P. 1414–1420.
3. Cheminat B. Vaporisation d'une anode en argent dans le plasma d'un arc électrique / B. Cheminat, R. Gadaud et P. Andanson. // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1987. – 20 - P. 444–452.
4. Maouhoub E. Influence of carbon dioxide on the radial temperature distribution in an argon arc / E. Maouhoub // J. Plasma Physics. – 2000. – 63. - P. 97-114.
5. Babich I.L. Plasma of electric arc between electrodes from composite materials / I.L. Babich, V.F. Boretskij, R.V. Minakova, A.N. Veklich // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. – 2008. – 14. – P. 159-161.
6. Babich I.L. Plasma of electric arc discharge between Cu-Mo electrodes / I.L. Babich, D.V. Chukhalenko, N.I. Grechanyuk, A.I. Knurenko, R.V. Minakova, V.Ye. Osidach, A.N. Veklich // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. – 2007. – 13. – P. 139-141.
7. Веклич А.М. Методика спектроскопічної діагностики плазми електричної дуги / А.М. Веклич, В.С. Осідач // Вісник Київського університету. Серія: Радіофізика та електроніка. – 2003. – №5. – С. 12-14.
8. Konjevich R. Stark broadening and shift of neutral copper spectral lines / R. Konjevich, N. Konjevich // Fizika. — 1986. — 18, No4. — P. 327—335.
9. Babich I.L. Plasma of electric arc discharge between copper electrodes in a gas flow / I.L. Babich, V.F. Boretskij, A.N. Veklich // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. – 2008. – 14. – P. 171-173.
10. Бабіч І. Л. Спектроскопія плазми електродугового розряду між композитними електродами Ag – CuO / І.Л. Бабіч, В.Ф. Борецький, А.М. Веклич, А.І. Іванісік, Р.В. Семенишин, Л.О. Крячко, Р.В. Мінакова // «Електрические контакты и электроды» Сб. научн. Трудов ИПМ им. Францевича НАНУ. - Киев. - 2010. – С. 82-115.
11. Бабіч І.Л. Спектроскопія плазми електродугового розряду з приміснями міді / І.Л. Бабіч, В.Ф. Борецький, А.Н. Веклич, А.І. Іванісік // «Електрические контакты и электроды» Сб. научн. Трудов ИПМ им. Францевича НАНУ. - Киев. – 2008. – С. 4-13.
12. Бабіч І.Л. Ерозія композитних електродів на основі міді в умовах дугового розряду на повітрі / І.Л. Бабіч, В.Ф. Борецький, А.Н. Веклич, А.І. Кнуренко, Р.В. Мінакова, Л.А. Крячко, Г.Е. Копылова // «Електрические контакты и электроды» Сб. научн. Трудов ИПМ им. Францевича НАНУ. - Киев. – 2008. – С. 14-22.

Надійшла до редколегії 20.02.12

PACS:52.80.Mg, 61.48.+c

Касумов М.М., провідн.інж, Соломенко Ол. В.,
аспірант.**Про траєкторію формування фулеренів у
плазмі порожнього електрода дугового
розряду**

Зважаючи на геометрію електродів й експериментальні умови при синтезі, проведено оціночний розрахунок параметрів траєкторії формування фулеренів C_{60} , C_{70} , ..., C_{130} в дуговому розряді з порожнистим електродом. Розрахунок показав, що середня траєкторія формування являється «2'-звинтовою лінією».

Ключові слова: важкі фулерени, дуговий розряд.

*E-mail: kasumova@meta.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

In the past almost 40 years after the theoretical prediction of the existence of fullerenes, they have become very important materials. To date, up to 25% nanotechnological developments are based on the use of fullerenes [2], and the arising new trends of fullerene technology are based on the use of heavy fullerenes C_{70} , ..., C_{90} (h-f-mix), an advantage of which over light fullerenes is larger cross-section and higher electron affinity (EA) energy [3, 4]. In the product obtained by the main fullerene synthesis method (in ordinary arc discharge), however, heavy fullerenes amount to a small fraction of percent of the total.

In what follows, the term "path of fullerene formation" (PFF) in hollow electrode low-temperature plasma (LTP) is used. The path is the distance covered by formed fullerene from the initial small structure, formed in the interelectrode space with sequential attachment of atoms, ions and radicals, to the preset end point.

The above peculiarity of electric arc is connected with the short duration of the process of fullerene formation in a space with high temperature and concentration of initial structures. The space with LTP is the interelectrode space and the space adjacent to it. Indeed, in ordinary arc discharge, the length of the PFF is defined by the relation: $l = (0.5-2) \times \Delta$, where the working interelectrode gap $\Delta = 1-5$ mm, and the length of formation space $l \sim 10$ mm [5]. According to calculations, this space is traversed within the time $t \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ s during formation [6]. This time is, apparently, insufficient for the transformation of carbon vapor into fullerenes and for the formation of heavy fullerenes because the product yield is usually not over 15 - 30%.

M.M. Kasumov*, adv. eng., O.V.Solomenko,
aspirant

**On the path of fullerene formation in hollow
arc discharge electrode plasma**

A rough calculation of the path parameters of C_{60} , C_{70} , ..., C_{130} fullerene formation in arc discharge with hollow electrode has been performed on the basis of electrode geometry and experimental conditions in synthesis. The calculation showed that the averaged path is a "two-turn line".

Key Words: heavy fullerenes, arc discharge.

In Ref [7], the above disadvantage of ordinary arc discharge mode is avoided by discharge ignition in a helium stream in a long hollow graphite electrode of small diameter. In this discharge, the PFF traverses, as a "line", a space with carbon vapor at a high temperature. As a result, a fullerene yield of 33% is achieved. It was shown that in the case of synthesis without helium stream, the yield is $\sim 3\%$, which is typical of the simplest arc discharge mode. Reference [7] does not report the mass spectrum of the product obtained; however, heavy fullerenes (C_n , where $n > 76$) are apparently formed in discharge along with light fullerenes (C_{60} , C_{70}).

In the work [8], another arc discharge modification had been tested. Fullerene synthesis was carried out in a discharge chamber with $h = 150$ mm and an inside diameter of 68 mm. The synthesis took place at the chamber pressure $p = 0.12$ MPa with the He consumption $q = 0.3$ L/min. Discharge was ignited in a hollow electrode, whose geometry is described below. The synthesis was carried out at several discharge current magnitudes. At a discharge current magnitude of 60 A, the value of fullerene yield is of no practical importance. The fullerene-containing carbon black, obtained at a discharge current of 80 A, had an amorphous component, which was removed, but the mass spectrum exhibited a background, which could not be removed by ordinary filtering. The optimal product was obtained at the discharge current $I_d = 70$ A and discharge voltage $U = 19 - 22$ V. The benzene solution of carbon black, which was obtained in discharge, turned relatively quickly red-brown, which color is typical of fullerenes. There was no amorphous constituent in the solution. The composition of fullerenes was

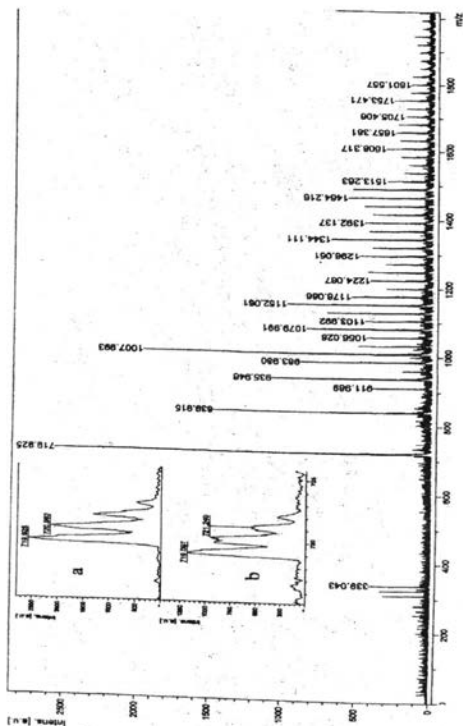


Fig 1. Mass-spectrum of fullerenes produced by arc discharge with hollow electrode: discharge current $I = 70$ A, voltage $U = 20$ V, discharge power $W = 20 \times 70 = 0.707 \sim 0.98$ kW. Laser beam parameters: $q = 2.6 \times 10^{16}$ J, $r \sim 10^{-3}$ s [8].

investigated on an AUTOFLEX II mass-spectrometer with pulsed laser (Bruker, Germany). In the mass-spectrum of negatively charged fullerenes (Fig 1) there are lines of fullerenes C_{60} , ..., C_{150} . The maximum fullerene yield ($\approx 100\%$) with the calculated yield value $P \approx 0.9$ g/h has been achieved. The background level in the mass-spectrum persisted even after a second filtering, but is lower than in the mass-spectrum of the product obtained at a discharge current of 80 A. Fig. 1 has insets a and b, which were made with enlargement of the mass-spectrum along the m/z axis. The insets characterize the background in the spectra of positive and negative fullerenes. In each inset, the C_{60} fullerene has four lines, which correspond to the binomial Bernoulli formula for the natural composition of the ^{12}C and ^{13}C isotopes.

The aim of this work is to determine the path parameters of fullerene formation in arc discharge with hollow electrode LTP under the conditions when there is no amorphous component in the synthesis product.

With this view, the experimental data [8] have been supplemented with data on the geometry of discharger and experimental conditions. The scheme of the device for fullerene formation in arc discharge with hollow electrode and an example of formation path are shown in Fig 2.

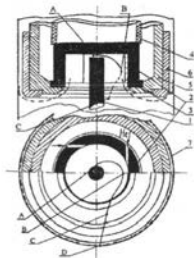


Fig. 2. Projections of the parts of a device for modified arc discharge with hollow electrode and conventional PFF.

The scheme shows a consumable electrode 1, a carbon rod of $\varnothing 6$ mm for spectral analysis. The discharge electrode 2, made of graphite, has a diameter of 26 mm and a height of 25 mm. In this

electrode, a cavity of $\varnothing 15$ mm with $h = 15$ mm was drilled out. For operation, a cover 3 (graphite, $h = 3$ mm) was fastened on the hollow electrode. The hollow electrode is separated from the upper flange by a cylinder 4 made of high-temperature ceramic. Working gas supply and the connection of the hollow electrode to the electric circuit were by a tube 5 (3 steel, wall thickness $\delta = 6$ mm), which was in contact with the cooling system. The tube has an outside $\varnothing 60$ mm. The working gas was supplied into the cavity through 4 holes, which are located in a circle at intervals of 90° in the electrode wall. A design feature of the hollow electrode is inlet holes, which have a size of section of 8×0.8 mm². Fig. 2 shows two holes. A part 6 (3 steel, $\varnothing 64$ mm) is fastened to the tube 5; on this part were mounted the parts of a device centering the electrode 1 relative to the electrode 2. The synthesis product was collected from the water-cooled wall (copper, wall thickness $\delta = 1.5$ mm) of the discharge chamber 7. As is seen from Fig 2, the holes in the wall of the hollow electrode were made as a tangent to the inner surface of the electrode. The holes along the working gas stream have the length $l \approx 8$ mm. With this geometry of the holes, the working gas stream fed into the cavity is formed and propagates in the form of a jet. When the helium jet moves in the hollow electrode, it performs additional functions besides the main function (hardening of formed particles on collision with helium atoms): it keeps the synthesis product out of the wall of the hollow electrode, i.e. reduces the formation of deposit and carries the formed fullerenes out of the cavity. Fig. 2 shows the conventional path of formation as a half turn with the beginning at the point A, which is in the middle of the interelectrode space. According to estimates, the temperature in this space is not over 5000 ± 500 K [9]; this temperature was determined by modeling of arc discharge emission in a quartz cylinder between graphite electrodes. The next points of the path are in the space at lower temperature. Accordingly, sequential formation of fullerenes begins at these points on collisions of atoms, ions and small clusters evaporated from discharge electrodes in the medium with helium. The next point B, marked on the path, is near the formed working gas jet. The lower path section is denoted by the point C. After this section, the flow of formed fullerenes moves by convection to the reactor wall and condenses at the temperature that is determined by the cooling system ($T = 300$ K). In Fig 2, the point D corresponds to this section.

Thus, the PFF in the hollow electrode LTP is formed by the action of a vapor stream from the interelectrode space, convection and the jet of gas fed into the hollow electrode. The PFF is

characterized by the following parameters: formation process duration τ , path length L , average fullerene velocity on the path, v , and path shape.

It is taken into account in the calculation that the mass flow of working gas exceeds the fullerene yield, and hence fullerenes acquire during formation a velocity which is approximately equal to the velocity of the jet of gas fed into the hollow electrode. The synthesis took place at the rate of working gas flow $q_0 = 5 \text{ cm}^3/\text{s}$. When the jet moves in the cavity, it heats up from 300 to $\approx 3000 \text{ K}$. Therefore, the fullerene formation time τ is determined from the relation: $\tau = V/q = 0.038 \text{ s}$, where $V = 1.9 \text{ cm}^3$ is the free space in the hollow electrode at the operating position of the consumable electrode, as is shown in Fig 1. The length of the PFF is found from the relation: $L \approx V/S = 7.4 \text{ cm}$, where $S = 0.256 \text{ cm}^2$ is the sectional area of the holes through which the working gas enters the hollow electrode. For the preassigned geometry of the electrodes, the average length of one turn in the hollow electrode $l = 38 \text{ mm}$, therefore, when fullerene is formed in the hollow electrode, it makes on the average $N = L/l \approx 2$ revolutions at the average velocity of the formed fullerenes $v = L/\tau \approx 195 \text{ cm/s}$.

In the mass-spectrum in Fig 1, the lines of the scantily studied fullerenes C_i : C_{112} , C_{122} , C_{146} , C_{150} stand out. To determine the values of EA, and ionization energy (IE_i) of fullerene i , a calculation has been performed on the basis of the model of rigid carbon sphere with the conventional radius $R_i = i^{0.5}$ from relations [1]:

$$IE_i = \varphi_n - K_1/R_i \text{ and } EA_i = \varphi_n + K_2/R_i, \quad (1)$$

where i is the number of atoms, K_1 and K_2 are normalizing factors, $\varphi_n = 5.37 \text{ eV}$ is the work function of a graphite sheet. From Eq.(1) we derive a relation, which is useful for the rough calculation of one of the components: $IE_i + EA_i \leq 2\varphi_n$.

The calculations have been performed relatively for IE_{40} and EA_{40} of the C_{40} fullerene. The calculated values of IE_i and EA_i for the fullerenes C_{112} , C_{122} , C_{146} , C_{150} are (eV) respectively:

$$6.98, 6.91, 6.78, 6.76 \quad (2)$$

$$\text{and } 3.39, 3.47, 3.64, 3.98. \quad (3)$$

It is evident from the data obtained that the value of electron affinity is larger for the fullerenes with larger mass, and that ionization energy is higher for the fullerenes with smaller mass. The data (2) and (3) show that the mass-spectrum of negatively charged fullerenes has more information.

Conclusions

1. It has been found in the work that at the pressure $p = 0.12 \text{ MPa}$ in arc discharge with hollow electrode, the working gas flow rate $q_0 = 5 \text{ cm}^3/\text{s}$ is optimal for

the fabrication of fullerenes at the discharge current magnitude $I_0 = 70 \text{ A}$; it follows that the relation $q_0 \sim I_0$ exists between the optimal discharge parameters.

2. The optimal length of the path and the time of fullerene formation in arc discharge with hollow electrode are many times larger than those in ordinary arc discharge. In the case of discharge with cavity, the maximum ($\approx 100\%$) fullerene yield has been achieved because the amorphous constituent that is usually formed during discharge transforms into heavy fullerenes under hollow electrode low-temperature plasma conditions.

References

1. Фуллерены/Сидоров Л.Н., Юровская М.А. и др.-М.:Издательство «Экзамен», 2005-688с.
2. Грушко Ю.С. Технология производства чистых фуллеренов C_{60} , C_{70} и концентрата высших фуллеренов. /Ю.С.Грушко, В.П.Седов, А.Шилин, Жур. прикладной хим.-2007.-80, вып.3.-С.450 - 457.
3. Разумов В.Ф. Органическая электроника – проблемы и перспективы. / В.Ф.Разумов Нанотехнологии.-2010.-1(6).С.5-9.
4. Шерстнев В.В. Тяжелые фуллерены для полупроводниковых фотодиодов на длины волн 1,5-5,0 мкм. / В.В.Шерстнев, Н.А.Чарыков, К.Н. Семенов, К.Н.Алексеев, В.А.Кескинов, О.А. Крохина. Жур. физ. химии, 2011, 85, №8, С.1529 – 1533.
5. Афанасьев Д. Образование фуллеренов в дуговом разряде. / Д. Афанасьев, И. Блинов, А. Богданов, Г. Дрожев, В. Каратаев, А. Кругликов.- ЖТФ.-1994.- 64.-В.10.-С.76-90.
6. Алексеев Н.И. Кинетика углеродных кластеров в дуговом разряде от атомов к фуллеренам. /Н.И.Алексеев, Г.А.Дрожев. ЖТФ.-2002.-72, вып.5.- С.121-129.
7. A.Sesli Fullerene production in a graphite tubular reactor/ A.Sesli, B.Cicek, M.Oymael. Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. -2005. -13.-N1.-P.1-11.
8. Касумов М.М. Повышение выхода фуллеренов в дуговом разряде под действием потока газа в полном электроде. /М.М.Касумов, В.В.Покропівний. Жур. технич. физ.-2007.- 77, вып.7.- С.196-198.
9. Касумов М.М. Spectroscopy of plasma arc discharge with cylindrical electrodes at atmospheric pressure./М.М. Касумов, U.P.Veremij, I.V.Prisyazhnevich, O.I.V.Solomenko, S.M. Sidoruk. The Fourth European Symposium on Plasma Chemistry. Book of Abstracts. August 21-25,2011, Zlatibor, Serbia P.81-82.

Надійшло до редакції 29.02.2012

УДК 543.272, 542.07, 54.084

І. С. Крук, студент, О.В. Лушевський, пр. інж.

**Газо-аналітичні методи контролю
токсичних газів у повітрі**

У статті проведено аналіз проблеми детектування в повітрі малих концентрацій небезпечних газів. Прیدілена увага історичному розвитку питання. Розглянуті основні сучасні методи реєстрації токсичних та горючих газів. Наведено порівняльний аналіз переваг та недоліків методів детектування газів.

Розглянуті питання використання в якості первинного перетворювача фото-іонізуючого детектора, метал-оксидного напівпровідникового та електрохімічного сенсорів.

Проведено порівняльний аналіз основних технічних характеристик сенсорів, що може бути використано для розробки газоаналізуючих приладів з покращеними характеристиками.

Ключові слова: ФІД, МОН, електрохімічні сенсори.

E-mail: igorkrk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Ефективний екологічний моніторинг неможливий без створення сенсорної мережі, яка буде охоплювати великі території і забезпечувати неперервний контроль токсичних газів. І постає запитання на базі чого створювати такі системи. Наше завдання з'ясувати це.

Починаючи з XVIII-го століття людство зіткнулось з проблемою виявлення безпечної для здоров'я концентрації газу при видобуванні корисних копалин. У вугільних копалинах відбувається десорбція метану з вугілля у простір забою. Метан часто був причиною вибухів та обвалів у шахтах. Цей газ не має ні запаху, ні кольору, ні смаку. Тому під час роботи робітники не відчували небезпеки. В ті далекі часи єдиним шляхом попередження про можливий вибух були птахи, наприклад канарейки. Спускаючись під землю, шахтарі брали із собою клітку з канарейкою. При небезпечних концентраціях газу пташка гинула.

Принада справа не є єдиним джерелом небезпечних газів, вони також утворюються в

І. S. Kruk, stud., O. V. Lushchivskiy, adv. eng.

**Gas-analytical methods for monitoring toxic
gases in the air**

The article analyzes the problems in detecting small concentrations of hazardous air emissions. The attention of the historical question. The main modern methods of registration of toxic and combustible gases. The comparative analysis of advantages and disadvantages of methods of detecting gases.

The questions used as primary converter photo-ionizing detector, metal-oxide semiconductor and electrochemical sensors.

A comparative analysis of the main technical characteristics of sensors that can be used to develop gas analysis devices with improved characteristics.

Key Words: PID, MOS, electrochemical gas sensors.

результаті таких видів діяльності людини як металургійне виробництво, видобуток та переробка нафти, а також у хімічному виробництві.

Зрозуміло, що використання живих тварин в якості газового сенсора є джерелом та застарілим, але і досі на складах хімічних боєприпасів оператор у захисному костюмі проходить територію з кроликом у клітці.

Постала задача зробити виміри більш точними та надійними, побудувати автоматичні системи контролю та попередження на небезпечних виробництвах і моніторингу навколишнього середовища.

Одне з перших рішень для виявлення концентрації отруйних газів у повітрі надали хіміки. Пристрій для виявлення являв собою пластину з хімічним реагентом, який при контакті з окремими газами починав реагувати і змінювати свій колір.[1] Наприклад: для аміаку колір змінювався з пурпурного до бежевого [2],
 $3\text{NH}_3 + \text{H}_3\text{PO}_4 \rightarrow (\text{NH}_4)_3\text{PO}_4$

Для парів етанолу - з оранжево-жовтого до блідо-зеленого [2].
 $C_2H_5OH + Cr(VI) + H_2SO_4 \rightarrow Cr(III) + \text{Продукти окислення}$

Реакція реагенту є незворотною і після використання пластину стає непридатною до подальшого використання.

Позитивними аспектами цього методу є:

- низька вартість
- легкість у використанні

Негативними аспектами цього методу є:

- утворюється хімічне сміття
- низька точність
- не всі люди розрізняють кольори
- не підходять для безперервного вимірювання
- обмежена температура використання (0-40°C)

Фото-іонізаційний детектор (ФІД)

Іншим напрямком у аналізі небезпечних газів є використання оптичних методів. Одним з таких рішень є застосування фото-іонізаційного детектора (ФІД) [3]. Конструкція та принцип роботи ФІД представлені на рис. 1.

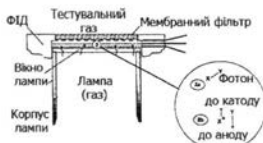


Рис. 1 Конструкція та принцип роботи Фото-іонізаційного детектора

Вимірюваний газ вільно проходить крізь мембранний фільтр. Лампа працює в ультрафіолетовому діапазоні, випромінюючи фотони високої потужності (зображені стрілками). Фотони вільно проходять крізь вікно лампи. Коли фотон абсорбується молекулою (2a), генерується два електрично заряджені іони. Один - позитивно заряджений X^+ , другий - негативно заряджений Y^- . Електричне поле, прикладене між анодом та катодом, притягує іони (2b). Результуючий струм, що при цьому виникає, пропорційний концентрації газу. Він вимірюється та ресструється.

Вимірювальна лампа заповнена інертними газами. Використання аргону у лампі призводить до виявлення великої кількості непостійних складових, у той час як використання ксенону підвищує чутливість. Лампи певного типу зазвичай не відрізняються за спектральними відбитками, тому відносне реагування на конкретний газ не змінюється в залежності від лампи. Тим не менш, інтенсивність ламп змінюється в деякій мірі, що призводить до різних показань на калібрувальному газі.

Вибір лампи залежить від цільового газу, вибірковості, яка вимагається, та часу життя лампи. Де можливо, використовують криптонову лампу через її високу чутливість.

Ксенон використовується для вимірювання багатьох ароматичних та ненасичених сполук, що містять не менше ніж 6 атомів вуглецю (C6). Іноді ця перевага використовується для забезпечення більшої селективності у цих сполуках.

Криптон використовується для вимірювання деяких газів, що містять 2 і більше атомів вуглецю (C2, C3 і C4+). Виключенням є ті газі, які містять хлор, фтор або бром.

Аргон використовується для вимірювання усіх речовин, які ресструються криптоновою лампою, плюс ацетилен, метанол, формальдегід і близько 80% сполук, назви яких включають 'фторо', 'хлоро', 'бромо'. Але лампа, заповнена аргонном, має дуже малий час життя, бо ультрафіолетове вікно, зроблене з фторид літію, дуже схильне до деградації.

Позитивними аспектами використання фото-іонізаційного детектора є:

- висока чутливість
 - висока точність
 - робота у широкому діапазоні концентрації газу
 - висока швидкість вимірювання
- До недоліків детектора слід віднести:
- важкість у використанні
 - при певних умовах малий час життя випромінювальних ламп
 - споживання великої кількості енергії
 - значні розміри приладів
 - погана селективність
 - потребують кваліфікованого персоналу

Найчастіше використовується у стаціонарних лабораторіях.

Метал-оксидні напівпровідникові (МОН) первинні перетворювачі (сенсори)

МОН сенсори — пристрої для виявлення широкого діапазону токсичних і горючих газів, у тому числі і парів хлору та інших забруднюючих речовин, які важко виявити іншими методами. Конструкція та принцип роботи проілюстровані на рис. 2.

Ці сенсори є компактними і недорогими, підходять для вимірювання токсичних та горючих газів. У них чутливий елемент складається з метал-оксидного напівпровідника - діоксиду олова (SnO_2), що міститься на обпеченій керамічній краплі [4].

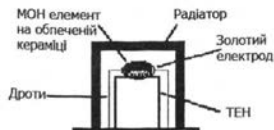


Рис. 2 Конструкція МОН сенсора

У чистому повітрі електрична провідність низька. Коли відбувається контакт з моно окисом вуглецю або горючими газами, збільшується електропровідність чутливого елемента. Чутливість сенсора можна керувати шляхом примусової зміни температури чутливого елемента. Залежність струму від концентрації газу є нелінійною, хоча математично прогнозованою. Значення дуже довго дрейфують. Сенсор реагує на неорганічні гази, тому його не слід використовувати для аналізу газової суміші, де в великих концентраціях присутні NO , NO_2 чи CO .

Для напівпровідникових сенсорів існує критична величина вологості повітря, менше якої вихідний струм сенсора може впасти до нуля, навіть при наявності вимірюваного газу у повітрі. Зі збільшенням вологості повітря ефективність сенсора збільшується.

МОН сенсори не підходять для проведення вимірів у швидкозмінних хімічних середовищах. Позитивними аспектами використання метал-оксидних напівпровідникових сенсорів є:

- висока чутливість
- низька ціна

- чутливість до широкого діапазону газів
- малі розміри

До негативних аспектів відносяться:

- нелінійна залежність струму від концентрації
- висока крос-чутливість
- висока залежність від вологості
- довгостроковий дрейф
- наявність елемента нагрівання (затрати енергії)

Їх слід використовувати для вимірювань де не важлива висока точність та крос-чутливість.

Електрохімічні газові сенсори

Електрохімічні сенсори з'явилися ще у 1959 році. У 80-тих роках минулого сторіччя були розроблені мініатюрні сенсори, які працювали з широким діапазоном газів, а також мали гарну чутливість та селективність. Конструкція та принцип роботи електрохімічного сенсора приведені на рис. 3 [1].



Рис. 3 Конструкція електрохімічного сенсора

Будову та принцип роботи електрохімічних сенсорів ми розповімо на прикладі сенсора для вимірювання концентрації хлору (Cl_2), для інших газів можливі деякі конструктивні відмінності.

Електрохімічний сенсор хлору складається з чутливого електроду (або робочого електроду) та допоміжного електроду, які розділені тонким шаром електроліту. При надходженні хлору відбувається його відновлення на робочому електроді сенсора.



У той час на допоміжному електроді, за допомогою електролізу постійним струмом, відбувається розклад води з розчину електроліту.



Загальна реакція на електродах виглядає так:



Електрони, що виникли в результаті електролізу, створюють прямо пропорційний концентрації струм [5,6].

Хлор спочатку проходить крізь капіляр, потім дифундує крізь гідрофобний бар'єр і потрапляє на поверхню робочого електроду. Це необхідно для обмеження кількості газу, що потрапляє у сенсор, для забезпечення протікання реакції. Крім того, це обмежує втрати електроліту. Газ, який дифундує через бар'єр, вступає в реакцію на поверхні робочого електроду, запускаючи механізм окислення або відновлення. Ці реакції каталізуються активним прошарком на робочому електроді. Для різних газів активний прошарок буде різним.

Потенціал на робочому електроді змінюється протягом електрохімічної реакції. Це викликає погіршення ефективності сенсору протягом тривалого періоду використання. Для поліпшення ефективності сенсору вводиться опорний електрод, який розміщується в безпосередній близькості до робочого електроду і накладається фіксований стабільний потенціал на робочий електрод.

Позитивними аспектами використання електрохімічних сенсорів є:

- мала ціна
- висока чутливість

Список використаних джерел

1. *Chou J.*, Hazardous Gas Monitors: A Practical Guide to Selection, Operation and Applications / J. Chou - SciTech Publishing., 2000. – 260 p.
2. *Луцевич Д.*, Конспект-довідник з хімії. / Д. Луцевич, О. Березан – К.: Вища шк., 1997. - 240 с.
3. *Chou J.*, International Sensor Technology Gas Sensor Selection Guide / J. Chou — SciTech Publishing., 2000. – 275 p.

- мала крос-чутливість
- малі розміри
- мале споживання енергії
- лінійна залежність струму від концентрації
- підходить для безперервного вимірювання

До негативних аспектів відносяться:

- обмежений термін роботи (2 роки при нормальних умовах)

Розглянуті вище сенсори, а саме ФІД, МОН та електрохімічні, є найновішим рішенням проблеми вимірювання концентрації газу у повітрі. Найбільш перспективними для побудови автоматичних систем контролю повітря є електрохімічні сенсори. Вони можуть використовуватися для вимірювання широкого спектру газів, забезпечують високу чутливість разом з високою точністю, мають відносно великий час експлуатації та зберігання, а також найбільш придатні для конструювання портативних приладів контролю.

4. *Jasinski P.* Solid-state electrochemical gas sensors / P. Jasinski // Materials Science-Poland., 2006. - №1 - P. 269-278.
5. *Alphasense Limited.* "AAN104: How Electrochemical Gas Sensors Work." Apr 15, 2005.
6. *Alegret S.* Electrochemical sensor analyzing / S. Alegret, A. Merkoci // Comprehensive analytical chemistry. - 2007. - P. 885-904.

Надійшла до редколегії 03.03.12

УДК 537.624; 537.632

Мартиш* С.В., д.ф.-м.н., доц,
Сидоренко В.С., к.ф.-м.н., с.н.с.**Особливості поверхневих хвиль в лівих
середовищах**

Досліджені поверхневі ТМ- і ТЕ- стаціонарні хвилі, що поширюються уздовж кордону поділу між лівим мета-матеріалом з традиційними матеріалами. Визначені обмеження для існування поверхневих хвиль. Показано, що частотні області існування для ТМ- і ТЕ- мод не перекривають одна одну. Доведено, що в залежності від параметрів системи або ТМ- або ТЕ- поверхнева мода мають усереднений за часом вектор Пойнтинга, спрямований проти фазової швидкості.

Ключові слова: поверхневі хвилі, ліві середовища, показник заломлення.

*E-mail: s.martysh@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анисимов І.О.

Вступ

Визначення "ліві середовища" було надане в роботі [3] середовищем з від'ємним показником заломлення. В англомовній літературі прийнята назва Left-Handed Medium (LHM). При поширенні плоскої хвилі в середовищі, яке має одночасно від'ємні значення діелектричної $\epsilon < 0$ та магнітної $\mu < 0$ проникностей, вектори електричного поля E , магнітного поля H та хвильовий вектор k складають лівосторонню ортогональну систему координат. Саме такі матеріали прийнято називати лівосторонніми (ЛС), або мета-матеріалами.

Дійсно, для плоскої монохроматичної хвилі електричне і магнітне поле, та хвильовий вектор формують трійку векторів у відповідності до законів Максвелла:

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c} \mu \vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} &= -\frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E} \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо значення ϵ та μ - додатні, то напрямки векторів E , H та k формують праву трійку. Звичайно, що вони формують ліву, коли ϵ та μ стають від'ємними.

Martysh* E.V., Dr.Sci., Ass.Prof.,
Sidorenko V.S., Ph.D.**Peculiarities of surface waves in left-handed
media**

Surface p- and s-polarized stationary waves propagating along the interface between left-handed meta-material with conventional materials are studied. The constraints for the existence of surface modes are identified. It is shown that the frequency domains of existence for p- and s-modes do not overlap. The Poynting vector and the density of energy associated with surface mode are calculated. Depending on the system parameters either p- or s-surface mode has the time-averaged Poynting vector directed opposite to the mode phase velocity.

Keywords: surface waves, left-handed media, refraction index.

Діелектрична проникливість ϵ і магнітна проникливість μ є основними характеристиками, що визначають поширення електромагнітних хвиль у речовині. Це зв'язано з тим, що вони є єдиними параметрами речовини, що вводять у дисперсійне рівняння, яке задає зв'язок між частотою монохроматичної хвилі ω і її хвильовим вектором k .

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \quad (2)$$

Тут n^2 - квадрат коефіцієнту заломлення речовини, рівний

$$n^2 = \epsilon \mu \quad (3)$$

Якщо не враховувати втрат і вважати n , ϵ та μ дійсними числами, то видно, що одночасна зміна знаків ϵ та μ ніяк не відбивається на цих співвідношеннях. Є три припущення. По-перше, можна визнати, що властивості речовини дійсно не залежать від одночасної зміни знаків ϵ і μ . По-друге, може виявитися, що одночасна від'ємність ϵ і μ суперечить яким-небудь основним законам природи, і тому речовини з $\epsilon < 0$ і $\mu < 0$ не можуть існувати. Нарешті, варто визнати, що речовини з від'ємними ϵ і μ мають деякі властивості, відмінні від властивостей речовини з позитивними ϵ і μ . Більш строгий фізичний підхід до визна-

чення знаку показника заломлення буде наведено далі.

Що ж стосується незвичайного закону заломлення хвилі, а саме, якщо хвиля падає з вільного простору на середовище, у якому групова і фазова швидкості хвилі спрямовані назустріч, то відповідний промінь відхиляється в протилежну сторону від нормалі, у порівнянні з падінням на звичайне середовище, у якого ці швидкості збігаються за напрямом. Крім того, у таких середовищах незвичайно проявляються ефекти Доплера і Черенкова. Як було показано в [3], для наявності вказаних та багатьох інших відмінностей від звичайних, тобто правосторонніх середовищ, ЛС повинні мати часову дисперсію обох проникностей в одному частотному діапазоні.

В роботах [4, 5] було продемонстровано, що запорошена плазма, дисперсійні властивості якої залежать від відповідних тензорів проникностей, може бути штучно отримана додаванням феромагнітних гранул в замагнічену електронічну плазму і перетвориться в ЛС. Також там були наведені приклади з астрофізики, які свідчать про можливість існування таких систем в природі.

На межі поділу звичайного середовища та ЛС можуть поширюватись поверхневі електромагнітні хвилі. Деякі особливості такого процесу розглянуті в цій роботі. Відомо, що хвилі, поля яких «налипають» на певну поверхню та експоненційно спадають при віддаленні від неї, мають назву поверхневих.

1. Вибір знаку коефіцієнта заломлення в ЛСМ

Проблема у виборі знаку для показника заломлення виникає в загальному випадку, коли у відповідності до відомих електродинамічних правил (теорема Крамерса-Кроніга), потрібно враховувати наявність дисипативних доданків в обох проникностях, що мають дисперсію. З вигляду показника заломлення (3) можна сказати, що мова йде про виділення однозначної аналітичної гілки функції кількох комплексних змінних. Нажаль, на теперішній час це питання не має остаточного розв'язку [1]. Тому можна вважати доцільним розглянути його з фізичних міркувань.

Спочатку можна пригадати іншу форму рівнянь (1), яка є вживаною в електродинаміці НВЧ [2]. Для цього треба ввести не тільки

коефіцієнт заломлення n , але і характеристичний імпеданс $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

Позначимо також $k_0 = \omega/c$. Тоді рівняння (1) перетворюються у:

$$\vec{k} \times \vec{E} = (k_0 n)(\eta \vec{H}) \quad (4)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -(k_0 n / \eta) \vec{E}$$

З співвідношень

$$\mu = \eta \eta_0 \quad \text{та} \quad \epsilon = n / \eta_0 \quad (5)$$

випливає, що для ЛС знаки n та η повинні бути різними, а хвиля, яка поширюється, буде оберненою. Дійсно, за умови нехтування втратами, вектор Умова – Пойнтінга може бути записаний наступним чином:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{\vec{k}}{k_0} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \cdot \frac{1}{\eta_0} \quad (6)$$

Для ЛС з від'ємними діелектричною та магнітною проникностями $\eta_0 = \mu < 0$. Тому вектор Пойнтінга (напрямок поширення енергії) та хвильовий вектор (напрямок фазової швидкості) спрямовані в протилежні боки. Крім того, можна побачити, що в ЛС дійсна частина імпедансу повинна бути додатною. Для підтвердження цих міркувань, можна використати оригінальний підхід [6], де наведений наступний вираз для густини енергії W в середовищі з дисперсією:

$$W = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \vec{E} \vec{E}^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \vec{H} \vec{H}^* \right) = \frac{c}{8\pi} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{d\vec{k}}{d\omega} \vec{E} \vec{E}^* = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{1}{\eta_0} \vec{E} \vec{E}^* \quad (7)$$

В (7) використано звичайне визначення групової швидкості v_g . Природним є припущення, що густина енергії є додатною величиною. З урахуванням цього (7) можна записати так:

$$W = \frac{c}{8\pi} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{d\vec{k}}{d\omega} \vec{E} \vec{E}^* = \frac{c}{8\pi} \cdot \vec{E} \vec{E}^* \cdot \left(\mu \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{d\vec{k}}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{1}{8\pi} \cdot \vec{E} \vec{E}^* \cdot \left(\mu \frac{\omega}{k} \frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} > 0 \quad (8)$$

Очевидно, що ця нерівність μ повинна виконуватись для будь-якого середовища, в якому магнітна та діелектрична проникності мають однакові знаки. Це є простим наслідком припущення, що в цьому середовищі поширюється монохроматична хвиля, для якої виконується нерівність (1) > 0 . Тоді з (8) безпосередньо випливає, що:

$$\mu \frac{\omega}{k} \frac{dk}{d\omega} = \mu v_p v_g > 0. \quad (9)$$

В (9) використано звичайне визначення фазової швидкості v_p .

Таким чином, при від'ємних значеннях ϵ та μ , групова і фазова швидкості мають різні знаки. Нагадаємо, що групова швидкість має зв'язок з перенесенням енергії, тому саме її треба розглядати, як додатну величину. Повертаючись до (7), треба визнати і позитивне значення характеристичного опору в ЛС.

2. Дисперсія поверхневих хвиль

В цьому розділі будемо вважати, що хвилі, які поширюються уздовж вісі ОХ, розташовані на кордоні ($z = 0$) між двома напів-нескінченими середовищами. Ці середовища характеризуються лінійною діелектричною проникністю ϵ_i та магнітною проникністю μ_i , де $i = 1, 2$ для $z > 0$, $z < 0$, відповідно. Надалі ми також припустимо, що контактують ізотропні середовища без втрат. Розв'язок системи рівнянь (4) будемо шукати для ТЕ-хвилі, яка має структуру поля (H_z , E_x , E_y , H_x). Значимо, що відповідні формули для ТЕ та ТМ хвиль можуть бути перетворені одна в одну взаємними замінами $\epsilon_i \leftrightarrow \mu_i$, $H \rightarrow -E$, $E \rightarrow H$. Будемо шукати розв'язок для системи рівнянь (1) разом з граничними умовами на поверхні поділу двох середовищ, розглядаючи залежність компоненти електричного поля E_y у вигляді:

$$E_{1,2} = E_{1,2}^0 \exp(iqx \mp p_{1,2}z) \quad (11)$$

де $p_{1,2} > 0$, $p_{1,2}^2 = q^2 - \epsilon_{1,2}\mu_{1,2} \cdot k_0^2$.

Вираз для магнітного поля можна безпосередньо отримати з першого рівняння системи (1). Скориставшись граничними умовами для дотичних компонент електричного і магнітного полів, знаходимо для ТЕ-хвиль умову:

$$p_1/\mu_1 + p_2/\mu_2 = 0 \quad (12)$$

Як можна побачити, для існування відповідної гілки необхідна умова: $\text{sign}(\mu_1) \neq \text{sign}(\mu_2)$. Зрозуміло, що для ТМ-моди потрібна умова $\text{sign}(\epsilon_1) \neq \text{sign}(\epsilon_2)$. З цих нерівностей, зокрема, випливає, що на межі поділу двох ЛС взагалі немає поверхневих хвиль.

За допомогою простих дій з (12) можна отримати таке дисперсійне рівняння:

$$q^2 = k_0^2 n_1^2 n_2^2 \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}, \quad (13)$$

а для відповідного декременту загасання:

$$p_i^2 = k_0^2 \mu_i^2 \frac{n_i^2 - n_j^2}{\mu_i^2 - \mu_j^2}. \quad (14)$$

Оскільки між цими величинами існує вказаний вище зв'язок, то достатньо знайти області параметрів для декременту, аби виконувались необхідні умови $p_i^2 > 0$ та $q^2 > 0$. Ці області є такими:

$$n_1^2 > n_2^2; \mu_1^2 > \mu_2^2 \text{ або } n_1^2 < n_2^2; \mu_1^2 < \mu_2^2. \quad (15)$$

У відповідності до згаданого вище правила, можна записати відповідні нерівності і для ТМ-моди. Тоді стає очевидним, що відповідні частотні смуги, в яких відношення ϵ_2/ϵ_1 та μ_2/μ_1 є одночасно негативними, для ТЕ- та ТМ-мод не перекриваються. Варто зазначити, що в частотній області, де $\epsilon_2 < 0$ і $\mu_2 < 0$, існують об'ємні моди з дисперсією $k_x^2 + k_z^2 = \epsilon_2\mu_2 k_0^2$. Максимальне значення проекції хвильового вектора об'ємної моди на площину, паралельну межі поділу, є $k_{\text{max}2}^2 = \epsilon_2\mu_2 k_0^2$. Таким чином, для того, щоб мати $p_2^2 > 0$, повинна бути виконана нерівність $q^2 > k_{\text{max}2}^2$ (див. формулу (2)). Аналогічно для середовища 1 у випадку $\epsilon_1\mu_1 > 0$ умова $p_1^2 > 0$ призводить до $q^2 > k_{\text{max}1}^2 = \epsilon_1\mu_1 k_0^2$. Таким чином, для існування поверхневої моди її хвильовий вектор повинен бути більшим, ніж ті, що відповідають об'ємним модам, $q^2 > \max\{k_{\text{max}1}^2; k_{\text{max}2}^2\}$. Це означає, що поверхневі та об'ємні моди можуть співіснувати в одній частотній області, але їх дисперсійні криві належать до різних областей простору хвильових векторів і тому не перетинаються.

Зуважимо, що якщо ми беремо до уваги малі активні втрати, то діелектрична проникність $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ буде комплексною, але уявна частина $\epsilon'' \ll |\epsilon'|$. Отже, мала уявна частина q'' буде і у хвильового числа в рівнянні (1), тобто $q = q' + iq''$,

$q'' \ll q'$ з $q'' \sim \epsilon''$. Таким чином, малі втрати ведуть до появи скінченної середньої довжини вільного пробігу поверхневої хвилі $L \sim 1/q''$, $q'L \gg 1$. Очевидно, що в експериментах доведеться мати справу з відстанями, які не сильно перевищують L . Для спрощення в цій роботі будемо вважати, що втрати відсутні.

3. Напрямок поширення енергії

Можна вивести по аналогії з (6) загальний потік енергії $\langle S \rangle$ для ТЕ-хвиль в обох середовищах. Для цього треба проінтегрувати вирази (6), підставивши в них відповідні електричні поля (11), для вказаних середовищ по z та додати їх. Результат буде наступним (тут $\mu_1 > 0$):

$$\langle S \rangle = \frac{c}{16\pi} \frac{\vec{q}}{k_0} |E_0|^2 \cdot \frac{1}{\eta_1 n_1} \left[1 - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \right] \quad (16)$$

Відповідно, вектор S буде паралельним (антипаралельним) хвильовому вектору q для $\mu_1^2 < \mu_2^2$ ($\mu_1^2 > \mu_2^2$). Тоді, у відповідності до однієї з умов (15) ТЕ-хвиля поводить себе як хвиля в ЛС (якщо $\mu_1 > 0$, а $\mu_2 < 0$) так само, як і об'ємна. Тому природно назвати такі поверхні поділу 2D лівими поверхнями.

Закінчити цей аналіз можна доведенням того, що швидкість потоку енергії співпадає з груповою швидкістю. Середня у часі густина енергії може бути записана, як вираз (7) для середовищ I та II відповідно. Ця густина енергії, проінтегрована по z , має наступне співвідношення з загальним потоком енергії $\langle S \rangle = v_E \langle W \rangle$, де v_E - швидкість потоку енергії. Можна показати, що групова швидкість, визначена, як $v_g = d\omega/dq$, де q взято з (13), співпадає з v_E . Таким чином, для поверхневої ТЕ-моди в ЛС, так само, як для об'ємних мод в ЛС і для поверхневих хвиль в правих середовищах, ці швидкості співпадають.

Висновки

1. Визначені частотні області існування поверхневих хвиль на межі ЛС. Показано, що ТЕ- і ТМ-поверхневі хвилі не співіснують в одному частотному діапазоні.
2. Доведено, що 2D-межа поділу ЛС та звичайного середовища може проявляти властивості 2D лівого середовища для поверхневих хвиль. Ці хвилі можна характеризувати повним потоком

енергії і груповою швидкістю, які співпадають між собою.

3. Як наслідок, всі специфічні ефекти, передбачені для об'ємних хвиль в ЛС, наприклад негативний ефект Доплера, негативний тиск хвилі та інвертований черенківський кут, можна очікувати для поверхневих хвиль в двовимірній геометрії. Більш детальний розгляд цих явищ буде проведений у наступних роботах.

Список використаних джерел

1. Osgood W. Topics in the Theory of the Functions of Several Complex Variables / W.F. Osgood // NY: Dover Publ. - 1966. 280 P.
2. Balonutsef L.A. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн // М.: Радио и связь. - 1988. 442 С.
3. Veselago V. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ / V.G. Veselago // Usp. Fiz. Nauk. - 1967. - 92. - P. 517-522 [Sov. Phys. Usp. - 1968. - 10. - P. 509-514].
4. Mal'nev V. Peculiarities of Low-Frequency Waves in Dusty Plasma with Ferromagnetic Grains / V.M. Mal'nev, E.V. Martysh, V.A. Pan'kiv // Український Фізичний Журнал. - 2007. - 52. - №9. - С. 848-854.
5. Mesfin B. Waves and negative refraction in magnetized plasma with ferrite grains / B. Mesfin, V.N. Mal'nev, E.V. Martysh // Phys. Plasmas. - 2010. - 17. - 112109.
6. Сивухин Д.В. Вектор Пойнтинга в сильно дисперсной среде / Д.В. Сивухин // Оптика и спектроскопия. - 1957. - №3. - С. 308-312.

Надійшла до редколегії 25.02.2012

УДК 537.86/.87

Мойсєєнко В.А., аспірант,
Мелков Г.А., доктор фіз.-мат. наук**Дослідження спектрів МСХ в тонких
плівках ЗІГ за допомогою нелінійної
взаємодії спінових хвиль**

В роботі представлено нову методику дослідження спектрів зворотних об'ємних магнітостатичних хвиль (ЗОМСХ) та поверхневих магнітостатичних хвиль (ПМСХ) в тонких плівках залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ). В основу даної методики покладено явище нелінійної взаємодії зустрічних хвиль намагніченості в магнітних середовищах з дисперсією. Теоретичні та експериментальні дослідження проводились для сигналів прямокутної форми в шести сантиметровому діапазоні довжин хвиль. Було встановлено, що для ЗОМСХ та ПМСХ є характерним аномальне проходження сигналів вище і відповідно нижче частоти феромагнітного резонансу (ФМР), що пов'язано з обмеженими розмірами плівки та кристаллографічною анізотропією. Було встановлено, що запропонований метод дозволяє визначати поле, при якому в феритовому зразку виникає ФМР з точністю до 1 Е. В теоретичних розрахунках враховувались резонансні властивості плівки. Всі теоретичні роздуми добре співпадають з експериментом.

Ключові слова: магнітостатична хвиля,
залізо-ітрієвий гранат, параметрична
взаємодія.

*E-mail: v_a_m@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Данилов В.В.

Вступ

Сучасна електроніка не може обійтись без систем передачі, прийому та обробки інформації. Тому залишається актуальною розробка та розвиток нових високочастотних інформаційних систем. Одним з таких є системи на основі тонких феритових плівок ЗІГ. Монокристалічні феритові плівки вже довгий час слугують основою для великої кількості НВЧ приладів та пристроїв. Для конструювання різноманітних приладів обробки інформації можуть використовуватись як лінійні, так і нелінійні властивості ЗІГ.

Moiseienko V. A., Post grad. Stud.,
Melkov G. A., Doct. Sci.**The investigation of magnetostatic wave
spectra in thin YIG films using nonlinear
interaction of spin waves.**

This paper presents a new technique for studying the spectra of backward volume magnetostatic waves (BVMSW) and surface magnetostatic waves (SMSW) in thin films of yttrium-iron garnet (YIG). This technique is based on the phenomena of a nonlinear interaction of counter propagating magnetization waves in the magnetic media with dispersion. Theoretical and experimental studies were carried out for the signals of a rectangular shape in six centimeter wavelength range. The anomalous transmission of signals above and below the frequency of ferromagnetic resonance (FMR) for BVMSW and SMSW distinctive feature, due to the limited size of the film and the crystallographic anisotropy, was found. It was established that the proposed method allows detection of FMR field with precision up to 1 Oe. Resonance properties of the film have been taken into account for theoretical consideration. All theoretical considerations are consistent with experiment.

Key Words: magnetostatic wave, yttrium-iron
garnet, parametric interaction.

На сьогоднішній день відомі дослідження нелінійної взаємодії співнаправлених хвиль намагніченості в феритових плівках [1, 2], а також направлених назустріч одна одній хвиль. Використання хвиль направлених назустріч одна одній є більш цікавим з практичної точки зору, оскільки отриманий в результаті взаємодії сигнал можна представити, як результат операції згортки (конволюції) двох взаємодіючих сигналів, що використовується в кореляційних НВЧ приймачах [3], конвольверах [4] та інтерферометрах [5].

Нагадаємо, що операція конволюції полягає в нелінійному перемноженні двох сигналів $S_1(t)$ та $S_2(t)$ з послідовним інтегруванням по всьому

часу взаємодії t , так в [6] показано, що вихідний сигнал в даному випадку представляє собою двократно стиснену в часі конволюцію вхідних сигналів:

$$C(2\tau) = A \int S_1(t) S_2(-t + 2\tau) dt, \quad (1)$$

де A – постійний коефіцієнт, який залежить від нелінійної схеми, а τ – час затримки одного з сигналів. Масштабний коефіцієнт 2 в вище наведеної формулі (1) з'являється в результаті розповсюдження сигнальних хвиль назустріч друг другу, через що відносна швидкість сигналів збільшується в 2 рази [6].

В даній роботі запропоновано використовувати сигнал конволюції двох сигналів МСХ, що розповсюджуються назустріч один одному в планарному хвилеводі з плівки ЗІГ, для визначення параметрів плівок ЗІГ. Якщо досліджувати поведінку сигналу конволюції двох зустрічних сигналів МСХ при зміні зовнішнього магнітного поля, то таким чином можна сканувати спектр хвиль, що можуть збуджуватися в плівці при заданій геометрії поля. При цьому, якщо врахувати, що для сигналу конволюції співвідношення сигнал-шум буде більше приблизно на 25 дБ, ніж для сигналів, що розповсюджуються в плівці, то маємо значно більшу чутливість при дослідженні параметрів плівки. Оскільки у взаємодії приймають участь в основному магніони з однаковою частотою, то навіть невелика кількість магніонів може давати значний сигнал конволюції. Ця властивість може допомогти при дослідженні тонкої структури спектру спінових хвиль.

Теоретична модель

Для теоретичного опису процесів розповсюдження і нелінійної взаємодії сигналів МСХ в плівці ЗІГ використовувалась запропонована раніше модель магнітного середовища з дисперсією [7]. Для цього намагніченість в плівці представлялась у вигляді розкладу в ряд за хвильовими числами k :

$$\vec{m}(\vec{r}, t) = \sum_k C_k(t) \vec{m}_k(x) e^{-ikz}, \quad \text{де} \quad \vec{m}_k(x) -$$

просторовий профіль моди з хвильовим числом k . Вісь z напрямлена вздовж напрямку розповсюдження хвилі, а x – перпендикулярно до неї в площині плівки.

Для аналізу можна користуватися наближеними рівняннями, як в [8], котрі описують спектр спінових хвиль тангенційно намагніченої плівки:

$$\omega_k^2 = (\Omega_{\text{ex}} + \omega_M + \omega_M P_{\text{ex}})(\Omega_{\text{ex}} + \omega_M P_{\text{ex}} \sin^2 \varphi), \quad \text{де}$$

позначено $\Omega_{\text{ex}} = \omega_H + \omega_M \alpha k^2$; $\omega_H = |g| \mu_0 H$; $\omega_M = |g| \mu_0 M_0$; $k^2 = x^2 + k_z^2$, а α – константа обмінної взаємодії.

Розв'язуючи рівняння Ландау-Ліфшица з урахуванням крайових умов знаходимо коефіцієнти P_{ex} для випадку закріплених поверхневих

спінів

$$P_{\text{ex}} = \frac{k_z^2}{k^2} \left[\frac{x x'}{x^2 - x'^2} \cdot \frac{2}{k_z L} - \frac{x x'}{2k^2} F_n \right] \cdot \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \right]$$

та для вільних поверхневих спінів

$$P_{\text{ex}} = \frac{k_z^2}{k^2} \left[\frac{x x'}{x^2 - x'^2} \cdot \frac{2}{k_z L} - \frac{k_z^2}{2k^2} F_n \right] \cdot \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \right] x \dots$$

$$\dots \times [(1 + \delta_{\text{ex}})(1 + \delta_{\text{ex}})]^{-1/2}$$

де коефіцієнт F_n рівний:

$$F_n = \left(2 / k_z L \right) \left[1 - (-1)^n e^{-k_z L} \right].$$

Значення кута φ визначає тип хвилі, що збуджуються. Так, при $\varphi = 0$, збуджуються ЗОМСХ, а при $\varphi = \pm 90^\circ$ – ПМСХ.

Амплітуди k – х нарізальних складових сигналу визначались, як:

$$C_{\text{ex}}(t, z) = C_{\text{ex}1} I_{\text{ex}} I_{\text{ex}} e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} e^{i(\omega_2 t - k_2 z)}, \quad (2)$$

$$\text{Тут} \quad I_{\text{ex}} = [2 \sin(\omega_1 - \omega_2) \tau_s / 2] / (\omega_1 - \omega_2) \tau_s -$$

спектр вхідного сигналу, $F_s = e^{-(t/\tau_s)^2}$ – фактор збудження МСХ мікросмужковою антеною, а також I_{ex} – амплітудно-частотна характеристика експериментальної секції з плівкою ЗІГ. Необхідність у використанні останньої залежності виникла в дослідженнях з використанням ширококутових сигналів. Для теоретичного опису даної залежності I_{ex} з використанням геометрії ЗОМСХ та ПМСХ в [10, 11] були запропоновані емпіричні вирази:

$$\begin{cases} I_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\Delta\omega} \exp\left(\frac{\omega_s - \omega_0}{2\pi\Delta\omega}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\omega_s - \omega_0}{2\pi\Delta\omega}\right)\right), \\ I_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\Delta\omega} \exp\left(\frac{-\omega_s + \omega_0}{2\pi\Delta\omega}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{-\omega_s + \omega_0}{2\pi\Delta\omega}\right)\right) \end{cases}, \quad (3)$$

де ω_0 – центральна частота смугового фільтра на базі плівки ЗІГ, яка визначається зовнішнім магнітним полем H_0 , а $\Delta\omega$ – смуга пропускання експериментальної секції з плівкою ЗІГ, величина якої залежить від товщини плівки, а значить й від групової швидкості хвиль в магнітному середовищі

Таким чином, записавши компоненти сигналів, що рухаються назустріч один одному в феритовій плівці у вигляді (2), а також

враховуючи (3) можна розрахувати часовий профіль сигналу конволюції згідно з (1) просто виконавши операцію інтегрування по довжині області взаємодії для кожної пари парціальних складових коливань намагніченості. Амплітуду коливань резонатора можна розрахувати, якщо розв'язати диференціальне рівняння для дисипативного осцилятора з зовнішньою силою у вигляді кореляційної функції від вхідних сигналів:

$$\dot{a}_r - i\omega_r a_r + \Gamma_r a_r = \int_{-\infty}^{\infty} C_{1r}(t, z) C_{1r}(t + \tau, z) dz, \quad (4)$$

де ω_r , Γ_r – власна частота та частота релаксації діелектричного резонатора.

Виходячи з усього вище згаданого й розв'язуючи рівняння (4), отримаємо вираз для амплітуди електромагнітних коливань у діелектричному резонаторі:

$$a_r = \frac{1}{\Gamma_r} e^{-2\Gamma_r t} \sum_i I_{1i} I_{1r} F_{1i}^2 I_{1r}^2 e^{i\omega_r t} e^{i\omega_r (2t+\tau)}. \quad (5)$$

Експеримент та обговорення результатів

Експериментальне дослідження нелінійної взаємодії зустрічних сигналів прямокутної форми та однакової частоти проводились на розробленому раніше мікрохвильовому конвольвері на основі плівки ЗІГ розміщеної всередині ВДР [4].

Конвольвер являв собою пластину з полікору, на якій фотолітографічним методом були сформовані вхідна і вихідна мікросмужкові антени шириною 25 мкм з підвідними лініями. Відстань між антенами складала 6 мм. Пластина з полікору кріпилась на металічній основі. Досліджуваній зразок плівки монтувався у ВДР й розміщувався по верх антен. Конвольвер розміщувався в зазор постійного магніту, який створював просторово-однорідне магнітне поле. Зміна зовнішнього магнітного поля забезпечувалась за допомогою механічного приводу. Вимірювання проводились при кімнатній температурі. Плівку було вирошено на підкладинці з галій-гадолінієвого гранату методом рідкофазної епітаксії. Величина постійної намагніченості насичення плівки складала 1750 Гс. Плівка була намагнічена до насичення постійним магнітним полем, так що мала місце геометрія або ЗОМСХ або ПМСХ. Сигнал кореляції на сумарній частоті вхідних сигналів знімався з ВДР, при цьому обвідна спінохвильових сигналів ресетрувалась за допомогою цифрового осцилографа Tektronix TDS 3032B.

На Рис. 1 зображено результати чисельного моделювання нелінійної взаємодії сигналів ЗОМСХ в тонких плівках ЗІГ. З даного малюнка видно характерну залежність сигналу конволюції на виході системи від зовнішнього магнітного поля прикладеного до зразка плівки ЗІГ.

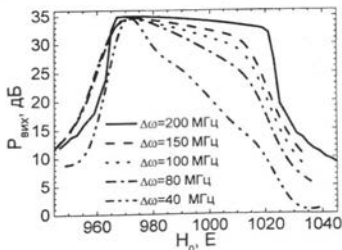


Рис. 1 Теоретичні залежності потужності сигналу конволюції двох сигналів прямокутної форми для різних значень ширини смуги пропускання експериментальної секції.

Також з вище вказаного малюнка видно, що зі зменшенням ширини смуги пропускання експериментальної секції з плівкою, зменшується і відгук системи на сумарній частоті вхідних

сигналів. Це є важливим фактором в дослідженнях, де використовуються плівки різної товщини та різне узгодження мікросмужкових антен-перетворювачів, тому важливий сам вибір

необхідної товщини плівки для тих чи інших досліджень.

З Рис.1 можна побачити, що при значеннях ширини смуги пропускання експериментальної секції порядку 200 МГц та вище ця залежність набуває прямокутний профіль. Це є прямим наслідком того, що АЧХ експериментальної секції з плівкою при збільшенні товщини плівки набуває обмежений по частоті прямокутний профіль.

В моделюванні використовувались розраховані теоретично, за формулами наведеними в роботі [8], значення ширини смуги пропускання для геометрії ЗОМСХ та ПМСХ рівні 80 МГц і 170 МГц відповідно. Дані числові значення є наслідком того, що мікросмужкова антена-перетворювач шириною 25 мкм, що використовується в дослідженнях, може збудити максимальний хвильовий вектор $k_0 = 1256 \text{ см}^{-1}$, якому й відповідає максимальне значення смуги пропускання магнітної структури заданої товщини.

На Рис.2 (а) представлені теоретичні та експериментальні залежності сигналу конволюції імпульсів прямокутної форми від зовнішнього магнітного поля прикладеного до феритового зразка. Ідея експерименту полягає в тому щоб в нелінійному середовищі скласти два сигнали від двох генераторів НВЧ та дослідити поведінку отриманого сигналу на сумарній частоті від зовнішніх параметрів. Так від генератора Г4-81 (максимальна вихідна потужність 20 мВт) та Г0-10 (максимальна вихідна потужність 2 Вт) на вхідні антени експериментальної секції подавались сигнали прямокутної форми.

Потужність сигналів регулювалась за допомогою прецизійних поляризаційних хвилеводних атенуаторів типу ДЗ-31. Частота обох вхідних сигналів була рівна $\omega_{+} = \omega_{-} = 2\pi \cdot 4725 \text{ МГц}$, а їх тривалість $\tau_{+} = 100 \text{ нс}$, при середній за період вхідній потужності P_{+} порядку $\sim 7 \text{ дБм}$.

Знаки $\pm$ при індексах частоти визначають напрямок поширення сигнальної хвилі. Сигнал конволюції знімався на сумарній частоті вхідних сигналів $\omega_{\text{сум}} = 2\pi \cdot 9450 \text{ МГц}$ за допомогою ВДР та подавався на каскад підсилювачів й квадратичний детектор. Об'єднані досліджуваних сигналів спостерігались та фіксувались за допомогою цифрового осцилографа, а їх потужність вимірювалась компенсаційним методом з точністю до 0,1 дБ прецизійним атенуатором. Магнітне поле постійного магніту неперервно змінювалось в межах від 850 Е до

1050 Е за допомогою механічного привода. Таким чином, плавно змінюючи зовнішнє магнітне поле, ми керуємо положенням дисперсійної залежності для заданого типу хвилі, відносно частоти вхідного сигналу. В результаті взаємодії зустрічних сигналів, виникав сигнал на сумарній частоті, для якого, як описано в роботі [3], співвідношення сигнал-шум збільшувалося більш ніж на 20 дБ. При плавній перебудові магнітним полем можна зі значно більшою чутливістю, ніж за допомогою пасивної лінії затримки [8], досліджувати спектр магнітів.

На Рис.2 (б) детально зображено область полів нижче поля $H_{\text{ФМР}}$, при якому в феритовому зразку виникає ФМР. З малюнка також видно, що на залежностях вихідного сигналу конволюції від зовнішнього магнітного поля присутня тонка структура в області поля $H_{\text{ФМР}}$. Це можна пояснити тим, що теоретичний розрахунок спектрів МСХ проводиться для феритового зразка обмеженого тільки по осі z , а в експерименті використовувались зразки зі строго обмеженими розмірами у всіх трьох площинах.

Дане наближення може призвести до того, що на межі спектрів різних типів хвиль може відбуватись взаємне проникнення хвиль в області спектру, де вони як би не повинні існувати або можливе збудження вищих мод намагніченості зі значно меншим порогом. Також в зміні структури спектру може брати участь й кристалграфічна анізотропія зразка.

Враховуючи специфіку спектрів ЗОМСХ та ПМСХ, а саме їх сусіднє положення при однаковому тангенціальному намагніченні, можна з високою точністю визначити поле $H_{\text{ФМР}}$. Останнє твердження є можливим оскільки для однакових частот сигналів ЗОМСХ та ПМСХ криві вихідного сигналу конволюції від зовнішнього магнітного поля повинні перетинатись саме при полі ФМР. Так з похибкою в 1 Е було визначено значення цього поля й складало воно 963 Е. Визначене іншим методом, запропонованим в [9], це значення складало 967 Е, похибка при цьому залишалась незмінною. Виходячи з усього вищесказаного, відмічу, що дану методику можна використовувати для визначення характерних параметрів плівок ЗІГ. Проте, якщо вважати, що ефективність збудження ЗОМСХ та ПМСХ різні, то можлива точка перетину кривих вихідного сигналу конволюції від зовнішнього магнітного поля може мати певну розбіжність з дійсною величиною поля $H_{\text{ФМР}}$.

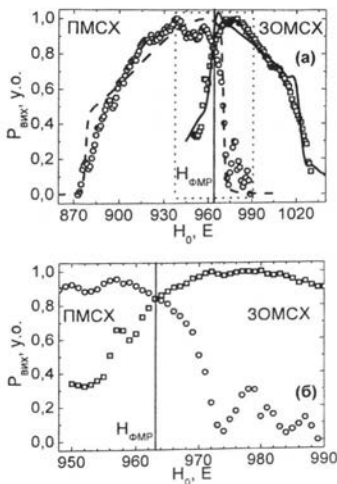


Рис. 2 Теоретичні й експериментальні залежності сигналу конволюції двох прямокутних імпульсів від зовнішнього магнітного поля для геометрії ZOMCX та PMCX.

Висновки

В роботі теоретично та експериментально досліджено нелінійну взаємодію зустрічних хвиль намагніченості в магнітних середовищах з дисперсією. Було встановлено, що дана методика при скануванні магнітним полем дозволяє досліджувати спектри магніонів. Чутливість даного методу дозволяє досліджувати взаємодію магніонів в області частот вище верхньої межі спектру ZOMCX та нижче нижньої межі спектру PMCX. Варто відмітити, що даний метод можна використати для точного визначення зовнішнього магнітного поля, при якому в феритовому зразку наступає ФМР, з точністю до 1 Е. Недолік даної методики полягає в тому, що ефективність збудження ZOMCX та PMCX різна

і тому потужність сигналу конволюції залежить від типу хвиль, в цьому полягає перевага лінійного методу визначення $H_{\text{ФМР}}$ [9]. Проте, якщо використовувати сигнали тривалістю τ , яких більша за час проходження МСХ по півці T_d , то доцільніше використовувати метод заснований на нелінійній взаємодії сигналів, це дозволяє запобігти перекриттю електромагнітного пролазу й сигналу пройшовшого крізь півку.

Експериментальні результати знаходяться у добрій відповідності до теоретичного моделювання. Таким чином, запропонована методика може бути використана для дослідження спектрів магніонів в широкому діапазоні частот.

Список використаних джерел

1. *Camley R. E.* Nonlinear Mixing of Bulk and Surface Magnetostatic Spin Waves / R. E. Camley, A. A. Maradudin // *Physical Review Letters*, –1982. –v.49, No.2, – P. 168-172.
2. *Pfeiffer H.* Nonlinear Mixing of Magnetostatic Volume Modes / H. Pfeiffer, W. Haubenreisser // *Phys. Stat. Sol.*, –1974. –(b)62, – K87. (4pp).
3. *Vasyuchka V. I.* Correlation receiver of below-noise pulsed signals based on parametric interactions of spin waves in magnetic films / Vasyuchka V. I., Melkov G. A., Moiseienko V. A., Prokopenko A. V., Slavin A. N., // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2009. – 321. – P. 3498 – 3501.
4. *Kobljanskyj Yu. V.* Effective microwave ferrite convolver using a dielectric resonator / Kobljanskyj Yu. V., Melkov G. A., Serga A. A., Tiberkevich V. S., Slavin A. N. // *Applied Physics Letters*. – 2002. –vol. 81, – № 9, – P. 1645-1647.
5. *Fetisov Y. K.* Microwave Bistability in a Magnetostatic Wave Interferometer with External Feedback / Y. K. Fetisov, C. E. Patton // *IEEE Transactions on Magnetics*, –1999. – 35, No.2. – P. 1024-1036.
6. *Luukkala M.* Acoustic convolution and correlation and the associated nonlinearity parameters in LiNbO₃ / Luukkala M., Surrakka J. // *Journal of Applied Physics*. – 1972. – 43. – P. 2510-2518.
7. *Васючка В.* Вплив ефективних параметрів плівок залізо-ітрієвого гранату на характеристики пасивної лінії затримки / В. Васючка, В. Лазовський, В. Мойсєєнко, А. Чумак // *Вісник Київського університету. Сер.: Радіофізика та електроніка* – 2006, вип.9, – С. 15 – 18.
8. *B. A. Kalinikos* Excitation of propagating spin waves in ferromagnetic films / B. A. Kalinikos // *IEEE Proc.*, – 1980. –vol. 127, №.1, – P. 4-10.
9. *Чумак А.* Дослідження профілів вихідних імпульсів пасивної і активної ліній затримки сигналів на зворотніх об'ємних магнітостатичних хвилях / А. Чумак, В. Васючка, Ю. Кобляньський // *Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки* – 2004, вип.1, С. 353 – 360.
10. *Borysenko O. V.* Investigation of magnon spectrum in yttrium-iron garnet films using nonlinear interaction of backward volume magnetostatic wave signals / Borysenko O. V., Kobeliatskyi V. Yu., Moiseienko V. A., Melkov G. A. // *X International Young Scientists' Conference on Applied Physics*, June, 16-19, 2010, Kyiv, Ukraine – 2010. – P. 42-43.
11. *Kobeliatskyi V. Yu.* Investigation of magnon spectrum in yttrium-iron garnet films using nonlinear interaction of surface magnetostatic wave signals / Kobeliatskyi V. Yu., Moiseienko V. A. // *VI International Conference "Electronics and Applied Physics"*, October, 20-23, 2010, Kyiv, Ukraine – 2010. – P. 60-61.

Надійшла до редакції 10.01.2012

УДК 620.18:546.28

Находкін М.Г., акад. НАНУ, доктор ф.-м. наук,
Куліш М.П., чл.-кор. НАНУ, доктор ф.-м. наук,
Литвин П.М. канд. ф.-м. наук, Родіонова Т.В.,
канд. ф.-м. наук, Сутягіна А.С., студ.

Вплив товщини на структурні характеристики нанокремнієвих плівок

Методами просвічуючої електронної
мікроскопії та атомної силової мікроскопії
досліджено вплив товщини наелегованих
нанокремнієвих плівок, що отримані методом
хімічного осадження в реакторі зниженого
тиску, на характеристики їх поверхневого
мікрорельєфу. Встановлена кореляція між
зростанням розмірів неоднорідностей
мікрорельєфу поверхні плівок та зміною типу
структури плівок від рівноосової до
волокнистої.

Ключові слова: нанокристалічні плівки
кремнію, мікрорельєф поверхні.

*E-mail: rodtyv@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Широке застосування кремнію в сонячній
енергетиці викликає необхідність детального
дослідження його структури, оскільки вона
визначає електрофізичні характеристики та
надійність кремнієвих сонячних елементів [1-4].
На сьогодні на долю кремнієвих сонячних
батареї припадає 90% ринка
фотогальванічних елементів. Кремнієві батареї
бувають декількох типів: монокристалічні,
полікристалічні та аморфні. Перші мають
найвищий коефіцієнт корисної дії (ккд). Для
комерційних зразків він звичайно становить 15%,
а в лабораторних умовах – до 25%. Але такі
батареї мають велику вартість, оскільки в них
використовується надійний напівпровідник.
Полікристалічні батареї дешевші, але внаслідок
дефектності кристалічної структури їх ккд
помітно нижчий. Сонячні батареї на основі
аморфного кремнію дешевше, ніж
кремнієкристалічні, оскільки використовуються
значно менше матеріалу. Проте їх ккд малий,
всього 8% [3]. У зв'язку з цим актуальними є
дослідження, що спрямовані на підвищення

Nakhodkin N.G., acad. of NAS of Ukraine, Dr. Sci.,
Kulish N.P., Corresp. Member of NAS of Ukraine,
Dr.Sci., Lytvyn P.M., Ph.D., Rodionova T.V.,
Ph.D., Sutygina A., stud.

Effect of thickness on structural characteristics of nanosilicon films

The surface roughness depending on thickness
of nanosilicon films, produced by low-pressure
chemical vapor deposition, has been investigated as
by transmission electron microscope and atomic
force microscope. It has been established the
correlation between increasing of surface
roughness and changing of film structure from
equiaxial to fibrous.

Key Words: polysilicon films, surface
roughness.

ефективності та зниження вартості сонячних
елементів.

Зменшити вартість сонячних батарей
можливо, якщо застосовувати більш дешеві
матеріали та більш дешеві процеси виробництва.
А щоб підвищити ефективність батарей,
необхідно покращити їх здатність поглинати та
перетворювати в електрику як можна більше
світла, що падає. В цьому плані перспективним є
використання наноматеріалів, зокрема,
нанокристалічного кремнію. Використовуючи
наночастинки, можна збільшити відношення
площі поверхні батареї до об'єму, в результаті
чого ккд зростає [3]. Якщо, наприклад, на
поверхню сонячної батареї нанести
нанокристалічну плівку кремнію товщиною до 10
нанометрів, то ккд батареї зростає на 5%.

З точки зору підвищення ефективності
полікремнієвих матеріалів актуальними є
дослідження, що спрямовані на вдосконалення їх
структури, зокрема, для зменшення втрат
сонячної енергії на відбиття та підвищення
коефіцієнта фотоактивного поглинання
сонячного випромінювання об'ємом
напівпровідника, значна увага приділяється

формування рельєфу поверхні сонячних елементів.

В даній роботі методами просвічуочної електронної мікроскопії та атомної силової мікроскопії досліджено вплив товщини нелегованих нанокремнієвих плівок на характеристики їх поверхневого мікрорельєфу.

Методика

Плівки полікристалічного кремнію одержували методом хімічного осадження з газової фази в реакторі зниженого тиску. Як підкладки використовували пластини монокристалічного кремнію із шаром окисла SiO_2 товщиною $\sim 0,1$ мкм. Температура осадження 630°C . Товщина кремнієвих плівок складала 3-100 нм, залежно від часу осадження.

Для дослідження мікрорельєфу поверхні плівок використовували метод атомної силової мікроскопії (АСМ). Зображення поверхні плівок одержували в скануючому атомному силовому мікроскопі NanoScope IIIa у режимі періодичного контакту (Tapping Mode) з використанням кремнієвих зондів з радіусом вістря 10 нм.

Для дослідження структури методом просвічуочної електронної мікроскопії (ПЕМ), плівки стоншували у площині підкладки (шляхом хімічного травлення в суміші $\text{HF}:\text{HNO}_3$ (1:5)).

Результати та обговорення

Для більшості практичних застосувань полікремнієві плівки легують, і тому саме леговані плівки частіше стають об'єктом досліджень. Між тим для розуміння процесів, що мають місце в таких плівках під впливом різних технологічних обробок, в тому числі легування, відпалювання, окислення, необхідно проведення досліджень структурних характеристик нелегованих плівок. Майже всі дослідження структури нелегованих плівок, які на сьогодні існують, стосуються плівок товщиною 500 – 2000 нм, оскільки саме такі товщини плівок застосовуються в елементах мікросхем. Що стосується нанокристалічних плівок кремнію, товщиною до 100 нм, то їх структура є майже не дослідженою. Тільки в роботі [5] проведено аналіз впливу відпалювання на мікроструктуру нелегованих полікремнієвих плівок товщиною 50 нм. Було встановлено, що, залежно від температури відпалювання, ріст зерен в плівках здійснюється як за рахунок бездифузійних процесів (ковзання зернограничних дислокацій),

так і шляхом дифузійних процесів (переповзання дислокацій по границям зерен).

В даній роботі досліджено як мікроструктуру так і поверхневий мікрорельєф нелегованих нанокремнієвих плівок з товщиною ми 3-100 нм.

Як видно з наведеного на рис. 1 типового електронно-мікроскопічного зображення, нанокремнієві плівки мають однорідну дрібнозернисту структуру з середнім розміром зерен 20 нм. Зі зростанням товщини характер структури плівок суттєво не змінюється. Зерна мають рівноосову форму. Суттєвого зростання розмірів зерен в діапазоні товщини плівок 10-850 нм не спостерігається, що є свідченням більш високої швидкості вертикального росту зерен в порівнянні з горизонтальним.

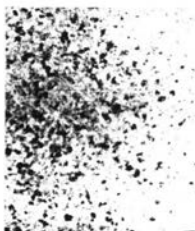


Рис. 1 ПЕМ-зображення мікроструктури нелегваної нанокремнієвої плівки товщиною 50 нм.

На рис. 2 та рис. 3 наведено, відповідно, АСМ-зображення поверхні нанокремнієвих плівок різної товщини та графік залежності величини неоднорідностей поверхневого мікрорельєфу від товщини плівок.

Величина поверхневих неоднорідностей S_a визначалась по формулі:

$$S_a = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} |z(x_k, y_l) - \mu|,$$

де μ - середня висота неоднорідностей:

$$\mu = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} z(x_k, y_l).$$

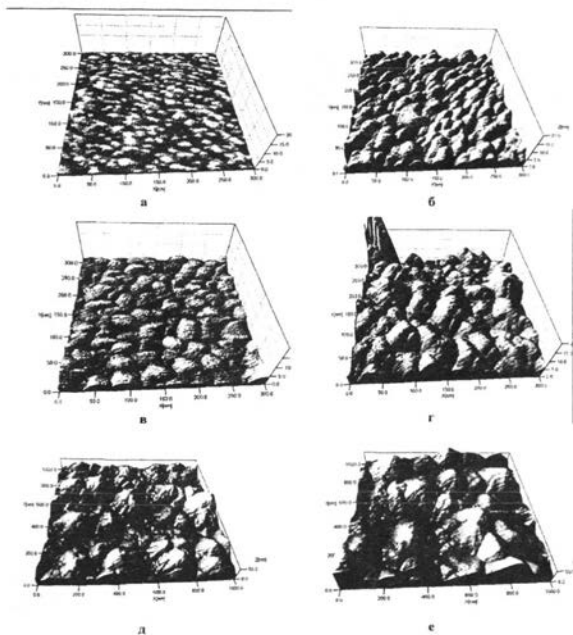


Рис.2 АСМ-зображення поверхні нанокремнієвих плівок різних товщин: а – 3 нм; б – 10 нм; в – 50 нм; г – 70 нм; д – 75 нм; е – 100 нм.

З АСМ-зображень та рис. 3 видно, що, зі збільшенням товщини плівок від 3 до 70 нм суттєвого зростання розмірів поверхневих неоднорідностей не спостерігається, що обумовлено відсутністю значних змін в розмірах зерен в плівках. При товщинах > 70 нм має місце значний ріст розмірів поверхневих неоднорідностей. Крім того, змінюється морфологія поверхні. Зокрема, зерна набувають огранку. Поверхня зерен має сходинковий характер, що відображає пластинчастий характер внутрішньої структури. Такі зміни характеристик мікрорельєфу поверхні корелюють зі змінами типу структури плівок зокрема, з переходом від рівноосової структури при товщинах ≤ 70 нм до волокнистої структури при більших товщинах [6]. Волокниста структура характеризується чітко вираженою текстурою [110] та великою кількістю двійників [6]. Саме наявність двійникових прошарків обумовлює наявність сходинок на поверхні зерен (рис. 2, г-е). Зі збільшенням товщини поверхня окремих зерен набуває форми тригранної піраміди (рис. 2, е). Така форма є типовою для росту кристалів у напрямку [110], тому, що кристаліт, який росте, завжди огранюється поверхнею з мінімальною енергією, а у випадку матеріалів зі структурою алмаза це площини (111) та (110).

Висновки

1. З ростом товщини нелегованих нанокристалічних плівок кремнію від 3 нм до 100 нм має місце зростання величини поверхневих неоднорідностей.

Список використаних джерел

1. Mukhopadhyay S. Nanocrystalline silicon: A material for thin film solar cells with better stability / S. Mukhopadhyay, A. Chowdhury, S. Ray // *Thin Solid Films*. – 2008. – 516, Issue 20. – P. 6824-6828.
2. Паращук Д. Ю. Современные фотоэлектрические и фотохимические методы преобразования солнечной энергии / Д.Ю. Паращук, А. И. Кокорин // *Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева)*. – 2008. – ЛII, № 6 – С. 107-117.
3. Сычев В.В. Нанотехнологии для энергосбережения: прогноз наиболее значимых областей исследования / В.В. Сычев // *Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева)*. – 2008. – ЛII, № 6 – С. 118-128.

2. Різке зростання розмірів неоднорідностей мікрорельєфу поверхні плівок при товщинах ≥ 70 нм корелює зі зміною типу структури плівок від рівно осьової до волокнистої.

3. Змінюючи товщину нанокремнієвих плівок можна формувати мікрорельєф їх поверхні таким чином, щоб розміри поверхневих неоднорідностей були оптимальні з точки зору застосування в сонячних елементах.

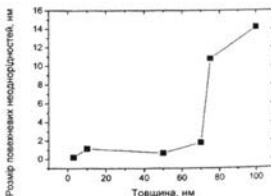


Рис. 3 Залежність величини неоднорідностей поверхневого мікрорельєфу від товщини нанокремнієвих плівок

4. Rath, J.K. Low temperature polycrystalline silicon: a review on deposition, physical properties and solar cell applications / J.K. Rath // *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*. – 2003. – 76, № 4. – P. 431-487.

5. Находкін М.Г. Механізми росту зерен у нелегованих тонких плівках полікристалічного кремнію / М.Г. Находкін, Т.В. Родіонова // *Укр. фіз. журн.* – 1997. – 42, № 2. – С. 182-184.

6. Nakhodkin, N.G. Formation of different types of polysilicon film structures and their grain growth under annealing / N.G. Nakhodkin, T.V. Rodionova // *Phys. Status Solidi A*. – 1991. – 123, № 2. – P. 431-439.

Надійшла до редакції 05.05.2012 р.

УДК 537.311.33, 621.315.592

С.П. Павлюк*, к.ф.-м.н., Р.Ю. Кузьмич, студ.

Зміна параметрів та характеристик діодного кристала під дією імпульсу ударного струму

Проведені дослідження змін параметрів та характеристик діодного кристала під дією ударного імпульсу струму. Показано, що при проходженні імпульсу ударного струму кристал розігрівається до температури, значення якої перевищує температуру власної провідності. Розігрів до таких величин призводить до неворотних змін параметрів кристала та його характеристик. При збільшенні амплітуди ударного струму зменшується кількість півхвиль, що призводять до критичного розігріву до однієї.

Ключові слова: імпульс, діодний кристал, ударний струм.

*E-mail: pps@univ.kiev.ua

Статтю представив Скришевський В.А.

Вступ

Робота силових напівпровідникових діодів відбувається в різних зовнішніх умовах і режимах експлуатації. Для конкретних умов необхідно підбирати діоди з певними параметрами, які визначені Держстандартом [1]. Відповідно до нього нормуються такі параметри діодів, які визначають границі експлуатаційних режимів, при яких діод може працювати із заданою ймовірністю впродовж установленого терміну служби. Як правило, відбір діодів відбувається відповідно до максимально допустимих параметрів, до яких відносяться:

$I_{\text{пр}}$ – постійний прямий струм діода.

$I_{\text{пр.і}}$ – імпульсний прямий струм діода – найбільше миттєве значення прямого струму діода, за виключенням повторюваних та неповторюваних перехідних струмів.

$I_{\text{пр.ср}}$ – середній прямий струм діода – середнє за період значення прямого струму діода.

$I_{\text{пр.д}}$ – струм перевантаження діода – значення прямого струму діода, тривале протікання якого викликало б перевищення максимальної температури переходу, але який так обмежений у часі, що ця температура не перевищується. За час експлуатації діода число імпульсів струму перевантаження не обмежується.

S. Pavlyuk*, Ph.D., R. Kuzmich, stud.

Changing parameters and characteristics of the crystal diode under current shock pulse

Research into changes of diode crystal's parameters and characteristics under the influence of surge current pulse was worked out. The crystal was heated up to temperature that exceeded the own conductance's temperature during the passage of surge current pulse was achieved. The heating to these values led to irreversible changes of crystal's parameters and characteristics. When amplitude of surge current increased the half-waves' quantity were reduced and it led to the critical heating up.

Key Words: pulse, diode crystal, surge current.

$I_{\text{пр.і}}$ – ударний прямий струм діода – струм, при протіканні якого перевищується максимально допустима ефективна температура переходу, але який за час служби діода виникає рідко з обмеженим числом повторень і викликається незвичайними умовами роботи пристрою. Цей струм може перевищувати діодний прямий струм діода $I_{\text{пр.д}}$ у десятки разів [2].

$T_{\text{д}}$ – температура в заданій точці корпусу.

$T_{\text{р-п}}$ – температура р-п переходу.

Такі незвичні умови роботи випрямляючого діода реалізуються при роботі потужних блоків живлення, коли блок працює на смісє навантаження або в режимі короткого замикання. У цьому випадку через випрямляючі діоди проходять потужні імпульси струму, які призводять до деградації параметрів діодів, погіршенню надійності їхньої роботи або до виходу їх із ладу. Тривалість таких імпульсів визначається швидкістю спрацювання системи захисту від перевантаження.

Інший приклад незвичних умов роботи діода – виготовлення діодів методом зварювання-паяння [3], коли до напівпровідникового кристала діода притискаються полуджені мідні виводи й у прямому напрямку пропускають струм, що розігріває кристал до температури, достатньої для плавлення припою на виводах. Для підвищення продуктивності циклу

виготовлення діодів скорочують час, і підвищують струм розігріву. При цьому відсоток виходу придатних приладів зменшується, і надійність їхньої роботи погіршується. Тому підвищення струму та скорочення тривалості імпульсу необхідно обмежувати.

У наведених випадках через діод проходять поодинокі імпульси ударного струму. При цьому необхідно відмітити, що в цих випадках проходження I_{np} призводить до суттєвого та неоднорідного розігріву діодного кристала.

У роботі [4] були досліджені залежності температури контактних площадок кристала від амплітуди та тривалості імпульсу струму та розраховані температури розігріву кристала. Величина розігріву області p-n переходу самого діодного кристала під час проходження імпульсу експериментально не була визначена.

Тому метою цієї роботи було експериментальне дослідження динаміки зміни температури та характеристик кристала промислового діода КД208 під час проходження імпульсів ударного струму.

Методика дослідження

При проведенні дослідження через кристал напівпровідникового діода пропускали серію декількох напівинусуїдальних імпульсів струму розігріву I_p із тривалістю 10 мс та частотою 100 Гц з регульованою амплітудою. Кількість імпульсів у серії можна було змінювати. Одночасно зі струмом розігріву I_p через кристал діода пропускали постійний прямий струм I_{np} величиною 10 мА. Спостерігали осцилограми падіння напруги на кристалі від цих двох струмів (рис.2). Для моментів часу, коли струм розігріву I_p був максимальний будувалися вольт-амперні характеристики (ВАХ) і розраховувався його опір R_p . У моменти, коли $I_p=0$, вимірювалось пряме падіння напруги U_{np} від струму I_{np} , а також розраховували залежності опору кристала діода R_{np} від температури й кількості імпульсів ударного струму. Залежність прямого падіння напруги U_{np} або його R_{np} на діоді від температури T при малому прямому струмі I_{np} , $U_{np}=f(T)$, тобто температурний коефіцієнт напруги [5] дозволить визначити температуру p-n переходу.

Для одержання залежності $U_{np}(R_{np})=f(T)$, від температури та часу розігріву використовували такий засіб. У спеціальному термостаті в інертній атмосфері азоту визначалися залежності $U_{np}(R_{np})$ (рис.1), від температури T . По експериментально знятим таким залежностям визначалися значення

температури в різні моменти часу процесу розігріву.

Кристали, зі знятими спеціально залежностями U_{np} від температури називаються градуйованими.

Необхідно відзначити, що визначення температури по залежності $U_{np}=f(T)$ має обмеження в точності виміру в ділянці температур більш 400°C. Нахил лінійної частини цієї залежності складає близько 2 мВ/градус. Розкид значень U_{np} градуйованих кристалів не перевищував 15% від довідкових даних.

Залежність U_{np} від температури практично лінійна в діапазоні досліджуваних до 300°C температури і застосовна для всіх розглянутих випадків.

Необхідно відзначити, що точне значення T можна визначити тільки на градуйованих кристалах. Кристал, розігрітий більш-менш неоднорідно в залежності від часу його нагрівання й тому будь-який засіб дозволяє визначити деяку середню температуру. На не градуйованих кристалах точно визначити температуру неможливо. Вона визначається з точністю співпадання розрахункової чи середньої залежності U_{np} від температури з фактичною. Максимальна помилка може досягати при цьому 27%.

Для визначення впливу на характеристики діодного кристала після проходження імпульсу струму проводилось вимірювання часу життя носіїв заряду τ за методом підлягнєкційної ЕРС [8,9].

Оскільки при дослідженнях використовувалися багато кристалів діодів, на графіках приведені найбільш типові усереднені результати.

Проведені дослідження показали, що характер зміни параметрів і характеристик кристалів різних типів діодів був однаковий. Тому далі наведені дані для кристалів діодів КД208.

Експериментальні зразки

Дослідження проводилися на кристалах випрямлюючих діодів середньої потужності, параметри яких зазначені в таблиці 1.

Як бачимо із приведених даних [2], I_{np} і тим більше $I_{np,до}$ може перевищувати середній прямий струм діода в десятки разів.

Зразки кристалів діодів КД208, що досліджувалися, виготовлені із кремнію марки КЕФ-40 із питомим опором бази $\rho \approx 40$ Ом·см, концентрацією донорів порядку 10^{14} см⁻³. З одного торця кристала дифузійно бора була

створена p^+ область із питомим опором $\rho = 0,1$ Ом-см, концентрацією акцепторів порядку 10^{17} см $^{-3}$ і товщиною 0,01 см, а з іншого торця дифузійно

фосфору отримана область n^+ контакту до p -області. Кристали мали циліндричну форму діаметром 0,18 см, товщиною 0,03 см.

№	тип	$I_{пр.ср. макс. A}$	$I_{пр. (пр. вимір), A}$	$t_p(t_{пр.}), мс$	$T_{к макс.} ^\circ C$
1	КД105	0.3	15	20	125
2	КД208	1.5	30	20	85
3	КД209	0.5	15	20	85
4	КД212	1.0	50	10	125
5	КД220	3.0	60	10	155
6	КД202	5.0	30	15	130
7	КД219	10.0	250	10	115

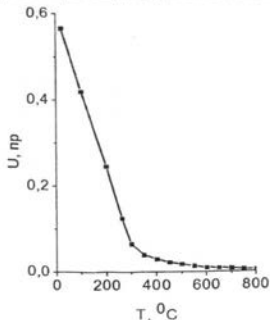


Рис. 1. Градувальна залежність $I_{пр.ср.}$ від T .

Експериментальні результати Осцилограми імпульсів.

На рис. 2 показані осцилограми імпульсів падіння напруги на діодному кристалі при проходженні крізь нього імпульсів струму з різними амплітудами. При невеликих струмах до приблизно 5 А зміна $U_{пр}$ незначна (рис. 2, а), а значить і розігрів невеликий.

При подальшому збільшенні амплітуди імпульсу струму до 10 А на осцилограмі амплітуда падіння напруги спочатку поступово збільшується, а потім плавно зменшується до стаціонарного значення (рис. 2, б). Зміна $U_{пр}$ при цьому значна.

Збільшення струму до 15 А призводить до різкого збільшення амплітуди перших кількох напівхвиль напруги, швидкого досягнення стаціонарного значення та великої зміни $U_{пр}$.

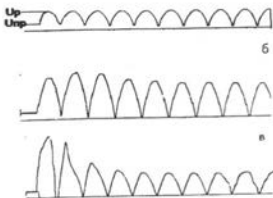


Рис. 2. Осцилограми падіння напруги $U_{пр}$ та U_p від струму розігріву $I_{пр}$. А: а-5, б-10, в-15.

Вольт-амперні характеристики.

Вольт-амперні характеристики показані на рис. 3. Цифри біля кривих позначають номер півхвилі для якої побудована ВАХ. Як видно із графіка, при струмах до 7.5 А всі характеристики співпадають. При подальшому збільшенні струму характеристики для різної кількості напівхвиль розгалужуються. Перша півхвиля після досягнення струмом величини 7.5 А починає різко збільшувати свою амплітуду, що говорить про збільшення опору кристала (ВАХ-1). Коли імпульс струму складається із серії двох напівхвиль, то ВАХ-2 після ділянки різкого збільшення напруги має ділянку стабільної напруги. Подальше збільшення кількості півхвиль у серії імпульсу струму призводить до трансформації вольт-амперних характеристик в S-подібні. Чим більше півхвиль у серії імпульсу струму, тим швидше відбувається перехід до S-подібних ВАХ. Динаміка змін спостерігається при збільшенні півхвиль у серії імпульсу від 1 до 5. Після 6 півхвиль вольт-амперні характеристики співпадають.

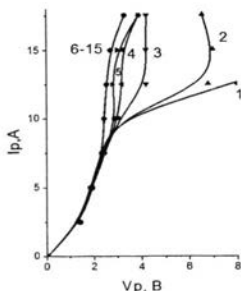
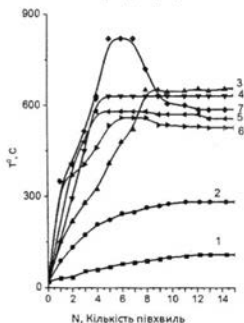


Рис. 3. Вольт-амперні характеристики в залежності від кількості піків

Залежність температури діодного кристала від амплітуди та тривалості імпульсу струму.

Рис. 4. Залежність температури діодного кристала від амплітуди та тривалості імпульсу.
 I_p , А: 1-2.5; 2-5; 3-7.5; 4-10; 5-12.5; 5-15; 6-17.5

Залежність температури діодного кристала від амплітуди та тривалості імпульсу струму показана на рис. 4. Як видно із графіка, чим більша кількість піків розігріває кристал, тим більша тривалість розігріву та більша температура кристала. При амплітуді струму до 5А та тривалості 150мс (15 піків) температура досягла 280°C. При струмі 7.5А температура досягла стаціонарного значення 720°C через 80мс (8 піків). Подальше збільшення амплітуди імпульсу струму до значень 10А, 12.5, 15А, прискорювало момент досягання стаціонарного значення температури відповідно до 50мс, 40мс, 35мс, та температур 630°C, 580°C, 550°C. При струмі 17.5А максимальна температура була 820°C і відбувся тепловий пробій кристала.

Залежність опору діода від амплітуди та тривалості імпульсу струму

Залежність опору діода R_{op} від амплітуди та тривалості імпульсу струму показана на рис. 5. Із графіка видно, що чим більша амплітуда струму, тим менший опір і він при струмах 2.5 – 3.0А практично не залежить від тривалості імпульсу струму. Однак при струмах 7.5 – 10А і більше ситуація кардинально змінюється.

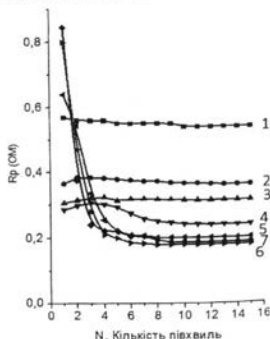


Рис. 5. Залежність опору діода від амплітуди та тривалості імпульсу струму.

I_p , А: 1-2.5; 2-5; 3-7.5; 4-10; 5-12.5; 5-15; 6-17.5

Починаючи з першої півхвилі опір R_p спочатку плавно збільшується, а потім зменшується до стаціонарного значення. При подальшому збільшенні струму (12.5 – 17.5 А) опір R_p спочатку різко збільшується, а потім зменшується за час 6 півхвиль (60 мс) до свого стаціонарного значення. При струмі 17.5 А діодний кристал вийшов із ладу. Його опір у процесі розігріву збільшився між 4 та 8 півхвилями й потім стабілізувався з більшим значенням.

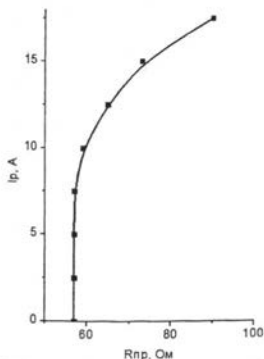


Рис. 6. Залежність терморівноважного опору R_{np} від ударного струму I_p .

Залежність опору R_{np} від струму показана на рис. 6. Як видно із графіка, починаючи зі струму 10 А опір діодного кристала починає незворотнє збільшуватися.

Обговорення отриманих результатів

Аналіз отриманих результатів дозволив запропонувати наступну модель процесу проходження ударного струму крізь напівпровідниковий діодний кристал.

При невеликих амплітудах імпульсу струму поведінка напруги незмінна (рис. 1а), розігрів кристала відбувається монотонно, і з кожною півхвилею температура його зростає (криві 1, 2;

рис. 4) і при $I_p = 5$ А температура досягає 250°C.

При цьому такий режим може бути стабільним досить довго, так як буде мати місце рівновага між підводом та відбором тепла у виводи або в підкладнику. Вольтамперна характеристика має звичайну експоненціальну форму (рис. 3). Опір R_p практично не залежить від кількості півхвиль і зменшується зі збільшенням значення струму (криві 1, 2; рис. 5). Характеристики й параметри кристалів не змінюються. Терморівноважне значення опору R_{np} теж не залежить від струму (рис. 6), а час життя носіїв заряду не змінюється (рис. 7). При цьому амплітуда імпульсу струму перевищує значення струму перенавантаження в три рази.

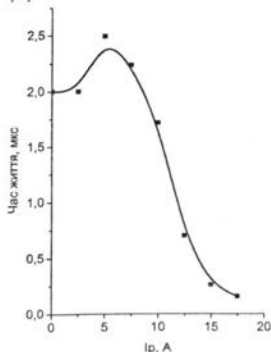


Рис. 7. Залежність часу життя носіїв заряду від ударного струму.

При збільшенні амплітуди струму до величини 7.5 – 10 А починається не монотонні зміни в падінні напруги U_p (рис. 1, б). Амплітуда кожної півхвилі спочатку зростає, досягає свого максимального значення, а потім спадає до стаціонарного значення, тобто утворюється «горб». Температура кристала при цьому після 4–5 півхвиль досягає значення 600°C. Вольтамперна характеристика змінює свій вигляд і переходить від S-подібної характеристики (після першої

півхвилі) до S-подібної (після п'ятої півхвилі) (рис. 3, 1-5) і не змінюється при проходженні наступних півхвиль (рис. 3, 6-15). В кристалі відбуваються незворотні зміни [7]: зменшується час життя носіїв заряду (рис. 7), опір R_{sp} збільшується до 157% після проходження імпульсу струму (рис. 6). Опір R_p спочатку різко збільшується, а після проходження перших чотирьох півхвиль – різко падає. Стационарні значення T зі збільшенням I_p зменшуються, так як зменшуються стационарні значення опору A_p .

Така поведінка параметрів кристала діода пов'язана з тим, що після досягнення величини ударного струму його температура стає більшою за температуру власної провідності й, відповідно до [5], опір кристала визначається концентрацією термогенерованих носіїв заряду.

Така концентрація значно перевищує концентрацію інжектованих носіїв заряду.

Таблиця

$T, ^\circ\text{C}$	n, cm^{-3}	$n_{\text{власний}}, \text{cm}^{-3}$
20	$3 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{14}$
250	$4 \cdot 10^{14}$	$2,3 \cdot 10^{15}$
600	$2 \cdot 10^{17}$	$4,5 \cdot 10^{15}$
800	$0,5 \cdot 10^{18}$	$0,8 \cdot 10^{16}$

Список використаних джерел

1. Зи С. Физика полупроводниковых приборов : пер. с англ. [Текст] / С. Зи; М.: Мир, 1984. - Т.1. - 95 с.
2. Викулин, И.М. Физика полупроводниковых приборов [Текст] / И.М. Викулин, В.И. Стафеев; -М.: Радио и связь, 1990. - 264с.
3. Григорьев О.П. Дiodы: Справочник. [Текст] / О.П. Григорьев, В.Н. Замятин, Б.В. Кондратьев, С.Л. Пожидаев; -М.: Радио и связь, 1990.-336с.
4. Павлюк С. Визначення температури діодного кристала під час проходження крізь нього імпульсу ударного струму: [Текст] / С. Павлюк, Г. Куталін, С. Савицький, Р. Солтис, І. Тищенко // Вісник Київського університету. - Сер.: Радіофізика електроніка, 2008.-№11. -29-32с.
5. Павлюк С.П. Саморегуляція виділеної потужності напівпровідникового діодного кристала [Текст] / С.П. Павлюк, Л.В. Ішук, В.М. Киселіцин // Вісник Київського університету. -Сер.: Фізико-

При подальшому збільшенні амплітуди ударного струму («горб» падіння напруги перетворюється на «лік» і зміщується до початку імпульсу, і при амплітуді струму I_{5A} – співпадає з першою півхвилею (рис. 2в). Температура кристала досягає свого стаціонарного значення за меншу кількість півхвиль (рис. 4). Вольт-амперна характеристика зразу стає S-подібною, час життя носіїв заряду зменшується в 10 разів, а опір R_{sp} збільшується на 57%.

Збільшення амплітуди ударного струму до 17,5A призвело до різкого збільшення опору R_p і після розігріву кристала до 820 С відбувся його пробій. Про це говорить збільшення опору R_{sp} після четвертої півхвилі (рис. 5).

Висновки.

1. При проходженні імпульсу ударного струму кристал розігрівається до температури, значення якої перевищує значення температури власної провідності.
2. Розігрів до таких величин призводить до незворотних змін параметрів кристала та його характеристик.
3. При збільшенні амплітуди ударного струму зменшується кількість півхвиль, що призводять до критичного розігріву.

математичні науки, 2002. – № 1. –344-347с.

6. Павлюк С. Изменение сопротивления силовых диодов под действием импульса ударного тока [Текст] / С. Павлюк, Р. Солтис, С. Савицкий, И. Тищенко // Вісник Київського університету. -Сер.: Фізико-математичні науки, 2002. – № 1. –344-347с.
7. Wertheim, G. K. Transient Recombination of Excess Carriers in Semiconductors. [Текст] / G. K. Wertheim; -Phys. Rev., 1958. –109с.
8. Дiodы полупроводниковые. Термины, определения и буквенные обозначения параметров: ГОСТ 25529-82. – [Чинний від 1984-01-01]. -М.: Изд-во стандартов, 1987. –27с.
9. Россонинский А.А. Способ сборки полупроводниковых приборов. [Текст] / В.А. Лебига, В.М. Киселіцин, Е.А. Альперович; А. с. № 355696 СССР.-1972. – Бюл. № 31.

Надійшла до редколегії

УДК 535.345.67

*Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф., Федоров В.В.,
аспірант

Вплив неузгодженості резонаторів на спектральні характеристики і просторовий розподіл електричного поля в 1-D фотонних кристалах з трьома парами хвильовими резонаторами

Досліджено спектральні характеристики пропускання і просторовий розподіл електричного поля на частотах дозволених зон, що виникають в просторово-обмежених 1-D фотонних кристалах з трьома парами хвильовими дефектами. Фотонний кристал містить 49 шарів оксидів кремнію і титану, що чергуються. Встановлено, що електричне поле концентрується в середині дефектних шарів з меншою діелектричною проникністю. Показано, що збільшення різниці в товщині резонаторів, що утворюють дефекти фотонного кристалу, приводить до суттєвого просторового перерозподілу електричного поля в області резонаторів.

Ключові слова: багатопшарова тонкоплівкова структура, одновимірний фотонний кристал

*E-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.техн.н. Погорілий С.Д.

У різноманітних системах телекомунікацій для частотної селекції широко використовують багато пар хвильові інтерференційні фільтри [1-3]. Фільтри є періодичною послідовністю з чверть хвильових шарів, яка порушується в певних місцях введенням пар хвильових шарів. У фотоніці такі структури дістають назву одновимірних (1 - D) фотонних кристалів з парами хвильовими дефектами [4-5]. Наявність пар хвильових дефектів призводить до появи фотонних дозволених зон в середині забороненої зони фотонного кристалу. Наявність пар хвильових дефектів призводить до появи фотонних дозволених зон в середині забороненої зони фотонного кристалу. Нещодавно було показано, що при певному виборі параметрів багатопшарової структури можна добитися чіткого розділення цих дозволених фотонних зон [6, 7]. У бездефектних 1 - D фотонних кристалах на краях зони Бріллюєна електричне поле концентрується в шарах з високою діелектричною про-

Yu.O. Pervak, Dr. Sci., V.V. Fedorov, post grad.
stud.

Influence of inconsistency of resonators on spectral descriptions and spatial distribution of electric-field in 1-D photonic crystals with three half-wave resonators

Spectral descriptions of transmission and spatial distribution of the electrical field are investigated on frequencies of the settled zones that arise up in spatially-limited 1-D photonic crystals with three half wave defects. A photonic crystal contains 49 layers of oxides of silicon and titan, which alternate. It is set that the electric field is concentrated in a middle imperfect layers with low inductivity. It is shown that the increase of difference in the thickness of resonators that form defects results in the substantial spatial redistribution of electric-field in area of resonators.

Key words: multilayer thin-film structure, 1-D photonic crystal

никністю в першій фотонній дозволених зоні (нижче забороненої зони) і в шарах з низькою діелектричною проникністю в другій дозволених фотонній зоні (вище за забороненої зони) [4-5]. Раніше було досліджено просторовий розподіл електричного поля в області дозволених фотонних зон, що виникають в забороненій зоні фотонного кристалу при введенні в нього трьох пар хвильових структурних дефектів однакового складу. Встановлено, що електричне поле концентрується в середині дефектних шарів з меншою діелектричною проникністю, а у випадку високої діелектричної проникності дефектного пар хвильового шару на інтерфейсах шарів з низькою та високою діелектричною проникністю. Збільшення різниці в товщині центрального і двох крайніх резонаторів, що утворюють дефекти фотонного кристалу, приводить до суттєвого зростання електричного поля в області резонаторів. При різниці в товщині 40% електричне поле

в області резонаторних шарів перевищує електричне поле на вхідній поверхні в 5000 разів. Метою даної роботи є дослідження розподілу електричного поля і пропускання в одношарових фотонних кристалах з несиметричною зміною товщини пів хвильових резонаторів.

Розрахунки виконували матричним методом [8]. За допомогою матричного методу можна отримати співвідношення для амплітуди електричного поля. Для межі поділу i і $i+1$ шарів:

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \begin{bmatrix} \cos \delta_i & \sin \delta_i \\ \eta_i \sin \delta_i & \cos \delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1)$$

де E_0 , H_0 – амплітуди електричного і магнітного полів на межі поділу структури з зовнішнім середовищем; E_i , H_i – амплітуди на досліджуваній межі поділу. Таким чином, знаходження амплітуди електричного поля на будь-якій межі поділу півкош зводиться до розв'язання матричного рівняння. Для визначення величини електричного поля у будь-якій точці усередині півкош, можна ввести узвну межу поділу і записати таке ж матричне співвідношення. Якщо електричне поле

($|E|^2$) хвилі, що падає, прийняти рівним 100%, то при коефіцієнті відбиття 1, електричне поле на вхідній поверхні складе 400%. Електричне поле усередині багатошарової структури може в певних випадках значно перевищувати 400%. Усі розрахунки були виконані для нормального падіння випромінювання ($\theta_0 = 0$). При розрахунку спектральних характеристик багатошарової структури і амплітуди електричного поля враховувалася дисперсія вибраних матеріалів півкош і підкладки. Для опису дисперсії матеріалів використовували формулу Коші. Показник заломлення для оксиду кремнія визначали за формулою $n_{\text{Si}} = 1,46 + (3,35 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (1,41 \cdot 10^{-5}/\lambda^4)$, а для оксиду титану – $n_{\text{Ti}} = 2,23 + (2,34 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (7,69 \cdot 10^{-5}/\lambda^4)$, де λ – довжина хвилі в мікронах. Враховано також дисперсію показника заломлення підкладки: $n_{\text{S}} = 1,50 + (5,33 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (4,92 \cdot 10^{-4}/\lambda^4)$. Екстинкція півкош і підкладки в даному спектральному діапазоні, не перевищує 10^{-3} , і не враховувалась.

Досліджувана багатошарова структура 1-D фотонного кристалу містить 49 шарів SiO_2 і TiO_2 на скляній підкладці. Структурна формула має вигляд $S(LH)^4(LH)^4S_0$, де S і S_0 пів нескінченні середовища скла і повітря, відповідно; L і H – чверть хвильові шари ($n_L d_L = n_H d_H = \lambda_0/4$) SiO_2 і TiO_2 , відповідно; $\lambda_0 = 550$ нм. В цій структурі є три пів хвильових шари (три резонатори), що

стає очевидним, якщо структурну формулу представити в наступному вигляді

$$S(LH)^4(2L)(HL)^4H(2L)(HL)^4H(2L)(HL)^4S_0 \quad (2)$$

У загальному випадку, коли можливі відхилення оптичної товщини резонаторів від пів хвильової, зручно використати структурну формулу

$$S(LH)^4(xL)(HL)^4y(L)(HL)^4z(L)(HL)^4S_0 \quad (3)$$

У виразі (6) при пів хвильовій оптичній товщині резонаторів $x = y = z = 2$. Неузгодженість пів хвильових резонаторів приводить до суттєвих змін спектральних характеристик.

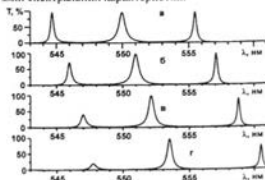


Рис.1. Спектральні залежності пропускання в забороненій зоні структур $S(LH)^4(xL)(HL)^4y(L)(HL)^4z(L)(HL)^4S_0$: $x = y = 2$ (а), $x = y = 2,02$ (б), $x = y = 2,06$ (в), $x = y = 2,06$ (г), $z = 2$ (а-г).

Якщо товщина двох резонаторів, ближчих до підкладки, перевищуватиме товщину третього резонатору, то усі три смуги пропускання зміщуються в довгохвильовий бік (рис.1). У випадку збільшення різниці в товщині резонаторів інтенсивність короткохвильової смуги дуже швидко зменшується і складає менше 20% при різниці товщини в 3%. Інтенсивність центральної смуги теж змінюється, а інтенсивність довгохвильової смуги зменшується значно повільніше порівняно з інтенсивністю короткохвильової смуги. Точне положення максимумів смуг і їх інтенсивність наведено в таблиці. Електричне поле на частоті максимального пропускання коротко хвильової смуги концентрується в резонаторі, ближчому до зовнішнього середовища, на частотах максимального пропускання центральної і довгохвильової смуг – в резонаторах, ближчих до підкладки (рис.2). У випадку збільшення товщини двох резонаторів, ближчих до зовнішнього середовища, відбуваються аналогічні зміни, з тою різницею, що швидше зменшується інтенсивність довгохвильової смуги порівняно з короткохвильовою.

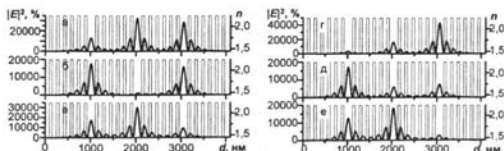


Рис.2. Просторовий розподіл електричного поля $|E|^2$ (суцільні жирні криві) і показника заломлення n (суцільні тонкі криві) в фотонних структурах $S(LH)^6(xL)(HL)^3H(2L)$ $(HL)^3H(xL)(HL)^6$; $x = y = 2,02$ (а - в); $x = y = 2,06$ (r - e); $z = 2$ (а - e). Для кожної з структур приведено по три розподіли поля на довжинах хвиль максимального пропускання полос λ_1 , λ_2 і λ_3 в порядку збільшення довжини хвилі. Точне значення λ_1 , λ_2 і λ_3 наведено в таблиці.

Якщо товщина резонаторів рівномірно збільшується, починаючи від резонатора, ближчого до підкладки, то зі збільшенням різниці в товщині змінюється положення і інтенсивність лише короткохвильової і довгохвильової смуг (рис.3). При цьому електричне поле на частоті максимального пропускання центральної смуги все більше концентрується в центральному резонаторі (рис. 4). Такі зміни в спектрі пропускання можна пояснити тим, що асиметрична зміна товщини крайніх резонаторів приводить до підвищення добротності центрального резонатора і суттєвого зменшення добротності крайніх резонаторів. При вказаній на рис. 3 зміні параметрів структури напівширина центральної смуги зменшується, а напівширина крайніх смуг збільшується.

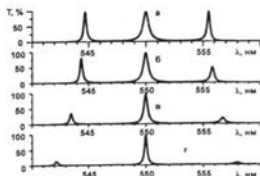


Рис.3. Спектральні залежності пропускання в забороненій зоні структур $S(LH)^6(xL)(HL)^3H(yL)$ $(HL)^3H(xL)(HL)^6$; $x = y = 2$ (а), $x = 1,98$; $y = 2,02$ (б), $x = 1,96$; $y = 2,04$ (в), $x = 1,94$; $y = 2,06$ (r), $z = 2$ (а - r).

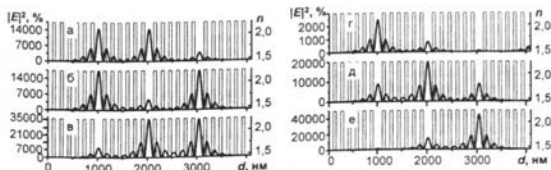


Рис.4. Просторовий розподіл електричного поля $|E|^2$ (суцільні жирні криві) і показника заломлення n (суцільні тонкі криві) в фотонних структурах $S(LH)^6(1,98L)(HL)^3H(2L)$ $(HL)^3H(2,02L)(HL)^6$ і $S(LH)^6(1,94L)(HL)^3H(2L)$ $(HL)^3H(2,06L)(HL)^6$. Для кожної з структур приведено по три розподіли поля на довжинах хвиль максимального пропускання полос λ_1 , λ_2 і λ_3 в порядку збільшення довжини хвилі. Точне значення λ_1 , λ_2 і λ_3 наведено в таблиці.

Таким чином, несиметричні зміни товщини пів хвильових резонаторів приводять до асиметричності спектрального пропускання в області

дозволених смуг пропускання в забороненій фотонній зоні.

Таблиця. Значення довжин хвиль λ максимального пропускання Т трьох смуг пропускання в забороненій зоні фотонної структури $S(LH)^4(xL)(HL)^2H(yL)(HL)^2H(zL)(HL)^6$.

Nsm	x	y	z	λ_1 , нм	T_1 , %	λ_2 , нм	T_2 , %	λ_3 , нм	T_3 , %
1	2	2	2	544,68	95,71	550,00	95,76	555,50	95,75
2	2,02	2	1,98	544,35	47,88	550,00	95,76	555,83	80,87
3	2,04	2	1,96	543,46	16,72	550,00	95,76	556,71	37,39
4	2,06	2	1,94	542,18	6,10	550,00	95,76	557,97	15,50
5	1,98	2	2,02	544,35	79,03	550,00	95,76	555,83	49,69
6	1,96	2	2,04	543,46	34,51	550,00	95,76	556,72	18,36
7	1,94	2	2,06	542,19	13,49	550,00	95,76	557,99	7,07
8	1,98	1,98	2	543,17	98,55	549,01	97,85	554,15	72,27
9	1,96	1,96	2	541,51	86,26	547,87	99,95	553,09	41,47
10	1,94	1,94	2	539,77	70,138	546,50	94,90	552,33	20,22
11	2	1,98	1,98	543,17	75,95	549,01	93,04	554,15	97,23
12	2	1,96	1,96	541,51	55,53	547,86	83,34	553,09	73,82
13	2	1,94	1,94	539,77	40,30	546,49	67,58	552,34	40,695
14	2,02	2,02	2	545,99	71,34	550,99	97,83	557,07	98,85
15	2,04	2,04	2	547,01	40,34	552,13	99,97	558,77	87,91
16	2,06	2,06	2	547,73	19,53	553,48	95,52	560,54	73,27
17	2	2,02	2,02	545,99	96,82	550,99	93,08	557,07	76,98
18	2	2,04	2,04	547,00	70,47	552,13	83,72	558,77	57,59
19	2	2,06	2,06	547,72	39,49	553,48	68,75	560,55	42,94

Список використаних джерел

- Марков Ю.Н. К теории полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, И.С. Гайнутдинов // Оптика и спектроскопия. – 1977. – 43. – Вып. 5. – С.984-989.
- Марков Ю.Н. К вопросу оптимизации полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, И.С. Гайнутдинов // ЖПС. – 1980. – 33. – №3. – С.536-540.
- Марков Ю.Н. Синтез контрастных полосовых интерференционных фильтров. Сложнопериодические системы // Оптика и спектроскопия. – 1983. – 54. – Вып. 1. – С.173-178.
- Joannopoulos J.D. Photonic Crystals / J.D. Joannopoulos, R.D. Meade and J.N. Winn // Princeton: Princeton University Press, 1995. – P. 133-150.
- Первак В.Ю. Фізика фотонних кристалів / В.Ю. Первак, А.П. Шпак, Ю.О. Первак, Л.Ю. Куницька. – К.: Академперіодика. – 2007. – 304с.
- Первак Ю.О. Спектральні властивості багатопшарових структур з трьома півхвильовими резонаторами / Ю.О.Первак, В.В.Федоров // Вісник Київського університету, серія фізико-математичних наук. – 2011. – №1. – С. 259-262.
- Первак Ю.О. Особливості спектральних характеристик багатопшарових структур з трьома півхвильовими резонаторами / Ю.О.Первак, В.В.Федоров // Вісник Київського університету, серія фізико-математичних наук. – 2011. – №2. – С. 201-204.
- MacLeod H.A. Thin-Film Optical Filters / H.A. MacLeod // Philadelphia: Inst. Phys. Publish., Pa., 2001. – P. 645.

Надійшла до редколегії 20.02.2012

УДК 537.6

Сохаський В. П., к.ф.-м.н., доц.

V. P. Sohatsky, Ph. D.

Спінова інжекція в Si з ферромагнетика**Spin injection in Si from ferromagnet**

Дослідження зміни поляризації зарядів на границі ферромагнітного Fe з напівпровідниковим Si виконувалося при відсутності або наявності бар'єрного прошарку SiO_2 . Підтверджена можливість спінової інжекції в Si для створення кремнієвих пристроїв спінтроники.

Studying of the electric carriers polarization changes on interface of ferromagnetic Fe and semiconducting Si were done in case of absence or availability of the SiO_2 sublayer barrier. It was confirmed the possibility of spin injection to Si in order to design the silicon spintronics devices.

Ключові слова: поляризований струм, спінова інжекція, ферромагнетик, напівпровідник.

Key Words: spin injection, polarized current, ferromagnetic, semiconductor.

E-mail: vso@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Давидов В.В.

Вступ

Необхідність дослідження нових фізичних принципів, на яких будуть побудовані швидкодіючі пристрої з низьким енергоспоживанням і тепловиділенням обумовлена тим, що кремнієві процесори в найближчі десять-п'ятнадцять років можуть досягнути меж своїх можливостей. В той же час кремній, що є найбільш поширеним матеріалом традиційної напівпровідникової (НП) електроніки також має перспективи застосування в спіновій електроніці (спінтроніці). У спінтронних пристроїв перевертання спіна практично не вимагає витрат енергії; в проміжках між операціями пристрій взагалі не потребує джерела живлення. При зміні напрямку спіна кінетична енергія електрона не змінюється, тому тепла практично не виділяється. До того ж швидкість зміни положення спіна досить висока - його перевертання здійснюється за кілька пікосекунд.

Дослідження явищ спінової поляризації в Si становить значний інтерес як з фундаментальної, так і з прикладної точок зору незважаючи на цілий ряд особливостей, які ускладнюють використання Si в спіновій електроніці. Зокрема, його непрямозонність призводить до низької ефективності оптичної орієнтації спінів або реєстрації люмінесценції для визначення спінової поляризації. Також складною проблемою є формування контактів Si з ферромагнетиками (ФМ) або магнітними напівпровідниками, за допомогою яких створювалася би поляризація носіїв струму достатня для роботи спінтронних пристроїв. Крім цього, відносно широка

заборонена зона також створює складнощі керування поляризованим спіновим струмом та його детектування тощо.

Незважаючи на означені складнощі, в останні роки періодично з'являються роботи, в яких не тільки досліджуються спін-електронні явища в Si, але і представляються результати по спіновому транспорту, які не отримуються в прямозонних НП, як зокрема, GaAs. Остання сполука була першою, на якій було продемонстровано можливість керування струмом поляризованих електронів за допомогою електричного поля [1]. Запропонований в цій роботі пристрій став класичним варіантом реалізації польового спінового транзистора (СТ), в якому величина струму залежала від відносного напрямку намагніченості стоку та середнього значення спіну електронів; зміна останнього відбувалась за рахунок зміни так званого ефективного поля Рашби при зміні потенціалу затвора. Втім, через розсіювання електронів у прямому каналі, що призводило до перемішування спінових станів, описаний СТ міг виконувати свої функції тільки в балістичному режимі. Подальші розробки показали перспективність такого напрямку; у створених останнім часом конструкціях вдається навіть отримувати помітне підсилення сигналу [2].

Спроби реалізувати інший варіант конструкції СТ - біполярний - розпочалися на початку 90-х років [3]. Найбільш значимим результатом цих спроб стало отримання багаторазової зміни магнітоструму [4], а також демонстрація можливості збереження поляризації електронів в Si на довжині, що досягала 350 нм

[5]. В ряді робіт останніх років було показано можливість створення ефективних емітерів та провідних каналів поляризованого струму в структурах на основі Si [6].

Основною теоретичною проблемою спінового транспорту в Si можна вважати побудову загальної теорії спин-залежних ефектів із врахуванням особливостей зонної структури кремнію. Основною експериментальною проблемою залишається отримання високої спінової поляризації, збереження її на відстані, достатній для здійснення необхідних маніпуляцій зі спіном та зарядом протікаючого струму, а також ефективна ресетрація спінової поляризації і створення апаратури для реалізації усього вищезгаданого.

Спінові клапани (СК) – структури з ФМ шарами, розділеними немагнітним прошарком є основною складовою частиною спінтронних систем. Повністю металеві СК (з прошарком із пара- чи діаманітного металу), мають значно менші значення як електричного, так і магнітоопору порівняно із клапанами з надтонким діелектричним прошарком з тунельними властивостями. В той же час, металеві СК можуть пропускати значно більші струми, що дозволяє використовувати протікаючий крізь них поляризований струм для переключення СК, тобто перемагнічування його магнітом'якого шару. Необхідність зменшення надто високої густини струму, необхідного для такого перемагнічування також обумовлює проведення подальших досліджень шаруватих структур СК, що контактують з НП безпосередньо або розділені з ним діелектричним прошарком.

Методика експерименту

Шаруваті структури, що складались із феромагнітних наночарів Fe, які розділялись немагнітним провідним прошарком Cu або діелектричним MgO створювались послідовним термічним осадженням металів у вакуумі на напівпровідникову Si підкладку з використанням масок для формування геометрії шарів та контактів. Вимірювання характеристик отриманих структур здійснювались електричними, магнітооптичними та спін-резонансними методами. Електрична провідність та магнітоопір вимірювались контактним методом; для дослідження поляризаційних властивостей носіїв заряду застосовувався спін-резонансний спектрометр 9 ГГц діапазону. Запис кривих магнітного гістерезису здійснювався за

допомогою магнітооптичного подовжнього ефекта Керра. Методи оптичної спектроскопії застосовувались для дослідження характеристик поглинання шарів та визначення товщин. Для вирішення останньої задачі осадження здійснювалось одночасно як на непрозору у видимому діапазоні сіліконову підкладку, так і на прозору (скляну) підкладку з тінювою маскою, що дозволяла наносити на окремих ділянках підкладки окремі шари металів для подальшого вимірювання напру світла їх оптичного поглинання. Таким чином, оцінювались товщини та оптичні неоднорідності шарів СК, схема розташування яких на Si підкладці з поверхневим шаром SiO₂ показана на рис.1. Оскільки в технологічному процесі осадження здійснювалось монотонно-неоднорідно, то отримані структури мали клин по товщині; т.ч., товщина нижнього Fe шару варіювалась в діапазоні 10-40 нм, верхнього - 8-30 нм, а проміжного немагнітного Cu - 2-20 нм. Підключення джерел напруги в різних точках структури та вимірювання струмів здійснювалось за допомогою нанесених контактів з Cu.

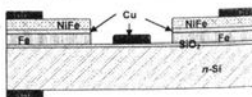


Рис.1. Схема структури спінових клапанів Fe/Cu/NiFe на Si/SiO₂ з контактами Cu.

Контроль проходження поляризованого струму може здійснюватись оптичними або електричними методами [7].

Результати експерименту

Для визначення характеристик СК, в першу його поверхневий шару, записуються криві магнітного гістерезису за допомогою магнітооптичного ефекта Керра. Форма та параметри петлі визначають поле насичення доменної структури (ДС) шару, магнітожорсткість матеріалу, коерцитивну силу, анізотропію, характер магнітних неоднорідностей тощо. Перемагнічування структури, криві гістерезису якої зображені на рис.2, визначається переважно анізотропією в площині верхнього (магнітом'якого) шару та його взаємодією з нижнім (більш магнітожорстким) шаром.

Остання складається з обмінної та магнітостатичної частин і залежить від товщини немагнітного прошарку S_u та шорсткості міжшарових поверхонь розділу. Для ілюстрації цього факту на рис.3 наведений приклад форми кривої гістерезису для тієї ж структури, але при меншій ніж на рис.2 товщині прошарку S_u

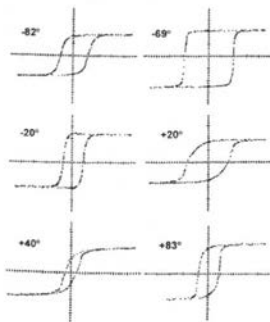


Рис.2. Форма петель магнітного гістерезису при різних азимутальних напрямках зовнішнього поля.

(структура виготовлялась із рівномірно змінною товщиною по площі півки). Збільшення міжшарової взаємодії в цьому випадку призвело до сильної кореляції перемагнічування обох шарів, що обумовило "перетягнуту" форму кривої гістерезису.

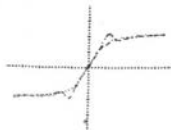


Рис.3. Петля гістерезису при товщині прошарку $S_u = 10$ нм.

З кривих гістерезису на рис.2 визначаються осі легкого та важкого намагнічування в площині, що направлені відповідно вздовж -69° та $+40^\circ$. Таким чином, застосування в якості спінального ключового елемента найбільш енергетично вигідним напрямком підмагнічування є -20° , а для перемагнічування під дією поляризованого струму - напрямком -69° .

Вимірювання струму та магнітоопору структури здійснювалось при проходженні струму у поздовжньому та поперечному напрямках (при наявності або відсутності окисного шару SiO_2 між Si та Fe шарами). Вимірювання проводилось у полях напруженості до 150 Ерст, оскільки цієї величини було достатньо для перемагнічування магнітного шару в протилежний напрямок незалежно від азимутального кута напрямку поля.

Під дією магнітного поля всі шари СК намагнічуються в одному напрямку, в результаті відбувається збільшення струму, що проходить через структуру. В прикладі, наведеному на рис.4 максимальні зміни спостерігались при паралельності поля та напрямку струму, що в значній мірі обумовлювалось конструктивними особливостями створених структур.

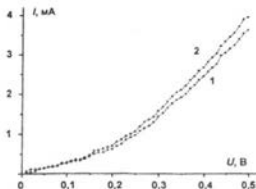


Рис.4. Зміна вольт-амперної характеристики СТ в магнітному полі: 1 - $H=0$; 2 - $H=50$ Ерст (шари СК намагнічені паралельно).

Обговорення результатів

Оцінку проходження струму в структурі ФМ-НП можна зробити на основі стандартного рівняння Больцмана для функції розподілу нерівноважних носіїв заряду $F(r, t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{k}} = \left[(F_i - F) \cdot \mathbf{W}_i \cdot d\mathbf{k}_i \right], \quad (1)$$

де i – номер стану (енергетичного рівня), а W_i – ймовірність переходу між i -м та основним станами. Для спрощення першим та третім доданками в лівій частині рівняння (1) можна знехтувати зважаючи на стаціонарність протікання процесів, а також характер руху електронів в провідному каналі без суттєвої зміни їх швидкості. Для подальшого спрощення вважатимемо механізм розсіювання зарядів пружні та непружні зіткнення без використання наближення часу релаксації. В такому випадку рівняння (1) спроститься до:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cos(v, \hat{x}) = -\left(\frac{F}{\lambda_n} + \frac{F}{\lambda_p}\right) + \frac{0.5}{\lambda_n} \int F d(\cos(v, \hat{x})), \quad (2)$$

а при одновимірному наближенні:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\left[\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_p}\right] \cdot F, \quad \text{звідки функція } F$$

змінюватиметься з координатою x за оберненою експоненційною залежністю. Струм через СК може бути розрахований, наприклад, за методикою, запропонованою в роботі [5]:

$$I_s = e \cdot \int_0^L F[x, \cos(v, \hat{x})] \cdot \cos(v, \hat{x}) \cdot d[\cos(v, \hat{x})].$$

Застосовуючи чисельні параметри товщин шарів та величин прикладених напруг можна порівняти експериментальні та розрахункові значення струму при різних товщинах немагнітного прошарку. Зокрема, при сумарному (ефективному) значенні довжини пробігу $\Lambda = \lambda_n \lambda_p / (\lambda_n + \lambda_p) = 10$ нм зменшення значення функції стану, а відповідно, і струму до 10^3 разів спостерігатиметься на довжині провідного каналу $L \sim 70$ нм. Більш жорсткі та реалістичніші оцінки $\Lambda \sim 2$ нм відповідним чином зменшать довжину каналу до нанометрового діапазону, що суттєво ускладнює керування струмом.

Втім, одним із методів подолання значних розмірних обмежень є використання для спінової інжекції тунельних бар'єрів, а також робота СТ в режимі балістичних електронів. Внесок до вихідного струму СТ, обумовлений спіновою прецесією, можна оцінити виходячи з простої моделі, застосованої в [4] для біполярної схеми:

$$I_{C2} = \int_0^{\pi} \frac{0.5}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(v-v_f)^2}{4Dt}} \cdot \cos \omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{sf}}} dt, \quad (3)$$

де D – дифузійна стала, v – дрейфова швидкість, τ_{sf} – ефективний час життя спінів. Таким чином, струм визначається головним чином дрейфом та дифузійно носіїв заряду, а також прецесією та обмеженням часом життя спінів. Втім, досить

значні розходження між експериментальними та розрахунковими даними в цьому випадку обумовлюється в першу чергу неконтрольованими контактними та поверхневими явищами.

Висновки

1. Чисельні оцінки можливості інжекції та транспорту поляризованих носіїв в Si підтверджуються експериментально; зокрема, можливе збереження величини поляризації на відстанях, достатніх для керування поляризованим струмом.

2. Діелектричний шар SiO_2 може створювати тунельну провідність, яка збільшує магнітоопір та обумовлює балістичний режим прольоту немагнітних частин СТ.

3. Дослідження методом вимірювання локальної намагніченості характеру ДС та доменних границь у ФМ шарі, підтверджують взаємний вплив ДГ і поляризаційного струму. Оптимізація напрямку підмагнічування може зменшувати струм перемагнічування на порядок, але стабільність таких систем поки є недостатньою для надійного переключення СК.

Список використаних джерел

1. Datta S., Das B. Electronic analog of the electro-optic modulator. *Appl. Phys. Lett.* - 1989. - 56. - №7. - P.665-667.
2. Y. Shuto et al. A New Spin-Functional Metal-Oxide-Semiconductor FET Based on MTJ. *Technology: Pseudo-Spin-MOSFET*. *Appl. Phys. Express.* - 2010. - 3. - P.013003.
3. Johnson M. The bipolar spin transistor. *JMMM*. 1995. - 140-144. - P.21-24.
4. Lodder J. C. The spin-valve transistor: technologies and progress. / Lodder J. C., Monsma D. J., Vlutters R., and Shimatsu T. // *JMMM*. 1999. - 198-199. - P.119-124.
5. Huang B., Monsma D.J., Appelbaum I. Coherent spin transport through a 350-micron-thick Silicon wafer. *Phys. Rev. Lett.* 2007. - 99. - №17. - P.177209.
6. Vlutters R., Erve O., Jansen R., et al. Modeling of spin-dependent hot-electron transport in the spin-valve transistor *Phys. Rev. B*. 2001. - 65. - 024416.
7. Ando Y., Maeda Y., Kasahara K. et al. Electric-field control of spin accumulation signals in silicon at room temperature. *Appl. Phys. Lett.* 2011. - 99. №13. - P.132511.

Надійшла до редколегії 29.02.12.

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Альошин О.Д., д. ф.-м. наук, проф.
Білоус О.І., к. ф.-м. наук, доц.**Розрахунки амплітуд параметричного
рівняння стану різноманітних речовин
поблизу критичної точки**

В роботі за літературними даними P , ρ , T вимірювань амплітуди граничних рівнянь стану критичної ізотерми $D_0(Z_k)$, критичної ізохори $\Gamma_0(Z_k)$, межі поділу фаз $B_0(Z_k)$, пов'язані з фактором стисливості речовини $Z_k = P_k V_k / RT_k$. На наступному етапі ці амплітуди пов'язані з амплітудами параметричного рівняння стану речовини поблизу КТ. Одержані результати дозволяють розрахувати термічні та калорійні характеристики критичного флюїду в близькому околі КТ.

Ключові слова: критична точка, параметричне рівняння стану, фактор стисливості

Alekhin A.D., Sci.Dr., Prof.
Bilous O.I., Ph.D.**Calculations of amplitudes of the parametric
equation of the substance state in the vicinity of
the critical point**

In the work by literary data P , ρ , T of the measurements of the amplitude of the boundary equations of the state of the critical isotherm $D_0(Z_k)$, critical isochore $\Gamma_0(Z_k)$, phase boundary $B_0(Z_k)$ are connected with the substance compressibility factor. In the following stage these amplitudes are connected with the amplitudes of the parametric equation of the substance state in the vicinity of the CP (critical point). It makes it possible to calculate the thermal and caloric characteristics of critical fluid in the close vicinity of the CP.

Keywords: critical point, parametric equation of state, compressibility factor

Веб сайт: <http://criticalfluid.com.ua/>E-mail: alekhin@univ.kiev.ua, o_bilous@ua.fm

На даний час зростає інтерес до визначення параметрів рівняння стану речовини в близькому околі критичної точки (КТ). Такими параметрами являються величини амплітуд Γ_0 , D_0 , B_0 та критичних показників рівняння стану речовини [1] вздовж граничних критичних термодинамічних напрямків відповідно: критичної ізохори, критичної ізотерми, границі поділу фаз.

$$\Delta\rho = \Gamma_c \Delta\mu \cdot r^{-1}; \Delta\rho = D_c \Delta\mu^{\frac{1}{\delta}}; \Delta\rho = B_c \Delta\mu^{\frac{1}{\beta}}. \quad (1)$$

Тут $\Delta\mu = (\rho - \rho_c) / \rho_c$, $\Delta\mu = (\mu - \mu_c) / \mu_c$, $t = (T - T_c) / T_c$, ρ_c , T_c , μ_c - критичні значення густини, температури, хімічного потенціалу; γ , β , δ - критичні показники флуктуаційної теорії фазових переходів ФТФП [1].

Рівняння стану речовини в загальному вигляді, яке описує весь близький околі КТ, представляється в параметричній формі [2]

$$\Delta\mu = ar^{\beta\delta}(1 - \theta^2), \quad t = r(1 - b^2\theta^2) \quad (2)$$

$$\Delta\rho = kr^{\beta\delta}\theta; \frac{d\rho}{d\mu} = \frac{k}{a}r^{-\gamma}\left[1 + (2\gamma b^2 - 3)\theta^2\right]^{-1}$$

$b^2 = (\gamma - 2\beta) / \gamma(1 - 2\beta) = (\delta - 3) / (\delta - 1)(1 - 2\beta)$ [2] - універсальна стала пов'язана з критичними показниками ФТФП [1].

Необхідність в більш точному визначенні величин цих параметрів пов'язана з практичним використанням унікальних властивостей речовини в критичному стані - критичного флюїду (КФ) в нових сучасних технологіях [3, 4].

В даній роботі, виходячи з експериментальних даних P , V , T вимірювань [5-10], широкого класу рідин, використовуючи величини критичних показників ФТФП [11], знайдено амплітуди Γ_0 , D_0 , B_0 рівнянь (1). Далі їх величини пов'язані з фактором стисливості речовини $Z_k = P_k V_k / RT_k$: $B_0(Z_k)$, $\Gamma_0(Z_k)$, $D_0(Z_k)$.

На наступному етапі визначено зв'язок амплітуд $B_0(Z_k)$, $D_0(Z_k)$, $\Gamma_0(Z_k)$ рівнянь (1) з амплітудами a і k параметричного рівняння стану речовини (2). При цьому буди

використані в (2) слідуючі значення величини критичних показників: $\gamma=1,23\pm0,005$; $\beta=0,338\pm0,003$; $\delta=4,63\pm0,01$ [11] і визначено величину параметру $b^2=1,39\pm0,01$ (2).

Тоді виходячи з вигляду співвідношень (1)-(2) знайдено взаємозв'язок амплітуд рівняння (1) з амплітудами a та k рівняння (2) параметричного скейлінгу [2].

$$k(Z_c) = (b^2 - 1)^{\frac{1}{\delta}} B_c(Z_c) = 0,727 B_c(Z_c) = 2,86 \cdot Z_c^*, \quad (3)$$

$$\Gamma_0 = \frac{k(Z_c)}{a(Z_c)_0} \approx 0,055 = \text{const} \quad (4)$$

$$a(Z_c) = 12,5 B_c(Z_c) = 49,22 Z_c^*. \quad (5)$$

$$D_0(Z_c^*) = 0,427 [B_c(Z_c)]^{\frac{\delta-1}{\delta}} = 1,25 (Z_c^*)^{\frac{\delta-1}{\delta}} \quad (6)$$

Із (3)-(6) слідує прямий лінійний зв'язок амплітуд $k(Z_c)$ та $a(Z_c)$ з фактором відносної стисливості речовини $Z_c^* = (0,5 - Z_c)/0,5$. Як видно з (6) амплітуда критичної ізотермі $D_0(Z_c)$ являється степеневною функцією амплітуди $B_0(Z_c)$ та фактора відносної стисливості речовини Z_c^* : $D_0(Z_c^*) \sim (Z_c^*)^{\frac{\delta-1}{\delta}}$.

Отримані взаємозв'язки (3)-(6) амплітуд Γ_0 , D_0 , B_0 (1) з амплітудами a та k рівнянь (2) повністю узгоджуються з відомим співвідношенням параметричного скейлінгу [2]

$$\frac{\Gamma_0 B_0^{b^2-1}}{D_0^b} = \frac{b^{b^2-1}}{(b^2-1)^{b^2-1}} = 1,63 \quad (7)$$

Таким чином, на основі проведених досліджень знайдені числові значення амплітуд рівняння стану (1) $B_0(Z_c)$, $\Gamma_0(Z_c)$, $D_0(Z_c)$ і параметричного рівняння стану (2) $a(Z_c^*)$ та $k(Z_c^*)$ [2], що виражені через фактор стисливості речовини $Z_c = P_c V_c / (RT_c)$ широкого класу діелектричних рідин.

Проведені розрахунки, на основі параметричного рівняння стану (2) дозволяють визначити такі важливі характеристики критичного флюїда як температурні та польові залежності радіуса кореляції

$$R_c(\Delta\mu, t) = \left(A^{-1} \frac{d\rho}{d\mu} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \quad \text{і термодинамічного}$$

потенціалу $F_\phi = C_0 R_c^{-1}(\Delta\mu, t)$ ($C_0 \approx 10^{-22} \text{ см}^3$) [1] у всій флуктуаційній області поблизу КТ.

Тоді, використовуючи знайдені величини амплітуд $a(Z_c)$ та $k(Z_c)$, можна

розрахувати термічні: $(\Delta\rho = \frac{dF_\phi}{d\mu}; \frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d^2 F_\phi}{d\mu^2})$

та калоричні $(\Delta S = \frac{dF_\phi}{dt}; C_p = \frac{d^2 F_\phi}{dt^2})$,

характеристики широкого класу діелектричних речовин в близькому околі КТ ($\Delta\rho < 10^{-3}$, $\Delta\rho < 10^{-2}$, $t < 10^{-4} \cdot 10^{-3}$), де проведення прицевих експериментів суттєво ускладнено.

Отримані результати можуть бути використані при виборі умов найбільш ефективного практичного застосування унікальних властивостей критичного флюїда в новітніх сучасних технологіях.

Список літератури

1. Паташинский А.З., Покровский В.А. Флуктуационная теория фазовых переходов. – Москва, Наука. – 1982
2. Schofield P. Parametric representation of the equation of state near a critical point // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V.22, № 12. – P.606.
3. Сверхкритические флюиды. Теория и практика. Москва, 2008, Т. 2, С. 1-101.
4. Горбатый Ю.Э., Бондаренко Г.В., Сверхкритической состояние воды // Сверхкритические флюиды: Теория и Практика. 2007, Т.2, № 2, 5-19.
5. Алехин А.Д., Остапчук Ю.Л., Рудников Е.Г. Уравнение кривой сосуществования алканов вблизи критической температуры на основе модели ван-дер-Ваальса // Журнал Физической Химии, 2011, № 4, с. 613-617.
6. R. Span, W. Wagner J. Phys. Chem. Ref. Data. 25, 6, 1509 (1996)
7. Wagner, A. Pruss J. Phys. Chem. Ref. Data. 31, 2, 387 (2002)
8. L. A. Weber Phys. Rev. A V 2, №6, 1970, P. 2379-2388/
9. Булавин Л.А., Гаврюшенко Д.А., Сисосв В.М. Критичні явища в неоднорідних системах. – Навчальний посібник. – К.: КНУ 1999. – 89 с.
10. Иванов Д.Ю. Критическое поведение неидеализированных систем М. физматлит. – 2003. – 248 с.
11. Alekxin A.D. Critical indexes for systems of different space dimensionality // Journal of Molecular Liquids. – 2005. – 120. – P.43-45

Надійшла до редколегії 21.02.2012

УДК 538.22

Беженар А.А., асп.

Дун Занмін, д.ф.м.н.

Копань В.С., д.ф.м.н., проф.,

Рево С.Л., д.ф.м.н., проф.,

Хуторянська Н.В., інж.

**Рухливість зарядів в наноструктурних
композиціях Al-Cu та фторопласт-
терморозширений графіт**

Композиції вивчалися методом Холла. Рухливість електронів в наноструктурних композиціях (НК) Al-Cu $\mu = 13,6 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ при товщині шару $h \geq 20 \text{ nm}$ і $\mu = 19 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ при $h > 300 \text{ nm}$, концентрація електронів провідності $d = 2 \pm 0,3 \text{ atom}^{-1}$.

В НК TRG-ФП4 рухливість дірок $\mu = 22 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ при $h \geq 100 \text{ nm}$ і $\mu = 39,5 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ при $h > 1600 \text{ nm}$, $d = 0,004 \text{ atom}^{-1}$.

Ключові слова: рухливість зарядів, наноструктурні композиції.

*E-mail: hutor@univ.kiev.ua

В цій роботі досліджені наноструктурні композиції (НК), складені з шарів товщиною $h = 20\text{--}1000 \text{ nm}$. Питома електропровідність σ одиначної плівки зростає зі зменшенням її товщини h , згідно [1], за рахунок непружного розсіювання носіїв електрики на поверхнях плівок згідно (1):

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + 0,19 \frac{l}{h}\right)^{-1}, \quad (1)$$

де σ_0 – питома електропровідність масивного зразка, l – довжина вільного пробігу електронів, наприклад. В НК Al-Sn [8] та Al-Cu [3] при $T = 293 \text{ K}$ $l = 42 \text{ nm}$, 16 nm , 4 nm для Cu, Al, Sn відповідно. Тому вже при $h < 100 \text{ nm}$ спостерігається крута залежність (2):

$$\sigma = \frac{h\sigma_0}{2h} \left(1 + 0,2 \frac{l(1+c)}{h}\right)^{-1} + \frac{h\sigma_0}{2h} \left(1 + 0,1 \frac{l_2(1+c)}{hc}\right)^{-1}, \quad (2)$$

де індекси 1 і 2 відносяться до шарів з металів 1 та 2, відповідно, $c = h_1/h_2$, $h = 0,5(h_1 + h_2)$.

В НК Al-Sn, наприклад, $\sigma_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Om}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ при $h > 100 \text{ nm}$ і зменшується до $\sigma = 10^5$ при $h = 10 \text{ nm}$, тобто вдвічі.

Подібне спостерігається в 25-30 досліджених систем НК [4]. Недоліком пояснень [1, 3, 4, 8] залежності $\sigma(h)$ НК є припущення, що густина

A.A.Bezhenar, PhD,

Dong Zhanmin, Dr of Sci,

V.S.Kopan', Dr of Sci, Prof,

S.L.Revo, Dr of Sci, Prof,

N.V.Hutoryanska, eng.

**The mobility of charges in nanostructured
compositions of Al-Cu and fluoroplastic-
thermo exfoliated graphite**

Compositions were studied by the method of Hall. Is there mobility of electrons in nanostructural compositions (NC) of Al-Cu $\mu = 13,6 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ at the thickness of layer of $h \geq 20 \text{ nm}$ and $\mu = 19 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ at $h > 300 \text{ nm}$, concentration of electrons of conductivity of $d = 2 \pm 0,3 \text{ atom}^{-1}$.

In NC TRG-FP4 mobility of holes $\mu = 22 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ at $h \geq 100 \text{ nm}$ and $\mu = 39,5 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ at $h > 1600 \text{ nm}$, $d = 0,004 \text{ atom}^{-1}$.

Keywords: mobility of charges, nanostructural compositions.

електронів (дірок) ρ не залежить від h . Прямих вимірювань ρ не було здійснено.

Мета роботи – визначення ρ та рухливості μ зарядів методом Холла.

Методика експерименту. Зразки НК Cu-Al були виготовлені шляхом вальцювання при 293K пакету, складеного з фольг Al ($h_f = 12 \text{ мкм}$) та Cu ($h_c = 17 \text{ мкм}$). Технологія [3] базується на холодному зварюванні фольг. При цьому не відбувається забруднення алюмінієвих шарів мідними атомами (за рахунок стимульованої деформацією дифузії) аж до $h_f = 8\text{--}12 \text{ nm}$, не змінюється кристалічна будова шарів. Цим така технологія відрізняється від технології пошарового вакуумного наплення.

Зразки НК фторопласт-терморозширений графіт виготовляли аналогічно зразкам НК Al-Cu, але при $T = 353\text{--}400 \text{ K}$. Пакет складали з фольг терморозширеного графіту (TRG) та плівок фторопласту (ФП4), $h_f - h_c = 25\text{--}30 \text{ мкм}$.

Різниця потенціалів Холла U_H вимірювалась при $293 \pm 0,5 \text{ K}$ в полі постійного магніту $H = 2 \text{ кЕ}$ ($1,6 \cdot 10^5 \text{ A/m}$), перпендикулярному до площин шарів, потенціометром з вхідним опором 20 Ом та ціною поділки 10^{-8} В . Контакти провідників Холла, між кінцями яких вимірювалась U_H , з мідними провідниками потенціометру мали температуру $293 \pm 0,005 \text{ K}$. Цим зменшувались

Представлено: член-кор. НАН України,
д.ф.м.н., проф. Махара В.А.

паразитні термо-е.с. до $\Delta U \sim 10^{-8}$ В. Різниця потенціалів U_s визначалась як середнє значення при прямому і зворотньому напрямку струму. Так зменшувалась похибка вимірювання U_s , що виникала внаслідок того, що провідники Холла неточно були розташовані на еквіпотенціальній площині зразка (при відсутності магнітного поля).

Розрахунок густини ρ електронів (дірок) та їх рухливості μ здійснювався за формулами (3) і (5):

$$U_s = \frac{RHI}{D}, \quad (3)$$

$$R = \frac{1}{\rho e}, \quad (4)$$

$$\mu = |R|\sigma, \quad (5)$$

де R - коефіцієнт Холла, I - струм, паралельний площинам шарів, e - заряд електрона, $D = hN$ - сумарна товщина електропровідних шарів, кількістю N , σ - питома електропровідність.

В досліджених НК Al-Cu $R < 0$. Це означає, що струм переноситься електронами. В монолітному графіті та НК $R > 0$.

Експериментальні результати та їх обговорення. Результати досліджень поміщені в таблиці 1 та наведені на рис. 1-4. Спостерігасмо наступне.

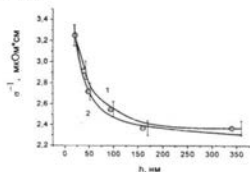


Рис.1. Залежності (з роботи [3]) питомого електроопору σ^{-1} від товщини шару h НК Al-Cu, одержані експериментально -1, і розраховані -2 за формулою (2).

1. Кількість електронів провідності становить $\rho n = 3,1 \pm 0,2$ атом $^{-1}$ в відпаленому зразку Al і дещо зменшується до $3 \pm 0,2$ внаслідок деформації. Це означає, що в алюмінію наявні, згідно і роботі [7, стор. 33] три неспарені електрони в р-станах. Зменшення ρn внаслідок деформації можна пояснити захопленням електронів провідності дислокаціями. В міді, згідно [7, ст. 18] електрон

S-стану не може утворити компактних ґраток (ПЦК, ОЦК). Тому між атомами утворюється зв'язок за рахунок електронів в р-стані, по одному на кожен атом. Ними забезпечується і електропровідність. Половина атомів Cu заповнює додатково електрон з 3d- стану. Тому $\rho n = 1,5$.

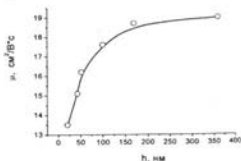


Рис.2. Залежність рухливості електронів μ від товщини шару h в НК Al-Cu.

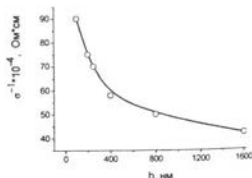


Рис. 3. Залежність питомого електроопору σ^{-1} від товщини шару h НК ТРГ-ФП14.

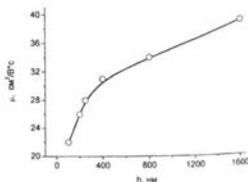


Рис.4. Рухливість дірок μ в залежності від товщини шару h НК ТРГ-ФП14.

Таблиця 1

Густина носіїв струму ρ , густина атомів n , середня кількість носіїв струму $d=p/n$ в розрахунку на один атом, коефіцієнт Холла R та рухливість носіїв струму μ для різних речовин.

№ пп	Речовина	$\rho \cdot 10^{22}$, см ⁻³	$n \cdot 10^{22}$, см ⁻³	$d=p/n$	$R \cdot 10^{-4}$, см ³ /Кл	μ , см ² /В·с
1	Al, відпалений	18,9	6,02	3,1±0,2	-0,33	12
2	Cu, відпалений	11,81	7,83	1,5±0,2	-0,53	32
3	Al, деформація 99,9%	18,5	6,00	3±0,2	-0,34	11
4	Cu, деформація 99,9%	11,42	7,8	1,5±0,3	-0,55	30
5	НК Al-Cu, $h > 1$ мкм	14,74	7,08	2,1±0,4	-0,43	18,7
6	НК Al-Cu, $h \approx 20$ нм	13,92	7,04	2±0,3	-0,45	13,6
7	ТРГ (фольга), $h=25$ мкм	0,015	5,2	0,003	430	46
8	Графіт для атомних реакторів	0,01	11,1	0,001	600	60
9	НК ТРГ-ФП4, $h=100$ нм	0,02	5,2	0,004	320	22
10	Графен по [5]	10^{12} ел./см ²	$3,9 \cdot 10^{15}$ ат/см ²	$2,6 \cdot 10^{-4}$	-	10- 20000

Зменшення рухливості електронів μ зі зменшенням товщини шару h (рис.2) може бути пояснене непружним розсіюванням на границях між шарами, завдяки якому максимум розподілу електронів по довжинам вільного пробігу $l \sim 40$ нм в масивному зразку пересувається в шарах НК до значення $l \sim 20$ нм. Частота розсіювання ν при напруженості поля 1 В/см зростає від $\nu \approx 19$ см⁻¹/(40·10⁻⁷)см $\approx 5 \cdot 10^6$ Гц до $\nu \approx 13/20 \cdot 10^{-7} \approx 7 \cdot 10^6$ Гц.

На границі двох шарів окрім дислокацій, що виникли внаслідок деформування, існують дислокації невідповідності параметрів кристалічної ґратки Al параметрам ґратки Cu. Тому границя містить більше дислокацій, ніж об'єм і може захоплювати електрони провідності, зменшуючи їх густина. Тому при $h > 1$ мкм $\rho = 14,74 \cdot 10^{22}$ для НК Al-Cu (таблиця 1), а при $h \sim 20$ нм $\rho = 13,92 \cdot 10^{22}$. Цим НК Al-Cu схожий на напівпровідники, в яких біля поверхонь існують додаткові стани Тамма.

2. НК ТРГ-ФП4 цікава тим, що електропровідні шари графіту розділені слабо електропровідними [9, 10] шарами фторопласту, тому можливе подолання шарів останнього рухомими зарядами графіту як шляхом тунелювання, так і прямим проходженням по трекам (електропровідним каналам). В роботі [11] було показано, що в порошках метал-оксид, де між частинками є зазори – потенціальні бар'єри висотою U_2 і шириною ω , прозорість бар'єру для електронів

$$\frac{I_2}{I_1} = 16 \frac{E_F}{U_2} \exp(-2\gamma\omega), \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{1}{h} (2mU_2)^{1/2}, \quad (2)$$

де I_1 та I_2 – потоки електронів, що налітають на потенціальний бар'єр та тунелюють через нього, відповідно m – маса електрону, $E_F = kT = 0,022$ еВ – кінетична енергія електрону (при $T=293$ К), яку він має додатково вище рівня Фермі.

Зі зменшенням h в НК ТРГ-ФП4 ширини ω бар'єрів, зростає їх прозорість I_2/I_1 . Але збільшується кількість бар'єрів, бо шари фрагментують, і структура НК перероджується на порошок. Тому зростає σ^{-1} (рис.3).

В [12] було показано, що електроопір фольги з ТРГ зменшується при вальцюванні за рахунок зменшення відстані між атомними базисними площинами до відстаней, характерних для монокристалу графіту. Крім того, електроопір графіту дуже залежить від чистоти, величини зерен, технології виготовлення [2, 6]. Навіть в графені рухливість електронів зменшується від 20000 см²/(В·с) до 10 [5] при адсорбції водню.

Графіт відрізняється від металів тим, що на 500-1000 атомів приходить один носій електрики (таблиця 1), причому можлива заміна електронної провідності на діркову [2, 6]. Графіт схожий на метали відсутністю забороненої зони. Навіть в графені вона майже нульова [5]. Крім того, вільний пробіг $l \sim 200$ нм при 300К [6] порівняний з вільним пробігом в металах. Тому схожі залежності $\sigma^{-1}(h)$ та $\mu(h)$ для НК ТРГ-ФП4

(рис. 3, 4) з такими ж залежностями для НК Al-Cu (рис. 1, 2).

До співпадання експериментальної кривої 1 (рис. 1) з розрахованою 2 за формулою (2) необхідно ставитись критично, бо (1) і (2) одержані в результаті не досить обґрунтованих спрощень. По-перше, припускається, що рівноважний розподіл електронів в x -просторі, характерний масивному зразку, придатний також для плівок і тонких шарів НК. Крім того, вважається, що часи релаксації, обумовлені розсіюванням електронів на коливаннях кристалічної ґратки, однакові для масивного зразка і для плівок. В ряді випадків ці припущення можуть бути недостовірними.

При $h < 800$ нм спостерігається крутіший ріст $\sigma^{-1}(h)$ у зв'язку з тим, що шари графіту фрагментують на острівці, розділені один від одного фторопластовими «містками». Такого не відбувається при вальцюванні фольги з ТРГ, коли σ^{-1} зменшується зі зростанням деформації [12]. Така ж фрагментація шарів спостерігається і в НК метал-метал [3, 8]. На поверхні фторопластових шарів існують вільні радикали. Вони також можуть впливати на рухливість електронів у графітових шарах.

Висновки.

1. Методом Холла визначено, що в наноструктурних композиціях (НК) Al-Cu та ТРГ-ФП4 усереднена кількість електронів провідності в розрахунок на атом становить $2 \pm 0,3$ та 0,004 відповідно. Густина електронів провідності зменшується при зростанні деформації.

2. Рухливість електронів в НК Al-Cu $\mu = 13,6 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ при середній товщині шару $h \approx 20$ нм, а в НК ТРГ-ФП4 $\mu = 22 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ при $h \approx 100$ нм. Великий опір графітових НК ($80 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{см}$) у порівнянні з металевими ($3 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$) обумовлений переважно малою концентрацією дірок в графітових НК.

Досліди, про які повідомляється у статті виконано згідно плану наукового співробітництва між Університетом Цінхуа (Китай) і Київським національним університетом імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

- Макдональд Д. Физика низких температур. – М.: ИИЛ, 1959. – С.205.
- Шулепов С.В. Физика углеграфитовых материалов / М.: Металлургия. 1990. – 330 с.
- Копань В.С., Лысенко А.В. Об электросопротивлении и механических свойствах многослойных композиций на основе меди и алюминия // Физика металлов и металловедение. – 1970. – Т.29. – Вып. 5. – С.1074-1080.
- Копань В.С. Композиційні матеріали – Навч. посібник. Київ: Універ. вид. „Пульсари”, 2004. – 196 с.
- Морозов С.В. Электронные свойства графена и других двумерных кристаллов. Автореферат диссертации доктора физ.-мат. наук. – Черноголовка Московской обл. – 2010. – 40 с.
- Мануй Л.Ю. Структура та електрофізичні властивості вуглеграфітових матеріалів і інтеркальованих сполук на їх основі. Автореферат докторської дисертації. Київ. 2005. – 40 с.
- Кузьменко П.П., Махара В.А. Зв'язок між електронною структурою атомів, кристалічною структурою і магнітними властивостями в металах. – Київ: Наукова думка, 1995. – 122 с.
- Копань В.С., Лысенко А.В. О применении эффекта закрепления дислокаций твердыми покрытиями для получения многослойных композиций на основе алюминия и олова // Порошковая металлургия. – №9. – 1970. – С.52-56.
- Беженар А.А., Копань В.С., Пивень Н.І. Электроопір композиційного матеріалу фторопласт – вуглецеві нанотрубки // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – №3 – С.410-414.
- Беженар А.А., Копань В.С., Хуторянська Н.В. Электропроводность фторопластовой матрицы для композиционных материалов. 36. наук. прайв «Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии». – 2009. – Т.7. – №2 – С.391-394.
- Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Термоелектричний адсорбційний ефект в нікелевому порошку // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – №1 – С.281-284.
- Ревко С.Л., Копань Т.В., Авраменко Т.Г., Хаманди Смаїл. Вплив тиску на електроопір карбону та шаруватих композицій на його основі // Тези доповідей XIII Всеукр. наук.-метод. конф. "Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовки фахівців в цій галузі". – 15-17 вересня 2011. – Миколаїв. – С. 62-63.

Надійшла до редколегії 16.02.2012р

УДК 621.039

Вашенко В.М.¹, д.ф.м.н.,
Злочевський В.В.¹, к.ф.м.н.,
Хадж Фараджаллах Даббах А.², к.ф.м.н.,
Скалозубов К.В.³ к.ф.м.н.,

Ризик-орієнтований підхід оцінки екологічної безпеки об'єктів з радіоактивними відходами

У статті розглянуто ризик-орієнтований підхід оцінки екологічної безпеки об'єктів з радіоактивними відходами. На основі отриманих імовірнісних показників встановлено, що на майданчика захоронення радіоактивних відходів Одеського державного міжобласного спецкомбінату умови екологічної безпеки виконуються за нормативним критерієм летальних випадків.

Ключові слова: радіоактивні відходи, ризик-орієнтований підхід, імовірнісні показники, критерії екологічної безпеки.

Vashchenko V.M., Dr Sci,
Zlochevsky V.V., PhD
Haj Farajallah Dabbach A., PhD
Skalozubov K.V., PhD

Risk-oriented approach for assessing the environmental safety of radioactive waste storage facilities

The article discusses the risk-oriented approach for assessing the ecological security of radioactive waste storage facilities. On the basis of probability indicators the condition of ecological safety is found to be met at Odessa State Multiregional Facility on the normative criteria of deaths.

Keywords: radioactive waste; risk-oriented approach; probability index, criteria of environmental safety.

¹ Державна екологічна академія післядипломної освіти та управління.

² Інститут проблем безпеки АЕС НАНУ.

³ Одеський національний політехнічний університет.

Аналіз досвіду регулювання екологічної безпеки об'єктів з радіоактивними відходами (РАВ) показує, що відомі технічні обґрунтування умов безпеки використовують, в основному, детерміністські критерії та показники екологічної безпеки (наприклад, [1-4]).

Ризик-орієнтовані підходи (РОП) знайшли широке застосування в різних галузях науки і техніки для оцінки імовірнісних показників ризику в залежності від ймовірностей виникнення потенційно небезпечних вихідних подій і їх наслідків.

У ядерній енергетиці традиційні РОП застосовуються, в основному, при розробці звітів з аналізу безпеки для оцінки імовірнісних показників безпеки енергоблоків АЕС: частоти пошкодження активної зони і частоти граничного аварійного викиду. Відповідність цих показників нормативним вимогам (критеріям) за допустимими ймовірностями виникнення аварій з пошкодженням активної зони реактора і з граничними аварійними викидами дозволяють оцінити прийнятність рівня безпеки енергоблоку АЕС. Вони застосовувалися і застосовуються для ліцензування і продовження термінів експлуатації енергоблоків АЕС України.

Перспективним також є застосування РОП для оцінки екологічної безпеки об'єктів з радіоактивними відходами (РАВ), заснованого на імовірнісних показниках і критеріях. У рамках РОП можливо оцінити і співставити імовірнісні показники безпеки та радіаційного захисту окремих об'єктів при виникненні гіпотетичних аварій; виявляти критичні для безпеки системи і обладнання; визначати домінуючі для безпеки ймовірні шляхи розвитку аварійних процесів, тощо.

Умови екологічної безпеки об'єктів з РАВ у рамках традиційних РОП має наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^k I_i \sum_{j=1}^n P_{ij} < N, \quad (1)$$

де I_i – ймовірність виникнення i -тої потенційно-небезпечної аварійної події;

P_{ij} – ймовірність негативної події в j -тій аварійній послідовності i -тої вихідної аварійної події;

N – нормативний критерій ймовірності граничного (гранично-допустимого) викиду/скиду радіоактивних продуктів в навколишнє середовище. Однак, на сьогодні

критерій N не визначено нормами з екологічної безпеки.

Відповідно до міжнародної практики вважається, що ризик знехтовно малий, якщо ймовірність смерті для населення за рік менше 10^{-6} ; ризик прийнятний для персоналу, якщо ймовірність смерті за рік не вище 10^{-4} (додаток 9 до Норм радіаційної безпеки України [5]). Граничним значенням індивідуального ризику для опромінення осіб із персоналу приймається величина 10^{-3} .

Потенційно небезпечними вихідними аварійними подіями для об'єктів з РАВ є внутрішні і зовнішні екстремальні події (землетруси, повені, смерчі, падіння літаків, урагани тощо), а також транспортно-технологічні операції (ТТО) при завантаженні сховища РАВ.

Ймовірність (частота) виникнення вихідної потенційно небезпечної події I_i оцінюється за статистичними даними з досвіду і регламенту експлуатації об'єктів з РАВ. Аналіз цих даних (на прикладі майданчика захоронення РАВ Одеського державного міжобласного спецкомбінату (МЗРВ ОДМСК)) показав, що частоти аварійних подій при ТТО при завантаженні сховищ твердими радіоактивними (ТРВ) і високорадіоактивними (ВРВ) відходами є домінуючими для умов екологічної безпеки:

$$I_1 P_1 + I_2 P_2 < 10^{-4}, \quad (2)$$

де I_1, I_2 – частота аварійних подій, що виникає при завантаженні сховища з ТРВ і сховища ВРВ відповідно;

P_1, P_2 – ймовірність смертельного випадку через опромінення в результаті аварійних ситуацій при завантаженні ТРО і ВРО, відповідно.

Ймовірність смертельного випадку через опромінення становить [5]:

$$P_j = 1 - \exp(-K D_j), \quad (3)$$

де K – коефіцієнт ймовірності стохастичних ефектів, $K = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{Зв}^{-1}$;

D_j – максимально можлива доза опромінення при аварії на j -му типі сховища РАВ.

На основі аналізу експлуатаційних даних і проектно-технічної документації МЗРВ ОДМСК [6] оцінки максимальних значень цих ймовірнісних показників складає, відповідно: $P_1 = 7,3 \cdot 10^{-3}$ (для ТРВ) і $P_2 = 4,0 \cdot 10^{-4}$ (для ВРВ); а значення частоти аварійних подій відповідно: $I_1 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ 1/рік (для ТРВ) і $I_2 = 8,2 \cdot 10^{-3}$ 1/рік (для ВРВ).

На основі отриманих результатів можна зробити наступні висновки:

1. Умови екологічної безпеки для майданчика захоронення радіоактивних відходів Одеського державного міжобласного спецкомбінату за критерієм летальних випадків обслуговуючого персоналу виконуються.

Разом з тим, ці результати в загальному випадку не можуть бути поширені на інші об'єкти по зберіганню радіоактивних відходів, оскільки залежать від умов експлуатації та специфіки проектно-технічних характеристик систем і обладнання.

2. Більш обґрунтовані оцінки умов екологічної безпеки можна отримати при нормуванні показника ризику граничного аварійного викиду/скиду радіоактивних відходів у навколишнє середовище.

Список використаних джерел

1. Корчагин П.А., Замостьян П.В., Шестопалов В.М. Обращение с РАО в Украине. - К., 2000. – 178 с.
2. Долговременное хранение и захоронение отработанных ИИИ в Украине. – К.: ВЦ «ДрУж», 2001. – 128 с.
3. Саенко С.Ю., Неклюдов И.М., Холомеев Г.А. и др. Математическое моделирование тепло - и массопереноса в геологическом защитном барьере после захоронения отработавшего ядерного топлива// Ядерная и радиационная безопасность. - 2000. - №4. - С 66-73.
4. Федоров А.Л., Дорожкин А.И., Сорокин В.Т. Оценка безопасности хранилища с отвержденными радиоактивными отходами, упакованные в бетонные контейнеры//Атомная энергетика. - 1996. - Т.81, вып.1. - С 40-47.
5. ДГН 6.6.1.-6.5.001-98. Нормы радиационной безопасности Украины (НРБУ).
6. Изучение хранилищ ВАО, ТРО, ЖРО на предмет оценки их эксплуатационных характеристик: (Отчет о НИР)УНТК КОРО. А-1078-3.-Желтые воды, 2005.

Надійшла до редколегії 01.12.2011

УДК 577.32+535.34

Драпівський М.А., студ.,
Ростопіра Т.В., студ.,
Заболотний М.А., к.ф.м.н., с.н.с.,
Барабаш Ю.М., к.х.н., с.н.с.,
Куліш М.П., д.ф.м.н., проф.,
Дмитренко О.П., к.ф.м.н., доц.,
Курочка Л.І., н.с.**Вивчення кінетики електронного
транспорту в бактеріальних реакційних
центрах з фулеренами**

Пурпурні бактерії відомі понад 40 років, останні 30 із них вони різноманітно досліджуються. Після деякого піку їх дослідження науковий інтерес до них дещо знизився, але останні 10–15 років ситуація дещо змінилася і для їх дослідження були запропоновані нові теоретичні та експериментальні моделі. Це лише ще раз підкреслює, той факт, що людство постійно перебуває у пошуку вигідних і економічних джерел енергії, а також способів її накопичення та ефективного збереження. Актуальність дослідження бактеріальних реакційних центрів залишається і сьогодні, тому дана робота присвячена кінетиці електронного транспорту в бактеріальних реакційних центрах (РЦ), і особливо цікавим і актуальним є дослідження кінетики електронно-конформаційних переходів у РЦ допованих фулеренами. Представлено результати експериментального дослідження динаміки показників поглинання РЦ та теоретичний аналіз релаксаційних кривих.

Ключові слова: реакційний центр,
електронний транспорт, фулери.

*E-mail: *drapkovskyi.maksym@gmail.com

Пурпурні бактерії є чи не єдиними живими мікроорганізмами, окрім рослинних, які здатні засвоювати світлову енергію, перетворювати її в інші види, зберігати та передавати її на досить великі відстані фактично без втрат. За їх відкриття була навіть присуджена Нобелівська премія. Саме тому такий об'єкт не може не викликати до себе пристальної уваги науковців.

На сьогодні відомо існування декількох типів РЦ, які відрізняються природою й спектральними властивостями первинного донора електрона і природою вторинного донора та акцептора електрона. Вперше такий

Drapkovskyi M.A., stud.,
Rostopira T.M., stud.,
Zabolotny M.A., PhD., Sen.Sci.Res.,
Barabash Y.M., PhD., Sen.Sci.Res.,
Kulish M.P., Dr.Sci., Prof.,
Dmytrenko O.P., PhD.Ass.
Kurochka L.I., Sen.Res.**The investigation of the kinetics of electron
transport in bacterial reaction centers with
fullerene**

Purple bacteria are known more than 40 years, and the last 30 of them are variously investigated. After some research of their peak the scientific interest in them has slightly decreased, but the last 10–15 years the situation has changed and new theoretical and experimental models were offered for their investigation. This only underscores the fact that humanity is constantly in search of advantageous and economical energy sources and ways to accumulate and effective conservation. The urgency of the examination of bacterial reaction centers remains today, because this work is devoted to the kinetics of electron transport in bacterial reaction centers (RC), and particularly interesting and important is studying the kinetics of electron-conformational transitions in RC doped fullerenes. The results of experimental investigation of dynamics of RC absorption and the theoretical analysis of relaxation curves are represented.

Keywords: reaction center, electron transport,
fullerene.

комплекс був виділений на початку 70-х з пурпурових фотосинтетичних бактерій виду *Rhodobacter sphaeroides* [4]. Посилене вивчення структури, характеру дії реакційних центрів за допомогою біохімічної та біофізичної техніки дало змогу одержати інформацію про функціонування центрів і про їхні структурні та динамічні характеристики [5]. Першою білковою мембраною, структуру якої було визначено з роздільною здатністю 2.9 Å, а пізніше з роздільною здатністю 2.3 Å, був реакційний центр *Rhodobacter viridis*, за що J.Deisenhofer, R.Huber, H.Michel у 1988 році

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

одержали Нобелівську премію з хімії [6]. Дещо пізніше було вивчено кристал реакційного центру *Rhodobacter sphaeroides* з роздільною здатністю 2.8 Å [7]

Перенос електрона в реакційному центрі

Схема процесу фоторозділення заряду в реакційному центрі представлена на рис.3. Послідовність прямих реакцій переносу електрона між компонентами реакційного центру була встановлена за допомогою спектральних ефектів, оскільки при освітленні реакційного центра відбуваються зворотні зміни спектру поглинання, що характеризують окислений стан пігмента і відновлення станів кофакторів. При поглинанні світла відбувається вищівання смуг на 870 і 600 нм та зсув смуги в синю область смуги 800 нм.

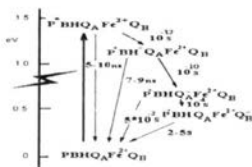


Рис.1 Енергетична схема фоторозділення і переносу заряду у РЦ виду *Rb. Sphaeroides*. Константи характерних часів перебування електрону (швидкостей переносу електрону) на кофакторах дані при кімнатній температурі.

Спочатку квант світла вибиває електрон з димеру бактеріохлорофілу (P), що є донором електронів (Рис. 1). Цей електрон менш ніж за 10^{-12} с переходить на феофітін, долаючи при цьому відстань ~3Å. На кожному з кофакторів ланцюга переносу електрона його стабілізація викликана структурно - динамічною організацією молекулярного комплексу РЦ. До сих пір точно невідомо про роль мономеру бактеріохлорофілу. Є два альтернативних механізми: 1) послідовний механізм використання B_A як реального проміжного акцептора і 2) так званий суперзмінений механізм, коли B_A забезпечує лише віртуальний стан для електронного транспорту. Проте електрон на ньому не локалізується і переходить з димеру бактеріохлорофілу прямо

на молекулу бактеріофеофетину, що відіграє роль проміжного акцептора [11]. Потім, за $\sim 10^{-10}$ с, з феофетина H_A електрон переходить на хінон Q_A , при цьому швидкість цього переходу не залежить від температури. Далі відбувається перехід електрона за $\sim 10^{-4}$ с на хінон Q_B — вторинний акцептор [12]. При цьому електрон долає загальну відстань ~40 Å. Чому електрон йде таким шляхом на хінон Q_B , чому він не релаксується (по електронним спектрам) на хлорофілі — ще незрозуміло.

Електрон, вибитий з димеру бактеріохлорофілу, замінюється електроном, що приходить з гема цитохрому. На цьому завершується перший напівцикл реакції. В результаті другого аналогічного напівцикла, хінон Q_B навантажується другим електроном і рухається з двома електронами (двічі заряджений, він легше виривається з мембрани), щоб взяти участь у подальшому фотосинтезі. Отже, фотосинтетичний реакційний центр переносить електрони з верхнього (Рис.1) у нижній компартмент — проти створеної, в результаті, різниці потенціалів між компартментами.

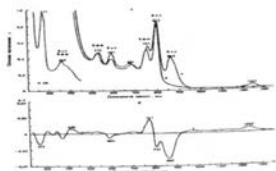


Рис.2 Спектр поглинання (А) реакційних центрів (РЦ) і диференціальний спектр поглинання (світло мінус темрява) (Б): а-спектр РЦ у темряві, б-спектр освітлених РЦ, в-різниця між а і б. (Смуги спектру поглинання (А) в діапазоні довший хвиль коротше 450 нм мають дуже велику амплітуду, тому на малюнку показані в шестиразовому зменшенні.)

Відмітимо два важливі фізичні моменти:

1) І хлорофіли, і феофітини, і хінони включають в себе системи "полуторних" ($\dots C=C-C=\dots$), тобто р-електронних зв'язків. Інакше кажучи, електронні хмари в цих молекулах узагальнені (внаслідок Полінгтова резонанса: $\dots C=C-C=\dots C-C=\dots$). Тим самим

створюється потенціальна яма для електронів, де вони "делокалізовані", тобто можуть зміщуватись на віддалі, що значно перевищують діаметр атома.

2) Передача електрона з одного пігменту на інший не потребує безпосереднього контакту цих пігментів. Ця передача здійснюється шляхом квантового тунельного переходу (Рис.3).

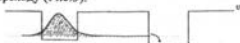


Рис. 3. Схема для пояснення тунельного ефекту.

Профіль потенціальної енергії U показаний чорною суцільною кривою. Пунктир - рівень повної (потенціальної та кінетичної) енергії електрону. Синя лінія - густина електронної хмаринки ρ . Електрон спочатку знаходиться у лівій ямі (цей стан показано на рисунку), але край його хмаринки досягає правої ями, так що весь електрон може з часом перетекти у неї за умови, що там енергія нижче.

Сутність тунельного переходу в тому, що, за законами квантової механіки, електрон дещо виходить за межі тієї потенціальної ями, в якій він знаходиться. В даному випадку областю низької потенціальної енергії U , тобто потенціальною ямою, служить та молекула (хлорофіл, феофітін і т.д.), на якій сидить електрон. Поза ямою його потенціальна енергія вища ніж його повна енергія у ямі. Квантовий ефект призводить до того, що хвильова функція електрона (густина електронної хмари) виходить за межі потенціальної ями, незважаючи на те, що величина цієї густини дуже швидко - експоненційно - спадає по мірі віддалення від ями. Характерна віддаль, на якій густина електронної хмари спадає на порядок (в 10 раз) - приблизно $1 \text{ \AA}$ (це - характерний радіус атома).

Значить, густина електронної хмаринки спадає в 1000 разів на віддалі у $3 \text{ \AA}$ від своєї ями. Це означає, що імовірність того, що за одне коливання електрон відійде від своєї ями на $3 \text{ \AA}$ - порядку 10^{-3} . Електрон в ямі (молекулі пігменту) здійснює $\sim 10^{15}$ коливань в секунду (у видимому світловому діапазоні частот: це добре видно по спектрам поглинання таких молекул). Значить, характерний час його переходу в іншу яму (іншу молекулу пігмента), що знаходиться на віддалі $3 \text{ \AA}$ - порядку 10^{-12} секунд; в яму на віддалі $5 \text{ \AA}$ - порядку 10^{-10} секунд, в яму на віддалі $15 \text{ \AA}$ - порядку 1 секунди. Така залежність швидкостей

переходів від віддалі узгоджується з тим, що спостерігається у фотосинтетичному реакційному центрі.

Суттєвими моментами є:

1) Сумарний перехід здійснюється на віддаль приблизно $40 \text{ \AA}$. Таку віддаль неможливо покрити одним тунельним стрибком. Проте, конструкція білка розбиває цей великий стрибок на чотири малих - від одного пігменту до іншого - і електрон долає цю відстань за доли мілісекунди.

2) Для того, щоб електрон не повернувся з другого пігменту на перший, а пішов далі, на третій, його сумарна енергія повинна падати по ходу процесу. Конструкція фотосинтетичного реакційного центру має забезпечувати таке зниження енергії електрона на пігментах по ходу процесу.

3) Здійснюючи тунельний перехід, електрон не використовує енергію на подолання бар'єру, проте електрон на кожну кроці йде від більш високої енергетичної атомної орбіти до більш низької енергетичної, його енергія понижується - вона йде на те, щоб зробити тунельний перехід ефективним, тобто незворотнім.

4) Тунельний перехід відрізняється від активаційного механізму переходу через енергетичний бар'єр тим, що на швидкість тунельного переходу температура не впливає, а швидкість активаційного переходу (пропорційна

$e^{-\frac{\Delta E_A}{kT}}$, де ΔE_A - енергія активаційного бар'єру, а T - температура) різко зменшується при пониженні температури.

Просторовий устрій кофакторів має вирішальне значення для швидкості і специфіки електронного переносу [13]. Згідно теорії Маркуса швидкість прямого електронного переносу між двома молекулами залежить від трьох факторів: перекриття електронних густин (хвильових функцій) двох молекул; різниці редокс-потенціалів молекул; величини енергії реорганізації, якою називається енергія, необхідна для перебудови молекули при втраті чи придбання електрона. На величину матричного елемента електронного переходу суттєво впливає просторова та електронна структура: при зміні віддалі між кофакторами на доли ангстрем швидкість змінюється у кілька разів.

Численні експерименти, проведені на модельних системах, показали, що на реакційну здатність і ефективність взаємодії редокс-компонентів фотосинтетичних електрон-

транспортних ланок вирішальний вплив має їх оточення [14]. Оточення визначає віддалі між реагентами, їх необхідну орієнтацію, полярність і інші деталі молекулярної організації середовища, що контролюють направленість і швидкості переносу електрона. В природних комплексах РЦ роль цього оточення виконує білок. Ще донедавна вважалося, що фотосинтетичні білки в основному виконують лише функцію носія зв'язаних з ним редокс-кофакторів, ефективність переносу між якими регулюється головним чином високочастотними внутрішньо молекулярними коливаннями самих носіїв, які поглинають частину енергії, яку переносить електрон [15]. Проте наступні дослідження, особливо вивчення температурних залежностей електрон-транспортних процесів у РЦ [16], показали що адекватна фізична картина функціонування цих комплексів може бути одержана лише враховуючи низькочастотні коливання білка. Значимість останніх при цьому значно ширше, ніж просто можливість внесення певного, нехай навіть і суттєвого, вкладу у процеси дисипації частини енергії при стабілізації електрона на редокс-кофакторах. Цілковито можливо, що динамічна організація РЦ служить основою для реалізації конкретних реакційно-здатних станів системи, що ефективно контролюють її функціональну активність. Експериментальні та теоретичні роботи, що підтверджують дану ідею, виконувались різними авторами [17].

Так у роботах А.А.Кононенко, П.П.Нокса і співавторів були детально досліджені різні ділянки електрон-транспортного ланцюга на препаратах фотосинтетичних мембран бактерій *Rb. Sphaeroides* і *R. rubrum*. Було показано, що на початкових стадіях електронного транспорту від Р до проміжного акцептора і потім до Q_A динамічна організація РЦ насамперед служить основою для протікання швидких релаксацій процесів в оточенні первинних реагентів, забезпечує ефективну стабілізацію електрона проміжному акцепторі. У цих процесах б участь система водневих зв'язків РЦ. висновки одержані на основі всесторонні дослідження процесів первинного розділу зарядів при різних напрямлених діях структурно-динамічний стан препара наприклад, в результаті заміщення гідратної в водою різного ізотопного складу, модифік водневих зв'язків і іншими методами. І модифікації водневих зв'язків відбувається за кінетики фото розділення, що веде до зменшення

ефективності процесу, прояву рекомбінації між проміжним акцептором та фотоактивним пігментом.

Важливість розгляду залежності швидкості реакції всередині макромолекулярної системи від особливостей її структури. Під час проходження реакції в системі спостерігаються повільні випадкові коливання навколо геометричного центру реакції. Ці рухи є перпендикулярними по відношенню до координати реакції і можуть бути описані при допомозі дифузії на межі в потенціальному полі сил зв'язку і внутрішньо молекулярних констант швидкостей, що залежать від перпендикулярних ступенів свободи.

Експериментальні дані

У роботі використовувались ізольовані білково-пігментні комплекси РЦ, виділені на кафедрі біофізики Московського державного університету з фотосинтетичних мембран клітин *Rhodobacter sphaeroides* за допомогою детергентів двох типів (холат натрію і Тритон 100). Для забезпечення довготривалої стабільності параметрів РЦ використовувалася водний розчин 0,01 М натрій-фосфатного буфера с рН 7.2 і добавкою 0,05% детергенту. Вимірювання кювета мала розміри $3 \times 5 \times 2,5$ см при товщині стінок 1 мм.

Досліджувалася електронний транспорт при фотозбудженні і релаксації РЦ фотосинтетичних бактерій при різних режимах фотоактивації зразка: 1) при однаковій тривалості (10 с), але дискретно змінній інтенсивності фотозбудження (від 0,2 до 7,2 мВт/см²); 2) при заданій інтенсивності фотозбуджувачого світла ($I = 7,2$ мВт/см²) з різним часом фотоактивації - від 10 до 100 секунд.). Були отримані результати зміни поглинання розчинів з часом при освітленні за допомогою установки, що зображена на Рис.6

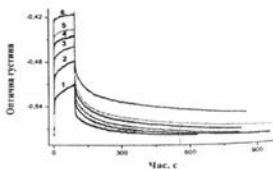


Рис.4. Кінетика зміни оптичної густини при різних інтенсивностях: 1-100,2-250,3-500,4-1000,5-2000,6-3000 у.о.(700у.о.=20Вт/м²), час освітлення—90с.

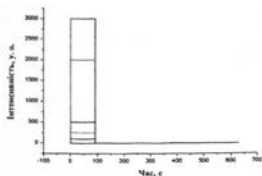


Рис.5. Залежність інтенсивності від часу при першому режимі фотоактивації зразка.

Як видно з графіків (Рис.4) кінетика просвітлення та потемніння розчину залежить від того з якою інтенсивністю ми свіtimo. При збільшенні інтенсивності кінетика відновлення йде повільніше, що може свідчити про вплив ефектів поляризації на процеси електронного внутрішньомолекулярного транспорту.

Результати, отримані для різних значень експозицій, були оброблені за спеціальною процедурою фітування. Коефіцієнт оптичного поглинання можна розкласти на певну кількість експонент за формулою:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i e^{-k_i t},$$

де A_i — ваговий множник, k_i — характерний показник експоненти в с⁻¹.

Процедура фітування відбувається наступним чином. Показник k_i підбирається в межах від 0 до ∞ таким чином, щоб середньоквадратичне відхилення фітуючої кривої від експериментальної було мінімальним. Відповідним чином визначається значення вагового передекспоненційного множника. Знайдені значення фіксуються, і проводиться процедура знайдення показників другої експоненти. В свою чергу, результати фітування для двох експонент використовуються для наступної. Процедура закінчується, коли на черговому кроці відхилення більше за мінімальне.

Ваговий множник першої експоненти (Рис.6) після тривалішого освітлення зменшується, а третьої навпаки — збільшується. Отже, кількість

РЦ, що зазнають конформаційних змін зростає при збільшенні часу фотозбудження. Тобто переважає електронний транспорт, що зумовлений конформаційними змінами.

З графіку (Рис.7) видно, що після тривалості фотозбудження довше 40с., швидкості або характерні показники експоненти відновлення поглинання падають зі збільшенням експозицій, процеси конформаційних змін проходять повільніше. При освітленні РЦ менше 40с. відбуваються процеси, що потребують подальших досліджень і на даному етапі не мають фізичної інтерпретації.

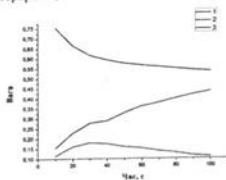


Рис.6. Співвідношення вагових множників експонент (1,2,3) кінетики відновлення після різної тривалості фотозбудження

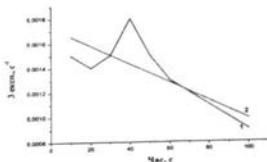


Рис.7. Залежність характерного показника третьої експоненти від часу експозиції(1) з лінійним фітуванням даних(2).

Але особливо цікавою для нас є кінетика релаксації РЦ+фулерен. Взагалі кажучи допущення РЦ фулеренами має забезпечити збільшення часу електронних переходів. Коротко про структуру фулеренів та їх властивості.

Атом вуглецю має електронну оболонку $2s2p$. Ця оболонка забезпечує оптимальну структуру вуглецю, коли сусідні атоми утворюють п'ятикутники і шестикутники. Така структура має місце і в модифікації твердого вуглецю - алмазі та графіті, вона є оптимальною для найбільш стійких кластерів вуглецю. Всі ці кластери мають структуру замкнутої поверхні, на якій знаходяться атоми вуглецю. Ця замкнута поверхня викладена шестикутниками і п'ятикутниками. На Рис. 4 представлено сімейство таких кластерів [21].

Зв'язок між структурою графіту і структурою замкнутого кластеру вуглецю виявляється і в механізмі утворення кластеру. При помітному нагріванні графіту розривається зв'язок між окремими шарами графіту, і що випаровується розбивається на окремі фрагменти. Ці фрагменти представляють собою комбінацію шестикутників, і з них йде далі побудова кластеру.

Необхідно відзначити, що, хоча молекула C_{60} характеризується двома різними типами C-C зв'язків, всі атоми вуглецю в цій молекулі знаходяться в рівнозначному положенні, так що кожен атом належить одночасно двом шестикутникам і одному п'ятикутнику. Це підтверджується характером отриманих в роботі [22] спектрів ядерного магнітного резонансу ^{13}C , які в разі зразка чистого C_{60} складаються з єдиного піку.

Результати досліджень процесів за участю C_{60} та інших фулеренів свідчать про аномально високу стабільність цих сполук вуглецю. До такого висновку привели вже перші експерименти, в яких кластер C_{60} проявив себе серед інших кластерів як кластер з магнічним числом атомів. Дослідження мономолекулярного розпаду кластерів вуглецю з $n \geq 30$ показує, що стабільність кластерів з парними значеннями n значно перевищує стабільність кластерів з непарними значеннями n .

За своєю структурою фулерени можуть розглядатися як тривимірні аналоги ароматичних сполук. Це дозволяє ставитися до хімії фулеренів як до одного з найбільш перспективних напрямів органічної хімії. Одна з найбільш гострих і цікавих проблем хімії фулеренів пов'язана з встановленням можливості впровадження всередину порожнистості сферичної або сфероїдеальної молекули атома різного сорту і вивчення фізико-хімічних властивостей комплексу, що утворюється при цьому.

Тверді фулерени, іноді звані фуллеритами, являють собою напівпровідники, які характеризуються шириною забороненої зони 1,5-1,95 eV (C_{60}) [23] і 1,2 eV (C_{44}) [24].

При кімнатній температурі (приблизно 300 K) молекули фулерену утворюють гранцецентровану кубічну (ГЦК) кристалічну решітку з відстанню між атомами 10,04 Å і постійною решітки $a = b = c = 14,2$ Å. Оскільки сили взаємодії між молекулами C_{60} у кристалі малі, а симетрія дуже висока, то при температурі вище 260 молекули фулерену обертаються. Частота обертання, розуміється, залежить від температури і при $T = 300$ K дорівнює приблизно 10^{12} c^{-1} . При зниженні температури ($T \leq 260$ K) обертання молекул фулерену припиняється. При $T = 260$ K відбувається зміна кристалічної структури фулерену (фазовий перехід 1-го роду) з одночасним заморожуванням обертального руху молекул внаслідок збільшення енергії міжмолекулярної взаємодії. Так звана низькотемпературна фаза фулерену має примітивну кубічну (ПК) решітку.

Елементарна комірка ГЦК - решітки фулерену містить вісім тетраедричних і чотири октаедричні пори. Октаедричні пори, більші за обсягом тетраедричних, тому атоми металу насамперед займають їх. Заповнення атомами тільки октаедричних пор повинно приводити до фуллеритів складу AC_{60} . Якщо ж заповнюються всі пори, включаючи тетраедричні, то склад повинен відповідати формулі A_3C_{60} . Таким чином, фулерен і його похідні - фуллерити мають широко поширені в світі неорганічних мінералів кристалічні решітки, що значно полегшує аналіз їх властивостей в порівнянні з іншими органічними матеріалами.

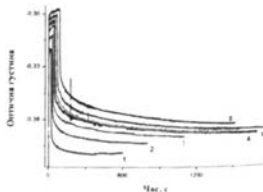


Рис.8. Кінетика релаксації РЦ+фулерен при різному часі активації (1-10с, 2-20с, 3-30с, 4-40с, 5-50с, 6-60с, 7-70с, 8-80с), інтенсивність 7,2 мВт/см².

РЦ дозволяють забезпечити розділення фотогенованих пар носіїв зарядів з імовірністю близькою до 1. Але постає проблема, як ці заряди "забрати". Ми додали до розчину РЦ фулерен, щоб подивитись чи будуть вони якось взаємодіяти. Як видно з графіків (Рис.8) в РЦ до яких в якості акцептора додали фулерен процеси, що в них відбуваються уповільнилися. Тобто тривалість збудженого стану збільшилась від 300с до декількох годин. Отже, при допуванні водного розчину РЦ гідратизованими С₆₀ часи електронних переходів збільшуються. Що говорить про вплив фулерена на повільну кінетику електронного транспорту і відповідно структурні зміни в РЦ. Фулерен є гарним акцептором електронів, тому цікавим є його використання в майбутньому в якості одного з елементів штучної фоточуттєвої системи.

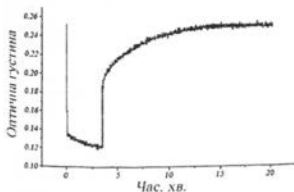


Рис.9. Залежність відображає зміну оптичної густини з часом в розчинах РЦ з детергентом – холат натрія, I=1 мВт/см².

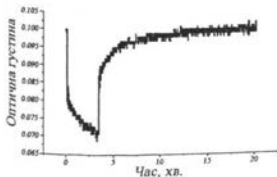


Рис.10. Залежність відображає зміну оптичної густини з часом в розчинах РЦ з детергентом – Тритон 100, I=1 мВт/см².

Висновки

1. Зміна оптичної густини розчинів РЦ *Rhodobacter sphaeroides*, залежить від часу та інтенсивності освітлення. При збільшенні часу чи інтенсивності процеси відновлення йдуть повільніше, що може свідчити про вплив ефектів поляризації на процеси електронного внутрішньомолекулярного транспорту.

2. Отримані залежності оптичного поглинання та кількісні параметри кінетики окислення реакційних центрів при різних режимах фото збудження дозволили розділити кінетику оптичного поглинання на дві частини: швидку та повільну. Швидка характеризує лише електронний транспорт, а повільна – електронний транспорт та повільні конформаційні зміни РЦ.

3. При допуванні водного розчину РЦ гідратизованими С₆₀ часи електронних переходів збільшуються. Що говорить про вплив фулерена на повільну кінетику електронного транспорту і відповідно структурні зміни в РЦ.

4. При виключенні збуджуючого світла значення оптичного поглинання розчину повертається у вихідний стан, що доводить те, що фотоіндуковані зміни в молекулярному комплексі РЦ – оборотні. Вимірювання показника заломлення цього розчину методом голографічної інтерферометрії показує, що зміна об'єму молекулярного комплексу РЦ при його освітленні, становить 0,1% -1%. Така зміна об'єму РЦ може бути викликана зміною кута між зв'язками М, L, Н глобул РЦ, які є найбільш лабільними.

5. Якісне співпадання кінетики відновлення спектрів поглинання зі змінами показника заломлення обох типів РЦ при їх освітленні, підтверджує зв'язок між електронним транспортом та конформаційними змінами в РЦ, а подальша робота над дослідженням допування РЦ фулеренами не втрачає своєї актуальності і наукового інтересу.

Список літератури

1. Шайтан К.В. Конформационная подвижность белка с точки зрения физики // Соросовский образовательный журнал – 1999. - №5. - С. 8 – 13.

2. Рубин А.Б. Биофизика // Москва, Высш. школа-1997.-Т.1.- 320С.; Т.2.-303С.
3. Alden R.G., Parson W.W., Chu Z.T., Warshel A.W. The reaction center of photosynthetic bacteria: structure and dynamics // M.-E. Michel-Beyerle – 2005. - P. 105—115.
4. Шайтан К.В. Молекулярная биология // Москва-2002.-Т. 26- С. 264-284; 2004. - Т. 28-С. 670-678.
5. Петров Э. Г. Фізика перенесення зарядів в біосистемах // Київ, Наукова думка – 2004.-245 С.
6. Deisenhofer J., Epp O., Miki K., Huber R., and Michel H. Structure of the protein subunits in the photosynthetic reaction center of *Rhodospseudomonas viridis* at 3Å resolution // Nature – 2005. – Vol.318 - P. 618–624.
7. Gousha A., Kpoustina M., Kharkyanen V., Holzwarth A. Dynamics Process of Photosynthetic Reaction Centers // J. Phys. Chem. – 2007.- № 38 – P.7612 – 7619.
8. Olson J.M., Tromber J.P. Membrane Proteins in Energy Transduction // New York: Marcel Dekker. - 1999. - P. 279-340.
9. Ario J. de Boer , Sieglinde Neerken , Rik de Wijn , Hjalmar P Permentier , Peter Gast , Erik Vijgenboom High yield of B-branch electron transfer in a quadruple reaction center mutant of the photosynthetic bacterium *Rhodobacter sphaeroides* Biochemistry // Phys.Rev.Letters – 2002. – Vol. 41, № 9. – P. 3081-3088
10. Шайтан К.В. Каким образом электрон движется по белку // Соросовский образовательный журнал – 1999 - №3- С. 55 – 62.
11. Барабаш Ю.М., Заболотный М.А., Соколов Н.И., Харкянен В.Н. Исследование фотондуцированных изменений в протееме реакционных центров бактерий *RB Sphaeroides* штамм-26 методом голографической интерферометрии // Київ: Сучасні інформаційні та енергозберігаючі технології, SIET9-OS - 2001. - Вип.9. - С. 388-391.
12. Stowell, M.H., McPhillips, T.M., Rees, D.C., Soltis, S.M., Abresch, E., Fehér G. Light-induced structural changes in photosynthetic reaction center: implications for mechanism of electron-proton transfer // Science – 2001. - Vol.276 - P. 812-816.
13. Гольдманский В.И., Трахтенберг Л.И., Флеров В.Н. Туннельные явления в химической физике // М., Наука – 2000. - 296С.
14. Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р. Физика в мире полимеров // Москва: Наука - 1999. - 206 С.
15. Katona G., Snijder A., Gourdon P., Andreasson U., Hansson O., Andreasson L.E., Neutze R. Conformational regulation of charge recombination reactions in a photosynthetic bacterial reaction center // Nature Structural & Molecular Biology – 2005. - No 12. - P.630 – 631.
16. W.Schuman, M.Dubas Holographic Interferometry // Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York – 1999. - 189 P.
17. Gousha A. O., Kharkyanen V. N., Scott G. N., Alfred R., Holzwarth A. R. Self- regulation phenomena in bacterial reaction centers // Biophysical Journal. - 2000. - P.1237-1252.
18. Мастеров В.Ф. Физические свойства фуллеренов // Соросовский образовательный журнал – 2003. - №1 – С.92 – 99.
19. Елещкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены // Успехи физических наук, Москва – 2002. – Т.293, №2 - С.33-60.
20. Kratschmer W., Fostiropoulos K., Huffman D. Dusty Objects in the Universe // Phys. Rev. Letters - 2002. - P. 89.
21. Demchenko A.P. A Model for Unidirectional Photoinduced Charge Separation // Physics of the Alive – 2006. - Vol.4, №1 – P.73– 82.
22. Coxd.M. et al . Fullerenes // Washington: Am. Chem. Soc. Publ., - 2002.- Vol.481 - P. 117.
23. Ajje H. et al. Trapping conformational intermediate states in the reaction center protein from photosynthetic bacteria // J. Phys. Chem. V. 94, P. 8630
24. Вест Ч. Голографическая интерферометрия // Москва - 1998 г. – 504С.
25. Кукушкин А.К., Тихонов А.Н. Лекции по биофизике фотосинтеза // М.: МГУ -1999.- 320 С.
26. Barabash Yu. M., Berezhetskaya N. M., Christophorov L. N., Gousheva A. O., Kharkyanen V. N. An application of wavefront reconstruction // J. Chem. Phys – 2002. - Vol. 116, №10 - P.4339 – 4352.

Надійшло до редколегії 29.11.2011

УДК 539.213

Захаренко М.І., д.ф.-м.н., проф.,
Семенко М.П., д.ф.-м.н., доц.,
Орленко М.В., асп.,
Наконечна О.І., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Сендєцький О.В., студ.**Магнітні властивості та електроопір
швидкозагартованих сплавів на основі
системи Fe-Si-B**

Досліджені температурні залежності магнітної сприйнятливості складнолегованих сплавів на основі $Fe_{82}Si_4B_{12}$. Визначені температура кристалізації, точка Кюрі та локалізований магнітний момент на атом магнітоактивного компонента. Встановлено, що легування Mn і Mo не лише зменшує обмінну взаємодію в системі d-електронів, а й стимулює формування антиферомагнітних кластерів з майже скомпенсованим моментом. Показано, що кластероутворення відображається і на температурних залежностях електроопору у вигляді внеску, зумовленого ефектами слабкої локалізації.

Ключові слова: аморфні сплави, магнітний момент, температура Кюрі, електроопір, слабка локалізація.

*E-mail: smp@univ.kiev.ua

Швидкозагартовані металеві сплави являють собою класичний приклад систем, яким притаманна не лише хімічна, а й топологічна неупорядкованість, що і веде до формування унікального комплексу функціональних властивостей [1–3]. Виходячи з наявної у літературі інформації, можна стверджувати, що в останній час особливий інтерес з точки зору перспектив практичного застосування привертають швидкозагартовані сплави на основі системи Fe-Si-B [3–5].

На сьогодні однозначно встановлено, що відповідальною за феромагнетизм аморфних металевих сплавів (АМС) на основі металів групи заліза, так само як і в кристалічних сплавах, є обмінна взаємодія 3d-електронів сусідніх атомів, а специфіка магнітних властивостей АМС обумовлена, в основному, локальним оточенням кожного атома перехідного металу, яке суттєво залежить від складу АМС, способу та умов їх одержання і наступної обробки. Основна проблема керування характеристиками

M.I.Zakharenko, Dr.Sci.,
M.P.Semen'ko, Dr.Sci.,
M.V.Orlenko, PhD. stud.,
O.I.Nakonechna, PhD.,
O.V.Sendetskyi, stud.**Magnetic properties and electric resistivity
of the rapidly quenched alloys on the base of
Fe-Si-B system**

Temperature dependencies of magnetic susceptibility of the complexly doped alloys on the base of $Fe_{82}Si_4B_{12}$ have been investigated. Crystallization temperature, Curie point and localized moment per atom of magnetic constituents have been determined. Mn and Mo dopants were shown not only to reduce the exchange interaction in the system of d-electrons but also to promote the formation of antiferromagnetic clusters possessing almost zero magnetic moment. The detected cluster formation manifests in the temperature dependencies of resistivity in a form of additional contribution due to weak localization effects.

Key Words: amorphous alloys, magnetic moment, Curie temperature, electric resistivity, weak localization.

магнітного упорядкування АМС полягає в оптимізації складу сплавів, технології їх одержання й обробки для забезпечення заданої структури, якій притаманний необхідний комплекс магнітних параметрів [6,7].

В цій роботі представлені результати експериментального дослідження впливу комплексного легування перехідними металами на магнітні та резистивні характеристики швидко загартованих сплавів на основі системи $Fe_{82}Si_4B_{12}$.

Приготування зразків та методика експерименту. Як об'єкти дослідження були використані швидкозагартовані металічні сплави на основі $Fe_{82}Si_4B_{12}$ у формі стрічок шириною 20–25 мм і товщиною 28–40 мкм. Досліджувані АМС відрізняються вмістом легуючих домішок (Ni, Mo, Co, Mn, Nb). Їх склад наведений в Таблиці 1. Всі сплави були виготовлені методом спінигування розплаву з використанням вихідних компонентів високої чистоти.

Магнітну сприйнятливість χ в інтервалі температур $T=300-900$ К вимірювали методом

Фарадея на автоматизованому магнітометрі в середовищі гетерованого аргону. Відносна похибка у визначенні χ не перевищувала 1%. Швидкість зміни температури при одержанні термомагнітних кривих $\chi(T)$ складала 8 К/хв. Електричний опір визначали в температурному інтервалі 77–950 К за чотирисондовою методикою на зразках прямокутної форми довжиною 35–40 мм та шириною ~1 мм.

Експериментальні результати та їх обговорення. Температурні залежності магнітної сприйнятливості $\chi(T)$, отримані за викладеною вище методикою, виявилися подібними для всіх досліджуваних АМС. Як приклад, на рис.1 наведена типова з отриманих залежностей $\chi(T)$.

Загальний характер термомагнітних кривих дозволяє зробити висновок, що вони є феромагнітними при не дуже високих температурах. При зростанні температури намагніченість зразків швидко зменшується і при досягненні певної температури, яка є точкою Кюрі аморфного стану T_c , вони характеризуються більш або менш широкою областю (200–350 К) існування парамагнетизму у межах стабільності аморфного стану. При подальшому нагріванні спостерігається суттєве зростання χ завдяки утворенню феромагнітних кристалічних фаз з набагато вищими, ніж у аморфному стані, температурами Кюрі.

Значення температури Кюрі досліджених АМС визначались за кривими $\chi(T)$ стандартним способом [8] і наведені у Таблиці 1. З їх порівняння видно, що значення T_c загалом зменшуються при зменшенні вмісту заліза, як це і слід було очікувати, виходячи з наявних у літературі даних [9]. Така поведінка T_c відображає зміну величини обмінної взаємодії при легуванні і свідчить про сильну феромагнітну взаємодію між атомами магнітоактивних

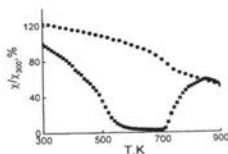


Рис.1 Температурні залежності χ АМС $\text{Fe}_{70}\text{Ni}_3\text{Mo}_2\text{Nb}_1\text{Mn}_2\text{Si}_4\text{B}_{12}$ при нагріванні (•) та охолодженні (•).

елементів. При додаванні до АМС молибдену (для порівняння – сплави №1 і №2) спостерігається суттєве зменшення T_c , що може бути зумовлене антиферомагнітним характером взаємодії зазначених домішок з атомами магнітоактивних компонентів. Дійсно, для аморфних феромагнітних сплавів типу ПМ-М, як відомо, застосовна модель Гейзенберга. За цією моделлю всі атомні магнітні моменти (спіни) повністю локалізовані і мають цілком визначену величину, а обмінна взаємодія між ними призводить до встановлення феромагнітного порядку. Згідно моделі Гейзенберга, величини T_c прямо пов'язані з обмінним інтегралом J_{ij} , який описує взаємодію d -електронів атомів металу у сусідніх вузлах ґратки і та f [5]:

$$T_c = \frac{2S(S+1)}{3k_B} \sum_{ij} J_{ij} \quad (1)$$

де S – спінове число атома, k_B – постійна Больцмана, сумування проводиться по всіх найближчих сусідах.

Таблиця 1

Хімічний склад, температура Кюрі (T_c), температури початку ($T_{\text{зм}}$) і закінчення ($T_{\text{зк}}$) кристалізації, інтервал кристалізації (ΔT) та магнітний момент у розрахунку на атом магнітоактивного елемента ($\mu_{\text{ат}}$) складнолегованих АМС на основі $\text{Fe}_{34}\text{Si}_6\text{B}_{12}$.

№	Склад	T_c , К	$T_{\text{зм}}$, К	$T_{\text{зк}}$, К	ΔT , К	$\mu_{\text{ат}}$, μ_B
1	$\text{Fe}_{77}\text{Ni}_3\text{Mo}_2\text{Nb}_2\text{Si}_4\text{B}_{12}$	502	744	804	60	6,8
2	$\text{Fe}_{78}\text{Ni}_3\text{Nb}_1\text{Mn}_2\text{Si}_4\text{B}_{12}$	546	756	798	42	5,2
3	$\text{Fe}_{76}\text{Ni}_3\text{Mo}_2\text{Nb}_1\text{Mn}_2\text{Si}_4\text{B}_{12}$	476	785	833	48	4,9
4	$\text{Fe}_{75}\text{Ni}_3\text{Mo}_2\text{Nb}_2\text{Mn}_2\text{Si}_4\text{B}_{12}$	495	822	859	37	5,0
5	$\text{Fe}_{75}\text{Ni}_3\text{Co}_2\text{Mo}_2\text{Nb}_2\text{Mn}_2\text{Si}_4\text{B}_{12}$	485	811	885	58	4,0

Величина обмінної взаємодії визначається природою найближчих сусідів і тому T_c феромагнітних аморфних сплавів чутлива до будь-якої зміни у хімічному та топологічному ближніх порядках в АМС. Отже, знайдені зміни температури Кюрі при легуванні базового АМС безпосередньо відображає зміну обмінної взаємодії в системі d -електронів при комплексному легуванні досліджуваних сплавів, зокрема, її зменшення при додаванні Мо та Мп. Така модифікація обмінних інтегралів у загальній картині обмінних взаємодій, як відомо, може супроводжуватися утворенням магнітних кластерів з різним характером спінового упорядкування [10]. Додаткову інформацію щодо утворення кластерів дає величина локалізованого магнітного моменту. Значення локалізованого магнітного моменту у розрахунку на атом магнітоактивного елемента (Fe, Co, Ni) μ_M визначали з кривих $\chi(T)$ для інтервалу температур $T_c > T > T_a$ за сталою Кюрі C [11], використовуючи рівняння:

$$\mu_M = 2,84\sqrt{C}/c_M, \quad (2)$$

де c_M – атомна частка магнітоактивних компонентів. Одержані значення μ_M наведені у Таблиці 1. Видно, що для всіх досліджених АМС локалізований магнітний момент виявився помітно більшим, ніж навіть відповідна величина для парамагнітного заліза [11], що може свідчити про формування феромагнітних атомних кластерів при легуванні базового АМС кобальтом та нікелем. Разом з тим, додавання до АМС атомів молібдену і особливо марганцю супроводжується суттєвим зменшенням μ_M . Цей факт, на нашу думку, може бути зумовлений тим, що зазначені домішкові атоми стимулюють формування антиферомагнітних кластерів з майже скомпенсованим магнітним моментом. Це добре узгоджується з наведеними вище закономірностями зміни температури Кюрі при легуванні. Проведені нами оцінки розмірів антиферомагнітних кластерів свідчать про те, що кожен атом Мп гасить магнітні моменти приблизно восьми магнітоактивних атомів у своєму найближчому оточенні.

Як уже відмічалось, кристалізація досліджуваних АМС супроводжується суттєвим зростанням сприйнятливості завдяки утворенню феромагнітних кристалічних фаз з набагато вищими, ніж у аморфному стані, температурами

Кюрі. В Таблиці 1 наведені значення температур початку (T_m) та закінчення ($T_{\text{за}}$) кристалізації. Навіть побіжний аналіз цих результатів вказує на те, що кристалізація досліджуваних АМС відбувається у досить широкому температурному інтервалі, а величина T_m зростає при легуванні АМС, особливо, при додаванні Мп. Форма вітки охолодження кривих $\chi(T)$ свідчить про те, що після нагрівання до 900 К утворюються дві феромагнітні фази, точки Кюрі яких залежать від складу вихідного АМС. Як відомо, кристалізація подібних АМС відбувається за схемою:



(за результатами рентгенівського фазового аналізу така схема виявилася справедливою і для досліджуваних АМС).

Результати вивчення резистивних характеристик представлені на рис.2, на яких наведені значення нормалізованого опору $r=R/R_{300}$ Всі досліджені АМС, за винятком АМС №2, мають широку область нелінійності кривої $r(T)$ і характеризуються малими значеннями температурного коефіцієнта опору (ТКО) α_{300} , який має тенденцію до зменшення по мірі збільшення сумарного вмісту легуючих компонентів. „Лінійність” залежності $r(T)$ АМС №2, скоріш за все, зв'язана з відсутністю в ньому Мо. На всіх залежностях $r(T)$, як і в більшості АМС на основі заліза, особливостей, пов'язаних з переходом в парамагнітний стан, не спостерігається. Для сплавів №№ 3-5 має місце мінімум електроопору різної глибини, наслідком чого є від'ємне значення α_{300} у АМС №3 та №5, та досить мала, але додатна його величина у АМС №4. Значення T_m складають 175, 130 та 140 К у АМС №№ 3, 4 та 5, відповідно. Зазначені особливості залежностей $r(T)$ свідчать про те, що механізм Фабера-Займана є не єдиним, що описує розсіювання носіїв. Аналіз показав, що температурні залежності електроопору можуть бути добре описані рівнянням:

$$r(T) = r_{03} + \Delta r = b_0 + b_1 T + \Delta r, \quad (3)$$

де r_{03} – складова, зумовлена механізмом Фабера-Займана, а Δr – внесок від інших механізмів розсіяння. Розраховані на основі експериментальних даних та рівн. (3) залежності $\Delta r(T)$ від температури мають вигляд:

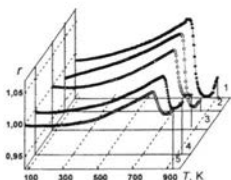


Рис.2 Температурні залежності $r=R/R_{300}$ AMC на основі $\text{Fe}_{82}\text{Si}_6\text{B}_{12}$ (номери кривих відповідають нумерації сплавів в табл.1).

$$\Delta r(T) = e_0 - e_s T^{4/2}. \quad (4)$$

Залежність (4) передбачає наявність мінімуму електроопору при температурі $T_{\min}$, яку можна знайти з виразу:

$$T_{\min} = [e_s / (2b_1)]^2. \quad (5)$$

Температуру T_0 , при якій внесок $\sim T^{1/2}$ зникає, можна отримати з умови $\Delta r(T) = 0$:

$$T_0 = [e_0 / e_s]^2. \quad (6)$$

Отже, розглянуті особливості електроопору легованих AMC на основі $\text{Fe}_{82}\text{Si}_6\text{B}_{12}$ свідчать про суттєвий вплив легувальних домішок Mn та Mo на параметри розсіяння електронів провідності,

Таблиця 2

Резистивні характеристики досліджуваних сплавів.

№	$\alpha_{300}, 10^4 \text{ K}^{-1}$	$\alpha_{100}, 10^4 \text{ K}^{-1}$	e_0	$e_s, \text{K}^{-1/2}$
1	0,71	0,17	0,067	0,00294
2	0,81	0,69	0,046	0,00204
3	0,41	-0,26	0,084	0,00382
4	0,55	0,06	0,088	0,00375
5	0,14	-0,16	0,345	0,0133

який зводиться до появи додаткового внеску в

електроопір $\sim T^{4/2}$ і свідчить про наявність локалізаційних ефектів в досліджених AMC.

Список використаних джерел

1. Hasegawa R. Present status of amorphous soft magnetic alloys // J.Magn. Magn.Mater. – 2000. – **215–216**. – P. 240–245.
2. Kovalenko N.P., Krasny Yu.P., Krey U. Physics of amorphous alloys. – Berlin: Wiley-VCH, 2001. – 280 c.
3. Lu W., Yan B., Li Y., a.o. Structure and soft magnetic properties of V-doped Finemet-type alloys // J.All.Comp. – 2008. – **454**. – P.L10-L13.
4. Ding Y., Liu X., Zhao S., a.o. Magnetic properties of nanocrystalline Finemet alloys with Co additions // J.All.Comp. – 2007. – **440**. – P.220-224.
5. Chau N., Hoa N.Q., The N.D., a.o. The effect of Zn, Ag and Au substitution for Cu in Finemet on the crystallization and magnetic properties // J.Magn. Magn.Mater. – 2006. – **303**. – P.e415-e418.
6. Fernandes A., Perez M.J., Tejedor M.et al. Thermomagnetic analysis of amorphous $(\text{Co}_{0.9}\text{Fe}_{0.1})_{73}\text{Nb}_7\text{Cu}_1\text{Si}_{13}\text{B}_9$ metallic glasses // J.Magn.Magn.Mater. – 2000. – **221**, №3. – P.338-344.
7. Babich M., Orlenko M., Zakharenko M. Magnetic properties of amorphous and nanocrystalline FINEMET type iron-based alloys // Func. Mater. – 2006. – **13**, № 1. – P.192-196.
8. Вонсовский С.В. Магнетизм. – М.: Наука, 1971. – 1032 с.
9. Dolocan V., Dolocan E. Curie temperatures of amorphous Fe-B-Si // J.Magn.Magn.Mater. – 1992. – **117**, №1-2. – p. 133–137.
10. Шнак А.П., Куцацький Ю.А., Захаренко М.І., Волощенко А.С. Магнетизм аморфних та нанокристалічних систем. – К.: Академперіодика, 2003. – 232 с.
11. Babich M., Atmani H., Semen'ko M., Zakharenko M. The investigation of FeZrB nanoperm-type metallic glass // Mater. Sci. Forum. – 2001. – **373–376**. – P. 281–285.

Надійшла до редколегії 29.12.2011р

УДК 539.12

Зизак М.В., аспірант, Васильєв Ю.О., к.ф.-м.н.,
Кисіль І.В., д.ф.-м.н., проф.M.V. Zyzak, Ph.D. student, I.O. Vassiliev, Dr.,
I.V. Kisel, Dr. Sc., Prof.**Швидка реконструкція K^0 , мезонів у експерименті CBM****Fast reconstruction of K^0 , mesons in the CBM experiment**

Одна з найважливіших задач майбутнього експерименту CBM (FAIR, Німеччина) – реконструкція короткоживучих частинок, особливо частинок, до складу яких входять дивні або чарівні кварки. Експеримент потребує повної реконструкції заряджених та короткоживучих частинок в режимі реального часу при частоті зіткнень до 10^7 Гц та великій щільності заряджених частинок (до 1000 на зіткнення). У статті описано швидкий та ефективний алгоритм реконструкції K^0 , мезонів та наведено результати, отримані з його використанням.

One of the most important tasks of the future CBM experiment (FAIR, Germany) is a reconstruction of short lived particles, especially those, which contain strange or charm quarks. The experiment requires the full online reconstruction of charged and short-lived particles with an event rate up to 10^7 Hz and a high density of charged particles (up to 1000 per collision). A fast and efficient algorithm for K^0 , mesons reconstruction is given in the article. The results, which have been obtained with the algorithm, are discussed.

Ключові слова: CBM, важкі іони, фізика високих енергій, реконструкція елементарних частинок.

Key Words: CBM, heavy ions, high energy physics, elementary particles reconstruction.

*E-mail: m.zyzak@gsi.de

Фізика CBM експерименту

Розрахунки квантової хромодинаміки та численні експериментальні результати передбачають складну структуру фазової діаграми баріонної матерії та існування, можливо, фазового переходу від адронних до партонних ступенів вільності (фаза кварк-глюонної плазми). Основною метою CBM (Compressed Baryonic Matter) експерименту [1], проведення якого планується на прискорювальному комплексі FAIR у Німеччині, є дослідження властивостей сильно-взаємодіючої баріонної матерії за високих густин та середніх температур і вивчення її фазової діаграми. CBM експеримент розробляється як експеримент з фіксованою мішенню. Основний детектор для реконструкції траєкторій заряджених частинок (треків) – STS (Silicon tracking system). За проектом він буде побудований з восьми детекторних станцій, що розташовані у магнітному полі на відстанях від 30 до 100 см від мішені. Кожна зі станцій буде складатися з тонких двосторонніх мікро-стріпових детекторів, роздільна здатність яких становить близько 10 мкм по X координаті та 90 мкм по Y.

Одним з передбачених ефектів, що повинен спостерігатися за умови існування стану кварк-глюонної плазми, є збільшення виходу частинок, що мають у своєму складі щонайменше один дивний чи чарівний кварк. Це спричинено тим, що за умов кварк-глюонної плазми кварки рухаються вільно та зростає імовірність розриву утвореної пари кварк-антикварк та об'єднання дивного або чарівного кварку з іншими кварками під час адронізації речовини в дивні або чарівні частинки.

Однією з таких частинок є K^0 , мезон, що є дивною частиною. Також вивчення K^0 , робить можливим дослідження фазового об'єму в області малих p_T , оскільки продукти його розпаду при малих p_T з великою імовірністю потрапляють у детектор; такі дослідження неможливі при вивченні розподілу первинних заряджених частинок. Іншою причиною, що робить K^0 , частинкою цікавою для реконструкції, є її високий вихід: наприклад, при зіткненні золота з золотом за енергій 25 GeV на нуклон утворюється приблизно 12.5 частинок на кожне зіткнення. Такий високий вихід дозволяє використовувати K^0 , для моніторингу світимості під час проведення експерименту в режимі реального часу.

Більшість спостережуваних ефектів у експерименті CBM є надзвичайно рідкісними сигналами, тому за експериментальною програмою експерименту частота зіткнень іонів має досягати 10^7 Гц. Відсутність простих критеріїв відбору подій накладає вимогу повної реконструкції кожної події – реконструкції всіх заряджених частинок, а також частинок, які розпадаються на заряджені фрагменти. За таких надзвичайно складних умов швидкість алгоритмів пошуку та реконструкції частинок відіграє ключову роль. За сучасних умов розвитку обчислювальної техніки одним з основних шляхів підвищення швидкості розрахунків є розпаралелювання задач між ядрами мікропроцесорів та використання векторних інструкцій мікропроцесорів (SIMD інструкцій).

Для пошуку та реконструкції K^0 , мезонів використовувалися лише STS детектор CBM експерименту, детектори для ідентифікації сорту частинок не використовувалися. Це можливо завдяки високій роздільній здатності STS детектора та високому виходу K^0 , мезонів.

Для реконструкції треків у детекторі STS використовується метод клітинного автомату [2,3], який показав себе найбільш придатним для надзвичайно складних умов проведення експерименту: до 1000 заряджених частинок, неоднорідне магнітне поле, надзвичайно високі частоти зіткнень.

Оскільки експеримент в основному розрахований на реєстрацію заряджених частинок, досліджено основний канал розпаду K^0 , – розпад на π^+ та π^- мезони. Імовірність розпаду за даним каналом складає 69.2%. Інші канали розпаду або мають у своєму складі нейтральні піони, що не реєструються трекінговою системою, або мають імовірність розпаду на кілька порядків меншу.

Алгоритм відбору та реконструкції частинок

Запропонований алгоритм пошуку та реконструкції K^0 , мезонів складається з кількох етапів. На першому етапі уточнюються параметри треків, що було знайдено в детекторі, методом фільтра Калмана. Для реконструкції параметрів треків методом фільтра Калмана використовується швидкий алгоритм, що базується на SIMD інструкціях [4]. Для подальшого розгляду відбираються треки, параметри та коваріаційна матриця яких скінченні та для яких відношення χ^2 до кількості ступенів вільності менше 10.

Після уточнення параметрів відбираються реконструйовані треки заряджених частинок, які відповідають припущенню, що вони вторинні, тобто утворені не безпосередньо під час зіткнення ядер, а внаслідок розпаду інших частинок. Треки, які утворюються при розпаді K^0 , мезонів мають добре відділятися від точки первинної вершини, оскільки ст для K^0 , складає 2.68 см (тут c – швидкість світла, τ – власний час життя частинки). Враховуючі релятивістські ефекти, пробіг частинок у лабораторній системі становить біля 10 см. Для зменшення кількості треків, що утворилися безпосередньо в області первинної вершини, відбираються лише треки, для яких χ_{prim}^2 приймає значення більші за 3. Тут χ_{prim}^2 – відстань від треку до первинної вершини у площині первинної вершини нормована на сумарну похибку визначення положення треку та первинної вершини.

З відібраних треків конструюються частинки-кандидати. У свою чергу частинка-кандидат має відповідати наступним критеріям: параметри частинки та її коваріаційна матриця повинні бути скінченними, відношення χ^2 -критерію до кількості ступенів вільності частинки має бути менше 3. Параметр 3 було обрано після дослідження розподілів відповідної величини для частинко-кандидатів, що відповідають реальним сигналам від частинок та фону.

Для досягнення максимальної швидкості реконструкції алгоритм повністю базується на SIMD інструкціях. Більшість сучасних мікропроцесорів мають у своєму складі модуль для векторних розрахунків – SIMD (Single instruction multiply data) модуль. Векторні розрахунки дозволяють проводити елементарні математичні та логічні операції з кількома змінними одночасно. На сьогодні для більшості процесорів це 4 змінні в одинарній та 2 у подвійній точності. Але вже сьогодні існують процесори, для яких кількість змінних у SIMD векторі складає відповідно 8 та 4, анонсовано вихід процесорів з шириною SIMD вектора 16 та 8 відповідно.

Для прискорення алгоритму його змінні зберігаються в одинарній точності, що дозволяє більш ефективно використовувати SIMD інструкції, зберігати більший об'єм даних у кеш пам'яті мікропроцесора та зменшити кількість звернень до основної пам'яті комп'ютера.

Для конструювання частинки використовується пакет KFPARTICLE [5], що базується на фільтрі Калмана. Модель частинки, якою оперує пакет, включає в себе 7 параметрів:

З координати, з компоненти імпульсу та енергію. Ці параметри обрано, оскільки саме вони зазвичай використовуються для опису фізичних об'єктів та не залежать ні від геометрії детектора, ні від умов проведення експерименту. KFPARTICLE дозволяє повністю реконструювати частинку: знайти вершину її розпаду, знайти енергію частинки та її імпульс. Разом з реконструкцією параметрів частинки за методом фільтра Калмана проводиться оцінка коваріаційної матриці, що дозволяє отримати не лише параметри, а і точність їх визначення та розрахувати значення критерію χ^2 .

Для досягнення максимальної швидкості алгоритму пакет KFPARTICLE також було переведено в одинарну точність та на SIMD інструкції. Для прискорення розрахунків для транспорту частинок у магнітному полі пакет використовує спрощену аналітичну формулу екстраполяції параметрів частинки [6]. Формула отримана шляхом розкладу розв'язку рівнянь руху зарядженої частинки в магнітному полі в ряд Тейлора. В залежності від необхідної точності розрахунків обирається кількість доданків ряду, що дозволяє знаходити оптимальне відношення між точністю та швидкістю. Формула має точність аналогічну методу Рунге-Кутта четвертого порядку, у той час як швидкість її роботи у два рази більша.

Також для більш ефективного використання SIMD інструкцій карта магнітного поля при реконструкції частинок була замінена на апроксимоване поле. Для цього кожна з трьох компонент поля апроксимується вздовж траєкторії руху дочірніх частинок параболою, що залежить від z координати. Магнітне поле в експерименті CBM має плавний характер без різких змін, тому апроксимація параболою має достатню точність для задачі, що розглядається. При реконструкції материнської частинки розраховується середнє значення магнітного поля у точці розпаду частинки, первинній вершині та у точці, що лежить посередині між ними з використанням апроксимації поля дочірніх частинок. По отриманим значенням проводяться відповідні параболі.

Результати та обговорення

Для проведення тесту алгоритму використовувалися дані, симульовані з використанням UrQMD моделі. Моделювалися зіткнення іонів золота по золоту (Au+Au) за енергій 25 GeV на нуклон. Досліджувалися дві категорії зіткнень: з довільним прицільним

Таблиця 1
Ефективність реконструкції K^0 мезонів

Система	ϵ_1 , %	ϵ_2 , %	ϵ_3 , %
Au+Au, центральні	25.0	40.1	64.2
Au+Au, усі зіткнення	26.5	44.0	64.5

параметром іонів та з прицільним параметром рівним нулю. Зіткнення, що належать другій категорії, називаються центральними зіткненнями. Вони є цікавими з точки зору реконструкції, оскільки алгоритм повинен бути розрахований на найбільш важкі умови, а множинність треків у таких зіткненнях максимальна, тому комбінаторний фон і час обробки зіткнення також максимальні. Середня кількість знайдених заряджених частинок на зіткнення для категорій треків, що розглядаються, становить 120 та 590 відповідно.

Одним з основних параметрів, що характеризує якість реконструкції частинок, є ефективність реконструкції. Для аналізу алгоритму було розраховано 3 типи ефективності: ϵ_1 – нормована на кількість усіх згенерованих K^0 частинок; ϵ_2 – нормована на кількість K^0 частинок, для яких обидві дочірні частинки вважаються такими, що можуть бути реконструйовані (мають імпульс більший за 100 MeV/c та провзаємодіяли хоча б з 4 послідовними станціями детектора); ϵ_3 – нормована на кількість K^0 частинок, для яких

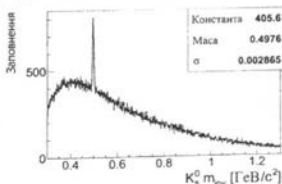
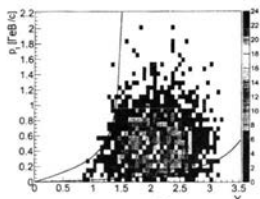


Рис. 1 Масовий спектр реконструйованих K^0 мезонів

обидві дочірні частинки реконструйовані. Таким чином, за визначенням ϵ_1 характеризує ефективність детектора в цілому, ϵ_2 – ефективність детектора з урахуванням геометричного фактора, ϵ_3 – власною ефективністю алгоритму реконструкції K^0 мезонів. Відповідні

Рис. 2 Фазовий об'єм для K^0 мезонів

ефективності наведено в Таблиці 1. З наведених значень видно, що ефективність власно методу реконструкції частинок практично не залежить від множинності треків. Зменшення ефективності ϵ_2 для центральних зіткнень у порівнянні з зіткненнями з довільним прицілним параметром зумовлене незначним зменшенням ефективності пошуку траєкторій вторинних заряджених частинок у зв'язку з підвищенням множинності треків. Ефективність ϵ_3 не становить 100%, оскільки ми не завжди можемо відрізнити сигнал від фону, що обумовлено вимогами домінування сигналу над фоном. Якщо залишити лише вимоги на скінченність параметрів треків та частинок, ефективність складає 98%.

Спектр мас, який отримано для реконструйованих частинок у центральних зіткненнях, наведено на Рис. 1 (для зіткнень з довільним прицілним параметром спектр мас ідентичні характеристики). Область спектру від 0.4 до 0.6 GeV/c^2 було описано сумою поліноміальної функції (для діапазону мас, що розглядається фон добре описується поліномом другого порядку) та функції Гауса. Отримано значення положення піку – 497.6 MeV/c^2 , що

дуже добре узгоджується з табличним значенням. Ширина розподілу складає 28.7 MeV/c^2 . Відношення сигналу до фону розраховане як відношення інтеграла отриманої функції Гауса до відношення інтеграла поліноміальної функції, що описує фон, у межах $\pm 2\sigma$ від отриманого положення центру піка. Розраховане відношення сигналу до фону складає 0.62.

На Рис. 2 приведено розподіл K^0 мезонів у фазовому об'ємі. Лініями показано геометричну ефективність детектора для заряджених частинок. З розподілу видно, що K^0 мезони дозволяють вивчати область фазового об'єму з малими значеннями p_T .

Для визначення швидкості алгоритму проводилися тести на комп'ютері з процесорами Intel Xeon E7-4860 (2.27 ГГц). На зіткненнях з довільним прицілним параметром алгоритм показав швидкість 3 мс на зіткнення.

Висновки

Розроблено швидкий алгоритм реконструкції K^0 в експерименті CBM. Алгоритм показав високу ефективність пошуку частинок, що складає 64% при рівні відношення сигналу до фону 0.62. Застосування пакету KFParticle для знаходження параметрів частинки дозволяє отримати табличні значення маси мезону при стандартному відхиленні розподілу 28.7 MeV/c^2 . Застосування векторних операцій при розрахунках та швидких методів реконструкції параметрів треків та частинок дозволяє досягнути швидкості алгоритму 3 мс для зіткнень золото-золото за енергій 25 GeV на нуклон.

Подяки

Автори висловлюють щирі подяку проф. докт. ІІ. Зенгеру (P. Senger) та Центру Гельмгольца GSI за надання можливості проведення цієї роботи.

Список використаних джерел

1. B. Friman, C. Hohn, J. Knoll, et al. The CBM Physics Book. - Heidelberg: Springer, 2010. - 1014 p.
2. І. С. Кулаков, І. В. Кучіль, М. В. Зизак. Пошук траєкторій частинок у вершинному детекторі експерименту CBM // Ядерна фізика та енергетика. - 2011 - Т. 12 №3 - стр. 307 - 310.
3. I. Kisel. Event reconstruction in the CBM experiment // Nucl. Instr. and Meth. - 2006. - Vol. A566. - P. 85 - 88.

4. S. Gorbunov, U. Kebschull, I. Kisel, et al. FastSIMDized Kalman filter based track fit // Comp. Phys. Comm. - 2008. - Vol. 172. - P. 374 - 383.
5. S. Gorbunov and I. Kisel. Reconstruction of decayed particles based on the Kalman filter. // CBM-SOFT-note-2007-003 - 7 May 2007. - 16.
6. S. Gorbunov and I. Kisel. Analytic formula for track extrapolation in non-homogeneous magnetic field. // Nucl. Instr. And Meth. - 2006. - Vol. A559. - P. 148-152.

Надійшла до редакції 20.01.2012р.

УДК 535.36

Карленко Б.В.^{*}, асп.
Макаренко О.В., к. ф.-м.н., доц.
Поперенко Л.В., д. ф.-м.н., проф.**Вплив забруднень на розсіювальні
характеристики поляроїдних плівок**

В роботі експериментально отримано кутові розподіли інтенсивності розсіяного світла поляроїдною плівкою при малих кутах розсіяння. Показано, що забруднення поверхні та шарувата структура плівки значною мірою впливають на індикатрису розсіяння, що має бути враховано при обробці експериментальних даних. За допомогою оптичного мікроскопу визначено розміри забруднювальних центрів.

За отриманими результатами оцінено товщини плівки, яка склала 50 мкм.

Ключові слова: оптика, поляризація, розсіяння

B.V. Karlenko, PhD stud.,
O.V. Makarenko, PhD, as. prof.,
L.V. Poperenko, Dr. Sci., Prof.**The influence of contamination on the
polaroid film scattering characteristics**

We have experimentally obtained the angular distributions of the intensity of scattered light by polaroid film at small scattering angles. The research results showed that the contamination and inhomogeneous structure of the layered film greatly affects the scattering indicatrix that must be taken into account at the experimental data processing. Using optical microscope the sizes of polluting centers were defined.

Key Words: optics, polarization, scattering.

*E-mail: opposite.ps@gmail.com

Вступ

Оптичні методи дослідження є одними з інформативних при дослідженні внутрішньої структури та властивостей речовини. Використання гоніофотометричних досліджень, зокрема вимірювання кутового розподілу розсіяного світла, являється невід'ємною складовою багатьох технологічних процесів. Тому в текстильній, паперовій та нафтопереробній промисловостях, на підприємствах по виготовленню лаків, фарб або пластмас широко застосовують гоніофотометричні вимірювання. Більше того, успішне освоєння космосу за останні десятиріччя відкрило нові можливості для застосування гоніофотометрії. В зв'язку з цим постійно зростає необхідність в підвищенні точності вимірювання гоніофотометричних характеристик.

Найважливішою спектрофотометричною характеристикою слід вважати спектральний коефіцієнт відбивання. Цей коефіцієнт визначається як відношення світлового потоку, який розсіяний зразком, до світлового потоку, що розсіяний еталоном при тих самих умовах освітлення та спостереження розсіяного світла. В загальному випадку це відношення змінюється при зміні відповідних умов.

При вимірюванні спектрального коефіцієнту відбивання виникають метрологічні та технологічні складнощі, які можливо подолати, якщо з великою точністю відома індикатриса розсіяння світла об'єктом дослідження. Тому на базі гоніометра ГС-5 було розроблено гоніофотометричну установку, яка дозволяє задовольнити таку умову і виміряти індикатрису розсіяння певного зразка.

В установці аналізатором та поляризатором є полімерна плівка. В гоніофотометричних вимірюваннях ресструється світло, що розсіюється не лише на досліджуваному зразку, але й на поляроїдній плівці, тому актуальною є задача по визначенню характеристик розсіяння самої плівки, щоб врахувати вплив цього розсіяння на загальні результати.

Враховуючи оптичну неоднорідність поляроїдних плівок, доцільно встановити розподіл цих неоднорідностей по всій її площі та запропонувати адекватну модель світлорозсіяння.

Забруднення (запорошення) поверхонь плівок також впливатиме на їх світлорозсіяння і, з огляду на це, бажано дослідити цей вплив, для оцінки точності відповідних вимірювань.

Методи дослідження

Гоніофотометричні вимірювання проведено для полімерної поляроїдної плівки як поляризатора, так і аналізатора, двома методами:

- Гоніоспектрофотометричним (установка на базі гоніометра Г-5)
- Оптичної мікроскопії, в тому числі методом темнового поля (прилад МЛ-2АУ42)

На об'єктив коліматора та зорової труби гоніометра (Рис. 1.) встановлено поляроїдні плівки: 1 – поляризатор, 2 – аналізатор.



Рис. 1. Схема установки, вигляд зверху.

Розсіяння світлового потоку відбувається як на поляризаторі, так і на аналізаторі. Фокусна відстань об'єктива складає 40 см, діаметр діафрагми в фокальній площині – 2мм. Виходячи з цього, кут розходження світлового потоку складатиме $0,14^\circ$. Цей кут значно менший, ніж кути, що спостерігаються в експерименті.

Тому для розгляду моделі світлорозсіяння достатньо описати процес розсіювання на плівці поляризатора. (Рис. 2.)

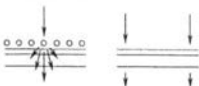


Рис. 2. Схематичне зображення заповненої (ліворуч) та незаповненої (праворуч) плівки.

При падінні паралельного пучка світла на незаповнену плівку відбувається лише незначне розсіювання на неоднорідностях плівки.

В загальному випадку необхідно враховувати кутовий розподіл розсіяного шаром пилу світла, яке згодом інтерферує на окремих шарах плівки. [1, 2]

В експерименті досліджувалися як попередньо забруднені, так і очищені поляроїдні плівки.

Експериментальні результати

1. Проведено вимірювання розсіяння плівок поляризатора і аналізатора за відсутності зразка на предметному столику.

На об'єктив коліматора встановлено поляризатор, а на об'єктив зорової труби – аналізатор. При відсутності зразка на предметному столику виміряно інтенсивність розсіяного світла в діапазоні кутів відхилення від центрального ходу променя $-8^\circ \dots 8^\circ$ через кожні $10'$ (Рис. 3.).

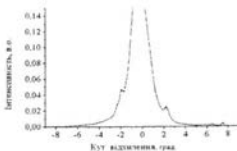


Рис.3. Кутовий розподіл інтенсивності розсіяного світла при встановлених аналізаторі і поляризаторі (S- поляризація)

На графіку помітні 3 піки, що відповідають кутам розсіяння: $-1,9^\circ$, $2,2^\circ$ та $7,5^\circ$.

2. Визначено кутовий розподіл інтенсивності розсіяного світла на поляризаторі і аналізаторі.

На об'єктив коліматора і зорової труби встановлено попередньо очищені від пилу поляроїдні плівки.

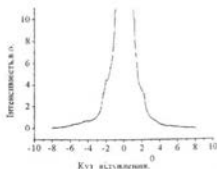


Рис.4. Кутовий розподіл інтенсивності розсіяного очищеними від пилу поляризатором і аналізатором світла.

3. Отримано зображення плівки поляроїда на оптичному мікроскопі (МЛ-2АУ42) при

збільшеннях за допомогою 4-х звичайних об'єктивів та при 2-х збільшеннях при використанні епі-об'єктиву оптичного мікроскопа МЛ-2АУ42. Дослідження проведено в декілька етапів.

Спочатку спостережено власне поле мікроскопа, що має запорошеності. Це потрібно було врахувати в подальших вимірюваннях.

Для отримання масштабу зображень в площині зображення проводилось спостереження дифракційної ґратки зі сталою 100 штрихів на міліметр.

Область зразка, що потрапляє в поле зору, неоднакова для всіх зареєстрованих зображень. Тому, розрахувавши кількість штрихів ґратки, що потрапляє в поле зору, нами встановлювався розмір поля і вибирався відповідний масштаб.

Результати спостереження забруднених поляризованих плівок



Рис.6. Плівка поляризатора при розгляді в оптичний мікроскоп:
Ліворуч: збільшення $220\times (40\times 5\times 1.1)$;
В центрі: збільшення $500\times (40\times 5\times 2.5)$;
Праворуч: ЕРІ(21/0.4 190) об'єктив. Збільшення $115.5\times (21\times 5\times 1.1)$

На рис. 6. добре видно частинки розміром 15 мкм, 30 мкм та 40 мкм.

Результати спостереження очищених від пилу поляризованих плівок

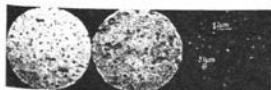


Рис.7. Очищена від пилу плівка поляризатора при розгляді в оптичний мікроскоп.
Ліворуч: збільшення $220\times (40\times 5\times 1.1)$;
В центрі: збільшення $500\times (40\times 5\times 2.5)$;
Праворуч: ЕРІ(21/0.4 190) об'єктив. Збільшення $262.5\times (21\times 5\times 2.5)$

Теоретичні розрахунки та обговорення результатів

Забруднення поверхні поляризованої плівки суттєво впливає на індикатрису її розсіяння.

Враховуючи, що розміри розсіювальних центрів (пилу) значно перевищують довжину хвилі світла і змінюються у широких межах (10 – 30 мкм), малоймовірним є те, що саме розсіяння на цих центрах може бути причиною виникнення відповідних піків.

Для обґрунтування цього положення вважатимемо, що частинки пилу мають сферичну форму. Тоді, згідно теорії Мі [3], можна розрахувати інтенсивність розсіяного випромінювання. Вважаючи, що світло падає нормально на розсіюючий шар і розсіюючи частинки знаходяться достатньо далеко одна від одної (відсутність багаторазове розсіяння), були обчислені відповідні індикатрисы розсіяння. (Рис.8.)

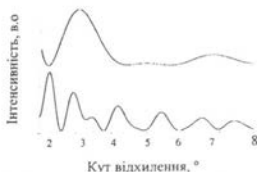


Рис. 8. Кутовий розподіл інтенсивності розсіяного випромінювання для частинок радіусом 10 мкм (зверху) та 20 мкм (знизу).

Згідно з отриманими розрахунковими даними, характер максимумів розсіяння не збігається з експериментальними даними розсіяння світла на зразку (багато широких піків (Рис. 8) натомість декількох вузьких (Рис. 3.)). Це підтверджує те, що отримані особливості індикатрисы (наявність бокових піків) не можуть бути пояснені одним лише розсіянням світла на частинках пилу.

На цьому етапі досліджень було висунуто припущення про те, що зазначені максимуми виникають внаслідок інтерференції світла в тонкій плівці [4, 3].

Враховуючи структурну будову полярида Н-типу, мова може йти про інтерференцію або в тонкій плівці полівинилового спирту, насиченого йодом, або в товшій підложці з ацетату бутирату целюлози [5].

Як видно з рисунків 3 та 4, за відсутності розсіювального шару пилу, пік при куті розсіювання $2,2^\circ$ згладжується, а пік при куті розсіювання $7,5^\circ$ зникає. На нашу думку, пояснення цього явища полягає в тому, що за відсутності забруднювального шару кількість розсіяного на полароїді світла в напрямках, відмінних від напрямку розповсюдження, повинна бути малою. Причиною ж виникнення зафіксованого розсіювання є взаємодія падаючого випромінювання з центрами неоднорідності всередині самого полароїда і розсіювання світла на них.

За наявності забруднювального шару кількість розсіяного світла суттєво зростає. При цьому цілком може статися, що кількість світла, яке розсіюється під кутом, для якого виконується умова спостереження інтерференційного максимуму, буде достатньою для реєстрації такого максимуму [6].

Іншими словами, шар пилу створює розсіяний світловий потік, який бере участь у створенні інтерференційних смуг рівного нахилу.

Необхідною умовою виникнення інтерференційних смуг є неспівпадіння між собою кутів для максимумів інтерференції та «провалів» в індикатрисі розсіювання світла для певних частинок пилу [7].

Для оцінки товщини плівки було розв'язана задача, в якій вважалося, що порядок k інтерференційних максимумів при кутах розсіювання $2,2^\circ$ та $7,5^\circ$ відрізняється на $\Delta k = 1, 2$ чи 3 . Відносний показник заломлення n плівки складав $1,1 - 1,5$, сама ж плівка знаходилася в однорідному середовищі.

Результати наведені в Таблиці.

Таблиця. Теоретично розраховані товщини плівки в нм для $n=1,1 - 1,5$ та $\Delta k=1 - 3$.

	$\Delta k=1$	$\Delta k=2$	$\Delta k=3$
$n=1,1$	46,12	84,28	138,35
$n=1,2$	50,34	100,68	151,02
$n=1,3$	54,56	109,12	163,68
$n=1,4$	58,78	117,56	176,34
$n=1,5$	63,00	126,00	189,00

Найбільш імовірними слід вважати ті товщини, для яких різниця порядків інтерференційних смуг складає 1, оскільки за умови $\Delta k = 2$, можна було б спостерігати інтерференційний максимум при куті розсіювання $5,52^\circ$, а при $\Delta k = 3$ - два максимуми при кутах розсіювання $4,68^\circ$ та $6,25^\circ$.

Як видно з рис. 8, ці інтерференційні максимуми не потрапляють в кутовий інтервал, де розміщені мінімуми розсіювання відповідних частинок, тому в експерименті вони мали б бути зареєстровані.

Висновки

При використанні полароїдних плівок у гоніофотометричних установках слід включати в розрахунок індикатрисі розсіювання внесення спотворення, викликані інтерференцією на шаруватій структурі полароїдних плівок.

Важливо підкреслити, що і забрудненість полароїдних плівок пилом додатково розсіює і також вносить додаткові спотворення в результати гоніофотометричних вимірювань.

Список використаних джерел

1. Хюлт ван де Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. - 536с.
2. Кросиньяни Б., Ди Порто П., Бертолотти М. Статистические свойства рассеянного света. - М.: Наука 1980. - 206с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики., 2 изд.-М.: Наука, 1973. - 856 с.
4. Ландсберг Г. С., Оптика, М., 1976. - 928с.
5. Шерклифф У., Поляризованный свет. - М.: Мир. 1965-264с.
6. Иванов А. П., Оптика рассеивающих сред.- Минск: Наука и техника, 1969.-592
7. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К., Теория дифракции. - М.: Мир. 1964. - 428с.

Надійшла до редколегії 30.01.2012

УДК 621.763.620.18

Копань В.С., д.ф.м.н., проф.,
Розуван С.Г., к.ф.м.н.Дослідження булату на тунельному
мікроскопі

Методом скануючої тунельної мікроскопії досліджено булат, одержаний пошаровим литтям на параболоїд розплаву високоміцної сталі 30X3M2CΦA (0,3%С; 5%Cr; 2%Mo; 0,2%Si; 0,3%V) та куванням вилівка. Границя текучості булату $\sigma_T = 280 \cdot 10^7$ Па, сталі $\sigma_T = 200 \cdot 10^7$ Па. Поперечні перерізи волокнистих зерен лежать в інтервалі від кількох мікрон до кількох нанометрів. Розташування атомів в електропровідних нанозернах булату утворене, що вказує на групування дислокацій в приповерхневих ділянках нанозерна. Така структура забезпечує підвищення границі текучості.

Ключові слова: булат, скануючи тунельна мікроскопія, границя текучості.

*E-mail: sgr@univ.kiev.ua

Булат вивчали фізики Ф.Савар (1791 - 1841), М.Фарадей (1791 - 1867). Вони довели, що булат складається з заліза, вуглецю та містить малі домішки платини. Виноградов А.П. [1] дослідив, що специфічний візерунок на поверхні булатних виробів досягається куванням і шліфуванням. Технологію булату розробляли Аносов П.П. (1828 - 1837 рр., м. Златоуст), Чернов Д.К., Беляев Н.Т., Іжевський В.П. Доведено, що вміст вуглецю у булатах становить 1,3 - 1,8% ваг. Сучасну технологію відновлювального електроплавлення булатних сталей розробляли у Дон.Пі Лаппа С.П. і Дорофєв Г.А. [2].

Значних успіхів у виробництві булатних виробів досягли Басов В.І. (Володимиро - Суздальський музей), Архангельський Л. (м. Корольов Московської обл.), Сосков С. (Москва), Куликов І. (Ярославль), Федотов А. (м. Павлово) та ін. майстри.

Якість булатних ножів при купівлі - продажу оцінюється переважно по чотирьом факторам: виробник, краса візерунку, здатність перерубувати гвіздки, гострота при розрізанні легких тканин. Продавець не погодиться, аби його випробували на згин, бо вони часто ламаються, а ціна їх, як предметів мистецтва,

V.S.Kopan, Dr Sci
S.G. Rozouvan, PhD

Scanning tunneling microscopy of wootz steel

Scanning tunneling microscopy technique was used to study a wootz sample, obtained by layer-by-layer casting of highly solid steel 30X3M2CΦA (0,3%С; 5%Cr; 2%Mo; 0,2%Si; 0,3%V) fusion on a paraboloid with subsequent ingot forging. Wootz yield strength was determined to be $\sigma_T = 280 \cdot 10^7$ Pa, and for steel- $\sigma_T = 200 \cdot 10^7$ Pa. Wootz fibrous grains transverse crosssections were in a range from a few microns to a few nanometers. Atoms arrangement in conducting wootz nanograins was determined to be ordered, that indicates dislocation grouping in nanograins surface layers. It results in yield strength increasing.

Key words: wootz steel, scanning tunneling microscopy, yield strength.

величезна. Так, на XI Міжнародній виставці (Москва, березень, 2005 р.) вартість ножів становила від 50 - 60 тис. до 100 доларів США за один екземпляр [3].

Відомо, що булатною шаблею караванщики підперізувались як поясом (з метою маскування). Отже, її довжина була близько $L=80$ см, ширина 3 см, товщина $H=0,3$ см, а важила вона близько 560 г.

При згинанні шаблі навколо талі у товстій частині шаблі виникають напруги:

$$\sigma = \frac{EH}{2R} = \frac{\pi EH}{L}, \quad (1)$$

де R - радіус кривизни, E - модуль Юнга. При $E=21000 \cdot 10^7$ Па $\sigma=250 \cdot 10^7$ Па. Після звільнення шаблі, вона випрямлялась без залишкової пластичної деформації. Це означає, що границя текучості при згинанні булату $\sigma_T > 250 \cdot 10^7$ Па, а відносна пружна деформація поверхневих шарів $\epsilon > 1,2\%$. Для найкращої холоднопротягнутої дротини $\sigma_T=253 \cdot 10^7$ Па [4]. Листова вольфрамо - кремнієва ресорна сталь марки 65C2BA мас $\sigma_T=170 \cdot 10^7$ Па [5]. Отже,

булатна листовая сталь була якісніша по σ_T , ніж ресорна сталь, і порівняна з канатною сталлю.

Дослідження булатів пояснюють їх унікальні властивості наявністю в цих сталях

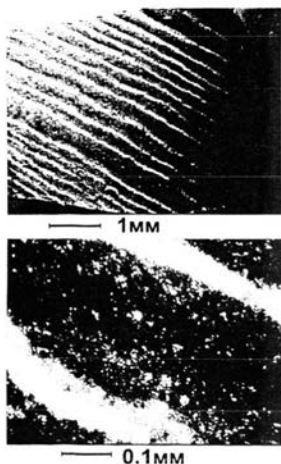


Рис.1 Фотографії поверхні зразка булатної сталі 30X5M2CΦA, прокованого під кутом $45 \pm 5^\circ$ до площини шарів.

цементитових нанодротиків та вуглецевих нанотрубок [6-12].

Мета роботи – дослідження будови багатошарового булату з високоміцної сталі 30X5M2CΦA. Ця сталь має велику границю текучості $\sigma_T = \sigma_{0.2} = 200 \cdot 10^7$ Па. Тому важливими є пошуки способів подальшого збільшення σ_T .

Техніка експерименту. Спільним недоліком сучасних технологій виготовлення шаруватих булатів є операція багаторазового згинання заготовок (пакети з листів жести, ролони) та зварювання їх куванням, коли оксиди та інші

сполуки, що існують на поверхні листів, потрапляють в об'єм булату і зменшують границю текучості, зменшують ударну в'язкість.

Ми досліджували зразки, виготовлені шляхом лиття розплаву на параболічну охолоджувану мідну виливницю [13]. Твірна виливниці – це парабол

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2,$$

(2)

де y та x – координати параболі по

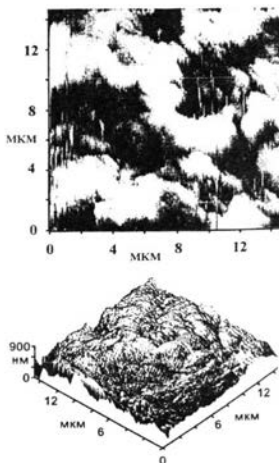


Рис.2 Профіль поверхні зразка булатної сталі. Площа сканування 15×15 мкм².

вертикальній горизонтальній вісі відповідно, g – прискорення земного тяжіння, ω – кутова швидкість обертання виливниці навколо осі координат OY .

При виконанні умови (2) порція розплаву, що потрапляє на виливницю, не рухається по параболі, а кристалізується в тій точці $A(x, y)$, на яку впала.

Перевага параболічної виливниці перед плоскою в тому, що товщина злитка не залежить

відхиляючи і заковчували. Через 10 – 15 секунд після початку виливання одношарового злитка температура початкової його ділянки знижувалась до 300-350°C (температура розплаву 1500-1550°C). Тому відбувалась не лише кристалізація, а й загартовування на аустеніт

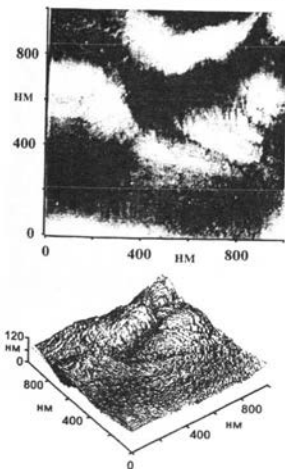


Рис.3 Профіль поверхні зразка булатної сталі.
Площа сканування 1x1 мкм².

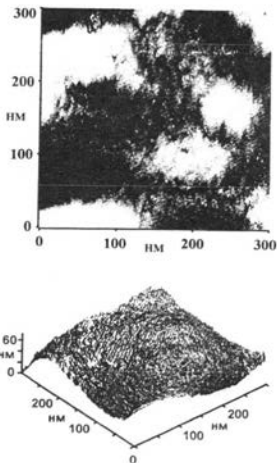


Рис.4 Профіль поверхні зразка булатної сталі.
Площа сканування 300x300 нм².

(теоретично) від координат точки $A(x, y)$. При одношаровому литті потік розплаву рухають один раз по твірній, при багатошаровому – багаторазово. Практично, товщина злитка (H –5 мм) та рівномірність по товщині ($\pm 0,5$ мм) залежать від маси розплаву (~300 г) та майстерності ливарника. Час виливання одношарового злитка 5 – 6 с, багатошарового 10 – 300 с (з підігрівом тиглів у процесі лиття). Щоб подолати відокремлення злитка від виливниці, поверхню останньої перед кожним виливанням

вібрували нами сталі. Гарячий (300-350°C) злиток і негайно кували на спеціально виготовленому пристрої. Маса молотка – 200 г, частота ударів – 12,5 Гц.

Для дослідження топології поверхонь зразка використовували зондовий мікроскоп ІНТЕГРА, NT-MDT, що має можливість функціонувати в режимі атомно-силового, або скануючого тунельного мікроскопа. В режимі атомно-силового мікроскопа виміри могли проводитися в контактному та в напівконтактному режимах. Просторова роздільна відстань вимірів в цих

режимах визначається параметрами застосованих голок, і могла досягти 40 нанометрів у площині поверхні зразка та 1 нанометр по вертикалі. В режимі скануючого тунельного мікроскопа (за умови постійного тунельного струму) просторова роздільна відстань могла досягати 0,08 нанометра. При проведенні експерименту виявилось, що атомно-силова мікроскопія є вкрай

мікроскопії. Спостерігасмо границі шарів (рис.1) товщиною $h=0,2-0,4$ мм та поперечні перерізи (світлі плями на рис.16) витягнутих волокон, що характерні для канатного дроту [4] та нанокристалічних шаруватих композицій [9].

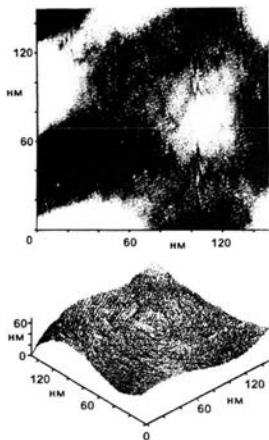


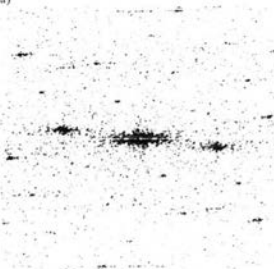
Рис.5 Профілі поверхні зразка булатної сталі. Площа сканування $150 \times 150 \text{ nm}^2$.

неефективною для вивчення поверхонь булату, оскільки остання фактично представляла собою абразив, який дуже швидко пошкоджував вимірювальну голку. Тому основні зусилля були зосереджені на застосуванні скануючої тунельної мікроскопії для вимірювання профілю поверхні.

Експериментальні результати та їх обговорення. На рис.1 наведено топологію поверхні булатної сталі 30X5M2CФА, а на рис. 2-5 профілі поверхні різної площі. Ці дослідження виконані в режимі скануючої тунельної



а)



б)

Рис.6 Розташування атомів у зразку булатної сталі (а, роздільна відстань $0,15 \text{ nm}$) та Фур'є спектр. (б) рисунка 6а.

Діаметри волокон складають від одного до декількох мікрон (рис.2), декілька сотень нанометрів (рис.3, 4), декілька десятків нанометрів (рис.5). Волокна розділені вузькими

(одиниці-десятки нанометрів) проміжками. Профілі поверхонь на рис.2-5 фактично являють собою профілі областей зразка, які проводять струм. Всі непровідні ділянки являють собою тунельні бар'єри, просторові профілі яких не ресеруються. Тому, наприклад, вузькі зазори між волокнами на рис.3 можуть бути нічим не заповнені або заповнені малопровідними включеннями, такими, як волокна Fe_3C чи навіть вуглецеві нанотрубки.

Нами були одержані з роздільною відстанню 0,15 нм зображення розташування атомів в нанокристалі фериту (рис.6). Поверхня зразка не була атомно-плоскою. Зонд мікроскопа ресерував як атоми, що знаходились над поверхнею кристалу (більш яскраві точки на рис.6), так і атоми поверхні тому ми не спостерігаємо на рисунку ідеальну об'ємноцентровану кубічну ґратку заліза. Однак Фур'є-спектр (рис.6б) свідчить про те, що ґратка має високу ступінь впорядкованості. Максимуми на Фур'є-спектрі розташовані у вершинах ромбів, а не квадратів, бо напрям $[001]$ кубічної ґратки

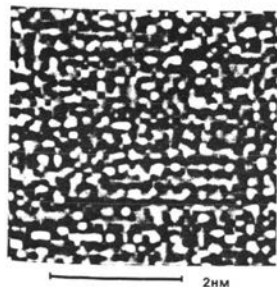


Рис.7 Розташування атомів у зразку булатної сталі (роздільна відстань 0,08 нм).

нанокристалу заліза, що сканувався, не був чітко перпендикулярний до поверхні зразка. Висока ступінь впорядкованості ґратки може свідчити про те, що дефекти кристалічної ґратки зосереджуються біля границь нанокристалів фериту. Така структура булатної сталі нагадує структуру нанокристалічних шаруватих композицій [14] і повинна забезпечити велику

границю текучості. На рис.7 наведені результати скану іншого нанокристалу фериту отримані з меншою просторовою роздільною відстанню 0,08 нанометрів. Як і у випадку рис.6 ми не спостерігаємо тут атомної площини. Атоми, які знаходяться вище ніж основна маса інших були заресстровані у вигляді дуже яскравих плям. В околі кожної такої плями ми бачимо темний окіл-своєрідну „тінь“. Це пояснюється тим, що коли скануючи голка знаходиться у околі такого більш високо розташованого атому, то тунельний струм тече самк через цей атом, а не через сусідні нижче розташовані атоми

На рис.8 наведено залежність границі текучості від товщини шару $\sigma_T(h)$ досліджуваної сталі (крива 1). Бачимо, що $\sigma_T = \sigma_{02} = 200 \cdot 10^7$ Па зразка з промислової партії сталі (рівень 5), що була використана для виготовлення булату, перевершено при $h \approx 55$ мкм у $280/200 = 1,4$ рази.

В [14] повідомляється, що σ_T композицій з шарів металу A , які чергуються з шарами металу B наростає зі зменшенням товщини шару h пропорційно $(Kh^{0,5} + Gh^{-1})$, де K і G - константи матеріалів. Якщо багатшарова композиція з

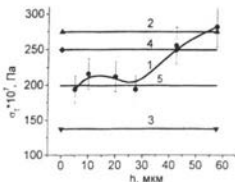


Рис.8 Залежність $\sigma_T(h)$ границі текучості $\sigma_T = \sigma_{02}$ багатшарової кованої сталі 30X5M2CФА від товщини шару h - крива 1, рівні σ_T цієї сталі для одношарових кованого при $300-350^\circ C$ (2), відпаленого ($320^\circ C$, 4 год.) та промислового виготовлення зразків - 2, 3, 5 відповідно. 4 - рівень σ_T старовинної дамаської сталі.

одного металу, наш випадок, σ_T не залежить від h . Зменшення σ_T зі зменшенням h (рис.8) обумовлене, напевно, збільшенням кількості пор і крихких включень (оксидів, наприклад) на границях між шарами. Лиття в середовищі суміші $CO+CO_2$ не забезпечило достатньої чистоти границь між шарами.

Висновки.

1. Методом скануючої тунельної електронної мікроскопії досліджено волокнисту структуру зерен булату з високопружної сталі 30X5M2CΦA. Поперечні перерізи зерен становлять від одиниць мікрон до одиниць нанометрів. Розташування атомів в нанозернах упорядковане, що свідчить про витіснення дислокацій в приграничній області зерен.

2. Поспорове виливання сталі на параболічну охолоджувану виливницю, що обертається, та проковування виливка сприяють збільшенню границі текучості σ_{02} в 1,4 рази.

Список використаних джерел.

1. Виноградов А.П. Происхождение булатного узора // Техникo – экономический вестник, М. – 1924. – Т.4. – С.8-9.

2. Валентинов А.А. Что нового в Старом Осколе? – М: Металлургия, -1979. – 118 с.

3. Комсомольская правда в Украине, 25-31 марта 2005, <http://www.kp.kiev.ua>

4. Гриднев В.И., Гаврилюк В.Г., Мешков Ю.Я. Прочность и пластичность холоднодеформированной стали. – К: Наукова Думка - 1974. - 231 с.

5. Самохвалов Я.А., Левицкий М.Я., Григораш В.Д. Справочник техника – конструктора. – Київ: Техніка, -1978. – 521 с.

6. Ю.Г.Гуревич Булат. Структура, свойства и секреты изготовления. Курган: Изд-во Курганского государственного университета, - 2006. -158 с.

7. Scott D. A. Metallography and microstructure of ancient and historic metals. Singapore: The J. Paul Getty Trust. -1991. P. 317.

8. Levin A. A., Meyer D. C., Reibold M., Kochmann W., Pätzke N., Pausler P. Microstructure of a genuine Damascus sabre //Crystal Research and Technology -2005. -v.40, -9. P. 905–916,

9. Reibold M., Pausler P., Levin A. A., Kochmann W., Pätzke N. and Meyer D. C. Carbon nanotubes in an ancient Damascus sabre // Nature. -2006. -444. - P.286.

10. Yasoa M., Takaiwa T., Minagi Y., Kubota K., Morito S., Ohba T., Das A. K. Study of microstructures on cross section of japanese sword The 8th European Symposium on Martensitic Transformations Proceedings -2009, -07018. P.1-5.

11. Verhoeven J. D. Genuine Damascus steel: a type of banded microstructure in hypereutectoid steels //Steel Research. -2002. -v.73. -N8. P.356-365.

12. Sherby O., Wadsworth J. Ancient blacksmiths, the Iron Age, Damascus steels, and modern metallurgy // Journal of Materials Processing Technology -2001. -117. P.347-353.

13. Копань Ю.В., Хуторянська Н.В., Копань В.С. Булат і багатошаровий композиційний матеріал // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – №2 – С.324-328.

14. Копань В.С. Композиційні матеріали. – Київ: Університетське видавництво „Пульсари”, - 2004. – 196 с.

Надійшла до редколегії 20.02.2012р.

УДК 539.12

Кулаков І.С., аспірант, Васильєв Ю.О.,
к.ф.-м.н., Кисіль І.В., д.ф.-м.н., проф.**Пошук D^0 -мезонів у експерименті CBM**

D^0 -мезони містять чарівний кварк та утворюються за умов максимальної баріонної густини при зіткненнях важких іонів. Ці частинки несуть інформацію стосовно мало досліджених ділянок фазової діаграми сильно взаємодіючої матерії, вивчення якої є однією з ключових задач майбутнього CBM експерименту (GSI, Німеччина). Умови для вимірів виходу D^0 -мезонів дуже складні: до 10^6 зіткнень за секунду, біля 1000 заряджених адронів у зіткненні, малий вихід D^0 -мезона (10^4), низька ймовірність розпаду по двочастинковому каналу, що детектується, малий час життя та необхідність повної реконструкції у режимі реального часу. У статті надано опис процедури пошуку D^0 -мезонів та результати тестів.

Ключові слова: CBM, D^0 -мезон, важкі іони, відбір подій.

E-mail: I.Kulakov@gsi.de

Експеримент CBM

За високих температур та/або високих баріонних густин очікується фазовий перехід від адронних до партонних ступенів вільності (фаза кварк-глюонної плазми) [1]. Перевірка його існування та дослідження фазової діаграми сильно взаємодіючої матерії є однією з ключових задач CBM (Compressed Baryon Matter) експерименту [1], проведення якого планується на прискорювальному комплексі FAIR. Це дослідження надасть інформацію про два фундаментальних, але досі не вирішених аспекти квантової хромодинаміки: конфаймент та порушення киральної симетрії. Одним з показників переходу до фази кварк-глюонної плазми є збільшення виходу частинок з неспареним с-кварком, зокрема D^0 -мезонів.

Вимір таких частинок - одна з найбільш складних задач [2]. Причини цьому: низька ймовірність утворення D -мезонів, порядку 10^4 на одне центральне Au+Au зіткнення за енергій 25 GeV/u, висока ймовірність треків у зіткненні

I. S. Kulakov, Ph.D. student, I. O. Vassiliev, Dr.,
I. V. Kisel, Dr.Sc., Prof. **D^0 reconstruction in the CBM experiment**

D^0 -mesons with charm quark are produced at maximum baryon density in heavy ions collisions. These particles are rare probes for phase diagram of strongly interacting matter, one of the most important observables of the CBM experiment (GSI, Germany). The conditions for D^0 -meson measurements are challenging: up to 10^6 collisions per second, about 1000 charged hadrons in a collision, low D^0 -meson yield (10^4), low branching ratio, short life time and a requirement of online full event reconstruction. The description of D^0 -meson reconstruction procedure and results of the tests are given.

Key Words: CBM, D^0 -meson, heavy ions, event selection.

- порядку 1000 заряджених адронів; відносно низька ймовірність розпаду по каналу, що реєструється; короткий час життя. Наприклад, D^0 -мезон розпадається з ймовірністю 3.9% по каналу $K^+ \pi^-$ і його власний час життя складає 124 фемтосекунд. Для відбору подій з D^0 -мезонами необхідна повна та найбільш прецизійна реконструкція подій, що включає реконструкції треків, реконструкцію первинної та вторинних вершин розпаду. Водночас, умовою спостереження таких рідкісних сигналів є обробка величезної кількості подій, що будуть зібрані за частоти зіткнень порядку 10^6 Гц. Обробка такої великої кількості інформації, з огляду на фізичні обмеження сучасних приладів зберігання інформації, має проводитися у режимі реального часу.

Таким чином, для пошуку D -мезонів необхідна процедура, яка буде ефективною при складних умовах центрального зіткнення ядер золота та водночас надзвичайно швидкою.

Детектуюча система CBM експерименту

Пошук D^0 -мезонів базується на реконструкції траскторій частинок за допомогою STS (Silicon Tracking System) та MVD (Micro-Vertex Detector) детекторів, а також на вимірах TOF (Time of Flight Detector) (див. рис. 1), що використовуються для виключення протонів в процесі реконструкції D^0 -мезонів.

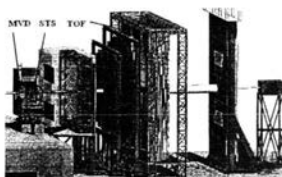


Рис. 1 Установка детектуючої системи експерименту CBM. Показані детектори, що застосовуються для пошуку D^0 -мезона: MVD – вершинний детектор, STS – треховий детектор, TOF – детектор часу прольоту.

STS детектор є центральною складовою CBM експерименту. Він створений для визначення траскторій та імпульсу усіх заряджених частинок, що народжуються поблизу мішені.

Між STS та мішенню знаходиться MVD детектор, що дозволяє розрізняти вершини розпаду вторинних частинок та точку взаємодії (первинну вершину).

На даний момент планується, що STS-MVD детектори будуть складатися з 10 станцій, розташованих у середині магнітного диполю, який створює викривлення траскторій достатнє для визначення імпульсу частинок з точністю біля 1%.

STS складається з 8 станцій, розташованих на відстанях у 30 – 100 см від мішені та створених з силіконових мікродріпних детекторів для виміру точок проходження треку.

Станції побудовані з двосторонніх силіконових мікродріпних сенсорів з товщиною 300 мкм. Відстань між сенсорами – 60 мкм. Для зменшення матеріалу, який перетинає частинка електроніка зчитування-запису розташована по периметру STS.

MVD складається з двох станцій розташованих у вакуумі, на відстані 5 та 10 см від мішені. Планується використання тонких піксельних сенсорів з дуже високою просторовою роздільною здатністю. Детектори MAPS (Monolithic Active Pixel Sensors) з розміром пікселю 30×30 мкм² мають просторову роздільну здатність 5 мкм та товщину 300 мкм. Такі сенсори добре задовольняють усім умовам, у тому числі дають відповідну роздільну здатність знаходження вершини, яка необхідна для вимірювання вторинних вершин від розпаду D^0 -мезонів. Недоліком сенсорів є відносно великий час зчитування інформації (30 мкс).

TOF – детектор часу прольоту, розташований на відстані у 10 м від мішені та забезпечує роздільну здатність по часу порядку 80 пс.

Пошук треків частинок

Процедура пошуку D^0 -мезонів складається з чотирьох основних етапів: пошук треків, пошук параметрів треків, пошук первинної вершини розпаду (місця зіткнення), пошук вторинних вершин розпаду частинок та відбір D^0 .

Задача пошуку треків частинок полягає у виділенні з поміж усіх зареєстрованих MVD та STS детекторами вимірів таких, що відповідають окремим частинкам. Алгоритм пошуку треків базується на алгоритмах кліткового автомату [3] та фільтру Калмана [4]. Приклад реконструйованого зіткнення наведено на рис. 2.

Клітковий автомат об'єднує виміри детектора у короткі фрагменти треків (триплети), відбирає їх та об'єднує триплети у треки.

Кожен триплет створюється, базуючись на фізичній моделі треку, що включає п'ять незалежних параметрів: координати – x , y , тангенс кутів нахилу до лінії пучку (вісь Z) – t_x , t_y , відношення заряду до імпульсу – q/p , та їх коваріаційну матрицю. Кількість параметрів визначається кількістю ступенів вільності частинки у магнітному полі. Завдяки апроксимації магнітного поля поліномами може бути отриманий аналітичний вираз [5] для параметрів трека у будь-якій точці простору в залежності від z та п'яти параметрів трека у певній точці z_0 . Таким чином визначення параметрів треків у певній точці дозволяє визначити траскторію треку.

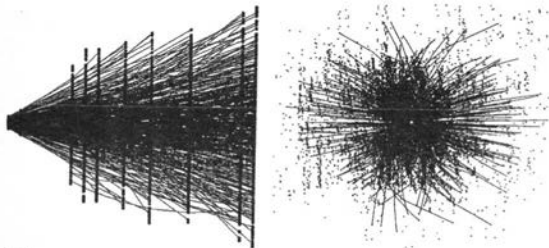


Рис. 2 Зіткнення йонів золота реконструйоване за допомогою алгоритмів кліткового автомату та фільтру Калмана. Точками зображено виміри у MVD та STS детекторах, лініями - реконструйовані треки (усього 770 треків). Зліва – вид згори, справа – від спереду.

Для кожного виміру детектора алгоритм пошуку утворює максимально можливу кількість триплетів, що починаються з цього виміру та відповідають фізичним вимогам до частинок, що досліджуються. Пряма, що поєднує місце розташування мішені та вимір використовується у якості початкового наближення для параметрів триплету. Після чого параметри послідовно екстраполюються на дві наступні станції та уточнюються за допомогою методу фільтру Калмана [4], враховуючі нові виміри. Якщо на одній станції декілька вимірів виявляються такими, що можуть бути додані до даного триплету, створюється декілька триплетів.

Завдяки високій точності алгоритмів, що використовуються, більшість випадкових триплетів може бути виключено з подальшого аналізу згідно з χ^2 -критерієм. Відібрані триплети за певними критеріями об'єднуються один з одним, утворюючи пари сусідів. Два триплети вважаються сусідніми, якщо: вони перетинають рівно дві спільні станції; їх виміри на цих станціях співпадають; імпульси триплетів однакові, у межах похибки. Триплети-сусіди утворюють ланцюжки, кожен з яких розглядається як можливий трек частинки.

Кожен триплет може мати багато сусідніх триплетів, і треки-кандидати мають велику кількість спільних вимірів, що малоймовірно для треків реальних частинок. Тому робиться припущення, що кожен вимір може належати лише одному треку і проводиться процедура

відбору треків-кандидатів. При відборі перевага надається в першу чергу найбільш довгим трекам, а також трекам з найменшим χ^2 -відхиленням траскторії від вимірів.

Описана процедура повторюється п'ять разів, кожен раз з дещо різними параметрами націлюючись на пошук різних категорій треків: високоенергетичних ($p > 0.5$ GeV/c) квазіпервинних (тих, що летять безпосередньо з області мішені, D^0 належить до цієї категорії) неперервних (без втрачених через неефективність детектора вимірів) треків; високо енергетичних квазіпервинних з втраченими на декількох станціях вимірами; низькоенергетичних (0.1 GeV/c $< p < 0.5$ GeV/c) квазіпервинних неперервних треків; низькоенергетичних квазіпервинних з втраченими на декількох станціях вимірами; треків вторинних частинок. Перед кожним повтором процедури всі виміри, що належать знайденим трекам, вилучаються з подальшого розгляду. Таким чином, послаблення критеріїв пошуку супроводжується зменшенням кількості вимірів, це робить можливим знаходження треків за високих їх густин.

Після групування вимірів у треки застосовується метод фільтру Калмана для знаходження найбільш точної оцінки параметрів треків. У якості початкового наближення для параметрів використовується оцінка, отримана методом найменших квадратів у припущенні однокомпонентного магнітного поля.

Алгоритм оптимізовано для роботи на сучасних багатоядерних процесорах. Зокрема, алгоритм використовує SIMD-модуль процесорів, виконуючи паралельні обчислення на рівні даних. Також алгоритм розпаралелено на рівні задач, що дозволяє запускати пошук треків одночасно на декількох ядрах багатоядерних процесорів.

Селекція D^0 -мезонів

На наступному етапі треки екстраполюються до місця розташування мішені та за допомогою фільтру Калмана знаходиться первинна вершина розпаду, при цьому положення треків використовуються у якості вимірів вершини [6].

Всі треки, що проходять від первинної вершини на відстані меншій за 0.5 мм, або при відхиленні χ^2 менше 6 вважаються первинними та виключаються з подальшого розгляду. Також виключаються низько енергетичні треки з поперечним імпульсом меншим за 0.3 GeV/c. Треки, що залишилися, розділяються на позитивні та негативні у відповідності зі знаком q/p . Серед позитивних треків, за допомогою виміру у TOF детекторі, виключаються протони, які значно важчі за піони і при даному імпульсі сильно відрізняються від піонів по швидкості. Далі для кожної комбінації з позитивного та негативного треку перевіряється гіпотеза, що вони утворилися внаслідок двочастинкового розпаду материнської частинки. Для цього з двох треків за допомогою фільтра Калмана знаходяться параметри гіпотетичної частинки, що розпалася [7]. Одночасно знаходиться відхилення χ^2 між треками. Якщо χ^2 -відстань більше 3 гіпотеза наявності спільної материнської частинки вважається хибною. Зважаючи на те, що більшість D^0 -мезонів утворюються в первинній вершині, усі реконструйовані частинки для яких відстань від первинної вершини більше за 20 мкм або χ^2 -відстань більше за 3 відкидаються. Також для зменшення фону відкидаються усі частинки, які розпалися у точках з z -координатою більшою за 1 см.

Результати

Для оцінки якості процедури пошуку було промодельовано 10^6 Au+Au зіткнень і до кожного з них було додано окремо промодельовану пару

$K^+ \pi^-$ від розпаду D^0 та $\bar{D}^0$. Оцінювалися ефективність реконструкції мезонів, та відношення сигналу до фону. Також перевірялась коректність роботи алгоритму пошуку треків.

Основною характеристикою алгоритму пошуку треків є ефективність. Для її визначення вводиться поняття знайденого треку частинки – реконструйовані треки, та частинок, що потенційно можуть бути знайдені – потенційно реконструйовані частинки. Частини множини потенційно реконструйованих частинок, що була знайдена за допомогою алгоритму, називається ефективністю алгоритму пошуку. За умов, що будуть мати місце при центральних зіткненнях за енергій порядку 25 AGeV у MVD та STS детекторах неможливо відрізнити комбінації трьох хітів, що були утворені однією частинкою, від тих, що випадково лежать на фізичній траєкторії. Більш того, число останніх перевищує число перших на декілька порядків. Схожа проблема має місце для треків з імпульсом меншим 0.1 GeV/c: вони мають високу кривизну і вилітають з чутливого об'єму детектора, перетнувши недостатню кількість станцій. Враховуючи це, для оцінки алгоритму пошуку потенційно реконструйованими було вирішено вважати тільки ті частинки, що перетинають чотири або більше детекторних станцій та мають імпульс більше 0.1 GeV/c.

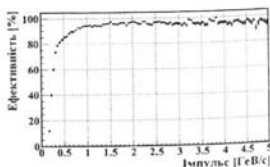


Рис. 3 Залежність ефективності пошуку треків від імпульсу частинки.

Для всебічної оцінки алгоритму усі частинки та треки діляться на декілька категорій. Промодельовані частинки діляться згідно імпульсу на швидкі ($p > 1$ GeV/c) та повільні ($0.1 \text{ GeV/c} < p < 1 \text{ GeV/c}$). Також треки поділяються на первинні, які відповідають частинкам, що утворилися у первинній вершині.

та вторинні, що утворилися внаслідок розпаду короткоживучих частинок. Реконструйований трек співставляється з певною частиною у випадку, якщо не менше 70% хітів трека були утворені взаємодією цієї частинки з детектором.

Частинка вважається знайденою, якщо вона була співставлена з принаймні одним реконструйованим треком. Якщо одній частинці було співставлено більше одного реконструйованого треку, усі додаткові треки вважаються клонами. Реконструйований трек вважається гостом, якщо він не відповідає жодній фізичній частинці.

Таблиця 1.

Ефективність пошуку треків різних категорій, а також рівень клонів та гостей.

Категорія треків	Ефективність, %
Від розпаду D^0 мезонів	95,0
Швидкі первинні	96,9
Повільні первинні	92,2
Швидкі вторинні	83,7
Повільні вторинні	51,9
Всі треки	88,9
Клони	0,4
Гости	5,1

Ефективність пошуку треків наведено у табл. 1 та на рис. 3. Ефективність для швидких первинних частинок висока – 97 %. Треки від розпаду D^0 мезонів можуть відстояти далеко від первинної вершини, тому їх ефективність дещо менша – 95 %. Вторинні швидкі треки утворюються далеко від мішені, вони перетинають менше станцій та для них неможливо використовувати місце розташування мішені як додаткову інформацію. Як наслідок, ефективність їх пошуку дещо менша ніж для первинних – 84 %. Багатократне розсіюння у матеріалі детектора та висока кривизна траєкторії приводить до ще більших втрат при пошуку повільних частинок, відповідні ефективності – 93% та 52 %.

Усереднена по всім категоріям частинок ефективність дорівнює 89 %. Доля клонів утворених при реконструкції нехтовно мала, та дорівнює - 0.4 %, гостей – 3 %.

Не менш важливою характеристикою алгоритму є точність визначення параметрів треків частинок за допомогою фільтра Калмана.

Якість оцінки параметрів треків була перевірена порівнянням з параметрами промодельованих частинок, взятих у місці перетину першої станції MVD детектора. Роздільна здатність треків по імпульсу показана на рис. 4 і дорівнює 1.0 %, вона визначає ширину піку D^0 -мезонів на спектрі інваріантної маси та впливає на відношення сигналу до фону. Роздільна здатність по x координаті рівна 3.3 мкм, по y – 3.1 мкм, по t_x – $2.6 \cdot 10^{-4}$, по t_y – $3.3 \cdot 10^{-4}$.

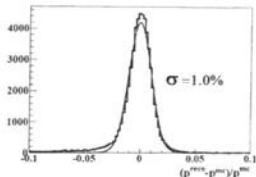


Рис. 4 Роздільна здатність по імпульсу для знайдених треків частинок.

Також було проведено пошук D^0 -мезонів. Ефективність пошуку, що включає аксептанс детектуючої системи, ефективність пошуку треків та ефективність процедури відбору D^0 -мезонів складає приблизно 4 %. Роздільна здатність по z -координаті знайдених D^0 -мезонів показана на рис. 5. Можна бачити, що роздільна здатність у 2.5 рази менша за власний час життя, що дозволяє розділити вторинну і первинну вершини.

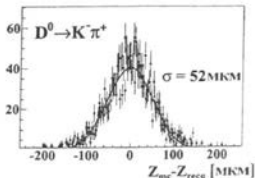


Рис. 5 Роздільна здатність по z -координаті для реконструйованих D^0 -мезонів.

Подяки

Крім того, для оцінки комбінаторного фону, який вважається основним джерелом фону, були взяті комбінації треків із кожної пари подій, таким чином було отримано результат, що відповідає 10^{10} центральним зіткненням. До фонових вимірів було додано результати реконструкції мезонів, нормовані на вихід D^0 та $\bar{D}^0$ мезонів у відповідності з HSD-моделлю [8]. Спектр інваріантної маси для D^0 та $\bar{D}^0$ знайдених описаною процедурою пошуку приведено на рис. 6. Завдяки однаковим параметрам розпаду та середовища ефективність пошуку для обох мезонів однакова і складає біля 4%. Однак у Au+Au зіткненні утворюється у середньому в 3 рази більше $\bar{D}^0$, ніж D^0 , тому відношення сигналу до фону відрізняється приблизно в 3 рази.

Висновки

Алгоритм пошуку треків в CBM експерименті базується на алгоритмах кліткового автомату та фільтру Калмана. Висока якість знайдених треків (ефективність для D^0 - 95 %, рівень гостів - 3 %) дозволяє отримати ефективність пошуку D^0 -мезонів біля 4% при відношенні сигналу до фону у 0.5 для $\bar{D}^0$ та 0.16 для D^0 .

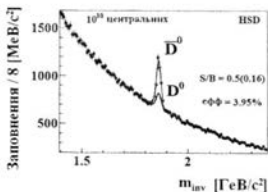


Рис. 5 Спектр інваріантної маси для знайдених D^0 та $\bar{D}^0$.

Автори висловлюють ширшу подяку проф. докт. П. Зенгеру (P. Senger) та Центру Гемгольца (GSI) за надання можливості проведення цієї роботи.

Список використаних джерел

1. B. Friman, C. Hohne, J. Knoll, S. Leupold, J. Randrup, R. Rapp, P. Senger, The CBM Physics Book, - 2011. - 1014 p.
2. S. Gorbunov, I. Kisel and I. Vassiliev, Analysis of D^0 meson detection in Au+Au collisions at 25 AGeV
3. I. Kisel, Event reconstruction in the CBM experiment, Nucl. Instr. and Meth. - 2006. - Vol. A566. - P. 85-88.
4. S. Gorbunov, U. Kobschull, I. Kisel, V. Lindenstruth and W.F.J. Muller, Fast SIMDized Kalman filter based track fit // Comp. Phys. Comm. - 2008. - Vol. 172. - P. 374-383.
5. S. Gorbunov and I. Kisel, Analytic formula for track extrapolation in non-homogeneous magnetic field. // Nucl. Instr. And Meth. - 2006. - Vol. A559. - P. 148-152.
6. S. Gorbunov and I. Kisel, Primary vertex fit based on the Kalman filter. CBM-SOFT-note-2006-001, - 2006, - 9 p.
7. S. Gorbunov and I. Kisel, Reconstruction of decayed particles based on the Kalman filter. CBM-SOFT-note-2007-003, - 2007, - 16 p.
8. W. Cassing and E.L. Bratkovskaya, Hadronic and electromagnetic probes of hot and dense nuclear matter. Physics Reports 308, - 1999, - 226 p.

Надійшла до редколегії 20.02.2012р.

УДК 539

Овсієнко І. В., к.ф.м.н., доцент
Перець Ю. С., асп.
Вовченко Л. Л., к.ф.м.н., с. н. с.
Козаченко В. В., к.ф.м.н., доцент
Мацуї Л. Ю., д.ф.м.н., с. н. с.

Мікроструктура функціалізованого ТРГ

Робота присвячена мікроструктурі функціалізованого терморозширеного графіту (ТРГ). Для отримання функціалізованого ТРГ використовувались декілька методів, які відрізнялися за речовиною, яка використовувалася як функціалізуючий реагент, та за часом ультразвукового диспергування. Метою даної роботи було встановлення впливу методу функціалізації та функціалізуючої речовини на структуру та морфологію поверхні частинок терморозширеного графіту. Для визначення зміни форми, розмірів та морфології поверхні частинок ТРГ після функціалізації були проведені дослідження зразків функціалізованого ТРГ методом оптичної мікроскопії. Після детальних досліджень було виявлено, що функціалізування ТРГ призводить до руйнування початкової структури ТРГ і зменшення розмірів ТРГ до декількох нанометрів.

Ключові слова: терморозширений графіт, метод оптичної мікроскопії, функціалізація.

E-mail: peres2007@yandex.ru

Як відомо, нанокарбон в усіх його формах не утворює дисперсій та не розчиняється в органічних розчинниках та водному середовищі [1, 2, 3]. Частинки нанокарбону, зокрема ВНТ, схильні до агрегації та утворенню джгутів, сплутаних сіток завдяки відносно сильній доводуючій Ван дер Ваальсовій взаємодії, що виникає між окремими частинками нанокарбону. Проте, досягнення стабільної гомогенної дисперсії частинок нанокарбону в полімерній матриці є найважливішим питанням при створенні полімерних композитів з однорідною структурою [4]. Для досягнення рівномірного однорідного розподілу нанокарбонного компоненту в полімерній матриці можливо використання двох шляхів: а саме, механічних та

I. V. Ovsienko, PhD,
Yu. S. Perets, PhD stud.
L. L. Vovchenko, PhD, Sen. Sci. Res.
V. V. Kozachenko, PhD,
L. Yu. Matzui, Dr. Sci., Sen. Sci. Res.

Microstructure functionalization of TEG

This paper is devoted microstructure of functionalization thermoexfoliated graphite (TEG). For functionalization TEG used several methods, which differ by a substance that was used as functionalization reagent and time of ultrasonic dispersion. The aim of this work was to establish the influence a method for functionalization and material that passes functionalization on the structure and morphology of the surface of thermoexfoliated graphite. To determine the changes in shape, size and morphology of the particles after functionalization TEG, have conducted research samples functionalized TEG by method optical microscopy. After detailed investigation revealed that functionalization TEG leads to the destruction of the original structure of TEG and reducing the size to TEG of several nanometers.

Key Words: thermoexfoliated graphite, the method of optical microscopy, functionalization.

хімічних методів обробки нанокарбонного компоненту [5, 6, 7]. При механічній обробці нанокарбону досягається фізичне розділення частинок нанокарбону. При взаємодії нанокарбону з деякими речовинами, такими, як кисень, фтор, озон, кисеньмісткі кислоти та деякі кисеньмісткі солі окрім розкриття (для ВНТ) та окислення з утворенням адсорбованих або газоподібних CO та CO₂ відбувається приєднання до поверхні нанокарбону функціональних груп, які змінюють властивості поверхні нанокарбону, що створює умови для однорідного розподілу нанокарбонного наповнювача в полімерній матриці та забезпечує міцний зв'язок між частинками наповнювача та полімерною матрицею [8, 9, 10, 11, 12, 13].

Метою даної роботи було встановлення впливу методу функціоналізації та функціоналізованої речовини на структуру та морфологію поверхні частинки терморозширеного графіту (ТРГ).

В якості вихідного для функціоналізації графіту був використаний ТРГ, отриманий методом термо-хімічної обробки природного дисперсного графіту ГАК 1 завальського родовища. Природний дисперсний графіт інтеркалювався сірчаною кислотою за біхроматною методикою до першої стадії, а потім був підданий терморозширенню при температурі (1173-1273)К в пічці вихідного потоку за методикою, розробленою в [14].

Для отримання функціоналізованого ТРГ використовувалось декілька методик, які відрізнялися за речовиною, яка використовувалася як функціоналізуючий реагент, та за часом ультразвукового диспергування [15, 16, 17]. Порошок ТРГ поміщався в конусну колбу та заливався відповідною кількістю реагенту згідно з обраним методом. Для методу 1 це був 1.5М розчин перманганату калію в 20 % розчині сірчаної кислоти. В методі 2 використовувалась суміш сірчаної та азотної кислот, концентрація сірчаної кислоти складала 96% мас., концентрація азотної кислоти – 65% мас., відношення об'ємів сірчаної та азотної кислот в суміші дорівнює 1:3. Методи 2.1 та 2.2 відрізняються різним часом повторного диспергування: для методу 2.1 цей час складає, як і для решти зразків, 1 годину, для методу 2.2

повторний час диспергування складає 20 годин. В методі 3 порошок ТРГ заливався сумішшю 62.5% (125мл) об'ємних часток етанолу та 37.5% (75мл) об'ємних часток толуолу. В методі 4 використовувався ацетон, в методі 5 – 95% етанол. Після змішування порошку ТРГ з рідким реагентом утворювалась суміш, причому частинки ТРГ знаходились, в основному, на поверхні рідини. Для нагрівання суміші ТРГ з реагентом в методах 1 та 2 використовувалась піщана баня. Після першого диспергування розчину ТРГ на магнітній мішалці протягом однієї години утворювалась суспензія, в якій частинки ТРГ були рівномірно розподілені в розчині. Після добового просочування ТРГ реагентом частинки ТРГ осаджувалися на дно колби. Повторне диспергування суміші на магнітній мішалці приводило до рівномірного розподілу частинок ТРГ в розчині.

Після повторного диспергування порошок ТРГ відфільтровувався за допомогою скляного фільтру, після чого промивався три рази в дистильованій деіонізованій воді.

На останньому етапі всі отримані порошки функціоналізованого ТРГ сушилися в сушильній шафі при температурі 120°C протягом 8 годин і зважувалися на аналітичних терезах.

В таблиці 1. наведена маса вихідного та функціоналізованого за різними методами ТРГ, а також насипна густина функціоналізованого ТРГ. номер зразка відповідає номеру метода, за яким зразок був отриманий.

Таблиця 1

Порівняння насипної густини вихідного ($\rho_{\text{вТРГ}}$) та функціоналізованого ($\rho_{\text{фТРГ}}$) ТРГ

№ зразка	Насипна густина вихід. ТРГ, $\rho_{\text{вТРГ}}$, МЛГ/СМ ³	Насипна густина функт. ТРГ, $\rho_{\text{фТРГ}}$, МЛГ/СМ ³	$\rho_{\text{фТРГ}}/\rho_{\text{вТРГ}}$	Примітка
1	5.0	67.70	13.54	Чорний порошок, складається з дрібних лусочок з металічним блиском
2.1	5.0	13.37	2.67	Сірий порошок, без грудочок, без металічного блиску, спостерігається структура окремих частинок
2.2	5.0	15.29	3.06	Дрібний порошок асфальтного кольору з незначним металічним блиском
3.	5.0	45.86	9.17	Порошок сірого кольору, спостерігаються окремі великі частинки

4.	5.0	26.43	5.29	Порошок сірого кольору, практично без металічного блиску, спостерігаються окремі частинки
5.	5.0	26.11	5.22	Порошок сірого кольору без металічного блиску, спостерігаються окремі частинки та дрібні грудочки

З наведеної таблиці випливає, для зразка # 1 спостерігається найбільше зростання насипної насиченний чорний колір з яскраво вираженим металічним блиском. Зростання насипної густини в порівнянні з вихідним ТРГ спостерігається для всіх зразків функціалізованого ТРГ. Крім зразка # 1 суттєве зростання насипної густини (до 10 разів) спостерігається для зразків # 3. Не настільки суттєвим є зростання насипної густини (~ 5 разів) для зразків # 4 та 5. Для зразків 2.1 та 2.2 зростання насипної густини є незначним (<3 разів). Зростання величини насипної густини функціалізованого ТРГ пов'язано, очевидно, з руйнуванням "черв'якоподібної" пухкої структури частинок ТРГ в процесі функціалізації. Наявність металічного блиску в зразку # 1 непрямым чином вказує, що в процесі функціалізації ТРГ з використанням розчину перманганату калію в сірчаній кислоті відбувається руйнація пухких об'ємних частинок ТРГ вздовж напрямку графітових площин на окремі графітові лусочки, при цьому дефектність поверхні лусочок не змінюється або змінюється дуже мало, що надає порошку # 1 металічного блиску, характерного, наприклад, для порошку природного графіту. Для всіх інших зразків, очевидно, руйнація структури частинок ТРГ відбувається в усіх напрямках. Оскільки частинки ТРГ мають пухку комірчасту структуру [8], тому можливим є присутність певного залишку функціалізуючої рідини в закритих та відкритих порах частинок ТРГ. Для аналізу наявності в функціалізованому ТРГ залишку функціалізуючої рідини було проведено терморозширення функціалізованого ТРГ в пічці шахтного типу. Зразки порошку функціалізованого ТРГ нагрівалися в пічці до температури 1273K протягом 10 секунд. Результати терморозширення функціалізованого ТРГ наведені в таблиці 2.

Як випливає з таблиці, для всіх зразків функціалізованого ТРГ, крім зразка #1 спостерігається зменшення насипної густини порошку ТРГ після терморозширення. Найбільш суттєве збільшення насипної густини (до трьох

густини в порівнянні з вихідним ТРГ – до 13.5 разів. Зразок # 1 – це сипкий порошок, який має разів) спостерігається для зразків ТРГ, функціалізованих органічними речовинами, а також для зразка #2.2, який повторно диспергувався на магнітній мішалці протягом 20 годин. Для зразка #1 насипна густина після терморозширення взагалі не змінюється. Розглянемо можливі причини зміни насипної густини зразків ТРГ, функціалізованого різними речовинами.

Таблиця 2.

Терморозширення функціалізованого ТРГ

$\rho_{\text{ТРГ}}$, МЛГ/СМ ³	$\rho_{\text{ТРГ}}$ після термор., МЛГ/СМ ³	$\rho_{\text{ТРГ}}/\rho_{\text{ТРГ}}^{\text{після термор.}}$
67.70	67.52	1.003
13.37	7.28	1.84
15.29	4.90	3.12
45.86	17.27	2.66
26.43	11.62	2.27
26.11	8.34	3.13

Очевидно, що значне зростання насипної густини після терморозширення, яке вказує на утворення більш пухкої "ажурної" структури частинок ТРГ, може бути пов'язано з процесом виходу з функціалізованого ТРГ залишків рідини-функціалізуючого реагенту. Таким чином, можна припустити, що в процесі функціалізації ТРГ органічними реагентами певна частка рідини-функціалізуючого реагенту залишається у порах частинок ТРГ, крім того, можливо, частково відбувається процес інтеркаляції реагенту в ТРГ, тобто, введення моношару молекул функціалізуючого реагенту між шарами графіту. Збільшення після терморозширення насипної густини ТРГ, функціалізованого сумішшю сірчаної та азотної кислоти, може відбуватися тільки за рахунок виходу з пор залишків рідини, оскільки утворення інтеркальованих сполук графіту з цими кислотами можливо тільки в присутності окислювачів, якими є, наприклад, біхромат калію (сполуки першої стадії) та

персульфат амонію (сполуки другої стадії). Окремо виділяється зразок #2.2, для якого збільшення насипної густини є найбільшим. Зразок #2. був підданий повторному диспергуванню в розчині кислот протягом 20 годин. Очевидно, частинки ТРГ після даної обробки мають значну кількість відкритих пор, в яких залишалась рідина, вихід якої при швидкому нагріванні приводить до виникнення "ажурної" пухкої структури частинок ТРГ. Що стосується зразка #1, то, вочевидь, при функціоналізації ТРГ розчином перманганату калію в сірчаній кислоті внаслідок сильної окислювальної дії даного реагенту відбувається руйнування слабкого π - зв'язку між графітовими площинами, в першу чергу, саме по межах пор. Частинки функціоналізованого перманганатом калію ТРГ являють собою лусочки, в яких практично відсутні пори. Таким чином, в процесі функціоналізації ТРГ рідина-реагент не залишається в частинках ТРГ, і повторне розширення функціоналізованого ТРГ відсутнє.

Для визначення зміни форми, розмірів та морфології поверхні частинок ТРГ після функціоналізації були проведені дослідження зразків функціоналізованого ТРГ методом оптичної мікроскопії. Дослідження проводилися на оптичному мікроскопі "Мікмед" у відбитому світлі при сумарному збільшенні 320 разів.

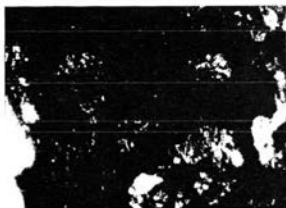


Рис. 1. Фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 1 функціоналізованого ТРГ.

На рис. 1 наведено фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 1 ТРГ, функціоналізованого з використанням перманганату калію.

Як випливає з рисунку, частинки зразка 1 є плоскими, про що свідчить добре фокусування

об'єктиву по всій поверхні частинки одночасно. Частинки округлої форми, бічні поверхні частинок згладжені без відгалужень. Рисунок поверхні дуже дрібний, "пом'ятий", розміри плоских ділянок на поверхні ~1 мкм. Розміри частинок лежать в межах від 10 до 100 мкм, причому розподіл частинок по розмірам є рівномірним.

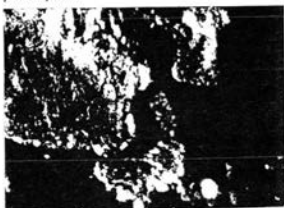


Рис. 2. Фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 2.1 функціоналізованого ТРГ.

Рис. 2 представляє фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 2.1 ТРГ, функціоналізованого сумішшю сірчаної та азотної кислот. Частинки ТРГ зразка 2.1 дуже великі, пухкі, розмір частинок ~ (500-600) мкм. Дрібні частинки практично не спостерігаються. Мікроструктура поверхні дуже побита як і у вихідному ТРГ. Спостерігаються відгалуження від великих частинок розмірами до 30 мкм.

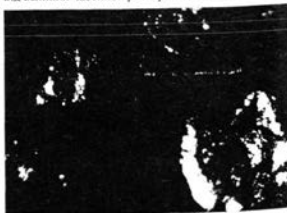


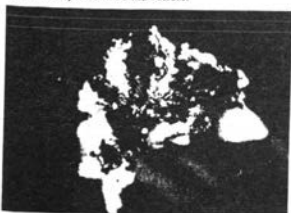
Рис. 3. Фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 3.4 функціоналізованого ТРГ.

На рис. 3 подано фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 2.2 ТРГ, функціалізованого сумішшю сірчаної та азотної кислот з повторним диспергування на магнітній мішалці протягом 20 годин. Рис. 4 представляє фрагмент зображення частинок зразка 3 ТРГ, функціалізованого сумішшю етанолу та толуолу.



Рис. 4. Фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 3 функціалізованого ТРГ.

На зображенні виявляються об'ємні, відносно дрібні округлої форми частинки ТРГ розмірами від 100 до 200 мкм. Зустрічаються окремі великі частинки розміром до 400 мкм. Від частинок відходять відгалуження неправильної форми. Поверхня частинок опукла. Розпізнаються залишки ребер, які присутні в частинках ТРГ. На рис. 5 подано фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинки ТРГ, модифікованої ацетоном.



На рис. 5 наведено фрагмент оптичного зображення частинки ТРГ, функціалізованого етанолом.

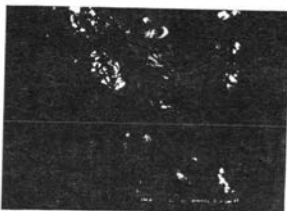


Рис. 6. Фрагмент зображення в оптичному мікроскопі частинок зразка 5 функціалізованого ТРГ.

Як впливає з рисунків, форма, розмір та мікроструктура поверхні частинок функціалізованого ацетоном ТРГ мало відрізняється від форми, розміру та мікроструктури поверхні частинок вихідного ТРГ. Спостерігаються великі об'ємні черв'якоподібні частинки з структурованою поверхнею та великою кількістю відгалужень. Розміри частинок лежать в межах від 600 мкм до 1 мм. Дрібні частинки, що спостерігаються, розмірами ~150-200 мкм – це відгалуження, які відриваються від великої частинки.

Узагальнені результати дослідження форми, розмірів та мікроструктури поверхні частинок функціалізованого ТРГ наведено в таблиці 3. Таким чином, проведені дослідження форми, розміру та морфології поверхні частинок функціалізованого ТРГ методом оптичної мікроскопії виявили, що параметри частинок та мікроструктура поверхні істотно суттєво залежать від методу функціалізації та функціалізуючої речовини.

Використання в якості функціалізуючої речовини сильного окислювача, яким є розчин перманганату калію в сірчаній кислоті, приводить до руйнування черв'якоподібної структури частинок ТРГ та розділення її на окремі плоскі округлої форми лусочки. Цей процес відбувається дуже інтенсивно, так що в кінцевому продукті присутні лише плоскі частинки, розмір яких змінюється в невеликому

інтервалі. Використання в якості функціоналізуючої речовини більш "м'яких" окиснювачів приводить до того, що процес руйнації черв'якоподібної структури вихідного ТРГ відбувається досить повільно. В зразках функціоналізованого ТРГ, які не були піддані повторному диспергуванню або повторне диспергування проводилося за малий час, розміри частинок лише в два рази менші, ніж розміри частинок у вихідному ТРГ. В мікроструктурі поверхні частинок функціоналізованого ТРГ зберігається ребристість, характерна для структури частинок ТРГ. Збільшення часу повторного диспергування до 20 годин приводить до зменшення розмірів частинок функціоналізованого сумішшю сірчаної та азотної кислот ТРГ до розмірів частинок ТРГ, функціоналізованого перманганатом калію, але на відміну від останніх частинки ТРГ, функціоналізованого сумішшю кислот хоча і стають в певній мірі плоскими, проте не набувають правильної округлої форми. Дефектність поверхні частинок ТРГ, функціоналізованих сумішшю кислот а підданих повторному диспергуванню протягом 20 годин також є суттєво більшою, ніж дефектність поверхні частинок ТРГ, функціоналізованих за допомогою перманганату калію. Таким чином, якщо при функціоналізації ТРГ розчином

перманганату калію досягти розмірів частинок ТРГ ~ 10-100 мкм можливо за рахунок лише хімічної обробки, то при функціоналізації ТРГ сумішшю кислот незалежно від методу функціоналізації (з кип'ятінням або без нього) такого розміру частинок функціоналізованого ТРГ можна досягти тільки за рахунок великого часу диспергування порошку ТРГ. Дія функціоналізуючих речовин – органічних сполук на структуру вихідного ТРГ є більш м'якою. Функціоналізація ТРГ органічними сполуками не приводить до руйнації структури частинок вихідного ТРГ. При всіх методах функціоналізації ТРГ органічними речовинами частинки залишаються об'ємними, з яскраво вираженою ребристістю та структурованістю поверхні. При функціоналізації сумішшю етанолу та толуолу та хлороформом розміри частинок зменшуються в порівнянні з вихідними ТРГ від 2 до 5 разів. При функціоналізації ТРГ ацетоном та етанолом розміри частинок вихідного ТРГ змінюються дуже мало, а певна кількість дрібних частинок з'являється за рахунок відламування від великої частинки малих відгалужень при диспергуванні ТРГ в процесі функціоналізації на магнітній мішалці.

Таблиця 3

Узагальнені результати дослідження форми розмірів та мікроструктури поверхні частинок функціоналізованого ТРГ

Зразок	Форма частинок	Розміри частинок	Розподіл за розмірами	Мікроструктура поверхні
1	Пласкі, округлої форми, згладжені краї без відгалужень	(10-100)мкм	Рівномірний	Дрібна, "пом'ята", розмір плоских ділянок на поверхні ~ 1 мкм
2.1	Дуже великі, пухкі	(500-600) мкм	Рівномірний, дрібні практично частинки відсутні	Поверхня дуже побита, є окремі бугорки ~ 30 мкм
2.2	Дрібні, плоскі, неправильної форми	(15-100) мкм	Досить рівномірний	Дуже порепана, побита, площа плоскої ділянки на поверхні частинки ~ 0.3 мкм
3	Об'ємні, відносно дрібні, округлі, з відгалуженнями неправильної форми	(100-200) мкм, окремі до 400 мкм	нерівномірний	Поверхня не плоска, опукла, із залишками ребер

4	Великі об'ємні частинки неправильної форми з великою кількістю відгалужень	(150-200) мкм, 600 мкм, 1мм	Досить рівномірний, маленькі частинки – відгалуження, що відпадають	Поверхня структурована
5	Дуже великі об'ємні частинки неправильної форми з відгалуженнями, окремі невеликі,	(500-1000) мкм, окремі маленькі – (150-200) мкм	Великий розкид частинок за розмірами	Структурована поверхня

Список використаних джерел

- Shaffer M. S. P., Fan X., Windle A. H. Dispersion and packing of carbon nanotubes // Carbon.-1998.- Vol. 36, No. 11.- P. 1603–16121.
- Choi E. S., Brooks J. S., Eaton D. L., Garmestani H., Dahmen D. Li K. Enhancement of thermal and electrical properties of carbon nanotube polymer composites by magnetic field processing // Jour. of Appl. Phys. - V94, N 9.- 2003, PP.6034-6039.
- Jumi Yun, Ji Sun Im, Young-Seak Lee, Hyung-Il Kim. Effect of oxyfluorination on electromagnetic interference shielding behavior of MWCNT/PVA/PAAc composite microcapsules // European Polymer Journal. –V 46, Issue 5.- 2010.- P.900-909.
- Awasthi K., Srivastava A., Srivastava O.N. . Synthesis of CNT // J. Nanosci. Nanotechnol. 2005.- V 5, N10.- P.1616-1636.
- Xu X., Thwe M. M., Shearwood C., Liao K.. Mechanical properties and interfacial characteristics of carbon-nanotube-reinforced epoxy thin films //Appl. Phys. Lett. .V 81, No 15.- 2002.- PP.2833-2835.
- Jeong S.H. , Ko J-H , Park J.-P. , Park W.. A sonochemical route to SWCNT under ambient conditions // J. Amer. Chem. Soc. .2004.- V 126.- P.15982-15983.
- Shuguang W., Yanhui L., Xiaoyan G., Huazhang Z., Zhaokun L., Cailu X., Dehai W.. Surface characteristics of modified carbon nanotubes and its application in lead adsorption from aqueous solution //Chinese Science Bulletin.- 2003.- Vol. 48, No. -P.5 441 443.
- Мурадян В.Е., Соколов Е.А., Бабенко С.Д., Моравский А.П.. Диелектрические свойства композитов, модифицированных углеродными наноструктурами, в микроволновом диапазоне // Журнал технической физики.- 2010.- том 80, вып. 2.- С. 83-87.
- Крутиков В. А., Дидик А.А., Яковлев Г.И. и др. Композиционный материал с наноармированием // Альтернативная энергетика и экология (ISJAE).- No4 (24).- 2005.- С. 36-41.
- Olek M.. Carbon nanotube composites – mechanical, electrical and optical properties. // Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.) der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der

- Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. Bonn –2006, http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online_elektronisch_publiziert.
11. Li Q., Zaiser M., Koutsos V.. Carbon nanotube/epoxy resin composites using a block copolymer as a dispersing agent. // Phys. Stat. Sol. (a).- 201.- 2004, No13.- R89– R91.
 12. Bassil A., Puech P., Landa G., Bacsu W. et al. Spectroscopic detection of carbon nanotube interaction with amphiphilic molecules in epoxy resin composites // Jour. of Appl. Phys. –97.- 2005.- P. 034303.
 13. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Романов А.В.. Комплексная диэлектрическая проницаемость композитов на основе диэлектрических матриц и входящих в их состав углеродных нанотрубок. // Журнал технической физики, -т. 81, вып. 1.- 2011.- С. 106-110.
 14. Пат. 40256А Україна, МПК6 C01B31/04. Пристрій для одержання терморозширеного графіту /Харьков Є.І., Лисов В.І., Мацуї Л.Ю., Вовченко Л.Л., Цуруль М.Ф., Морозовська Н.О; заявник і патентовласник КНУ ім. Т.Г. Шевченка. – №2000116217; заявл. 02.11.2000; опубл. 16.07.2001, Бюл.№6.
 15. Banerjee S., Wong S.S. Functionalization of Carbon Nanotubes with a Metal-Containing Molecular Complex // Nanoletters.- V 2, No 1.- 2002.- PP. 49-53.
 16. Huang Yi, Ning Li, Yanfeng Ma, Feng Du, Feifei Li, Xiaobo He, Xiao Lin, Hongjun Gao, Yongsheng Chen. The influence of single-walled carbon nanotube structure on the electromagnetic interference shielding efficiency of its epoxy composites // Carbon.- 2007. -V45.- P. 1614
 17. Xue Li, Q. Z., Gao X. L., Zheng Q. B. Temperature dependence of the electrical properties of the carbon nanotube/polymer composites // Polymer Letters.- Vol.3, No.12.- 2009.- P. 769-777.

Надійшла до редколегії 29.02.2012

УДК 538.971

Рево* С.Л., д.ф.-м.н., проф.,
Будзюляк І.М., д.ф.-м.н., проф.,
Рачій Б.І., к.ф.-м.н., м.н.с.,
Кузишнін М.М., асп.**Фізичні засади синтезу карбонового матеріалу для суперконденсаторів**

В роботі розглянуто вплив складу та структури електродного наноконпозиційного матеріалу (НКМ) з карбону для створення з водним розчином КОН суперконденсаторів з підвищеною до (140...160) Ф/г енергосмістю та підвищеними експлуатаційними характеристиками. На основі досліджень енергосмісних характеристик виготовлених зразків таких конденсаторів встановлено оптимальне концентраційне співвідношення компонент НКМ для електродного матеріалу, що забезпечує одержання суперконденсатора з максимальним значенням смисті та циклів заряд-розряд.

Ключові слова: нанопористий вуглецевий матеріал, термічно розширений графіт, електрична смість, суперконденсатор

*E-mail: revo@univ.kiev.ua

Вступ

Електрична смість конденсаторів, рівно як і суперконденсаторів (СК) [1] визначається, насамперед, фізико-хімічними характеристиками активного матеріалу електродів і, крім того, типом електроліту, колекторів, сепараторів та інших складових, що входять до конструктивних елементів конденсаторів. При цьому, енергетика та кінетика електродних процесів, які відбуваються в зоні поділу між електродом та електролітом у пристроях, що працюють за принципом заряд-розряду подвійного електричного шару (ПЕШ), є визначальним для створення електрохімічних СК.

Останнім часом інтерес до електронних портативних пристроїв, а також нових, з покращеними питомими характеристиками, джерел живлення і, природно, до дешевих, легких і доступних СК, постійно зростає. З точки зору терміну служби, кількості робочих циклів заряду-розряду, а саме головне здатності за короткий час віддавати великі потужності по

Revo* S. L., Dr. Sci., Prof.,
Budzulyak I. M., Dr. Sci., Prof.,
Rachiy B. I., PhD, Sci. Res.,
Kuzyshyn M. M., PhD stud.**Physical principles of synthesis of the carbon materials for supercapacitors**

The influence of the composition and structure peculiarities of the electrode carbon-based nanocomposite material (NCM) has been considered in order to create the supercapacitors with the enhanced energy capacity (140-160 F/g) and functional characteristics using the water solution of KOH. Reasoning from the data on the energy capacity characteristics of the fabricated specimens, the optimal content of NCM being used as an electrode material has been determined. This content was shown to provide the production of the supercapacitor possessing maximal values of capacity end a number of the charge-discharge cycles.

Key Words: nanoporous carbon material, thermally exfoliated graphite, electric capacity, supercapacitor.

струму і швидко заряджатися, такі конденсатори є перспективними для використання в різноманітних галузях електроніки.

Суперконденсаторами (іоністорами, іоніксами) називають [1] електрохімічні пристрої, в яких відбуваються квазіоборотні електрохімічні заряд-розрядні процеси, форма гальваностатичних зарядних і розрядних кривих яких близька до лінійної, тобто близька до форми відповідних залежностей для звичайних електростатичних конденсаторів. СК складається з електродів, виготовлених на основі матеріалів із розвиненою внутрішньою поверхню, розділених сепаратором і поміщених у герметичний корпус. Внутрішнє середовище СК заповнене електролітом.

Тип використовуваного розчину електроліту визначає характеристики СК. Від нього в основному залежить внутрішній опір, а робоча напруга не може перевищувати потенціал розкладання розчинника. Тому системи з водним розчином електроліту мають низький внутрішній опір, але при цьому робоча напруга не може

перевищувати 1,2 В (потенціал розкладання води без урахування перенапруги).

Смність електрохімічного конденсатора чи конденсатора з ПЕШ описується класичною формулою для плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}, \quad (1)$$

де C – смність СК; ϵ – діелектрична проникність; S – площа електроду; d – товщина ПЕШ. Відмінність полягає в тому, що електрохімічний конденсатор у випадку ідентичних електродів (симетричний конденсатор) являє собою два послідовно з'єднані конденсатори, тому його загальна смність описується як:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2)$$

і якщо $C_1 = C_2$, то

$$C = \frac{C_1}{2}. \quad (3)$$

Згідно формули (1) збільшення питомої площі електродів приводить до збільшення питомої смності. Тому велику увагу розробники СК приділяють вибору активного матеріалу електрода [2]. Можна виділити наступні основні критерії, яким повинен відповідати активний матеріал електродів:

- матеріал повинен бути «ідеально поляризованим» в області потенціалів, обмежених потенціалом електрохімічного розкладу розчинника;
- мати велику площу поверхні активного матеріалу для отримання великої питомої смності;
- мати високу провідність по електронній складовій для забезпечення великих значень питомої потужності електрохімічних конденсаторів;
- бути індиферентним відносно розчину електроліту.

Свого часу на роль матеріалу електродів СК випробували ряд губчастих матеріалів (зокрема, металів) від титану до платини. Однак, найкращим виявився значайний активований вуглець. На сьогодні найперспективнішим матеріалом для використання в якості електродів СК є нанопористий активований вуглець із

високорозвиненою поверхнею ($> 1000 \text{ м}^2/\text{г}$), проте він відносно дорогий, бо виготовляється, в основному, з кісточок фруктів і має низьку питому провідність. Для подолання цієї проблеми було розроблено наноконпозиційний матеріал – нанопористий вуглець (НВ)-термічно розширений графіт (ТРГ). ТРГ значно дешевший, ніж НВ, його виробляють в промислових масштабах, і хоча він має менш розвинену поверхню (до $50 \text{ м}^2/\text{г}$), його електроопір менший за опір НВ і складає при густині $0,5 \text{ г/см}^3$ порядку $2 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ [3].

Метою роботи було встановлення залежності електрохімічних параметрів СК на основі нанопористого вуглецю та термічно розширеного графіту від концентрації компонент.

Матеріали та методи дослідження

Наноконпозиційний матеріал, характеристики якого були досліджені в даній роботі, виготовляли з нанопористого вуглецю та терморозширеного графіту. Нанопористий вуглець одержували з сировини рослинного походження методом її гідротермальної карбонізації при тиску водяної пари $(12 \pm 15) \cdot 10^5 \text{ Па}$ з подальшою термічною активацією при температурі $673 \pm 3 \text{ К}$ протягом трьох годин. ТРГ отримували шляхом термічного розкладання електрохімічно окисленого графіту. В якості електроліту служив 30% водний розчин КОН.

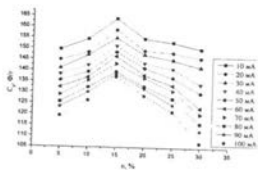
З отриманого композиційного матеріалу (КМ) формували електроди в нікелевій сітці у формі ламельок, після чого проводили їх пресування при тиску 5 МПа . Отримані два однакові електроди розділяли сепаратором з азбестового паперу, заливали розчином електроліту і герметично закривали в корпусі.

Для дослідження залежності питомої смності від швидкості процесу заряд-розряд ПЕШ був використаний метод вольтамперометрії при швидкостях сканування від 1 до 100 мВ/с . Швидкість зміни напруги електрохімічного конденсатора (ЕК):

$$s = \pm \frac{dU}{dt}, \quad (4)$$

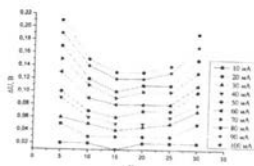
тоді відповідний струм конденсатора пов'язаний з смністю рівнянням $I = C \frac{dU}{dt}$ або

$I = C \cdot \Delta U$. Питому ємність НВ розраховували за формулою:



а)

Оптимальна електрична ємність СК з



б)

Рис. 1 Залежність питомої ємності (а) та внутрішнього опору (б) електрохімічного конденсатора від процентного вмісту ТРГ.

$$C_{\text{ем}} = \frac{2I}{\Delta U \cdot m}, \quad (5)$$

де I – струм анодної або катодної гілок вольтамперограми, ΔU – швидкість сканування, m – активна маса електрода. За допомогою гальваностатичного методу обчислювали питому ємність вуглецевого матеріалу в залежності від розрядного струму, який знаходився в межах від 1 до 100 мА. Питому ємність ЕК обчислювали за формулою:

$$C_{\text{ем}} = \frac{I \cdot t_p}{(U - \Delta U) \cdot m}, \quad (6)$$

де I – розрядний струм, t_p – час розряду, $U - \Delta U$ – різниця потенціалів в крайніх точках розрядної кривої, m – маса НВ.

Внутрішній опір визначали за стрибком потенціалу після 10-ти циклів заряд-розряду:

$$\Delta U = 2IR. \quad (7)$$

Потенціодинамічні криві та вольтфарадні характеристики суперконденсаторів досліджували за допомогою потенціостату AUTOLAB PGSTAT100. Крім того вивчали залежності їх питомої ємності та внутрішнього опору від концентраційного співвідношення НВ : ТРГ, на основі яких вони сформовані. При дослідженнях використовували нанопористий активований вуглець, отриманий з фруктових кісточок абрикосів.

Результати експерименту та їх обговорення

електродами, виготовленими з рослининої речовини, які витримують необхідну для їх практичного використання ($\sim 10^5$ циклів) кількість зарядів-розрядів, складає порядку ~ 150 Ф/г.

Питома ємність СК на основі наноконпозиційних матеріалів НВ-ТРГ з різним вмістом терморозширеного графіту показана на рис.1 (а). При збільшенні вмісту ТРГ від 5 до 15 мас. % спостерігається зростання їх питомої ємності від 150 до 164 Ф/г (струм сканування 10 мА). Це пов'язано зі збільшенням електропровідності НКМ, що полегшує перенесення електронів під час заряд-розряду. Оскільки питома ємність ТРГ є дуже малою в порівнянні з питомою ємністю активованого вуглецевого матеріалу, то вона може бути обумовлена, головним чином, зміною струму [4]. Подальше збільшення вмісту ТРГ зменшує величину ємності. Швидше за все заповнення мікропор веде до зменшення площі активної поверхні, що викликає зменшення кількості транспортних пор. Таким чином, ємність зменшується, коли концентрація ТРГ (n) є достатньо великою ($n > 15$ мас. %). Максимальне значення ємності отримали при вмісті ТРГ $n = 15$ мас. %.

Поведінка спаду напруги СК від вмісту ТРГ зображена на рис. 1 (б). Спад напруги на зразках, виготовлених з НКМ, зменшується зі збільшенням вмісту ТРГ до 15 мас. %, що зумовлено зростанням кількості електронів, які беруть участь у формуванні ПЕШ. При подальшому збільшенні його концентрації в КМ спад напруги зростає, що пояснюється

зменшенням величини контактної поверхні активного матеріалу і електроліту. Різкий спад напруги для всіх СК на основі композиції НВ-ТРГ не перевищує 20% при максимальному робочому розрядному струмі 100 мА.

Смислі характеристики СК при різних струмах розряду наведені на рис. 2. На основі експериментальних даних для гальваностатичного режиму розряду електрохімічного конденсатора отримані залежності ємності від струму розряду. Для всіх зразків ємність монотонно падає зі зростанням струму розряду. Це, ймовірно, пов'язано з тим, що при великих струмах розряду іони електроліту не встигають сформувати ПЕШ в мікропорах, внаслідок дифузійних обмежень і внесок мікропор у величину ємності є незначним. Максимальний розрядний струм становив 100 мА, оскільки при подальшому його збільшенні спад напруги при розряді перевищує 20%.

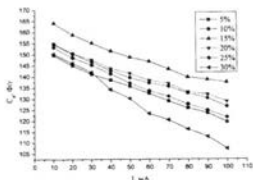
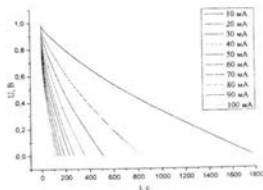


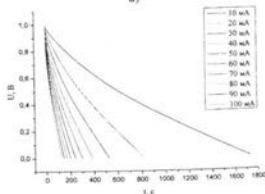
Рис. 2 Залежність питомої ємності СК від струму розряду при різному процентному вмісті ТРГ у НКМ.

На рис.3 представлені хроноамперограми, одержані при постійних значеннях струму розряду. Як видно з кривих, ємність електрохімічних конденсаторів, електроди яких виготовлені з роздробленого НКМ, що має різний процентний вміст ТРГ, майже не змінюється. Максимальну ємність 164 Ф/г спостерігали для зразків з вмістом ТРГ – 15 мас. %.

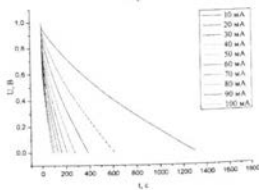
З метою аналізу процесів протікання можливих хімічних реакцій, які впливають, на ємність ПЕШ та ємність, викликану окисно-відновними реакціями, були проведені електрохі-



а)



б)



в)

Рис. 3 Вигляд розрядних кривих, які характеризують поведінку СК з двома електродами на основі композиції НВ і ТРГ з масовою часткою останнього: а) 5%; б) 15%; в) 30%.

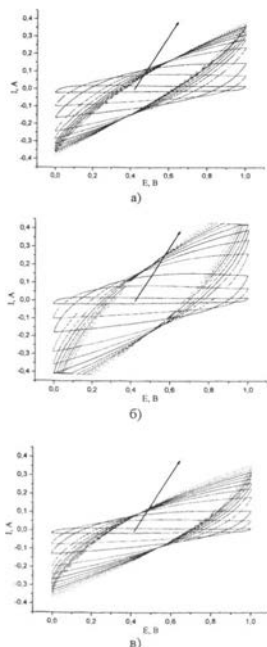


Рис. 4 Циклічні вольтамперограми СК на основі КМ з різним масовим вмістом ТРГ:

а) 5%; б) 15%; в) 30%.

Швидкість сканування відповідно становила 1, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мВ/с; стрілка вказує на напрямок зростання швидкості сканування ν .

мічні дослідження в області потенціалів $0 + 1$ В КМ з різним вмістом ТРГ у 30% водному розчині КОН. Для деяких зразків на рис. 4 подані циклічні вольтамперограми СК на основі композиції НВ-ТРГ.

При малих швидкостях сканування (1, 5, 10 мВ/с) всі криві, зняті для шести електрохімічних конденсаторів, мають майже прямокутну форму без наявних піків, які відповідають за протікання окисно-відновних процесів у даній системі. Дана форма кривих типова для смісної поведінки СК [5-7]. При збільшенні швидкості сканування відбувається відхилення від ідеальної прямокутної форми, що обумовлено часом релаксації для переміщення сольватованих іонів вздовж робочих пор.

На рис.5 показано вольтфарадні характеристики СК, сформованих на основі розроблених композицій. Дані характеристики майже однакові, що свідчить про наявність однакового механізму накопичення електричного заряду [7].

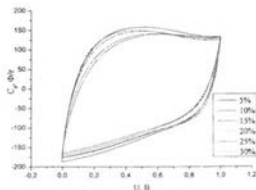


Рис. 5 Вольтфарадні залежності суперконденсаторів на основі НКМ з різним вмістом ТРГ. Швидкість сканування становила 5 мВ/с.

Висновки

Використання термічно розширеного графіту в якості струмопровідного компонента наноконпозиції з нанопористим вуглецевим матеріалом, дозволяє не тільки знизити внутрішній опір суперконденсаторів, а й підвищити їх питому електричну ємність.

В електрохімічних конденсаторах, сформованих на основі наноконпозиційного матеріалу НВ-ТРГ, практично відсутні фарадеївські процеси в широкій області потенціалів (0 – 1 В), тобто вони добре циклюються ($>10^5$ циклів) без зміни кулонівської ефективності.

Оптимальне концентраційне співвідношення компонент для одержання максимальної електричної ємності СК між нанопористим вуглецевим матеріалом і терморозширеним графітом у водному розчині електроліту КОН становить 85:15 відповідно. Це забезпечує питому ємність СК в межах 140-160 Ф/г при розрядних струмах 10-100 мА.

Список використаних джерел

1. Conway B.E. Electrochemical supercapacitors. Scientific fundamentals and technological applications. - N.Y.: Kluwer Academic / Plenum Publ., 1999. - 698 p.
2. Бухаров В.А. Нові електродні матеріали для суперконденсаторів // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер.: Фізика. – 2007. – № 21. – С. 25-28.
3. Рево С.Л., Лозовий Ф.В., Іваненко К.О., Авраменко Т.Г. Вплив умов формування композиційних сумішей полімер-вуглець на їх електроопір // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – 11, № 4. – С. 1029-1033.
4. Ковалюк З.Д., Боднарішек В.М., Микитюк І.П., Юрченко Н.С., Юрченко С.П. Електродний компонент суперконденсаторів – пористий вуглецевий матеріал з органічної сировини рослинного походження // Фізична інженерія поверхні. – 2011. – 9, № 2. – С. 176-181.
5. Остафійчук Б.К., Беркещук М.В., Будзюк І.М., Магомед О.Д. Вплив лазерного опромінення на електрохімічні властивості активованого вуглецевого матеріалу, легованого Mn // Фізика і хімія твердого тіла. – 2008. – 9, № 1. – С. 64-71.
6. Бахматюк Б.П., Куреня А.С. Ємнісні і кінетичні властивості суперконденсатора на основі нанопористого вуглецевого матеріалу в середовищі апротонного електроліту // Вісник Національного університету "Львівська політехніка", Сер.: Електроніка. – 2010. – № 681. – С.52-61.
7. Guihua Yu, Liangbing Hu, Nian Liu, Huiliang Wang, Michael Vosgueritchian, Yuan Yang, Yi Cui, Zhenon Bao. Enhancing the supercapacitor performance of graphene/MnO₂ nanostructured electrodes by conductive wrapping // Nano Lett. – 2011. – 11(10). – P. 4438-4442.

Надійшла до редколегії 23.01.2012

УДК 539.194

Розуван* К.П., к.ф.м.н., Розуван С.Г., к.ф.м.н.,
Шайкевич І.А., д.ф.м.н.**Скануюча тунельна мікроскопія тонких
плівки барвника**

Тонкі плівки родаміну 6Ж на металевій та напівпровідниковій підкладках вивчалися за допомогою скануючої тунельної мікроскопії та спектральної еліпсометрії. Скануюча тунельна мікроскопія зразків барвник-металева підкладка дозволила отримувати профіль інтерфейсу метаз-напівпровідник з атомною просторовою роздільною здатністю 0.08 нм. Методика мікшарової тунельної мікроскопії була проаналізована за допомогою квантово-механічного підходу.

Ключові слова: органічний напівпровідник, скануюча тунельна мікроскопія, тонкі плівки.

*E-mail: sgr@univ.kiev.ua

Скануюча тунельна мікроскопія (СТМ) з моменту її винаходу та використання в наукових дослідженнях [1,2] зарекомендувала себе як унікальна експериментальна методика по декільком основним причинам. По-перше, ця методика історично започаткувала широкий фронт нанотехнологічних досліджень, бо СТМ дозволяє маніпулювати окремими атомами [3], шляхом вибору тунельного струму, а отже конструювати наноструктури. По-друге, СТМ дозволяє отримувати дані по поверхні зразка з рекордними значеннями просторової роздільної здатності на рівні ресстрації виду кристалічної ґратки зразка. Також скануюча тунельна мікроскопія, наприклад, на відміну від електронної мікроскопії не потребує спеціального приготування зразка, що веде до розширення списку речовин, які можна досліджувати. Одним із перспективних напрямків застосування СТМ слід назвати вивчення поверхні металевого або напівпровідникового кристалів на які можуть наноситись молекули барвників. Так, в [4] морфологія поверхні міді вивчалась спостереженням еволюції моноатомних шарів на поверхні зразка. В [5] методикою СТМ вивчалися плівки діоксиду титану з абсорбованими молекулами барвників на поверхні. Молекули барвників при цьому впливали на вольт-амперні характеристики зразка. При абсорбції молекул

K.P.Rozouvan*, PhD, S.G. Rozouvan, PhD,
I.A. Shaykevich, PhD**Scanning tunneling microscopy of dye thin
films**

Thin Rhodamine 6G films on a metal and a semiconductor substrates were studied by scanning tunneling microscopy and spectral ellipsometry techniques. Scanning tunneling microscopy of dye on a metal substrate allowed obtaining interlayer surface profile with atomic spatial resolution 0.08 nm. Interlayers scanning tunneling microscopy technique was analyzed by quantum mechanics approach.

Key Words: organic semiconductor, scanning tunneling microscopy, thin films

барвника на високовпорядковану поверхню кристалу (моноатомну площину) можливо отримати впорядкований моноатомний шар молекул барвника [6,7] на поверхні зразка. Одна з труднощів, яка виникає на цьому шляху пов'язана з швидкою ерозією моноатомного шару підкладки, яка взаємодіє з барвником. Якщо органічні молекули можуть полімеризуватись [8] або знаходитись на поверхні в рідкій чи твердій фазах [9], то при нанесенні на поверхню у вигляді атомної площини, полімеризовані і не полімеризовані молекули можуть формувати структури різного типу впорядкованості. Основний недолік скануючої тунельної мікроскопії в порівнянні, наприклад, з електронною мікроскопією полягає в тому, що класична СТМ вичає тільки поверхню зразка. В той же час, вивчення моноатомних шарів на поверхні зразка має на меті створення мініатюрних елементів наноелектроніки. Такі елементи мають бути побудовані з гетероструктур або, можливо, набору моноатомних шарів. Для вивчення такого типу структур СТМ була вдосконалена, шляхом зміни орієнтації скануючого вістря з вертикального на горизонтальний, а площини сканування з горизонтальної на вертикальну. Нова методика (cross-sectional scanning tunneling microscopy (XSTM)) [10] дозволяє вивчати об'ємні параметри

гетероструктур на нанорозмірному рівні. Так в [11], XSTM застосовувалась для вивчення гетероструктур побудованих з напівпровідників III-V груп. При такій геометрії експерименту можливе пряме спостереження стоячих де-Бройлівських хвиль в багат шарових моноатомних структурах [12] а також, проводити характеристизацію та оптимізацію такого типу гетероструктур з квантовими ямами [13]. Мета даної роботи полягає у вивченні тонких плівок барвників на нанорозмірному рівні, продовжуючи цикл досліджень [14-16].

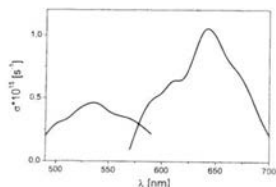


Рис.1 Спектральні залежності оптичної провідності для тонких плівок родаміну 6Ж (ліва залежність), та бриліантового зеленого (права залежність) нанесених на мідне дзеркало.

Для дослідження ми вибрали барвник родамін 6Ж, оскільки він має дуже великі значення квантового виходу та коефіцієнтів Ейнштейна, що й обумовлює надзвичайно широкий масштаб його використання в наукових дослідженнях, пов'язаних з генерацією світла змінної довжини хвилі або флюоресценцією. Виміри товщини нанесеної плівки барвника за допомогою атомно-силової мікроскопії дали середні значення її товщини в 150 нм, що дозволило знехтувати інтерференційними явищами при відбиванні світла. При нанесенні барвника на металеву поверхню формується контакт Шоткі. Фізичні характеристики такої органічної тонкої плівки повністю описуються формалізмом фізики твердого тіла. Так, в доповнення до результатів роботи [16], ми провели спектрально-еліпсометричні вимірювання тонкої плівки родаміну 6Ж, нанесеної на підкладку полірованої міді. Як ми бачимо з рис. 1, спектральна крива не містить скачка в області 600нм, яка у випадку міді розмежовує спектральний інтервал з міжзонними переходами та довжини хвиль, де

проявляються вільні носії в зоні провідності [17]. Спектральні залежності оптичної провідності відображають виключно електронну структуру барвника, а мідна підкладка на них не впливає. Контакт Шоткі, як було показано, [16] може змінювати тільки заселеність його рівнів бо на контакті метал-напівпровідник формується просторовий заряд, який викривлює енергетичні рівні напівпровідника, що призводить вирівнювання положення рівнів Фермі підкладки-плівки. Через бар'єр, що формується викривленим рівнем Фермі, може проходити тунелювання електрону, який вже і буде зареєстрований СТМ. Розглянемо це в деталях. Спрощена енергетична схема скануючої тунельної мікроскопії металеві або напівпровідникової підкладки зображена на рис. 2. Потенційні бар'єри на рисунку мають прямокутну форму. Результати даного

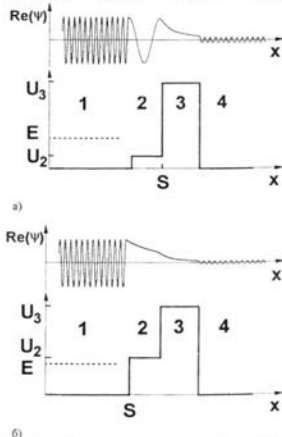


Рис.2 Скануюча тунельна мікроскопія напівпровідникової (а) та металеві підкладки (б) з нанесеною тонкою плівкою. Другі схематично зображені дієсні частини хвильової функції електрона, що реєструється при вимірюваннях.

наближення легко можуть бути апроксимовані на

випадає коли один із них є бар'єром Шоткі з експоненційною формою [187]. Підкладка 1 з нанесеною тонкою плівкою 2 розділена шаром простору 3 між поверхнею гострої металеві голки 4. Хвильова функція електрону, який ресструється пристроєм скануючої тунельної мікроскопії, зображена у верхній частині рисунку. Енергія електрону в підкладці E відмічена пунктирною лінією. Енергія бар'єрів, пов'язаних з тонким шаром та проміжком простору є відповідно U_2 та U_3 . На рис.2 схематично зображені два важливі випадки $E > U_2$ та $E < U_3$. Енергія електрону в підкладці відраховується від $U_1=0$, що для випадку металу приблизно відповідає положенню рівня Фермі, або дою зони провідності для напівпровідника з електронним типом провідності (вершини валентної зони з дірковим типом провідності). Рівняння Шредінгера може бути написане для областей (1)-(4):

для підкладки (область 1) рівняння Шредінгера та їх розв'язки мають вигляд:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_1 - E \psi_1 &= 0 \\ \psi_1 &= A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \\ k_1 &= \sqrt{2mE}/\hbar \end{aligned} \quad (1)$$

для плівки (область 2)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_2 - (E - U_2) \psi_2 = 0 \quad (2)$$

для випадку $E > U_2$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \\ k_2 &= \sqrt{2m(E - U_2)}/\hbar \end{aligned} \quad (3)$$

для випадку $E < U_2$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= A_2 \exp(-\beta_2 x) + B_2 \exp(\beta_2 x) \\ \beta_2 &= \sqrt{2m(U_2 - E)}/\hbar \end{aligned} \quad (4)$$

для проміжку простору (область 3):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_3 - (E - U_3) \psi_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \psi_3 &= A_3 \exp(-\beta_3 x) + B_3 \exp(\beta_3 x) \\ \beta_3 &= \sqrt{2m(U_3 - E)}/\hbar \end{aligned} \quad (5)$$

для поверхні голки (область 4):

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_4 - E \psi_4 &= 0 \\ \psi_4 &= A_4 \exp(ik_4 x + i\varphi) \\ k_4 &= \sqrt{2mE}/\hbar \end{aligned} \quad (6)$$

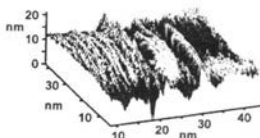


Рис.3 Поверхня кремнієвої підкладки.

Зв'язок між коефіцієнтами A_i та B_i може бути знайдений, використовуючи умови неперервності для хвильових функцій та їх перших похідних на границях між областями (1)-(4), які позначаються індексом i :

$$\begin{aligned} \psi_i(x_{i+1}) &= \psi_{i+1}(x_{i+1}) \\ \partial \psi_i(x_{i+1}) / \partial x &= \partial \psi_{i+1}(x_{i+1}) / \partial x \end{aligned} \quad (7)$$

Так наприклад, для випадку рис.2б ми можемо отримати:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{B_2(i k_1 + \beta_2) + A_2(i k_1 - \beta_2)}{2i k_1} \\ B_1 &= \frac{B_2(i k_1 - \beta_2) + A_2(i k_1 + \beta_2)}{2i k_1} \\ B_2 &= \frac{A_3(\beta_2 - \beta_3) + B_3(\beta_2 + \beta_3)}{2\beta_3} \exp(\beta_2 d_2) \\ A_2 &= \frac{A_3(\beta_2 + \beta_3) + B_3(\beta_2 - \beta_3)}{2\beta_3} \exp(-\beta_2 d_2) \\ B_3 &= A_4 \frac{\beta_3 + i\beta_4}{2\beta_3} \exp(-\beta_3 d_3) \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_3 = A_4 \frac{\beta_1 - i\beta_4}{2\beta_3} \exp(\beta_3 d_3)$$

де d_1 та d_2 є відповідно товщинами плівки на підкладці та відстані між поверхнею зразка й голкою. Хвильова функція для області 2 має гармонічний характер (рис.2а), або експоненційну форму (рис.2б). З чисто практичної точки зору, це означає, що СТМ буде ресструвати профіль поверхні розділу між областями 2 та 3 в одному випадку, та між областями 1 і 2 в іншому випадку (ці поверхні позначені літерою S на рисунку 2)

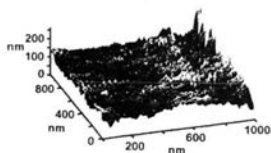


Рис.4 Поверхня плівки родаміну6Ж нанесеної на кремнієву пластинку.

Для експериментів ми використовували скануючий тунельний мікроскоп на базі нанолaboratorії ІНТЕГРА, що дозволяло нам ресструвати топологію поверхні з просторовою роздільною здатністю, яка досягала в кращому випадку 0.08 нанометра. Гостру голку для СТМ ми отримували з дроту діаметром 0.5мм, виготовленого зі сплаву $Pt_{0.1}Ir_{0.9}$, шляхом механічного відрізання його кінця. Полірована поверхня кремнієвої підкладки, на яку планувалося наносити плівку барвника, була просканована за допомогою скануючої тунельної мікроскопії. Профіль поверхні представлений на рис.3. З рисунка видно, що висота нерівностей поверхні не перевищує декількох нанометрів. Для нанесення тонкої плівки родаміну 6Ж ми розчиняли барвник в етанолі, а потім наносили розчин на дану підкладку яка оберталася.

Профіль поверхні плівки родаміну 6Ж, отриманий за допомогою скануючої тунельної мікроскопії, представлений на рис.4. З рисунка видно, що поверхня плівки представляла собою неідеальну поверхню з нерівностями від декількох десятків до сотні нанометрів. Таким чином, розмір нерівностей поверхні плівки барвника був на один-два порядки більший ніж для поверхні підкладки, на яку дана плівка була

нанесена. Це означає, що кремній та барвник утворили контакт типу напівпровідник-напівпровідник, через який і протікав тунельний струм. Аналогічно, плівка родаміну 6Ж була нанесена на поліровану поверхню міді. Результати вимірювань показали, що величини нерівностей поверхні, яка сканувалася, були не більші десяти нанометрів. У цьому випадку на контакт плівка барвника- мідна підкладка сформувався бар'єр типу Шоткі, через який і проходило тунелювання. Результати вимірювань профіля контакту плівки родаміну 6Ж на поверхні міді за допомогою міжшарової скануючої тунельної мікроскопії представлені на рис.5. Просторова роздільна здатність, з якою був отриманий профіль поверхні, досягала 0.08 нанометра, що дозволило отримати дані про нанокристалічну будову зразка. Зображення на рис. 5 має дві частини розділені більш темною смугою. Поверхня міді не являлась атомною площиною, проте на нижній частині рисунку представлена гранецентрована ґратка міді (чітко видно вертикальні і горизонтальні атомні площини). В даній області контакт між плівкою барвника та підкладкою був відсутній із-

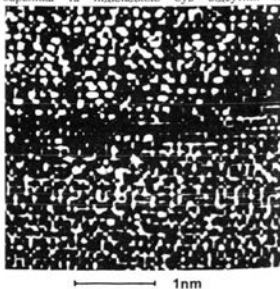


Рис.5 Полірований зразок міді з нанесеною плівкою родаміну 6Ж.

за рихлої структури плівки. На верхній частині більш яскраві точки представляють собою функцію розподілів електронної густини в молекулі родаміну 6Ж, та електронної густини в кристалічній ґратці міді. З деякою ступінню наближення в цю функцію входить лінійна

суперпозиція хвильових функцій мілі та бар'єрика, оскільки на контакті має існувати змішаний квантово-механічний стан. Верхня частина рис.5 являє собою просторовий розподіл електронної густини в області краю бар'єру Шоткі. Внаслідок неідеального (острівкового) характеру структури плівки, в деяких місцях контакту плівки з підкладкою електричний контакт був відсутній. Ми провели квантомеханічні розрахунки молекули родаміну 6Ж по методиці описаній в [14,15]. Ізоповірки розрахунків просторового розподілу електронної густини молекули бар'єрика представлені на рис.6. Горизонтальний розмір молекули становить 1 нанометр. На верхній частині рис.5 можна виділити ізольовані області розміром біля 1 нанометру, які можна було б використати для порівняння з результатами рис.6, шляхом знаходження кореляції між теоретично та експериментально отриманими електронними густинами. Проте, такий аналіз ускладнюється довільною просторовою орієнтацією молекул родаміну в нанесеній плівці. З точки зору подальшого аналізу, СТМ більш простих органічних молекул, як в [5-7] виглядає більш перспективною.



Рис.6 Ізоповірки модуля хвильової функції (величина по поверхні 0.1) для верхньої заселеної молекулярної орбіталі родаміну 6Ж. Розмір молекули по горизонталі становить 1 нанометр.

Також, один із можливих шляхів характеристики тонких плівок органічного напівпровідника, пов'язаний з реєстрацією вольт-амперних характеристик під час вимірювань методикою скануючої тунельної мікроскопії. Струм при таких вимірах буде проходити через вістря голки, яке має поперечні розміри в декілька нанометрів. Як вже було показано, в проміжку голка-зразок,

електрон, що реєструється існує як експоненційно затухаюча хвиля де-Бройля. Сам процес вимірювання вольт-амперних характеристик проходить наступним чином. Програма змінює відстань голка-зразок, отримуючи масив даних струм-напруга при кожному значенні цієї відстані. Ці дані і формують вольт-амперну залежність. Приклади експериментально отриманих вольт-амперних кривих кремнієвої підкладки, кремнієвої підкладки з нанесеною плівкою родаміну 6Ж, а також металевої підкладки приведені на рис.7. З кривих видно, що вольт-амперна характеристика бар'єрика має чітко виражену асиметрію по відношенню до полярності прикладеної напруги, що характерно для напівпровідників. Точні значення величин опорів зразків не можуть бути встановлені на основі даних з рис.8, внаслідок додаткового електричного опору бар'єру, через який проходило тунелювання.

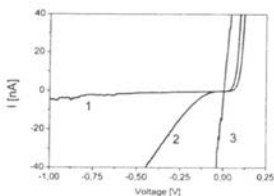


Рис.7 Вольт-амперні криві 1-кремнієвої підкладки, 2-кремнію з нанесеним родаміном 6Ж, 3- метал.

Фізичні властивості плівок родаміну 6Ж можуть бути покращені в рамках розгляду бар'єрика, як органічного напівпровідника. Більші струми в плівці родаміну 6Ж, в порівнянні зі струмами через кремній, пояснюються більшою концентрацією електронів в зоні провідності бар'єрика, незважаючи на більші значення ширини його забороненої зони. Провідність кремнію визначається концентрацією його власних носіїв. У випадку родаміну, провідність має схожі механізми, як і у випадку π -спряжених полімерів. Перенос заряду в таких полімерах відбувається за рахунок механізмів пар електрон-дірка, екситонних пар, а також за рахунок утворення солітоного дефекту в ланцюжку (по типу cis-trans форма мономерного блоку) для

внутрішню ланцюжкової [inter] провідності. Мікцанцюжкова [intra] провідність має в основному екситонний механізм [19]. Ці процеси приводять до появи додаткових рівнів в забороненій зоні, а отже і до підвищення концентрації носіїв в зоні провідності, що і приводить до більш низьких значень питомого опору бар'єрика. Дані рис.7 вказують на потенційну перспективність полімерів для побудови пристроїв наноелектроніки, хоча скануюча тунельна мікроскопія поверхні півки роланіну і показала її низьку якість (високу шорухатість і, напевно, високу ступінь неоднорідності). В рамках роботи було продемонстровано, що виміри STM можуть бути проведені для поверхні півки, яка знаходиться під поверхнею зразка. У нашому випадку тунелювання проходило через бар'єр Шоткі та проміжок зразок-вістря голки. Подібний експериментальний підхід відкриває додаткові перспективи для застосування міжшарової скануючої тунельної мікроскопії для характеристики планарних структур.

Список використаних джерел.

1. Binnig G., Rohrer H., Gerber Ch., and Weibel E. Surface Studies by Scanning Tunneling Microscopy //Physical Review Letters. -1982. -v.49. -N1. -P.57-61.
2. Binnig G., Rohrer H., Gerber Ch., and Weibel E. 7 x 7 Reconstruction on Si(111) Resolved in Real Space //Physical Review Letters. -1983. -v.50. -N2. -P.120-123.
3. Eigler D.M., and Schweizer F.K., Positioning single atoms with a scanning tunneling microscope, //Nature. -1990. -344. -P.524-526.
4. Dulot F., Euge'ne J., Kierren B., Malterre D. STM-TIP induced surface diffusion of copper on copper (100) //Applied Surface Science. -2000. -162-163. -P.86-93.
5. Kumarasinghe A.R., Flavell W.R. The effect of chemisorbed dyes on I-V characteristics of mesoporous TiO₂ observed in scanning tunnelling spectroscopy //Physica E. -2002. -14. -P.224-228.
6. Takeda N., Stawasz M. E., Parkinson B. A. Electrochemical oxidation and ex-situ STM observations of bis(4-dimethylamino-2-dihydroxyphenyl)squaraine dye layers on HOPG electrodes //Journal of Electroanalytical Chemistry - 2001. -498. -P.19-33.
7. Uder B., Ludwig C., Petersen J., Gompf B., Eisenmenger W. STM characterisation of organic molecules on H-terminated Si (111) //Zeitschrift fuer Physik B. -1995. -97. -P.389-390.
8. Giridharagopal R. and Kelly K. F. Substrate-Dependent Properties of Polydiacetylene Nanowires on Graphite and MoS₂ //ACS NANO. -2008. -v.2. -N.8. -P.1571-1580.
9. Coenen M., Cremers M., den Boer D., van den Bruele F. J., Khoury T., Sintic M., Crossley M. J., van Enckevort W. J. P., Hendriksen B. L. M., Elemans J. W. and Spelle S. Little exchange at the liquid/solid interface: defect-mediated equilibration of physisorbed porphyrin monolayers //Chem. Commun. -2011. -47. -P.9666-9668.
10. Yu E. T. Cross-Sectional Scanning Tunneling Microscopy //Chem. Rev. -1997. -97. 1017-1044
11. Nosh B.Z., Barvosa-Carter W., Yang M.J., Bennett B.R., Whitman L.J. Interpreting interfacial structure in cross-sectional STM images of III-V semiconductor heterostructures //Surface Science. - 2000. -465. -P.361-371.
12. Granddier B., Niquet Y. M., Legrand B., Nys J. P., Priester C., and Stiévenard D. Gérard J. M. and Thierry-Mieg V. Imaging the Wave-Function Amplitudes in Cleaved Semiconductor Quantum Boxes //Physical Review Letters. -2000. -v.85. -N5. -P.1068-1071.
13. Zuo S. L., Hong Y. G., and Yu E. T. Cross-sectional scanning tunneling microscopy of GaAsSb/GaAs quantum well structures //Journal of Applied Physics. -2002. -v.92. -N7. -P.3761-3770.
14. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Розрахунки форми смуги поглинання лазерного бар'єрика. // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. - 2009. - №3, С.329-334.
15. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Розрахунки енергії оптичного переходу лазерного бар'єрика // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. - 2009. - №1, С.275-280.
16. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Оптичні властивості тонких плівок лазерних бар'єрик нанесених на металеве дзеркало // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. - 2010. - №2, С.287-292.
17. Burdick G. A. Energy Band Structure of Copper //Physical Review. -1963. -v. 129. -N.1 P.138-150.
18. Дроздов В.П., Неизвестный И.Г., Гридчин В.А. Основы наноелектроніки -Новосибірск: НГТУ, -2000. -322с.
19. Barford W. Properties of conjugated polymers. -Oxford: Clarendon Press. -2005. -262p.

Надійшла до редколегії 20.02.2012р

Підписано до друку 30.03.2012.
Формат 70х100 $\frac{1}{16}$. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 29,50. Наклад 350 прим.
Зам. № 63.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4-6, м. Київ, 01601, Україна
тел./факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail iaa@dstati.kiev.ua

