



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ**

**Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
НАУКИ
ВИПУСК №1**



Київ - 2005

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ



**Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ**

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



13432JB

М/м - механіко-математичний

Ц: 10.00

ВИПУСК № 1 2005

Редакційна колегія:

- **Головний редактор – Булавін Леонід Анатолійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Відповідальний секретар – Анісімова Тетяна Харитонівна**, старший науковий співробітник.

Члени редколегії:

- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор (фізичний факультет);
- **Акименко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Анісімов Анатолій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Гарашенко Федір Григорович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (механіко-математичний факультет);
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (механіко-математичний факультет);
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор (радіофізичний факультет);
- **Єжов Святослав Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор (фізичний факультет);
- **Попов Юрій Дмитрович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **П'ятецький Василь Олександрович**, кандидат фізико-математичних наук, доцент (механіко-математичний факультет);
- **Родіонова Тетяна Василівна**, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник (радіофізичний факультет).

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Адреса редакційної колегії:

03022, вул. Глушкова, 2, корп. 6,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
факультет кібернетики,
тел. (044) 259-01-49

ISBN 966-76-52-00-9

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бабич В.М. Накриття двоточкових бімодульних задач над кільцем степеневих рядів.	9
Безверхня Н.О. Про приближення абстрактних функцій поліномами.	15
Бондаренко В.М. Про $(\min, \max)$ – еквівалентність ч.в. множин та її застосування до форм Тітса.	24
Братик М.В. Про оцінку ймовірності виживання страхової компанії, що займається інвестиційною діяльністю, при показниковому розподілі виплат.	26
Верьовкіна Г.В., Нагорний В.Н. Інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів	31
Ганюшкін О.Г., Заторський Р.А., Ліщинський І.І. До паравизначників і параперманентів трикутних матриць	35
Димарський Я.М. Інтегро-диференціальна квазілінійна крайова задача.	42
Журавльов В.М., Циганівська І.М. Q-еквівалентні скінчені частково впорядковані множини.	47
Коваль В.О. Обмежений закон повторного логарифма для матрично-нормованих багатовимірних мартингалів	52
Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп.	56
Мащенко Л.З. О кусочно нетеровых кольцах.	65

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Андрушко Н.Ф. Просторове моделювання поширення непружних хвиль в складеному стержні Гопкінса	73
Волкова О. Монотонні властивості нідінг інваріанту барн-відображень	83
Краснопольська Т.С., Гетман О.М., Зінчук Л.П., Ісхакова Л.В. Структури у рідині та гранульованих середовищах	90
Легеза В.П. Узагальнена математична модель динаміки однієї віброзахисної системи з котковим гасником	100
Лебедева І.В. Зміщення еліпсоїдального та сферичного включень у необмеженому пружному середовищі	107

Маслов Б.П., Шатило Л.В. Рівняння зростання тріщини втомі у пошкодженому матеріалі із зміцненням	114
Перегуда О.В. Про поведінку розв'язків одного класу стохастичних спряжених осциляторів	124
Радченко О.К. Точний розв'язок у біполярних координатах плоскої задачі для диску з жорстким валом у центрі та несамоєрівноваженими напруженнями на контурі	129
	134

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бакан Г.М., Кононенко О.Б. До задачі оптимізації динамічних дискретно-неперервних процесів	145
Бичков О.С. Застосування другого методу Ляпунова для дослідження стійкості гібридних систем	152
Власюк А.П., Демчук М.Б. Чисельне розв'язання однієї задачі укріплення основи гідротехнічного (енергетичного) об'єкта	158
Гаращенко Ф.Г., Башняков О.М., Клименко В.Г. Про інформаційно-аналітичну систему для аналізу та оптимізації транспортних перевезень	167
Доленко Г.О., Хусаїнов Д.Я. Деякі зауваження про обернену задачу лінійно-квадратичної оптимізації	172
Зінько П.М. Побудова явних різницевих схем для неоднорідного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами	177
Кожаметов А.Т. Оптимізаційний підхід до побудови функціоналів Ляпунова-Красовського	182
Лялецький О.В., Калиновський О.З. Про лінійні стратегії над упорядкованими диз'юнктами	189
Номіровський Д.А. До питань розв'язності та керованості систем С.Л. Соболева	194
Пічкур В.В. Властивості звуження множини	199
Подлипенко Ю.К., Ковалюк А., Лєвошич О.Л. Оптимальне оцінювання розв'язків еліптичних рівнянь в умовах невизначеності	203
Порхун О.В. Методи та алгоритми для розв'язання задач класифікації	212
Степанченко О.М. Чисельне моделювання розчинення пласта солі з врахуванням осмосу	221
Хусаїнов Д.Я., Кузьмич О.І. Оцінки стійкості логіко-динамічних систем з часовим перемиканням	230
Хусаїнов Д.Я., Стадник О.І., Шатирко А.В. Обчислення стаціонарних станів моделей нелінійних динамічних систем з	238

дробово-раціональною правою частиною	
Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів	246

РАДІОФІЗИКА

До 80-річчя від дня народження М.Г.Находкіна	259
Гуденко Ю.М., Іщук Л.В. "Повільні" і "швидкі" електрони у плівках легovanого оловом оксиду індію	261
Іванісік А.І., Конопатський А.В., Дудка С.О. Експериментальне виявлення перехідного ефекту при фазовій самомодуляції світла	268
Іванчук А.В., Кононов М.В. Розпізнавання томографічних магніторезонансних зображень за допомогою нейронної мережі персептрона	275
Ільченко В.В., Кандиба В.О., Кравченко О.І., Лендел В.В., Лученко А.І., Макара В.А., Мельниченко М.М., Свеженцова К.В., Телега В.М., Чехун В.П. Про можливість використання особливостей вольт-амперних характеристик структур наноструктурована плівка кремнію – кремній для аналізу складу газового середовища	281
Присяжневич І.В., Черняк В.Я., Коротков П.А., Наумов В.В., Бабіч І.Л., Слюсаренко Ю.І., Юхіменко В.В., Зражевський В.А. Визначення характеру заселення збуджених електронних рівнів атомів у плазмі поперечної дуги за емісійними спектрами	289
Чутов Ю.І., Кравченко О.Ю., Лиситченко Т.Є., Левада Г.І., Романенко Р.О., Юрчук М.М. Методика моделювання запорошених радіочастотних розрядів в аргоні	299

СУЧАСНА ФІЗИКА

Гічан О.І., Лерман Л.Б., Гречко Л.Г., Склярів Ю.П. Просторово-часові структури в моделі Фітц Х'ю – Нагумо для збудливого та бістабільного середовищ	311
Горобець Ю.І., Горобець О.Ю., Мазур С.П., Бруква О.М. Квазіперіодична структура поверхні сталевого циліндра при його корозії в розчині азотної кислоти в постійному магнітному полі.	319
Каденко І.М., Єрмоленко Р.В., Дзисюк Н.Р. Визначення перерізів ядерної реакції $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)^{182m}_{73}\text{Ta}$	325
Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Вплив магнітного поля і механічних напруг на термо-е.р.с. нікелю	332
Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Термо-е.р.с.	339

багат шарового композиційного матеріалу Cu-Al	
Корнієнко М.Є., Круть О.В. Спостереження граткових мод рідкого CS ₂ в області сумарних коливальних смуг ІЧ поглинання	345
Лоза Є.А. Обчислення оптичних сталих за допомогою перетворення Крамерса-Кроніга	358
Охріменко Б.А., Старков Д.Ю. Поведінка радіальних хвильових функцій валентних електронів іона Tl ⁺³ у кристалічному полі	363
Пашицький Е.А., Мальнєв В.М., Анчишкін Д.В., Нарішкін Р.О. Гідродинамічна вихорова нестійкість ядерної матерії при зіткненнях високозбуджених важких ядер	371
Поперенко, Л.В., Корольова З.П., Борбат О.М. Особливості спектрів випромінювання плазми всередині порожнинного катодного вузла в аномальному тліючому розряді	378
Прокопєць В.М., Робур Л.Й., Шайкевич І.А. Поверхнева генерація другої гармоніки при відбиванні від керамік на основі карбїду кремнію та нїтриду алюмінію	382
Сакун В.П. Кінетика люмінесценції доміш-кових аніонів NO ₂ ⁻ в лужно-галоїдних кристалах	393
Стукаленко В.В., Конончук Г.Л. Стабілізація частоти випромінювання газового лазера з використанням зовнішнього еталону	398
Удалов Є.П., Хомич Ю.А. Рефракція лазерного випромінювання у високоградієнтних полях фотопружних матеріалів	404
Хомич Ю.А., Удалов Є.П. Про можливість створення планарного магнітооптичного спектроаналізатора із зчитуванням інформації на $\lambda = 0,63\text{мкм}$	413

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ВСТУП

Ця книга є першим томом трилогії, присвяченої трьом фундаментальним галузям математики: алгебрі, геометрії та теорії ймовірностей.

Алгебра вивчає структури, які дозволяють виконувати операції над елементами. Геометрія вивчає форми та простори. Теорія ймовірностей вивчає випадкові події та їхні результати.

Ця книга призначена для студентів, які вивчають математику на рівні середньої школи або початку вищої школи. Вона містить багато прикладів та вправ, які допоможуть зрозуміти матеріал.

Вступна частина книги містить загальні поняття та визначення, які будуть використані в подальшому викладі. Вона також містить деякі історичні відомості про розвиток цих галузей математики.

Вступна частина книги містить загальні поняття та визначення, які будуть використані в подальшому викладі. Вона також містить деякі історичні відомості про розвиток цих галузей математики.

Вступна частина книги містить загальні поняття та визначення, які будуть використані в подальшому викладі. Вона також містить деякі історичні відомості про розвиток цих галузей математики.

УДК 512.643, 512.583, 512.647

В'ячеслав М. Бабич*

**Накриття двоточкових
бімодульних задач над кільцем
степеневих рядів**

**Серія: фізико-математичні
науки**

За допомогою техніки накриттів і квадратичних форм досліджується зображувальний тип двоточкових бімодульних задач над кільцем степеневих рядів від однієї змінної над полем.

Ключові слова: бімодульна задача, зображення, квадратична форма Тітса.

Vyacheslav M. Babych*

**Coverings of Two-Point Bimodule
Problems over the Polynomial
Series Ring**

**Series: Physics & Mathematics
Sciences**

Using covering and quadratic forms techniques we investigate representation type of two-point bimodule problems over the ring of power series in one variable over a field.

Key words: bimodule problem, representation, Tits quadratic form.

*E-mail: babych@gala.net

Вступ

Важливим і ефективним інструментом для вирішення задачі скінченності, ручності та дикості зображувального типу бімодульних задач є так званий «метод накриттів». Застосування цього методу до матричних задач скінченного зображувального типу наведені в [1, 2, 3, 8, 9], а до матричних задач і алгебр нескінченного зображувального типу — у роботі [7].

Ця стаття присвячена подальшому розвитку методів, розвинутих у [1]. Ми показуємо, як розроблена в [1] техніка може бути застосована до дослідження бімодульних задач ручного типу. Першим кроком у цьому напрямі є знаходження зображувального типу бімодульних задач $A = (C, M)$, визначених у розділі 1.3, [1], в яких категорія C містить рівно два об'єкти (так званих «двоточкових» задач). Класифікація таких бімодульних задач скінченного зображувального типу одержана в [1], розділ 1.3, леми 2, 3.

У даній роботі ми розглядаємо двоточкові бімодульні задачі з класу, розглянутого в [1], будемо їх накриття і досліджуємо форми Тітса цих накриттів на слабку невід'ємність. Як відомо, задачі, квадратична форма Тітса яких не є слабо невід'ємною, дикі, [6]. Ручність двоточкових задач зі слабо невід'ємною формою буде досліджено в подальших роботах.

1. Бімодульні задачі

Нехай $\mathbb{k}$ — алгебраїчно замкнене поле. Бімодульною задачею називається пара $A = (\mathcal{C}, \mathcal{M})$, де $\mathcal{C}$ — локально скінченновимірна категорія над $\mathbb{k}$, а $\mathcal{M}$ — локально скінченновимірний бімодуль на категорію $\mathcal{C}$ (означення локально скінченновимірного бімодуля, категорії зображень, розмірності зображення, морфізма бімодульних задач, зображувального типу, точного зображення та точної бімодульної задачі наведені в [1], а також у [4, 5]).

Нагадаємо поняття підзадачі, введені в [1]. Нехай $A = (\mathcal{C}, \mathcal{M})$ — бімодульна задача. Позначимо $\succ$ мінімальне відношення (строгого) часткового порядку на множині бімодульних задач таке, що $A \succ A'$ і $A \succ A''$, де $A' \simeq (\mathcal{C}, \mathcal{M}')$, $A'' \simeq (\mathcal{C}, \mathcal{M}/\mathcal{M}')$, для довільного $\mathcal{C}$ -підбімодуля $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ такого, що $\mathcal{M}' \neq 0$, $\mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$, і $A \succ A_S$ для довільної власної підмножини $S \subset \text{Ob } \mathcal{C}$, де A_S — обмеження бімодульної задачі A на S . Аналогічно позначимо $\sim$ мінімальну еквівалентність таку, що для кожного ідеала $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ такого, що $\mathcal{I}\mathcal{M} = \mathcal{M}\mathcal{I} = 0$, виконується $A \sim A_{\mathcal{I}} = (\mathcal{C}/\mathcal{I}, \mathcal{M})$, і якщо A ізоморфна B , то $A \sim B$. Транзитивне замикання $\succ$ і $\sim$ визначає передпорядок на множині бімодульних задач, що визначає строгий порядок, який знову позначається $\succ$. Відношення $\succ$ і $\sim$ очевидним чином визначені на множині ізокласів бімодульних задач.

Наступне твердження доводиться аналогічно до леми 1, [1], з використанням означень, даних у [6, 7].

Лема 1. Нехай A, B — бімодульні задачі.

1. Якщо $A \succ B$ і B є задачею дикого зображувального типу, то A також є задачею дикого зображувального типу.
2. Якщо $A \sim B$, то A є задачею скінченного (ручного, дикого) зображувального типу тоді і тільки тоді, коли B є задачею скінченного (ручного, дикого) зображувального типу.

Якщо для бімодульних задач A, B виконується $A \succ B$, то ми називаємо B підзадачею A , а A — надзадачею B .

2. Квадратична форма бімодульної задачі

Розглянемо цілу квадратичну форму від n змінних, тобто поліном вигляду

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^n \chi_{ii} X_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi_{ij} X_i X_j, \quad \chi_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Вектор $x = (x_i)_{i \in S} \in \mathbb{Z}^S \setminus \{0\}$, де S — деяка множина, називається додатним, якщо $x_i \geq 0$ для всіх $i \in S$. В цьому випадку ми писатимемо $x > 0$. Форма $\chi(X)$ називається слабо додатною (слабо невід'ємною), якщо $\chi(x) > 0$ ($\chi(x) \geq 0$) для всіх $x \in \mathbb{Z}^n, x > 0$. Форма $\chi(X)$ називається одиничною, якщо $\chi_{11} = \chi_{22} = \dots = \chi_{nn} = 1$. У цьому випадку корінь $x \in \mathbb{Z}^n$ рівняння $\chi(X) = 1$ називається (додатним) коренем $\chi(X)$, якщо $x > 0$. Вектор $x \in \mathbb{Z}^n, x > 0$, називається критичним (гіперкритичним) вектором $\chi(X)$, якщо $\chi(x) = 0$ ($\chi(x) < 0$) і x є вектором з мінімально можливим носієм.

Розглянемо локально скінченновимірну бімодульну задачу $A = (\mathcal{C}, \mathcal{M})$. Вектор $x = (x_i)_{i \in \text{Ob } \mathcal{C}} \in \mathbb{Z}^{\text{Ob } \mathcal{C}}$ ми називаємо скінченним, якщо $x_i \neq 0$ для скінченної кількості $i \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Квадратична форма (форма Тітса) бімодульної задачі A визначається рівністю

$$\chi_A(X) = \sum_{i,j \in \text{Ob } \mathcal{C}} (\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{C}(i, j) - \dim_{\mathbb{k}} \mathcal{M}(i, j)) X_i X_j.$$

Хоча форма Тітса, взагалі кажучи, може містити нескінченну кількість змінних, значення цієї форми коректно визначені на скінченних векторах, і для таких векторів ми можемо використовувати всі поняття і методи теорії квадратичних форм зі скінченною кількістю змінних.

Лема 2. ([6]) *Якщо для бімодульної задачі A її форма Тітса χ_A не є слабо невід'ємною, то A є задачею дикого типу.*

3. Розглядуваний клас бімодульних задач і результати

Розглянемо категорію $\mathcal{C}_2 = \mathbb{k}[[t]] \oplus \mathbb{k}[[t]]$ таку, що $\text{Ob } \mathcal{C}_2 = \{1, 2\}$, $\mathcal{C}_2(1, 1) = \mathbb{k}[[t]] \cdot 1_1$, $\mathcal{C}_2(2, 2) = \mathbb{k}[[t]] \cdot 1_2$, $\mathcal{C}_2(1, 2) = 0$, $\mathcal{C}_2(2, 1) = 0$.

Розглянемо цілі числа $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $n \geq 0$ і бімодуль $\mathcal{M}_{n_1, n, n_2}$ над категорією $\mathcal{C}_2$ такий, що $\mathcal{M}_{n_1, n, n_2}(1, 2)$ — векторний простір над полем $\mathbb{k}$ з базисом $v_1, v_2, \dots, v_n$, а $\mathcal{M}_{n_1, n, n_2}(1, 1) = \mathcal{M}_{n_1, n, n_2}(2, 1) = \mathcal{M}_{n_1, n, n_2}(2, 2) = 0$, причому

$$v_i(1_1 t) = \begin{cases} v_{i+n_1}, & \text{якщо } i + n_1 \leq n, \\ 0 & \text{в іншому разі,} \end{cases} \quad (t 1_2) v_i = \begin{cases} v_{i+n_2}, & \text{якщо } i + n_2 \leq n, \\ 0 & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

У даній роботі ми розглядаємо клас $\mathcal{Q}_2$ бімодульних задач вигляду $\mathcal{A}_{n_1, n, n_2} = (\mathcal{C}, \mathcal{M}_{n_1, n, n_2})$, де $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 / \text{App}_{\mathcal{C}_2} \mathcal{M}_{n_1, n, n_2}$. Бімодульна задача $\mathcal{A}_{n_1, n, n_2}$ описуватиметься наступним графом

$$\textcircled{1} \xrightarrow[n_2]{n_1} \textcircled{2},$$

де кружечки означають об'єкти 1 і 2 відповідно, стрілка з 1 в 2 означає, що $M_{n_1, n, n_2}(1, 2) \neq 0$, а мітки n, n_1, n_2 на стрілці визначені вище. Далі у тексті ми опускаємо напрямки стрілок, оскільки зображувальний тип не залежить від цих напрямів. Окрім того, якщо одне з чисел n, n_1, n_2 дорівнює 1, то ми опускаємо відповідну мітку. Зауважимо, що якщо $n_i \geq n$, то tl_i анулює $M(1, 2)$.

Очевидно, що бімодульна задача A з Q_2 має стандартний мультиплікативний базис $\Gamma = \Gamma(A)$, в якому $\Gamma_0 = \text{Ob } \mathcal{C}$, $\Gamma_1^0 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\Gamma_1^1 = \{t^i \cdot 1_1, t^i \cdot 1_2, i = 1, 2, \dots\}$. Для $A \in Q_2$ позначимо $\hat{A}$ універсальне накриття A , асоційоване з мультиплікативним базисом Γ (означення мультиплікативного базису і конструкція асоційованого з ним накриття наведені в [1]).

Теорема 1. Нехай $A \in Q_2$ і Γ — її стандартний мультиплікативний базис. Тоді для асоційованого з цим базисом Γ універсального накриття $\hat{A}$ бімодульної задачі A квадратична форма $\chi_{\hat{A}}(X)$ одинична, причому вона слабо невід'ємна тоді і тільки тоді, коли бімодульна задача A не містить жодну з бімодульних задач

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{} \xrightarrow{7} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{5} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{4} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{4} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{3} \textcircled{} \end{array}$$

як підзадачу. В іншому разі A є задачею дикого зображувального типу.

Доведення. Використовуючи метод, наведений у розділі 2, [1], безпосередньо переконуємося, що фундаментальна група кожної накриваючої бімодульної задачі ізоморфна $\mathbb{Z}$. Це дозволяє довести, що для кожної з задач

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{} \xrightarrow{6} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{4} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{3} \textcircled{} \end{array} \quad (1)$$

носії коренів квадратичної форми накриваючої бімодульної задачі є рівномірно обмеженими, і в обмеженні на ці носії ця форма є слабо невід'ємною.

Для задачі

$$\textcircled{} \xrightarrow{2} \textcircled{} \quad (2)$$

носії коренів квадратичної форми накриваючої бімодульної задачі не є рівномірно обмеженими, проте ці носії цілком вичерпуються лініями A_n , що доводить слабку невід'ємність квадратичної форми Тітса накриваючої бімодульної задачі.

Для задач

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{} \xrightarrow{7} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{5} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{4} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{4} \textcircled{} & \textcircled{} \xrightarrow{3} \textcircled{} \end{array} \quad (3)$$

форма Тітса накриваючої бімодульної задачі набуває від'ємних значень, і, отже, дані бімодульні задачі та всі їх надзадачі є дикими ([6]). Відповідні гіперкритичні вектори квадратичних форм накриваючих бімодульних задач наведено нижче. На рис. 1 зображені біграфи квадратичних форм Тітса відповідних накриваючих бімодульних задач в обмеженні на носії гіперкритичних векторів. Числа в кружечках означають координати відповідного гіперкритичного вектора.

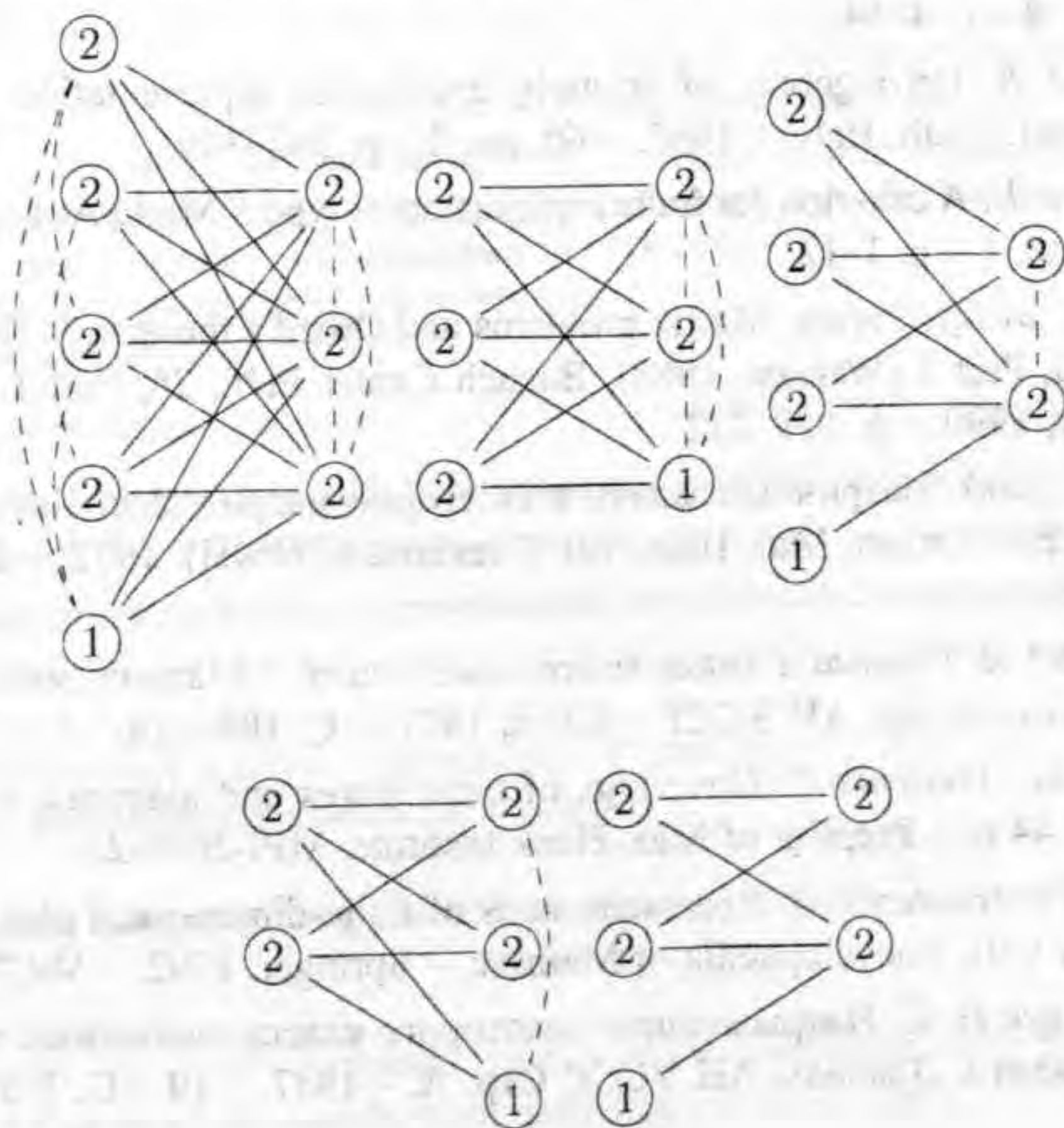


Рис. 1

Легко бачити, що кожна двоточкова бімодульна задача або містить як підзадачу одну з задач (3) і, отже, є дикою, або є скінченною, або є однією з задач (1) або (2), що і завершує доведення теореми. $\square$

Заключні зауваження

Ця робота є першим кроком до застосування техніки накривтів до дослідження бімодульних задач на ручність. Ми плануємо застосувати

цю техніку до дослідження зображень тензорних алгебр над прямими добутками кілець степеневих рядів від однієї змінної над полем.

Література

1. *V. M. Babych, N. S. Golovashchuk.* An Application of Covering Techniques // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – **8** – с. 4–14.
2. *Bautista R.* On algebras of strongly unbounded representation type // Comment. Math. Helv. – 1985. – **60**, no. 3 – p. 392–399.
3. *Bongartz K.* A criterion for finite representation type // Math. Ann. – 1984. – **269**, no. 1 – p. 1–12.
4. *W. W. Crawley-Boevey.* Matrix problems and Drozd's theorem // Topics in Algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), Banach Center Publ. 26, Part 1, PWN, Warsaw, 1990. – p. 199–222.
5. *Ю. А. Дрозд.* Матричные задачи и категории матриц. Зап. Науч. Сем. Ленинград. Отдел. Мат. Инст. им. Стеклова (ЛОМИ), 1972. – **28** – С. 144–153.
6. *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи // Матричные задачи, Ин-т математики, АН УССР. – Киев, 1977. – С. 104–114.
7. *Drozd Yu., Ovsienko S.* Coverings of tame boxes and algebras. – Bonn, 2000. – 44 p. – Preprint of Max-Planck Institute, MPI-2000-26.
8. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. – Algebra VIII, Encyclopaedia of Math.Sc. – Springer, 1992. – Vol.73.
9. *Головащук Н. С.* Накрывающие некоторого класса свободных матричных задач // Доклады АН УССР, Сер. А. – 1987. – **10** – С. 3–5.

Надійшла до редакції 30.12.2004.

УДК 517.956.22

Наталія О. Безверхня*

**Про приближення абстрактних
функцій поліномами.**

Серія: фізико-математичні науки

Ми розглядаємо необхідні та достатні умови наближення функцій, означених на деяких множинах просторів l_1 та l_2 зі значеннями в банаховому просторі, поліномами.

Ключові слова: бікомпактна множина, дискретно-св'язна множина, неперервні функції.

Nataliy A. Bezverhnya*

**The approach of abstract functions
of polynomials.**

Series: Physics & Mathematics

We investigate a necessary and sufficient condition of approach functions, which defined on some void l_1 and l_2 .

Key Words: bicomact, descried connected great number, continued functions.

*E-mail: Bezverhnya-NA@mail.ru

У теорії апроксимацій поліномами звичайно розглядаються функції, визначенні на бікомпактних множинах [1,3]. У дійсній роботі досліджуються можливості рівномірної апроксимації неперервних функцій означених на деяких множинах (необов'язково компактних). При цьому доводяться, у найбільш загальному на наш погляд виді, деякі, використовувані надалі, твердження й наслідки з них, що уточнюють критерії компактності сімейства функцій.

1. Деякі властивості функцій означених на множинах метричного простору.

Нехай X і Y метричні простори й множина $D \subset X$. Функцію $f: D \rightarrow Y$ назвемо функцією повільного росту на множині D , якщо існує додатне число δ , таке, що

$$\sup_{0 < \rho(x', x'') < \delta} \rho(f(x'), f(x'')) < +\infty.$$

Очевидно, що всяка обмежена функція $f: D \rightarrow Y$, на обмеженій множині D є функцією повільного росту на D . Усяка рівномірно неперервна на D функція також є функцією повільного росту на D . Однак не всяка функція повільного росту навіть на обмеженій множині D є обмеженою. Так, наприклад функція $f: D \rightarrow R$, означена на множині

$$D = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{3}{4} e_n \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad (e_n \text{ — орти в просторі } l_2), \quad \text{рівністю}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{если } x = e_n \\ \sqrt{n+1}, & \text{если } x = \frac{3}{4}e_n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \epsilon \text{ не обмеженою функцією}$$

повільного росту на обмеженій множині $D \subset l_2$, (у якості δ беремо число $\frac{1}{2}$).

Множина F функцій $f: D \rightarrow Y$ назовемо одностайним сімейством повільного росту, якщо

$$\exists \delta > 0 \left(\sup_{\substack{0 < \rho(x', x'') < \delta \\ f \in F}} \rho(f(x'), f(x'')) < +\infty \right).$$

Нехай p – натуральне, а ε – додатне число, тоді (p, ε) – ланцюгом, що з'єднує точки x й $\bar{x}$ метричного простору X , назовемо набір точок $x = x_0, x_1, \dots, x_p = \bar{x}$ такий, що $\rho(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon, (1 \leq i \leq p)$.

Множину $D \in X$ назовемо дискретно зв'язною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $p = p(\varepsilon)$ таке, що будь-які дві точки $x, \bar{x} \in D$ можна з'єднати (p, ε) – ланцюгом, що міститься в D .

Очевидно, усяка дискретно зв'язна множина обмежена й усяка бікомпактна зв'язна множина дискретно зв'язна. Усяка зоряна відносно $x_0 \in D$ обмежена множина D нормованого простору X є також дискретно-зв'язною.

Нам знадобиться наступне твердження, що буде використатися як при доказі теореми про апроксимації неперервних функцій поліномами (наслідок 2), так і при одержанні критеріїв компактності множин функцій (наслідок 3, 4).

Теорема 1. Усяке одностайне сімейство F функцій $f: D \rightarrow Y$ повільного росту, обмежене в деякій точці $x_0 \in D$ рівномірно обмежено на множині D .

Доведення. Нехай F одностайне сімейство функцій f повільного росту на множині D . Тоді, у силу означення, існує число $\delta > 0$ й константа $C > 0$ такі, що

$$\forall f \in F, x', x'' \in D (\rho(x', x'') < \delta \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) \leq C) \quad (1)$$

Припустимо, що F не є рівномірно обмеженим на D , тобто не існує кулі $S \subset Y$, такої, що $\{f(x) | x \in D, f \in F\} \subset S$. Тоді з обмеженості множини $\{f(x_0) | f \in F\}$ в просторі Y виходить існування послідовності $\{f_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in D, f_n \in F (n \in \mathbb{N})$ такий, що

$$\forall n \in N \left(\rho(f_n(x_0), f_n(x_n)) > n \right) \quad (2)$$

Так як D – дискретно зв'язна, то для кожного x_n існує (p, δ) -ланцюг $x_0 = \bar{x}_{n_0}, \bar{x}_{n_1}, \dots, \bar{x}_{n_p} = x_n$, що з'єднує x_0 й x_n , тобто

$$\rho(\bar{x}_{n_{i-1}}, \bar{x}_{n_i}) < \delta \quad (1 \leq i \leq p) \quad (3)$$

Використовуючи тепер (1), (2) і (3) одержимо нерівність

$$n < \rho(f_n(x_0), f_n(x_n)) \leq \sum_{i=1}^p \rho(f_n(\bar{x}_{n_{i-1}}), f_n(\bar{x}_{n_i})) \leq Cp$$

Остання рівність неможлива при досить більших $n \in N$, у силу обмеженості правої частини. Отримане протиріччя доводить теорему.

Наслідок 1. Усяка функція $f: D \rightarrow Y$ повільного росту на дискретно зв'язній множині D обмежена на D .

Наслідок 2. Усяка рівномірно неперервна на дискретно зв'язній множині D функція $f: D \rightarrow Y$ обмежена на D .

З теореми 1 виходить, що у випадку зв'язності бікомпактної множини $D \subset X$ умова теореми Арцела–Асколи [3] можна послабити, а саме справедливо наступне твердження.

Наслідок 3. (Критерій компактності) Для того щоб сімейство F неперервних функцій $f: D \rightarrow R$, означених на зв'язній бікомпактній множині $D \subset X$ було компактным, необхідно й достатнє, щоб воно було одностайно неперервне й обмежене в деякій точці $x_0 \in D$.

Відзначимо, що якщо D – бікомпактна незв'язна множина метричного простору X , то попередній критерій компактності несправедливий.

Наслідок 4. (Критерій компактності в просторі аналітичних функцій) Для того щоб сімейство F комплексних функцій f , аналітичних в області D , було компактным, необхідно й достатнє, щоб воно було одностайно неперервне усередині D й обмежене в деякій точці $z_0 \in D$.

Доведення. Необхідність. Якщо F – компактно, то як виходить з теореми Монтеля [2] воно рівномірно обмежене усередині D , а отже одностайно неперервне усередині D (на кожній бікомпактній множині $B \subset D$).

Достатність. Тому що D – зв'язна відкрита множина, то з теореми 1 виходить рівномірна обмеженість сімейства F на кожній зв'язній бікомпактній множині $B \subset D$, що містить z_0 , а значить і рівномірна обмеженість усередині D , тобто (по теоремі Монтеля) компактність F .

2. Апроксимація функцій, означених на підмножинах просторів l_1 і l_2 .

Нехай тепер X – банахів простір.

Означимо на дійсному просторі l_1 поліном P_n степені n зі значенням у банаховому просторі X наступною рівністю

$$P_n(x) = \sum_k a_k \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \quad (x = \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_1) \quad (4)$$

У рівності (4) $\bar{k} = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ – фінітна послідовність невід'ємних цілих чисел k_i таких, що $\sum_{i=1}^{\infty} k_i \leq n$ й підсумовування виробляється по всіляких таких послідовностях $\bar{k}$. Крім того, передбачається, що $\{a_k\}_{\bar{k}}$ обмежена послідовність банахова простору X й вважається $0^0 = 1$. Очевидно, що при цих умовах ряд (4) сходиться абсолютно на всьому просторі l_1 й отже значення $P_n(x)$ не залежить від порядку підсумовування. Розглянемо в l_1 множину $T = \left\{ x = \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{t_i} \leq 1 \right\}$. Очевидно, множина T – обмежена замкнута некомпактна, зоряна щодо нуля. На множині T будемо розглядати функції f зі значеннями в просторі X .

У силу некомпактності T неперервна на T функція f не зобов'язана бути ні обмеженою, ні рівномірно неперервною на T . Так, наприклад, можна показати, що функція $f: T \rightarrow R$, означена рівністю

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} t_k^k \quad (x = \{t_k\}_{k=1}^{\infty})$$

неперервна на T , але необмежена на T , а аналогічна функція, означена рівністю $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^k$ неперервна й обмежена, але не рівномірно неперервна на T .

Лема 1. Кожний поліном P_n рівномірно неперервний на множині T .

Доведення. Тому що кожен поліном P_n виду (4) можна представити у вигляді суми $a_0 \in X$ й n однорідних поліномів

$$q_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^{\infty} a_{i_1, i_2, \dots, i_k} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

те досить довести рівномірну неперервність на множині T кожного полінома q_k . Доказ проведемо по індукції.

Для полінома (4) позначимо через $A = \sup_{\bar{k}} \|a_{\bar{k}}\|$ і покажемо, що для будь-якого натурального $m \leq n$ й будь-яких двох елементів $x = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}, x_0 = \{t_i^0\}_{i=1}^{\infty}$ множини T

$$\|q_m(x) - q_m(x_0)\| \leq mA \|x - x_0\| \quad (5)$$

При

$$m = 1$$

очевидно

$$\text{одержимо } \|q_1(x) - q_1(x_0)\| \leq \sum_{i_1=1}^{\infty} \|a_{i_1}\| \|t_{i_1} - t_{i_1}^0\| \leq A \|x - x_0\|,$$

Припустивши, що (5) виконується для якогось $m \leq n$, одержимо наступні нерівності

$$\begin{aligned} \|q_{m+1}(x) - q_{m+1}(x_0)\| &= \left\| \sum_{i_1 \dots i_{m+1}} a_{i_1 \dots i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_{m+1}} - \sum_{i_1 \dots i_{m+1}} a_{i_1 \dots i_{m+1}} t_{i_1}^0 \dots t_{i_{m+1}}^0 \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i_{m+1}=1}^{\infty} t_{i_{m+1}} \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} - \sum_{i_{m+1}=1}^{\infty} t_{i_{m+1}}^0 \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0 \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i_{m+1}=1}^{\infty} \left(t_{i_{m+1}} \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} - t_{i_{m+1}}^0 \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0 \right) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i_{m+1}=1}^{\infty} \left((t_{i_{m+1}} - t_{i_{m+1}}^0) \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} + \left(\sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} (t_{i_1} \dots t_{i_m} - t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0) \right) t_{i_{m+1}}^0 \right) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i_{m+1}=1}^{\infty} |t_{i_{m+1}} - t_{i_{m+1}}^0| \left\| \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} \right\| + \sum_{i_{m+1}=1}^{\infty} \left\| \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m, i_{m+1}} (t_{i_1} \dots t_{i_m} - t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0) \right\| |t_{i_{m+1}}^0| \leq \\ &\leq A \|x - x_0\| + mA \|x - x_0\| = (m+1)A \|x - x_0\| \end{aligned}$$

Таким чином (5) справедливо для будь-якого $k \in N$ й з (5), очевидно, виходить рівномірна неперервність q_k , а значить і P_n на множині T . Лема доведена.

При доказі класичної теореми Вейерштрасса істотно використовується обмеженість і рівномірна неперервність неперервної на бікомпактній множині функцій. У відсутності бікомпактності множини T , на якому означена неперервна функція, аналогічне твердження приймає вид:

Теорема 2. Для того щоб функція $f: T \rightarrow X$ була рівномірною на T границею послідовності поліномів, необхідно й достатнє, щоб вона була рівномірно неперервна на T .

Доведення. Необхідність. Якщо функція $f: T \rightarrow X$ на множині T є рівномірною границею поліномів, то з леми 1, очевидно, виходить рівномірна неперервність функції f на T .

Достатність. Розглянемо нескінченновимірний аналог полінома Бернштейна, тобто поліном $B_n: T \rightarrow X$ степені n , визначений рівністю

$$B_n(x) = \sum_k f(x_k) C_n^k \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m \quad (6)$$

де $m = n - \sum_{i=1}^{\infty} k_i$ та C_n^k —аналог біномних коефіцієнтів у розкладанні

$$1 = \left(\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right) + t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots \right)^n = \sum_k C_n^k \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m \quad (7)$$

і підсумовування в (6) виробляється по будь-яким додатнім цілочисловим послідовностям $\bar{k} = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}, \sum_{i=1}^{\infty} k_i \leq n$ таким, що $x_{\bar{k}} = \left\{ \frac{k_i}{n} \right\}_{i=1}^{\infty} \in T$. У силу наслідку 2 з теореми 1 ряд (6) абсолютно сходиться і являє собою рівномірно неперервний на T поліном. Візьмемо тепер довільні $\varepsilon > 0, x \in T$ й виберемо, використовуючи рівномірну неперервність f , число $\delta > 0$ так, щоб

$$\forall x, x_{\bar{k}} \in T \left(\|x - x_{\bar{k}}\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_{\bar{k}})\| < \varepsilon \right) \quad (8)$$

Розіб'ємо суму $\sum_{\bar{k}} C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m$ на дві $\sum_I$ й $\sum_{II}$, у першій з яких підсумовування поширюється на ті $\bar{k}$, для яких $\|x - x_{\bar{k}}\| < \delta$, а в другій сумі $\|x - x_{\bar{k}}\| \geq \delta$. У силу (7) і (8) одержимо

$$\begin{aligned} \|B_n(x) - f(x)\| &\leq \sum_I \|f(x_{\bar{k}}) - f(x)\| C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m + \\ &+ \sum_{II} (\|f(x_{\bar{k}})\| + \|f(x)\|) C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m < \varepsilon + M \sum_{II} C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m, \\ &\text{де } M = \sup_{x \in T} \|f(x)\| \end{aligned}$$

Для останньої суми $\sum_{II}$, використовуючи нерівність $\|x - x_{\bar{k}}\| \geq \delta$, тобто

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| t_j - \frac{k_j}{n} \right| \geq \delta, \text{ одержимо оцінку:}$$

$$\begin{aligned} 2M \sum_{II} C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m &\leq \frac{2M}{\delta n} \sum_{II} \sum_{j=1}^{\infty} |k_j - nt_j| C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m \leq \\ &\leq \frac{2M}{\delta n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\bar{k}} |k_j - nt_j| C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m \\ &= \frac{2M}{\delta n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\bar{k}} \sqrt{(k_j - nt_j)^2} C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m \end{aligned}$$

Тому що $\sqrt{x}$ вгнута функція, то в силу (7) і нерівності Йенсена, остання сума не перевершує суми

$$\frac{2M}{\delta n} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{\bar{k}} (k_j - nt_j)^2 C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} t_i^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right)^m},$$

яка, як виходить з доказу Бернштейна теореми Вейерштрасса, в одномірному випадку, збігається із сумою

$$\frac{2M}{\delta n} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{nt_j(1-t_j)} = \frac{2M}{\delta \sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{t_j(1-t_j)} \leq \frac{2M}{\delta \sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{t_j} \leq \frac{2M}{\delta \sqrt{n}}$$

Таким чином остаточно одержимо нерівність $\|B_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{\delta\sqrt{n}}$.

Звідки й виходить достатність теореми.

Нехай тепер поліном (4) визначений на просторі l_2 й

$$A = \sqrt{\sum_k \|a_k\|^2} < +\infty.$$

Якщо тепер у якості T розглянути множину

$$S = \left\{ x = \{t_i\}_{i=1}^\infty \in l_2 \mid \sum_{i=1}^\infty \frac{t_i}{\alpha_i} \leq 1, t_i > 0 \right\}, \text{ де } \alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty \in l_2, \|\alpha\| \leq 1 - \text{довільна}$$

додатна фіксована послідовність, то як виходить із критерію компактності в просторі l_2 , множина S – бікомпактна й, отже, будь-який неперервний поліном P_n на множині S рівномірно неперервний.

Аналогічно доказу леми 1 можна показати, що всякий поліном $P_n(x) = \sum_k a_k \prod_{i=1}^\infty t_i^{k_i}$, де $A = \sqrt{\sum_k \|a_k\|^2} < +\infty$ неперервний на S . Дійсно, якщо

$A_{l_{m+1}} = \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_{m+1}=1}^\infty \|a_{i_1, \dots, i_{m+1}}\|^2}$, використовуючи нерівність Коші й оцінюючи аналогічно, одержимо

$$\begin{aligned} \|q_{m+1}(x) - q_{m+1}(x_0)\| &= \left\| \sum_{i_1, \dots, i_{m+1}} a_{i_1, \dots, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_{m+1}} - \sum_{i_1, \dots, i_{m+1}} a_{i_1, \dots, i_{m+1}} t_{i_1}^0 \dots t_{i_{m+1}}^0 \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i_{m+1}=1}^\infty t_{i_{m+1}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} - \sum_{i_{m+1}=1}^\infty t_{i_{m+1}}^0 \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0 \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i_{m+1}=1}^\infty \left(t_{i_{m+1}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} - t_{i_{m+1}}^0 \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0 \right) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i_{m+1}=1}^\infty \left((t_{i_{m+1}} - t_{i_{m+1}}^0) \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} + \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} (t_{i_1} \dots t_{i_m} - t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0) \right) t_{i_{m+1}}^0 \right) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i_{m+1}=1}^\infty |t_{i_{m+1}} - t_{i_{m+1}}^0| \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} t_{i_1} \dots t_{i_m} \right\| + \sum_{i_{m+1}=1}^\infty \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} (t_{i_1} \dots t_{i_m} - t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0) \right\| |t_{i_{m+1}}^0| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i_{m+1}=1}^\infty |t_{i_{m+1}} - t_{i_{m+1}}^0|^2} \sqrt{\sum_{i_{m+1}=1}^\infty \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty \|a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}}\| t_{i_1} \dots t_{i_m} \right)^2} + \\ &+ \sum_{i_{m+1}=1}^\infty \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty \|a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}}\| (t_{i_1} \dots t_{i_m} - t_{i_1}^0 \dots t_{i_m}^0) |t_{i_{m+1}}^0| \leq \\ &\leq \|x - x_0\| \sqrt{\sum_{i_{m+1}=1}^\infty \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty \|a_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}}\|^2 \right)} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty (t_{i_1} \dots t_{i_m})^2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\sum_{l_{m+1}=1}^{\infty} \left\| \sum_{l_1 \dots l_m=1}^{\infty} a_{l_1 \dots l_{m+1}} (t_{l_1} \dots t_{l_m} - t_{l_1}^0 \dots t_{l_m}^0) \right\|^2} \sqrt{\sum_{l_{m+1}=1}^{\infty} (t_{l_{m+1}}^0)^2} \leq \\
 & \leq \|x - x_0\| \sqrt{\sum_{l_1 \dots l_{m+1}=1}^{\infty} \|a_{l_1 \dots l_{m+1}}\|^2} + \sqrt{\sum_{l_{m+1}=1}^{\infty} \left(\sum_{l_1 \dots l_m=1}^{\infty} \|a_{l_1 \dots l_{m+1}}\| |t_{l_1} \dots t_{l_m} - t_{l_1}^0 \dots t_{l_m}^0| \right)^2} \leq \\
 & \leq \|x - x_0\| A + \sqrt{\sum_{l_{m+1}=1}^{\infty} (mA_{l_{m+1}} \|x - x_0\|)^2} \leq \|x - x_0\| A + m \|x - x_0\| \sqrt{\sum_{l_{m+1}=1}^{\infty} (A_{l_{m+1}})^2} = \\
 & = \|x - x_0\| A + m \|x - x_0\| \sqrt{\sum_{l_{m+1}=1}^{\infty} \sum_{l_1 \dots l_m=1}^{\infty} \|a_{l_1 \dots l_{m+1}}\|^2} \leq \|x - x_0\| A + mA \|x - x_0\| = \\
 & = A(m+1) \|x - x_0\|
 \end{aligned}$$

Звідки й виходить як і в лемі 1 індуктивне припущення й неперервність полінома $P_n(x)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Для того щоб на множині S функція $f: S \rightarrow X$ була рівномірною на S границею поліномів необхідно й достатнє, щоб функція була неперервна на S .

Доведення. Необхідність. Якщо функція $f: S \rightarrow X$ на множині S є рівномірною границею поліномів, то з неперервності останніх, виходить неперервність функції f на S .

Достатність. Розглянемо поліном

$$B_n(x) = \sum_k f(x_k) C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i t_i)^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_i\right)^m,$$

де підсумовування поширюється на ті $\bar{k} = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, для яких

$$x_{\bar{k}} = \left\{ \frac{k_i}{\alpha_i n} \right\}_{i=1}^{\infty} \in S.$$

Тому що коефіцієнти полінома $B_n(x)$, очевидно, задовольняють умові $\sum_k \|a_{\bar{k}}\|^2 < +\infty$, то як виходить з вищесказаного, $B_n(x)$ – неперервний на S , а, отже, рівномірно неперервний і обмежений на S .

Як і при доказі теореми 2 одержимо при оцінці $\|B_n(x) - f(x)\|$ дві суми, перша з яких, очевидно, оцінюється числом ε , а для оцінки другої суми, у якій підсумовування поширюється на ті $\bar{k}$, для яких $x_{\bar{k}} \in S$ і

$$\|x_{\bar{k}} - x\|^2 \geq \delta^2, \text{ тобто } \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{k_j}{\alpha_j n} - nt_j \right|^2 \geq n^2 \delta^2, \text{ аналогічно одержимо}$$

$$2M \sum_{\bar{k}} C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i t_i)^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_i\right)^m \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_k \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{k_j}{\alpha_j n} - t_j \right)^2 C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i t_i)^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_i \right)^m \leq \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_k \left(\frac{k_j}{\alpha_j} - n t_j \right)^2 C_n^{\bar{k}} \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i t_i)^{k_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_i \right)^m \leq \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2} n \alpha_j t_j (1 - \alpha_j t_j) \leq \frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_j}{\alpha_j} \leq \frac{2M}{\delta^2 n} \end{aligned}$$

Звідки й виходить, як у теоремі 2, достатність теореми.

Література

1. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций.—Київ: Наукова думка, 1992.
2. Н. Данфорд, Дж.Шварц. Линейные операторы. Общая теория.—Москва: Издательство иностр. лит., 1962.
3. Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного.—Москва: Физматгиз, 1960.
4. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.—Москва: Наука, 1966.

Надійшла до редакції 23.12 2004

УДК 512.5+512.6

Віталій М. Бондаренко*

Про (min, max)-еквівалентність ч.в. множин та її застосування до форм Тітса. Серія: фізико-математичні науки

У цій статті ми вводимо поняття "(min, max)-еквівалентності частково впорядкована множин", яке є корисним при вивченні квадратичних форм Тітса.

Ключові слова: частково впорядкована множина, максимальний (мінімальний) елемент, квадратична форма Тітса.

Vitalij M. Bondarenko*

On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. Series: Physics & Mathematics

In this paper we introduce the notion of "(min, max)-equivalence of posets" which is useful in studying the Tits quadratic forms.

Key Words: poset, maximal (minimal) element, Tits quadratic form.

*E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

To the memory of my Mother

Throughout, we work only with finite posets and identify singletons with the elements themselves.

Let X be a poset and let, for $x \in X$, $N(x)$ denotes the set of all elements of X incomparable to x ; when Y and Z are subsets of X , we write $Y < Z$ if $y < z$ for any $y \in Y, z \in Z$ (clearly, $Y < Z$ when Y or Z is empty). For a minimal (resp. maximal) element a of X , define $X_a^\uparrow$ (resp. $X_a^\downarrow$) to be the disjoint union of the subsets $\{a\}$ and $X \setminus a$ with the smallest order relation which contains that given on $X \setminus a$, and such that $a > N(a)$ (resp. $a < N(a)$). We call posets S and T (min, max)-equivalent, and write $S \cong_{(\min, \max)} T$, if there are posets $S_1, \dots, S_p$ with $p \geq 0$ such that, if one sets $S = S_0$ and $T = S_{p+1}$, then for each $i = 0, 1, \dots, p$, either $S_{i+1} = (S_i)_x^\downarrow$ (with some maximal $x \in S_i$) or $S_{i+1} = (S_i)_y^\uparrow$ (with some minimal $y \in S_i$).

Let S be a poset (without the element 0) and let $\mathbb{Z}^{S \cup 0} = \{z = (z_i) \mid z_i \in \mathbb{Z}, i \in S \cup 0\}$, where $\mathbb{Z}$ denotes the integer numbers. The Tits quadratic form of S is by definition the form $q_S : \mathbb{Z}^{S \cup 0} \rightarrow \mathbb{Z}$ defined by the equality

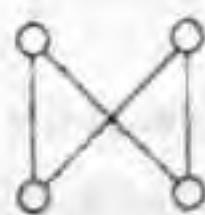
$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Theorem. Let S and T be $(\min, \max)$ -equivalent posets. Then their Tits forms are equivalent.

The theorem follows from the following (easily verifiable) equality for the Tits form $q_X(z)$ of a poset X and the Tits form $q_Y(z)$ of the poset $Y = X_a^\uparrow$ (resp. $Y = X_a^\downarrow$) with a to be a fix minimal (resp. maximal) element of X : $q_X(z) = q_Y(z')$, where $z'_0 = z_0 - z_a$, $z'_x = z_x$ for $x \neq a$ and $z'_a = -z_a$.

Corollary. Let $S \cong_{(\min, \max)} T$. Then S and T are simultaneously positive or not (resp. nonnegative or not).

Example 1. Let T denotes the poset with four mutually incomparable points 1, 2, 3, 4. The form $q_T(z)$ is not positive because $q_T(z) = 0$ for $z = (2, 1, 1, 1, 1)$, with $z_0 = 2$. The Tits form of the poset



also is not positive since this poset is isomorphic to $T_{12}^{\uparrow\uparrow} = (T_1^\uparrow)_2^\uparrow$.

Example 2. Let T denotes the poset



with minimal points 1, 2, 3. The form $q_T(z)$ is not positive because $q_T(z) = 0$ for $z = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, with $z_0 = 3$. The Tits form of the poset



also is not positive since this poset is isomorphic to $T_{123}^{\uparrow\uparrow\uparrow}$.

Received 23.12.2004

УДК 519.21

Михайло В. Братик*

**Про оцінку ймовірності
виживання страхової компанії,
що займається інвестиційною
діяльністю, при показниковому
розподілі виплат.**

Для моделі страхової компанії, що має можливість інвестувати свій капітал в акції та облігації, розглянуто ймовірність її виживання при інвестуванні в облігації та в акції, якщо страхові виплати розподілені за показниковим законом.

Ключові слова: ймовірність виживання, показниковий розподіл виплат

Mykhaylo V. Bratyk*

**About survival probability for an
insurance company, which invests
its capital in case of exponential
distribution of claims.**

We study the survival probability for an insurance company which is allowed to invest its capital to stock and bond if contingent claims are exponentially distributed.

Key words: survival probability, exponential distribution of claims.

*E-mail: mbratyk@ukr.net

1. Вступ.

У роботах [1], [2] розглядається діяльність страхової компанії, капітал якої в момент часу t описується рівнянням

$$X(t) = x + \Pi(t) - R(t), \quad x \geq 0, \quad (1)$$

де $\Pi(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} c = cN_1(t)$ – процес ризику, що визначає сумарні премії, отримані на момент часу t , причому величини отриманих премій однакові в кожен момент часу,

$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} y_i$ – процес ризику, що визначає сумарні виплати по позовах на момент часу t , $\{y_i\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(y)$;

$N_1(t)$, $N(t)$ – незалежні біноміальні процеси, що виражаються сумою t бернулліївських випадкових величин з ймовірностями успіху p_1 та p_2 відповідно, $t \in Z_+$. Зазначимо, що в момент $t=0$ ще немає ні премій, ні виплат по позовах.

Оскільки $Ez^{\Pi(t)} = (1 - p_1 + p_1 z^c)^t$, $Ez^{R(t)} = (1 - p_2 + p_2 Ez^y)^t$, то
 $Ee^{-r(\Pi(t) - R(t))} = Ee^{-r\Pi(t)} \cdot Ee^{rR(t)} = (1 - p_1 + p_1 e^{-rc})^t (1 - p_2 + p_2 Ez^{ry})^t =$
 $= ((1 - p_1 + p_1 e^{-rc})(1 - p_2 + p_2 Ez^{ry}))^t = (g(r))^t$, де

$$g(r) = (1 - p_1 + p_1 e^{-rc})(1 - p_2 + p_2 E z^n).$$

Прагнення страхової компанії до збільшення свого капіталу накладає умову додатності доходу $EP(1) > ER(1)$.

У роботі [3] показано, яким чином ймовірність банкрутства для класичної неперервної складної пуассонівської моделі може бути наближена за допомогою складної біноміальної моделі, а в роботі [4] досліджується ймовірність банкрутства страхової компанії, страхові виплати є цілочисловими і подаються за допомогою складного біноміального процесу.

З метою підвищення своєї конкурентоздатності страхова компанія інвестує кошти на фінансовому ринку $((B, S)$ -ринку), що складається з двох активів: B (безризикового, банківський рахунок) та S (ризикового, акції), ціни котрих еволюціонують згідно з різницевиими рівняннями:

$$\Delta B_t = B_{t-1} r_f, \quad B_0 = 1, \quad \text{де } r_f - \text{фіксована процентна ставка;}$$

$$\Delta S_t = S_{t-1} r_t, \quad S_0 > 0,$$

де $\{r_t\}$ – послідовність незалежних бернулліївських величин, $P\{r_t = b\} = \bar{p}$, $P\{r_t = a\} = 1 - \bar{p}$, $-1 < a < r_f < b$.

2. Оцінка ймовірності виживання при інвестуванні всього капіталу в облігації.

У роботі [1] отримано оцінку ймовірності виживання страхової компанії за умови, що в кожен момент часу компанія інвестує весь свій капітал в безризиковий актив, тобто в банк:

$$\phi(x) \geq 1 - \alpha_+ e^{-Rx}, \quad (2)$$

де $R > 0$ – корінь характеристичного рівняння

$$(1 - p_1 + p_1 e^{-Rc})(1 - p_2 + p_2 E e^{R\eta_1}) = 1, \quad (3)$$

тобто R є коренем рівняння коренем рівняння Лундберга $1 - g(r) = 0$, а

$$\alpha_+ = \sup_{x \geq 0} \frac{p_2 [1 - EF(x(1 + r_f) + \eta_1 c)]}{1 - e^{-R x r_f} \left(1 - p_2 E e^{-R \eta_1 c} \int_{x(1 + r_f) + \eta_1 c}^{\infty} e^{R y} dF(y) \right)} e^{R x}. \quad (4)$$

Оскільки оцінка ймовірності виживання страхової компанії, котра не займається інвестуванням, задовольняє нерівність: $\phi(x) \geq 1 - e^{-Rx}$, де $R > 0$ – корінь характеристичного рівняння (3), то природно вважати, що за умови інвестування дана оцінка повинна покращитися, тобто потрібно пересвідчитися, що $\alpha_+ \leq 1$. Покажемо, що знаменник не менший за чисельник у виразі (4). Справді,

$$1 - e^{-R x r_f} \left(1 - p_2 E e^{-R \eta_1 c} \int_{x(1 + r_f) + \eta_1 c}^{\infty} e^{R y} dF(y) \right) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq 1 - e^{-Rxr_f} + p_2 e^{-Rxr_f} E e^{-R\eta c} e^{R(x(1+r_f)+\eta c)} (1 - F(x(1+r_f) + \eta c)) \geq \\ &\geq 1 - e^{-Rxr_f} + p_2 e^{Rx} E (1 - F(x(1+r_f) + \eta c)) \geq \\ &\geq p_2 e^{Rx} E (1 - F(x(1+r_f) + \eta c)), \end{aligned}$$

оскільки $e^{-Rxr_f} \leq 1$ (зокрема, при $r_f = 0$ однаково, чи є банк, що не змінює суму вкладу, чи його немає).

Таким чином, при інвестуванні капіталу в облігації оцінка (2) ймовірності виживання не погіршується.

3. Оцінка ймовірності виживання при інвестуванні всього капіталу в акції.

У випадку, якщо весь капітал страхова компанія вкладає в акції, в роботі [1] отримано оцінку ймовірності виживання: $\phi(x) \geq 1 - \beta_+ e^{-Rx}$, де R – те саме, що і в оцінці (2),

$$\beta_+ = \sup_{x \geq 0} \beta(x) = \sup_{x \geq 0} \frac{p_2 (1 - EF(x(1+r_1) + \eta_1 c))}{1 - Ee^{-Rx\eta} \left(1 - p_2 Ee^{-R\eta c} \int_{x(1+\eta_1)+\eta_1 c}^{+\infty} e^{Ry} dF(y) \right)} e^{Rx} \quad (5)$$

Як і в попередньому випадку, важливо, щоб виконувалося $\beta_+ \leq 1$, інакше або інвестування в акції збільшує ймовірність банкрутства, або навіть отримана оцінка ймовірності виживання може бути беззмістовною.

Зауваження. При $0 \leq a < r_f < b$ (тобто якщо ціни акції ніколи не спадають, а це явно нереалістичний випадок), то довести, що $\beta_+ \leq 1$, можна таким самим чином, як і нерівність $\alpha_+ \leq 1$.

Якщо ж $a < 0 < b$, то $1 - Ee^{-Rx\eta} = 1 - e^{-Rxa} \tilde{p} - e^{-Rxb} (1 - \tilde{p}) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, тому застосований для доведення нерівності $\alpha_+ \leq 1$ спосіб використати не можна, бо не виконується нерівність $1 - Ee^{-Rx\eta} < 0$, оскільки $-Rxa > 0$, а, отже, при достатньо великих x : $1 - Ee^{-Rx\eta} < 0$ і тому не можна зробити висновок, що знаменник у виразі (5) перевищує чисельник.

Виникає запитання, чи невдалим є обраний метод оцінки β_+ , чи справді $\beta(x) > 1$ при великих x . Наступний приклад показує, що $\beta(x) > 1$ при великих x .

Приклад. Нехай виплати страхової компанії розподілені за експоненціальним законом:

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Нехай для спрощення $p_1 = 1$. Оскільки

$$Ee^{Ry} = \int_0^{\infty} \theta e^{(R-\theta)y} dy = \frac{\theta}{\theta - R}, \quad 0 \leq R < \theta,$$

то рівняння (3) для R має вигляд

$$e^{-Rc} \left(1 - p_2 + p_2 \frac{\theta}{\theta - R} \right) = 1. \quad (6)$$

Покажемо існування додатного розв'язку рівняння (6). Для функції $f(z) = 1 - p_2 + p_2 \frac{\theta}{\theta - z} - e^{zc}$ виконується $f(0) = 0$.

Очевидно, що якщо R – корінь рівняння (6), то $1 - p_2 + p_2 \frac{\theta}{\theta - R} = e^{Rc}$, тобто $f(R) = 0$.

$f'(z) = p_2 \frac{\theta}{(\theta - z)^2} - ce$, $f'(0) = \frac{p_2}{\theta} - c \leq 0$. Остання нерівність означає необхідну умову для існування страхової компанії умову $EP(1) > ER(1)$.

При $\frac{p_2}{\theta} - c < 0$ для малих значень z виконується $f(z) < f(0) = 0$. При $z \rightarrow \theta$ маємо, що $f(z) \rightarrow +\infty$, а, отже, існує таке $R \in (0; \theta)$, що $f(R) = 0$.

Чисельник виразу (5) для $\beta(x)$ дорівнює:

$$p_2 (1 - EF(x(1+r_1) + \eta_1 c)) e^{Rx} = p_2 E e^{-\theta(x(1+\eta_1)+c)+Rx}$$

Знаменник виразу (5) для $\beta(x)$ дорівнює:

$$\begin{aligned} 1 - E e^{-Rx\eta_1} + p_2 E e^{-Rx\eta_1 - R\eta_1 c} \int_{x(1+\eta_1)+\eta_1 c}^{+\infty} e^{Ry} dF(y) = \\ = 1 - E e^{-Rx\eta_1} + p_2 E e^{-Rx\eta_1 - Rc} \int_{x(1+\eta_1)+c}^{+\infty} e^{Ry} \theta e^{-\theta y} dy = \\ = 1 - E e^{-Rx\eta_1} + p_2 E e^{-Rx\eta_1 - Rc} \frac{\theta}{\theta - R} e^{-(\theta - R)(x(1+\eta_1)+c)} = \\ = 1 - E e^{-Rx\eta_1} + p_2 \frac{\theta}{\theta - R} E e^{-Rx\eta_1 - Rc - \theta x(1+\eta_1) - \theta c + Rx(1+\eta_1) + Rc} = \\ = 1 - E e^{-Rx\eta_1} + p_2 \frac{\theta}{\theta - R} E e^{-\theta x(1+\eta_1)+c+Rx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \beta(x) &= \frac{p_2 E e^{-\theta x(1+\eta_1)+c+Rx}}{1 - E e^{-Rx\eta_1} + p_2 \frac{\theta}{\theta - R} E e^{-\theta x(1+\eta_1)+c+Rx}} = \\ &= \frac{p_2 E e^{-\theta x(1+\eta_1)+c}}{e^{-Rx} - E e^{-Rx(\eta_1+1)} + p_2 \frac{\theta}{\theta - R} E e^{-\theta x(1+\eta_1)+c}} = \\ &= \frac{p_2 (e^{-\theta x(1+a)+c} (1 - \tilde{p}) + e^{-\theta x(1+b)+c} \tilde{p})}{e^{-Rx} - e^{-Rx(1+a)} (1 - \tilde{p}) - e^{-Rx(1+b)} \tilde{p} + p_2 \frac{\theta}{\theta - R} (e^{-\theta x(1+a)+c} (1 - \tilde{p}) + e^{-\theta x(1+b)+c} \tilde{p})} \end{aligned}$$

При $x \rightarrow +\infty$ асимптотика чисельника така, як у $p_2 e^{-\theta(x(1+a)+c)}(1-\tilde{p})$, бо другий доданок швидше прямує до 0, а асимптотика знаменника така, як у $-e^{-Rx(1+a)}(1-\tilde{p})$, бо $R(1+a) < R < R(1+b)$ та $R(1+a) < \theta(1+a) < \theta(1+b)$. Тому при $x \rightarrow +\infty$ $\beta(x)$ взагалі стає від'ємним, а при деякому x_0 чисельник більший за 0, знаменник дорівнює 0 та $\beta_* = \sup_{x \geq 0} \beta(x) = \infty$.

Отже, насправді оцінка $\varphi(x)$ у випадку інвестування всього капіталу в акції може виявитися і беззмисловою ($\varphi(x) > 1 - \infty \cdot e^{-Rx}$).

4. Оцінка ймовірності виживання при інвестуванні фіксованих часток капіталу в облігації та в акції.

Нехай є можливість інвестування капіталу в акції та в банк, причому $-1 < a < 0 < r_f < b$. Можна вкладати в акції та в банк фіксовані частини капіталу: μ та $1-\mu$. Тоді капітал x за одиницю часу зміниться на капітал $x(r_f\mu + r_f(1-\mu))$, тобто на капітал $x(a\mu + r_f(1-\mu))$ з ймовірністю $(1-\tilde{p})$ та на капітал $x(b\mu + r_f(1-\mu))$ з ймовірністю $\tilde{p}$.

При $a\mu + r_f(1-\mu) \geq 0$, тобто при $\mu < \frac{r_f}{r_f - a}$ маємо таку ж ситуацію,

як при можливості інвестування всього капіталу в акції, де $P\{r_i = \tilde{b}\} = \tilde{p}$, $P\{r_i = \tilde{a}\} = 1 - \tilde{p}$, причому $\tilde{a} = \mu a + (1-\mu)r_f \geq 0$, $\tilde{b} = \mu b + (1-\mu)r_f > r_f$. Тому таке інвестування фіксованих часток капіталу в облігації та в акції також покращує ймовірність виживання страхової компанії.

Висновок. У даній статті на прикладі моделі з показниковим розподілом виплат показано, що отримана певними методами оцінка ймовірності виживання страхової компанії при інвестуванні всього капіталу в акції може бути гіршою, ніж оцінка ймовірності виживання страхової компанії при інвестуванні всього капіталу в банківський рахунок чи взагалі без інвестування.

Література

1. Мельников А.В. Risk Analysis in Finance and Insurance, Chapman and Hall/CRC, 2004.
2. Мельников А.В. Риск-менеджмент. Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. М.: «Анкил», 2001.
3. David C.M. Dickson. Some comments on the compound binomial model // Astin Bulletin. 1994. V. 24. No.1. P. 33-45.
4. Cheng S. Gerber H.U. Shiu E.S.W. Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model // Insurance: Mathematics and Economics. 2000. V. 26. P. 239-250.

Надійшла до редакції 3.02.2005

УДК 519.21

Ганна В.Верьовкіна*,
Володимир Н.Нагорний

Інтерполяційні зображення
одного класу випадкових полів

Досліджуються інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів з регулярними пропусками вузлів інтерполяції.

Ganna V.Verovkina*,
Volodimir N.Nagorhiy

The interpolation representation
one kinds of random fields

Paper deals with some interpolation representations of random fields with let pass knots interpolations.

*E-mail: avv@mail.univ.kiev.ua

Нехай $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbb{R}^2$ - сепарабельне випадкове поле з $M\xi(\bar{t}) = 0$, яке має зображення вигляду

$$\xi(\bar{t}) = \int_{\Lambda^2} \prod_{i=1}^2 f_i(t_i, \lambda_i) Z(d\bar{\lambda}), \quad (1)$$

де Λ - деяка множина параметрів, $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$, $Z(d\bar{\lambda})$ - випадкова функція множин на $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$ така, що

$$MZ(d\bar{\lambda}) = 0, \quad MZ(A_1, A_2) \cdot \overline{Z(B_1, B_2)} = F(A_1, A_2, B_1, B_2), \quad (2)$$

де F - комплексна функція множин, адитивна за всіма аргументами, додатньо визначена і така, що

$$\int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} |F(d\bar{\lambda}, d\bar{\mu})| < +\infty. \quad (3)$$

Нехай функції $f_i(t_i, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots$ такі, що кожен з них можна довизначити у комплексній площині відносно t_i до цілої функції експоненціального типу з показником $\sigma_i(\lambda_i)$ і такої, що

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sigma_i(\lambda_i) = \sigma_i < \infty, \quad (4)$$

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sup_{t_i \in \mathbb{R}} |f_i(t_i, \lambda_i)| = L_{f_i} < \infty. \quad (5)$$

Властивості випадкових полів вказаного вигляду досліджені Ядренко М.Й. у роботі [1]. Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbb{R}^2$ - сепарабельне випадкове поле вигляду (1), що задовольняє умовам (2) - (5). Тоді з ймовірністю одиниця має місце зображення

$$\xi(\bar{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \quad (6)$$

У формулі (6) $\xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2)$ та $\omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2)$ визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} \xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) &= \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2) = \\ &= \xi(t_{k_1}, t_{k_2}) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_i}{4} \right)^3 (t_i - t_{k_i})^3 \right) + \\ &+ \xi(t_{k_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2}) \frac{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^3}{t_2 - t_{k_2} - \frac{2\pi}{\alpha_2}} 2 \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^3 + \\ &+ \xi(t_{k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, t_{k_2}) \frac{2 \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^3}{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}} \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^3 \right) + \\ &+ \xi(t_{k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2}) \prod_{i=1}^2 \frac{\left(\frac{\alpha_i}{4} \right)^3 (t_i - t_{k_i})^3}{t_i - t_{k_i} - \frac{2\pi}{\alpha_i}} + \\ &+ \frac{\partial \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1} \frac{\alpha_1}{2} (t_1 - t_{k_1}) \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^3 \right) + \\ &+ \frac{\partial \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_2} \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^3 \right) \frac{\alpha_2}{2} (t_2 - t_{k_2}) + \\ &+ \frac{\partial \xi(t_{k_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1} \frac{\alpha_1 (t_1 - t_{k_1})}{t_2 - t_{k_2} - \frac{2\pi}{\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^3 + \\ &+ \frac{\partial \xi(t_{k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, t_{k_2})}{\partial t_2} \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^3 \frac{\alpha_2 (t_2 - t_{k_2})}{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}} + \\ &+ \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1^2} \frac{\alpha_1}{4} (t_1 - t_{k_1})^2 \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^3 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1^2} \frac{\alpha_1 (t_1 - t_{k_1})^2}{t_2 - t_{k_2} - \frac{2\pi}{\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{4}\right)^3 (t_2 - t_{k_2})^3 + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{4}\right) (t_1 - t_{k_1}) (t_2 - t_{k_2}) + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_2^2} \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4}\right)^3 (t_2 - t_{k_2})^3\right) \frac{\alpha_2}{4} (t_2 - t_{k_2})^2 + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, t_{k_2})}{\partial t_2^2} \left(\frac{\alpha_1}{4}\right)^3 (t_1 - t_{k_1})^3 \frac{\frac{\alpha_2}{2} (t_2 - t_{k_2})^2}{t_2 - t_{k_2} - \frac{2\pi}{\alpha_2}} + \\
 & + \frac{\partial^3 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1 \partial t_2^2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{8}\right) (t_1 - t_{k_1}) (t_2 - t_{k_2})^2 + \\
 & + \frac{\partial^3 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1^2 \partial t_2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{8}\right) (t_1 - t_{k_1})^2 (t_2 - t_{k_2}) + \\
 & + \frac{\partial^4 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{16}\right) (t_1 - t_{k_1})^2 (t_2 - t_{k_2})^2, \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) &= \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2) = \\
 &= \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\sin \frac{\alpha_i}{4} (t_i - t_{k_i})}{\frac{\alpha_i}{4} (t_i - t_{k_i})} \right)^3 \frac{\sin \frac{\alpha_i}{4} \left(t_i - t_{k_i} - \frac{2\pi}{\alpha_i} \right)}{\frac{\alpha_i}{2}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

У формулах (7), (8) $t_{k_i} = k_i \frac{4\pi}{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots$, а вузли інтерполяції інтерполяційної формули (6) утворюють на площині прямокутну сітку

$$\left(k_1 \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{2\pi}{\alpha_2} \right), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

де α_1, α_2 - довільні дійсні числа такі, що $\alpha_1 > \sigma_1$, $\alpha_2 > \sigma_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Доведення: Для доведення теореми використаємо результат з теорії цілих функцій.

Нехай $f_1(t_1, \lambda_1)$ та $f_2(t_2, \lambda_2)$ задовольняють умовам (4), (5). Тоді

$$f(\bar{t}, \bar{\lambda}) = \prod_{i=1}^2 f(t_i, \lambda_i) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}), \quad (10)$$

де функція $f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda})$ визначається аналогічно (7). Використовуючи результат роботи [2] отримаємо оцінку залишка інтерполяційного ряду (10), а саме

$$R_n(\bar{t}) = \sup_{\bar{\lambda} \in \Lambda^2} \left| f(\bar{t}, \bar{\lambda}) - \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=-n}^n f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \right| \leq G(\bar{t}) \frac{1}{n} \quad (11)$$

де $G(\bar{t})$ - функція, що є обмеженою в довільній обмеженій області комплексної площини.

Розглянемо випадкове поле

$$\xi_n(\bar{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \quad (12)$$

Згідно із зображенням (1) випадкове поле (12) можна записати у вигляді

$$\xi_n(\bar{t}) = \int_{\Lambda^2} \left(\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \right) Z(d\bar{\lambda}) \quad (13)$$

Використовуючи зображення (1) та (13) отримаємо

$$M |\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})|^2 \leq R_n^2(\bar{t}) \int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} |F(d\bar{\lambda}, d\bar{\mu})| \quad (14)$$

З нерівності (14), враховуючи умову (3) та оцінку (11), маємо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до випадкового поля $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^2$ в середньому квадратичному. Використовуючи сепарабельність поля $\xi(\bar{t})$ та збіжність ряду $M |\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})|^2$, одержимо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до випадкового поля $\xi(\bar{t})$ з ймовірністю одиниця рівномірно відносно t в кожній обмеженій області зміни t .

Література:

1. Ядренко М.О. Аналітичні випадкові поля // Вісник Київського університету. Математика та механіка. 1969.-Вип. 1.-с. 56-60.
2. Нагорний В.Н. Інтерполяційне зображення випадкових процесів за рівновіддаленими вузлами інтерполяції // Вісник Київського університету. Математика та механіка. 1990.-Вип. 32.-с. 82-85.

Надійшла до редколегії 05.10.2004 р.

УДК 517.1

Олександр Г. Ганюшкін*, Роман А.
Заторський*, Іван І. Ліщинський

**До паравизначників і
параперманентів трикутних
матриць**

Доведено кілька нових
властивостей паравизначників та
параперманентів на основі яких
розроблено алгоритм обчислення
паравизначників і параперманентів
 n -го порядку, що вимагає $O(n^2)$
операцій.

Ключові слова: паравизначник,
параперманент.

Oleksandr G. Ganyushkin*, Roman
A. Zatorsky*, Ivan I. Lishchynsky

**On paraderminants and
parapermanents of triangular
matrices**

Some new properties of
paraderminants and parapermanents are
proved and the algorithm with $O(n^2)$
actions for calculating n^{th} order
paraderminants and parapermanents is
provided.

Key Words: paraderminant,
parapermanent.

*E-mail: ganiyshk@univ.kiev.ua, romazz@rambler.ru

1. Вступ.

Паравизначники та параперманенти є зручним інструментом для розв'язування різноманітних задач дискретної математики (див.[1-4]). У зв'язку з цим виникає потреба у подальшому дослідженні їх властивостей та побудові ефективних алгоритмів їх обчислення.

2. Основні конструкції.

Нагадаємо деякі означення з [1]. Нехай задана деяка трикутна таблиця чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ L & L & L & L \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{pmatrix}_n. \quad (1)$$

Ми будемо називати таку таблицю *трикутною матрицею*, хоча вона не є матрицею у звичайному розумінні цього терміну, бо є *трикутною*, а не *прямокутною* таблицею чисел (певним виправданням вживання терміну "*трикутна матриця*" може слугувати те, що ми можемо розширити нашу трикутну таблицю до квадратної за допомогою зірочок або яких-небудь інших службових символів).

Поставимо у відповідність кожному елементу a_{ij} матриці (1) $(i - j + 1)$ елементів a_{ik} , $k = j, \dots, i$, які назовемо *похідними елементами* матриці (1), що породжені *ключовим елементом* a_{ij} . Добуток $\prod_{k=j}^i a_{ik}$ усіх похідних елементів, породжених ключовим елементом a_{ij} , позначатимемо через $\{a_{ij}\}$ і називатимемо *факторіальним добутком* *ключового елемента* a_{ij} .

Набір ключових елементів трикутної матриці називається *нормальним*, якщо множина породжених ними похідних елементів має потужність n , причому жодні два з похідних елементів не лежать в одному стовпчику.

Через $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ позначатимемо впорядковане розбиття $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ натурального числа n у суму натуральних доданків. Множину всіх впорядкованих розбиттів числа n позначимо $P(n)$. Кожній компоненті α_s , $1 \leq s \leq k$, розбиття $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ поставимо у відповідність елемент $a_{i(s), j(s)} = a_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1} + 1, \alpha_s}$ матриці (1).

Твердження 1. Відображення $\varphi: (\alpha_1, K, \alpha_r)$ а $\{a_{i(1), j(1)}, K, a_{i(k), j(k)}\}$ є бієкцією множини $P(n)$ на множину нормальних наборів матриці (1).

Доведення. Коректність і ін'єктивність відображення φ очевидні. Для доведення сюр'єктивності скористаємося з того, що впорядкований за першим індексом ключовий набір має вигляд $a_{\beta_1, 1}, a_{\beta_2, \beta_1 + 1}, K, a_{\beta_k, \beta_{k-1} + 1}$, де $\beta_1 \geq 1, \beta_2 \geq \beta_1 + 1, K, \beta_k = n \geq \beta_{k-1} + 1$. Тому $\alpha = (\beta_1, \beta_2 - \beta_1, K, \beta_k - \beta_{k-1})$ є розбиттям числа n і $\varphi(\alpha) = \{a_{\beta_1, 1}, K, a_{\beta_k, \beta_{k-1} + 1}\}$.

Кожному нормальному набору a ключових елементів припишемо знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ – сума всіх індексів ключових елементів цього набору. Множину всіх нормальних наборів матриці (1) позначимо через $N(n)$.

Означення 1. Паравизначником трикутної матриці (1) називається число

$$\text{pdet}(A) = \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ K & K & K & K \\ a_{n1} & a_{n2} & K & a_{nn} \end{array} \right\rangle = \sum_{\{a_{i_1, j_1}, K, a_{i_k, j_k}\} \in N(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^k \{a_{i_s, j_s}\},$$

де $\varepsilon(a)$ – знак нормального набору $\{a_{i_1, j_1}, K, a_{i_k, j_k}\}$ ключових елементів.

Означення 2. Параперманентом матриці (1) називається число

$$\text{pper}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{K} & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\{a_{i_1, j_1}, \text{K}, a_{i_k, j_k}\} \in N(n)} \prod_{s=1}^k \{a_{i_s, j_s}\}.$$

Теорема 1. Паравизначник трикутної матриці (1) є число

$$\text{pdet}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{K} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \text{K}, \alpha_r) \in P(n)} (-1)^{n-r} \cdot \prod_{s=1}^r \{a_{\alpha_1+L, \alpha_s, \alpha_1+L, \alpha_{s-1}+1}\},$$

а параперманент – число

$$\text{pper}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{K} & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \text{K}, \alpha_r) \in P(n)} \prod_{s=1}^r \{a_{\alpha_1+L, \alpha_s, \alpha_1+L, \alpha_{s-1}+1}\}$$

Доведення. Рівність для параперманента одразу випливає з твердження 1. Тому лишилось довести, що знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$ нормального набору $a = \varphi(\alpha)$ ключових елементів, що відповідає розбиттю $\alpha = (\alpha_1, \text{K}, \alpha_r)$, дорівнює $(-1)^{n-r}$. Справді,

$$\sum_{s=1}^r ((\alpha_1 + L + \alpha_s) + (\alpha_1 + L + \alpha_{s-1} + 1)) \equiv (\alpha_1 + L + \alpha_r + r) \equiv n + r \equiv n - r \pmod{2}.$$

3. Обчислення паравизначників і параперманентів.

Доведемо кілька тверджень, які дозволяють обчислювати паравизначники і параперманенти трикутних матриць ефективніше, ніж безпосередньо за означенням чи на основі теореми 1.

Твердження 2. Для довільної матриці (1) і довільного числа k справедливі рівності:

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} + k \\ a_{21} + k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} + k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n = \left\langle \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n, \quad (2)$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} - k \\ a_{21} + k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} + k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n = \left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n. \quad (3)$$

Доведення. Доведемо рівність (3). При доведенні ми користуємось теоремами 3 і 4 із [2].

$$\text{ppreg}(A) = \left[\begin{matrix} a_{11} + k - k \\ a_{21} + k - k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} + k - k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n \stackrel{(\text{теор.3})}{=} \left[\begin{matrix} a_{11} + k \\ a_{21} + k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} + k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n +$$

$$+ \left[\begin{matrix} -k \\ -k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ -k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n \stackrel{(\text{теор.4})}{=} \left[\begin{matrix} a_{11} + k \\ a_{21} + k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} + k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n + (-2k) \cdot \left[\begin{matrix} a_{22} \\ L & L \\ a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_{n-1} =$$

$$= \left[\begin{matrix} a_{11} + k \\ a_{21} + k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} + k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n + \left[\begin{matrix} -2k \\ 0 & a_{22} \\ L & L & L \\ 0 & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n \stackrel{(\text{теор.3})}{=} \left[\begin{matrix} a_{11} - k \\ a_{21} + k & a_{22} \\ L & L & L & L & L \\ a_{n1} + k & a_{n2} K & a_{nn} \end{matrix} \right]_n.$$

Доведення рівності (2) аналогічне.

Твердження 3. Якщо в матриці (1) $a_{11} = 0$, і в її паравизначнику (параперманенті) кожний елемент $a_{ii}, i = 2, 3, K, n$, першого стовпчика помножити на деяке число $k_i \neq 0$, а відповідний йому елемент

$a_{i2}, i = 2, 3, \dots, n$, другого стовпчика поділити на це ж число, то значення паравизначника (параперманента) утвореної матриці не зміниться.

Доведення. Доведемо це твердження для паравизначника. Нехай $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$, де $a_{11} = 0$ та для всіх $i > 1$ $a'_{i1} = k_i a_{i1}$, $a'_{i2} = \frac{1}{k_i} a_{i2}$ і $a'_{ij} = a_{ij}$ для всіх $j > 2$. Досить показати, що для довільного впорядкованого розбиття α числа n добутки

$$\prod_{s=1}^k \{a_{i_s, j_s}\} \quad \text{і} \quad \prod_{s=1}^k \{a'_{i_s, j_s}\} \quad (4)$$

факторіальних добутків відповідних ключових елементів збігаються.

Якщо $i_1 = 1$, то $a_{i_1, j_1} = a'_{i_1, j_1} = a_{11} = 0$, а тому обидва добутки (4) дорівнюють 0. Якщо ж $i_1 > 1$, то

$$\{a'_{i_1, j_1}\} = a'_{i_1, 1} a'_{i_1, 2} a'_{i_1, 3} \dots a'_{i_1, j_1} = k_{i_1} a_{i_1, 1} \cdot \frac{1}{k_{i_1}} a_{i_1, 2} a_{i_1, 3} \dots a_{i_1, j_1} = \{a_{i_1, j_1}\}.$$

Крім того, для $j > 2$ $a'_{ij} = a_{ij}$, тому для $s > 1$ $\{a'_{i_s, j_s}\} = \{a_{i_s, j_s}\}$. Отже, і в цьому випадку обидва добутки (4) збігаються.

Для параперманентів доведення аналогічне.

Зауваження. Із доведення твердження 3 випливає, що коли в матриці (1) $a_{11} = 0$, то для довільного такого $i > 1$, що $a_{i1} = 0$, можна замінити a_{i1} на 1, а a_{i2} на 0, і при цьому ні паравизначник, ні параперманент матриці (1) не зміняться.

Із розкладу паравизначника (параперманента) за елементами першого стовпчика випливає

Твердження 4. Для довільної трикутної матриці (1) і довільних чисел $t_2, t_3, \dots, t_n$ справедливі рівності:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{L} & a_{nn} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} - t_2 & a_{22} & & \\ \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} \\ a_{n1} - t_n & a_{n2} & \text{L} & a_{nn} \end{vmatrix}_n - \begin{vmatrix} t_2 \cdot a_{22} & & & \\ \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} \\ & & & \\ t_n \cdot a_{n2} & \text{L} & & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{L} & a_{nn} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} - t_n & a_{22} & & \\ \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} \\ a_{n1} - t_n & a_{n2} & \text{L} & a_{nn} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} t_2 \cdot a_{22} & & & \\ \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} \\ & & & \\ t_n \cdot a_{n2} & \text{L} & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n-1}. \quad (6)$$

Використовуючи твердження 4, порядок паравизначника (параперманента) можна понизити на одиницю.

Теорема 2. Справедливі рівності:

$$\left\langle \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \ a_{22} \\ L \ L \ L \\ a_{n1} \ a_{n2} K a_{nn} \end{array} \right\rangle_n = (-1) \cdot \left\langle \begin{array}{c} (a_{21} - a_{11}) \cdot a_{22} \\ (a_{31} - a_{11}) \cdot a_{32} \ a_{33} \\ L \ L \ L \ L \ L \ L \ L \ L \\ (a_{n1} - a_{11}) \cdot a_{n2} \ a_{n3} K a_{nn} \end{array} \right\rangle_{n-1}, \quad (7)$$

$$\left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \ a_{22} \\ L \ L \ L \\ a_{n1} \ a_{n2} K a_{nn} \end{array} \right]_n = \left[\begin{array}{c} (a_{21} + a_{11}) \cdot a_{22} \\ (a_{31} + a_{11}) \cdot a_{32} \ a_{33} \\ L \ L \ L \ L \ L \ L \ L \ L \\ (a_{n1} + a_{11}) \cdot a_{n2} \ a_{n3} K a_{nn} \end{array} \right]_{n-1}. \quad (8)$$

Доведення. Доведемо рівність (7). Для цього у рівності (5) покладемо $t_i = a_{i1}, i = 2, K, n$. Тоді, враховуючи твердження 4, отримуємо наступний ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \ a_{22} \\ L \ L \ L \ L \\ a_{n1} \ a_{n2} L a_{nn} \end{array} \right\rangle_n &= \left\langle \begin{array}{c} a_{11} \\ 0 \ a_{22} \\ L \ L \ L \ L \\ 0 \ a_{n2} L a_{nn} \end{array} \right\rangle_n - \left\langle \begin{array}{c} a_{21} \cdot a_{22} \\ L \ L \ L \ L \\ a_{n1} \cdot a_{n2} L a_{nn} \end{array} \right\rangle_n = \\ &= \left\langle \begin{array}{c} a_{11} \cdot a_{22} \\ L \ L \ L \ L \\ a_{11} \cdot a_{n2} L a_{nn} \end{array} \right\rangle_n - \left\langle \begin{array}{c} a_{21} \cdot a_{22} \\ L \ L \ L \ L \\ a_{n1} \cdot a_{n2} L a_{nn} \end{array} \right\rangle_n = \left\langle \begin{array}{c} (a_{11} - a_{21}) \cdot a_{22} \\ L \ L \ L \ L \\ (a_{11} - a_{n1}) \cdot a_{n2} L a_{nn} \end{array} \right\rangle_n. \end{aligned}$$

Рівність (8) доводиться аналогічно.

Наслідок. Для обчислення паравизначника (параперманента) n -го порядку достатньо виконати не більше ніж $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ операцій множення і стільки ж операцій додавання.

Доведення. Очевидно, що при переході від паравизначника (параперманента) n -го порядку до паравизначника (параперманента) $(n-1)$ -го порядку необхідно виконати не більше ніж $(n-1)$ операцій

множення і стільки ж операцій додавання. Отже, для знаходження значення паравизначника (параперманента) n -го порядку необхідно виконати не більше ніж $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ операцій множення і стільки ж операцій додавання.

4. Висновки

1. Оскільки паравизначник (параперманент) n -го порядку містить $\frac{n(n-1)}{2}$ елементів і залежить від кожного з них, то зрозуміло, що не існує алгоритмів їх обчислення, суттєво ефективніших за запропонований.

2. Обчислення паравизначників (параперманентів) вимагає значно менших об'ємів роботи, ніж звичайних визначників (перманентів). Наприклад, класичний метод Гаусса обчислення визначників вимагає $O(n^3)$ операцій множення.

Література

1. Заторський Р.А. Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Математичні студії. – 2002. – Т.17, вип. 1. – С.3-17.
2. Заторський Р.А. Паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Доповіді НАН України. – 2002. – №8. – С.21-25.
3. Заторский Р.А. Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре // Матем. заметки. – 2002. – т. 72. – №6. – С. 23-34.
4. Заторський Р.А. Неперервні дроби, K -многочлени і параперманенти // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2002. – 44, № 4. – С. 12-21.

Надійшла до редакції 20.12.2004

УДК 517.956.22

Яків М. Димарський*

Інтегро-диференціальна квазілінійна крайова задача. Серія: фізико-математичні науки

Ми розглядаємо квазілінійну крайову задачу, головна частина якої є еліптичною, а компактна містить нелінійний інтегральний оператор.

Ключові слова: інтегро-диференціальний оператор, квазілінійна задача, додатний оператор, зворотний оператор, нерухома точка.

*E-mail: dymarsky@lep.lg.ua

1. Головний результат. Розглянемо квазілінійну проблему: знайти слабкий розв'язок $u(x)$ крайової задачі

$$-\Delta u + \int_{\Omega} K(u(s), \nabla u(s), x, s) ds \cdot u = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена область із краєм $\partial\Omega \in C^1$, $x, s \in \bar{\Omega}$, Δ - оператор Лапласа, $\nabla = \text{grad}$. Припустимо, що ядро $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умовам Каратеодорі, тобто, неперервне по двом першим аргументам і вимірюємо - по останнім. Інтегро-диференціальні рівняння різних типів постійно зустрічаються в теорії крайових задач (див., наприклад, [1-3]).

Нехай, як звичайно, $L_r(\Omega)$ - простір дійсних функцій, що інтегруються із степенем r , $W_r^k(\Omega)$ - простір Соболева таких дійсних функцій, узагальнені похідні яких до порядку k інтегруються із степенем r , $\dot{W}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ - замикання підпростору C^∞ -функцій із компактним в області Ω носієм. Норму $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ візьмемо за формулою $\|u\|_{1,2}^0 = (\int_{\Omega} (\nabla u(x))^2 dx)^{1/2}$, яка є еквівалентною звичайній нормі в $W_2^1(\Omega)$ завдяки крайовим умовам. Більш того, простір $\dot{W}_2^1(\Omega)$ є гільбертовим із скалярним добутком $(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial u / \partial x_i)(\partial v / \partial x_i) dx$. Нагадаємо [4], що функцію $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ називають слабким рішенням задачі (1), якщо для будь-якої функції $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ виконується рівність

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 u_i' v_j' dx + \int_{\Omega} (\int_{\Omega} K(u(s), \nabla u(s), x, s) ds) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (2)$$

Теорема. Нехай ядро інтегрального оператора задовільняє нерівності

$$|K(u, y, x, s)| \leq C(|u|^\alpha + |y|^2 + 1), \quad (3)$$

де постійні $C, \alpha > 0$ є довільними. Припустимо, що існує таке $R > 0$, що

Yakov M. Dymarskii*

Integral-differential quasi-linear boundary value problem. Series: Physics & Mathematics

We investigate a quasi-linear boundary problem with elliptic main part and nonlinear integral compact part.

Key Words: integral-differential operator, quasi-linear problem, positive operator, inverse operator, fixed point.

$$p(x) := \int_{\Omega} K(u(s), \nabla u(s), x, s) ds \geq 0 \quad (4)$$

як тільки $\|u\|_{1,2}^0 \geq R$. Нехай функція $f \in L_q(\Omega)$ із деяким $q > 1$. Тоді крайова задача (1) має принаймні одне слабе рішення, яке задовільняє нерівності

$$\|u\|_{1,2}^0 < \text{const}(\Omega, f, R). \quad (5)$$

Якщо u^* є слабким рішенням нелінійної задачі (1), то одночасно функція u^* є слабким рішенням лінійної задачі

$$-\Delta u + \int_{\Omega} K(u^*(s), \nabla u^*(s), x, s) ds \cdot u = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

із потенціалом $p^*(x) = \int_{\Omega} K(u^*(s), \nabla u^*(s), x, s) ds$. Тому ми називаємо задачу (1) квазілінійною. Якщо функція u^* задовільняє нерівності $\|u\|_{1,2}^0 \geq R$, задача (1) стає додатною у певному просторі, який ми означимо нижче. Використовуючи цю додатність, ми пропонуємо новий підхід для перетворення задачі (1) на рівняння із нерухомою точкою (див. [4-6]).

2. Операторне рівняння. Перетворемо тотожність (2) таким чином, щоб перейти до певного операторного рівняння у просторі $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Без обмеження загальності можна вважати, що в умовах теореми $q = 1 + \varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1/4$. Нехай $\dot{\Delta} : W_q^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$, де $\dot{\Delta}(u) = -\Delta(u)$. Як відомо [4], відображення $\dot{\Delta}$ є неперервним лінійним ізоморфізмом. Тому існує обернене відображення $\dot{\Delta}^{-1} : L_q(\Omega) \rightarrow W_q^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$.

Лема 1. Якщо функції $u, v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, то функція $p(x)v(x) \in L_q(\Omega)$.

Доведення. По-перше, із теореми Соболева [4] має місце вкладення $\dot{W}_2^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ із будь-яким $1 < r < \infty$. Тому з оцінки (3) і означення (4) функції $p(x)$ ми маємо:

$$|p(x)| \leq \int_{\Omega} |K(u, \nabla u, x, s)| dx \leq D,$$

де постійна $D > 0$ залежить від C, α (див. (3)) і міри області Ω . Звідки

$$\int_{\Omega} |p(x)v(x)|^q dx \leq D^q \int_{\Omega} v^q(x) dx < \infty. \bullet$$

Таким чином, ми маємо право змінити тотожність (2) на рівносильну $\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial u / \partial x_i)(\partial v / \partial x_i) dx + \int_{\Omega} \dot{\Delta}[\dot{\Delta}^{-1}(p(x)u(x))]v(x) dx = \int_{\Omega} \dot{\Delta}[\dot{\Delta}^{-1}(f(x))]v(x) dx$. Після інтегрування частинами ми остаточно маємо

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial u / \partial x_i)(\partial v / \partial x_i) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial[\dot{\Delta}^{-1}(p(x)u(x))]/\partial x_i)(\partial v / \partial x_i) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial[\dot{\Delta}^{-1}(f(x))]/\partial x_i)(\partial v / \partial x_i) dx. \quad (6)$$

Тотожність (6) є рівносильною тотожності $(u, v) + (P(u), v) = (F, v)$, де

$$P : \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow \dot{W}_2^1(\Omega), \quad P(u) = \dot{\Delta}^{-1}(p(x)u); \quad F = \dot{\Delta}^{-1}(f) \in \dot{W}_2^1(\Omega). \quad (7)$$

Завдяки тому, що функція $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ є довільною, ми отримуємо

операторне рівняння

$$u + P(u) = F. \quad (8)$$

Дослідимо відображення P . Позначимо через $L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ банахів простір неперервних лінійних операторів із звичайною нормою, діючих у просторі $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Спираючись на лему 1 і означення оператора $\dot{\Delta}^{-1}$, розглянемо відображення

$$A: \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L(\dot{W}_2^1(\Omega)), \quad A(u) = \mathbf{A}, \quad \text{що } \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega) \\ \mathbf{A}(v) = \dot{\Delta}^{-1}(p(x)v). \quad (9)$$

Очевидно, що $P(u) = A(u)u$. Ми назвемо відображення (9) квазілінійним зображенням відображення P (див. (7)). (Теорію квазілінійних зображень і власних векторів квазілінійних операторів розглянуто нами у [7, 8]). Тепер рівняння (8) має вигляд

$$(\mathbf{E} + A(u))u = F, \quad (10)$$

де $\mathbf{E}$ - одиничний оператор. Властивості відображення A наведено у наступній лемі.

Лема 2. 1) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ лінійний оператор $A(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є компактним.

2) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ такої, що $\|u\|_{1,2}^0 \geq R$, лінійний оператор $A(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є невід'ємним, тобто для $\forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ виконується нерівність $(A(u)v, v) \geq 0$.

3) Відображення A є цілком неперервним.

Доведення. 1) За означенням, оператор $\dot{\Delta}^{-1}: L_q(\Omega) \rightarrow W_q^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ діє в простір $W_q^2(\Omega)$, де $q = 1 + \varepsilon > 1$. За теоремою Соболева, $W_q^2(\Omega) \subset \dot{W}_2^1(\Omega)$ причому вкладення є компактним.

2) Маємо $\forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ та $\|u\|_{1,2}^0 \geq R$, що (завдяки (4))

$$(A(u)v, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial [\dot{\Delta}^{-1}(p(x)v(x))] / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) dx = \\ \int_{\Omega} \dot{\Delta} [\dot{\Delta}^{-1}(p(x)v(x))] v(x) dx = \int_{\Omega} p(x)v(x)v(x) dx \geq 0.$$

3) Ми дамо відображення A у вигляді добутка чотирьох відображень: $A = \delta \cdot \gamma \cdot \psi \cdot \varphi$, де

$$\dot{W}_2^1(\Omega) \xrightarrow{\varphi} L_2(\Omega) \xrightarrow{\psi} L_{2-\varepsilon}(\Omega) \xrightarrow{\gamma} L(\dot{W}_2^1(\Omega), L_q(\Omega)) \xrightarrow{\delta} L(\dot{W}_2^1(\Omega)),$$

$$\text{і } \varphi(u) := p(x), \quad \psi(p) := p, \quad \gamma(p) = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}v := pv, \quad \delta(\mathbf{P}) := \dot{\Delta}^{-1} \cdot \mathbf{P}.$$

Перше відображення є неперервним оскільки функція $p(x)$ вимірюєма та обмежена [4]. Вкладення ψ є цілком неперервним за теоремою Соболева [4]. Відображення γ є неперервним, оскільки насправді $p \cdot v \in L_q(\Omega)$ (лема 1). Останнє відображення є очевидно неперервним. Отже, відображення A є скінченним добутком неперервних відображень, причому один

співмножник є цілком неперервним. Тому весь добуток є цілком неперервним [9]. •

3. Доведення теореми ґрунтується на наступному твердженні.

Лема 3. Існує відображення $B: \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L(\dot{W}_2^1(\Omega))$, яке має такі властивості

1) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ лінійний оператор $B(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є компактним.

2) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ лінійний оператор $A(u) + B(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є невід'ємним, тобто для $\forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ виконується нерівність $((A(u) + B(u))v, v) \geq 0$.

3) Відображення B є цілком неперервним.

4) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ такої, що $\|u\|_{1,2}^0 \geq R$, лінійний оператор $B(u) = 0 \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$.

Доведення. Нехай $\{T_R := \{u \in \dot{W}_2^1(\Omega) : \|u\|_{1,2}^0 \leq r\}$ - замкнута куля, $\{S_R := \{u \in \dot{W}_2^1(\Omega) : \|u\|_{1,2}^0 = r\}$ - відповідна сфера. Візьмемо довільний невід'ємний компактний оператор $A_0 \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$. Розглянемо відображення

$$\tilde{A}: T_R \rightarrow L(\dot{W}_2^1(\Omega)), \quad \tilde{A}(u) := \frac{\|u\|_{1,2}^0}{R} A\left(\frac{Ru}{\|u\|_{1,2}^0}\right) + \left(1 - \frac{\|u\|_{1,2}^0}{R}\right) A_0.$$

Воно має наступні властивості.

1) Для кожної функції $u \in T_R$ лінійний оператор $\tilde{A}(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є компактним як сума компактних операторів.

2) Для кожної функції $u \in T_R$ лінійний оператор $\tilde{A}(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є невід'ємним оскільки на сфері S_R оператор $A(u)$ є невід'ємним, а множина невід'ємних операторів є опуклою.

3) Відображення $\tilde{A}$ є цілком неперервним як сума таких відображень.

4) Для кожної функції $u \in S_R$ оператор $\tilde{A}(u) \equiv A(u)$.

Тепер означимо шукане відображення B таким чином:

$$\begin{cases} B(u) = \tilde{A}(u) - A(u), & \forall u \in T_R, \\ B(u) = 0, & \forall u \notin T_R. \end{cases} \bullet$$

Рівняння (10) є еквівалентним наступному

$$(E + A(u) + B(u))u = F + B(u)u. \quad (11)$$

Переваги рівняння (11) указано в наступному твердженні

Лема 4. 1) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ лінійний оператор $E + A(u) + B(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ має зворотний $(E + A(u) + B(u))^{-1}$ і

$$\|(\mathbf{E} + A(u) + B(u))^{-1}\| \leq 1.$$

2) Відображення

$$G : \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L(\dot{W}_2^1(\Omega)), \quad G(u) = (\mathbf{E} + A(u) + B(u))^{-1}$$

є цілком неперервним.

Доведення. 1) Твердження є безпосереднім наслідком п. 2 леми 3.

2) Твердження є безпосереднім наслідком п. 3 леми 2 та п.3 леми 3. •

Доведення теореми. Рівняння (11) є еквівалентним рівнянню

$$u = G(u)(F + B(u)u). \quad (12)$$

Векторне поле $\Phi(u) := u - G(u)(F + B(u)u)$ є цілком неперервним. Це є наслідком твердження 2 леми 4 і цілковитої неперервності відображення $u \rightarrow B(u)u$ [8]. Отже, застосуємо ступінь Лере-Шаудера [9] для сукупності цілком неперервних векторних полей $\Phi_t(u) := u - tG(u)(F + B(u)u)$, $0 \leq t \leq 1$. Візьмемо довільний радіус $r > \max\{\|F\|_{1,2}^0, R\}$. Завдяки п. 4 леми 3 та нерівності п. 1 леми 4, ми маємо на сфері S_r нерівність: $\|\Phi_t(u)\| > 0$ рівномірно для усіх $0 \leq t \leq 1$. Тому на S_r ступінь Лере-Шаудера поля Φ дорівнює один [9]. Отже у кулі T_r існує рішення рівняння (12).

Нерівність (5) впливає з означення (7) вектора F і довільності радіусу $r > \max\{\|F\|_{1,2}^0, R\}$. Теорему цілком доведено. •

Література

1. Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными. Собр. сочин. Т.3. – Москва: Наука, 1963.
2. Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Матем. сборник. – 1975. – Т. 96 (138). – N 1. – С.153-166.
3. Lions P.L. The Choquard equation and related questions // Nonlinear Analysis. Methods & Appl. – 1980. – V 4. – No 6. – P. 1063-1072.
4. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1988.
5. Гилбарг В., Трудингер Н.С. Дифференциальные уравнения второго порядка. – Москва: Мир, 1989.
6. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических краевых задач. – Москва: Наука, 1990.
7. Димарський Я.М. Про квазілінійне зображення скінченновимірних нелінійних операторів // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – 2. – с. 27-32.
8. Dymarskii Ya.M. Intersection number and eigenvectors of quasi-linear Hilbert-Schmidt operators // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2002. – v. 9. – No 4. – p. 604-621.
9. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – Москва: ГИТТЛ, 1956.

Надійшла до редакції 23.12.2004

УДК 512.552

Віктор М. Журавльов* Ірина
М. Циганівська

Q -еквівалентні скінчені частково впорядковані множини.

В статті описано Q -еквівалентні скінчені частково впорядковані множини.

Ключові слова: скінчена частково впорядкована множина, діаграма скінченої частково впорядкованої множини, матриця показників, сагайдак зведеної матриці показників.

*E-mail: vshur@univ.kiev.ua

Матриці показників виникли при вивченні черепичних порядків (первинних напівмаксимальних кілець в термінології [1]) в 70-их роках минулого століття. Багато властивостей таких порядків та їх сагайдаків повністю визначаються їх матрицями показників. За допомогою матриць показників інтерпретуються зображення частково впорядкованих множин.

Мета статті — описати Q -еквівалентні скінчені частково впорядковані множини. Ці множини введені в [4].

Позначимо через $M_n(\mathbb{Z})$ кільце всіх квадратних $n \times n$ матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $E \in M_n(\mathbb{Z})$.

Означення. Матриця $E = (\alpha_{ij})$ називається матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k = 1, \dots, n$ та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$.

Матриця показників E називається зведеною, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всіх $i, j = 1, \dots, n$ ($i \neq j$).

Нехай $E = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Покладемо $E^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \dots, n$ і $E^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj})$. Очевидно, що $[Q] = E^{(2)} - E^{(1)}$ є $(0, 1)$ -матрицею.

Теорема 1. [3] Матриця $[Q] = E^{(2)} - E^{(1)}$ є матрицею суміжності сильно зв'язного просто влаштованого сагайдака $Q = Q(E)$.

Означення. Сагайдак $Q = Q(E)$ називається сагайдаком зведеної матриці показників E .

Означення. Дві матриці показників $E = (\alpha_{ij})$ та $\Xi = (\theta_{ij})$ називаються еквівалентними, якщо одну можна отримати з іншої перетвореннями наступних двох типів:

Viktor N. Zhuravlev* Iryna M. Cyganivska

Q -equivalent finite partially ordered sets.

In this article we describe Q -equivalent finite posets.

Key Words: finite partially ordered set, diagram of finite partially ordered set, exponent matrix, quiver of reduced matrix.

(1) віднімання цілого числа від елементів i -го рядка з одночасним додаванням цього ж числа до елементів i -го стовпчика;

(2) одночасна перестановка двох рядків та двох стовпчиків з тими ж номерами.

Співставимо кожній скінченій частково впорядкованій множині P зведеному $(0,1)$ -матрицю показників $E_P = (\lambda_{ij})$ наступним чином:
 $\lambda_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \leq j$, інакше $\lambda_{ij} = 1$.

Легко бачити, що E_P є дійсно зведеною матрицею показників.

Навпаки, за кожною $(0,1)$ -матрицею $E = (\lambda_{ij})$ визначається скінченна частково впорядкована множина P_E за правилом: $i \leq j$ тоді та тільки тоді, коли $\lambda_{ij} = 0$. Очевидно $P_{E_P} = P$.

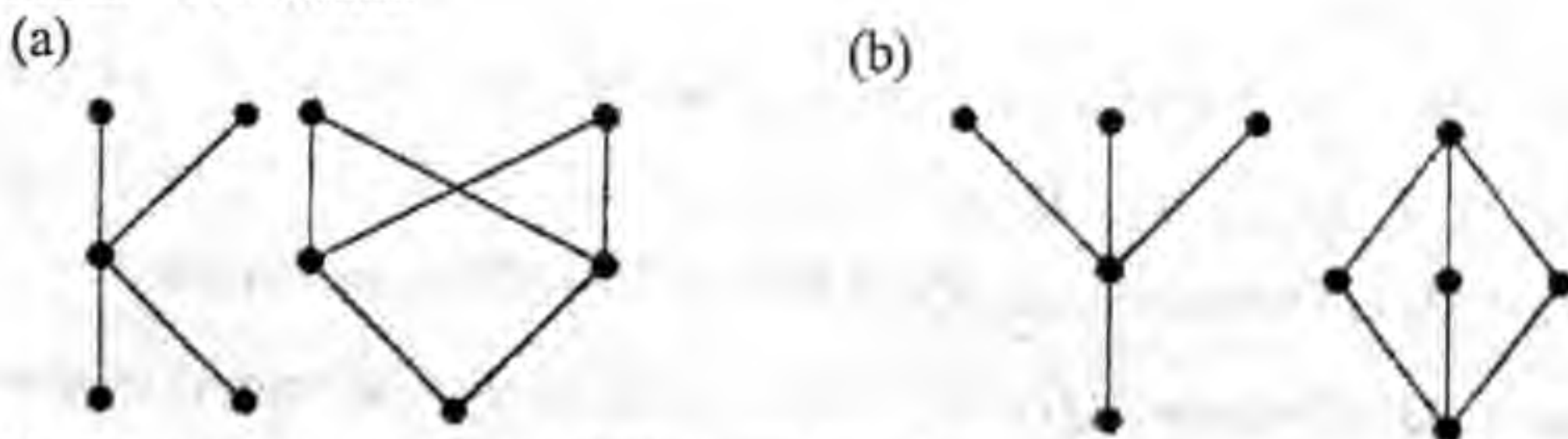
Позначимо через $P_{\max}$ (відп. через $P_{\min}$) множину максимальних (відп. мінімальних) елементів множини P та через $P_{\max} \times P_{\min}$ їх декартовий добуток.

Означення. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$, отриманий з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок σ_{ij} для всіх $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$ називається сагайдаком, асоційованим з частково впорядкованою множиною P .

Теорема 2. [2] Сагайдак $Q(E_P)$ співпадає з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$.

Означення. Скінчені частково впорядковані множини S і T називаються Q -еквівалентними, якщо еквівалентними є зведені $(0,1)$ -матриці показників E_S і E_T .

Приклади. Нижче наведено дві пари Q -еквівалентних частково впорядкованих множин.



Частково впорядковані множини зі зв'язними діаграмами будемо називати зв'язними.

Теорема 3. [4] Наступні умови для зведених $(0,1)$ -матриць показників еквівалентні:

(a) $Q(E_S)$ та $Q(E_T)$ ізоморфні;

(b) E_S та E_T еквівалентні.

Теорема 4. Дві скінченні зв'язні частково впорядковані множини P_1 та P_2 Q -еквівалентні тоді та тільки тоді, коли або ці множини ізоморфні, або існує розбиття цих множин $P_1 = P_1' \cup P_1''$ та $P_2 = P_2' \cup P_2''$ таке, що кожний елемент з P_1'' не перевищує довільного елемента з P_1' , кожен елемент з P_2' не перевищує довільного елемента з P_2'' , та $P_1' \sqsubseteq P_2'$, $P_1'' \sqsubseteq P_2''$.

Нехай P_1 та P_2 — скінченні зв'язні частково впорядковані множини, які є Q -еквівалентними, тобто $\tilde{Q}(P_1) \sqsubseteq \tilde{Q}(P_2)$. Перенумеруємо елементи множини P_2 (перенумерація вершин сагайдака є ізоморфізмом сагайдаків) так, щоб $\tilde{Q}(P_1) = \tilde{Q}(P_2)$. Нехай $P_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $P_2 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ і $[\tilde{Q}(P_1)] = [\tilde{Q}(P_2)] = (q_{ij})$.

Якщо $q_{ij} = 0$, то елемент α_j не накриває елемент α_i і, або α_i не є максимальним, або α_j не є мінімальним; елемент γ_j не накриває елемент γ_i і, або γ_i не є максимальним, або γ_j не є мінімальним.

Якщо $q_{ij} = 1$, то або елемент α_j накриває елемент α_i , або α_i є максимальним, а α_j є мінімальним; або елемент γ_j накриває елемент γ_i або γ_i є максимальним, а γ_j є мінімальним.

Припустимо, що $Q(P_1) \neq Q(P_2)$. Тоді існують i та j такі, що α_j накриває α_i , але γ_i є максимальним, а γ_j є мінімальним елементами.

Нехай $\alpha_j = \alpha_{j_1}$ накриває елементи $\alpha_i = \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$. Тоді $\gamma_j = \gamma_{j_1}$ є мінімальним елементом, а $\gamma_i = \gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_r}$ є максимальними, причому більше максимальних елементів у частково впорядкованої множини P_2 немає.

Якщо $P_{2\min} = \{\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_r}\}$, то $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ накривають кожен з елементів $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$.

Нехай $P_{1\max} = \{\alpha_{p_1}, \dots, \alpha_{p_m}\}$, $P_{1\min} = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $P_{2\max} = \{\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_r}\}$. Тоді, якщо $\alpha_p = \alpha_{p_v} \in P_{1\max}$ і $\alpha_i = \alpha_{i_u} \in P_{1\min}$, то γ_{i_u} накриває γ_{p_v} .

Позначимо $P_1' = \{\alpha_q \in P_1 \mid \alpha_q > \alpha_{i_1}\}$, $P_1'' = P_1 \setminus P_1'$; $P_2' = \{\gamma_q \in P_2 \mid \gamma_q > \gamma_{p_1}\}$, $P_2'' = P_2 \setminus P_2'$.

Тоді $Q(P_1') = Q(P_2')$ та $Q(P_1'') = Q(P_2'')$. Дійсно, оскільки в множинах P_1' , P_2' , P_1'' , P_2'' немає одночасно елементів з $P_{1\max}$ і $P_{1\min}$; з $P_{2\max}$ і $P_{2\min}$, то з рівності $q_{ij} = 1$ при, наприклад, $\alpha_i, \alpha_j \in P_1'$ випливає, що α_j накриває α_i .

та γ_j накриває γ_i де $\gamma_i, \gamma_j \in P_2''$.

Обернене твердження є очевидним. Теорема доведена.

За цією теоремою

$$E(P_1) = \begin{pmatrix} E(P_1') & U \\ O & E(P_1'') \end{pmatrix}, \quad E(P_2) \sqsubseteq \begin{pmatrix} E(P_2') & O \\ U & E(P_2'') \end{pmatrix}, \quad \text{де } E(P_1') = E(P_2'), \\ E(P_1'') = E(P_2'').$$

Зокрема, якщо $|P_1'| = 1$ (або $|P_2'| = 1$), то матрицю E_{P_2} можна отримати з матриці E_{P_1} перетворенням першого типу.

Теорема 5. Дві незв'язні частково впорядковані множини P та $S \in Q$ -еквівалентними тоді та тільки тоді, коли ізоморфні діаграми $Q(P)$ та $Q(S)$.

Нехай P та S — дві незв'язні частково впорядковані Q -еквівалентні множини, $P = P_1 \cup P_2$, $S = S_1 \cup S_2$, $Q(P) = Q(P_1) \cup Q(P_2)$, $Q(S) = Q(S_1) \cup Q(S_2)$ і, крім цього, між $Q(P_1)$ і $Q(P_2)$ та між $Q(S_1)$ і $Q(S_2)$ немає стрілок. Так як множини P та $S \in Q$ -еквівалентними, то за теоремою сагайдаки $\tilde{Q}(P)$ та $\tilde{Q}(S)$ є ізоморфними. Нехай $\varphi: \tilde{Q}(P) \rightarrow \tilde{Q}(S)$ — ізоморфізм сагайдаків, $P_{1\max} = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\}$, $P_{1\min} = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}\}$, $P_{2\max} = \{\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_r}\}$, $P_{2\min} = \{\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_s}\}$. З кожної вершини α_{i_q} множини $P_{1\max}$ та з кожної вершини α_{k_u} множини $P_{2\max}$ в сагайдаку $\tilde{Q}(P)$ ведуть стрілки в кожную вершину α_{j_p} множини $P_{1\min}$ та в кожную вершину α_{l_v} множини $P_{2\min}$. Тому з кожної вершини $\varphi(\alpha_{i_q})$ множини $\varphi(P_{1\max})$ та з кожної вершини $\varphi(\alpha_{k_u})$ множини $\varphi(P_{2\max})$ в сагайдаку $\tilde{Q}(S)$ ведуть стрілки в кожную вершину $\varphi(\alpha_{j_p})$ множини $\varphi(P_{1\min})$ та в кожную вершину $\varphi(\alpha_{l_v})$ множини $\varphi(P_{2\min})$.

Припустимо, що $\varphi(\alpha_{i_q})$ не належить множині $S_{\max}$. Тоді $\varphi(\alpha_{j_1}), \dots, \varphi(\alpha_{j_n}), \varphi(\alpha_{k_1}), \dots, \varphi(\alpha_{k_r}) \notin S_{\min}$ і $\varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_m}), \varphi(\alpha_{l_1}), \dots, \varphi(\alpha_{l_s}) \notin S_{\max}$. З $\varphi(\alpha_{k_1}), \dots, \varphi(\alpha_{k_r})$ ведуть стрілки в $\varphi(\alpha_{j_1}), \dots, \varphi(\alpha_{j_n})$ а також шляхи через $\varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_m})$ та $\varphi(\alpha_{k_1}), \dots, \varphi(\alpha_{k_r})$. Якщо в сагайдаку $\varphi(\tilde{Q}(P_2))$ між $\varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_m})$ та $\varphi(\alpha_{k_1}), \dots, \varphi(\alpha_{k_r})$ немає максимальних та мінімальних елементів множини S , то стрілки з $\varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_m})$ у

$\varphi(\alpha_{j_1}), \dots, \varphi(\alpha_{j_s})$ є зайвими. Отже, між $\varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_r})$ та $\varphi(\alpha_{k_1}), \dots, \varphi(\alpha_{k_t})$ існують максимальні та мінімальні елементи множини S . Нехай $\gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{q_x} \in S_{\max} \cap \varphi(P_2)$, $\gamma_{p_1}, \dots, \gamma_{p_y} \in S_{\min} \cap \varphi(P_2)$. Цілком аналогічно між $\varphi(\alpha_{j_1}), \dots, \varphi(\alpha_{j_s})$ та $\varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_m})$ множини $\varphi(\tilde{Q}(P_1))$ теж є максимальні та мінімальні елементи множини S . Нехай $\gamma_{v_1}, \dots, \gamma_{v_z} \in S_{\max} \cap \varphi(P_1)$, $\gamma_{u_1}, \dots, \gamma_{u_w} \in S_{\min} \cap \varphi(P_1)$. Тоді в $\tilde{Q}(S)$ з $\gamma_{v_1}, \dots, \gamma_{v_z}$ та з $\gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{q_x}$ ведуть стрілки в $\gamma_{v_1}, \dots, \gamma_{v_z}$ та в $\gamma_{p_1}, \dots, \gamma_{p_y}$. Але в $\tilde{Q}(P)$ відповідних стрілок з $\varphi^{-1}(\gamma_{v_1}), \dots, \varphi^{-1}(\gamma_{v_z}) \in P_1$ в $\varphi^{-1}(\gamma_{p_1}), \dots, \varphi^{-1}(\gamma_{p_y}) \in P_2$, а також з $\varphi^{-1}(\gamma_{q_1}), \dots, \varphi^{-1}(\gamma_{q_x}) \in P_2$ в $\varphi^{-1}(\gamma_{u_1}), \dots, \varphi^{-1}(\gamma_{u_w}) \in P_1$ немає. Отже, $\varphi(\alpha_{j_1}), \dots, \varphi(\alpha_{j_s}), \varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_r}) \in S_{\min}$ і $\varphi(\alpha_{i_1}), \dots, \varphi(\alpha_{i_m}), \varphi(\alpha_{k_1}), \dots, \varphi(\alpha_{k_t}) \in S_{\max}$. Ми отримали, що $\varphi(P_{\max}) \subset S_{\max}$ і $\varphi(P_{\min}) \subset S_{\min}$. Аналогічно $\varphi^{-1}(S_{\max}) \subset P_{\max}$ та $\varphi^{-1}(S_{\min}) \subset P_{\min}$. Тому $\varphi(P_{\max}) = S_{\max}$ та $\varphi(P_{\min}) = S_{\min}$.

Оскільки сагайдаки $\tilde{Q}(P)$ та $\tilde{Q}(S)$ є ізоморфними, а максимальні та мінімальні елементи при ізоморфізмі переходять в максимальні та мінімальні елементи, то отримуємо ізоморфізм діаграм $Q(P)$ та $Q(S)$ частково впорядкованих множин P та S .

Навпаки, якщо діаграми $Q(P)$ та $Q(S)$ ізоморфні, то, очевидно, сагайдаки $\tilde{Q}(P)$ та $\tilde{Q}(S)$ також є ізоморфними і незв'язні частково впорядковані множини P та S є Q -еквівалентними за теоремами 2 та 3.

Література

1. Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. Науч. семинаров Ленингр. Отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1976.— т.57.— с. 100-116.
2. Kirichenko V.V., Chernousova Zh.T., Dokuchaev M.A., Khibina M.A., Mi-roshnichenko S.G., Zhuravlev V.N. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets // I. Algebra and Discrete mathematics, № 1, 2002, с. 32-63.
3. Kirichenko V.V., Chernousova Zh.T., Dokuchaev M.A., Khibina M.A., Mi-roshnichenko S.G., Zhuravlev V.N. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets // II. Algebra and Discrete mathematics, № 2, 2003, с. 47-86.
4. Kirichenko V.V., Zelensky A.V., Zhuravlev V.N. Exponent matrices and their quivers // Buletinul Academiei de Stiinta a Republicii Moldova. Matematica, №1(44), 2004, p. 57-66.

Надійшла до редакції 18.11.2004.

УДК 519.21

Валерій О. Коваль¹

Обмежений закон повторного логарифма для матрично-нормованих багатовимірних мартингалів

Знайдено конструктивні достатні умови виконання обмеженого закону повторного логарифма для зважених сум багатовимірних мартингал-різниць, нормованих довільними матрицями.

Ключові слова: закон повторного логарифма, мартингали, матричні нормування.

Valery O. Koval'¹

A bounded law of the iterated logarithm for matrix-normalized multivariate martingales

The constructive sufficient conditions for bounded law of the iterated logarithm for weighted sums of multivariate martingale difference sequences with arbitrary matrix normings are established.

Key Words: law of the iterated logarithm, martingales, matrix normings.

¹ E-mail: vkoval@com.zt.ua

Вступ. В роботі R^d позначає евклідов простір вектор-стовпців з нормою $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$, де "T" – знак транспонування. Для довільної матриці A під її нормою $\|A\|$ розуміємо евклідову норму. Використовуємо такі позначення: $\chi(t) = (\ln \ln t)^{1/2}$ при $t \geq e^e$ і $\chi(t) = 1$ при $t < e^e$; $|A|$ і $\text{tr} A$ – відповідно визначник і слід квадратної матриці A; E – знак математичного сподівання; м.н. – майже напевно.

Нехай $(S_n, n \geq 1)$ – мартингал в R^d і $(A_n, n \geq 1)$ – послідовність матриць розміру $m \times d$. В роботі [1] були знайдені загальні достатні умови, при яких має місце співвідношення $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n S_n\| < \infty$ м.н. В [2] встановлені достатні умови експоненціального типу виконання даного співвідношення для мартингалів, що являють собою зважені суми субгауссівських мартингал-різниць з рівномірно обмеженими стандартами. Дане повідомлення присвячене узагальненню результатів роботи [2] на зважені суми мартингал-різниць, норми яких мають рівномірно обмежені умовні моменти порядку $p > 2$. Зокрема, буде доведено обмежений закон повторного логарифма для таких сум.

Основна частина. Нехай $(Z_i, i \geq 1)$ – мартингал-різниця в R^d відносно фільтрації $(\mathcal{F}_i, i \geq 0)$ і $(D_i, i \geq 1)$ – послідовність матриць розміру $d \times d$. Покладемо

$$S_n = \sum_{i=1}^n D_i Z_i, \quad n \geq 1.$$

Через $\mathfrak{N}$ позначимо множину всіх монотонно зростаючих (не обов'язково строго) до нескінченності послідовностей натуральних чисел.

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови:
при деякому $p > 2$

$$E(\|Z_i\|^p | \mathcal{F}_{i-1}) \leq K \text{ м.н., } i \geq 1, \quad (1)$$

де K – не випадкова стала;

$$\sup_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty; \quad (2)$$

для будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) \in \mathfrak{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \|A_{n_{j+1}} D_i\|^p < \infty; \quad (3)$$

для будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) \in \mathfrak{N}$ знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp \left[-\varepsilon / \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \|A_{n_{j+1}} D_i\|^2 \right] < \infty. \quad (4)$$

Тоді

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n S_n\| < \infty \text{ м.н.} \quad (5)$$

Доведення. Нехай T_n – будь-який з рядків матриці A_n ($n \geq 1$). Для доведення (5) достатньо показати, що за умов (1)–(4)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |T_n S_n| < \infty \text{ м.н.} \quad (6)$$

З умови (2) випливає, що $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$. Тому в силу теореми 4.1 [1] для доведення (6) потрібно показати, що для будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) \in \mathfrak{N}$ знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P \left(\left| \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} T_{n_{j+1}} D_i Z_i \right| > t \right) dt < \infty. \quad (7)$$

Розглянемо мартингал-різницю $(\xi_i = T_{n_{j+1}} D_i Z_i, i = n_j + 1, \dots, n_{j+1})$ відносно фільтрації $(\mathcal{F}_i, i = n_j, \dots, n_{j+1})$. Вона задовольняє умови:

$$(a) \ E(\xi_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \|T_{n_{j+1}} D_i\|^2 E(\|Z_i\|^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \|A_{n_{j+1}} D_i\|^2 K^{2/p} \text{ м.н.};$$

$$(б) \ E(\|\xi_i\|^p | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \|A_{n_{j+1}} D_i\|^p K \text{ м.н.}$$

Тому в силу наслідку 3' [3] дістанемо

$$P \left(\left| \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} T_{n_{j+1}} D_i Z_i \right| > t \right) \leq \frac{c_1 K}{t^p} \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \|A_{n_{j+1}} D_i\|^p + 2 \exp \left[-c_2 t^2 K^{-2/p} / \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \|A_{n_{j+1}} D_i\|^2 \right],$$

де сталі c_1 та c_2 залежать лише від p . Використовуючи далі нерівність $\int_0^{\infty} e^{-bt^2} dt \leq b^{-1/2} e^{-a^2 b}$ ($a, b > 0$) та враховуючи умову (4), будемо мати

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} T_{n_{j+1}} D_i Z_i\right| > t\right) dt \leq \frac{c_1 K \varepsilon^{1-p}}{p-1} \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \|A_{n_{j+1}} D_i\|^p + \\ + 2K^{1/p} c_2^{-1/2} \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \|A_{n_{j+1}} D_i\|^2 \right)^{1/2} \times \exp \left[-c_2 \varepsilon^2 K^{-2/p} / \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \|A_{n_{j+1}} D_i\|^2 \right].$$

Звідси та з умов (3), (4) випливає виконання співвідношення (7). Теорема 1 доведена.

Розглянемо обмежений закон повторного логарифма.

Теорема 2. Нехай виконується умова (1) і знайдуться дві послідовності додатних чисел $(\varphi_n, n \geq 1)$ та $(f_n, n \geq 1)$ такі, що $(f_n, n \geq 1)$ монотонно зростає до нескінченності і виконуються умови:

при всіх $n > k \geq k_0 \geq 1$

$$\sum_{i=k+1}^n \|A_n D_i\|^2 \leq \varphi_n \left(1 - \frac{f_k}{f_n}\right); \quad (8)$$

$$\sup_{n \geq 1} (\varphi_n^{1/2} \chi(f_n))^{-1} \|A_n\| < \infty; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \geq i} [(\varphi_n^{1/2} \chi(f_n))^{-p} \|A_n D_i\|^p] < \infty. \quad (10)$$

Тоді

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n^{1/2} \chi(f_n))^{-1} \|A_n S_n\| < \infty \text{ м.н.}$$

Доведення теореми 2 спирається на теорему 1 і проводиться аналогічно до доведення теореми 1 [4].

Покладемо

$$B_n = \sum_{i=1}^n D_i D_i^T, n \geq 1.$$

Теорема 3. Припустимо, що виконується умова (1) і $|B_{n_0}| \neq 0$ при деякому $n_0 \geq 1$. Якщо виконуються умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n\| = \infty, \quad (11)$$

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \chi^{-p}(\|B_i\|) \|B_i^{-1/2} D_i\|^p < \infty, \quad (12)$$

то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \chi^{-1}(\|B_n\|) \|B_n^{-1/2} S_n\| < \infty \text{ м.н.}$$

Доведення. Доведення спирається на теорему 2 при $A_n = B_n^{-1/2}, n \geq n_0$. Нехай I – одинична матриця розміру $d \times d$. Розглянемо умову (8):

$$\sum_{i=k+1}^n \|B_n^{-1/2} D_i\|^2 = \text{tr}(I - B_n^{-1/2} B_k B_n^{-1/2}) = d - \text{tr}(B_n^{-1/2} B_k B_n^{-1/2}).$$

Позначимо через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ – власні значення матриці $B_n^{-1/2} B_k B_n^{-1/2}$.

Очевидно, що вони додатні. Крім того з тотожності

$$B_n^{-1/2} B_k B_n^{-1/2} = B_n^{-1/2} (B_k - B_n) B_n^{-1/2} + I$$

випливає, що $\lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, d$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^n \|B_n^{-1/2} D_i\|^2 &= d - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d) \leq d - d(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_d) = \\ &= d(1 - |B_n^{-1/2} B_k B_n^{-1/2}|) = d(1 - |B_k|/|B_n|). \end{aligned}$$

Таким чином умова (8) виконана при $\varphi_n = d, f_n = |B_n|, n \geq n_0$, так як послідовність $(|B_n|, n \geq 1)$ монотонно зростає до нескінченності в силу умови (11).

Умова (9) виконується в силу того, що $|B_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ та послідовність $(\|B_n^{-1/2}\|, n \geq n_0)$ обмежена.

Розглянемо умову (10). Так як при будь-яких $m \leq n$ матриця $B_n - B_m$ є невід'ємно визначеною, то звідси випливає, що $\|B_n^{-1/2} D\| \leq \|B_m^{-1/2} D\|$ для будь-якої матриці D розміру $d \times d$. Тому, враховуючи монотонне зростання послідовності $(\chi(|B_n|), n \geq 1)$, дістанемо

$$\sup_{n \geq i} [\chi^{-p}(|B_n|) \|B_n^{-1/2} D_i\|^p] \leq \chi^{-p}(|B_i|) \|B_i^{-1/2} D_i\|^p. \quad (13)$$

Так як $\chi(|B_i|) \sim \chi(\|B_i\|)$ при $i \rightarrow \infty$, то з (12), (13) випливає виконання умови (10). Теорема 3 доведена.

Висновки. Встановлений теоремою 2 результат дає можливість звести доведення обмеженого закону повторного логарифма для матрично-нормованих мартингалів до перевірки виконання ряду технічних умов, основною серед яких (з точки зору специфіки матричних нормувань) є умова (8).

Література

1. Коваль В.О. Граничні теореми для операторно-нормованих випадкових векторів. I // Теорія ймовірн. матем. статист. – 1999. – № 61. – С. 47–58.
2. Коваль В.О. Граничні теореми для операторно-нормованих випадкових векторів. II // Теорія ймовірн. матем. статист. – 2000. – № 62. – С. 28–38.
3. Фук Д.Х. Некоторые вероятностные неравенства для мартингалов // Сибирский матем. журн. – 1973. – Т. 14, № 1. – С. 185–193.
4. Коваль В.О. Обмежений закон повторного логарифма для матрично-нормованих сум незалежних випадкових векторів // Теорія ймовірн. матем. статист. – 2005. – № 72.

Надійшла до редакції 03.11.2004

УДК 512.544

Федір М. Лиман
Тетяна Д. Лукашова

Fedyr M. Lyman
Tetyana D. Lukashova

Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп

On the infinite 2-groups with non-dedekind norm of the abelian non-cyclic subgroups

Вивчаються нескінченні 2-групи, в яких норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Одержано повний опис таких груп та встановлено зв'язки між властивостями розглядуваних груп та їх абелевих нециклічних норм.

The infinite 2-groups with non-dedekind norm of the abelian non-cyclic subgroups are studied. Under this condition, we obtain the description and determine the connections between properties of such groups and its norms of the abelian non-cyclic subgroups.

Ключові слова: група, недедекіндова група, норма абелевих нециклічних підгруп.

Key words: group, non-Dedekind group, norm of the abelian non-cyclic subgroups.

В теорії груп важливе місце займають результати, пов'язані з вивченням груп, в яких усі підгрупи деякої непорожньої системи підгруп Σ є інваріантними. Кожну групу з такою властивістю можна визначити як таку, що збігається з перетином нормалізаторів усіх підгруп з Σ . У загальному випадку цей перетин є підгрупою групи. Якщо при цьому система Σ містить усі підгрупи групи G , що мають певну теоретико-групову властивість, то цей перетин прийнято називати Σ -нормою групи G . Будь-яка Σ -норма групи G є її характеристичною підгрупою та містить центр групи.

При розгляді Σ -норм виникає ряд проблем, пов'язаних з вивченням властивостей груп у залежності від вибору системи Σ та обмежень, що накладаються на ці норми. Однією з них є проблема характеристизації груп за властивостями їх Σ -норм. У переважній більшості досліджень ця задача розв'язувалась для випадку, коли Σ -норма збігалася з групою (див., наприклад [1-4]).

Ситуацію, коли Σ -норма є власною підгрупою групи, вперше став вивчати Р. Бер [5] для системи Σ , що складалася з усіх підгруп даної групи. Відповідну Σ -норму він назвав нормою групи G та позначив $N(G)$. Подальші кроки у вивченні норми групи та її узагальнень були зроблені у роботах [6-9].

Авторами продовжуються дослідження властивостей груп за заданими властивостями їх Σ -норм, розпочаті у [10-12], а у якості Σ вибирається система всіх абелевих нециклічних підгруп групи (при умові, що $\Sigma \neq \emptyset$). Згідно з [12] відповідна Σ -норма буде називатися нормою абелевих нециклічних підгруп групи G та позначатиметься N_G^A .

Нескінченні локально скінченні p -групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою

N_G^A абелевих нециклічних підгруп вивчалися в роботі [13]. Встановлено, що кожна така група G є скінченним розширенням центральної квазіциклічної p -групи та збігається з нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Таким чином, у класі нескінченних локально скінченних p -груп ($p \neq 2$) з умови неабелевості норми N_G^A випливає інваріантність усіх абелевих нециклічних підгруп у групі.

У даній роботі вивчаються нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Якщо норма N_G^A нескінченної 2-групи G недедекіндова, то N_G^A завжди містить абелеві нециклічні підгрупи і всі такі підгрупи інваріантні в ній. Нагадаємо, що неабелеві 2-групи, в яких інваріантні всі абелеві нециклічні підгрупи (за умови, що система таких підгруп непорожня), називають $\overline{NA}_2$ -групами. Повний опис груп з цією властивістю можна знайти, наприклад, у [2].

Лема 1. Якщо Z – центральна нециклічна підгрупа групи G , то у фактор-групі $G/Z = \overline{G}$ має місце включення $\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G})$, де $N(\overline{G})$ – норма групи $\overline{G}$.

Доведення. Для доведення леми достатньо показати, що група $\overline{N_G^A}$ нормалізує будь-яку циклічну підгрупу групи $\overline{G} = G/Z$.

Нехай $\bar{x} \in \overline{G}$. Тоді повний прообраз підгрупи $\langle \bar{x} \rangle$ у G є абелева нециклічна підгрупа $\langle x, Z \rangle$ і тому $N_G^A \subseteq N_G(\langle x, Z \rangle)$. Повертаючись до фактор-групи, одержимо $\overline{N_G^A} \subseteq \overline{N_G(\langle x, Z \rangle)} \subseteq N_{\overline{G}}(\langle \bar{x} \rangle)$. Отже, $\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G})$, що й треба було довести.

Наступний приклад підтверджує, що рівність $\overline{N_G^A} = N(\overline{G})$, досягається не завжди.

Приклад 1. $G = (C_1 \lambda \langle b \rangle) \rtimes C_2$, де C_1, C_2 – квазіциклічні 2-групи, $|b|=2$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для кожного елемента $c \in C_1$.

У цій групі $N_G(\langle b, C_2 \rangle) = \langle c_1 \rangle \times \langle b \rangle \times C_2$, $c_1 \in C_1, |c_1|=2$,

$N_G(\langle cb, a_1 \rangle) = \langle c_1 \rangle \times \langle cb \rangle \times C_2$, $c \in C_1, |c| > 2, a_1 \in C_2, |a_1|=2$,

$N_G^A \subseteq N_G(\langle b, C_2 \rangle) \cap N_G(\langle cb, a_1 \rangle) = \langle c_1 \rangle \times C_2 = Z(G), N_G^A = Z(G)$.

У фактор-групі $\overline{G} = G/\langle c_1, a_1 \rangle$, норма $N(\overline{G}) = Z(\overline{G}) = \langle \bar{c}_2 \rangle \times \overline{C}_2$, де $c_2 \in C_1, |c_2|=4$. Оскільки $\overline{N_G^A} = \overline{C}_2$, то $N(\overline{G}) \neq \overline{N_G^A}$.

Лема 2. Будь-яка нескінченна 2-група G , що має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп є скінченним розширенням квазіциклічної 2-групи P . Якщо при цьому норма N_G^A скінченна, то $N_G^A \subset C_G(P)$.

Доведення. Нехай G досліджувана група і N_G^A - її норма абелевих нециклічних підгруп. Припустимо, що G не задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Тоді вона містить нескінченну елементарну абелеву підгрупу B . Покладемо $B_1 = B \cap N_G^A$ та розглянемо групу $G_1 = B N_G^A$. Якщо N_G^A нескінченна, то вона має нескінченну абелеву підгрупу (див. [14]) і тому є негамільтоновою $\overline{NA_2}$ -групою. З опису $\overline{NA_2}$ -груп [2] випливає, що група N_G^A локально скінченна і задовольняє умову мінімальності для підгруп. Тому $|B_1| < \infty$, $B = B_1 \times B_2$, $B_2 \cap N_G^A = E$ і $|B_2| = \infty$. Оскільки підгрупа B_2 абелева, то $B_2 \triangleleft G_1$ і $G_1 = N_G^A \times B_2$. Значить, $G_1 = N_G^A$ і G_1 є негамільтоновою $\overline{NA_2}$ -групою, що неможливо. Отже, група G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Тоді за наслідком 1 теореми 2 роботи [15] група G є 2-групою Чернікова та є скінченим розширенням повної абелевої підгрупи P .

Припустимо, що P містить прямий добуток двох квазіциклічних 2-груп. Оскільки за [2] $\overline{NA_2}$ -група N_G^A або скінченна, або є скінченим розширенням квазіциклічної групи, то $[P : P \cap N_G^A] = \infty$ і тому фактор-група $PN_G^A / N_G^A \cong P / P \cap N_G^A$ - повна абелева. За теоремою 1.16 роботи [1] група $G_1 = P N_G^A$ містить таку повну центральну підгрупу P_1 , що $G_1 = P_1 N_G^A$. Але тоді $G_1 = N_G^A$ і $G_1 \in \overline{NA_2}$ -групою, що суперечить їх опису [2, теорема 2.3]. Отже, P - квазіциклічна 2-група і перше твердження леми доведено.

Нехай тепер $|N_G^A| < \infty$. Тоді $[G : C_G(N_G^A)] < \infty$, звідки $P \subset C_G(N_G^A)$ і $N_G^A \subset C_G(P)$. Лему доведено.

Безпосереднім наслідком леми 2 є наступне твердження.

Наслідок 1. Норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп нескінченної 2-групи G дедекіндова, якщо G не задовольняє умову мінімальності для підгруп, або не є локально скінченною групою, або містить прямий добуток двох квазіциклічних 2-груп.

Теорема 1. Будь-яка нескінченна 2-група G , що має нескінченну недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп є $\overline{NA_2}$ -групою і збігається з N_G^A .

Доведення. За лемою 2 група G є 2-групою Чернікова, а її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп за теоремою 2 з [2] є $\overline{NA_2}$ -групою одного з чотирьох типів:

1) $N_G^A = A \langle b \rangle$, A - квазіциклічна 2-група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = b^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;

2) $N_G^A = A\langle b \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $|b|=8$, $b^4 \in A$, $b^{-1}ab = b^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;

3) $N_G^A = A \rtimes H$, A – квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ – група кватерніонів порядку 8;

4) $N_G^A = (A \rtimes \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$, A – квазіциклічна 2-група, $|b|=|c|=2$, $[A, \langle c \rangle]=1$, $[b, c]=a_1 \in A$, $|a_1|=2$.

Розглянемо кожен з вказаних для підгрупи N_G^A випадків окремо.

1) Нехай N_G^A – група типу 1). Припустимо, що існує інволюція $x \in G \setminus N_G^A$. Тоді $\langle a_1, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$, де $a_1 \in A$, $|a_1|=2$, звідки $[N_G^A, \langle x \rangle] \subseteq \langle a_1, x \rangle \cap N_G^A = \langle a_1 \rangle$ і $[A, \langle x \rangle]=1$. Якщо при цьому $[x, b]=1$, то $\langle x, b \rangle \triangleleft G_1$ і $\langle b \rangle \triangleleft N_G^A$, що неможливо за умовою. Отже, $[x, b] \neq 1$ і $\langle b, x \rangle$ – група дієдра порядку 8, причому $|bx|=2$. Оскільки $\langle bx, a_1 \rangle \triangleleft G_1$, то $[A, \langle bx \rangle]=1$ і $[A, \langle b \rangle]=1$, що суперечить умові.

Таким чином, група G має єдину інволюцію і за лемою 1.1, роботи [2] є нескінченною кватерніонною 2-групою. За теоремою 2.3 з [2] $G = N_G^A$.

2) Нехай N_G^A – група типу 2). Оскільки $A \not\subseteq Z(G)$, то $[G : C_G(A)]=2$. Враховуючи, що $[A, \langle b \rangle] \neq 1$, для елемента $b \in N_G^A$ без порушень загальності міркувань можна вважати, що $G = C_G(A) \langle b \rangle$, де $b^2 \in C_G(A)$.

Покажемо, що норма N_G^A містить всі інволюції централізатора $C_G(A)$. Нехай існує інволюція $x \in C_G(A) \setminus N_G^A$. Тоді $\langle b^4, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ і $[G_1 : C_{G_1}(\langle b^4, x \rangle)] \leq 2$. Тому $[A, \langle x \rangle] = [b^2, x] = 1$ і для елемента $a_2 \in A$, $|a_2|=4$ підгрупа $\langle b^2 a_2, x \rangle$ абелева нециклічна, а значить, інваріантна у G_1 . Звідси

$$\langle b^2 a_2 \rangle = \langle b^2 a_2, x \rangle \cap N_G^A \triangleleft G_1,$$

що суперечить визначальним співвідношенням норми N_G^A .

Позначимо тепер y – елемент найменшого порядку групи $C_G(A)$, що не належить N_G^A . Тоді $y^2 \in N_G^A \cap C_G(A)$ і $y^2 = a_i (b^2 a_2)^j$, де $a_i \in A$, $|a_i|=2^i \geq 1$, $j \in \{0, 1\}$. Враховуючи, що $y \in C_G(A)$, для елемента $y_1 = a_{i+1}^{-1} y$, де $a_{i+1} \in A$, $a_{i+1}^2 = a_i$, будемо мати $y_1^2 = (a_{i+1}^{-1} y)^2 = a_{i+1}^{-2} y^2 = a_i^{-1} a_i (b^2 a_2)^j = (b^2 a_2)^j$. Оскільки за доведеним вище $|y_1| > 2$, то $j \neq 0$, $y_1^2 = b^2 a_2$ і $|y_1| = |a_{i+1}^{-1} y| = 4$. Проте, у такому випадку підгрупа $\langle b^4, y_1 \rangle$ інваріантна в $G_2 = \langle y_1 \rangle N_G^A$ як абелева нециклічна. Звідси $\langle y_1^2 \rangle \triangleleft G_2 \cap N_G^A$, що неможливо. Отже,

$$C_G(A) = C_G(A) \cap N_G^A = A \rtimes \langle b^2 a_2 \rangle \text{ і } G = N_G^A.$$

3) Нехай N_G^A - група типу 3). В цьому випадку всі інволюції норми N_G^A належать центру $Z(G)$. Тому для будь-якого елемента $g \in G$ абелева нециклічна підгрупа $\langle g, a_1, H^2 \rangle$, де $a_1 \in A$, $|a_1|=2$, інваріантна у групі $G_1 = \langle g \rangle N_G^A$. Звідси $A \subset C_G(\langle g, a_1, H^2 \rangle)$ і $A \subset Z(G)$.

Покажемо, що G має рівно три інволюції. Припустимо, що існує елемент $y \in G$ порядку 2, що не міститься в N_G^A . Тоді підгрупи $\langle y, a_1 \rangle$ та $\langle y, H^2 \rangle$ інваріантні в $G_2 = \langle y \rangle N_G^A$ і тому $\langle y, a_1 \rangle \cap \langle y, H^2 \rangle = \langle y \rangle \triangleleft G_2$, звідки $y \in Z(G)$. Але при цьому в групі $G_2 = \langle y \rangle \times N_G^A$ інваріантні всі циклічні підгрупи, що неможливо за умовою. Отже, група G має три інволюції і центральну квазіциклічну підгрупу A . З опису таких груп (див. [2], теорема 2.3) випливає, що $G = A \rtimes Q$, де Q - кватерніонна 2-група.

Розглянемо фактор-групу $\bar{G} = G/A \cong \bar{Q}$. У ній $\bar{N}_G^A \cong \bar{H} \leq \bar{Q}$ і за лемою 1 $\bar{H} \leq N(\bar{G})$. Але норма $N(\bar{G})$ не містить елементів порядку 8 (див. [5]). Тому $\bar{H} = \bar{Q}$ і $G = N_G^A$.

4) Нехай N_G^A - група типу 4). Покажемо, що і в цьому випадку $G = N_G^A$. Припустимо, що група G містить інволюцію x , що не належить N_G^A . З умов $N_G^A \triangleleft G$, $A \triangleleft G$ випливає, що $a_1 \in Z(G)$, де $a_1 \in A$, $|a_1|=2$. Тоді $\langle a_1, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$. Оскільки $|G_1 : C_{G_1}(\langle x, a_1 \rangle)| \leq 2$, то в $N_G^A \setminus \langle a_1 \rangle$ знайдеться інволюція z , переставна з x . Тоді $\langle x, z \rangle \triangleleft G_1$, $\langle x, a_1 \rangle \cap \langle z, x \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1$ і $x \in Z(G_1)$. Тому $\langle x, b \rangle \triangleleft G_1$ і $\langle x, b \rangle \cap N_G^A = \langle b \rangle \triangleleft G_1$, що неможливо за умовою. Отже, N_G^A містить всі інволюції групи G .

Нехай тепер y - елемент найменшого порядку групи G , що не належить N_G^A . Тоді $y^2 \in N_G^A$ і $|y| > 2$. Покладемо $y^2 = a_i b^m c^n$, де $a_i \in A$, $|a_i|=2^i$, $i \geq 0, m, n \in \{0, 1\}$ та візьмемо такий елемент $a_{i+1} \in A$, що $a_{i+1}^2 = a_i$.

Далі розглянемо два випадки.

4.1. Нехай $A \subseteq Z(G)$. При цьому $(y a_{i+1}^{-1})^2 = y^2 a_{i+1}^{-2} = b^m c^n \neq 1$ і якщо $m=0$ або $n=0$, то $\langle y a_{i+1}^{-1}, a_1 \rangle$ - абелева нециклічна підгрупа, інваріантна у $G_1 = \langle y \rangle N_G^A$. Звідси $\langle (y a_{i+1}^{-1})^2 \rangle = \langle b^m c^n \rangle \triangleleft G_1$, що неможливо.

Якщо ж $m=n=1$, то замість елемента $y a_{i+1}^{-1}$ візьмемо елемент $y a_{i+1}^{-1} a_3$, де $|a_3|=2^3$, для якого $(y a_{i+1}^{-1} a_3)^2 = a_3^2 b c$, $|a_3^2 b c|=2$. Розглядаючи інваріантну в G_1 абелеву нециклічну підгрупу $\langle a_1, y a_{i+1}^{-1} a_3 \rangle$, приходимо до висновку, що $\langle (y a_{i+1}^{-1} a_3)^2 \rangle \triangleleft G_1$, що неможливо в групі N_G^A .

4.2. Нехай $A \not\subseteq Z(G)$. Тоді з доведеного у попередньому абзаці випливає, що $C_G(A) = N_G^A$ і $G = N_G^A \langle y \rangle$, причому $y^2 \in N_G^A$, $y^{-1} a y = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in A$. Оскільки $|y| > 2$ і $\langle y \rangle \cap A \neq E$, то $|y|=4$ і $y^2 = a_1 \in A$.

Розглянемо фактор-групу $\bar{G} = G/A \cong \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{y} \rangle$. Припустимо, що $\bar{G}$ - абелева група, тобто $\bar{G} = \langle \bar{b} \rangle \times \langle \bar{c} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$. Тоді $G' \subset A$ і з умов $[y, b^2] = [y, c^2] = 1$ випливає, що $\langle y, \langle b, c \rangle \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle$. Тому в $\langle b, c, y \rangle \setminus \langle y, a_1 \rangle$ знайдеться елемент g , переставний з y . У такому випадку підгрупа $\langle y, g \rangle$ інваріантна в G як абелева нециклічна і $[A, \langle y \rangle] \subset A \cap \langle y, g \rangle \neq A$, що суперечить вибору елемента y .

Отже, $\bar{G}$ - неабелева і є групою діедра порядку 8. Далі без порушень загальності міркувань будемо вважати, що $\bar{b} \in Z(\bar{G})$ та позначимо $\bar{y}$ - нецентральну інволюцію групи $\bar{G}$, що не належить $\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$. Тоді $\bar{G}' = \langle \bar{b} \rangle$ і $[\bar{y}, \bar{c}] = \bar{b}$. Переходячи до прообразів та враховуючи, що $y \notin C_G(A)$, $|y| > 2$, одержимо $y^2 = a_1$, $[y, c] = ba_1^n$, де $a_1 \in A$, $|a_1| = 2^i \geq 1$, звідки $[y, b] = a_1^s$, $a_1 \in A$.

Оскільки $[y, b^2] = 1$ і $[y, c^2] = a_1^{2n+2^{i-1}} = 1$, то $[y, b] = a_1^s$, де $s \in \{0, 1\}$ і $2n+2^{i-1} \equiv 0 \pmod{2^i}$. Звідси $n \equiv 0 \pmod{2^{i-2}}$, тобто $[y, c] = ba_1^k$, де $|a_1| = 4$, $a_1 \in A$. З іншого боку $[y^2, c] = 1$, тому $[y, b] = 1$ і $\langle y, b \rangle$ - абелева нециклічна підгрупа. Тому $\langle y, b \rangle \triangleleft G$, $[A, \langle y \rangle] \subset A \cap \langle y, b \rangle \neq A$, що неможливо. Отже, $G = N_G^A$ і у цьому випадку. Теорему доведено.

Наслідок 2. Норма абелевих нециклічних підгруп нескінченної 2-групи G , дедекіндова, якщо $1 < [G : N_G^A] < \infty$.

Наслідок 3. Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп нескінченної 2-групи G є власною недедекіндовою підгрупою групи G , то $|N_G^A| < \infty$.

Наслідок 4. Якщо нескінченна 2-група G містить неінваріантну абелеву нециклічну підгрупу, то норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп цієї групи скінченна або дедекіндова.

Наступна теорема описує будову нескінченних 2-груп з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп.

Теорема 2. Нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп вичерпуються групами наступних типів:

1) $G = (A \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$, де A - квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$; $N_G^A = G$;

2) $G = A \langle b \rangle$, де A - квазіциклічна 2-група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$; $N_G^A = G$;

3) $G = A \langle b \rangle$, де A - квазіциклічна 2-група, $|b| = 8$, $b^4 \in A$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$; $N_G^A = G$;

4) $G = A \times H$, де A - квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|h_1| = 4$; $N_G^A = G$;

5) $G = (A \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle \lambda \langle d \rangle$, де A - квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $[b, c] = [b, d] = [c, d] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$; $N_G^A = (\langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$, $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$;

6) $G=A\langle y\rangle\rtimes H$, де A – квазіциклічна 2-група, $[A,H]=1$, $H=\langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $|y|=4$, $y^2=a_1\in A$, $y^{-1}ay=a^{-1}$ для будь-якого елемента $a\in A$; $N_G^A=\langle a_2\rangle\rtimes H$, $a_2\in A$, $|a_2|=4$,

7) $G=(A\rtimes H)\langle y\rangle$, де A – квазіциклічна 2-група, $H=\langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $|y|=4$, $y^2=a_1$, $y^{-1}ay=a^{-1}$ для будь-якого елемента $a\in A$, $[h_1,y]=a_1\in A$, $[h_2,y]=1$; $N_G^A=\langle a_2\rangle\rtimes H$, $a_2\in A$, $|a_2|=4$;

8) $G=H\lambda A\langle y\rangle$, де A – квазіциклічна 2-група, $H=\langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $|y|=4$, $y^2=a_1\in A$, $y^{-1}ay=a^{-1}$ для будь-якого елемента $a\in A$, $[A,H]=1$, $[h_1,y]=h_1^2$, $[h_2,y]=1$; $N_G^A=\langle a_2\rangle\rtimes H$, $a_2\in A$, $|a_2|=4$.

Доведення. Достатність умов теореми перевіряється безпосередньо. Тому будемо доводити лише їх необхідність.

Нехай $|N_G^A|=\infty$. Тоді за теоремою 1 $G=N_G^A$ і G -група одного з типів 1)–4) теореми 2. Отже, далі будемо вважати, що $|N_G^A|<\infty$. З умови теореми та леми 2 випливає, що G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи A , причому $N_G^A\subset C_G(A)=C$. Оскільки група C має нескінченну недедекіндову норму N_C^A абелевих нециклічних підгруп і $N_C^A\supseteq AN_G^A$, то за теоремою 1 $C=N_C^A$. Використовуючи опис нескінченних негамільтонових $\overline{NA}_2$ -груп, до яких належить група C (див. доведення теореми 1), одержимо, що C є групою одного з типів:

1) $C=(A\rtimes\langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle$, де A – квазіциклічна 2-група, $|b|=|c|=2$, $[A,\langle c\rangle]=1$, $[b,c]=a_1\in A$, $|a_1|=2$;

2) $C=A\rtimes H$, де A – квазіциклічна 2-група, $H=\langle h_1,h_2\rangle$ – група кватерніонів.

Оскільки $A\not\subset Z(G)$, то $[G:C]=2$ і $G=C\langle y\rangle$, де $y^2\in C$.

Далі розглянемо кожен з випадків окремо.

1) Нехай C – група типу 1). Розглянемо фактор-групу $G/A=\overline{G}=\langle\overline{b},\overline{c},\overline{y}\rangle$. Оскільки $\overline{y}^2\in\langle\overline{b},\overline{c}\rangle$, то $|\overline{y}|\leq 4$. Доведемо, що $\overline{G}$ – абелева група. Справді, інакше вона є групою діедра порядку 8 і завжди можна вказати інволюцію $\overline{x}$, прообраз якої не належить C . Оскільки $Z(\overline{G})\cap\langle\overline{b},\overline{c}\rangle\neq\overline{E}$, то можна вважати, що $\overline{b}\in Z(\overline{G})$ і відповідно $[\overline{c},\overline{x}]=\overline{b}$. Переходячи до прообразів, одержимо $[c,x]=ba_1$, $a_1\in A$, $|a_1|=2^l\geq 1$, $|x|\leq 4$, $x^2=a_1^l$, $l\in\{0,1\}$ та $[b,x]=a_1$, $|a_1|=2^l$. Враховуючи, що $[b,c]=a_1$, $[c^2,x]=[b^2,x]=1$ одержимо $[c,x]=ba_2^{\pm 1}$, $|a_2|=4$, $[b,x]=a_1^l$, $l\in\{0,1\}$, $x^{-1}ax=a^{-1}$ для всіх $a\in A$.

Якщо $[b,x]=1$, то $\langle b,x\rangle$ – абелева нециклічна група. Проте $c\in N_G^A$ і не міститься у її нормалізаторі, що неможливо. Отже, $[b,x]=a_1$. Якщо при цьому $|x|=2$, то $\langle x,a_1\rangle$ – абелева нециклічна підгрупа, нормалізатор якої також не містить $c\in N_G^A$. У випадку $|x|=4$, $|bx|=2$ можна взяти підгрупу $\langle bx,a_1\rangle$ і знову

$c \notin N_G(\langle bx, a_1 \rangle)$, що неможливо. Таким чином, $\bar{G} = \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{y} \rangle$ - абелева група порядку 8.

Нехай $|\bar{y}|=4$. Тоді без порушень загальності міркувань можна вважати, що $\bar{y}^2 = \bar{b}$, звідки $y^2 = a_1 b$. Враховуючи, що $G' \subseteq A$, покладемо $[c, y] = a_i$, де $a_i \in A$, $|a_i| = 2^i \geq 1$. З рівності $[c^2, y] = 1$, одержимо $[c, y] = a_i$. Проте у такому випадку $[c, y^2] = [c, ba_1] = 1$, що неможливо. Отже, $\bar{G} = \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{y} \rangle$ - абелева група експоненти 2. Переходячи до прообразів, одержимо $y^2 \in \langle a_1 \rangle$, $[b, y] = a_1$, $[c, y] = a_i$, тобто з точністю до ізоморфізму G - група типу 5 теореми 2.

2) Нехай тепер C - група типу 2). Оскільки нижній шар $\omega(C) = \langle a_1, H^2 \rangle$ підгрупи C міститься у центрі групи, то неважко довести, що C містить усі інволюції групи G . Тому $|y| > 2$. Враховуючи, що $y^2 \in C$, покладемо $y^2 = a_1 h^k$, де $a_i \in A$, $|a_i| = 2^i \geq 1$, $h \in H$, $|h| = 4$. Зі співвідношень $[y, y^2] = 1 = [y, a_1 h^k] = [y, a_1][y, h^k]^{a_1}$ та $[y, a_1] \in \langle a_1^2 \rangle$, $[y, h^{2k}] = 1$ випливає, що $[y, h^k] \in \langle a_1 \rangle$ і тому $y^2 = a_2^m h^k$.

Припустимо, що $m \not\equiv 0 \pmod{2}$ та $k \not\equiv 0 \pmod{2}$. Тоді з умови $\langle y \rangle \omega(C) \triangleleft G_1 = \langle y \rangle N_G^A$ одержимо $\langle y^2 \rangle \triangleleft G_1$, що неможливо, бо існує елемент $h' \in N_G^A \cap H$, $|h'| = 4$, що $[h, h'] \neq 1$, $h' \notin N_{G_1}(\langle y^2 \rangle)$. Окрім того, неможливим є випадок $m \not\equiv 0 \pmod{2}$ та $k \equiv 0 \pmod{2}$, оскільки $y \notin C$ і $[y, a_2] \neq 1$. Тому далі вважатимемо $m \equiv 0 \pmod{2}$ і $y^2 = a_1^l h^k$. Якщо при цьому $|y| > 4$, то для будь-якого елемента $q \in N_G^A$ має місце співвідношення $[y, q] \in \langle y^2 \rangle \omega(C)$.

Зрозуміло, що $[y, q] \notin \omega(C)$, бо інакше $[y^2, q] = 1$. Тому $[y, q] = y^{2l} z^s$, де $z \in \omega(C)$, $(l, 2) = 1$ і $(yq)^2 = yq^2 q^{-1} yq = y^2 q^2 y^{2l} z^s \in \omega(C)$. Замінюючи елемент y на $y_1 = yq$, $|y_1| = 4$ одержимо $\langle y_1 \rangle \omega(C) \triangleleft G_1 = \langle y_1 \rangle N_G^A$, звідки $[N_G^A, \langle y_1 \rangle] \subseteq \subseteq N_G^A \cap \langle y_1 \rangle \omega(C) = \omega(C)$, всупереч доведеному вище.

Отже, можна вважати, що $|y| = 4$, $y^2 = a_1^l h^{2l}$. Тоді, $[N_G^A, \langle y \rangle] \subseteq \omega(C)$, а значить $[\omega_2(C), \langle y \rangle] \subseteq \omega(C)$, де $\omega_2(C)$ - підгрупа централізатора C , породжена елементами порядку не вище 4 з C . Оскільки для будь-якого елемента $z \in G$ порядку 4 $[\omega_2(C), \langle z \rangle] \subseteq \omega(C)$ та кожна абелева не локально циклічна підгрупа містить $\omega(C)$, робимо висновок, що $\omega_2(C) \subseteq N_G^A$. Більш того, $\omega_2(C) = N_G^A$, бо $a_i \notin N_G(\langle y \rangle \omega(C))$ і $y \notin N_G(\langle a_1 y, h \rangle)$ де $|a_i| > 4$, $h \in H$.

Оскільки $[\omega_2(C), \langle y \rangle] \subseteq \omega(C)$, то $G_1 = \omega_2(C) \langle y \rangle$ - $\overline{NA}_2$ -група і за теоремою 2.3 роботи [2] є прямим або напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Враховуючи, що $G = AG_2$ і завжди можна вказати елемент $d \notin C$, $|d| = 4$, $d^2 = a_1$ такий, що $A \langle d \rangle$ - нескінченна кватерніонна 2-група, робимо висновок, що $G = Q_1 \lambda Q_2$, де одна з груп Q_1 чи Q_2 є групою кватерніонів порядку 8, а інша - нескінченною кватерніонною 2-групою. Отже, G - група одного з типів 6)-8) теореми 2. Теорему доведено.

Наслідок 5. Якщо нескінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A , яка містить елемент порядку 8, то в G інваріантні всі абелеві нециклічні підгрупи.

Наслідок 6. Якщо нескінченна 2-група G містить неінваріантну абелеву нециклічну підгрупу, то її норма N_G^A дедекіндова або недедекіндова експоненти 4 і порядку 2^m , де $m \in \{3, 4\}$.

Література

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Лиман Ф.М. Групи з обмеженнями на нормалізатори різних систем підгруп// Деп. В ДНТБ України 24.11.97, №577 – Ук97. – 293 с.
3. Ромалис Г.М., Сесекин Ф.М. О метатамилтоновых группах//Матем.зап. Уральского ун-та.– 1966.– 5, №3.– С.101-106.
4. Нагребецкий В.Т. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна// Матем.зап.Уральского ун-та.– 1967.– 5, №1.– С.80-88.
5. Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe//Comp. Math. – 1934. – 1. – S. 254-283.
6. Wielandt H. Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen//Mat. Z. – 1958. – 69, №5. – S. 463-465.
7. Karpe W. Die A-Norm einer Gruppe//Ill. J. Math. – 1961. – 5, №2. – S. 187–197.
8. Karpe W. E-Normen endlicher Gruppen//Arch.Math.–1968.–19,№3.–S.256-264.
9. Лиман Ф.Н. О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс//Укр. мат. журн. – 1997.- 49, №5. – С. 678 – 684.
10. Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні групи з заданими властивостями норми нескінченних підгруп//Укр.мат.журн.–2001.–53,№5.–С.625-630.
11. Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про норму нескінченних абелевих підгруп неперіодичних груп//Матеріали III Міжнар. алгебр. конф. в Україні, Суми, 2-8 липня 2001 р.–Суми: СумДПУ ім.А.С.Макаренка.-2001.– С.205-207.
12. Лукашова Т.Д. Локально скінченні p -групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою нециклічних підгруп//Вісник Київського університету, серія фіз-мат. науки. –2001.- №1. – С. 43-53.
13. Лукашова Т.Д. Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних p -груп //Вісник Київського університету, серія фіз-мат. науки. –2004.- № 3. – С. 35-39.
14. Held D. On abelian subgroups of an infinite 2-groups//Acta scient.Math. – 1966.- 27, №1-2. – P.97-98.
15. Шунков В.П. О одном классе p -групп// Алгебра и логика. – 1970. – 9, №4. – С. 484 – 496.

Надійшла до редакції 02.02.2005

УДК 519.49

Людмила З. Мащенко*

О кусочно нетеровых кольцах.
Серія: фізико-математичні науки

Ми доводимо, що первинний радикал кусково нетерова напівдосконалого та напівдистрибутивного нетерова кільця нільпотентен і, що напівпервинне кільце з такими властивостями є нетеровим.

Ключові слова: напівдосконале кільце, первинний радикал, напівдистрибутивне кільце.

Ludmila Z. Mashchenko*

On piece-wise Noetherian rings.
Series: Physics & Mathematics

We prove that a prime radical of a piecewise Noetherian semiperfect and semidistributive ring is nilpotent and that a semiprime ring with such properties is Noetherian

Key Words: semiperfect ring, prime radical, semidistributive ring

1. Введение.

Понятие кусочно нетерова кольца было введено В.В.Кириченко в [1]. Напомним основные определения и свойства таких колец.

Определение [1]. Кольцо A называется кусочно нетеровым справа (слева), если кольцо эндоморфизмов произвольного неразложимого конечнопорожденного проективного правого (левого) A -модуля нетерова справа (слева). Кусочно нетерова справа и слева кольцо называется кусочно нетеровым.

Пример. Пусть Q - поле рациональных чисел, p - простое число, Z_p - кольцо p - целых чисел, т.е.,

$$Z_p = \left\{ \frac{m}{n} \in Q \mid (n, p) = 1 \right\}$$

Очевидно, кольцо A , состоящее из (2×2) - матриц вида:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \gamma \in Z_p, \beta \in Q \right\}$$

не является нетеровым справа и нетеровым слева. В то же время кольцо A является кусочно нетеровым.

2. Кусочно нетеровы кольца.

Предложение 2.1. Нетерова справа кольцо A кусочно нетерова справа.

Доказательство. Предположим, что P неразложимый конечнопорожденный проективный A – модуль. Очевидно, существует прямое разложение $A^n = P \oplus P_1$ (n – натуральное число). Тогда

$$M_n(A) = \text{End}_A A^n = \begin{pmatrix} \text{End}_A P & X \\ Y & \text{End}_A P_1 \end{pmatrix},$$

где $X = \text{Hom}_A(P, P_1)$ и $Y = \text{Hom}_A(P_1, P)$.

Отметим, что если I – правый идеал в $\text{End}_A P$ то $\tilde{I} = (I, IX)$ правый идеал в $M_n(A)$. По возрастающей цепочке идеалов в $\text{End}_A P$:

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$$

мы строим возрастающую цепочку идеалов в $M_n(A)$:

$$\tilde{I}_1 \subset \tilde{I}_2 \subset \dots \subset \tilde{I}_n \subset \dots$$

Так как кольцо $M_n(A)$ нетерово справа, то существует такое, что

$$\tilde{I}_m = \tilde{I}_{m+1} = \tilde{I}_{m+2} = \dots$$

следовательно, $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \dots$, т.е. Кольцо $\text{End}_A P$ нетерово справа.

Поэтому кольцо A кусочно нетерово справа. $\square$

Напомним, что модуль M называется дистрибутивным, если для любых его подмодулей K, L, N имеет место равенство

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$$

Очевидно, всякий подмодуль и всякий фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивны.

Кольцо A называется дистрибутивным справа, (слева) если правый модуль A_A (левый модуль ${}_A A$) дистрибутивен.

Прямая сумма дистрибутивных модулей называется полудистрибутивным модулем. Кольцо A называется полудистрибутивным справа (слева), если правый модуль A_A (левый модуль ${}_A A$) полудистрибутивен. Кольцо называется полудистрибутивным, если оно полудистрибутивно справа и слева. Очевидно, полудистрибутивные кольца являются обобщением так называемых полуцепных колец, введенных Л.А.Скорняковым [2]. В английской терминологии для таких колец используется выражение “serial rings” (см. [3], гл. 25).

Там же можно найти доказательство того, что всякое полуцепное кольцо является полусовершенным.

Теорема 2.2. (А.Туганбаев) Полусовершенное кольцо A полудистрибутивно справа (слева) тогда и только тогда, когда для любых локальных идемпотентов e и f кольца A множество eAf является цепным (uniserial) правым fAf – модулем (цепным левым eAe – модулем).

Доказательство этой теоремы можно найти в монографии [4, §14.2].

Для краткости, полусовершенное полудистрибутивное кольцо называется называем $SPSD$ – кольцом.

Предложение 2.3. Кусочно нетерово справа (слева) $SPSD$ – кольцо кусочно нетерово.

Доказательство следует из предыдущей теоремы и предложения 13.3.1 [4], которое утверждает, что локальное цепное нетерово справа кольцо является либо артиновым цепным кольцом, либо дискретно нормированным кольцом. Поэтому такое кольцо всегда нетерово с двух сторон.

Нам понадобится следующая лемма, доказанная в [1].

Лемма 2.4. Пусть I двусторонний идеал кольца A , $e^2=e \in A$, $f=1-e$. Если идеалы $I_1=eIe \subseteq eAe$ и $I_2=fIf \subseteq fAf$ нильпотентны, то идеал I - нильпотентен.

Теорема 2.5. Первичный радикал кусочно нетерова $SPSD$ - кольца нильпотентен.

Доказательство. Обозначим через $Pr(A)$ - первичный радикал $SPSD$ - кольца A . По предложению 11.2.9 [4] для каждого ненулевого идемпотента $e \in A$ первичный радикал колец eAe совпадает с $ePr(A)e$. Пусть $I=e_1+\dots+e_n$ - разложение единицы кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. Так как кольцо A кусочно нетерово, то все кольца $e_iAe_i=A_i$ являются нетеровыми цепными кольцами, а потому либо артиновы, либо являются дискретно нормированными кольцами. Обозначим через $Pr(A_i)$ первичный радикал кольца A_i ($i=1, \dots, n$). Если кольцо A_i артиново, то $Pr(A_i)=R_i$, где R_i - радикал Джекобсона кольца A_i . Занумеруем идемпотенты $e_1, \dots, e_n$ следующим образом: $e_iAe_i=O_i$ дискретно нормированные кольца ($i=1, \dots, m$) и e_jAe_j артиновы кольца для $j>m$. Тогда двустороннее пирсовское разложение первичного радикала $I=Pr(A)$ имеет следующий вид:

$$Pr(A) = \begin{pmatrix} 0 & & * & & \\ & \ddots & & & \\ * & & 0 & & \\ \hline & & & R_{m+1} & * \\ & * & & \ddots & \\ & & & * & R_{n-m} \end{pmatrix}$$

На недиагональных местах стоят компоненты $e_iPr(A)e_j$ ($i \neq j$). По лемме 2.4 идеал $Pr(A)$ нильпотентен. $\square$

3. Полупервичные кусочно нетеровы $SPSD$ кольца.

Нам понадобятся следующие утверждения, доказательства которых можно найти в [4].

Предложение 3.1. (см. [4], предложение 9.2.13) Пусть A - первичное (соотв. полупервичное) кольцо, e - ненулевой идемпотент кольца A . Тогда кольцо eAe первично (соответственно) полупервично.

Теорема 3.2. (см. [4], теорема 14.4.3) Полупервичное полусовершенное кольцо является конечным прямым произведением неразложимых колец. Неразложимое полупервичное полусовершенное кольцо является либо простым артиновым кольцом, либо таким кольцом, что все его главные кольца эндоморфизмов неартиновы.

Лемма 3.3. (см. [4], лемма 13.3.4) Правые цепные модули над кольцом $H_m(O)$ исчерпываются D^m , всеми главными $H_m(O)$ - модулями и фактормодулями этих модулей.

Лемма 3.4. Пусть B – такое кусочно нетерово полупервичное $SPSD$ кольцо, что $I = e_1 + e_2$, где $e_1 B e_1 = O_1$ и $e_2 B e_2 = O_2$ – дискретно нормированные кольца. Тогда кольцо B – нетерово.

Доказательство. Обозначим $e_1 B e_2 = X$ и $e_2 B e_1 = Y$. Очевидно, X и Y отличны от нуля одновременно. Если, например, $X \neq 0$ и $Y \neq 0$, то $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ является двусторонним нильпотентным идеалом в B . Если X и Y одновременно равны нулю, то все доказано. Пусть $X \neq 0$ и $Y = 0$. Предположим, что $\text{Ann}_{O_2} X = \{\alpha \in O_2 \mid \alpha X = 0, \forall x \in X\}$ отличен от нуля. Если $XY = 0$, то, как легко видеть, двусторонний идеал, порожденный X и Y является нильпотентным. Поэтому $YX = R_2^m \neq 0$ где R_2 радикал Джекобсона кольца O_2 . Ненулевой двусторонний идеал $\text{Ann} X$ тоже имеет вид R_2^k для некоторого k . Следовательно, $YX \cdot \text{Ann}_{O_2} X = 0 = R_2^m R_2^k = R_2^{m+k} = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\text{Ann}_{O_2} X = 0$. Точно также все остальные аннуляторы равны нулю и $XY \neq 0$, $YX \neq 0$. Если X бесконечнопорожденный правый O_2 модуль, то по лемме 3.3. $X \sqsubset D_2$ где D_2 – тело частных кольца O_2 . Так как $YX \neq 0$ то существует $y \in Y$ такой, что $yY \neq 0$. Поэтому бесконечно-порожденный O_2 модуль yX изоморфен R_2^n для некоторого n . Полученное противоречие доказывает, что $X \sqsubset O_2$. Точно также доказывается, что $X \sqsubset O_1$ как левый O_1 модуль. Кроме того, $Y \sqsubset O_1$ и $Y \sqsubset O_2$ как правый O_1 модуль и левый O_2 – модуль. По теореме 3.6.2. [4] кольцо B нетерово. $\square$

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится такое утверждение (см. [4], теорема 14.4.6.)

Теорема 3.5. Для полупервичного полусовершенного кольца A следующие условия равносильные

1. A – конечное прямое произведение первичных колец;
2. все главные кольца эндоморфизмов кольца A первичны.

Теорема. Полупервичное кусочно нетерово $SPSD$ – кольцо A нетерово.

Доказательство. По теореме 3.5. можно считать кольцо A первичным, так как по теореме 3.2. все кольца $e_i A e_i$ являются дискретно нормированными.

Доказательство теоремы будем вести индукцией по числу идемпотентов n , входящих в разложение $I \in A$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов: $I = e_1 + \dots + e_n$. Обозначим $e = e_1 + \dots + e_{n-1}$, $f = e_n$, $A_1 = eAe$, $A_2 = fAf$ и $X = eAf$, $Y = fAe$. По предложению 3.1 кольца A_1 и A_2 являются кусочно нетеровыми.

Отметим, что кольцо A_1 является кусочно нетеровым первичным кольцом. Поэтому, по предположению индукции, оно является нетеровым. Если правый fAf - модуль X является бесконечно порожденным, то существует номер k такой, что $e_k X$ является бесконечно порожденным fAf модулем. Это противоречит лемме 3.4. Поэтому X конечнопорожденный fAf - модуль. Аналогично Y является конечнопорожденным левым fAf модулем. Точно также проверяется, что X является конечнопорожденным левым eAe модулем и конечнопорожденным правым fAf модулем. По теореме 3.6.1. [4] кольцо A нетерово. Теорема доказана. $\square$

Література

1. Кириченко В.В. «О наследственных и полунаследственных полуцепных кольцах», Записки научн.сем. ЛОМИ АН СССР, т. 114, 1982, с.137-147
2. Скорняков Л.А. «Когда все модули полуцепные?» Матем. зам., т.5, 1969, с. 173-182.
3. Faith C. Algebra II, Ring Theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
4. Hazewinkel M., Gubareni N. and Kirichenko V.V., Algebras, Rings and Modules, v.1, Kluwer Academic Publishers, 2004.

Поступила в редакцию 1.02.2005

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
1000 S. EAST
CHICAGO, ILL. 60607

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
1000 S. EAST
CHICAGO, ILL. 60607

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
1000 S. EAST
CHICAGO, ILL. 60607

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
1000 S. EAST
CHICAGO, ILL. 60607

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
1000 S. EAST
CHICAGO, ILL. 60607

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

WHALEHIDE

REHRS

WINDY AIRFAIR

WHALEHIDE

УДК 539.3

Андрушко Н.Ф.

**Просторове моделювання
поширення непружних хвиль в
складеному стержні Гопкінсона.**

В осесиметричній постановці досліджено вплив геометричних і фізичних параметрів на розповсюдження непружних хвиль в складеному стержні Гопкінсона і точність вимірювання непружних властивостей матеріалу.

Ключові слова: складений стержень Гопкінсона, пружнопластичні хвилі, скінчено-елементне моделювання.

N.F. Andrushko

**Spatial simulation of
nonelastic wave propagation in
split Hopkinson bar.**

An influence of geometrical and physical parameters on nonelastic wave propagation and accuracy of the determination of nonelastic material properties is investigated for the split Hopkinson bar in axisymmetrical statement.

Key words: Hopkinson split bar, elastoplastic waves, finite-element simulation.

*E-mail: term@in.mech.kiev.au

До теперішнього часу метод складеного стержня тиску Гопкінсона широко використовується для тестування динамічних пластичних і в'язкопластичних властивостей активних і пасивних матеріалів [8, 9, 10]. При цьому принципова схема метода залишилася без змін, а підвищення точності вимірів досягається шляхом вдосконалення вимірювальної техніки, засобами динамічного навантаження і вибором раціональної геометрії стержнів тиску і зразка.

Складений стержень Гопкінсона складається із двох пружних стержнів визначеної довжини, між якими розташований зразок-“таблетка”. Торець одного із стержнів зазнає імпульсного механічного (маятникового, вибухового або деякого іншого) впливу тривалістю 100 мікросекунд і менше. Забезпечення умов пружного деформування стержнів дозволяє визначити кінематичні і силові параметри імпульсів хвиль, які падають, відбиваються та проходять, шляхом вимірів чи на вільному торці, чи у відповідних місцях на боковій поверхні стержнів тиску, і розрахувати по цих даних діаграму навантаження матеріалу зразка. Враховуючи важливість проблеми ідентифікації динамічних властивостей матеріалів були проведені численні теоретичні та експериментальні дослідження щодо точності визначення механічних характеристик матеріалів і меж застосовності гіпотез (в теоретичному плані – стержньової моделі) методу [11]. Однак, досьогодні є актуальним вивчення з позицій просторової задачі впливу тривалості імпульса, поперечних та повздовжніх розмірів стержнів тиску і зразка, а також тертя на торцевих поверхнях зразок –

стержень тиску на точність відтворення діаграм навантаження, і, відповідно, параметрів моделей динамічної непружної поведінки матеріалів.

Дослідженню цих питань методами чисельного моделювання і присвячена дана робота.

Постановка задачі.

Розглядається стержень, що складається з двох стержнів довжини l_1 та радіусу r_1 і зразка між ними з параметрами відповідно l_s та r_s (рис.1).

Матеріал стержнів – сталь марки 1Х18Н9Т, матеріал зразка – алюмінієво-магнієвий сплав АМг-6. Механічна поведінка матеріалів описується динамічним варіантом узагальненої моделі течії Боднера–Партома [6, 7].

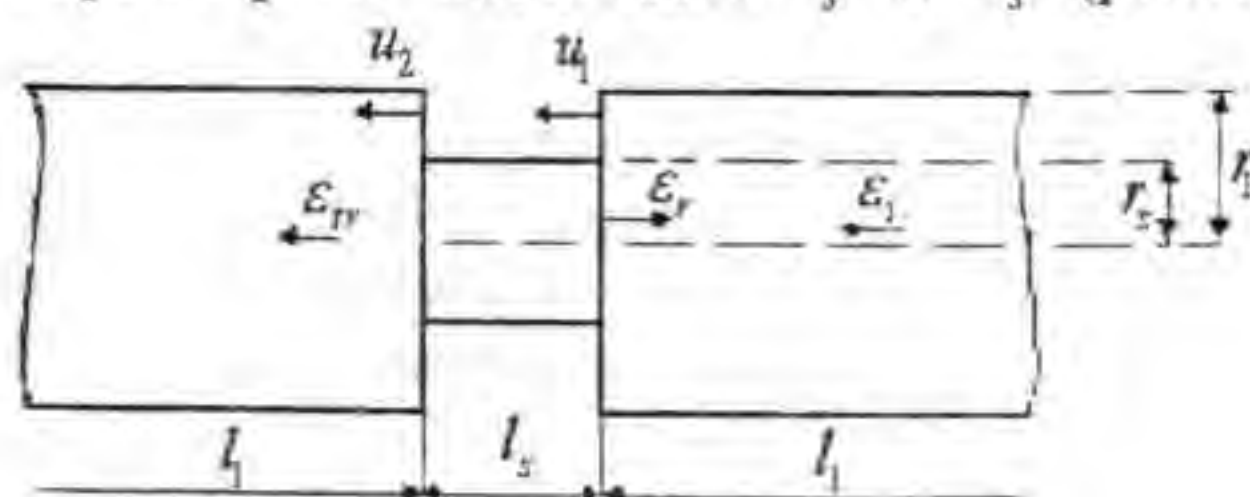


Рис.1. Складений стержень Гопкінсона.

Вводиться циліндрична система координат $0rz\theta$, в якій розглядається визначений складений стержень $0 \leq z \leq l_1$, $0 < r \leq r_1$; $l_1 < z \leq l_1 + l_s$, $0 < r \leq r_s$; $l_1 + l_s < z \leq 2l_1 + l_s$, $0 < r \leq r_1$.

Постановка задачі включає:

кінематичні рівняння Коші для деформацій

$$\epsilon_{zz} = u_{z,z}, \epsilon_{rr} = u_{r,r}, \epsilon_{\theta\theta} = u_r/r, \epsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{z,r} + u_{r,z});$$

рівняння руху

$$\sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = \rho \ddot{u}_r, \sigma_{zz,z} + \sigma_{rz,r} + \sigma_{rz}/r = \rho \ddot{u}_z;$$

визначальні рівняння:

закон течії і рівняння пластичної нестисливості

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^e, \dot{\epsilon}_{kk}^p = 0, i, j = r, z, \theta;$$

кінетичне рівняння

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left[- \left(Z^2 / 3 J_2 \right)^n \right],$$

де $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$, $D_2^p = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p$, $J_2 = \lambda^{-2} D_2^p$, $\lambda^2 = D_2^p J_2^{-1}$, $Z = K + D$,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk};$$

еволюційне рівняння для параметра K ізотропного зміцнення

$$\dot{K} = m_1 (K_1 - K) \dot{W}_p - A_1 K_1 \left((K - K_2) K_1^{-1} \right)^{r_1}, K(0) = K_0,$$

де $\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$;

еволюційне рівняння для параметра β_{ij} направленої зміцнення

$$\dot{\beta}_{ij} = m_2 (D_1 U_{ij} - \beta_{ij}) \dot{W}_p - A_2 K_1 \left((\beta_{kl} \beta_{kl})^{1/2} K_1^{-1} \right)^{r_2} V_{ij}, \beta_{ij}(0) = 0,$$

де $D = \beta_{ij} U_{ij}$, $V_{ij} = (\beta_{kl} \beta_{kl})^{-\frac{1}{2}} \beta_{ij}$, $U_{ij} = (\sigma_{kl} \sigma_{kl})^{-\frac{1}{2}} \sigma_{ij}$;

закон Гука

$$\sigma_{kk} = 3K_v \varepsilon_{kk}, \quad s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij};$$

граничні умови

$$\sigma_{rz} \Big|_{z=2l_1+l_2} = 0, \quad \sigma_z \Big|_{z=2l_1+l_2} = f(t), \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{r=r_1} = 0;$$

початкові умови

$$u_i \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_i \Big|_{t=0} = 0.$$

Використовуються такі позначення: E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; G – модуль зсуву; K_v – модуль об'ємного стиску; u_i – компоненти вектора переміщення; $\dot{u}_i = \partial u_i / \partial t$ – швидкість переміщення; ε_{ij}^p – тензор непружних деформацій; $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \partial \varepsilon_{ij}^p / \partial t$; t – час; σ_{ij} , s_{ij} – компоненти девіатора напружень; $\sigma_{rz} = \partial \sigma_{rz} / \partial z$; e_{ij} , ε_{ij} – компоненти девіатора деформацій; $f(t)$ – задана функція навантаження; $D_0, K_0, K_1, K_2, D_1, m_1, m_2, A_1, A_2, r_1, r_2$ – динамічні константи моделі; δ_{ij} – символ Кронекера.

Задача розв'язується методом скінчених елементів. Використовується методика, викладена в роботах [3, 4]. Для інтегрування по часу застосовується чисто неявна схема Ньюмарка ($\theta=1$) [12].

Шляхом обробки експериментальних динамічних діаграм навантаження [1, 2] отримані такі значення динамічних параметрів ізотермічної моделі Боднера-Партома: для алюмінієвого сплаву АМг-6:

$$D_0 = 10^8 \text{ с}^{-1}, \quad G = 3.04478 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E = 0.816 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.34,$$

$$m_1 = 0.1 \text{ МПа}^{-1}, \quad K_0 = 325.0 \text{ МПа}, \quad K_1 = 605.0 \text{ МПа}, \quad n = 4.0;$$

для сталі марки 1Х18Н9Т:

$$D_0 = 10^8 \text{ с}^{-1}, \quad G = 0.80078 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E = 2.05 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.28,$$

$$m_1 = 0.077 \text{ МПа}^{-1}, \quad K_0 = 105.8 \cdot 10^2 \text{ МПа}, \quad K_1 = 200.6 \cdot 10^2 \text{ МПа}, \quad n = 0.53.$$

Для обох матеріалів приймається $A_1 = A_2 = m_2 = 0$.

Геометрія стержня характеризується значенням параметрів довжин $l_1=0.6\text{м}$, $l_2=0.006\text{м}$ та радіусів $r_1=0.008\text{м}$, $r_2=0.006\text{м}$.

При виконанні розрахунків практична збіжність результатів досягається при розбитті стержня на 1636 елементів. Вибір кроку по часу при початковому значенні 10^{-8} сек здійснюється автоматично.

Форма імпульсів вибирається у вигляді половини синусоїди

$$\sigma_z = \begin{cases} 0, & t > t_{\text{im}}, \\ \sigma_0 \sin \alpha t, & 0 < t < t_{\text{im}}, \end{cases}$$

де t_{im} – тривалість імпульсу; σ_0 – амплітуда імпульсу навантаження, $\omega = \pi/t_{im}$ – частота.

В моделі, запропонованій Гопкінсоном, розглядається розповсюдження хвиль в стержні на базі одновимірної теорії пружності [11]. Відповідні позначення надані на рис.1. Вважається, що переміщення u_z за час t є інтеграл по часу від деформації ε_z , помножений на швидкість поширення пружної стержневої хвилі c_e :

$$u_z = c_e \int_0^t \varepsilon_z dt',$$

Переміщення u_1 сторони першого стержня є результатом впливу падаючого ε_i і відбитого ε_r імпульсу деформації:

$$u_1 = c_e \int_0^t \varepsilon_i dt' + (-c_e) \int_0^t \varepsilon_r dt' = c_e \int_0^t (\varepsilon_i - \varepsilon_r) dt'.$$

Переміщення u_2 торця другого стержня знаходиться за імпульсом ε_{tr} , що пройшов в другий стержень із зразка:

$$u_2 = c_e \int_0^t \varepsilon_{tr} dt'.$$

Тоді середня деформація зразка

$$\varepsilon_s = \frac{u_1 - u_2}{l_s} = \frac{c_e}{l_s} \int_0^t (\varepsilon_i - \varepsilon_r - \varepsilon_{tr}) dt'.$$

Навантаження на торцях зразка

$$P_1 = EA(\varepsilon_i + \varepsilon_r) \text{ та } P_2 = EA \varepsilon_{tr},$$

де E – модуль пружності матеріалу стержнів, A , A_s – площі поперечного перерізу стержнів та зразка. Хвильові ефекти в зразку нехтуються, тому $P_1 = P_2$, звідки

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{tr} - \varepsilon_i.$$

Отже, остаточна формула для знаходження середньої деформації в зразку:

$$\varepsilon_s = -\frac{2c_e}{l_s} \int_0^t \varepsilon_i dt'.$$

Середнє напруження в зразку є півсумою навантаження на його торцях, віднесеною до площі:

$$\sigma_s = (P_1 + P_2)/(2A_s) = E(A/A_s)\varepsilon_{tr}.$$

Просторовий (осесиметричний) аналіз.

Розглядається навантаження торця стержня імпульсом тривалості $t_{im}=40\text{мкс}$ при співвідношенні площ поперечного перерізу стержнів та зразка $A/A_s = 16/9$.

Вплив тертя.

Спочатку, як важливий аспект, в роботі розглядається вплив тертя на стиках стержнів тиску і зразка залежно від геометрії зразка [5]. В роботі [11] наводиться співвідношення між радіусом та товщиною "таблетки" $l_s/r_s = \sqrt{3}\nu_s$, яке найкращим чином задовольняє гіпотезі квазістатичного деформування зразка ($\rho = 0$). Однак, це відношення потребує корекції стосовно тертя.

За рахунок тертя між торцями стержнів і зразка відбувається спотворення і заміна дійсних на відмінні від них ефективні властивості матеріалу зразка. Крива 3 ($l_s = 0.002\text{м}$, $r_s = 0.006\text{м}$), та 4 ($l_s = 0.003\text{м}$, $r_s = 0.006\text{м}$) на рис.2 ілюструють суттєві неточності у результатах обрахунків за умов ідеального механічного контакту (зчіплення) порівняно із експериментальною діаграмою (чотирикутники на рис.2). Відмінність істинної діаграми від ефективних, розрахованих в межах стержневої теорії методу, зумовлена наявністю суттєвих дотичних напружень в околі поверхні контакту. Вони спричинені різницею механічних властивостей матеріалів зразка і стержнів. Ідеальний контакт податливого зразка із сталевими стержнями зумовлює більш високі ефективні повздовжні жорсткість та пластичне зміцнення зразка. Похибка визначення характеристик залежить від розмірів зразка. Наприклад, при відношенні товщини до радіусу $l_s/r_s = 1$ ефективний модуль пружності $E_e = \langle \sigma \rangle_s / \langle \varepsilon \rangle_s$, де $\langle \cdot \rangle_s$ – усереднення по площі, становить $0.843 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, границя текучості $\sigma_{02} = 222 \text{ МПа}$, при $l_s/r_s = 0.5$ – $0.898 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{02} = 254 \text{ МПа}$, $l_s/r_s = 0.33$ – $0.967 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{02} = 287 \text{ МПа}$ при істинному модулі пружності матеріалу $E = 0.816 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ і $\sigma_{02} = 228 \text{ МПа}$. Отже при $l_s/r_s > 1$

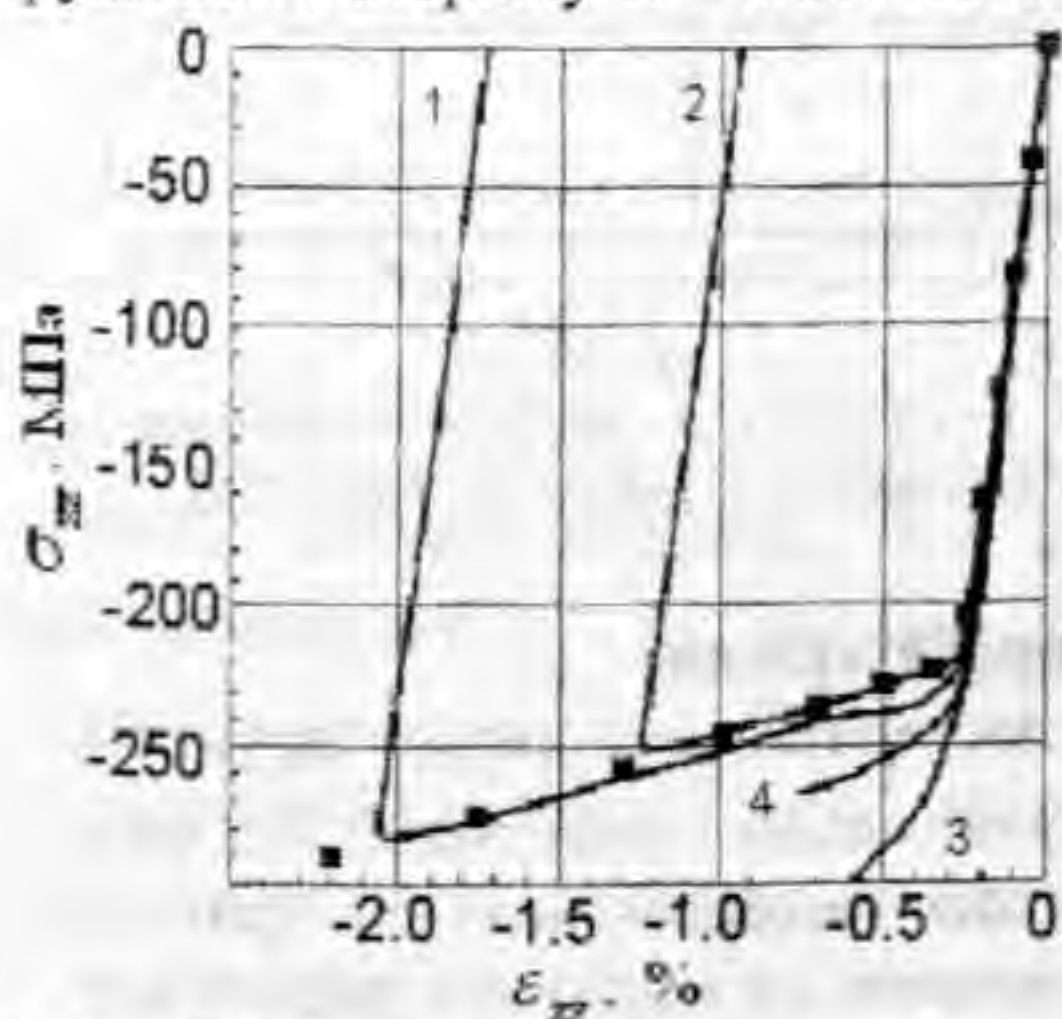


Рис.2. Діаграми осьових напружень та деформацій зразка. 1, 2, – з використанням трансверсально ізотропного прошарку, 3, 4 – при наявності тертя. $\sigma_0 = 220 \text{ МПа}$.

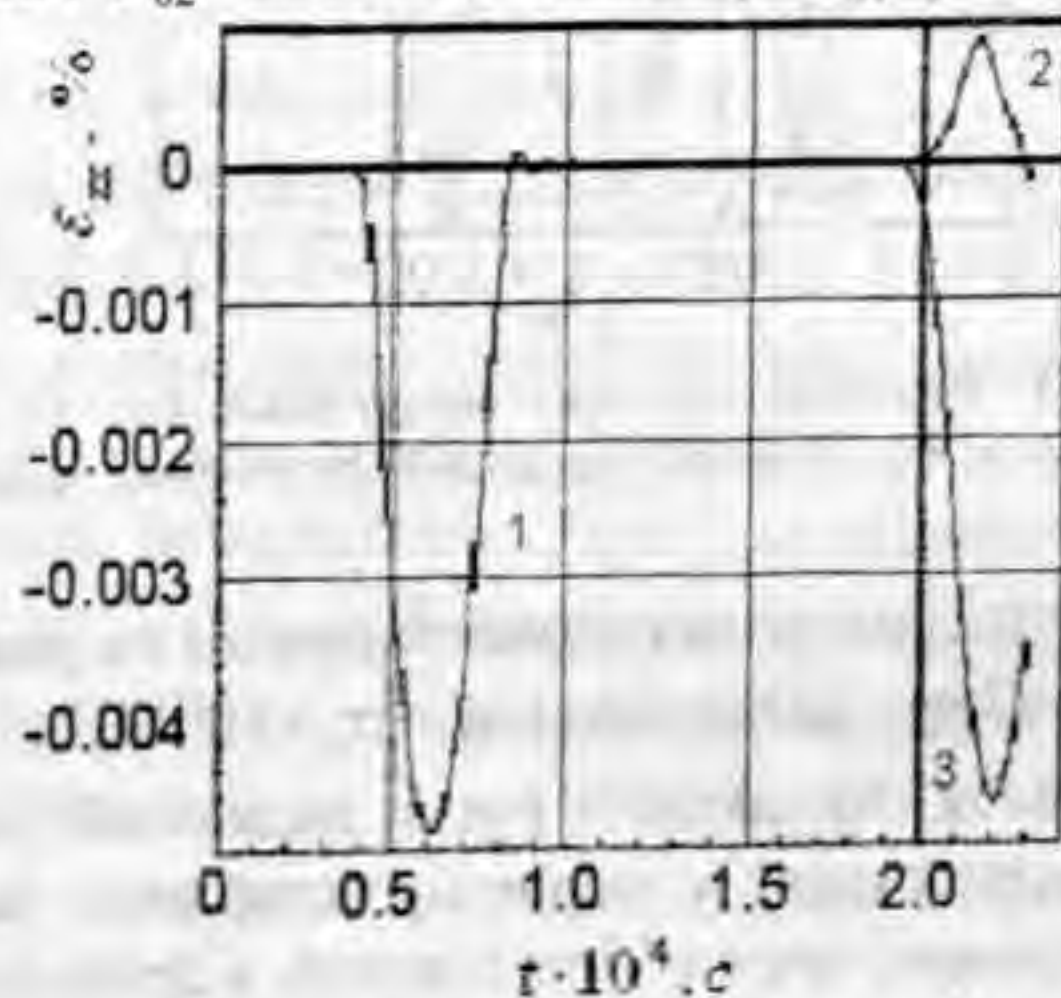


Рис.3. Хвилі деформації в зразку. 1 – падаюча, 2 – відбита, 3 – та, що пройшла із зразка в другий стержень. $\sigma_0 = 100 \text{ МПа}$.

впливом тертя можна нехтувати, тоді як при малому $l_s/r_s \ll 1$ поведінка матеріалу зразка буде наближатись до поведінки матеріалу стержнів.

Як засіб позбутися небажаних ефектів, спричинених наявністю тертя, для моделювання гладкого контакту між торцями стержнів та зразка вводиться тонкий прошарок трансверсально ізотропного (з віссю ізотропії oz) пружного матеріалу, що визначається рівняннями

$$\sigma_{rr} = E \varepsilon_{rr}, \sigma_{\theta\theta} = E \varepsilon_{\theta\theta}, \sigma_{zz} = E' \varepsilon_{zz}, \sigma_{rz} = 2G \varepsilon_{rz}.$$

Модуль пружності в напрямку осі ізотропії E' обирається рівним модулю пружності матеріалу зразка, а модуль пружності в площині ізотропії – в 10^4 разів меншим. Густина прошарків $\rho=0$. Завдяки такому вибору характеристик досягається передача зусиль тільки у напрямку осі oz , а в площині ізотропії дотичні напруження будуть знехтувано малі.

Як видно з рис.2, діаграми осьових напружень та деформацій зразка (криві 1 – $l_s = 0.003\text{м}$, та 2 – $l_s = 0.006\text{м}$ при $r_s = 0.006\text{м}$) в цьому випадку практично співпадають із діаграмою власне матеріалу незалежно від розмірів зразка. Отже, застосування прошарку із трансверсально ізотропного матеріалу на стиках стержнів і зразка є ефективним засобом для моделювання гладкого контакту.

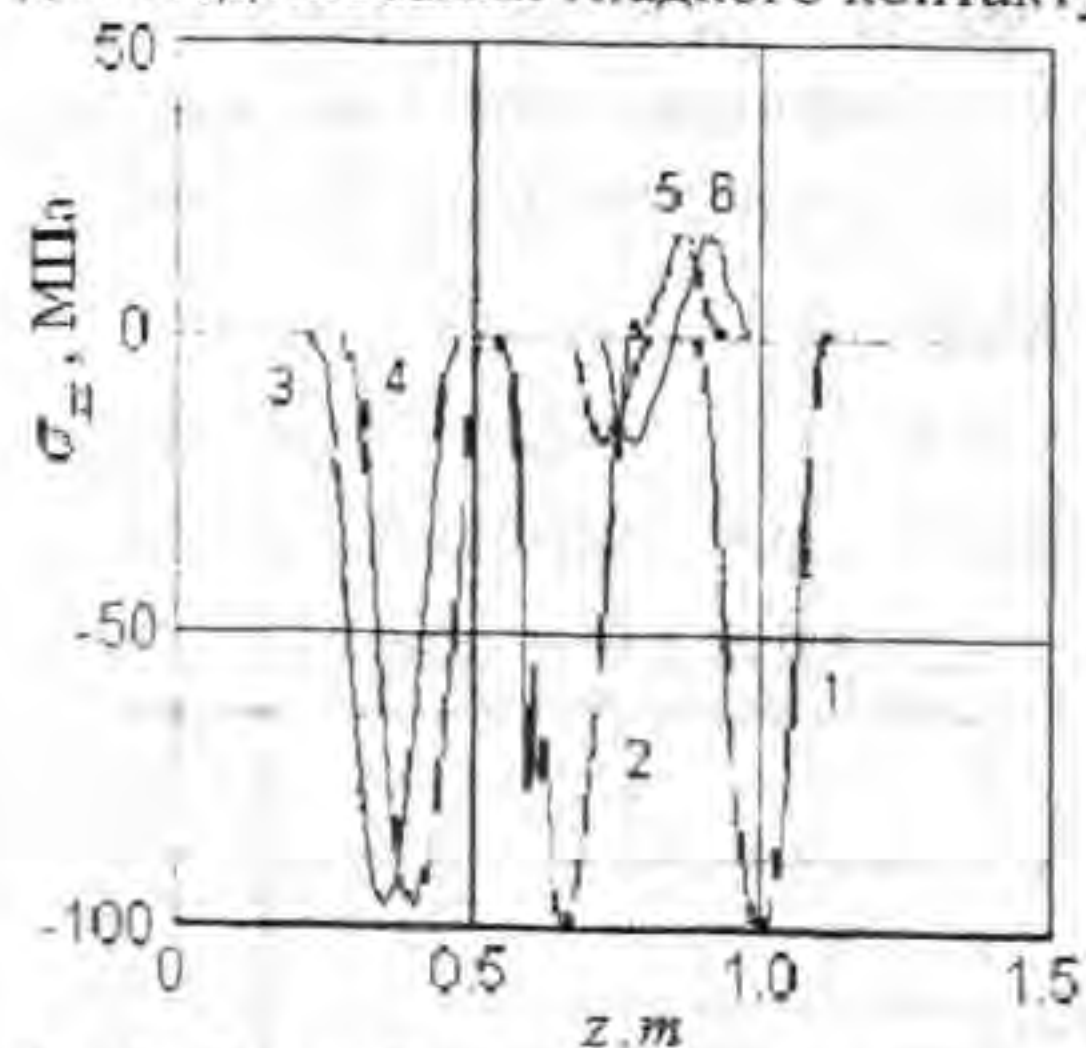


Рис.4. Розподіл осьових напружень по довжині складеного стержня Гопкінсона. $\sigma_0 = 100\text{МПа}$.

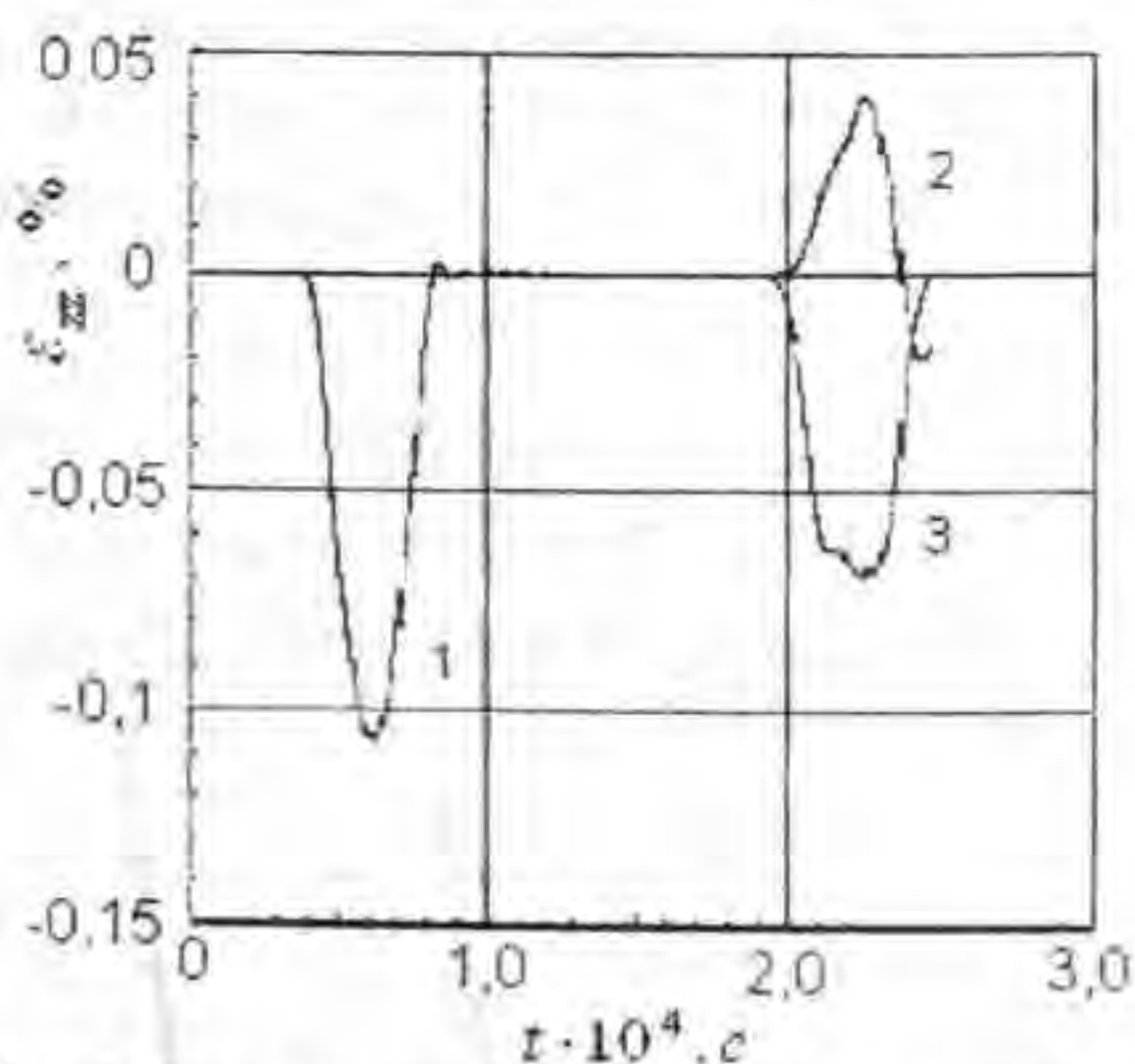


Рис.5. 1-падаюча, 2-відбита, 3-пройшовша хвилі деформації в зразку. $\sigma_0 = 220\text{МПа}$.

Вплив рівня навантаження та розмірів стержня.

При навантаженні $\sigma_0 = 100\text{МПа}$ спостерігається чисто пружний випадок. Як видно з рис.3, падаючий імпульс осьової деформації без змін поширюється в першому стержні, частково відбивається від границі “стержень-зразок” і проходить в другий стержень не змінюючи форми, але з меншою амплітудою. Розподіл падаючої, відбитої та хвилі осьового напруження, що пройшла в другий стержень, по просторовій координаті наводяться на рис.4. Крива 1 ілюструє пружну хвилю, що поширюється в першому стержні. При входженні імпульсу в зразок напруження різко

зростає, що зумовлено різницею площ та акустичних опорів матеріалів зразка та стержня (крива 2). Кривими 5 та 6 зображується поширення відбитого імпульсу осевого напруження в першому стержні тиску, 3 та 4 – імпульсу, що пройшов у другий стержень.

Нехай $\sigma_0 = 220 \text{ МПа}$. При такому навантаженні напруження на торці зразка перевищують границю текучості. Виникнення непружних ефектів провокує не тільки суттєве зменшення амплітуди, а й зміну форми хвилі осевої деформації, що пройшла із зразка в другий стержень (рис.5). Точні та наближені (стерженьові) розподіли осевих напружень та деформацій в зразку досить гарно співпадають (рис.6).

Оскільки метод Гопкінсона ґрунтується на стержневій теорії, відхилення наближеної діаграми від точної залежить від товщини стержня.

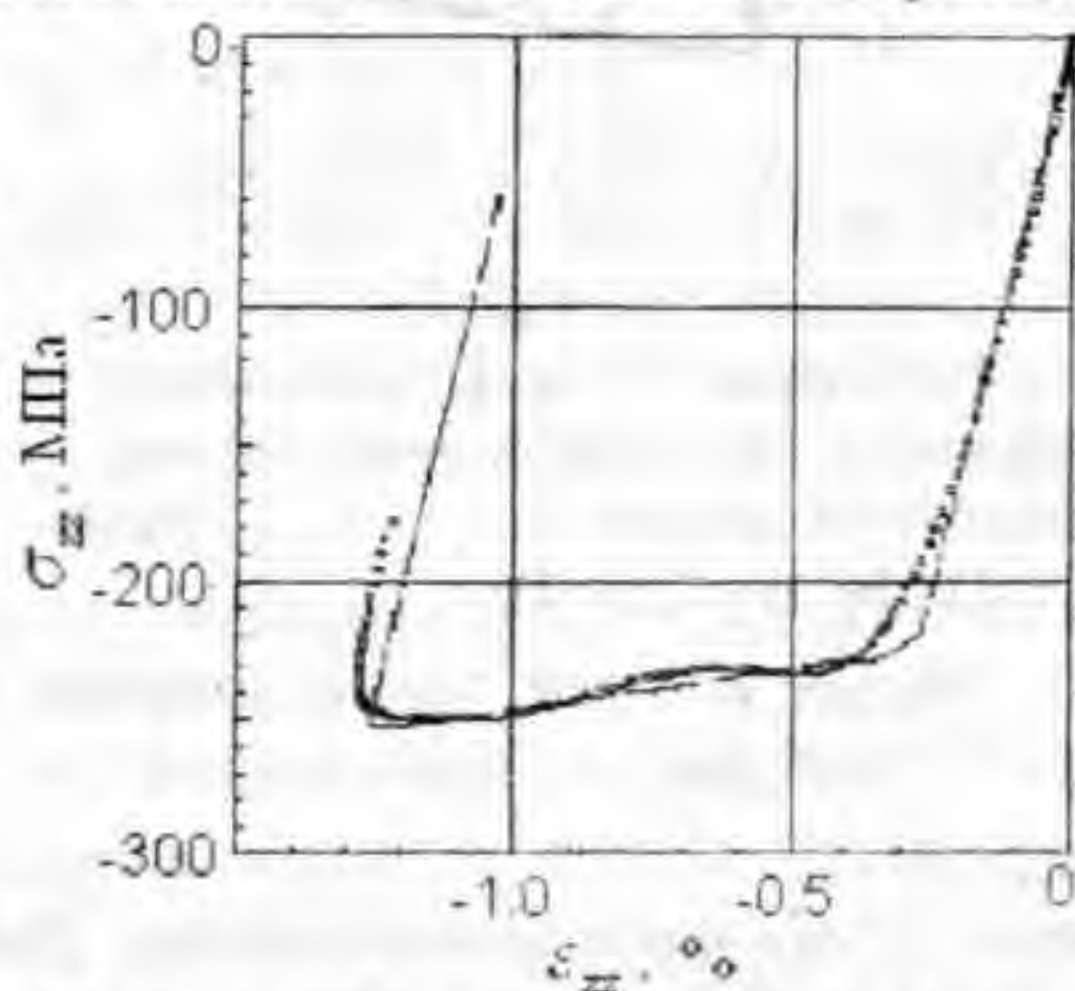
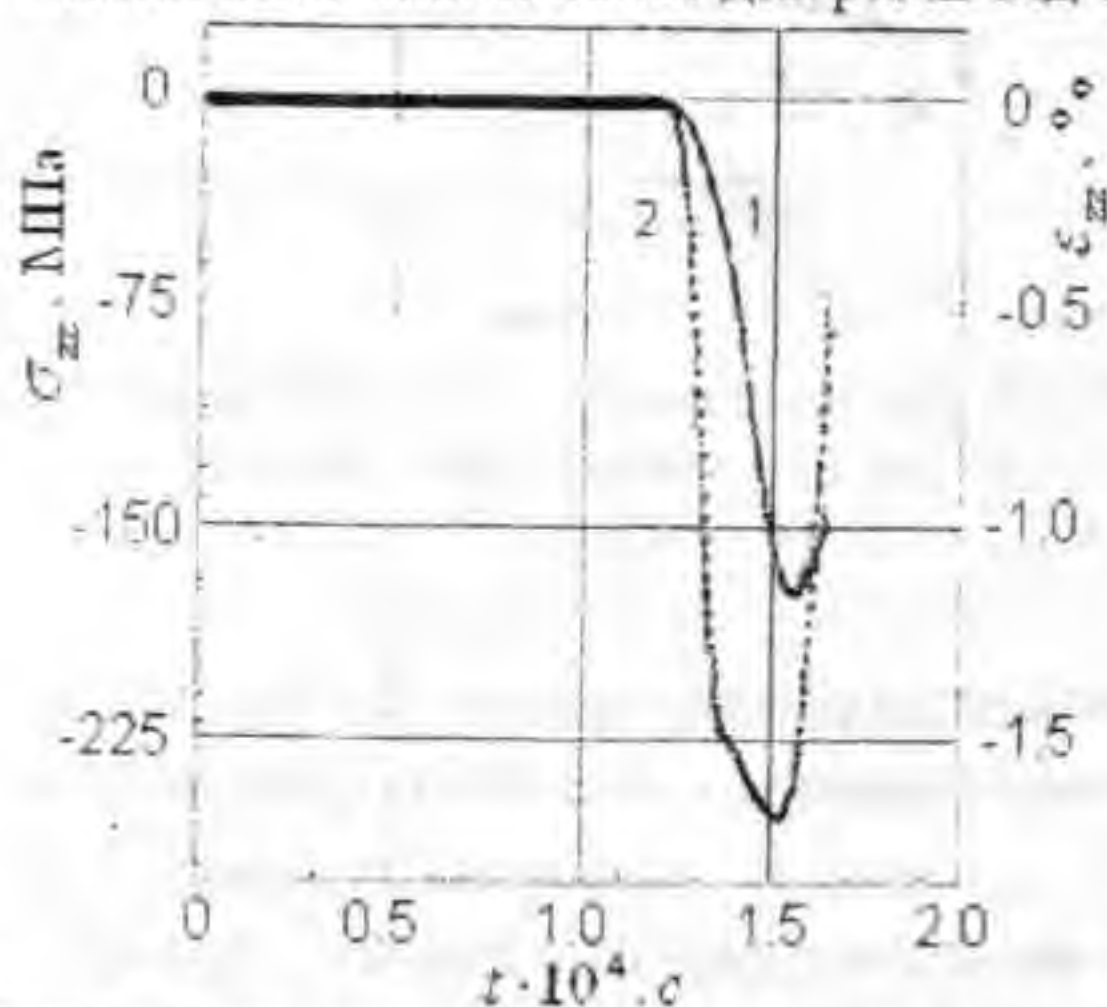


Рис.6. Точні (суцільна лінія) та наближені за Гопкінсоном (точки) значення осевих деформацій (1) та напружень (2) в зразку. $\sigma_0 = 220 \text{ МПа}$.

Рис.7. Діаграми – точна (суцільна лінія) та наближена за Гопкінсоном (точки) – напруження-деформації в зразку. $r_1 = 0.008 \text{ м}$. $\sigma_0 = 220 \text{ МПа}$.

Порівнюючи точні (суцільна крива) та наближені за Гопкінсоном (точки) діаграми осевих напружень і деформацій для стержнів радіуса $r_1 = 0.008 \text{ м}$ (рис.7) та $r_1 = 0.004 \text{ м}$ (рис.8) при однаковому співвідношенні площ поперечного перерізу стержнів і зразка, можна зробити висновок, що чим менший діаметр стержня, тим краще наближення. При цьому вибір відношення A/A_s не впливає на точність наближення. Однак слід враховувати, що при збільшенні відношення площ зростає швидкість навантаження в зразку, тому, наприклад, при $A/A_s = 4$ для перевищення межі пружності в зразку достатньо початкового навантаження торця стержня імпульсом із амплітудою $\sigma_0 = 100 \text{ МПа}$.

Циклічні статико-динамічні процеси.

Для в'язкопластичних матеріалів суттєвим є вплив швидкості навантаження на границю пластичності, зміцнення і опір матеріалів. Тому

цікаво визначити можливості методу Гопкінсона на дослідження цих ефектів. Як критичні, розглядаються експерименти із циклічним чередуванням статичних і динамічних процесів.

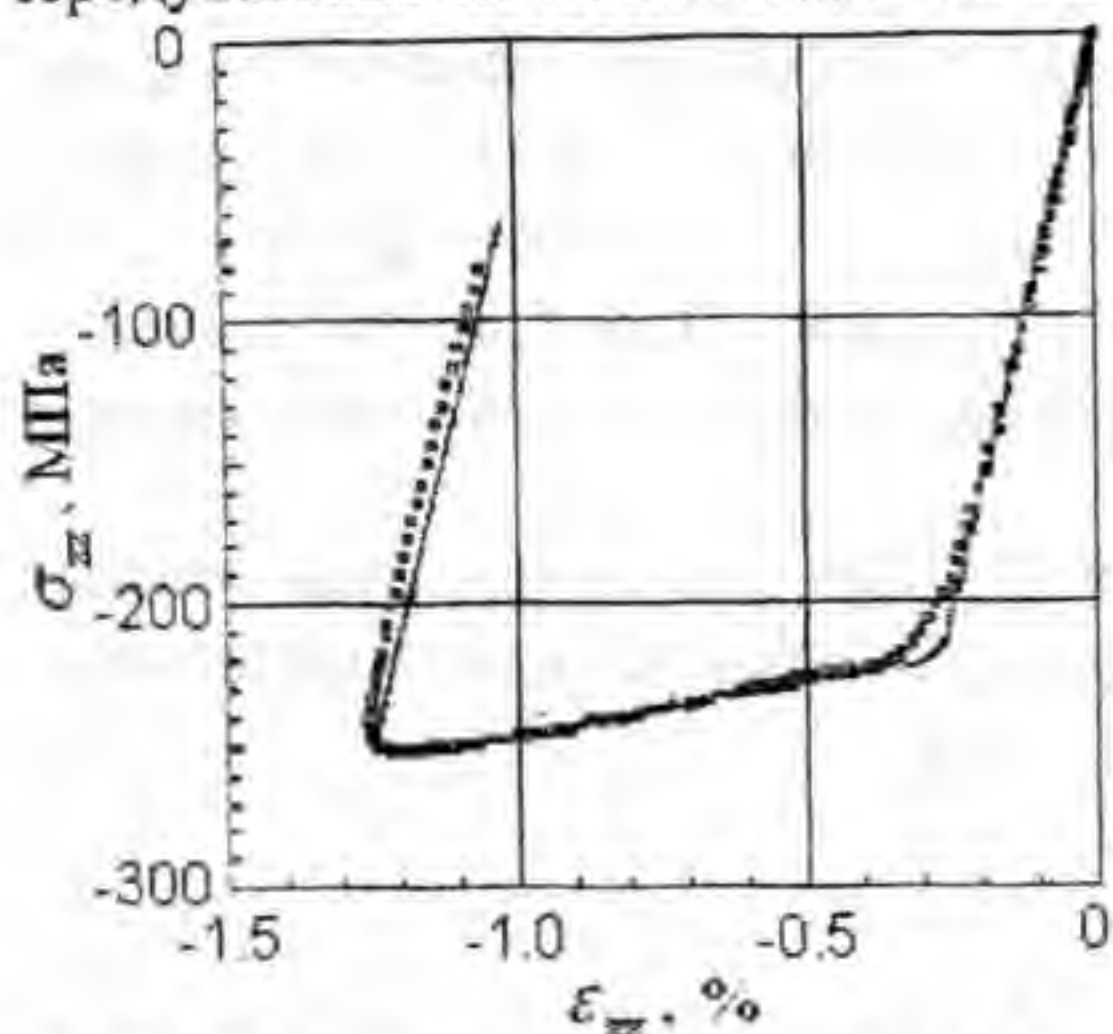


Рис.8. Діаграми – точна (суцільна лінія) та приближена за Гопкінсоном (точки) – напруження-деформації в зразку.
 $r_1 = 0.004\text{м}$. $\sigma_0 = 220\text{МПа}$

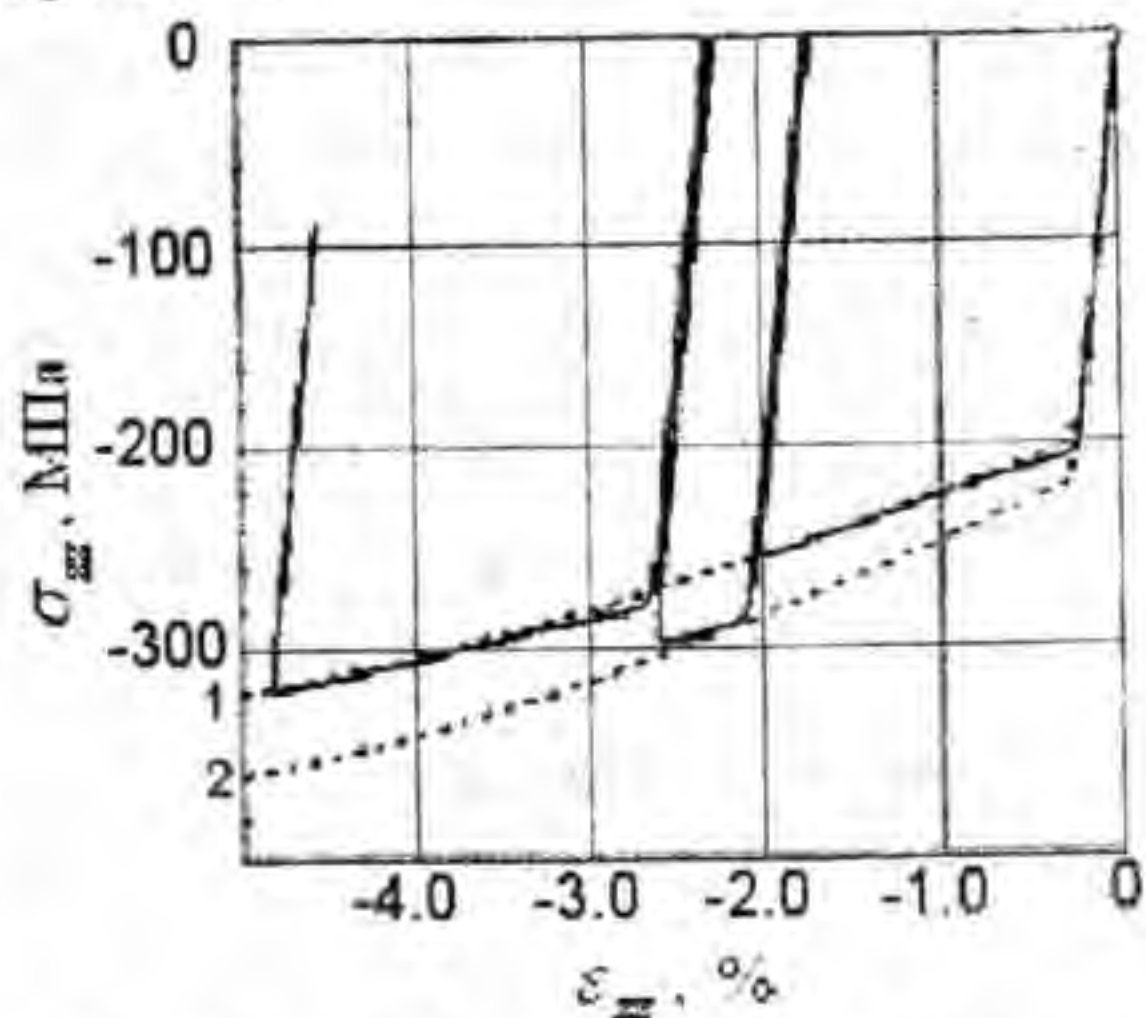


Рис.9. Діаграми напруження-деформації в зразку при циклічному навантаженні.

Нехай вільний торець стержня навантажується таким чином, що в зразку відбувається послідовний циклічний процес статичного (швидкість деформації $1.5 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}$), динамічного (швидкість деформації 10^3с^{-1}) і знову статичного навантаження. Для моделювання статичного процесу задаються кінематичні граничні умови:

$$u_z|_{z=2l_1+l_2} = \begin{cases} \dot{u}_0 t, & t_0 < t \leq t_{im}, \\ -\dot{u}_0 (t - 2t_{im}), & t > t_{im}, \end{cases}$$

для динамічного – силові:

$$\sigma_z|_{z=2l_1+l_2} = \begin{cases} \sigma_0 t, & t_0 < t \leq t_{im}, \\ -\sigma_0 (t - 2t_{im}), & t > t_{im}, \end{cases}$$

при значеннях $\dot{u}_0 = -0.25 \cdot 10^{-4} \text{м/с}$, $\sigma_0 = 220\text{МПа}$ та відповідного початкового значення часу кожного циклу t_0 . Оскільки розвантаження відбувається після перевищення межі текучості, при наступному навантаженні спостерігається ефект зміцнення матеріалу зразка. Рис.9 ілюструє неперервну картину зміцнення в різних режимах навантаження. При динамічному навантаженні діаграма напруження-деформації дещо не досягає діаграми стиску матеріалу із швидкістю деформації 10^3с^{-1} (штрихова лінія 2 на рис.9) через недостатній для цієї швидкості рівень зміцнення на попередньому етапі. При наступному циклі (статика) діаграма напруження-деформації спочатку лягає вище діаграми статичного стиску матеріалу (штрихова лінія 1 на рис.9), що пояснюється вищим рівнем зміцнення при попередньому динамічному навантаженні, а потім

співпадає з нею. Ці результати дуже гарно збігаються із експериментальними даними, наведеними в роботі [11]. На рис.10 приводиться залежність параметра ізотропного зміцнення і осьової деформації (штрихова – залежність $K - \varepsilon_{\text{из}}$ власне матеріалу для швидкості деформації $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$). При динамічному навантаженні K зростає швидше, однак при подальшому статичному деформуванні повертається на рівень статичного. Відхилення від статичного значення тим помітніше, чим триваліше динамічне навантаження.

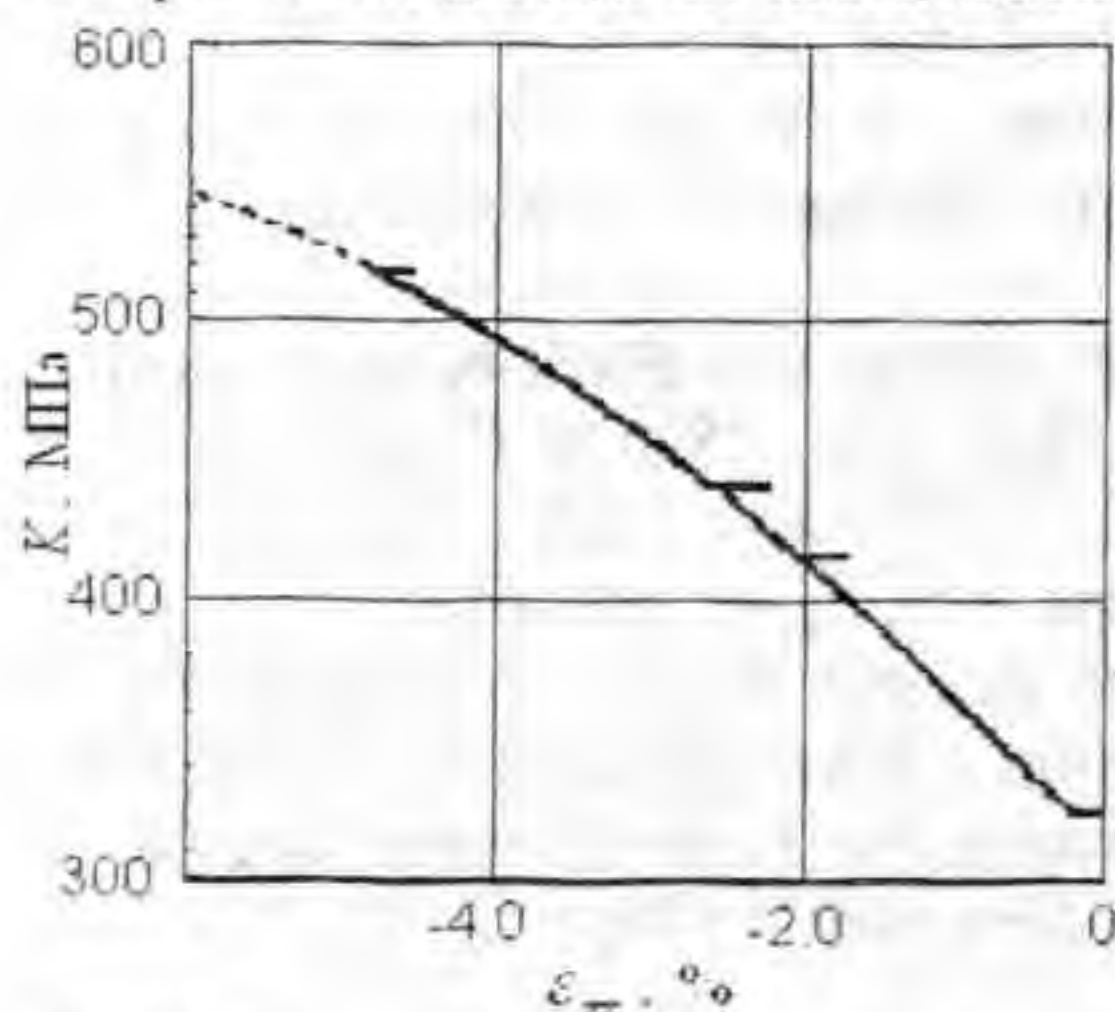


Рис.10. Діаграма $K - \varepsilon_{\text{из}}$ при циклічному навантаженні.

Висновки:

- в роботі досліджено закономірності поширення хвиль в складеному стержні Гопкінсона;
- визначено розміри зразка, при яких можна нехтувати впливом тертя між торцями стержнів і зразка, та запропоновано засіб для моделювання гладкого контакту;
- наведено результати моделювання циклічного статико-динамічного процесу.

Використана література

1. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – Москва: Машиностроение, 1965. – 567с.
2. Большаков А. П., Новиков С. А., Сеницын В. А. Исследование динамических диаграмм одноосного растяжения и сжатия меди и сплава АМг-6 // Проблемы прочности. – 1979, №10 – С.87-88.
3. Жук Я. А., Сенченков И. К., Табиева Г. А., Червинко О. П. Осесимметричные колебания и диссипативный разогрев слоистого неупругого диска // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, №1 – С.117-123.
4. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; т.1).
5. Потураев В. Н., Дырда В. И., Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Козлов В. И., Мазнецова А. В. Термомеханика эластомерных конструкций при циклическом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1987. – 287с.
6. Чжань, Боднер, Линдхольм. Феноменологическое моделирование упрочнения и теплового возврата в металлах // Теоретические основы инженерных расчетов. – Москва: Мир, 1988. – №4 – С.1-14.

7. Bodner S. R. Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report), Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Inst. of Techn. Haifa 32000, Israel – 2000. – 105p.
8. Guirguis R. H. Ignition due to macroscopic shear / In Proc. of Conf. of the Amer. Phys. Soc. “Shock Compression of Condensed Matter” – 1999. Snowbird, UT 27 Jun – 2 Jul, – Merville, New York, Utah. AIP Conference proceedings. – Pr.II. – P.647-650.
9. Holland K. G., Chhabildas L. C., Reinhart W. D., Furnish M. D. Experiments of cercom SiC rods under impact / In Proc. of Conf. of the Amer. Phys. Soc. “Shock Compression of Condensed Matter” – 1999. Snowbird, UT 27 Jun– 2 Jul, – Merville, New York, Utah. AIP Conference proceedings. – Pr.1. – P.585–588.
10. John H. J. Jr., Alamo M. F. High-strain rate testing of HMX-based Explosive / In Proc. of Conf. of the Amer. Phys. Soc. “Shock Compression of Condensed Matter” – 1999. Snowbird, UT 27 Jun – 2 Jul, – Merville, New York, Utah. AIP Conference proceedings. – Pr. II, – P. 679–682.
11. Lindholm U. S. Some experiment with the split Hopkinson pressure bar // Journal of mechanics and physics of solids. – 1964. – V.12, №5. – P.317–335.
12. Smith I. M., Griffiths D. V. Programming the Finite Element Method. – 1997. John Wiley & Sons – Chichester, New York – 534p.

Надійшла до редколегії 05.11.2004.

УДК 517.9
Оксана Волкова¹

Монотонні властивості нідинг інваріанту барн-відображень

Кусково-лінійні відображення відіграють важливу роль в теорії одновимірних динамічних систем. В даній роботі вивчаються монотонні властивості нідинг інваріанту сім'ї кусково-лінійних відображень $f_a = a \cdot f_A$ (так званих барн-відображень), де a - параметр монотонності, A - деяка точка координатної площини. Доводиться існування принаймні одного $A \in F_A$, такого, що нідинг інваріант відображення f_a - монотонно зростаюча функція параметра a .

Ключові слова: барн-відображення, нідинг інваріант.

Oksana Volkova¹

Monotonicity properties of kneading invariant for barn maps

Piecewise-linear maps play an important role in one-dimensional dynamics. In this paper we study monotonicity properties of kneading invariant for some family of barn maps $f_a = a \cdot f_A$. We prove that there exists at least one $A \in F_A$ such that the kneading invariant of f_a is monotone increasing function of parameter a .

Key Words: a barn map, kneading invariant, monotonicity.

¹ E-mail: oxana@imath.kiev.ua

Вступ

Однією з важливих проблем теорії одновимірних динамічних систем є дослідження монотонних властивостей нідинг інваріанту для різних класів відображень відрізка прямої в себе.

Нехай $f_a : [0,1] \rightarrow [0,1], a \in [a_1, a_2]$ - однопараметрична сім'я відображень така, що $f_a = a \cdot f$, де f - унімодальне відображення, тобто неперервне відображення з єдиною критичною точкою c , яке строго зростає зліва від c і строго спадає справа від c . Припустимо, що $f_a(0) = f_a(1) = 0$.

Нідинг інваріантом відображення f_a називається нескінченна послідовність $K(f_a)$ символів e_k , $e_k = 0, C, 1$, яка визначається так:

$$e_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f_a^{-k}(c) < c, \\ C, & \text{якщо } f_a^{-k}(c) = c, \\ 1, & \text{якщо } f_a^{-k}(c) > c. \end{cases}$$

Для таких послідовностей існує знаковий лексикографічний порядок $<$: якщо K і K' співпадають до $n-1$ символа і $e_n < e'_n$ (де

$0 < C < 1$), тоді $K < K'$ ($K > K'$), якщо кількість символів "1" в $e_1, \dots, e_{n-1}$ парне (непарне) (більш детально див., наприклад, [4]).

Проблема монотонності нідінг інваріанту відображення f_a формулюється наступним чином:

Чи є $K(f_a)$ неспадаючою функцією відносно параметра a ? (1)

Позитивна відповідь на питання (1) відома лише для декількох сімей відображень. Зокрема, повна відповідь відома для сім'ї квадратичних відображень $f_a(x) = ax(1-x)$ [8, 10], для тент відображень $f_a(x) = \min\{ax, a(1-x)\}$ [9, 10] та для деяких інших сімей поліноміальних та кусково-лінійних відображень (див. [1, 5, 11]). Також було знайдено декілька контр-прикладів до цієї проблеми (див. [2, 6, 12]).

В даній роботі розглядається однопараметрична сім'я кусково-лінійних унімодальних відображень $f_a : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f_a(x) = a \cdot f_A$, де a - параметр монотонності, а відображення f_A - опукле, симетричне, складається з чотирьох лінійних кусків, і таке, що $f_A(0) = f_A(1) = 0$, $f_A(c) = 1$, де $c = \frac{1}{2}$ - єдина критична точка f_A . Точка $A = (x_1, y_1) \in (0, 1/2) \times (0, 1)$ - точка графіка f_A ліворуч від критичної точки c така, що f_A не диференційоване (див. Мал.1). Такі відображення називають барн-відображеннями. Проблема, яку нещодавно поставили К. Brucks та Н. Bruin (див. [2]), формулюється так:

Чи існують такі A , для яких $K(f_a)$ - неспадаюча функція по a ? (2)

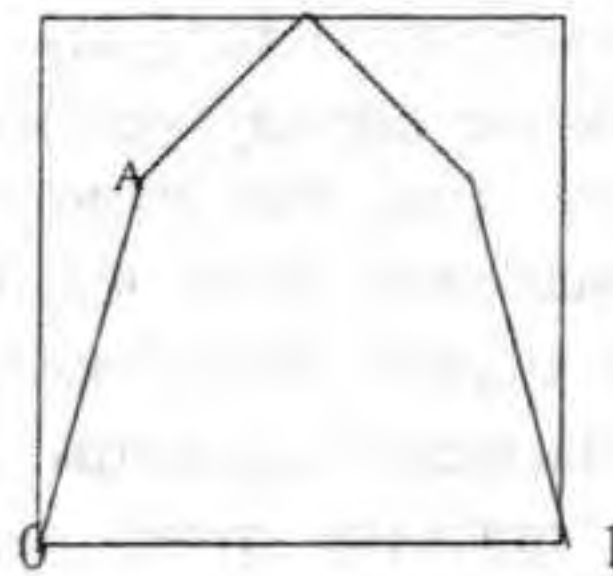
В даній роботі показано, що існує принаймні одне $A \in F_A$, де F_A - деяка множина параметрів A , для якого $K(f_a)$ - монотонно зростаюча функція по a .

Основні результати

Визначимо сім'ю барн-відображень $f_a : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $a \in [0,1]$ за формулою:

$$f_a(x) = \begin{cases} as_1x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq x_1, \\ as_2(x-c) + a, & \text{якщо } x_1 \leq x \leq c, \\ as_2(c-x) + a, & \text{якщо } c \leq x \leq 1-x_1, \\ as_1(1-x), & \text{якщо } 1-x_1 < x \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

де $s_1 = \frac{y_1}{x_1}$ і $s_2 = \frac{2(1-y_1)}{1-2x_1}$. Будемо позначати $c_a(a) = f_a^a(c)$.



Мал.1. Відображення f_A .

Нехай $M_A = \left\{ A = (x_1, y_1) \mid 0 < x_1 < \frac{1}{2}, 2x_1 \leq y_1 < x_1 + \frac{1}{2} \right\}$ та

$$N_A = \left\{ A = (x_1, y_1) \mid 0 < x_1 < \frac{1}{3}, \frac{2x_1^2 - 2.5x_1 - 0.25 - \sqrt{4x_1^4 - 6x_1^3 + 3.25x_1^2 - 0.75x_1 + 0.0625}}{2x_1^2 - x_1 - 1} \leq y_1 < \frac{1 + 5x_1 - 2x_1^2 + \sqrt{4x_1^4 - 12x_1^3 + 13x_1^2 - 6x_1 + 1}}{2(2 - x_1)} \right\}$$

Тоді покладемо $F_A := M_A \setminus N_A$.

Теорема 1 Нехай $f_a(x)$ - сім'я барн-відображень вигляду (3). Тоді існує принаймні одне $A \in F_A$ таке, що нідинг інваріант - монотонно зростаюча функція параметра $a \in D_a$, де $D_a = \{a \in [0,1] \mid K(f_a) > 101^\infty\}$.

Монотонність нідинг інваріанту відображення $f_a(x)$ впливає з наступного результату:

Твердження 1 (згідно М. Tsujii [9, 10]) Нехай $f_a(x)$ - сім'я барн-відображень вигляду (3). Якщо для кожного a_0 і n таких що, $f_{a_0}^n(c) = c$ і $f_{a_0}^i(c) \neq c$, $0 < i < n$ виконується:

$$R_n(f_a) = \frac{\frac{\partial}{\partial a} f_a^n(c)|_{a=a_0}}{\frac{d}{dx} f_a^{n-1}(f_a(c))} > 0 \quad (4)$$

Тоді нідинг інваріант $K(f_a)$ є монотонно зростаючою функцією параметра a .

Доведення: Нехай $K_n(f_a)$ - зрізана нідінг послідовність довжини n . $K_n(f_a)$ змінюється тоді і тільки тоді коли, $f_a^i(c) = c$ для $0 < i \leq n$, тобто коли критична точка є періодичною періоду меншого або рівного довжині усіченої нідінг послідовності. Тоді, знак знаменника виразу (4), тобто знак похідної $(f_a^{n-1})'(f_a(c))$ залежить лише від парності або непарності кількості символів "1" в нідінг послідовності $K_{n-1}(f_a)$ включно до $n-1$ символа. Отже, при збільшенні параметра a , образ критичної точки $f_a^n(c)$ проходить через критичну точку c зліва направо або в протилежному напрямку в залежності від знаку $(f_a^{n-1})'(f_a(c))$. За визначенням знакового лексикографічного порядку для нідінг послідовностей, з твердження 1 випливає, що нідінг послідовність $K_n(f_a)$ зростає для кожного параметра a , для якого критична точка періодична. Тому $K_n(f_a)$ - монотонно зростає по a . Оскільки це має місце для кожного n , нідінг послідовність $K(f_a)$ - монотонно зростає.

Таким чином, для доведення монотонності нідінг інваріанту відображення $f_a(x)$ необхідно і достатньо показати наступне:

Лема 1 Для всіх $a \in D_a$ і для всіх n має місце нерівність (4).

Наступний розділ присвячено доведенню леми 1 та теореми 1.

Доведення леми 1 та теореми 1

Доведення леми 1: Запишемо рекурентну формулу виразу $R_n(f_a)$ для сім'ї барн-відображень f_a :

$$R_n(f_a) = R_{n-1} + \frac{\frac{\partial}{\partial a} f_a(c_{n-1}(a))}{\frac{d}{dx} f_a^{n-1}(f_a(c))} = R_{n-1} \pm \frac{f(c_{n-1}(a))}{f'_a(c_{n-1}(a)) \cdots f'_a(c_1(a))}$$

Неважко бачити, що $f'_a(c_n(a)) = \{as_1, |as_2|\}$. Ми розглядаємо параметри $a \in [0,1]$ такі, що $K_n(f_a) > 101^n$. В цьому випадку, $a \in [a_*, 1]$, де a_* - дійсний корінь рівняння $s_1 s_2 (1-a) - 0.5 s_2 + 1 = \frac{0.5(s_2 + 2)}{as_2 + 1}$. Обчислюючи вирази $R_n(f_a)$ послідовно знаходимо, що $R_1(f_a) = 1, R_2(f_a) = 2 - \frac{1}{a}$,

$$R_3(f_a) = 2 - \frac{1}{a} + \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2s_1} - \frac{1}{a^2s_1s_2}, & \text{якщо } a < a_0, \\ -\frac{1}{a^2s_2} + \frac{s_1(1-a)}{as_2}, & \text{якщо } a > a_0, \end{cases}$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x_1 \cdot \frac{x_1}{y_1}}.$$

$$R_4(f_a) = 3 - \frac{2}{a} + \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2s_1} - \frac{2}{a^2s_1s_2} + \frac{1}{2a^3s_2s_1} + \frac{1}{a^3s_2^2s_1}, & \text{якщо } a < a_0, \\ -\frac{1}{a^2s_2} + \frac{s_1(1-a)}{as_2} + \frac{1}{2a^3s_1^2} - \frac{1}{a^3s_1^2s_2}, & \text{якщо } a_0 < a < a_1, \\ -\frac{1}{a^2s_2} + \frac{s_1(1-a)}{as_2}, & \text{якщо } a > a_1, \end{cases}$$

де a_1 - це дійсний розв'язок рівняння $a^2s_1^2 - a^3s_1^2 = x_1$.

$$R_5(f_a) = \begin{cases} 5 - \frac{4}{a} + \frac{3}{a^2s_1} - \frac{3}{a^2s_1s_2} + \frac{1}{a^3s_2s_1} + \frac{2}{a^3s_2^2s_1} - \frac{1}{2a^4s_2^2s_1} - \frac{1}{a^4s_2^3s_1}, & \text{якщо } a < a_2, \\ 3 - \frac{2}{a} + \frac{1}{2a^2s_1} - \frac{1}{a^2s_1s_2} + \frac{1}{a^4s_2^2s_1}, & \text{якщо } a_2 < a < a_0, \\ 4 - \frac{3}{a} + \frac{s_1(1-a)}{as_2} - \frac{1}{a^2s_2} - \frac{2}{a^3s_1^2s_2} + \frac{1}{a^3s_1^2} + \frac{1}{2a^4s_1^2s_2} + \frac{1}{a^4s_1^2s_2^2}, & \text{якщо } a_0 < a < a_3, \\ 2 - \frac{1}{a} + \frac{s_1(1-a)}{as_2} - \frac{1}{a^2s_2} - \frac{1}{a^4s_1^2s_2}, & \text{якщо } a_3 < a < a_1, \\ 4 - \frac{3}{a} + \frac{s_1(1-a)}{as_2} - \frac{1}{a^2s_2} + \frac{1}{2a^4s_1^3} - \frac{1}{a^4s_2s_1^3}, & \text{якщо } a_1 < a < a_4, \\ -\frac{1}{a^2s_2} + \frac{s_1(1-a)}{as_2}, & \text{якщо } a > a_4. \end{cases}$$

де a_2, a_3, a_4 - це дійсні розв'язки рівнянь

$$0.5as_2 - a^3s_2^2s_1 + a^4s_2^2s_1 + 0.5a^2s_2^2 - a^2s_2 + a = 1 - x_1,$$

$$a^3s_2s_1^2 - a^4s_2s_1^2 - 0.5as_2 + a = 1 - x_1,$$

$$a^3s_1^3 - a^4s_1^3 = x_1$$

відповідно.

Нехай $A = (0.2, 0.52) \in F_A$. Тоді $s_1 = 2.6$ і $s_2 = 1.6$. Також

$$\begin{aligned}a_* &\approx 0.8361463583, \\a_0 &\approx 0.9160251472, \\a_1 &\approx 0.9684554758, \\a_2 &\approx 0.8820571411, \\a_3 &\approx 0.9292317976, \\a_4 &\approx 0.9882086368.\end{aligned}$$

Чисельні розрахунки показують, що $R_k(f_a) > 0$ на $[a, 1]$ для всіх $k = 1, \dots, 5$ для вказаного $A = (0.2, 0.52)$.

Оскільки $|R_k(f_a) - R_{k-1}(f_a)| < b_{k-1}(a)$, де $b_{k-1}(a)$ дорівнює одному з елементів множини $\left\{ \frac{1}{a^{k-1}s_2^{k-2}s_1}, \frac{1}{a^{k-1}s_2^{k-3}s_1^2}, \dots, \frac{1}{a^{k-1}s_1^{k-3}s_2^2}, \frac{1}{a^{k-1}s_1^{k-2}s_2}, \frac{1}{a^{k-1}s_1^{k-1}} \right\}$ в залежності від значення параметра a , то приймаючи до уваги, що $s_1 \geq 2$, $1 < s_2 \leq 2$ маємо наступне:

$$\begin{aligned}\inf_{k \geq 0} \inf_{[a, 1]} R_k(f_a) &> \inf_{[a, 1]} R_5(f_a) - \sum_{k \geq 0} b_{k-1}(a) = \\ \inf_{[a, 1]} \left\{ 5 - \frac{4}{a} + \frac{3}{a^2 s_1} - \frac{3}{a^2 s_1 s_2} + \frac{1}{a^3 s_2 s_1} + \frac{2}{a^3 s_2^2 s_1} - \frac{1}{2a^4 s_2^2 s_1} - \frac{1}{a^4 s_2^3 s_1} - \frac{1}{a^4 s_2^3 s_1 (a s_2 - 1)} \right\} &> 0.\end{aligned}$$

Лема 1 доведена.

Доведення теореми 1: Теорема 1 безпосередньо випливає з леми 1 та твердження 1.

Висновки

Проблема монотонності нідінг інваріанту розв'язана лише для декількох класів сімей унімодальних відображень. Найкращі результати стосуються деяких поліноміальних сімей, де можна застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної. Наприклад, всі відомі доведення монотонності нідінг інваріанту для сім'ї квадратичних відображень використовують методи комплексного аналізу. На цей час не відомо жодного "дійсного" доведення. Тому цікавою задачею є знаходження доведення монотонності нідінг інваріанту для сім'ї квадратичних відображень дійсними методами. В цьому напрямку важливо відповісти на наступні питання: чи є нідінг інваріант барн-відображень - монотонною функцією параметра? Якщо так, то чи можливо, використовуючи монотонні властивості барн-відображень апроксимувати квадратичні відображення?

В даній роботі показано, що існує принаймні одне $A \in F_A$, де F_A - деяка множина параметрів A , для якого нідінг інваріант відображення f_a -

монотонно зростаюча функція по a . Залишається відкритим питання: чи має місце подібний результат для будь-якої точки $A \in F_A$.

Література

1. K. Brucks, M.Misiurewicz and C. Tresser. Monotonicity Properties of the Family of Trapezoidal maps// Commun. Math. Phys. – 1991. – 137. – p.1-12.
2. K. Brucks, H. Bruin Topics from one-dimensional dynamics. – LMS, Student Texts 6: Cambridge University Press, 2004.
3. H. Bruin. Non-monotonicity of entropy of interval maps// Physics Letters A. – 1995. – 202. – p. 359-362.
4. P. Collet and J.-P. Eckmann. Iterated Maps on the interval as Dynamical Systems. – Boston: Birkhauser, 1980.
5. A. Douady and J.H. Hubbard. Publ. Math. Orsay. – 1984-1985.
6. С. Коляда. Однопараметрические семейства отображений интервала с отрицательным шварцианом, для которых нарушается монотонность бифуркаций// Укр. мат. журн. – 1989. – Том 41. – № 2. – с. 258-261.
7. W. de Melo and S. van Strien. One-Dimensional Dynamics. – Berlin Heidelberg New York: Springer, 1993.
8. J. Milnor and W.Thurston. On iterated maps of the interval// Lect. Notes in Math. 1342 (J.C.Alexander ed.). – 1988. – 1342. – p. 465-563.
9. M. Tsujii. A simple proof of monotonicity of entropy in the quadratic family using Ruelle operator. – Banach center preprint. – 1997.
10. M. Tsujii. A simple proof for monotonicity of entropy in the quadratic family// Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2000. – 20. – p. 925-933.
11. M. Tsujii. Monotonicity of kneading sequence for some families of unimodal maps. – Hokkaido university preprint. – 2001.
12. A. Zdunik. Entropy of transformations of the unit interval// Fund. Math. – 1984. – 124. – p. 235-241.
13. А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко и Е.Ю. Романенко. Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1986.

Надійшла до редакції 07.02.2005

УДК 536.25

Тетяна С. Краснопольська, Олена
М. Гетман, Людмила П. Зінчук,
Людмила В. Ісхакова

Структури у рідині та гранульованих середовищах.

На основі раніш виявлених восьми класів подібних структур у плинах рідини і сипучих середовищ усередині горизонтального циліндра, що обертається, побудовані математична модель та її розв'язок, пояснюючі створення диско- і кільцеподібних структур.

Ключові слова: сипуче середовище, гранульовані суміші, подібні структури, сегрегація.

E-mail: kras@ihm.kiev.ua

Tatiana S. Krasnopol'skaya, Olena M.
Getman, Lyudmyla P. Zinchuk,
Lyudmyla V. Ishakova

Structures in liquid and in granular media.

On the base of earlier revealed eight classes of similar flow patterns in liquid and granulated media inside a partially filled horizontally rotating cylinder a new mathematical model and its solution, explaining appearance of formation of ring- and disklike structures, were worked out firstly.

Key words: granular media, granular mixtures, similar structures, segregation.

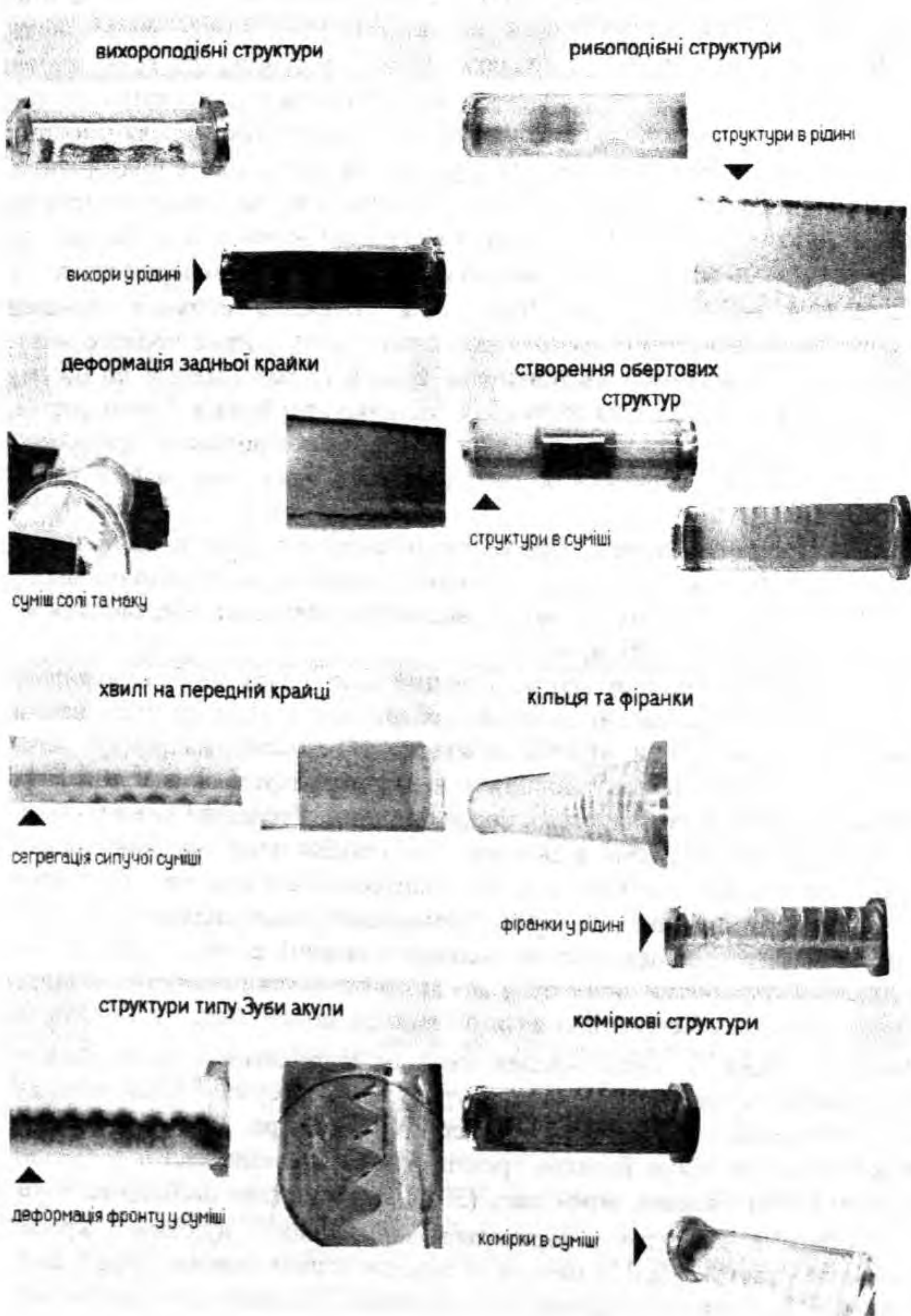
Вступ. Наукове вивчення сипучих середовищ, яке є важливим для розуміння поведінки ґрунтів і техногенної безпеки будівель, почалося досить давно і пов'язано з іменами таких вчених, як Кулон і Рейнольдс. Проте, деякі головні властивості статички і динаміки таких середовищ знаходяться ще далеко від повного розуміння. Недавні експериментальні роботи [1-3] призвели до відкриття нових станів і явищ. До дійсного часу нема фізично коректної теорії напруг сипучих середовищ, що могла б пояснити такі прості експериментальні факти, як наявність відносного мінімуму тиску під вершиною конуса статично лежачих часток піску [3]. Такі факти орієнтують науковців на більш детальне вивчення основних базових властивостей сипучих ґрунтів та середовищ. Так був проведений ряд експериментів як із сипучими сумішами, так і з рідинами, завантаженими усередину горизонтального циліндра, що обертається [1]. Першим кроком у розумінні механізмів створення різноманітних плинів стала класифікація головних структур у рідині і сипучих середовищах і їхнє порівняння [1]. У даному дослідженні для пояснення появи диско- і кільцеподібних структур побудована математична модель та отриман її розв'язок.

1. Лабораторна установка й експерименти. Установка для експериментів складалася з круглого в перетині плексигласового

прозорого циліндр (довжиною $L = 43$ см і радіуса $R = 5$ см), торець якого був з'єднан через ремінну передачу з електромотором. У експериментах використовувалася рідина трьох видів: звичайна водопровідна вода, дистильована вода (нев'язка, без солей) і в'язка рідина, що являє собою суміш дистильованої води і гліцерину в різноманітних пропорціях. Таким чином, в'язкість рідини змінювалася від $\mu = 0.01$ П (пуазів) для звичної і дистильованої води до $\mu = 0.35$ П (пуазів) для найбільше в'язкої рідини. Структури, що спостерігаються, істотно залежали від заповнення циліндра рідиною, тобто від того, який процент внутрішнього об'єму циліндра (що позначається через η) заповнювала рідина. У експериментах η змінювалася від 1% до 50%. Для створення сипучих сумішей використовувалася дрібна столова сіль білого цвіту і зерна чорного маку. При цьому, усередньому частинка солі була в 15 разів менше по об'єму частинки маку. Проте, така ж середня частинка солі була в 7 разів легше, чим зернятко маку. З огляду на різний ступінь наповнюваності дрібними і великими частками одиниці об'єму, щільність маку була майже вдвічі менше щільності солі.

2. Класи подоби плинів. При нульовій швидкості обертання циліндра ω рідина або сипуче середовище статично лежать на дні горизонтального циліндра, а при достатньо високих швидкостях обертання обертаються як тверде тіло спільно з циліндром.

2.1. Вихороподібні структури. Перший клас названий *Вихороподібні структури*. При збільшенні швидкості обертання ω від нуля спочиваюча вільна поверхня рідини втрачає стійкість в осьовому напрямку (хоча уздовж осі немає ніяких впливів), і в результаті уся вільна поверхня здається розділеної уздовж осі циліндра на секції. У середині кожної секції з'являється вихор, причому в двох сусідніх секціях напрямки прямування вихорів протилежні. На мал.1 у класі 1 (*вихороподібні структури*) подана фотографія восьми таких вихорів, "атмосфера" яких виділена легкими частками [1], розташованими на вільній поверхні рідини. При цьому швидкість обертання циліндра була $\omega = 24$ об/хв., заповнюваність циліндра (тобто, процент об'єму рідини в об'ємі циліндра) була $\eta = 50$ %, а в'язкість $\mu = 0.35$ П. Отим восьми вихорам поставлена у відповідність аналогічна розбивка вільної поверхні гранульованої суміші в так званому режимі *безупинного плину* [2] при обертанні циліндра. При обертанні зі швидкістю $\omega = 28$ об/хв. із часом реалізується сегрегація часток у суміші білої солі (70%) і чорних зерен маку (30%), що заповнює циліндр на $\eta = 6$ %. Біля торців циліндра утворюються зони білих - дрібних і краще упакованих - часток. Далі їх змінюють смужки чорних макових зерен, далі уздовж осі - білі зони, що замінюються чорними. У цілому спостерігається 9 зон.



Малюнок 1. Класи подібних структур у рідині та гранульованих сумішах.

2.2. Деформація задньої крайки прошарку. При збільшенні швидкості обертання циліндра більш явно виявляється розподіл вільної поверхні на секції. Передня крайка вільної поверхні, а також задня крайка деформуються. На фотознімках із експериментів (див. мал.1) передня крайка знаходиться нижче задньої. Передня крайка якби зустрічає обертання циліндра. На задній крайці прошарку рідини спостерігається косінусовидної форми деформація по осевій координаті z виду $\cos \frac{2\pi n}{L} z$, де $n=1,2,\dots,n^*$, (n^* - число полухвиль деформації). Причому в місцях мінімумів, тобто у випадках, коли $z_n = \frac{(2n-1)\pi}{L}$, вертикально нагору по поверхні циліндра піднімаються стовщення прошарку, що змашує увесь циліндр. На мал.1 у класі 2 (деформація задньої крайки) чітко помітні стовщення прошарку змочування рідини при $\omega = 273$ об/хв., $\eta = 13\%$, $\mu = 0.35$ П. Таки ж стовщення спостерігаються і по поверхні циліндра над комірковими структурами в головному прошарку гранульованої суміші на дні циліндра. Ці стовщення містять дуже дрібні білі частки солі, що покривають циліндр. У експерименті використовувалася та ж суміш, що й у попередньому класі 1, проте $\omega = 176$ об/хв.

2.3. Деформація передньої крайки. Передня крайка перетерплює косінусовидної форми деформацію з яскраво вираженою довжиною хвилі $\lambda = (L/2n^*)$. Деформація переднього фронту є стійкою структурою в в'язкій рідині, що реалізується і у звичній, і в дистильованій воді. Проте, довжина хвилі деформації для цих середовищ менше, і піки деформації чинять коливання в осевому напрямку. На мал.1 у класі 3 (хвилі на передній крайці) показані 5 хвиль на передній крайці смужки рідини, що займає центральну частину циліндра. Унікальність даної структури складається в тому, що смужка рідини не торкається торців циліндра. На фотографії подана стійка деформація фронту при $\omega = 124$ об/хв., $\eta = 1\%$. Аналогічна косінусообразна деформація переднього фронту обертового прошарку сипучої суміші солі (57%) і чорних зерен маку показана для $\omega = 169$ об/хв. і $\eta = 20\%$. На фотографії помітні 8 хвиль білого фронту на фоні внутрішнього чорного прошарку. Також на цьому знімку видна сегрегація в азимутальному напрямку, після білого фронту випливають нагору по поверхні циліндра чорні плями, що свідчить про те, що суміш у процесі обертання піддається сегрегації через розходження в розмірах і поверхневих властивостях дрібних білих часток солі і великих чорних часток маку.

2.4. Структури типу Зуби акули. При подальшому збільшенні швидкості обертання циліндра амплітуда деформацій переднього фронту росте, і косінусообразна її форма перетворюється в зубцеподібну з досить гострими піками і гострими рогами в точках з'єднання зубців. Такий

малюнок деформації переднього фронту одержав назву *Зуби акули*. На малюнку в класі 4 (*структури типу Зуби акули*) подана фотографія деформації переднього фронту при $\omega = 150$ об/хв., отриманої в рідині, параметри якої показані також у класі 3. Аналогічний малюнок деформації переднього фронту обертового прошарку сипучого середовища був отриманий при $\omega = 168$ об/хв. у суміші з 70% білої солі і 30% чорного маку при заповненні циліндра на $\eta = 15\%$. Як впливає з порівняння фотографій, поданих у класах 3 і 4 для сипучих сумішей, білі зубці деформацій в останньому випадку виглядають більш гострими на фоні внутрішньо чорного прошарку. При цьому більш очевидна також радіальна сегрегація, коли частки білої солі знаходяться на поверхні циліндра і рухаються по траєкторіях із більшими радіусами, ніж зерна маку. Тому зсередини циліндр покритий чорним прошарком макових зерен.

2.5. Рибоподібні структури. Як було відзначено раніше, у класі 2 при розгляді деформацій задньої крайки, тонкий прошарок рідини або сипучого середовища, що змашує поверхню циліндра, має стовщення, що із збільшенням швидкості обертання циліндра стають більш наочними. Крім того, при достатньо високих швидкостях обертання задня крайка головного прошарку піднімається по поверхні циліндра, досягаючи вищої точки перетину. Структури в рідині, коли передня крайка має осьові деформації, а верхня - періодичні стовщення, що нагадують висячих риб, одержали назву *рибоподібні* [1]. У класі 5 подана фотографія такої структури в рідині, яка є звичайною водопровідною водою при $\omega = 503$ об/хв. і $\eta = 15\%$. У в'язких рідинах дана структура є більш стійкою і легко реалізованою. У відповідність фотознімку для рідини поставлений знімок структури, отриманої в сипучому середовищі. На знімку в класі 5 чітко видна деформація передньої крайки спільно з неоднорідністю прошарку, що досягає в деяких перетинах вищих точок перетину циліндра і має сегрегацію уздовж осової координати. Заповнення циліндра при цьому було на $\eta = 30\%$, а $\omega = 146$ об/хв., а сипуча суміш містила 70% білої солі і 30% маку.

2.6. Створення обертових структур. Рибоподібні структури переходять у обертові при подальшому збільшенні швидкості обертання циліндра. У класі 6 на фотознімках із дистильованою водою показані дві області з тонкими прозорими обертовими як тверде тіло прошарками рідини біля торців циліндра і центральна частина циліндра, що містить значну частину об'єму рідини. Ця центральна частина має періодичні стовщення в рідині у виді дисків, що стоять перпендикулярно осі циліндра. Фотографія зроблена для $\omega = 606$ об/хв. і $\eta = 9\%$. У гранульованій суміші обертові прошарки непрозорі і у поверхні циліндра на фотографії виглядають білими, у той час як центральна зона, що знаходиться в режимі безупинної течії [2], подана чорною областю. Утворюються обертові області, як і в рідині, від

торців циліндра. Показана структура отримана при дослідженнях із сумішшю, використаної також у класі 3, але при $\omega = 189$ об/хв. Подоба структур у рідині і сипучому середовищі очевидна.

2.7. Кільцеві і фіранкоподібні структури. Найбільш надзвичайні структури спостерігаються в рідині і гранульованих сумішах перед переходом до режиму повного обертання як твердого тіла. Це так звані *фіранки* в рідині [1] і кільця у гранульованих сумішах. На фотографії в класі 7 показані *фіранки* в звичайній воді ($\omega = 696$ об/хв.) при половинному заповненні обсягу циліндра. Фіранкоподібним структурам у рідині ставляться у відповідність кільцеві структури в сипучих сумішах, що обертаються. Кільцеві структури є демонстрацією неоднорідного розподілу щільності суміші в осьовому напрямку. Крім такого роду осрової сегрегації, спостерігається також неоднорідність у розподілі обсягу усієї суміші. При цьому в перетинах із кільцями локалізується по обсязі більше суміші, чим у сусідніх не кільцевих, чорних, перетинах. Кільцеві структури показані на знімку при $\omega = 174$ об/хв. і $\eta = 15\%$, де також видна сегрегація в азимутальному напрямку.

2.8. Коміркові структури. На фотографіях у класі 8 показані часткові диски при $\omega = 425$ об/хв. у в'язкій рідині з $\mu = 0.35$ П и при $\eta = 15\%$. Частковими вони є тому, що біля дна мають не засланий рідиною сегмент. Диски як би розбивають увесь обсяг на осередки. Аналогічним є малюнок у смужку при обертанні з $\omega = 154$ об/хв. сипучої суміші, використовуваної також у класах 3 і 6.

3. Математична модель структур класу 7. Теорія суцільного середовища традиційно використовується для опису плинів у гранульованих середовищах спільно з застосуванням чисельних методів і моделювання. Проте, теоретичне пояснення фізики гранульованих середовищ далеко від повного. Так, у теорії багатофазних плинів відсутнє однозначне замикання системи рівнянь шляхом запровадження середньоквадратичної швидкості як аналога температури. Такі моделі застосовуються для чисельного моделювання, при цьому однозначна відповідність коефіцієнтів рівнянь і фізичних параметрів конкретних сипучих середовищ відсутня. Гранульовані середовища відносяться до класу істотно дисипативних систем і мають такі унікальні, не характерні для рідин, властивості як утворення кластерів, колапси плинів [4] і сегрегація. Незважаючи на настільки явну відмінність, явища структуроутворення обумовлені розподілом поля швидкостей і формуються під дією хвиль і сил тиску, тобто головних характеристик моделей суцільних середовищ. Усі показані на мал.1 структури формуються внаслідок наявності осьових хвиль із різноманітними параметрами. Перейдемо до математичного аналізу структур класу 7, тобто до математичного пояснення появи таких дивовижних структур як диски (або фіранки) у рідині та кільця у сипучих сумішах. З цією метою

побудуємо найбільш просту математичну модель, яка б висвітлювала основні фізичні механізми утворення таких структур. В циліндричній системі координат r, θ і z , де u, v, w компоненти швидкості уздовж цих координат, рівняння, що описують сталі рухи наповнювача по циліндричній поверхні, мають вигляд

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ -g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ -g \cos \theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Рівняння нерозривності має вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

Кінематичну умову на вільній поверхні $r = R - h$ можна записати як

$$u = -\frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{v}{r} - \frac{\partial h}{\partial z} w, \quad (2)$$

Крайові умови при $r = R$ у вигляді:

$$u = 0, v = \Omega R, w = 0.$$

а при $z = 0$ та $z = L$ у формі: $w = 0$. Запишемо систему рівнянь (1) у безрозмірному вигляді. За характерний розмір по координаті z приймаємо довжину хвилі λ . Вважаємо, що довжина хвилі та радіус R циліндра є величинами одного порядку, а середня товщина шару $h_0 \ll \lambda$. Таким чином, вводимо малий параметр $\varepsilon_1 = \frac{h_0}{\lambda} \approx \frac{h_0}{R} \ll 1$, який, наприклад, для заповнення циліндра на $\eta = 35\%$ дорівнює 0.2. Враховуючи заміну перемінних величин [3]:

$$v_0 = \Omega R, v^* = \frac{v}{v_0}, u^* = \frac{u}{h_0 v_0}, z^* = \frac{z}{R}, \theta^* = \frac{\theta}{1}, w^* = \frac{w}{v_0}, h^* = \frac{h}{h_0},$$

$$p^* = \frac{p}{v_0^2 \rho}, \text{Re}_1 = \frac{v_0 h_0}{\nu}, \text{Re}_1 \varepsilon_1 = O(1), \quad (3)$$

$$r^* = \frac{r}{R}, \partial r^* = O(\varepsilon_1), \partial r^* = \frac{\partial r}{R}, \partial \tau = \frac{r}{R} \partial \theta, \varepsilon = \frac{g}{\Omega^2 R}$$

рівняння нерозривності та руху отримають (після нехтування малими членами) більш простий вигляд.

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial \tau} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{v^{*2}}{r^*} - \varepsilon \sin \theta - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = 0,$$

$$\varepsilon_1 u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial \tau} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\varepsilon \cos \theta - \frac{\partial p^*}{\partial \tau} + \frac{1}{\text{Re}_1 \varepsilon_1} \left(\varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} \right),$$

$$\varepsilon_1 u^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial \tau} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re}_1 \varepsilon_1} \left(\varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} \right).$$

Виділяючи домінуючу складову швидкості v та тиску p , тобто записуючи

$$v^* = r^* + v_1, p^* = \frac{1}{2} [r^{*2} - (1 - \varepsilon_1)^2] + p_1, u_1 = \frac{u}{v_0},$$

для вісесиметричних структур отримаємо рівняння (до членів $O(1)$)

$$2v_1 - \frac{\partial p_1}{\partial r^*} = 0, u_1 = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^{*2}} \right), \quad (5)$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} \right) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial r^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0,$$

поверхні від поверхні середньої товщини) треба використати граничні умови. Для знаходження шести сталих величин маємо систему шести однорідних рівнянь. Система має нетривіальне рішення тільки тоді, коли детермінант її дорівнює нулеві. Детермінант у свою чергу є функцією власних чисел $k_n = \frac{2\pi R n}{L}$. Задовольняючи умові, що детермінант дорівнює нулеві, виділяємо хвильові параметри k_n реалізуємих структур. Для знаходження невідомої функції δ застосуємо співвідношення (7). Звідки знаходимо

$$\delta(r^*, z^*) = \frac{u_2(r^*)}{w_2(r^*)} \ln(|\sin k_n z^*|). \quad (10)$$

Це співвідношення пояснює утворення дисків або фіранок у рідині, також кілець у сипучих середовищах, бо воно містить в собі сингулярність: коли координата z така, що $\sin(k_n z^*) = 0$, функція $\ln$ дорівнює нескінченності, тобто товщина прошарку рідини або суміші саме в такому перетині циліндра стає незрівнянно великою. Іншими словами, рідина або сипуча суміш перетинає простір циліндра, утворюючи фіранку. Таким чином, у даній роботі уперше вдалося пояснити створення таких незвичних структур як диски в рідині і кільця щільності в сипучих середовищах на основі побудованої математичної моделі. При застосуванні принципу мінімуму споживаної енергії ця модель стає ще більш переклиивою.

Література

1. Краснопольская Т.С., ван Хейст Г.Я., Воскамп Я.Х., Тригер С.А. Подобие структур в жидкости и гранулированных средах в воды горизонтальном вращающемся цилиндре // Прикл. механика. – 2001. – т. 37. – №2. – С. 108-114.
2. Ristow G. H. Pattern formation in granular materials. - Berlin: Springer Verlag, 2000.- 160 p.
3. Trigger S. A. , van Heijst G. J. F. , Krasnopolskaya T. S., Schram P. P. J. M. Stress distribution in quasi-crystalline granular piles // Physica A. – 2001. – v. 294, № 2. - P. 370-390.
4. Goldhirsch I. Scales and kinetics of granular flows // Chaos. – 1999. – v. 9, № 3. - P. 659-672.

Надійшла до редакції 3 січня 2005 р.

УДК 531.38+534.1

Віктор П.Легеза

**Узагальнена математична
модель динаміки однієї
віброзахисної системи з
котковим гасником**

На основі підходу Аппеля побудовано математичну модель плоского руху однорідної важкої кулі у сферичній виїмці без ковзання. Сферичну виїмку жорстко закріплено на пружному стержні, який здійснює малі вільні коливання відносно свого положення рівноваги.

Ключові слова: віброзахисна система, котковий гасник, перевернутий маятник, сферична виїмка, рівняння Аппеля, кінематичні в'язі.

Viktor P. Legeza

**Generalized mathematical model
of dynamics of certain
vibroprotective system with roller
absorber**

Mathematical model of the plane movement of heavy homogeneous ball in spherical groove without sliding had been built on the base of Appell's approach. Spherical groove has been fixed hard on the elastic rod which carry out small free oscillations about own position of equilibrium.

Key Words: vibroprotective system, roller absorber, inverted pendulum, spherical groove, Appell's equations, kinematic tie.

Постановка задачі. В роботі розглядається актуальна задача неголономної механіки, пов'язана із коливанням важкої однорідної кулі в сферичній виїмці, жорстко приєднаної до одного з кінців вертикального пружного стержня (так званий перевернутий маятник). Протилежний кінець стержня жорстко вмонтований у нерухомий фундамент (рис. 1).

Ця задача виникає у сучасній практиці віброзахисту відповідальних висотних споруд баштового типу (стволів вітроенергетичних установок, телевеж, витяжних труб) із застосуванням коткових гасників коливань, що виникають під дією спеціальних динамічних навантажень (сейсмозбудження, вітровий потік, вибухова хвиля, коливання ґрунта, яке відбувається при роботі промислових машин та механізмів і т.п.) [1, 2]. Застосування таких гасників дозволяє дуже суттєво знижувати амплітуди коливань споруди, яку потрібно захистити, за рахунок набагато більшої амплітуди коливань робочого тіла гасника [3-7].

Раніше розглядались задачі неголономної механіки про рух однорідної важкої кулі без ковзання по різним нерухомим поверхням другого порядку (сфера, горизонтальний та вертикальний циліндри, вертикальний конус, параболоїд обертання, еліпсоїд) [8-13]. В роботі [14] було побудовано математичну модель динаміки перевернутого маятника з масивною рухомою сферичною виїмкою у верхній його частині, в якій перекочується важка куля, без врахування пружності вертикального стержня перевернутого маятника.

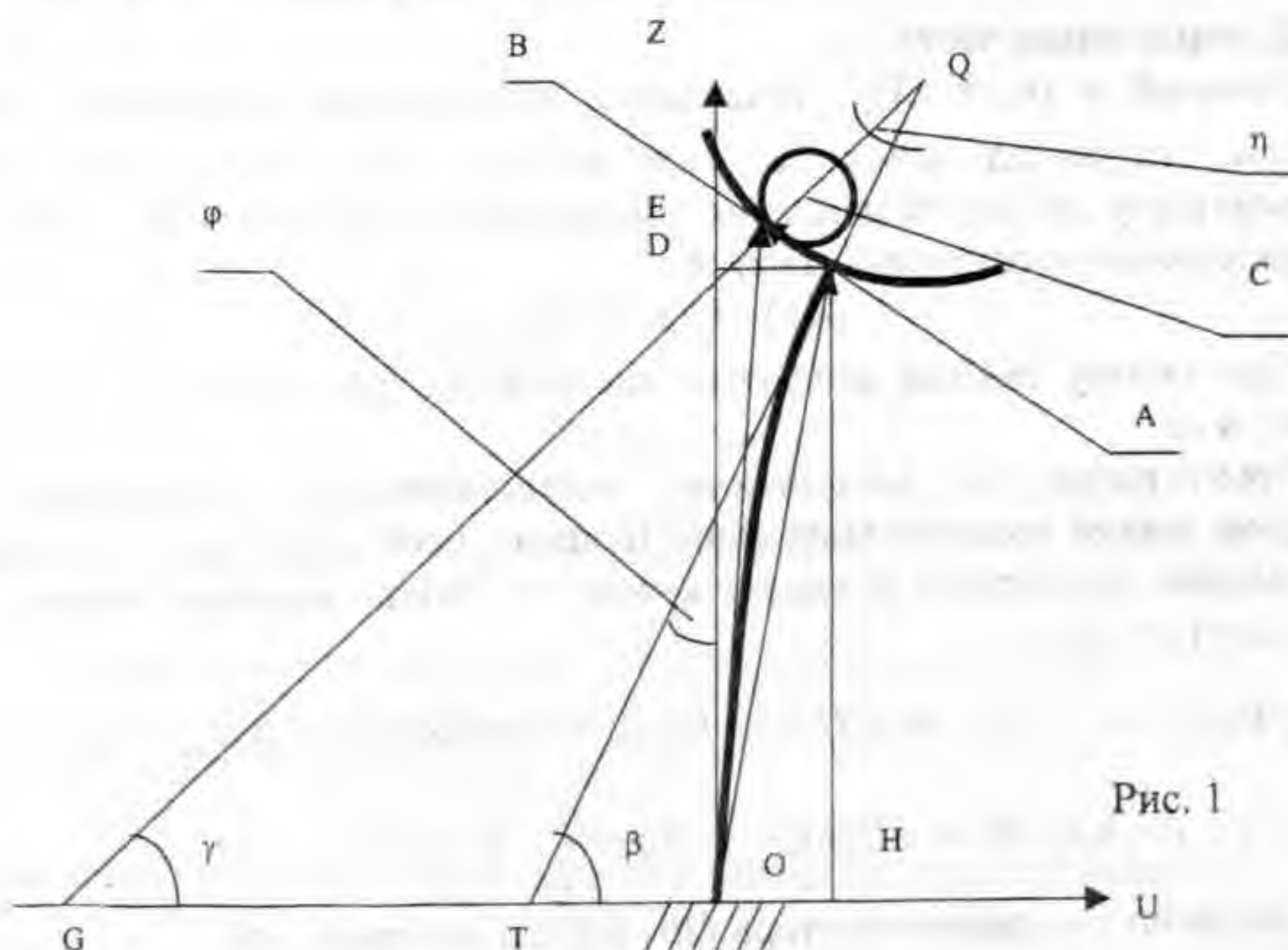


Рис. 1

Таким чином, розглядаються вільні коливання механічної системи, яка складається з пружного стержня довжиною L , один кінець якого жорстко з'єднаний з нерухомим постаментом, а на другому кінці жорстко закріплено масивне тіло масою M зі сферичною виїмкою радіуса R , в якій розташована важка однорідна куля масою m радіуса r з можливістю перекатування без ковзання по внутрішній сферичній поверхні масивного тіла масою M . Неупругий опір стержня (споруди) при дослідженні не враховується (ця обставина практично не впливає на вибір оптимальних параметрів гасника коливань [1]), тому досліджувана система консервативна. Особливістю та новизною задачі є те, що сферична виїмка масивного тіла масою M закріплена на гнучкому стержні і має можливість повертатись на деякий малий кут φ відносно горизонтальної осі в процесі коливань кулі у вказаній виїмці.

Викладемо підхід, на основі якого буде ґрунтуватись побудова кінематики та динаміки механічної системи, що розглядається.

В загальному випадку ця система має фактично нескінченне число степеней волі. Вважаючи, що кути відхилення стержня від вертикалі OZ малі (це має місце на практиці), припустимо, що стержень згинається тільки за одною формою $\psi(z)$, як при статичному згинанні. Тоді функцію прогину $U(z,t)$ можна апроксимувати таким чином:

$$U(z,t) = \psi(z)X(t) \quad (1)$$

де $X(t)$ – амплітуда коливань у вигляді узагальненої координати (як функція тільки часу).

Зазвичай в якості $X(t)$ приймають переміщення характерної точки системи, наприклад точки А. Тоді функція $\psi(z)$ для форми згину приймається у вигляді відношення переміщення довільної точки стержня до переміщення характерної точки А:

$$\psi(z) = U(z, t) / X(t) \quad (2)$$

При такому підході механічна система, що розглядається, має дві степені волі.

Геометричні та кінематичні співвідношення. Перейдемо до побудови деяких геометричних співвідношень, необхідних для подальших перетворень. Випишемо очевидні кутові та лінійні співвідношення, які впливають з рис.1:

$$\angle BQA = \eta, \angle TFO = \varphi; HO = U_A(L, t); QA = QB = R; \angle \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

$$AH = L - h(t); h(t) = ED; EO = L; \angle \gamma = \frac{\pi}{2} - (\eta + \varphi);$$

Знайдемо координати вектора $\overline{OB}$. З рис.1 випливає, що

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \quad (3)$$

Запишемо координати вектора $\overline{OA}$:

$$\overline{OA} = [U_A(L, t); 0; L - h(t)] \quad (4)$$

$$\text{де } U_A(L, t) = \psi(L) \cdot X(t); h(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L [U'_z(z, t)]^2 dz = \frac{1}{2} X^2(t) \int_0^L [\psi'(z)]^2 dz$$

Визначимо координати вектора $\overline{AB}$ з урахуванням $|q| = R|\sin \eta|$ та малих кутів φ , $\Delta_B = PB$ (Рис. 2).

$$\overline{AB} = [-R \sin(\eta) + \varphi R(1 - \cos(\eta)); 0; R(\varphi \sin(\eta) + 1 - \cos(\eta))] \quad (5)$$

Виразимо координати вектора $\overline{OB}$:

$$\overline{OB} = [U_A(L, t) - R \sin(\eta) + \varphi R(1 - \cos(\eta)); 0; L - h(t) + R(1 - \cos(\eta) + \varphi \sin(\eta))] \quad (6)$$

Так як куля рухається по сферичній виїмці без ковзання, то на швидкість кулі в точці В накладене кінематичне обмеження, а саме: куля та сферична виїмка в точці дотику В мають однакові швидкості. Тому швидкість кулі в точці С знаходимо так:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \omega \vec{j} \times r \vec{n} \quad (7)$$

$$\text{де } \vec{V}_B = \dot{\overline{OB}} = [\dot{U}_A(L, t) - R \cos(\eta) \dot{\eta} + \varphi R(1 - \cos(\eta)) + R \varphi \cdot \sin(\eta) \dot{\eta}; 0; -\dot{h}(t) + R(\cos(\eta) \dot{\eta} \varphi + \sin(\eta)(\dot{\varphi} + \dot{\eta}))] \quad (8)$$

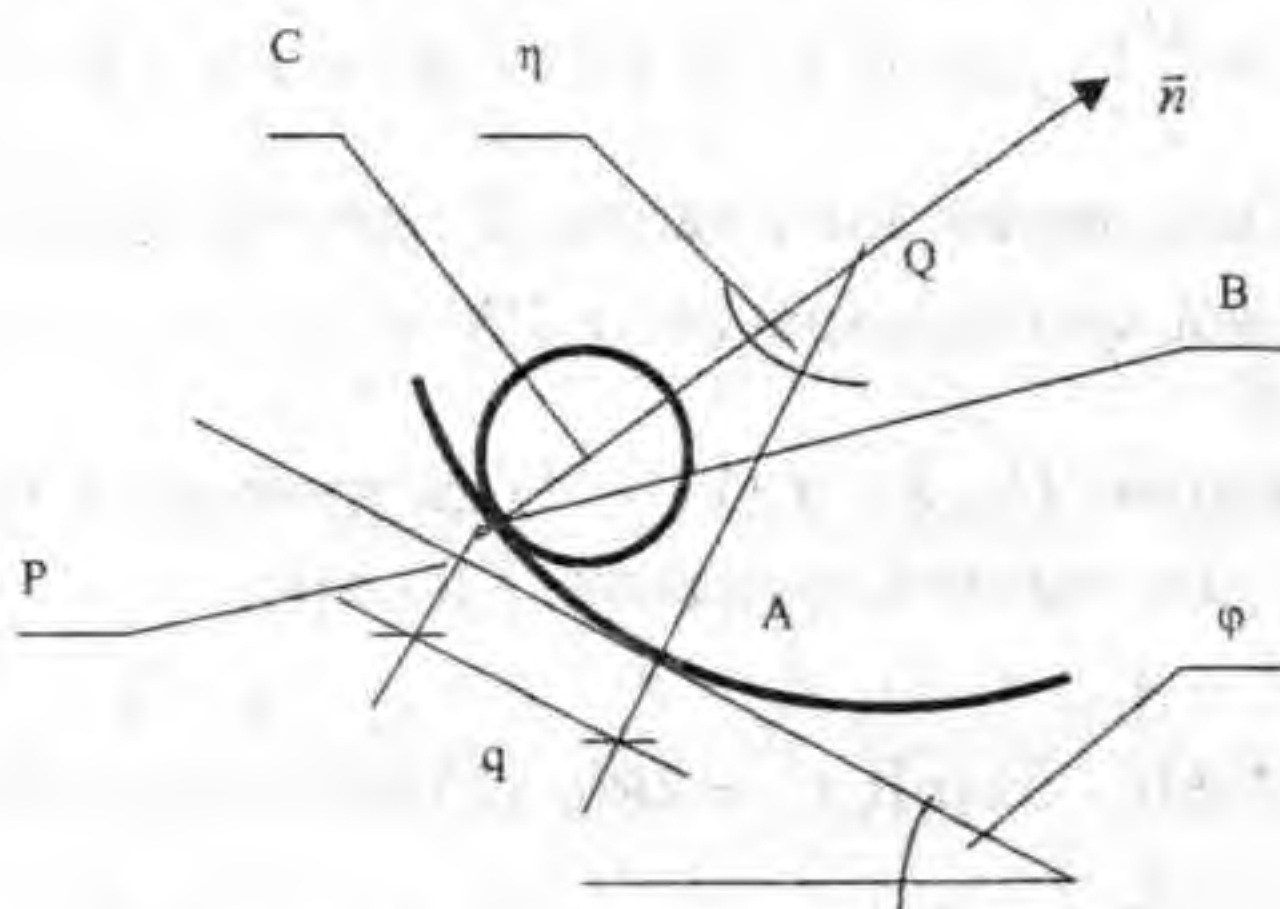


Рис. 2

Тут враховано ту обставину, що куля рухається по сфері без ковзання, так що $\vec{v}_A = \vec{v}_B = r\dot{\xi} = \bar{R}\dot{\eta} \Rightarrow |\dot{\xi}| = \frac{\bar{R}}{r}|\dot{\eta}|; \omega = \dot{\xi}$. Але напрямки у векторів протилежні, тому $\vec{\omega} = -\dot{\eta} \frac{\bar{R}}{r}$ (ξ – кут повороту кулі відносно свого ЦМ, $\bar{R} = R - r$).

Визначимо напрям вектора внутрішньої нормалі, побудованого в точці В (рис. 2):

$$\bar{n} = [\sin(\varphi + \eta); 0; \cos(\varphi + \eta)] = [\sin(\eta) + \varphi \cos(\eta); 0; \cos(\eta) - \varphi \sin(\eta)] \quad (9)$$

Запишемо кінематичні співвідношення (7) в скалярній формі, вважаючи, що $r/R \rightarrow 0$ та $\bar{R} \equiv R$:

$$\dot{U}_C(L,t) = \dot{U}_A(L,t) + 2R\varphi \sin(\eta)\dot{\eta} - 2R \cos(\eta)\dot{\eta} + R\dot{\varphi} \cdot (1 - \cos(\eta)), \quad (10)$$

$$\dot{Z}_c = -\dot{h}(t) + 2R\dot{\eta}(\varphi \cdot \cos(\eta) + \sin(\eta)) + R\sin(\eta)\dot{\varphi}, \quad (11)$$

де $\dot{h}(t) = X(t)\dot{X}(t) \int_0^L [\psi'(z)]^2 dz; \varphi(t) = \psi'(L)X(t); \dot{\varphi}(t) = \psi'(L)\dot{X}(t);$

$$\dot{U}_4(L, t) = \psi(L) \dot{X}(t).$$

Побудова динамічних рівнянь руху системи. Перейдемо до побудови динамічних рівнянь руху системи, зпираючись на підхід Апеля з введенням функції прискорень S [8, 10, 11]. Запишемо функцію прискорень S для всіх елементів системи з урахуванням особливостей їх руху (тут нехтуємо вертикальною складовою прискорення тіла M $\ddot{h}(t)$, яка набагато менша порівняно з горизонтальною складовою $\ddot{U}_A(L,t)$ при малих кутах φ):

$$S = \frac{1}{2} \int_0^L m(z) [\ddot{U}(z, t)]^2 dz + \frac{M}{2} [\ddot{U}_A(L, t)]^2 + \frac{J_M}{2} \ddot{\phi}^2 + \frac{\mu}{2} (\dot{U}_C^2 + \dot{Z}_C^2) + \frac{J_\mu}{2} \ddot{\xi}^2 \quad (12)$$

де J_M - момент інерції масивного тіла з масою M відносно свого ЦМ; J_μ - момент інерції однорідної кулі відносно свого ЦМ в т.С; ξ - кут повороту кулі відносно свого ЦМ.

Знайдемо другі похідні $\ddot{U}_C, \ddot{Z}_C$ з (10)-(11) та зробимо в їх виразах перехід до незалежних узагальнених координат $X(t), \eta(t)$:

$$\ddot{U}_C = A_{ux} \cdot \ddot{X} + A_{u\eta} \cdot \ddot{\eta} + \Omega_u; \ddot{Z}_C = A_{zx} \cdot \ddot{X} + A_{z\eta} \cdot \ddot{\eta} + \Omega_z; \quad (13)$$

де $A_{ux} = \psi(L) + \psi'(L)R(1 - \cos(\eta)); A_{u\eta} = 2R(\psi'(L)X(t)\sin(\eta) - \cos(\eta));$

$$A_{zx} = R\psi'(L)\sin(\eta) - X(t) \int_0^L [\psi'(z)]^2 dz; \quad A_{z\eta} = 2R(\sin(\eta) + \psi'(L)X(t)\cos(\eta));$$

$$\Omega_u = 2R\dot{\eta}^2(\sin(\eta) + \psi'(L)X(t)\cos(\eta)) + 3R\sin(\eta)\psi'(L)\dot{X}(t)\dot{\eta};$$

$$\Omega_z = 3R\cos(\eta)\psi'(L)\dot{X}(t)\dot{\eta} + 2R\dot{\eta}^2(\cos(\eta) - \psi'(L)X(t)\sin(\eta)) - \dot{X}^2(t) \int_0^L [\psi'(z)]^2 dz$$

Підставимо в функцію S всі прискорення, отримані в незалежних узагальнених координатах, та зробимо деякі перетворення:

$$S = \left[\frac{1}{2} \int_0^L m(z) [\psi(z)]^2 dz + \frac{M}{2} \psi^2(L) + \frac{J_M}{2} \psi'^2(L) + \frac{\mu}{2} (A_{ux}^2 + A_{zx}^2) \right] \dot{X}^2 +$$

$$+ \frac{\mu}{2} (A_{u\eta}^2 + A_{z\eta}^2 + 0,4R^2) \dot{\eta}^2 + \mu (A_{ux} A_{u\eta} + A_{zx} A_{z\eta}) \dot{X} \dot{\eta} + \mu (A_{ux} \Omega_u + A_{zx} \Omega_z) \dot{X} +$$

$$+ \mu (A_{u\eta} \Omega_u + A_{z\eta} \Omega_z) \dot{\eta} + \frac{\mu}{2} (\Omega_u^2 + \Omega_z^2) \quad (14)$$

Запишемо рівняння Аппеля в загальній формі:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{X}} = P_X; \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}} = P_\eta \quad (15)$$

Знайдемо узагальнені сили P_X, P_η . Для цього випишемо вираз для елементарної роботи δA , розглядаючи рух кулі під дією сил тяжіння, а маси M та мас $m(z)$ - під дією пружних сил зігнутого стержня та сил тяжіння.

$$\delta A = -\mu g \delta Z_C - Mg \delta h - g \int_0^L m(z) U'(z, t) \delta U' dz + \int_0^L EJ(z) U''(z, t) \delta U'' dz \quad (16)$$

З другого боку, вираз для елементарної роботи на віртуальних переміщеннях незалежних узагальнених координат $\delta X, \delta \eta$ має вигляд:

$$\delta A = P_X \cdot \delta X + P_\eta \cdot \delta \eta \quad (17)$$

Виразимо всі варіації, які входять в (16), через варіації незалежних узагальнених координат δX , $\delta \eta$:

$$\delta Z_C = -\delta h + 2R(\sin(\eta) + \psi'(L)X(t)\cos(\eta))\delta\eta + R\sin(\eta)\psi'(L)\delta X(t);$$

$$\delta h = X(t) \int_0^L \psi'^2(z) dz \delta X; \quad \delta U' = \psi'(z) \cdot \delta X; \quad \delta U'' = \psi''(z) \delta X. \quad (18)$$

Перепишемо вираз для елементарної роботи на віртуальних переміщеннях незалежних узагальнених координат:

$$\delta A = \left[g(\mu - M)X(t) \int_0^L \psi'^2(z) dz - \mu g R \sin(\eta) \psi'(L) - gX(t) \int_0^L m(z) \psi'^2(z) dz + \right. \\ \left. + X(t) \int_0^L EJ(z) [\psi''(z, t)]^2 dz \right] \delta X - 2\mu g R (\sin(\eta) + \psi'(L)X(t)\cos(\eta)) \delta \eta \quad (19)$$

Порівнюючи вирази для δA в (17) та (19), знайдемо узагальнені сили – праві частини рівнянь Аппеля:

$$P_X = X \left[g(\mu - M) \int_0^L \psi'^2(z) dz - g \int_0^L m(z) \psi'^2(z) dz + \int_0^L EJ(z) \psi''^2(z) dz \right] - \\ - \mu g R \sin(\eta) \psi'(L); \quad (20)$$

$$P_\eta = -2\mu g R (\sin(\eta) + \psi'(L)X(t)\cos(\eta))$$

Виконаємо диференціювання у відповідності із (15) та отримаємо наступну систему двох рівнянь руху досліджуваної механічної системи:

$$a_{1x} \ddot{X} + a_{1\eta} \ddot{\eta} = f_1;$$

$$a_{1\eta} \ddot{X} + a_{2\eta} \ddot{\eta} = f_2,$$

$$de \quad a_{1x} = \frac{1}{\mu} \left[\int_0^L m(z) \psi^2(z) dz + M \psi^2(L) + J_M \psi'^2 \right] + (A_{ux}^2 + A_{zx}^2); \quad (21)$$

$$a_{1\eta} = A_{ux} A_{u\eta} + A_{zx} A_{z\eta}; \quad a_{2\eta} = A_{u\eta}^2 + A_{z\eta}^2 + 0,4R^2;$$

$$f_1 = P_X / \mu - (A_{ux} \Omega_u + A_{zx} \Omega_z); \quad f_2 = P_\eta / \mu - (A_{u\eta} \Omega_u + A_{z\eta} \Omega_z).$$

Висновки. Як впливає з отриманих рівнянь (21), динамічні рівняння Аппеля системи “важка куля у сферичній виїмці перевернутого маятника” самі по собі описують плоский рух механічної системи. Вже при побудові цих рівнянь були враховані співвідношення кінематичної в’язі (10)-(11), завдяки чому система рівнянь (21) вже підготовлена до числового аналізу.

Після точного вибору функції, яка описує першу форму $\psi(z)$ при статичному згинанні консольного стержня, можна перейти до числового аналізу еволюції руху кулі в сферичній виїмці на основі розробленої в цій роботі математичної моделі, що є окремою самостійною задачею.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика* (под редакцией Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича). - М.: Стройиздат, 1981.- С.149 – 175.
2. *Сысоев В.И. Устройства для гашения колебаний / Справочник проектировщика «Динамический расчет зданий и сооружений»* (под редакцией Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича). - М.: Стройиздат, 1984.- С.264 – 271.
3. *Кондра М.П., Остроумов Б.В. Опыт применения динамических гасителей для виброзащиты башен // Тезисы доклада на междунар. симпозиуме «Виброзащита в строительстве».* – Ленинград, 1984. – т.2, С. 33 – 34.
4. *Легеза В.П. Исследование динамического поведения нового гасителя вынужденных колебаний высотных сооружений // Изв. РАН «Механика твердого тела».* – 2003. - №5. – С. 31 – 38.
5. *Legeza V.P. Rolling of a heavy ball in translationally moving body //Int. Appl. Mechanics.* –Vol. 38. - №6. – 2002. – P. 758 – 764.
6. *Legeza V.P. Determination of the amplitude-frequency characteristic of the new roller damper for forced oscillations // “Journal of Automation and Information Sciences”.* – 2002. – Vol. 34. - №5. – P. 32 – 39.
7. *Легеза В.П. Динамика виброзащитных систем с роликовым гасителем низкочастотных колебаний // Проблемы прочности.* - №2. – 2004. – С. 106 – 118.
8. *Добронравов В.В. Динамика неголономных систем.*- М.: Высшая школа, 1970. – 272 с.
9. *Легеза В.П. Вывод уравнений движения тяжелого шара в полости трехосного эллипсоида и их численный анализ // Изв. АН СССР «Механика твердого тела».* – 1990. - № 2. – С. 39 – 43.
10. *Лурье А.И. Аналитическая механика.*- М.- Физматгиз, 1961.- 824 с.
11. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем.*- М.: Наука, 1967. – 520 с.
12. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле.* – М.: «Машиностроение», 1985. – 472 с.
13. *Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем.* – М. : Мир, 1982. – 304 с.
14. *Legeza V.P. Plane problem on a heavy ball rolling in a spherical recess of an inverted pendulum // Int. Appl. Mechanics.* – Vol. 37. - №8. – 2001. – P. 1089 – 1093.

Надійшла до редакції 10.11.2004

УДК 539.3

Ірина В. Лебедева

Зміщення еліпсоїдального та сферичного включень у необмеженому пружному середовищі
Серія: фізико-математичні науки

Методом власних векторних функцій розв'язано задачі про напружений стан пружного середовища при переміщенні в ньому еліпсоїдального та сферичного включень. Обчислено компоненти вектора переміщень та вектора напружень на поверхнях еліпсоїда та сфери. Здійснено порівняння цих розв'язків шляхом граничного переходу від еліпсоїдальних до сферичних координат.

Ключові слова: пружне середовище, сферичне включення, еліпсоїдальне включення

Iryna V. Lebedyeva

The Displacement of Ellipsoidal and Spherical Inclusions in the Elastic Medium
Series: Physics & Mathematics Sciences

The problems on stressed state of elastic medium under ellipsoidal and spherical inclusions displacement are solved by the method of vector eigenfunctions. The components of displacement and stress vectors on the ellipsoid and sphere surfaces are calculated. These solutions are compared in the limit when the ellipsoidal geometry degenerates to the spherical one. The results obtained can be useful in composite materials design.

Key Words: elastic medium, spherical inclusion, ellipsoidal inclusion

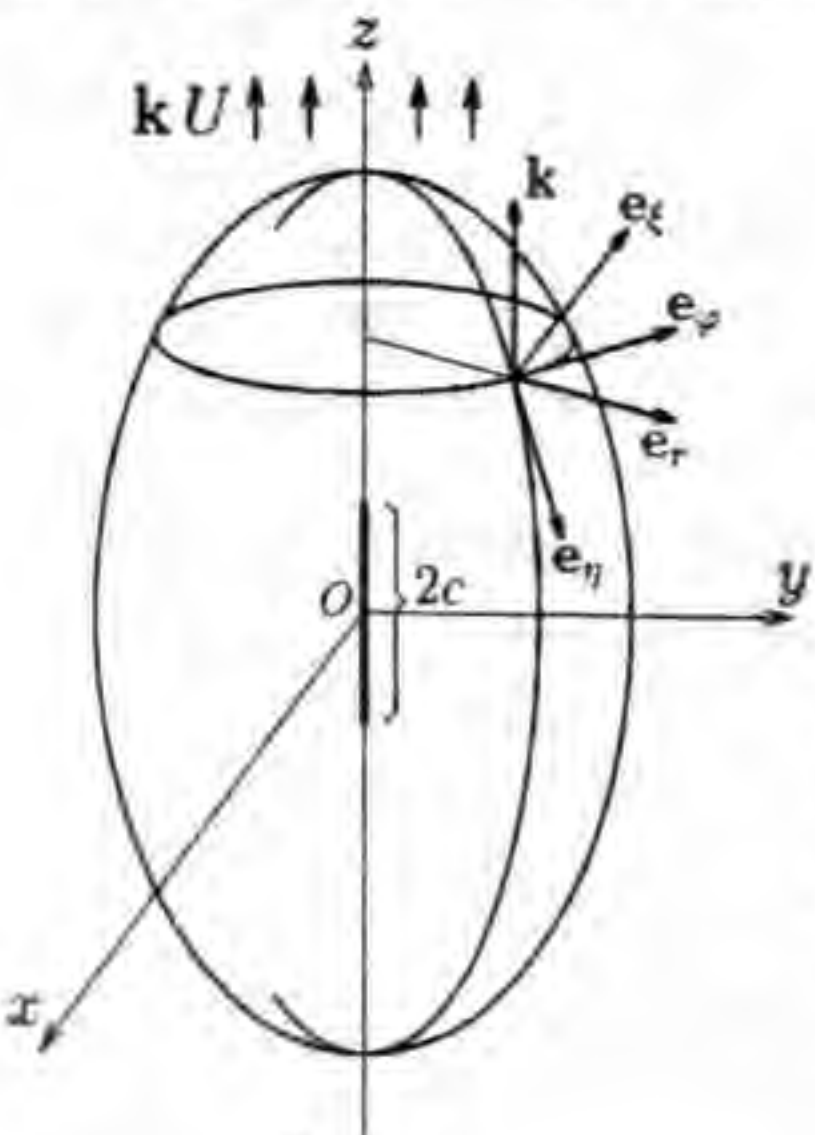
*E-mail: Lebedevai@ukr.net

1. Вступ. Значних успіхів у галузі лінійної механіки руйнування за відносно короткий час було досягнуто завдяки високому рівню розвитку математичних методів теорії пружності [1]. Розв'язки задач про рівновагу тіл, які моделюються поверхнями обертання другого порядку, також ґрунтуються на загальних розв'язках основних задач теорії пружності в ізотермічних криволінійних координатах [2,3]. Детальний історичний огляд щодо таких розв'язків подано в монографії А.Ф.Улітка [3].

Математичний апарат, який застосовується до розв'язання основних задач теорії пружності для тіл обертання, достатньо різноманітний [2-8]. Найбільш загальним методом розв'язку системи рівнянь просторової теорії пружності а також інших задач математичної фізики є метод власних функцій. Стосовно векторних формулювань граничних задач теорії пружності для тіл обертання, їх розв'язання представлено у монографії [3]. Саме з використанням методу власних векторних функцій у даній роботі отримано точні розв'язки задач про вплив малого зміщення еліпсоїдальних та сферичних включень на навколишнє пружне середовище.

У випадку, коли включення за своєю природою є парамагнітним чи феромагнітним, такі зміщення можуть відбутися під дією магнітного поля, що у свою чергу викличе перерозподіл поля напружень навколо включення. Подібна ситуація можлива не лише в композитному матеріалі, але і в однорідному середовищі, де такого типу включення, навпаки, є випадковими супутніми домішками. У цьому випадку прогнозування поведінки систем є також актуальним. Малі зміщення включень у пружному середовищі можуть виникнути і при зміні температури в умовах неоднорідного температурного поля.

2.Метод власних векторних функцій у задачах для витягнутого еліпсоїда обертання. Координати витягнутого еліпсоїда обертання (рис.1) вводяться за допомогою рівностей [3]



$$\begin{aligned} z + ir &= c \operatorname{ch}(\xi + i\eta) = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta + i c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \\ z &= \alpha(\xi, \eta) = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \\ r &= \beta(\xi, \eta) = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad \varphi = \varphi, \\ (0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (1)$$

Масштабні коефіцієнти Ламе дорівнюють

$$\begin{aligned} h_\xi = h_\eta = h &= c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}, \\ h_\varphi &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \end{aligned} \quad (2)$$

У цих координатах поверхня витягнутого еліпсоїда задається рівнянням $\xi = \xi_0$. Згідно з методом власних векторних функцій [3] загальний розв'язок рівняння рівноваги Ламе

$$2 \frac{m-1}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

записується у вигляді розкладу

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n [w_n^{(k)}(\xi)] \mathbf{L}_n^{(k)}(\eta, \varphi) + u_n^{(k)}(\xi) \mathbf{M}_n^{(k)}(\eta, \varphi) + v_n^{(k)}(\xi) \mathbf{N}_n^{(k)}(\eta, \varphi) \quad (4)$$

за власними вектор-функціями на поверхні еліпсоїда

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n^{(k)}(\eta, \varphi) &= \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^{(k)}(\cos \eta) e^{ik\varphi}, \quad \mathbf{M}_n^{(k)}(\eta, \varphi) = \left(\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{2}} + i \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^{(k-1)}(\cos \eta) e^{ik\varphi} \\ \mathbf{N}_n^{(k)}(\eta, \varphi) &= \left(\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{2}} - i \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^{(k+1)}(\cos \eta) e^{ik\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

У рівностях (3) - (5) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\varphi u_\varphi + \mathbf{k} u_z$ — вектор пружних переміщень, m — число Пуассона,

$$\bar{P}_n^{(k)}(\cos \eta) = \left(\frac{2n+1}{2} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right)^{1/2} P_n^{(k)}(\cos \eta) \quad (6)$$

- “нормовані” функції Лежандра першого роду.

Розклад для вектора напружень на поверхні еліпсоїда $\xi = \xi_0$ має вигляд

$$\frac{hF_n}{2G} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n-1}^{n+1} [Z_n^{(k)}(\xi_0)] L_n^{(k)}(\eta, \varphi) + R_n^{(k)}(\xi_0) M_n^{(k)}(\eta, \varphi) + \Phi_n^{(k)}(\xi_0) N_n^{(k)}(\eta, \varphi). \quad (7)$$

Функції $w_n^{(k)}(\xi)$, $u_n^{(k)}(\xi)$, $v_n^{(k)}(\xi)$, $Z_n^{(k)}(\xi_0)$, $R_n^{(k)}(\xi_0)$, $\bar{A}_n^{(k)}(\xi_0)$ виражаються через “нормовані” функції Лежандра першого роду $\bar{P}_n^{(k)}(\text{ch } \xi_0)$ (для внутрішньої задачі), “нормовані” функції Лежандра другого роду $\bar{Q}_n^{(k)}(\text{ch } \xi_0)$ (для зовнішньої задачі) та невідомі сталі, які необхідно знайти з граничних умов [3].

3.3 сுவ абсолютно жорсткого витягнутого еліпсоїда. Нехай у порожнину необмеженого пружного середовища впаяно твердий еліпсоїд обертання. Надамо йому переміщення $u = U\mathbf{k}$ і розглянемо задачу про напружений стан такого середовища (рис.1).

Спрошені на випадок осесиметричної деформації формули загального розв'язку для переміщень (4) та напружень (7) на поверхні еліпсоїдальної порожнини запишемо у вигляді (для скорочення запису опущено аргумент функції Лежандра $\text{ch } \xi_0$)

$$\frac{u_r}{c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left\{ x_n(\xi_0) Q_n^{(1)} + y_n \left[n \text{ch } \xi_0 Q_{n+1}^{(1)} - 2 \frac{m-1}{m} Q_n^{(1)} \right] \right\} P_n^{(1)}(\cos \eta),$$

$$\frac{u_z}{c} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ x_n(\xi_0) Q_n + y_n \left[(n+1) \text{ch } \xi_0 Q_{n+1} + \frac{m-2}{m} Q_n \right] \right\} P_n(\cos \eta), \quad (8)$$

$$\frac{hF_{nr}}{2G} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ x_n(\xi_0) \left[Q_n - \frac{\text{cth } \xi_0}{n(n+1)} Q_n^{(1)} \right] + y_n \left[(n+1) \text{ch } \xi_0 Q_{n+1}^{(1)} - \frac{\text{cth } \xi_0}{(n+1)} \text{ch } \xi_0 Q_{n+1}^{(1)} - Q_n + 2 \frac{m-1}{m} \frac{\text{cth } \xi_0}{n(n+1)} Q_n^{(1)} \right] \right\} P_n^{(1)}(\cos \eta), \quad (9)$$

$$\frac{hF_{nz}}{2G} = \sum_{n=0}^{\infty} [x_n(\xi_0) Q_n^{(1)} + n y_n \text{ch } \xi_0 Q_{n+1}^{(1)}] P_n(\cos \eta).$$

Невідомі сталі $x_n(\xi_0)$, y_n знаходяться з граничних умов

$$u_z|_{\xi=\xi_0} = U, \quad u_r|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (10)$$

З рівностей (8), (10) маємо систему

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left\{ x_n(\xi_0) Q_n^{(1)} + y_n \left[n \text{ch } \xi_0 Q_{n+1}^{(1)} - 2 \frac{m-1}{m} Q_n^{(1)} \right] \right\} P_n^{(1)}(\cos \eta) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ x_n(\xi_0) Q_n + y_n \left[(n+1) \operatorname{ch} \xi_0 Q_{n+1} + \frac{m-2}{m} Q_n \right] \right\} P_n(\cos \eta) = U P_0(\cos \eta). \quad (11)$$

Оскільки $U = U P_0(\cos \eta)$, то в обох рівняннях системи (11) слід покласти $n = 0$. При цьому в лівій частині першого рівняння маємо невизначеність $(0/0)$, для розкриття якої застосуємо правило Лопітала:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{P_\nu^{(1)}(\cos \eta)}{\nu} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial P_\nu^{(1)}(\cos \eta)}{\partial \nu}}{1} = \frac{\partial P_\nu^{(1)}(\cos \eta)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} = \\ &= \frac{d}{d\eta} \left\{ \frac{\partial P_\nu^{(1)}(\cos \eta)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} \right\} = \frac{d}{d\eta} \ln \frac{1 + \cos \eta}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $Q_0^{(1)} = -1/\operatorname{sh} \xi_0 \neq 0$ ($\xi_0 > 0$), $\operatorname{tg}(\eta/2) \neq 0$ ($0 < \eta < \pi$), при $n = 0$ система (11) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_0(\xi_0) - 2 \frac{m-1}{m} y_0 = 0, \\ x_0(\xi_0) Q_0(\operatorname{ch} \xi_0) + y_0 \left[\operatorname{ch} \xi_0 Q_1 + \frac{m-2}{m} Q_0(\operatorname{ch} \xi_0) \right] = c^{-1} U. \end{cases} \quad (12)$$

Розв'язок лінійної системи (12) записується так

$$x_0(\xi_0) = 2 \frac{m-1}{m} y_0, \quad y_0(\xi_0) = \frac{c^{-1} U}{\operatorname{ch} \xi_0 Q_1(\operatorname{ch} \xi_0) + \frac{3m-4}{m} Q_0(\operatorname{ch} \xi_0)}. \quad (13)$$

Усі інші коефіцієнти в розкладах (8) дорівнюють нулю.

Обчислимо компоненти вектора напружень за формулами (9) з урахуванням розв'язку (13):

$$\begin{aligned} \frac{h F_{nr}}{2G} &= \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ x_n(\xi_0) \left[Q_n - \frac{\operatorname{cth} \xi_0}{n(n+1)} Q_n^{(1)} \right] + y_n \left[(n+1) \operatorname{ch} \xi_0 Q_{n+1}^{(1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\operatorname{cth} \xi_0}{(n+1)} \operatorname{ch} \xi_0 Q_{n+1}^{(1)} - Q_n + 2 \frac{m-1}{m} \frac{\operatorname{cth} \xi_0}{n(n+1)} Q_n^{(1)} \right] \right\} P_n^{(1)}(\cos \eta) = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ -x_n(\xi_0) \frac{\operatorname{cth} \xi_0}{n(n+1)} Q_n^{(1)} + y_n 2 \frac{m-1}{m} \frac{\operatorname{cth} \xi_0}{n(n+1)} Q_n^{(1)} \right\} P_n^{(1)}(\cos \eta) = \\ &= \operatorname{cth} \xi_0 \left\{ x_0(\xi_0) - 2 \frac{m-1}{m} y_0 \right\} Q_0^{(1)} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{hF_{nz}}{2G} = x_0(\xi_0) Q_0^{(1)} P_0(\cos \eta) = 2 \frac{m-1}{m} c^{-1} U \frac{Q_0^{(1)}(\operatorname{ch} \xi_0)}{\operatorname{ch} \xi_0 Q_1(\operatorname{ch} \xi_0) + \frac{3m-4}{m} Q_0(\operatorname{ch} \xi_0)}.$$

Отже, маємо вирази для компонент вектора напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини

$$\frac{hF_{nr}}{2G} = 0, \quad \frac{hF_{nz}}{2G} = 2 \frac{m-1}{m} c^{-1} U \frac{Q_0^{(1)}(\operatorname{ch} \xi_0)}{\operatorname{ch} \xi_0 Q_1(\operatorname{ch} \xi_0) + \frac{3m-4}{m} Q_0(\operatorname{ch} \xi_0)}. \quad (14)$$

4.3 зсув абсолютно жорсткої сфери у пружному середовищі. В осесиметричних задачах для сфери розв'язок рівняння Ламе (4) записується у вигляді розкладу

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} [u_n^{(0)}(\rho) \mathbf{L}_n^{(0)}(\vartheta) + v_n^{(0)}(\rho) \mathbf{M}_n^{(0)}(\vartheta) + w_n^{(0)}(\rho) \mathbf{N}_n^{(0)}(\vartheta)] \quad (15)$$

за власними вектор-функціями на поверхні сфери

$$\mathbf{L}_n^{(0)}(\vartheta) = \mathbf{e}_\rho \sqrt{(2n+1)/4\pi} P_n(\cos \vartheta), \quad \mathbf{M}_n^{(0)}(\vartheta) = \mathbf{e}_\vartheta \sqrt{(2n+1)/4\pi} P_n^{(1)}(\cos \vartheta), \\ \mathbf{N}_n^{(0)}(\vartheta) = \mathbf{e}_\varphi \sqrt{(2n+1)/4\pi} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \quad (16)$$

Тут $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\rho u_\rho + \mathbf{e}_\vartheta u_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi u_\varphi$ - вектор переміщень, а радіальні функції $u_n^{(0)}(\rho)$,

$v_n^{(0)}(\rho)$, $w_n^{(0)}(\rho)$ визначаються формулами

$$u_n^{(0)}(\rho) = (n-2+4/m) A_n^{(0)} \rho^{n+1} + B_n^{(0)} \rho^{n-1} + (n+3-4/m) C_n^{(0)} \rho^{-n} - D_n^{(0)} \rho^{-n-2}, \\ n(n+1) v_n^{(0)}(\rho) = n(n+5-4/m) A_n^{(0)} \rho^{n+1} + (n+1) B_n^{(0)} \rho^{n-1} - \\ - (n+1)(n-4+4/m) C_n^{(0)} \rho^{-n} + D_n^{(0)} \rho^{-n-2}, \\ n(n+1) w_n^{(0)}(\rho) = M_n^{(0)} \rho^n + N_n^{(0)} \rho^{-n-1}. \quad (17)$$

Сталі інтегрування $A_n^{(0)}$, $B_n^{(0)}$, $C_n^{(0)}$, $D_n^{(0)}$, $M_n^{(0)}$, $N_n^{(0)}$ знаходимо з граничних умов задачі про зсув абсолютно жорсткої сфери радіуса R у необмеженому пружному середовищі

$$u_\rho|_{\rho=R} = U \cos \vartheta = U P_1(\cos \vartheta), u_\vartheta|_{\rho=R} = -U \sin \vartheta = U P_1^{(1)}(\cos \vartheta), u_\varphi|_{\rho=R} = 0. \quad (18)$$

Оскільки дана задача є зовнішньою, то у виразах (17) слід покласти $A_n^{(0)} = B_n^{(0)} = M_n^{(0)} = 0$. Крім того, з граничних умов (18) випливає, що у розкладі (15) відмінними від нуля є лише члени з індексом $n = 1$. Тому, для знаходження невідомих сталих маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} u_1^{(0)}(R) = (4-4/m) C_1^{(0)} R^{-1} - D_1^{(0)} R^{-3} = \sqrt{4\pi/3} U, \\ 2v_1^{(0)}(R) = -2(-3+4/m) C_1^{(0)} R^{-1} + D_1^{(0)} R^{-3} = 2\sqrt{4\pi/3} U. \end{cases} \quad (19)$$

Її розв'язок має вигляд

$$C_1^{(0)} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{3m}{2(5m-6)} UR, \quad D_1^{(0)} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{m}{5m-6} UR^3. \quad (20)$$

За відомими компонентами вектора переміщень можна обчислити компоненти тензора напружень на поверхні сфери [3,5]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=R} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[\left(\frac{2}{m} - 4 \right) C_1^{(0)} R^{-2} + 3 D_1^{(0)} R^{-4} \right] \cos \vartheta, \\ \frac{1}{2G} \tau_{\rho\vartheta}|_{\rho=R} &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[\left(\frac{2}{m} - 1 \right) C_1^{(0)} R^{-2} - \frac{3}{2} D_1^{(0)} R^{-4} \right] \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (21)$$

а також компоненти вектора напружень

$$\frac{F_{rz}}{2G} = -\frac{m-1}{5m-6} \frac{3U}{R}, \quad F_{rr} = 0. \quad (22)$$

4. Порівняння розв'язків задач про зсув еліпсоїдального та сферичного включень. Граничний перехід при $c \rightarrow +0$ ($\xi_0 \rightarrow +\infty$) перетворює координати витягнутого еліпсоїда обертання в сферичні координати. При цьому мають місце співвідношення

$$\lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ \xi_0 \rightarrow +\infty}} c \operatorname{ch} \xi_0 = R, \quad \lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ \xi_0 \rightarrow +\infty}} c^{-1} Q_0(\operatorname{ch} \xi_0) = R^{-1}, \quad \lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ \xi_0 \rightarrow +\infty}} c^{-(n+1)} Q_n(\operatorname{ch} \xi_0) = \operatorname{const} R^{-(n+1)}, \quad (n \geq 0)$$

За правилом Лопітала обчислимо границю

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ \xi_0 \rightarrow +\infty}} \frac{Q_1(\operatorname{ch} \xi_0)}{c^2} &= \lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} \xi_0 Q_0(\operatorname{ch} \xi_0) - 1}{R^2 \operatorname{ch}^{-2} \xi_0} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{R^2} \lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \frac{(\operatorname{ch} \xi_0 Q_0(\operatorname{ch} \xi_0) - 1)'}{(\operatorname{ch}^{-2} \xi_0)'} = \\ &= \frac{1}{R^2} \lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \xi_0 Q_0(\operatorname{ch} \xi_0) - \operatorname{ch} \xi_0 \operatorname{sh}^{-1} \xi_0}{-2 \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch}^{-3} \xi_0} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \frac{-1}{2R^2} \lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \frac{(Q_0(\operatorname{ch} \xi_0) - \operatorname{ch} \xi_0 \operatorname{sh}^{-2} \xi_0)'}{(\operatorname{ch}^{-3} \xi_0)'} = \frac{-1}{6R^2} \lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \frac{-2(\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \operatorname{sh}^2 \xi_0)}{\operatorname{th}^4 \xi_0} = \frac{1}{3R^2}. \end{aligned}$$

На підставі цих границь здійснимо граничний перехід у виразі (14) для компоненти $F_{rz}^{(e)}$ вектора напружень на поверхні витягнутого еліпсоїда обертання, в результаті чого дістанемо вираз (22) для компоненти $F_{rz}^{(c)}$ вектора напружень на поверхні сфери:

$$\lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ \xi_0 \rightarrow +\infty}} \frac{F_{rz}^{(e)}}{2G} = \frac{2(m-1)}{m} U \lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ \xi_0 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{c \operatorname{ch} \xi_0} \frac{-c^{-1} \operatorname{sh}^{-1} \xi_0}{\frac{Q_1(\operatorname{ch} \xi_0)}{c^2} + \frac{3m-4}{m} \frac{Q_0(\operatorname{ch} \xi_0)}{c}} =$$

$$= \frac{2(m-1)}{m} U \lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ \xi_0 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{R} \cdot \frac{-1/R}{R \frac{1}{3R^2} + \frac{3m-4}{m} \frac{1}{R}} = -\frac{m-1}{5m-6} \frac{3U}{R} = \frac{F_{nz}^{(c)}}{2G}.$$

5.Висновок. Таким чином, у результаті розв'язання задач про переміщення домішкових включень еліпсоїдальної та сферичної форм у пружному середовищі отримано аналітичні вирази для компонент вектора напружень на поверхнях включень даного типу. Достовірність розв'язків підтверджено граничним переходом від розв'язку у випадку еліпсоїда до відповідного розв'язку для сфери.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963. – 358 с.
3. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 341 с.
4. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
5. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
6. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
7. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – М.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
8. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1979. – 240 с.

Надійшла до редколегії 27.01.05

УДК 539.375

Борис П. Маслов¹, Людмила В. Шатило²

**Рівняння зростання тріщини
втомі у пошкодженому
матеріалі із зміцненням**

Досліджено зростання тріщини втомі у пластичному матеріалі із зміцненням. Враховано пошкодженість матеріалу за допомогою еквівалентних сталих характеристик.

Ключові слова: пошкодженість, тріщина втомі, зміцнення.

¹ E-mail: maslov@inmech.kiev.ua

² E-mail: shamila@kv.ukrtel.net

Borys P. Maslov¹, Lyudmyla V. Shatylo²

**The equation of fatigue crack
growth in damaged material with
strengthening**

Fatigue crack growth in plastic growth material is investigated. Damage of material is taken into account by means of equivalent constants.

Key Words: damage, fatigue crack, strengthening.

Довготривала та циклічна дія навантаження спричиняє появу тріщин у матеріалі – випадковим чином орієнтованих дископодібних мікротріщин і магістральних, або макроскопічних. Сучасні теорії руйнування [1-3,8,10] формуються із врахуванням впливу розсіяних пошкоджень на опір розвитку магістральної тріщини. Як відомо [1,4-8], пошкодження (мікротріщини, мікропори, мікрочастинки, які в процесі росту тріщини стали крихкими або, взагалі, деградували) розподілені по всьому об'єму тіла, причому їх щільність досягає найбільших значень поблизу фронту магістральної тріщини, де концентрація напружень [1,2,9] є особливо великою. В роботі розглядаються тріщини та тріщиноподібні дефекти як вузькі щілини з кінцевими радіусами кривини на фронті. Значення цих радіусів відіграють роль параметрів структури матеріалу. Врахування пошкоджень і введення кінцевих радіусів кривини на фронтах тріщин – взаємообумовлені положення. Оскільки пошкодження накопичуються не тільки біля фронтів, але і в віддаленому полі, в модель включено параметри, які характеризують траєкторію тріщини та шукатються у ході розв'язання задачі.

1. Модель матеріалу із пошкодженням. Для характеристики ступеню руйнування матеріалів у рівняння стану вводиться [1,4,10] додатковий параметр D – міра пошкодженості. Оскільки в експерименті можна спостерігати дерадацію модуля пружності, збільшення петлі гістерезису та появу мікротріщин, то природно зв'язати цей параметр з кількістю мікротріщин в репрезентативному елементі матеріалу в околі

точки, яка розглядається, наприклад, у вершині тріщини втоми. У процесі навантаження величина D змінюється в межах відрізка $[0, 1]$, при цьому $D = 0$ відповідає ідеальному стану матеріалу в даній точці, а $D = 1$ - повному руйнуванню в точці. Кінетика пошкодженості задається додатковим рівнянням, яке описує залежність швидкості міри пошкодженості від часу, напружень та інших аргументів. В більшості випадків при практичних розрахунках можна прийняти [1]

$$\dot{D} = \dot{D}(\sigma, D), \quad (1.1)$$

Тут σ - еквівалентне напруження, що відповідає за визначеними критеріями [1,2,10] одновимірному напруженому стану, який може бути реалізованим у дослідах на стандартних зразках матеріалу. Еквівалентні пружні характеристики конструкційних матеріалів з пошкодженнями визначимо на підставі результатів теорії деформування суцільних середовищ випадкової структури [7]. У роботах [4,5,7] наведено формули для приведених пружних сталих $\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{E}$ для матеріалу, послабленого хаотично орієнтованими дископодібними тріщинами

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= \kappa(1 + \xi a_{\kappa})^{-1}; & \tilde{\mu} &= \mu(1 + \xi a_{\mu})^{-1}; \\ \tilde{E} &= E(1 + \xi a_E)^{-1}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тут $\xi = \sum_i \varepsilon_i^3 N_i$, $\varepsilon_i = a_i / R$ - малий параметр, який характеризує відношення розмірів елементів локального поля та елемента загалом. Радіус дископодібної тріщини позначено a_i , N_i - їх число у репрезентативному елементі матеріалу з об'ємом V_R та характерним розміром R . Модуль зсуву матеріалу позначено μ , ν - коефіцієнт Пуассона, κ - модуль об'ємного стиску, E - модуль Юнга. Коефіцієнти a_m визначаються співвідношеннями [7]

$$\begin{aligned} a_{\kappa} &= \frac{16}{9} \frac{1 - \nu^2}{1 - 2\nu}; & a_{\mu} &= \frac{32}{45} \frac{(1 - \nu)(5 - \nu)}{2 - \nu}; \\ a_E &= \frac{16}{45} \frac{(1 - \nu^2)(10 - 3\nu)}{10 - 5\nu}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Формули (1.1) - (1.3) описують ефект залежності пружних сталих від розмірів a_i та кількості N_i дископодібних мікродфектів, які моделюють дисперсну пошкодженість матеріалу. При цьому величина ξ стає не малою при $N_i \sim \varepsilon_i^3$, де $\varepsilon = a/R$ характеризує відносний розмір мікродфекту у репрезентативному елементі [1].

Для того, щоб використати експериментальні дані та існуючі розв'язки задач механіки руйнування для матеріалу з дисперсною пошкодженістю, розглянемо фундаментальне одновимірне визначальне

рівняння, яке пов'язує деяке еквівалентне номінальне напруження s і еквівалентну деформацію e

$$e = \frac{1}{E} \frac{s}{1-D}. \quad (1.4)$$

Виходячи з (1.4), можна ввести еквівалентний модуль Юнга, який описує поведінку дисперсно пошкодженого матеріалу [1,10]

$$\tilde{E}_D = E(1-D). \quad (1.5)$$

Тоді, використовуючи граничні умови

$$\tilde{E}(\xi) = \tilde{E}(D) = 0, \quad D = 1, \quad (1.6)$$

встановлюємо взаємно однозначну відповідність між параметром ξ , що виражається рівнянням (1.2) через кількість мікротріщин в об'ємі V_R , та скалярною мірою пошкодженості D

$$(1 + \xi a_E)^{-1} = 1 - D.$$

Звідси знаходимо

$$\xi = \frac{1}{a_E} \frac{D}{1-D}. \quad (1.7)$$

Отже, залежність модуля стиску та модуля зсуву від параметру D , який може бути визначеним з експерименту, матиме вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= \kappa \left[1 + k \frac{D}{1+D} \right]^{-1}; & k &= 5 \frac{2-\nu}{(1-2\nu)(10-3\nu)}; \\ \tilde{\mu} &= \mu \left[1 + m \frac{D}{1+D} \right]^{-1}; & m &= 2 \frac{5-\nu}{(1+\nu)(10-3\nu)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

При малих значеннях міри пошкодженості з точністю до першого ступеня параметру D отримуємо вирази

$$\tilde{\mu} \doteq \mu [1 + mD]^{-1}, \quad \tilde{\kappa} \doteq \kappa [1 + kD]^{-1}. \quad (1.9)$$

Формули (1.8), (1.9) разом із (1.5) дають можливість дослідження у тривимірній постановці на базі класичних рівнянь механіки суцільного середовища впливу дисперсної пошкодженості на процес розповсюдження тріщини втоми.

2. Зв'язок параметрів пружності та пластичності з мірою пошкодженості. Розглядаємо процес зростання тріщини втоми у пружно-пластичному матеріалі при умові, що еквівалентні характеристики матеріалу залежать від пошкодженості. Матеріал знаходиться під дією багатоциклового одновісного навантаження. Співвідношення між напруженнями і деформаціями з урахуванням пошкодженості запишемо у вигляді [1,10]

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}_{ijkl} e_{kl} + \tilde{\nu}_{ijkl}(\mathbf{e}) e_{kl}, \quad (2.1)$$

де σ_{ij} - тензор напружень, e_{kl} - тензор деформацій

$$2e_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k}, \quad (2.2)$$

$u_k(x)$ - компоненти тензора переміщень у декартовій системі координат $\bar{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$. Тензор лінійних пружних сталих λ_{ijkl} для ізотропного матеріалу представимо у формі

$$\lambda_{ijkl} = 2\mu I_{ijkl} + 3\lambda J_{ijkl};$$

$$2I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}; \quad 3J_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (2.3)$$

де δ_{ij} - дельта Кронекера, λ, μ - сталі Ляме лінійної теорії пружності, при цьому

$$\lambda = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)]; \quad \mu = E/[2(1+\nu)]. \quad (2.4)$$

Тут E, ν - технічні пружні сталі ізотропного матеріалу - модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона.

Тензор $v_{ijkl}(\mathbf{e})$ описує процес зміцнення матеріалу у випадку пластичного деформування

$$v_{ijkl}(\mathbf{e}) = \eta \bar{e}^{n-1} K_{ijkl};$$

$$\bar{e}^2 = \frac{2}{3} \hat{e}_{ij} \hat{e}_{ij}; \quad \hat{e}_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{pp} \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Параметри n, η характеризують ступінь зміцнення, тобто потенціал деформацій, що відповідає закону (2.1) у початковому, непошкодженому стані матеріалу при $D=0$ можна записати у формі

$$\frac{1}{\mu} W(e) = (1 + \frac{1}{2} \alpha_1) I_1 - 2I_2 + \beta (I_1^2 - 3I_2)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (2.6)$$

де $\alpha_1 = \lambda / \mu; \beta = \eta / (9\mu)$. Для лінійно пружних середовищ $\beta \equiv 0$. Значення параметру D змінюється в процесі циклічного навантаження від нуля у початковому стані до $D=1$ при порушенні суцільності матеріалу у момент руйнування. Отже для адекватного моделювання процесу зростання тріщини втомі необхідно визначити залежність пружних та пластичних характеристик матеріалу від міри пошкодженості D .

Рівняння рівноваги елементарного об'єму V_R відносно статистичних флуктуацій переміщень другого порядку малості $u_{(2)}(\mathbf{x})$ має вигляд [7]

$$L(\nabla) u_{(2)}(\mathbf{x}) = -\nabla \tau_{(2)}(\mathbf{x});$$

$$u_{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial V_R;$$

$$\tau_{(2)}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \mathbf{e}_{(1)} \quad (2.7)$$

Диференціальний оператор системи (2.7) співпадає за формою із відповідним лінійної теорії [4]. Це дає можливість використовувати функцію Гріна лінійного розв'язку та отримати інтегральне рівняння для визначення градієнтів переміщень другого наближення

$$H_{(2)}(\mathbf{x}_1) = \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) * \tau_{(2)}(\mathbf{x}_2) + H_{(2)}^0; \quad H = \nabla u. \quad (2.8)$$

Згідно із запропонованою у [2,4,6] розрахунковою схемою знаходимо розв'язок цього рівняння, виконуючи інтегрування у області V_R , що включає підобласті v_r з дископодібними тріщинами радіусу a_r . При цьому нелінійні члени у правій частині виражаємо через вже відомі у першому наближенні макроскопічні деформації $e_{(1)}$ репрезентативного об'єму матеріалу

$$\begin{aligned} H_{r(1)} &= A^r e_{(1)} + R_{(1)}; & e_{r(2)} &= A^r e_{(2)} + C^r(e_{(1)}); & r &\in [1, n+1]; \\ R &= \text{skw}(H) = \frac{1}{2}(H - H^T); \\ A &= (\underline{I} + a)^{-1}; & a &= \langle a_r \rangle; \\ a_r &= -z_r \lambda; & C^m &= -A(\langle \mathbf{z} \rangle) = -\sum_{i=1}^n c_i q_i \nu'_i; \\ \nu'_i &= \nu_i(e_{(1)}) - \nu_m(e_{(1)}); & q_i &= A_m z_i; \\ C^i &= (\underline{I} + a_i) C^m + z_i \nu'_i. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тут індекс r відповідає множині v_r дископодібних тріщин радіусу a_r , $r \in [1, N]$. Кутові дужки означають операцію статистичного осереднення, підкреслений символ відрізняє тензор четвертого рангу, виконуються умови нормування операторів A^r, C^r , тобто

$$\langle A_r \rangle = \underline{I}; \quad \langle C^r \rangle = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Підставляючи розв'язок (2.9) у фізичні співвідношення другого порядку з (2.1), знаходимо закон зв'язку тензору макроскопічних напружень σ та деформацій e для стисливого ізотропного пружно-пластичного конструкційного матеріалу із дисперсним пошкодженням

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}_{ijkl} e_{kl} + \tilde{\nu}_{ijkl}(e) e_{kl}; \quad \tilde{\eta} / \eta = (1 + \xi a_\mu)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (2.12)$$

Пружні коефіцієнти та коефіцієнти зміцнення суттєво залежать від пошкодженості та можуть виконувати роль контрольованого параметру при визначенні стану матеріалу, в тому числі при дослідженні процесу розповсюдження тріщини втомі.

3. Рівняння зростання тріщини втомі. Розглянемо тріщину відриву в необмеженому тілі з ізотропного пружно-пластичного матеріалу. Номінальні напруження відриву позначимо s , довжину тріщини $2l$. Приймемо, що тіло знаходиться в умовах плоского напруженого стану і номінальні напруження змінюються циклічно, причому екстремальні значення $s_{\max}(t)$ і $s_{\min}(t)$ повільно змінюються від циклу до циклу. Тріщину розглядаємо як вузьку щілину з радіусом кривини на фронті ρ , вважаючи цей радіус структурною змінною матеріалу. Аналогічно вважаємо структурною змінною розмір кінцевої пластичної зони $\lambda = \lambda_p$. Ці

припущення відповідають звичайним уявленням про пластичний матеріал, досліджуваний в постановці лінійної механіки руйнування. Узагальнену силу знайдемо по формулі [1]

$$G = \frac{\pi s^2 l}{\tilde{E}} \quad (3.1)$$

де $\tilde{E}$ - еквівалентний модуль пружності.

Внаслідок наявності пошкоджень D на фронті тріщин та деградації характеристик пружності та пластичності, суттєвим є визначення впливу цих параметрів на зменшення концентрації напружень. Напруження відриву на продовженні фронту $|x| \geq l$, $y = 0$ представимо у вигляді

$$\sigma(x, l) = \kappa s h(x | l). \quad (3.2)$$

Тут κ - коефіцієнт концентрації напружень на фронті; $h(x | l)$ - функція, яка задовольняє умовам $h(l | l) = 1$, $h(x | l) \rightarrow 1/\kappa$ при $|x - l| \rightarrow \infty$

$$h(x | l) = \left[1 + \kappa \left(\frac{x - l - \lambda}{x} \right)^{1/2} \right], \quad |x| > l + \lambda, \\ \kappa = 1 + \left(\frac{l}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

При $\rho \ll l$ замість κ з (3.3) використовуємо

$$\kappa \approx \left(\frac{l}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

що дозволяє виразити процес навантаження в термінах коефіцієнта інтенсивності напружень $K = s(\pi l)^{1/2}$.

Якщо швидкість накопичення пошкоджень залежить лише від екстремальних напружень відриву, то рівняння типу (1.1) приймає вигляд

$$\frac{\partial D}{\partial n} = f(\sigma_{\max}, \sigma_{\min}). \quad (3.5)$$

Це рівняння записано для міри пошкоджень $D(x, n)$ на продовженні $|x| \geq l$ тріщини, а напруження $\sigma_{\max}(x, n)$ і $\sigma_{\min}(x, n)$ обраховано відповідно при $s = s_{\max}(n)$ і $s = s_{\min}(n)$.

Узагальнена сила опору $\Gamma(D)$ залежить від міри пошкоджень:

$$D(n) \equiv D[l(n), n];$$

$$D(x, n) = \varphi_0(x) + \int_0^n f[\sigma_{\max}(x, \nu), \sigma_{\min}(x, \nu)] d\nu, \quad (3.6)$$

де функція $\varphi_0(x)$ характеризує початкове розподілення мікропошкоджень. Умову зростання тріщини запишемо у вигляді

$$G[l(n), s_{\max}(n)] = \Gamma[D(n)]. \quad (3.7)$$

При цьому в початковий момент часу тріщина субврівноважена, так що при достатньо малих $n > 0$ виконується нерівність $G[l_0, s_{\max}(n)] < \Gamma[D(n)]$, де l_0 - початковий розмір тріщини. Перше досягнення рівності

$$G[l_0, s_{\max}(n)] = \Gamma[D(n)] \quad (3.8)$$

означає зрушення тріщини. Корінь $n = n_*$ рівняння, отриманого підстановкою (3.6) в (3.8), відповідає закінченню інкубаційної стадії.

Для розрахунку неперервного росту тріщини перепишемо формулу (3.6) у вигляді

$$D(n) = \varphi_0[l(n)] + \int_0^n f\{\sigma_{\max}[l(v), v]\} dv. \quad (3.9)$$

Підстановка в умови рівноваги

$$G[l(n), s_{\max}(n)] = \Gamma[D(n)] \quad (3.10)$$

призводить до нелінійного інтегрального рівняння відносно $l(n)$.

В квазістаціонарному наближенні у відповідності з визначенням часом перебування точки на фронті тріщини маємо

$$D(n) \approx D_R(n) + \lambda \left(\frac{dl}{dn} \right)^{-1} f\{\sigma_{\max}[l(n) + \lambda_0, n], \sigma_{\min}[l(n) + \lambda_0, n]\}. \quad (3.11)$$

Тут $D_R(n)$ - міра мікропошкодження у віддаленому полі, точніше при $x = l(n) + \lambda_0$ (розмір λ_0 береться з відрізка $[0, \lambda]$).

Підстановка (3.11) у (3.10) призводить до диференціального рівняння відносно розміру тріщини $l(n)$. Щоб отримати рівняння, за формою аналогічною відомим напівемпіричним рівнянням тріщин втоми, прийнемо, що $\rho \ll l$, тобто для коефіцієнта концентрації напружень справедлива формула (3.4). Розглянемо порогово-степеневу модель накопичення пошкоджень при умові, що права частина у (3.6) має вигляд

$$f = \begin{cases} \left(\frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_{th}}{\sigma_f} \right)^m & \text{при } \Delta\sigma \geq \Delta\sigma_{th}; \\ 0 & \text{при } \Delta\sigma < \Delta\sigma_{th}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Тут $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ - розмах напружень відриву; σ_f - напруження, яке характеризує опір матеріала накопиченню пошкоджень; $\Delta\sigma_{th}$ - порогове значення цього опору. Показник $m > 0$ аналогічний показнику кривих втоми. Розподілення напружень відриву прийнемо згідно з (3.3), а для узагальненої сили опору візьнемо залежність

$$\Gamma = \gamma_0 (1 + Da_\mu)^{\frac{\alpha+1}{2}} \quad (3.13)$$

з питомою роботою руйнування непошкодженого матеріалу γ_0 і додатним показником зміцнення α .

Введемо розмах коефіцієнту інтенсивності напружень $\Delta K = \Delta s (\pi l)^{1/2}$, а також порогові характеристики матеріалу $K_f = \sigma_f (\pi \rho)^{1/2}$ і $\Delta K_{th} = \Delta \sigma_{th} (\pi \rho)^{1/2}$. Тоді рівняння (3.6) прийме вигляд

$$\frac{\partial D}{\partial n} = \begin{cases} \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_f} \right)^m & \text{при } l \leq |x| \leq l + \lambda; \\ \left(\frac{\Delta s - \Delta \sigma_{th}}{\Delta \sigma_f} \right)^m & \text{при } |x| > l + \lambda. \end{cases} \quad (3.14)$$

При $\Delta K < \Delta K_{th}$ або $\Delta s < \Delta \sigma_{th}$ праві частини рівнянь слід прирівняти до нуля.

Інкубаційна стадія закінчується при досягненні рівності

$$\int_0^n \left[\frac{\Delta K(v) - \Delta K_{th}}{K_f} \right]^m dv = \left[1 - \frac{K_{\max}^2}{K_c^2} \right]^{1/\alpha}, \quad (3.15)$$

яке впливає з (3.9) з урахуванням формул (3.1) і (3.13). Спеціальний знак інтегралу означає, що інтеграл береться по відрізкам з $[0, n]$, для яких $\Delta K > \Delta K_{th}$. Розмах коефіцієнту інтенсивності ΔK і його максимальне значення за цикл $K_{\max}$ обчислюють при початковому розмірі тріщини $l = l_0$. У праву частину (3.15) входить критичне значення коефіцієнта інтенсивності

$$K_c = (\gamma_0 \tilde{E})^{1/2}, \quad (3.16)$$

так що умова $K_{\max} = K_c$ відповідає тріщині, яка розповсюджується нестійко в непошкодженому матеріалі. При $K_{\max} \leq K_c$ співвідношення (3.15) нагадує напівемпіричне правило сумування пошкоджень втоми. Перше зрушення тріщини завжди відбувається не при досягненні граничного значення $D=1$, а при меншому значенні. При $\Delta \sigma = \text{const}$, $\sigma_{\max} = \text{const}$ рівняння (3.15) призводить до формули

$$n_* = \left(\frac{K_f}{\Delta K - \Delta K_{th}} \right)^m \left(1 - \frac{K_{\max}^2}{K_c^2} \right)^{1/\alpha}. \quad (3.17)$$

Розглянемо квазістаціонарний ріст тріщини, при якому для $n > n_*$ скрізь $dl/dn > 0$, причому зміна розмірів тріщини і рівня навантаження при переході від циклу до циклу досить мала, і нею можна знехтувати. Формула (3.11) при введених допущеннях прийме вигляд

$$D(n) = D_R(n) + \lambda \left(\frac{dl}{dn} \right)^{-1} \left[\frac{\Delta K(n) - \Delta K_{th}}{K_f} \right] \quad (3.18)$$

Із врахуванням (3.17) отримаємо

$$D_R(n) = D_0 [l(n)] + \int_0^n \left[\frac{\Delta s(\nu) - \Delta \sigma_{th}}{\sigma_f} \right]^m d\nu. \quad (3.19)$$

Підставивши вирази (3.14) і (3.19) в умову рівноваги (3.10), отримаємо рівняння відносно $l(n)$:

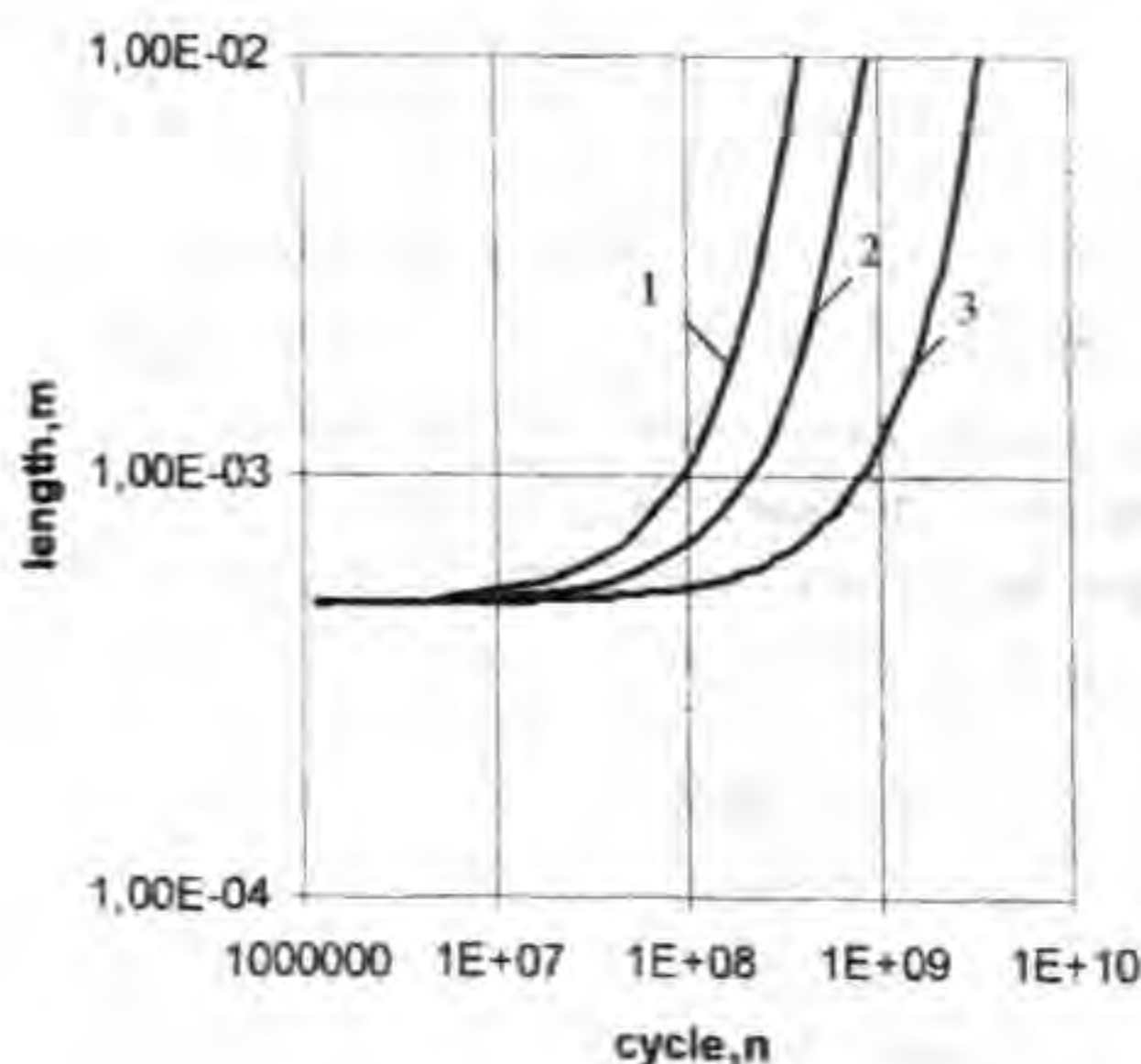
$$\frac{dl}{dn} = \lambda \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_f} \right)^m \left[\left(1 - \frac{K_{max}^2}{K_c^2} \right)^{1/\alpha} - D_R \right]^{-1}. \quad (3.20)$$

При цьому $\Delta K > \Delta K_{th}$, $K_{min} > 0$, $K_{max} < K_c$.

Рівняння (3.20) має ту ж саму структуру [2], що і напівемпіричне рівняння росту тріщин втоми. Зокрема, при $\Delta K_{th} \ll \Delta K$, $K_{max}^2 \leq K_c^2$, $D_R \ll 1$ рівняння (3.20) переходить у рівняння Періса-Ердогана. Відмітимо, що в праву частину рівняння (3.20) входить також функція $D_R(n)$, що дорівнює мірі пошкодження перед кінцевою зоною. Наприклад, при стаціонарному рівні циклічних навантажень і $D_0 = const$ маємо

$$D_R(n) = D_0 + n \left(\frac{\Delta s - \Delta \sigma_{th}}{\sigma_f} \right)^m \text{ при } \Delta s > \Delta \sigma_{th}. \quad (3.21)$$

Номінальні напруження також входять у рівняння (3.20) через значення пошкодження D_R у віддаленому полі.



Як приклад прогнозування розповсюдження тріщини втоми у пошкоджену матеріалі розглянемо матеріал ЭИ437Б. На рисунку зображено графіки залежності зростання тріщини втоми від числа циклів при різних амплітудних напруженнях. Крива 1 побудована для амплітудного значення навантаження $\sigma_a = 120$ МПа, крива 2 – для $\sigma_a = 80$ МПа, крива 3 – для $\sigma_a = 40$ МПа.

Література

1. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. – Москва: Машиностроение 1990.
2. Голуб В.П., Касперская В.В., Русинов А.А. О времени разрушения тонкостенных цилиндрических труб в условиях ползучести при кручении // Прикладная механика. – 2004. – Том 40. – №6, с. 107 – 116.
3. Гузь А.Н. Об одной двухуровневой модели мезомеханики разрушения композитов с трещинами при сжатии // Прикладная механика. – 2003. – 39. – №3. – с. 27 – 44.
4. Маслов Б.П., Бугай С.Н. Нелинейное деформирование и прочность стохастических композитов с поврежденной матрицей // Механика композитных материалов. – 1991. – 5. – с. 796 – 803.
5. Маслов Б.П., Ляшенко Я.Г. Концентрація напружень в ізотропних в'язкопружних композитах з мікротріщинами // Вісник Дон. унів. – 2002. – Сер. А: №2 – С. 50 – 53.
6. Маслов Б.П., Чаусов Н.Г. Ползучесть и остаточный ресурс композитных материалов с микрповреждениями матриц // Вестник Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», 2003, № 44, с. 20 – 24.
7. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры. – Киев: Наук. думка, 1993. – 132с.
8. Kriven W.M., Bell J.L. and Gordon M. Microstructure and macrochemistry of fully-reacted geopolymers and geopolymer matrix composites // Ceramic Transactions. – 2003. – 153. – p. 227-252.
9. Maslov B.P. Stress concentration in non-compressible multi-component 3
10. material // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36. – N3 (Прикл. механика. – 2000. – 36. – №3. – С. 108-114)
11. Peerlings R.H.J., Brekelmans W.A.M., R. de Borst, Geers M.G.D. Gradient-enhanced damage modeling of high-cycle fatigue // Int. J. Numer. Engng. – 2000. – Vol. 49. – p. 1547–1569.

Надійшла до редакції 18.01.2005

УДК. 519.21

Олег В. Перегуда

Oleg V. Pereguda

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ
ОДНОГО КЛАСУ СТОХАСТИЧНИХ
СПРЯЖЕНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ.

ABOUT BEHAVIOR OF
SOLUTIONS OF A CERTAIN
CLASS OF THE STOCHASTIC
HARMONIC OSCILLATORS.

Знайдено явний вигляд і досліджено поведінку розв'язків системи двох спряжених гармонічних осциляторів збурених випадковим процесом типу "білого шуму" у формі Іто.

The obvious appearance of the solutions of system tied harmonic oscillators is found. Behavior of the solutions of system tied harmonic oscillators with random perturbation of "white noise" in the Ito forms is investigated.

Ключові слова: гармонічний осцилятор, випадкові збурення типу "білого шуму" у формі Іто

Key words: harmonic oscillator, random perturbation of "white noise" in the Ito forms

Вступ.

Теорія стохастичних диференціальних рівнянь дає зручний апарат для вивчення багатьох об'єктів випадкових механічних і фізичних систем. Цю теорію застосовано до дослідження поведінки розв'язків стохастичних осциляторів. Так в роботі [3] проведено дослідження поведінки розв'язків стохастичного осцилятора без тертя, де розглядається "білий шум" у формі Іто й у формі Стратоновича. Моделі стохастичного гармонічного осцилятора з тертям досліджено в роботі [5].

В даній роботі проводиться аналіз системи двох спряжених осциляторів при випадкових збуреннях процесом типу "білого шуму" у формі Іто, що описують систему двох зв'язних математичних маятників.

Постановка задачі.

Під системою двох спряжених гармонічних осциляторів розуміють систему, рух якої описується системою двох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + k_1^2 x_1(t) = \omega(x_2(t) - x_1(t)), & x_1(0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}; \\ \ddot{x}_2(t) + k_2^2 x_2(t) = \omega(x_1(t) - x_2(t)), & x_2(0) = x_{20}, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}, \end{cases}$$

де x_{10}, x_{20} - початкові положення та $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}$ - початкові швидкості осциляторів ($x_{10}^2 + \dot{x}_{10}^2 > 0, x_{20}^2 + \dot{x}_{20}^2 > 0$); k_1^2, k_2^2, ω - параметри осциляторів, $x_1(t), x_2(t)$ - положення та $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ - швидкості осциляторів в момент часу $t > 0$.

Для дослідження поведінки розв'язків даної системи вводяться нові змінні $u_1 = x_1 + x_2$ і $u_2 = x_1 - x_2$, тоді система рівнянь при $k_1^2 = k_2^2 = k^2$ набуває вигляду

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + k^2 u_1(t) = 0, & u_1(0) = u_{10}, \quad \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10}; \\ \ddot{u}_2(t) + (k^2 + 2\omega) u_2(t) = 0, & u_2(0) = u_{20}, \quad \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{20}. \end{cases} \quad (1)$$

Рівняння (1) еквівалентно системі диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{x}(t) = Bx(t), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(k^2 + 2\omega) & 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де $x_1(t) = u_1(t)$, $x_2(t) = \dot{u}_1(t)$, $x_3(t) = u_2(t)$, $x_4(t) = \dot{u}_2(t)$.

В декартовій системі координат стан системи (2) зображається точкою M з координатами $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$, яка рухається по фазовій траєкторії, фазова швидкість точки M є вектор $(x_2(t), -k^2 x_1(t), x_4(t), -(k^2 + 2\omega)x_3(t))$. Фазові траєкторії системи (2) знаходяться на двовимірному торі T^2 [2].

Проведемо дослідження поведінки зображувальної точки M у фазовому просторі системи (2) при випадкових збуреннях типу "білого шуму" у формі Іто, які діють на систему по дотичній до фазової траєкторії в точці M , тобто розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx(t) = d\xi(t)x(t), \quad x_1(0) = u_{10}, \quad x_2(0) = \dot{u}_{10}, \quad x_3(0) = u_{20}, \quad x_4(0) = \dot{u}_{20}, \quad (3)$$

де $\xi(t) = \int_0^t B_{q(s)} ds + \int_0^t B_{g(s)} dw(t)$, $B_{q(s)}$, $B_{g(s)}$ - матриці вигляду

$$B_f = \begin{pmatrix} f_1 & \frac{f_2}{k} & 0 & 0 \\ -kf_2 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & \frac{f_4}{k+2\omega} \\ 0 & 0 & -(k+2\omega)f_4 & f_3 \end{pmatrix}$$

при $f_1 = q_1(t)$, $f_2 = g_1(t)$ відповідно; $(w(t), F_t)$ -одномірний вінерівський процес, F_t - неспадний потік σ - алгебр на фіксованому ймовірносному просторі (Ω, F, P) ; $q_1(t)$, $g_1(t)$ - випадкові локально обмежені функції, при кожному $t \geq 0$ вимірні відносно F_t . Для рівняння (3) знайдено явний вигляд розв'язку (теорема 1); отримано необхідні та достатні умови, при яких зображувальна точка M з ймовірністю 1 "дифундує" по певним гладким многовидам (теорема 2).

Перейдемо до розгляду отриманих результатів.

Теорема 1. Нехай $x(t)$ розв'язок рівняння (3). Тоді з ймовірністю 1 при всіх $t \geq 0$ мають місце рівності:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_1(t) \cos \varphi_1(t), & x_2(t) &= k_1 A_1(t) \sin \varphi_1(t); \\x_3(t) &= A_2(t) \cos \varphi_2(t), & x_4(t) &= k_2 A_2(t) \sin \varphi_2(t),\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}A_1(t) &= \left(x_1^2(0) + \frac{x_2^2(0)}{k_1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \int_0^t (q_1(s) + \frac{1}{2} [g_2^2(s) - g_1^2(s)]) ds + \int_0^t g_1(s) dw(s) \right\} \\ \varphi_1(t) &= \varphi_1(0) + \int_0^t [g_1(s)g_2(s) - q_2(s)] ds - \int_0^t g_2(s) dw(s), \quad \operatorname{tg} \varphi_1(0) = \frac{x_2(0)}{k_1 x_1(0)}; \\ A_2(t) &= \left(x_3^2(0) + \frac{x_4^2(0)}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \int_0^t (q_3(s) + \frac{1}{2} [g_4^2(s) - g_3^2(s)]) ds + \int_0^t g_3(s) dw(s) \right\} \\ \varphi_2(t) &= \varphi_2(0) + \int_0^t [g_3(s)g_4(s) - q_4(s)] ds - \int_0^t g_4(s) dw(s), \quad \operatorname{tg} \varphi_2(0) = \frac{x_4(0)}{k_2 x_3(0)}.\end{aligned}$$

Доведення. Розглянемо лінійне перетворення процесу $x(t)$, для якого матриця B_t у рівнянні (3) набуває жорданової форми, тобто розглянемо процес $y(t) = Tx(t)$, де

$$T \cdot B_t \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ -f_2 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & f_4 \\ 0 & 0 & -f_4 & f_3 \end{pmatrix}.$$

Згідно рівняння (3) для процесу $y(t)$ маємо стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dy(t) = T d\xi(t) T^{-1} y(t).$$

Введемо нові процеси

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r_1(t) \cos \varphi_1(t), & x_2(t) &= r_1(t) \sin \varphi_1(t), \\x_3(t) &= r_2(t) \cos \varphi_2(t), & x_4(t) &= r_2(t) \sin \varphi_2(t).\end{aligned}$$

Тоді згідно [3] отримаємо

$$\begin{cases} dr_1(t) = r_1(t) \left([q_1(t) + \frac{1}{2} (g_2^2(t))] dt + g_1(t) dw(t) \right), \\ d\varphi_1(t) = (-q_2(t) + g_1(t)g_2(t)) dt - g_2(t) dw(t), \\ dr_2(t) = r_2(t) \left([q_3(t) + \frac{1}{2} (g_4^2(t))] dt + g_3(t) dw(t) \right), \\ d\varphi_2(t) = (-q_4(t) + g_3(t)g_4(t)) dt - g_4(t) dw(t) \end{cases}$$

з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$.

Тоді [6]

$$\begin{cases} r_1(t) = r_1(0) \exp \left\{ \int_0^t (q_1(s) + \frac{1}{2} [g_2^2(s) - g_1^2(s)]) ds + \int_0^t g_1(s) dw(s) \right\}, \\ \varphi_1(t) = \varphi_1(0) - \int_0^t (q_2(s) - g_1(s)g_2(s)) ds - \int_0^t g_2(s) dw(s), \\ r_2(t) = r_2(0) \exp \left\{ \int_0^t (q_3(s) + \frac{1}{2} [g_4^2(s) - g_3^2(s)]) ds + \int_0^t g_3(s) dw(s) \right\}, \\ \varphi_2(t) = \varphi_2(0) - \int_0^t (q_4(s) - g_3(s)g_4(s)) ds - \int_0^t g_4(s) dw(s), \end{cases}$$

де
$$\operatorname{tg} \varphi_1(0) = \frac{x_2(0)}{k_1 x_1(0)}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2(0) = \frac{x_4(0)}{k_2 x_3(0)}$$

Оскільки $x(t) = T^{-1}y(t)$, де T^{-1} - матриця обернена до T , то враховуючи явний вигляд процесу $y(t)$ отримаємо доведення теореми.

З явного вигляду розв'язку рівняння (3) маємо, що $x(t) \in D$ з ймовірністю 1 для всіх $t > 0$ при умові, що $x(0) \in D$, де $D = R^4 \setminus \{0\}$. Тому дослідження поведінки розв'язку рівняння (3) у фазовому просторі R^4 досить провести в області D . Для цього розглянемо поверхню $G(x) = C$, де

$$G(x) = r_1 e^{-\alpha \varphi_1} + r_2 e^{-\beta \varphi_2}$$

і нехай $x(0) \in D$. Тоді з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$ має місце рівність

$$G(x) = G(x(0)) \exp \{I(t) + J(t)\}$$

$$\begin{aligned} I(t) = & \int_0^t (q_1(s) + \alpha q_2(s) + q_3(s) + \beta q_4(s) + \frac{1}{2} [g_2^2(s) - g_1^2(s)] - \alpha g_1(s)g_2(s) + \\ & + \frac{1}{2} [g_4^2(s) - g_3^2(s)] - \beta g_3(s)g_4(s)) ds \end{aligned}$$

$$J(t) = \int_0^t (g_1(s) + \alpha g_2(s) + g_3(s) + \beta g_4(s)) dw(s). \quad (4)$$

Згідно цих рівностей отримаємо наступну теорему.

Теорема 2. Для того, щоб $G(x(t)) = G(x(0))$ з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$, необхідно і достатньо, щоб з ймовірністю 1 мали місце рівності:

$$g_1(t) + \alpha g_2(t) + g_3(t) + \beta g_4(t) = 0,$$

$$q_1(t) + \alpha q_2(t) + \left(\frac{1 + \alpha^2}{2} \right) g_2^2(t) + q_3(t) + \beta q_4(t) + \left(\frac{1 + \beta^2}{2} \right) g_4^2(t) = 0.$$

Доведення. Виходячи зі співвідношень (4), для рівності $G(x(t)) = G(x(0))$ необхідно і достатньо, щоб з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$ виконувалась рівність

$$I(t) + J(t) = 0 \quad (5)$$

Оскільки $I(t)$ з ймовірністю 1 абсолютно неперервна функція, а $J(t)$ - неперервний з ймовірністю 1 мартингал, то рівність (5) має місце тоді і тільки тоді, коли $I(t) = 0$, $J(t) = 0$ з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$. Тому для рівності (5) необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{aligned} g_1(t) + \alpha g_2(t) + g_3(t) + \beta g_4(t) &= 0, \\ q_1(t) + \alpha q_2(t) + \frac{1}{2} [g_2^2(s) - g_1^2(s)] - \alpha g_1(s) g_2(s) + \\ q_3(t) + \beta q_4(t) + \frac{1}{2} [g_4^2(s) - g_3^2(s)] - \beta g_3(s) g_4(s) &= 0 \end{aligned}$$

з ймовірністю 1 майже для всіх $t \geq 0$. З цих рівностей отримаємо доведення твердження теореми.

Література

1. Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.-Москва: Наука, 1984.
3. Kulinich G. L. Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator // Random Oper. And Stoch. Eq.-1995.-3, № 2. – P. 141-152.
4. Kulinich G.L., Pereguda O. V. Phase picture of the diffusion process with the generate diffusion matrices // Random Oper. And Stoch. Eq. – 1997. – 5, № 3. – P. 203-216.
5. Кулініч Г.Л. Якісний аналіз впливу на гармонічний осцилятор з тертям випадкових збурень типу “білого шуму” вздовж вектора фазової швидкості // Укр.мат.журн. – 1997. – Т.49, № 1 – С. 35-46.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.

Надійшла до редакції 28.12.2004

УДК 519.9

Оксана К. Радченко

Точний розв'язок у біполярних координатах плоскої задачі для диску з жорстким валом у центрі та несамоврівноваженими напруженнями на контурі.

Серія: фізико-математичні науки

В даній роботі, з використанням біполярної системи координат, отримано вирази механічних напружень та проведено розрахунок зосередженої сили на жорсткому валу, який знаходиться в центрі диску.

Ключові слова: бігармонічна функція, напруження, диск, жорсткий вал, зосереджена сила.

Oksana K. Radchenko

The exact solution in bipolar coordinates of two-dimensional problem for a disk with a stiff shaft in the center and self-unbalanced stresses on the contour.

Series: Physics & Mathematics

In this paper the expressions of mechanical stresses have been obtained and the calculation of concentrated force on a stiff shaft in the centre of disk has been carried out using bipolar coordinates.

Keywords: biharmonic function, stresses, disk, stiff shaft, concentrated force.

Розглядатимемо диск, в центрі якого розташований жорсткий вал малого радіусу, під дією певних напружень на його контурі.

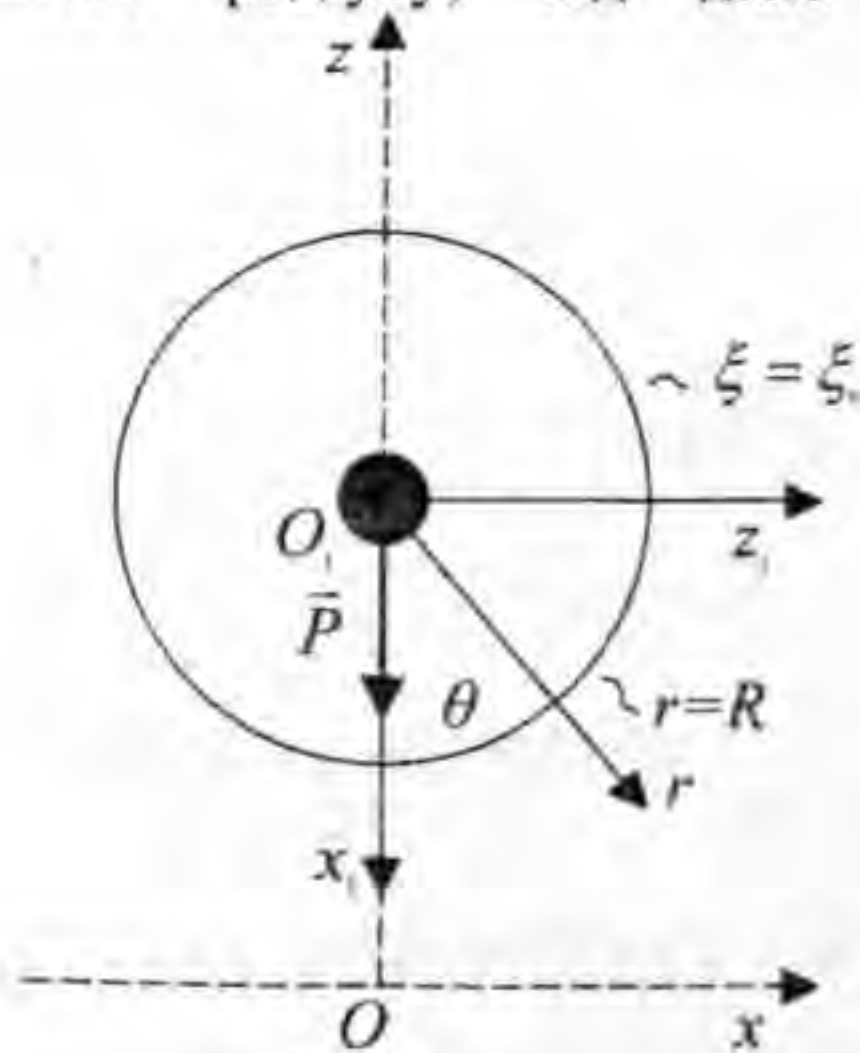


Рис.1.

Надалі нас буде цікавити розв'язок плоскої задачі для такого диску в біполярній системі координат, зв'язок якої з декартовою системою має вид

$$x = \frac{c \cdot \sin \eta}{ch\xi + \cos \eta}, z = \frac{c \cdot sh\xi}{ch\xi + \cos \eta}, \quad (1)$$

де $(-\infty < \xi < +\infty, -\pi < \eta < +\pi)$, c – параметр біполярної системи.

Область, яку займає диск у нових координатах $(\xi_0 \leq \xi < +\infty, -\pi < \eta < +\pi)$; радіус

$$\text{диску} - R = \frac{c}{|sh\xi_0|}.$$

Розв'язок задачі подамо наступними напруженнями

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{c} \left[(ch\xi + \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - sh\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \sin \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + ch\xi \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right) + \sigma_r, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{c} \left[(ch\xi + \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - sh\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \sin \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \cos \eta \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right) + \sigma_\theta, \end{aligned} \quad (2,a)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{c}(ch\xi + \cos\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\Phi}{h}\right) + \tau_{r\theta}, \quad (2,6)$$

де Φ – бігармонічна функція для області, яку займає диск (без валу в центрі), вираз якої в біполярних координатах (1) є таким [4]

$$\Phi(\xi, \eta) = h \left\{ A_0 e^{-\xi} + B_0 \xi e^{-\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-(n+1)\xi} + B_n e^{-(n-1)\xi}) \cos n\eta \right\}; \quad (3)$$

$h = \frac{c}{ch\xi + \cos\eta}$ – масштабний множник Ляме; σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ – напруження, що відповідають зосередженій силі в центрі даного диску, яка діє в протилежному напрямку до рівнодійної зовнішніх сил і має таку ж саму величину [2]. Присутність цих напружень у розв'язку (2) обумовлена наявністю в центрі диску жорсткого валу.

В полярних координатах, зв'язок яких з декартовими координатами x_1 , z_1 (Рис.1) має вид

$$x_1 = r \cdot \cos\theta, \quad z_1 = r \cdot \sin\theta, \quad (0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (4)$$

ці напруження подаються наступним чином [2]

$$\sigma_r = -\frac{P(3-2\nu)\cos\theta}{4\pi(1-\nu)r}, \quad \sigma_\theta = \frac{P(1-2\nu)\cos\theta}{4\pi(1-\nu)r}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{P(1-2\nu)\sin\theta}{4\pi(1-\nu)r}, \quad (5)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Причому, полярні $\cos\theta$ та $\sin\theta$ в (5) можна подати через біполярні $\cos\eta$ та $\sin\eta$ за допомогою таких виразів [4]

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{c}{r} \frac{1 + ch\xi \cos\eta}{sh\xi(ch\xi + \cos\eta)} = \frac{c}{r \cdot sh\xi} \left[e^{-\xi} - 2sh\xi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi} \cos n\eta \right], \\ \sin\theta &= \frac{c}{r} \frac{\sin\eta}{(ch\xi + \cos\eta)} = \frac{c}{r} \left[-2sh\xi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi} \sin n\eta \right], \end{aligned} \quad (6)$$

Підставляючи (3), (5) з урахуванням (6) у вирази напружень (2), після певних перетворень прийдемо до наступного

$$\begin{aligned} c \cdot \sigma_\xi &= A_0 + B_0(\xi - e^{-\xi} sh\xi) - (A_1 e^{-2\xi} + B_1) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n-2)e^{-n\xi} [(n-1)A_{n-1} + \\ &+ (n+1)A_n + (n+1)e^{-(n+1)\xi} [nA_n + (n+2)A_{n+1}] + (n-1)e^{-(n-2)\xi} [(n-2)B_{n-1} + nB_n] + \\ &+ (n+2)e^{-n\xi} [(n-1)B_n + (n+1)B_{n+1}] \} \cos n\eta - \frac{P(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \frac{c^2}{r^2 \cdot sh\xi} \left[e^{-\xi} - \right. \\ &\left. - 2sh\xi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi} \cos n\eta \right], \end{aligned} \quad (7,a)$$

$$\begin{aligned} c \cdot \sigma_\eta &= A_0 + (A_1 e^{-2\xi} - B_1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n+2)e^{-n\xi} [(n-1)A_{n-1} + (n+1)A_n] + \\ &+ (n+1)e^{-(n+1)\xi} [nA_n + (n+2)A_{n+1}] + (n-1)e^{-(n-2)\xi} [(n-2)B_{n-1} + nB_n] + \end{aligned}$$

$$+ (n-2)e^{-n\xi}[(n-1)B_n + (n+1)B_{n+1}]\cos n\eta + \frac{P(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \frac{c^2}{r^2 \cdot sh\xi} \left[e^{-\xi} - \right. \\ \left. - 2sh\xi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi} \cos n\eta \right]. \quad (7.6)$$

$$c \cdot \tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ ne^{-n\xi}[(n-1)A_{n-1} + (n+1)A_n] + (n+1)e^{-(n+2)\xi}[nA_n + (n+2)A_{n+1}] + \right. \\ \left. + (n-1)e^{-(n-2)\xi}[(n-2)B_{n-1} + nB_n] + ne^{-n\xi}[(n-1)B_n + (n+1)B_{n+1}] \right\} \sin n\eta - \\ - \frac{P(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \frac{c^2}{r^2} \left[sh\xi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi} \sin n\eta \right].$$

Враховуючи обмеженість напруг σ_ξ в точці $\xi = \infty$ (при цьому ми маємо $B_0 \equiv 0$) та вводячи заміни

$$(n-1)A_{n-1} + (n+1)A_n = a_n, \quad (n-2)B_{n-1} + (n+1)B_n = b_n, \quad n \geq 1 \quad (8)$$

матимемо такі вирази для напружень:

$$c \cdot \sigma_\xi = A_0 - (B_1 + A_1 e^{-2\xi}) - \frac{P(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \frac{c^2 e^{-\xi}}{r^2 sh\xi} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n-2)e^{-n\xi} a_n + (n+1) \otimes \right. \\ \left. \otimes e^{-(n+2)\xi} a_{n+1} + (n-1)e^{-(n-2)\xi} b_n + (n+2)e^{-n\xi} b_{n+1} - \frac{P(3-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \frac{c^2}{r^2} (-1)^n e^{-n\xi} \right\} \cos n\eta, \\ c \cdot \sigma_\eta = A_0 - (B_1 - A_1 e^{-2\xi}) + \frac{P(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \frac{c^2 e^{-\xi}}{r^2 sh\xi} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+2)e^{-n\xi} a_n + (n+1) \otimes \right. \\ \left. \otimes e^{-(n+2)\xi} a_{n+1} + (n-1)e^{-(n-2)\xi} b_n + (n-2)e^{-n\xi} b_{n+1} - \frac{P(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \frac{c^2}{r^2} (-1)^n e^{-n\xi} \right\} \cos n\eta, \\ c \cdot \tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ ne^{-n\xi} a_n + (n+1)e^{-(n+2)\xi} a_{n+1} + (n-1)e^{-(n-2)\xi} b_n + ne^{-n\xi} b_{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{P(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \frac{c^2}{r^2} (-1)^n e^{-n\xi} \right\} \sin n\eta. \quad (9)$$

На контурі диску задані зовнішні напруження σ_ξ та $\tau_{\xi\eta}$. Допускаємо, що їх можна розкласти в тригонометричні ряди по η , наперед приймаючи, що нормальне напруження σ_ξ є парною функцією η , а дотичне напруження $\tau_{\xi\eta}$ – непарною:

$$c \cdot \sigma_\xi \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{1}{2} \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \cos n\eta, \quad c \cdot \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=\xi_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sin n\eta. \quad (10)$$

Для відшукування невідомих коефіцієнтів, які входять до форми запису напружень, (9) та (10) на контурі диску ($\xi = \xi_0$) повинні співпадати. Звідси,

враховуючи те, що на контурі $r = R = \frac{c}{|sh\xi_0|}$, маємо такі граничні умови

$$\begin{aligned} n=0: A_0 - (B_1 + e^{-2\xi_0} A_1) &= \frac{1}{2} \sigma_0 + \frac{P(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} e^{-\xi_0} sh \xi_0, \\ n \geq 1: (n-2)a_n + (n+1)e^{-2\xi_0} a_{n+1} + (n-1)e^{2\xi_0} b_n + (n+2)b_{n+1} &= -2e^{n\xi_0} \sigma_n + \\ &+ \frac{P(3-2\nu)}{\pi(1-\nu)} (-1)^n sh^2 \xi_0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} na_n + (n+1)e^{-2\xi_0} a_{n+1} + (n-1)e^{2\xi_0} b_n + nb_{n+1} &= -2e^{n\xi_0} \tau_n + \frac{P(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} (-1)^n e^{-n\xi_0} sh^2 \xi_0. \\ \text{Або} \quad n=0: A_0 - (B_1 + e^{-2\xi_0} A_1) &= \frac{1}{2} \sigma_0 + \frac{P(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} e^{-\xi_0} sh \xi_0, \\ n \geq 1: (n-1)e^{2\xi_0} a_{n-1} + 2na_n + (n+1)e^{-2\xi_0} a_{n+1} &= f_n, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n + (\tau_n - \sigma_n) e^{n\xi_0} + \frac{Psh^2 \xi_0}{\pi(1-\nu)} (-1)^n, \\ \text{де} \quad f_n &= e^{n\xi_0} [(n-1)e^{\xi_0} (\sigma_{n-1} - \tau_{n-1}) + n\sigma_n - (n+2)\tau_n] + \\ &+ \frac{Psh^2 \xi_0}{\pi(1-\nu)} (-1)^n [1-2\nu - e^{3\xi_0} - (1-e^{3\xi_0})n]. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{Введемо в (12) нові сталі} \quad c_n &= na_n + e^{2\xi_0} (n-1)a_{n-1}, \quad n \geq 1 \\ \text{Після цього приходимо до простої алгебраїчної системи рівнянь:} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} + e^{-2\xi_0} c_n &= e^{2\xi_0} f_n, \\ \text{розв'язок якої подається у вигляді [1]} \end{aligned} \quad (15)$$

$$c_{n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2\xi_0(k-n)} f_{k+1}. \quad (16)$$

Згідно (14) маємо

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} e^{2\xi_0(n-1)} \sum_{m=n-1}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k e^{-2\xi_0 k} f_{k+1}, \quad (16)$$

$$b_{n+1} = (\tau_n - \sigma_n) e^{n\xi_0} + \frac{(-1)^n}{n} e^{2\xi_0(n-1)} \sum_{m=n-1}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k e^{-2\xi_0 k} f_{k+1} + \frac{Psh^2 \xi_0}{\pi(1-\nu)} (-1)^n e^{-n\xi_0}. \quad (17)$$

Підставляючи (17) у (9), отримаємо вирази напружень.

Що до зосередженої сили на валу, то вона визначається як проекція на вісь рівнодійної пондеромоторних сил, що діють на сталий магніт у зовнішньому магнітному полі [3]

$$P = R_z = \oint_S \vec{F}_m ds, \quad (18)$$

де S – замкнена поверхня інтегрування, яка охоплює магніт і прилягає до його поверхні з її зовнішньої сторони.

$\vec{F}_m$ – вектор магнітного тиску, який визначається через компоненти тензора натягів Максвелла в зовнішньому середовищі (у повітрі) [3]. Цей вектор на контурі магніта (в нашому випадкові при $\xi = \xi_0$) можна подати наступним чином через напруження σ_z та τ_{zn} :

$$\vec{F}_n \Big|_{\xi=\xi_0} = -(\vec{e}_\xi \sigma_\xi + \vec{e}_\eta \tau_{\xi\eta}) \Big|_{\xi=\xi_0}. \quad (19)$$

Тоді $F_n \Big|_{\xi=\xi_0} = (\vec{k} \cdot \vec{F}_n) \Big|_{\xi=\xi_0} = - \left(\frac{1 + ch\xi_0 \cos \eta}{ch\xi_0 + \cos \eta} \sigma_\xi \Big|_{\xi=\xi_0} + \frac{sh\xi_0 \sin \eta}{ch\xi_0 + \cos \eta} \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=\xi_0} \right).$ (20)

Підставляючи (20) у (18) та враховуючи, що напруження на контурі диску подаються формулами (10), за допомогою простих обчислень знаходимо, що

$$P = R_z = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n\xi_0} (\sigma_n + \tau_n). \quad (21)$$

Подальший аналіз задач необхідно проводити маючи повний розрахунок сил магнітного тиску на обводі диску. Конкретні приклади будуть подані в наступних публікаціях автора.

Література.

1. Krokhmal P. A. Exact solution of the displacement boundary-value problem of elasticity for a torus // Journal of Engineering Math. – 2002.-44,p.345-368.
2. Ulitko A. F. Exakte lösung des kontaktproblems für zwei zylinder unter berücksichtigung der reibung //z. Angew. Math. Mech. – 2000.-Bd.80.-№5.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М., Гостехиздат, 1954.
4. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. – М. – Л., Гостехиздат, 1950.

Надійшла до редакції 07.02. 2005 р.

УДК 514.77

Віктор С. Лісняк

Диференціальна геометрія неголономних аналогів класичних многовидів

Розглядаються неголономні аналоги класичних точкових і лінійчатих многовидів тривимірного евклідового простору. Побудову всіх аналогів виконано геометричним методом.

Складено системи вихідних диференціальних рівнянь цих неголономних многовидів.

Ключові слова: комплекс, конгруенція, неголономний многовид.

Viktor S. Lisnyak

Differential geometry of aholonomic analogues for classic manifolds

Aholonomic analogues for classic point and lineal manifolds in three-dimensional Euclidean space are considered. All analogues constructions are accomplished by geometrical method.

Systems of determining differential equations of these aholonomic manifolds are composed.

Key Words: aholonomic manifold, complex, congruence.

Неголономні аналоги класичних многовидів є алгоритмічно зручним засобом унаочнення новітніх математичних моделей конкретних еволюційуючих (зокрема рухомих) суцільних середовищ [1, 2, 15]. Тут здійснюється паралельне дослідження найприродніших неголономних многовидів.

§ 1. Рухомий орторепер евклідового простору

Нехай в E_3 маємо деякий орторепер $Q = (A; e_1, e_2, e_3)$ з радіус-вектором A його вершини A та з базисними ортами e_1, e_2, e_3 . Запишемо загальні дериваційні рівняння (диференціальні рівняння руху) Q як

$$dA = \omega^r e_r, \quad de_s = \omega_s^r e_r, \quad a, \dots = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Тут відносні компоненти ω^a та ω_m^c реперу Q підпорядковані рівнянням структури простору E_3 : $D\omega^a = [\omega^s \omega_s^a]$, $D\omega_s^a = [\omega_s^r \omega_r^a]$. (2)

Тотожні алгебраїчні залежності відносних компонент $\omega_m^s + \omega_s^m = 0$ (3) є наслідком евклідовості простору E_3 . Вони викликають косу симетрію

$$\Omega^T = -\Omega \quad \text{для їх матриці} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Запровадимо наступні векторно-матричні позначення:

$$\omega = (\omega^1 \ \omega^2 \ \omega^3)^T \quad (5), \quad R = (e_1 \ e_2 \ e_3). \quad (6)$$

Зі врахуванням (4)-(6) перша рівність з (1) постає як $dA = R\omega$, (7)

а система решти трьох рівнянь з (1) набуває вигляду $dR = R\Omega$. (8)

Рівності (7) та (8) є матричним поданням дериваційних рівнянь (1) рухомого ортореперу $Q = (A; e_1, e_2, e_3)$ класичного евклідового простору E_3 .

§ 2. Неголономна поверхня як поле напрямків

Ітимемо від рівнянь поверхні до рівнянь її неголономного аналогу.

1. Класична поверхня. Єдиним інваріантом, який визначається першим диференціальним околom поверхні S , є її локальна дотична площина π . Їй (за перпендикулярністю) двоїстий локальний орт нормалі n , визначаючий локально перпендикулярний до S напрям l . Це ж дозволяє взяти для S за супровідний частково канонізований орторепер $Q = (A; e_1, e_2, e_3)$ з вершиною A у біжучій точці S та з ортами e_1, e_2 у π . У такому Q поверхня S визначається рівнянням $\omega^3 = 0$. (1)

Його зовнішнє продовження має вигляд

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2. \quad (2)$$

Тоді фундаментальний геометричний об'єкт другого порядку (скорочено – ф.г.о.-2) (a, b, c) чи (за іншою термінологією) другий диференціальний окіл поверхні S визначає два незалежні функціональні інваріанти. Це середня H та повна K кривини поверхні. Їхні формули –

$$H = (a + c)/2, \quad K = ac - b^2. \quad (3)$$

Істотним для подальшого ж є те, що перший диференціальний окіл поверхні однозначно визначає у кожній її точці локальну дотичну до неї площину π , а тому й локальний перпендикулярний до неї напрям.

Дещо інакше: класична поверхня S визначає своїм першим диференціальним околom двовимірне поле напрямків у просторі E_3 .

Неголономною поверхнею назовемо тривимірне поле напрямків у просторі E_3 .

2. Основні диференціальні рівняння поля напрямків. Нехай простір E_3 віднесений до рухомого ортореперу $Q = (A; R)$ з вершиною (визначуваною радіус-вектором) A та з о.н.б. $R \equiv (e_1, e_2, e_3)$.

Кожний напрямок у просторі E_3 зручно задати йому колінеарним ортом e . Тому поля напрямків зручно задавати полями відповідних ортів.

Вважатимемо заданим у деякій області D з E_3 поле E одиничного вектору (орту) e . У його супровідному 0-репері Q векторне поле E має зображення

$$e = e_3. \quad (4)$$

Основні диференціальні рівняння поля E у Q запишуться так:

$$\Theta \equiv -\omega_\alpha^3 + a_{\alpha i} \omega^i = 0, \quad D\Theta_\gamma \equiv 0 \pmod{\Theta_\beta}; \quad (5)$$

Зовнішні продовження цієї системи приводять до рівнянь

$$\Theta_{\alpha i} \equiv da_{\alpha i} - a_{\beta i} \omega_\alpha^\beta - a_{\alpha k} \omega_i^k - a_{\alpha ij} \omega^j = 0, \quad (6)$$

$$\Delta a_{\alpha ij} \wedge \omega^j \equiv 0 \pmod{\Theta_\beta, \Theta_{\gamma p}}. \quad (7)$$

Тут усі компоненти $a_{\alpha ij}$ фундаментальних геометричних об'єктів поля E симетричні за всіма їхніми латинськими індексами.

2. Інтерпретація інваріантних функцій. Для довільного векторного поля E безпосередньою перевіркою можна пере-

конатися в абсолютній інваріантності полів наступних функцій [6] –

$$\begin{aligned} i_1 &= a_{12} - a_{21}, \quad i_2 = a_{11} + a_{22}, \quad i_3 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ i_4 &= (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})^2, \quad i_5 = a_{13}^2 + a_{23}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $i_1, \dots, i_5$ утворюють повну систему алгебраїчно незалежних (функцій компонент ф.г.о.-1) інваріантів першого диференціального околу E .

3. Інваріантні оператори й афінна нормаль. Позначимо символом ${}^\pi d$ локальний оператор диференціювання, задовільняючий умову $e_3 \cdot {}^\pi dA = 0$. Таким чином, ${}^\pi d(\cdot)$ є ортогональною проекцією вектору $d(\cdot)$ на локальну (прохожу через A перпендикулярно відповідному e_3) площину π . Умовимося ще символом $\mathbf{E}$ позначати складову локального вектору $\mathbf{e}$ у $\mathbf{R} \equiv (e_1, e_2, e_3)$, ортогональну до e_3 .

Задання поля E в області D простору E_3 вводить у кожній точці A цієї області лінійний оператор T , який ставить у відповідність векторові ${}^\pi dA$ вектор ${}^\pi de_3$. Обидва ці вектори лежать у π , а в її локальному ор-

торепері $\mathbf{Q} \equiv (A; e_1, e_2)$ матриця

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Афінна нормаль поля E визначається точками A та $A + dA|_{de_3=0}$.

Позначимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Тоді вектор

$$\mathbf{a} = \delta^{ij} \Delta_i \mathbf{e}_j \quad (11)$$

є тим з колінеарних афінній нормалі векторів, модуль та орієнтація якого визначені умовою

$$\mathbf{a} \mathbf{e}_3 = i_3. \quad (12)$$

Надалі вектор $\mathbf{a}$ традиційно іменуватимемо вектором афінної нормалі [6].

Застосовуючи подання операторів векторного аналізу в орторепері до інваріантного векторного поля $V = V^i e_i$ та до скалярного поля φ з диференціальним рівнянням $d\varphi = \varphi_i e^i$, одержимо $\mathbf{grad} \varphi = \delta^{ij} \varphi_i e_j$, (13)

$$\operatorname{div} V = V_i^i \quad (14), \quad \operatorname{rot} V = (V_2^3 - V_3^2) e_1 + (V_3^1 - V_1^3) e_2 + (V_1^2 - V_2^1) e_3. \quad (15)$$

Використовуючи попередні формули і позначення, зрештою дістаємо:

$$\begin{aligned} i_1 &= \mathbf{e}_3 \operatorname{rot} \mathbf{e}_3, \quad i_2 = \operatorname{Sp} T = - \operatorname{div} \mathbf{e}_3, \quad i_3 = \det T, \\ i_4 &= (\bar{\mathbf{a}})^2, \quad i_5 = (d\mathbf{e}_3|_{dA \perp \pi})^2 / (dA|_{dA \perp \pi})^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Це – лише одна з можливих інтерпретацій абсолютних інваріантів (8).

Зафіксовані тут рівностями (5) – (16) поняття та факти в однаковій мірі стосовні неголономних поверхонь, полів напрямків та полів ортів. Диференціальні геометрії усіх трьох тотожні з точністю до термінології.

§ 3. Неголономні конгруенції

Спочатку звернемося до класичної конгруенції прямих простору E_3 .

1. Прямолінійна конгруенція. Якщо конгруенція S пря-

мих не вироджується в ∞^1 циліндрів, випадок чого виключимо з подальшого розгляду, то форми ω_α^3 незалежні і їх можна взяти за базисні.

У 0-репері Q конгруенція C має своїми вихідними рівняннями

$$\omega^1 = K\omega_1^3 + L\omega_2^3, \quad \omega^2 = M\omega_1^3 + N\omega_2^3, \quad (1)$$

доповнені умовами зовнішнього замикання системи (1). Тут функції K, L, M, N – компоненти ф.г.о.-1 конгруенції C прямих.

У першому диференціальному околі біжучого променя конгруенції визначені рівно два її абсолютних функціональних інваріанти a та b , центр $M = A + te_3$ її променя та інваріантний ортогональний до відповідного променя орт $e = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi$. Одержані у [8] формули (10), (11), (16) дають їхні зображення у неканонізованому репері

$$2a = M - L + h, \quad 2b = -M + L + h; \quad h = ((L + M)^2 + (N - K)^2)^{1/2} \quad (2)$$

$$\text{та ще значення} \quad t = (N + K)/2, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = (N - K)/(L + M). \quad (3)$$

Отже, побудована повна система незалежних інваріантів a, b, M, e з першого диференціального околу конгруенції прямих C . Їхній геометричний зміст впливає з того, що граничні точки конгруенції та її фокуси визначаються на кожній прямій l відповідно радіус-векторами

$$r_{1,2} = M \pm (1/2)(a + b)e_3, \quad \rho_{1,2} = M \pm \sqrt{ab}e_3. \quad (4)$$

Інваріантний орт e колінеарний бісектрисі напрямів, зображуваних на сферичному зображенні конгруенції C її розгортними поверхнями, визначуваними диференціальним рівнянням $\omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 = 0$. Часто застосовувана інваріантна функція $a - b$ називається анормальністю конгруенції, бо рівність $a - b = 0$ характеризує саме нормальні конгруенції. З (9) видно, що граничні точки (як і фокуси) розташовані на l симетрично відносно точки M , чим і виправдана її назва як центру променя.

Нарешті зауважимо, що традиційно використовуваний (внаслідок його зручності) канонічний репер Q виокремлюється зі множини допустимих 0-реперів рівностями $t = 0$ та $\varphi = 0$. У ньому система (1) та її зовнішнє диференціальне продовження виглядають відповідно так:

$$\omega^2 = a\omega_1^3, \quad \omega^1 = b\omega_2^3; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} da &= 2x\omega_1^3 + 2y\omega_2^3, & \omega^3 + (a + b)\omega_1^2 &= 2y\omega_1^3 + 2z\omega_2^3, \\ \omega^3 - (a + b)\omega_1^2 &= 2p\omega_1^3 + 2q\omega_2^3, & db &= 2q\omega_1^3 + 2r\omega_2^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Ця канонізована система (5), (6) основних диференціальних рівнянь C зручна для з'ясування геометричного змісту інваріантів її ф.г.о.-2.

2. Неголономні конгруенції та їхні інваріанти. Зіставимо з кожною прямою l тривимірного евклідового простору E_3 перпендикулярний їй орт e та четвірку симетрично розташованих точок R_1, F_1, F_2, R_2 на ній. До того ж, точки F_1, F_2 , які назовемо фокусами, повинні лежати всередині відрізка, утвореного точками R_1, R_2 , називаними граничними. Множину таким чином оснащених прямих умов-

но назвемо неголономною конгруенцією. Очевидно, довільність задання неголономної конгруенції складає 4 функції чотирьох аргументів кожна.

Множину допустимих супровідних ортореперів $R \equiv (A; e_s)$ неголономної конгруенції можна вибрати так, що базисними формами стануть $\omega^\alpha, \omega_\beta^3$. В R орт e подається як

$$e = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi, \quad (7)$$

радіус-вектори граничних точок запишуться у вигляді

$$R_{1,2} = A + (t \pm \frac{a+b}{2})e_3, \quad (8)$$

а радіус-вектори фокусів – $F_{1,2} = A + (t \pm \sqrt{ab})e_3. \quad (9)$

Диференціюючи рівності (1) – (3), одержимо

$$dl = -(\omega_1^2 + d\varphi)(e_1 \sin \varphi - e_2 \cos \varphi) + (\omega_1^3 \cos \varphi + \omega_2^3 \sin \varphi)e_3; \quad (10)$$

$$dR_{1,2} = [\omega^1 + (t \pm \frac{a+b}{2})\omega_3^1]e_1 + [\omega^2 + (t \pm \frac{a+b}{2})\omega_3^2]e_2 + \\ + [\omega^3 + d(t \pm \frac{a+b}{2})]e_3, \quad (11)$$

$$dF_{1,2} = [\omega^1 + (t \pm \sqrt{ab})\omega_3^1]e_1 + [\omega^2 + (t \pm \sqrt{ab})\omega_3^2]e_2 + \\ + [\omega^3 + d(t \pm \sqrt{ab})]e_3. \quad (12)$$

З рівностей (10) – (12) видно, що головними формами неголономної конгруенції є наступні:

$$\omega^\alpha, \omega_\beta^3; \quad (13)$$

$$\omega^3 + dt, da + db, adb + bda, \omega_1^2 + d\varphi. \quad (14)$$

Ми здійснимо невироджену заміну в кільці головних форм реперу, якщо від форм (14) перейдемо до таких:

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \omega^3 + dt - (a+b)\cos 2\varphi(\omega_1^2 + d\varphi) - (1/2)(da + db)\sin 2\varphi, \\ \psi^2 &= -\sin^2 \varphi da + \cos^2 \varphi db - (a+b)\sin 2\varphi(\omega_1^2 + d\varphi), \\ \psi^3 &= \cos^2 \varphi da - \sin^2 \varphi db - (a+b)\sin 2\varphi(\omega_1^2 + d\varphi), \\ \psi^4 &= \omega^3 + dt + (a+b)\cos 2\varphi(\omega_1^2 + d\varphi) + (1/2)(da + db)\sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді визначальну систему основних дифференціальних рівнянь неголономної конгруенції можна записати у вигляді

$$\Theta^A \equiv -\psi^A + z^{A\alpha}\omega_\alpha^3 + z_\alpha^A\omega^\alpha = 0, \quad (16)$$

$$D\Theta^A \equiv 0 \pmod{\Theta^B}. \quad (17)$$

У цій системі індекси змінюються у наступних межах: $\alpha, \dots = 1, 2$; $a, \dots = 1, 2, 3$; $A, \dots = 1, \dots, 4$. Такі самі межі й у виразах (13), (16) та (17).

3. Застосовуючи метод попередньої канонізації реперу [9, 11] можна показати, що повна система інваріантних функцій першого диференці-

льного околу неголономної конгруенції, окрім a та b , містить ще 16 алгебраїчно незалежних функціональних інваріантів, отже всього 18.

4. Якщо чотири головні параметри неголономної конгруенції пов'язати трьома істотними співвідношеннями, то у ній визначиться ∞^1 прямих, кожній з яких у спадок дістанеться дві граничні точки, два фокуси та перпендикулярний цій прямій орт. Таку множину прямих умовно назовемо лінійчатою поверхнею λ неголономної конгруенції.

Для геометричної побудови (з'ясування геометричного змісту) інваріантів першого диференціального околу неголономної конгруенції зручно звернутися до її лінійчатих поверхонь λ з певними властивостями. При цьому зокрема можна одержати аналітичні умови розшаровуваності неголономної конгруенції в ∞^2 голономних так, що об'єкти a, b, t, ϕ для них набувають традиційного відзначеного рівностями (2) і (3) змісту.

Візьмемо довільну пряму l з неголономної конгруенції. Тоді пряма $l + dl$, нескінченно близька прямій l у зміщенні вздовж кожної з лінійчатих поверхонь λ , визначає на l точку $L(\lambda)$ – основу спільного перпендикуляру прямих l та $l + dl$. Множина точок $L(\lambda)$ на l , відповідних різним виборам λ , неперервно заповнює відрізок $R_1 R_2$ і т.д. [9, 11].

5. Очевидно, супровідний тригранник $R \equiv (A; e_k)$ неголономної конгруенції можна повністю канонізувати у нульовому диференціальному околі, якщо на кожній її прямій вершину A триграннику R помістити посередині між граничними точками, а за орт e_1 взяти заданий орт e .

§ 4. Неголономні комплекси прямих

Геометричні об'єкти першого диференціального околу звичайного (класичного) комплексу прямих є вихідні для побудови неголономного.

1. **Комплекс прямих.** Канонізацію 0-реперу Q комплексу K можна здійснити, сумістивши його вершину A зі центром M променя l , а орт e_1 – з ортом головної нормалі E . Такий канонічний репер називається нормальним тригранником комплексу [6, 10].

У ньому основні диференціальні рівняння K запишуться системою

$$\omega^2 = k\omega_3^1 \quad (1); \quad \omega_1^2 = i_1\omega^1 + i_2\omega_3^1 + i_3\omega_3^2,$$

$$dk = i_2\omega^1 + i_4\omega_3^1 + i_5\omega_3^2, \quad k\omega_1^2 - \omega^3 = i_3\omega^1 + i_5\omega_3^1 + i_6\omega_3^2, \quad (2)$$

доповненою відповідними умовами її зовнішньої замкненості.

Істотним тут виявляється те, що перший диференціальний окіл комплексу визначає точно три його інваріанти: центр M променя, орт E головної нормалі та (скалярну) кривину k у біжучому його промені.

2. **Інваріанти неголономних комплексів.** Кожній прямій l з E_3 поставимо у відповідність перпендикулярний їй орт e та 2 точки J_1, J_2 на ній. Множину всіх оснащених таким способом прямих простору E_3 умовно назовемо неголономним комплексом. Зрозуміло, що

широта задання неголономного комплексу складає 3 функції чотирьох аргументів – по одній для задання положення двох точок і напрямку e .

Умовимося, що застосовувані у сумі чи як номери рівностей малі грецькі індекси набирають значення 1 та 2, а малі латинські – 1, 2 та 3. При позначенні елементу множини вони набирають усіх своїх можливих відповідних значень.

У множині допустимих ортореперів $R \equiv (A; e_s)$ неголономного комплексу з базисними формами ω^α , ω_α^3 орт e зобразиться як

$$e = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi. \quad (3)$$

а радіус-вектори інваріантних точок – $J_{1,2} = A + (t \pm k)e_3. \quad (4)$

Диференціюючи рівності (3) та (4) з'ясуємо, що головні форми неголономного комплексу – ω^α , ω_α^3 , $\omega_1^2 + d\varphi$, dk , $\omega^3 + dt$. (5)

$$\omega_1^2 + d\varphi, \quad dk, \quad \omega^3 + dt. \quad (6)$$

Заміна диференціальних форм (6) на

$$\Omega_1 = \sec^2 \varphi (\omega_1^2 + d\varphi), \quad \Omega_2 = dk + t \sec^2 \varphi (\omega_1^2 + d\varphi) + \operatorname{tg} \varphi (\omega^3 + dt), \\ \Omega_3 = k \sec^2 \varphi (\omega_1^2 + d\varphi) - (\omega^3 + dt) + \operatorname{tg} \varphi dk \quad (7)$$

здійснює невироджене перетворення у кільці головних форм. Тоді визначальна система диференціальних рівнянь неголономного комплексу –

$$\Theta_i = -\Omega_i + u_{i\alpha} \omega_\alpha^3 + z_{i\alpha} \omega^\alpha = 0 \quad (8), \quad D\Theta_i \equiv 0 \pmod{\Theta_j}. \quad (9)$$

Тотожне виконання вимоги (9) гарантує цілковиту інтегровність (8).

Послідовно використовуючи розвинуті у [9, 12] алгоритмічні засоби, можна показати, що повна система інваріантів істотно першого диференціального околу неголономного комплексу містить усього 12 алгебраїчно незалежних інваріантних функцій (функціональних інваріантів).

§ 5. Неголономні криві та лінійчаті поверхні

Плоскі та просторові криві не мають функціональних чи векторних інваріантів у першому диференціальному околі. Вони там визначають лише локальні інваріантні напрями (їхніх дотичних). Тому в обраній у цьому дослідженні геометричній схемі їхніми неголономними аналогами слід вважати (відповідно плоске та просторове) поля напрямків.

Для лінійчатої поверхні справа не є настільки ж однозначною, бо цей многовид можна розглядати і як одновимірний лінійчатий і як двовимірний точковий. Ці дві вихідні позиції приводять і до двох істотно різних неголономних аналогів класичної лінійчатої поверхні.

Перші підходи до неголономних аналогів многовидів здійснені мною зокрема у [3-6] й оглянуті у [7, 9]. Обчислювальні формули для їхніх інваріантів у репері нульового порядку наведені у публікаціях [11, 12]. В їх аналітичній побудові мені істотну допомогу надала Г.С. Польща.

Підкреслимо, що історично усталений термін “неголономна геометрія (зануреного в однорідний простір S) многовиду M ” означає “дифе-

ренціальна геометрія у S неголономного аналогу NM многовиду M , бо і термін “неголономний (занурений в однорідний простір S) многовид M ” означає всього лише “неголономний аналог NM многовиду M у S ”. Для перенесення цих побудов на проєктивні простори зручно використати дослідження Г.С. Польщі [7, 13, 14] з проєктивних розподілів точок.

Концептно найголовнішим у цій статті є уніфікована побудова неголономних аналогів класичних многовидів простору E_3 за геометрією першого диференціального околу їхніх голономних прототипів. Аналітичним здобутком є геометрична побудова систем визначальних диференціальних рівнянь (2.5)-(2.7), (3.16), (3.17), (4.8), (4.9) для цих аналогів.

Література

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Неголономные динамические системы. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 324 с.
2. Жермен П. Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 400 с.
3. Лісняк В.С. Інваріантні образи неголономної поверхні / Доповіді АН УРСР, 1970, 1, с. 13-15.
4. Лісняк В.С. До геометрії неголономних конгруенцій / Доповіді АН УРСР, 1970, 2, с. 124, 125.
5. Лісняк В.С. До геометрії відповідностей в лінійчастому просторі / Доповіді АН УРСР, 1970, 4, с. 318-320.
6. Лісняк В.С. Геометрия векторных полей в движущемся твердом теле. – М., 1975. – 56 с. Деп. в ВИНТИ 20.10.75, № 3228.
7. Лісняк В.С. Дослідження Г.С. Польщі з геометрії однорідних просторів. К., 1983 – 1993. – 22 с. Деп. у ДНТБ України 05.07.93, № 1373.
8. Лісняк В.С. Алгебраїчна побудова інваріантів прямолінійної конгруенції / Вісник Київськ. ун-ту, с. фіз.-м. н., вип. № 2, 2001 р., с. 148-158.
9. Лісняк В.С. Дослідження з неголономної геометрії. – 1994. – 23 с. Деп. у ДНТБ України 20.07.94, № 1318.
10. Лісняк В.С. Метричні інваріанти комплексу прямих / Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки, вип. № 4, 2001 р., с. 124-129.
11. Лісняк В.С. Неголономні конгруенції евклідового простору / Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки, вип. № 2, 2004 р., с. 129-136.
12. Лісняк В.С. Неголономні комплекси прямих / Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки, вип. № 3, 2004 р., с. 137-143.
13. Польща Г.С., Лісняк В.С. Проєктивно-диференціальна геометрія розподілів точок / Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки, вип. № 2, 2000 р., с. 91-101.
14. Польща Г.С., Лісняк В.С. Обчислювальні аспекти диференціальної геометрії многовидів / Журнал обчислювальної та прикладної математики, Київський університет, № 2(91), 2004 р., с. 121.
15. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. – М.: Мир, 1984. – 304 с.

Надійшла до редколегії 15 жовтня 2004 р.

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

AT 13.75 AM 1793-1794
1794-1795

УДК 519.9

Геннадій М. Бакан, Ольга Б.
Кононенко

**До задачі оптимізації динамічних
дискретно-неперервних
процесів.**

Анотація: Розв'язується задача мінімізації адитивного функціонала на множині дискретно-неперервних процесів. В основі розв'язання декомпозиція задачі. Розглянуті три варіанта декомпозиції. Два з них відповідають класичним процедурам динамічного програмування. Обговорюються третій (новий) варіант-метод двостороннього динамічного програмування.

Ключові слова: динамічне програмування.

Gennadiy M. Bakan, Olga B.
Kononenko

**To a task of optimization of
dynamic discrete-continuous
processes.**

Resume: The problem of minimization additive scalar function on set of discrete - continuous processes is considered. The problem is solved on a basis of the decomposition. Three variants of decomposition are introduced. Two of them correspond to classical procedures of dynamic programming. The third (new) variant-method of bilateral dynamic programming is discussed.

Key words: dynamic programming.

Однією з актуальних проблем в теорії експертних систем є проблема врахування неповноти або неточності інформації, що міститься в даних і знаннях. Невизначеність так чи інакше є присутня у багатьох практичних задачах, які розв'язуються експертними системами.

Розв'язання задач оптимізації дискретно-неперервних динамічних процесів на основі методу динамічного програмування Белмана можна віднести до класичного розділу теорії математичного програмування [1-4 і ін.]. Добре відомі процедури синтезу оптимальних законів керування для систем зі зворотним зв'язком. Метод динамічного програмування застосуємо і для розв'язання задач оцінювання станів динамічних систем. Спільне розв'язання задач синтезу оптимальних керувань і задач оцінювання призвело до необхідності узагальнення технології динамічного програмування на випадок, коли в рамках однієї задачі для одержання шуканого розв'язку потрібно виконувати процес оптимізації як у прямому, так і в зворотному часових напрямках. Аналогічна проблема виникає при побудові оцінок фільтрації і згладжування. Для розв'язку подібних задач у [5] була запропонована процедура так званого двостороннього динамічного програмування.

У цій статті на прикладі досить простої задачі оптимізації динамічного процесу по адитивному критерію обговорюється основна ідея цього підходу.

Постановка задачі

Розглядається дискретно-неперервний динамічний процес, стани якого утворюють послідовність $\{x_j \in X_j \equiv R^n, j \in 0, \dots, k\}$. Тут $j \in [0, k]$ – дискретний час ($k < \infty$), $x_j \in X_j$ – стан процесу в j -й момент часу, $X_j \equiv R^n$ – простір станів.

Передбачається, що кожна пара послідовних станів зв'язана між собою відношенням

$$\forall j \in [1, k] \quad (x_{j-1}, x_j) \in F_j \subset X_{j-1} \times X_j, \quad (1)$$

де F_j – графік відношення. Перетини $F_j(x_{j-1}) \subset X_j$ і прообрази $F_j^{-1}(x_j) \subset X_{j-1}$ точок при цьому відношенні розглядаються як значення точечно-множинних відображень $F_j(\cdot): X_{j-1} \rightarrow coK(X_j)$ і $F_j^{-1}(\cdot): X_j \rightarrow coK(X_{j-1})$. Тут $coK(X)$ – множина усіх компактних і опуклих підмножин простору X .

Передбачається, що відображення $F_j(\cdot)$ і $F_j^{-1}(\cdot)$ неперервні за Хаусдорфом [6].

Відповідно до умови (1) введемо множину допустимих процесів-послідовностей $x_0^k = (x_0, x_1, \dots, x_k)$. Вона буде мати вигляд відношення

$$\mathcal{F}_k = \{x_0^k : (x_{j-1}, x_j) \in F_j, x_{j-1} \in X_{j-1}, j \in [1, k]\} \subset X_0^k = X_0 \times X_1 \times \dots \times X_k, \quad (2)$$

де $\mathcal{F}_{k=0} \equiv X_0$.

Нехай на множині (2) розглядається задача мінімізації адитивного функціонала

$$J(x_0^k) = \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^k q_j W_j(x_j) + \Phi(x_k), \quad (3)$$

де $q_j > 0$ – вагові коефіцієнти, $\varphi(x_0)$ і $\Phi(x_k)$ – строго опуклі, $W_j(x_j)$ – опуклі невід'ємні функції.

Передбачається, що існує оптимальний процес $(x_0^*, x_1^*, \dots, x_k^*) \in \mathcal{F}_k$, на якому функціонал (3) досягає свого мінімального значення J^* .

Задача оптимізації полягає в тому, щоб знайти процес

$$(x_0^k)^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_k^*), \quad (4)$$

такий що $J((x_0^k)^*) = J^*$.

Крім того необхідно визначити закон формування станів оптимального процесу у формі функціонального відношення $G_j \subset F_j$ такого, що

$$\forall j \in [1, k] \quad (x_{j-1}^*, x_j^*) \in G_j \subset X_{j-1} \times X_j \quad (5)$$

Відношенням G_j задається процес еволюції оптимальної послідовності (4) у формі різницевих включень

$$x_j^* \in G_j(x_{j-1}^*), \quad j = 1, \dots, k \quad (6)$$

чи

$$x_{j-1}^* \in G_j^{-1}(x_j^*), \quad j = k, k-1, \dots, 1. \quad (7)$$

Тут $G_j(x_{j-1}^*)$ – перетин відношення (5) по першому елементу, а $G_j^{-1}(x_j^*)$ – прообраз точки x_j^* при відношенні (5).

Рівняння (6) і (7) дають, зокрема, можливість знайти увесь процес (4) при умові, якщо відомо початковий оптимальний стан x_0^* (для рівняння (6)) чи кінцевий – x_k^* (для рівняння (7)). У першому випадку процес (4) – процес в прямому тимчасовому напрямку, у другому – у зворотному.

Розв'язок задачі

З урахуванням особливої ролі початкового і кінцевого станів оптимального процесу допустимої множини (2) представимо так

$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{x_0 \in X_0} \{x_0\} \times \mathcal{F}_k(x_0) \quad (8)$$

чи у вигляді

$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{x_r \in X_k} \mathcal{F}_k^{-1}(x_r) \times \{x_r\}. \quad (9)$$

Тут

$$\mathcal{F}_k(x_0) = \{x_1^k : (x_0, x_1^k) \in \mathcal{F}_k\}, \quad (10)$$

і

$$\mathcal{F}_k^{-1}(x_k) = \{x_0^{k-1} : (x_0^{k-1}, x_k) \in \mathcal{F}_k\}. \quad (11)$$

Перша з цих множин – це образ початкової точки $x_0 \in X_0$, друга – це прообраз стану $x_k \in X_k$.

Представлення (8),(9) чи моделі допустимої множини процесів є окремими випадками більш загальної моделі. Побудуємо цю модель. Для цього попередньо введемо моделі $\mathcal{F}_j$ і $\mathcal{F}_{j+1,k}$ підпоследовностей $x_0^j \in \mathcal{F}_j$ і $x_j^k \in \mathcal{F}_{j+1,k}$. Вони безпосередньо впливають із загальної моделі (2), якщо її переписати у вигляді:

$$\mathcal{F}_k = \{x_0^k : x_0^j \in \mathcal{F}_j, x_j^k \in \mathcal{F}_{j+1,k}, j \in [0, k]\} \subset X_0^k, \quad (12)$$

де

$$\forall j \in [1, k] \quad \mathcal{F}_j = \{x_0^j : (x_{l-1}, x_l) \in F_l, x_{l-1} \in X_{l-1}, l \in [1, j]\} \subset X_0^j \quad (13)$$

і

$$\forall j \in [0, k] \quad \mathcal{F}_{j+1,k} = \{x_j^k : (x_l, x_{l+1}) \in F_{l+1}, x_l \in X_l, l \in [j, k-1]\} \subset X_j^k. \quad (14)$$

У моделях (13), (14) потрібно вважати

$$\mathcal{F}_{j+1,k}|_{j=0} = X_0, \quad \mathcal{F}_{j+1,k}|_{j=k} = \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{F}_{j+1,k}|_{j=k} = X_k. \quad (15)$$

Твердження 1.

Нехай $\mathcal{F}_{j+1,k}(x_j) \subset X_{j+1}^k$ – переріз графіка (14) по елементу x_j

$$\mathcal{F}_{j+1,k}(x_j) = \{x_{j+1}^k : (x_j, x_{j+1}^k) \in \mathcal{F}_{j+1,k}\}. \quad (16)$$

Нехай $\mathcal{F}_j^{-1}(x_j) \subset X_0^{j+1}$ – прообраз того ж елемента при відношенні (13):

$$\mathcal{F}_j^{-1}(x_j) = \{x_0^{j-1} : (x_0^{j-1}, x_j) \in \mathcal{F}_j\}. \quad (17)$$

Тоді для множини $\mathcal{F}_k$ реалізацій процесу x_0^k справедливе представлення (модель)

$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{x_j \in X_j} \mathcal{F}_j^{-1}(x_j) \times \{x_j\} \times \mathcal{F}_{j+1,k}(x_j). \quad (18)$$

Зауваження 1. У моделі (18) потрібно вважати $\mathcal{F}_j^{-1}(x_j)|_{j=0} = \emptyset$ і $\mathcal{F}_{j+1,k}(x_j)|_{j=k} = \emptyset$.

З урахуванням цього зауваження неважко перевірити, що для $j=0$ модель (18) збігається з (8), а при $j=k-3$ (9).

Кожному з розглянутих тут варіантів представлення допустимої множини (2) можна поставити у відповідність визначену схему декомпозиції вихідної задачі мінімізації. Так, зокрема, для моделі (8) на основі принципу перерізів [4] можна записати

$$J^* = \min_{x_0^k \in \mathcal{F}_k} J(x_0^k) = \min_{x_0 \in X_0} V(x_0), \quad (19)$$

де $V(x_0)$ – функція Белмана

$$V_0(x_0) = \inf_{x_1^k \in \mathcal{F}_1(x_0)} J(x_0^k). \quad (20)$$

З використанням того ж принципу і, приймаючи до уваги структуру моделі (2), задачу мінімізації в (20) можна представити у вигляді послідовності більш простих задач, а саме,

$$V_0(x_0) = \min_{x_1 \in \mathcal{F}_1(x_0)} \dots \min_{x_j \in \mathcal{F}_j(x_0)} J(x_0^k). \quad (21)$$

Тут припускається, що відповідні мінімуми існують і досягаються.

Для розглянутого тут випадку функцію $V_0(x_0)$ можна знайти, як відомо, розв'язуючи функціональне рівняння динамічного програмування,

$$V_j(x_j) = q_j W_j(x_j) + \inf_{x_{j+1} \in \mathcal{F}_{j+1}(x_j)} V_{j+1}(x_{j+1}), \quad (22)$$

де $j = k-1, \dots, 0$ і $V_k(x_k) = \Phi(x_k)$. Для $j=0$ тут потрібно покласти $q_0 W_0(x_0) = \varphi(x_0)$.

В припущенні, що розв'язок цього рівняння існує в класі строго опуклих функцій, можна знайти початковий оптимальний стан

$$x_0^* = \arg \inf_{x_0 \in X_0} V_0(x_0) \quad (23)$$

Він співпадає з початковою множиною шуканої оптимальної послідовності. Інші стани знаходяться за допомогою рекурентного рівняння (6) після визначення законів еволюції оптимального процесу

$$G_j(x_{j-1}) = \arg \min_{x_j \in \mathcal{F}_j(x_{j-1})} V_j(x_j),$$

де $j = k, k-1, \dots, 1$.

Наведена тут класична процедура динамічного програмування відповідає добре відомій схемі розв'язку задачі оптимізації в зворотному

часовому напрямку (функції $V_j(x_j)$ Белмана знаходяться, починаючи з $j = k$),

Представлення допустимої множини у формі (9) приводить до менш розповсюдженої процедури динамічного програмування в прямому часовому напрямку. У цьому випадку декомпозиція вихідної задачі приймає вигляд

$$\min_{x_0^k \in \mathcal{F}_k} J(x_0^k) = \min_{x_k \in X_k} U_k(x_k), \quad (25)$$

де $U_k(x_k)$ – функція Белмана

$$U_k(x_k) = \min_{x_0^{k-1} \in \mathcal{F}_k^{-1}(x_k)} J(x_0^k). \quad (26)$$

Декомпозиція (25) з умовою (26) відповідає так званому принципу прообразів [7]. На підставі того ж принципу задачу мінімізації в (26) можна записати у вигляді послідовності задач меншої розмірності, а саме,

$$U_k(x_k) = \min_{x_{k-1} \in \mathcal{F}_k^{-1}(x_k)} \dots \min_{x_0 \in \mathcal{F}_1^{-1}(x_1)} J(x_0^k). \quad (27)$$

Вважається, що, по-перше, цей ланцюг мінімізацій не обривається, та, по-друге, функція $U_k(x_k)$ строго опукла. Точка

$$x_k^* = \arg \min_{x_k \in X_k} U_k(x_k) \quad (28)$$

збігається з кінцевим станом шуканого оптимального процесу.

Функцію Белмана (27), як відомо, можна знайти, якщо розв'язувати (у прямому часовому напрямку) функціональне рівняння

$$U_j(x_j) = q_j W_j(x_j) + \min_{x_{j-1} \in \mathcal{F}_j^{-1}(x_j)} U_{j-1}(x_{j-1}), \quad (29)$$

де $j = 1, \dots, k$. При цьому для $j = 1$ потрібно покласти $U_0(x_0) = \varphi(x_0)$, а для $j = k$ – $q_k W_k(x_k) = \Phi(x_k)$.

Функції $G_j^{-1}(x_j)$, які визначають закон еволюції станів оптимального процесу, знаходяться аналогічно (24)

$$G_j^{-1}(x_j) = \arg \min_{x_{j-1} \in \mathcal{F}_j^{-1}(x_j)} U_{j-1}(x_{j-1}) \quad (30)$$

де $j = 1, \dots, k$.

Рухаючись від кінцевої точки (28) згідно (7) враховуючи (30), можна знайти всі інші оптимальні стани.

Представлення допустимої множини (2) в узагальненій формі (18) призводить до нового варіанта декомпозиції, який поєднує в собі процедури програмування в прямому і зворотному часових напрямках. У цьому випадку декомпозиція вихідної задачі мінімізації приймає вигляд [7,8]

$$\min_{x_0^k \in \mathcal{F}_k} J(x_0^k) = \min_{x_j \in X_j} L_j(x_j), \quad (31)$$

де

$$L_j(x_j) = \min_{x_0^{j-1} \in \mathcal{F}_j^{-1}(x_j)} \min_{x_{j+1}^k \in \mathcal{F}_{j+1:k}(x_j)} J(x_0^k). \quad (32)$$

Тут $L_j(x_j)$ – функція, що при $j=0$ і $j=k$ збігається з функціями Белмана, які були визначені раніше.

Твердження 2. Нехай існують розв'язки функціональних рівнянь (22) і (29) динамічного програмування, тоді

$$\forall j \in [0, k] \quad L_j(x_j) = V_j(x_j) + \min_{x_{j+1} \in F_{j+1}^-(x_j)} U_{j+1}(x_{j+1}) \quad (33)$$

і при цьому будь-яка точка оптимального процесу знаходиться як множина

$$\forall j \in [0, k] \quad x_j^* = \arg \min_{x_j \in X_j} L_j(x_j) \quad (34)$$

припускаючи, що функція $L_j(x_j)$ строго опукла.

Зауваження 2. Оскільки в процесі визначення функцій $V_j(x_j)$ і $U_{j+1}(x_{j+1})$ знаходяться також закони $G_j(x_{j+1})$ і $G_j^{-1}(x_j)$ еволюції оптимального процесу, то, визначивши стан x_j^* , інші оптимальні стани можна знайти у відповідності з рівняннями (6) і (7), рухаючись вліво и вправо від точки x_j^* .

Як приклад використання розглянутого тут підходу наведемо теорему [10], на основі якої розв'язана задача побудови гарантованих оцінок фільтрації і згладжування станів процесу (1) за умови, що ці стани вимірюються з похибкою, обумовленою обмеженою завадою. Попередньо введемо наступні припущення.

Нехай на основі вимірювальної інформації побудована множина

$$S_k = \{x_0^k : J(x_0^k) \leq b_k\} \subseteq X_0^k. \quad (35)$$

Тут $b_k \geq 0$ – константа така, що $J^* \leq b_k$.

За умови (35) з врахуванням (2) можна записати:

$$x_0^k \in S_k \cap \mathcal{F}_k. \quad (36)$$

Тут множина-перетин справа являє собою гарантовану множинну оцінку реалізації процесу x_0^k . Оцінки окремих станів можна знайти за допомогою оператора проектування

$$E_{j|k} = \text{Pr}_{x_j}(S_k \cap \mathcal{F}_k).$$

За побудовою $x_j \in E_{j|k} \subseteq X_j$ для усіх $j \in [0, k]$. При $j < k$ оцінки $E_{j|k}$ – це оцінки згладжування, при $j = k$ оцінка $E_k = E_{k|k}$ – оцінка фільтрації.

Теорема. Гарантовані множинні оцінки $E_{j|k}$ станів процесу x_0^k , який задовольняє включенню (36), рівні

$$E_{j|k} = \{x_j : L_{j|k}(x_j) \leq b_k\}, \quad j \in [0, k],$$

де

$$L_{j|k}(x_j) = \min_{x_{j+1} \in F_{j+1}^-(x_j)} \dots \min_{x_0 \in F_1^-(x_1)} \min_{x_{j+1} \in F_{j+1}^-(x_j)} \dots \min_{x_k \in F_k^-(x_{k-1})} J(x_0^k).$$

Висновок

Розглянуто три варіанти представлення допустимої множини в задачі мінімізації адитивного функціонала. Показано, що першим двом з них відповідає декомпозиція задачі, що зводиться до класичних процедур динамічного програмування. Третій варіант представлення призводить до схеми декомпозиції, що узагальнює класичну процедуру на випадок одночасного розв'язку задачі в прямому і зворотному часових напрямках. Наведено теорему, що показує застосування двосторонньої технології програмування в задачах гарантованого оцінювання.

Література

1. Белман Р. Динамічне програмування.- М.: ИЛ, 1960.-258 с.
2. Летов А.М. Динаміка польоту та керування. - М.: Наука, 1969.-306 с.
3. Болтянский В.Г. Математичні методи оптимального керування.- М.Наука, 1969.-420 с.
4. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методи та задачі оптимального керування.- М.:Наука, 1973.- 446 с.
5. Бакан Г.М. Гарантоване оцінювання станів динамічних систем методом двостороннього динамічного програмування // Кібернетика та системний аналіз.-2001.-N 1.- С.83-96
6. Чикрий А.А. Конфліктно керовані процеси. - Київ: Наук. думка, 1992.- 446 с.
7. Бакан Г.М. Послідовна декомпозиція в задачах оптимізації динамічних процесів з моделями у включеннях // Проблеми керування та інформатики - 1999.- N 6- С. 60-73.

Надійшла до редакції 06.11.2004

УДК 517.929

Олексій С. Бичков

**Застосування другого методу
Ляпунова для дослідження
стійкості гібридних систем**

Введено поняття гібридної функції Ляпунова. Доведено теорему про стійкість тривіальної реалізації гібридного автомата.

Ключові слова: гібридний автомат, гібридна функція Ляпунова, стійкість розв'язків.

Alexei S. Bychkov

**Research of the hybrid systems
stability with second Lyapunov's
method.**

The concept of hybrid Lyapunov's function is defined. A theorem about stability of trivial execution is proved.

Key Words: Hybrid automata, hybrid Lyapunov's function, stability of solutions.

Існує значна кількість задач, в яких структура математичної моделі не є незмінною в процесі функціонування. До них можна віднести задачу регулювання температури в приміщенні, управління гальмової системи автомобіля, побудови автоматизованої системи управління виробництвом і т.д.

Розглянемо такий приклад. Опишемо динаміку стрибаючого по горизонтальній площині м'ячика. Позначимо через x_1 - відстань по вертикалі від площини до поточного положення м'ячика, x_2 - швидкість його руху, g - гравітаційну сталу, $c \in [0,1]$ - коефіцієнт відновлення. Поки м'ячик знаходиться над площиною, тобто $x_1 > 0$, його динаміка описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -g$$

Коли м'ячик відбивається від площини (в момент удару $x_1 = 0$), то вектор швидкості змінює свій напрямок і значення згідно із законом $x_2 = -cx_2$. При цьому динаміка продовжує описуватися наведеною системою диференціальних рівнянь. Значення фазової змінної x_2 змінюється при $x_1 = 0$ і надалі вже це значення приймається як початкове. В даному прикладі ми бачимо, що в процесі функціонування системи міняється значення фазової

змінної за певною умовою і система переходить в інший стан. Така умова називається умовою переходу.

Також можна навести приклади процесів, динаміка яких описується різними системами диференціальних рівнянь залежно від того, в якому стані вона знаходиться, тобто ми маємо справу вже з системами із змінною структурою.

Називатимемо системою із змінною структурою таку систему, в якій зв'язки між функціональними елементами міняються тим або іншим чином залежно від її стану [1].

Можна сказати, що для опису систем із змінною структурою необхідно задати скінчену кількість можливих локальних станів, умов переходів з одного локального стану в інший та системи диференціальних рівнянь для опису динаміки в кожному з локальних станів. Для формалізації таких моделей використовують гібридні автомати.

Введемо такі позначення.

Нехай $Q = \{1, \dots, N\}$; $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 0$, $x_i \in R$ - дійсні фазові змінні; $F = \{f : Q \times R^n \rightarrow R^n\}$ - множина неперервних вектор-функцій, що задовольняють умові Ліпшица; $Init - Init \subset Q \times R^n$; $Inv - Inv \subset Q \times R^n$; $Jump$ - множинно-значна функція $i : Q \times R^n \rightarrow P(Q \times R^n)$.

Означення 1. [6] Гібридним автоматом назовемо кортеж $H = (Q, X, F, Init, Inv, Jump)$.

Початковим станом гібридного автомата $Init$ є пара (i, x) , де i визначає локальний стан, а x - значення фазової змінної. Введення множини Inv необхідно для задання умови інваріантності, тобто, якщо автомат перебуває в дискретному стані $i \in Q$, то стан повинен належати Inv . Функція $Jump$ визначає умову переходу з одного дискретного стану в інший й початкове значення фазової змінної в новому дискретному стані.

Означення 2 [6]. Траєкторією за часом гібридного автомата, назовемо скінчену або нескінченну послідовність інтервалів $T = \{I_i\}_{i=0}^N$, таку, що

- $I_i = [\tau_i, \tau'_i]$ для $i < N$. Якщо $N < \infty$, то $I_N = [\tau_N, \tau'_N]$ та $I_N = [\tau_N, \tau'_N)$ якщо $N = \infty$;
- $\tau_i \leq \tau'_i = \tau_{i+1}$ для $i \geq 0$.

Таким чином, траєкторією за часом гібридного автомата є послідовність інтервалів дійсної прямої, чії кінцеві точки перекриваються.

Означення 3 [6]. Реалізацією фазової траєкторії гібридного автомата H назвемо трійку $\chi = (\tau, i, x)$, де $\tau \in T$, $i: \tau \rightarrow Q$ і $x: \tau \rightarrow R^n$ таку, що

- $(i(\tau_0), x(\tau_0)) \in \text{Init}$;
- для всіх i таких, що $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i(\cdot)$ - є константами, а $x(\cdot)$ - розв'язок диференціального рівняння $\dot{x}(t) = f(i(t), x(t))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $(i(t), x(t)) \in \text{Inv}$ визначає неперервну динаміку на дискретному стані;
- для всіх i , пара $(i(\tau_{i+1}), x(\tau_{i+1})) \in \text{Jump}(i(\tau_i), x(\tau_i))$ визначає дискретну динаміку.

Дослідженню стійкості гібридних автоматів присвячені роботи М.Браницького, С.Петерссона, Л.Хоу та інших авторів [2-5].

У цій роботі вводиться функція Ляпунова, яка дозволяє досліджувати стійкість гібридних автоматів без знаходження реалізацій.

Означення 4 [6]. Неперервний стан $x=0$ назвемо тривіальною реалізацією гібридного автомата H , якщо існує непуста множина $\bar{Q} \subset Q$ така, що для всіх $i \in \bar{Q}$ виконується

- з $(i', z') \in \text{Jump}(i, 0)$ випливає, що $z' = 0$ й $i' \in \bar{Q}$;
- $f(i, 0) = 0$, для всіх $i \in Q$.

Означення 5. Тривіальна реалізація $x=0$ гібридного автомата H називається стійкою за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх реалізацій $\chi = (\tau, i, x)$, що задовольняють умову $|x_0| < \delta$ виконується $|x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \tau$.

Через $|\cdot|$ - позначено евклідову норму.

Означення 6. Локальний стан назвемо стійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описує динаміку гібридного автомата в ньому стійкий за Ляпуновим.

Надалі будемо розглядати автономні гібридні автомати із стійкими локальними станами. Тоді для систем диференціальних рівнянь, що описують динаміку кожного локального стану i існують додатно визначені функції Ляпунова $V_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, похідні яких в силу відповідних систем є функціями від'ємно напіввизначеними.

Припустимо, що реалізація гібридного автомата починається із першого стану.

Нехай позначення $x^k|_{i \rightarrow j}$ означає, що гібридний автомат переходить із стану i в стан j і значення x^k береться на множині, що задає умову переходу. Побудуємо таку послідовність $\{x^i\}, i = 0, \dots, N$:

$$\begin{aligned} x^0|_{N \rightarrow 1}, c_0 = V_1(x^0), x^1 = V_1^{-1}(c_0)|_{1 \rightarrow 2}, c_1 = V_2(x^1), x^2 = V_2^{-1}(c_1)|_{2 \rightarrow 3}, \dots, \\ c_{N-1} = V_N(x^{N-1}), x^N = V_N^{-1}(c_{N-1})|_{N \rightarrow 1} \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Для дослідження стійкості тривіальної реалізації введемо означення гібридної функції Ляпунова.

Означення 6. Назвемо $V(i, x) = \{V_i(x)\}, i = 1, \dots, N$ додатно визначеною гібридною функцією Ляпунова, якщо $V_i(x)$ додатно визначені та для послідовності $\{x^i\}, i = 0, \dots, N$ визначеної в (1) виконується $|x^N| \leq |x^0|$.

Як відомо [7], поверхня рівня звичайної функції Ляпунова $V(x) = c$ замкнута. Для гібридних функцій Ляпунова це не так. Послідовність (1) задає поверхню рівня для гібридної функції Ляпунова.

Введемо такі позначення: $B_r = \{x \in R^n : |x| \leq r\}, S_r = \{x \in R^n : |x| = r\}$.

Означення 7. Похідною гібридної функції Ляпунова в силу системи назвемо вираз

$$\frac{dV}{dt} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(i, x) f(i(t), x(t)), i = 1, \dots, N \right\}.$$

Теорема. Нехай гібридний автомат H має тривіальну реалізацію $x = 0, |Q| < \infty, \text{Jump}(i, x) = \{(i+1, x)\}, D \subseteq X$ і розв'язки, що відповідають локальним станам стійкі за Ляпуновим. Якщо для H існує додатно визначена гібридна функція Ляпунова $V(i, x) : Q \times D \rightarrow R$ така, що $\frac{\partial V}{\partial x}(i, x) f(i(t), x(t)) \leq 0$ для всіх $x \in D$ та $i = 1, \dots, N$, то тривіальна реалізація гібридного автомата H стійка за Ляпуновим.

Доведення. Слід зауважити, що в умовах теореми гібридний автомат має стійкі локальні стани. Для простоти викладання покладемо, що $Q = \{1, 2\}$ й реалізація починається із першого стану. Позначимо $\Omega_r(i) = \{x \in R^n : V(i, x) \leq r\}$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Покажемо, що можна, в умовах теореми, знайти $\delta > 0$ таке, що всі реалізації (τ, i, x) для яких виконується $x(\tau_0) \in B_\delta$ задовольняють умові $x(t) \in B_\varepsilon$, для всіх $t \in \tau$.

Виберемо $r \in (0, \varepsilon)$ таке, що $B_r \subseteq D$. Покладемо $a(i) = \min_{x \in S_r} V(i, x)$ для всіх $i \in Q$ й $b(i) \in (0, a(i))$. Тоді $\Omega_{b(i)}(i) \subseteq B_r$. Далі, нехай $p(i) > 0$ таке, що

$B_{p(i)} \subseteq \Omega_{b(i)}(i)$. Покладемо $s = \min_{i \in Q} p(i)$ й нехай $x(\tau_0) \in B_s$. Якщо не відбудеться перехід в інший стан, то реалізація залишиться в $\Omega_{b(i)}(i) \subseteq B_r$ й, отже, в B_s .

Нехай гібридний автомат переходить в стан 2.

Покладемо $c(i) = \min_{x \in S_r} V(i, x)$ для всіх $i \in Q$. Виберемо $d(i) \in (0, c(i))$. Тоді $\Omega_{d(i)}(i) \subseteq B_s$. Далі, виберемо $w(i)$ таке, що $B_{w(i)} \subseteq \Omega_{d(i)}(i)$ й покладемо $\delta = \min_{i \in Q} w(i)$. Нехай ми маємо реалізації (τ, i, x) гібридного автомата H такі, що $|x(\tau_0)| < \delta$ й нехай гібридний автомат перебуває в стані 1. Тоді з умов теореми випливає, що $x(t) \in \Omega_{d(1)}(1) \subseteq B_s \subseteq B_\varepsilon$, $t \in [\tau_0, \tau_0']$.

Якщо переходів у новий стан немає, то теорему доведено. У протилежному випадку, маємо момент часу $\tau_1 = \tau_0'$, у якому відбувається перехід й $x(\tau_1) = x(\tau_0') \in \Omega_{d(1)}(1) \subseteq B_s \subseteq \Omega_{b(2)}(2)$. З умови теореми випливає, що $x(t) \in \Omega_{b(2)}(2) \subseteq B_r \subseteq B_\varepsilon$, $t \in [\tau_1, \tau_1']$.

Якщо переходів у новий стан немає, то теорему доведено. Інакше реалізація переходить у початковий стан 1. За умовою теореми для гібридного автомата існує додатно визначена гібридна функція Ляпунова тому маємо, що $|x(\tau_2)| \leq |x(\tau_0)|$. Отже $x(t) \in \Omega_{d(1)}(1) \subseteq B_s$. Продовжуючи по індукції для довільного τ одержуємо, що $|x(t)| < \varepsilon$ ($x(t) \in B_\varepsilon$), $t \in \tau$. Теорему доведено.

Розглянемо приклад. Нехай гібридний автомат має два локальні стани:

- в одному локальному стані його динаміка описується системою

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t), \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{pmatrix};$$

- в іншому локальному стані його динаміка описується системою

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t), \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Кожна система окремо є стійкою. Для них маємо відповідні додатно визначені функції Ляпунова

$$V_1(x) = x^T H_1 x, \quad V_2(x) = x^T H_2 x,$$

$$\text{де } H_1 = \begin{pmatrix} 2,748 & -0,022 \\ -0,022 & 0,275 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0,275 & 0,022 \\ 0,022 & 2,748 \end{pmatrix}.$$

Гібридний автомат має два локальних стани. Перебування в кожному з них описується умовами $x_1 x_2 < 0$ та $x_1 x_2 \geq 0$, де x_1, x_2 - фазові змінні. З'ясуємо як послідовність переходів з одного локального стану в інший впливає на стійкість тривіальної реалізації.

1. Нехай при виконанні умови $x_1 x_2 < 0$ динаміка гібридного автомата описується системою з матрицею A_2 , а якщо $x_1 x_2 \geq 0$, то з матрицею A_1 . Припустимо, що рух починається із точки $x_1 = 1, x_2 = 0$. Тоді для гібридної функції Ляпунова одержуємо $|x^0| = 1, |x^4| = 0.01$ і відповідно виконується умова $|x^0| > |x^4|$. Таким чином, одержуємо, що тривіальна реалізація стійка за Ляпуновим.
2. Нехай при виконанні умови $x_1 x_2 < 0$ динаміка гібридного автомата описується системою з матрицею A_1 , а якщо $x_1 x_2 \geq 0$, то з матрицею A_2 . Припустимо, що рух починається із крапки $x_1 = 1, x_2 = 0$. Тоді для гібридної функції Ляпунова одержуємо $|x^0| = 1, |x^4| = 99.855$ і відповідно виконується умова $|x^0| < |x^4|$. Якщо побудувати реалізацію, то побачимо, що тривіальна реалізація не стійка за Ляпуновим.

Також проведені аналогічні дослідження для систем із більшим числом станів.

Література.

1. Теория систем с переменной структурой. Под ред. С.В.Емельянова. М., "Наука", 1972.
2. M. Branicky, "Stability of switched and hybrid systems," in Proc. 33rd Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, Dec. 1994, pp. 3498–3503.
3. S. Pettersson and B. Lennartson. Stability and robustness for hybrid systems. In Proc. of 35th CDC, 1996, p. 1202–1207.
4. F. Filippov. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Kluwer Academic Publishers, 1988.
5. H. Ye, A. Michel, and L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 43(4), April 1998, p. 461–474.
6. MannaZ., PnueliA. Verifying hybrid systems. Hybrid systems, LNCS736, Springer-Verlag, 1993.
7. Д.Р.Меркин. Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1971.

Надійшла до редакції 15.11.2004

УДК 532.546 : 517.54 : 519.63

Анатолій П. Власюк¹,

Микола Б. Демчук²

**Чисельне розв'язання однієї
задачі укріплення основи
гідротехнічного (енергетичного)
об'єкта**

Розглянута задача укріплення основи гідротехнічного (енергетичного) об'єкта методом ін'єкції в'язучої рідини. Сформульована математична модель даної задачі і розв'язана методом скінчених різниць з використанням чисельних конформних відображень. Задача відноситься до класу задач з вільними межами. В результаті числових експериментів отримано еволюцію в часі рухомої межі (фронту нагнітання).

Ключові слова: ін'єкція, метод скінчених різниць, чисельне конформне відображення, вільна рухома межа, фільтрація, крайова задача

¹ E-mail: A.P.Vlasyuk@rstu.rv.ua

² E-mail: M.B.Demchuk@rstu.rv.ua

Anatoliy P. Vlasyuk¹,

Mykola B. Demchuk²

**Numerical solution of one problem
of waterside (energy) structure base
enhancement**

The problem of enhancement the base of waterside (energy) structure using method of bounding fluid injection is considered. Mathematical model of this problem is formulated and solved by finite difference method with usage of numerical conformable transformations. The problem is free boundary type problem. As a result of numerical experiments the time evolution of moving boundary (injection front) is obtained.

Keywords: injection, finite difference method, numerical conformal transformation, free moving boundary, filtration, boundary value problem

1. Вступ. В даний час науково-технічний прогрес досяг такого рівня, що в зв'язку з негативним впливом техногенних процесів на гідротехнічні та енергетичні об'єкти, їх руйнація може призвести до серйозних екологічних наслідків. Тому великого значення набувають проблеми пов'язані зі стійкістю таких споруд. Очевидним шляхом покращення стійкості об'єкту є укріплення їх основи. Одним з методів є нагнітання в'язучої рідини в їх основу. В зв'язку з цим великого значення для практики має знання положення межі фронту нагнітання в часі. Однією із труднощів при таких розрахунках є те, що межа області нагнітання є невідомою і рухається з часом. У зв'язку з цим впровадження методів математичного моделювання для розв'язання задач теорії фільтрації в області з рухомою межею заслуговує особливої уваги.

Подібні задачі виникають в багатьох областях теоретичного чи прикладного натурознавства: в гідро- і аеромеханіці, теплофізиці і при розв'язуванні обернених задач теорії потенціалу та ін.

Для ін'єкції в якості в'язучої рідини використовують цементні, глиняні, глиняно-цементні розчини та органічні смоли. Для розуміння того, яким чином поширюється розчин в ґрунті, варто враховувати структуру неоднорідних ґрунтів, властивості розчинів, які можуть бути абсолютно різними, закони руху рідин або суспензій в пустотах невизначеної геометричної форми, розміщених в пористому середовищі.

2. Постановка задачі. Будемо вважати, що під гідротехнічною (енергетичною) спорудою зроблено велику траншею товщиною a та глибиною b , в яку під тиском p нагнітається в'язучий фільтрат (рис.1).

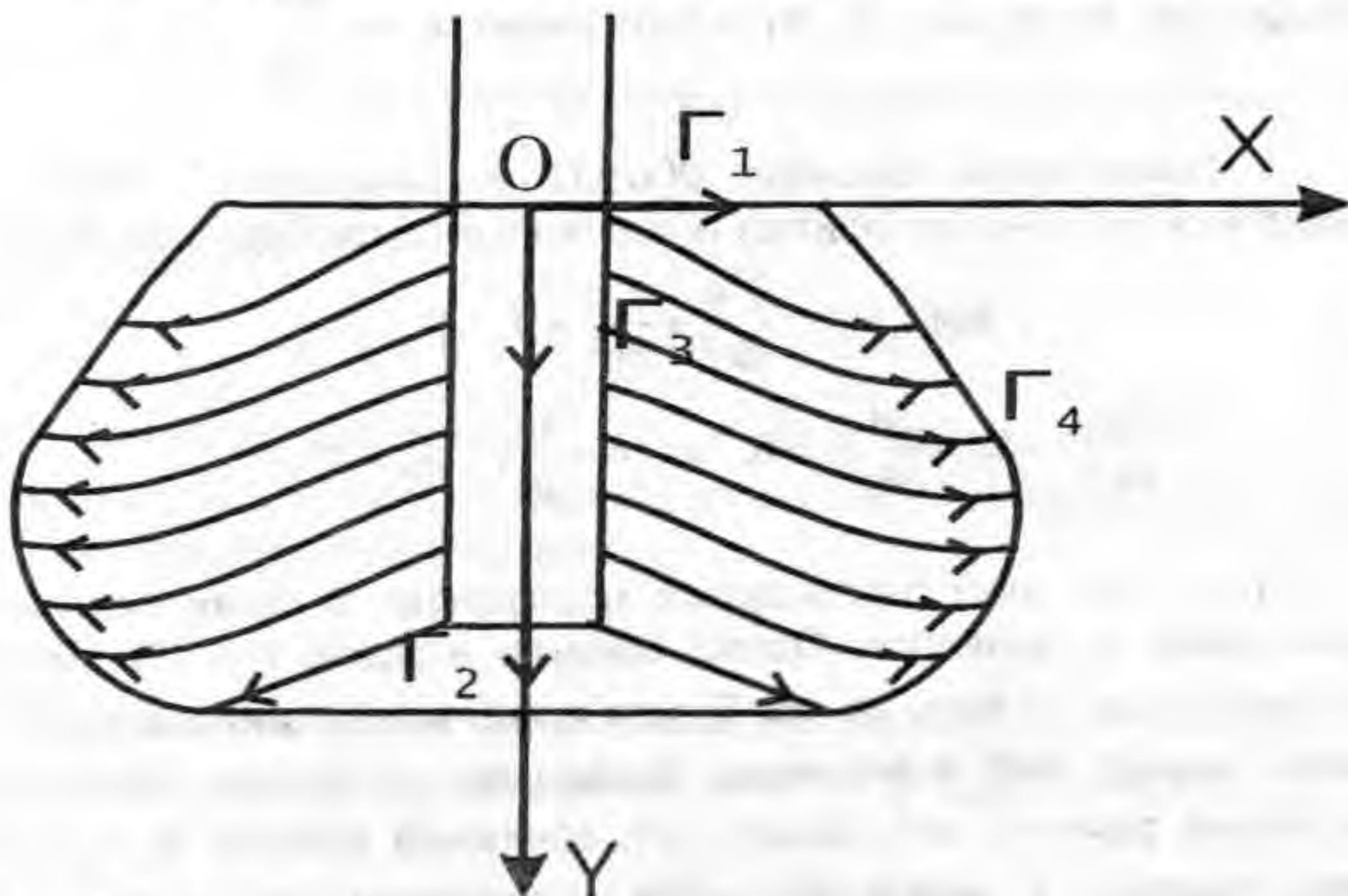


Рис.1. Фізична область $G(t)$ нагнітання фільтрату в основу гідротехнічного (енергетичного) об'єкта

При використанні для нагнітання органічних смол, до їх складу, як правило, додають хімічні добавки, з метою наближення їх коефіцієнта фільтрації до коефіцієнта фільтрації води [1]. Тому в даній роботі для простоти будемо вважати, що в ґрунті процес нагнітання в'язучої рідини розглядається в межах фільтрації чистої води. Також будемо нехтувати особливостями поширення розчинів в ґрунтовому середовищі.

3. Математична модель задачі. При зроблених вище допущеннях в даному випадку процес нагнітання в'язучої рідини в першому наближенні можна описати усталеним рухом фільтрації [2]. Як відомо, цей рух є потенційним, швидкість фільтрації якого в кожний момент часу

описується потенціалом $\varphi(x, y, t)$, де x, y – геометричні координати, t – час, який розглядається як параметр.

Так як процес нагнітання відбувається під гідротехнічною спорудою, то $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_1} \Big|_{\Gamma_1} = 0$, де $\vec{n}_1$ – вектор нормалі до Γ_1 . З міркувань симетрії очевидно, що $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_2} \Big|_{\Gamma_2} = 0$, де $\vec{n}_2$ – вектор нормалі до Γ_2 . На вільній поверхні Γ_4 тиск p повинен бути рівним атмосферному. Якщо за нульовий тиск прийняти атмосферний, то $\varphi \Big|_{\Gamma_4} = ky$ [2]. Крім того, маємо $\varphi \Big|_{\Gamma_3} = -\frac{kp}{\rho g}$.

Таким чином, потенціал $\varphi(x, y, t)$, в „замороженій” області на момент часу $t=t_*$ $G(t_*)$ знаходиться із розв’язку наступної крайової задачі:

$$\Delta \varphi(x, y, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_1} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_2} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad \varphi \Big|_{\Gamma_3} = -\frac{kp}{\rho g}, \quad \varphi \Big|_{\Gamma_4} = ky. \quad (2)$$

Тут t – час, який розглядається як параметр. З часом положення вільної межі Γ_4 міняється. Однак, оскільки в задачі (1), (2) відсутні часткові похідні по часу, то при її розв’язанні можна вважати, що Γ_4 в певний момент часу t фіксована. Знайшовши φ , будемо знати поле швидкостей рідини у всій області $G(t)$, обмеженій кривими $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$. Вільну поверхню Γ_4 можна розглядати, як поверхню розриву параметрів фільтраційного потоку [3]. Нехай в момент часу t поверхня Γ_4 визначається рівнянням $\zeta(t, x, y) = 0$. Припустимо, що при $\zeta(t, x, y) < 0$ $\rho = \rho^-$, а при $\zeta(t, x, y) > 0$ $\rho = \rho^+$. Виділимо в області фільтрації нерухому площадку (рис. 2), прилеглу в момент часу t до поверхні $\zeta(t, x, y) = 0$. Нехай ця площадка обмежена наступними кривими: кривою $l_{t+\Delta t}$ поверхні $\zeta(t + \Delta t, x, y) = 0$, кривою l_t поверхні $\zeta(t, x, y) = 0$ та відрізком l_n кривої, яка утворена нормальми до поверхні $\zeta(t, x, y) = 0$. Радіус вектор $\vec{r}_{t+\Delta t}$ (рис. 2) можна представити у вигляді [3]

$$\vec{r}_{t+\Delta t} = \vec{r}_t + \lambda \vec{\nabla} \zeta(t, x, y), \text{ де } \lambda = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \Delta t / |\vec{\nabla} \zeta|^2. \quad (3)$$

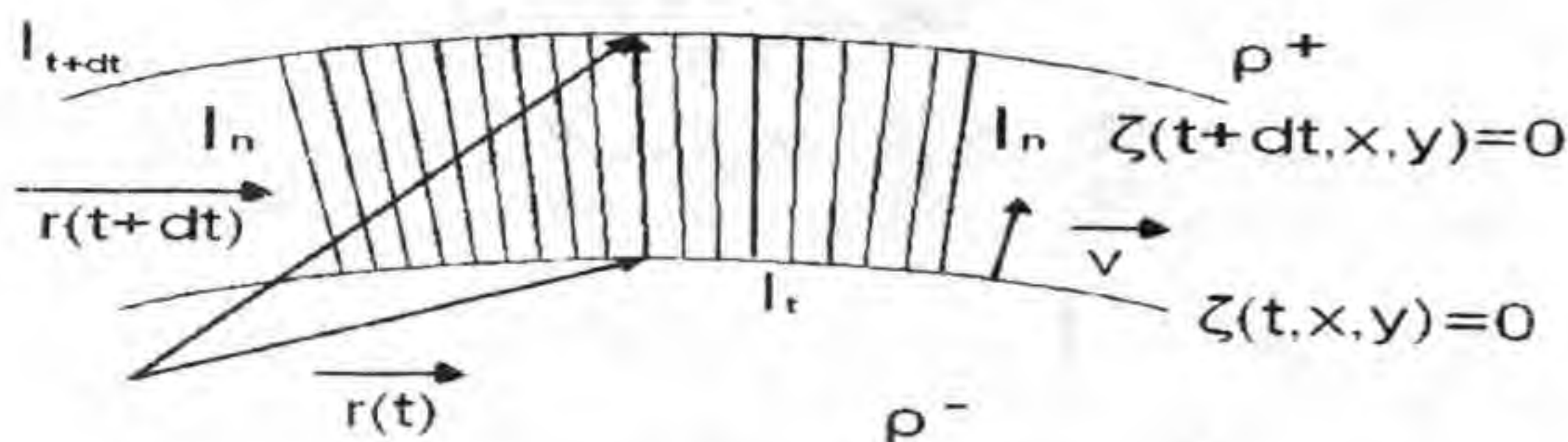


Рис. 2. Поверхня розриву параметрів фільтраційного потоку.

Тоді для точок поверхні розриву Γ_1 виконується наступне співвідношення [3]:

$$(\bar{v}^+ \rho^+ - \bar{v}^- \rho^-, \bar{\nabla} \zeta) = (\rho^+ m^+ - \rho^- m^-) \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (4)$$

У нашому випадку маємо $\bar{v}^+ = 0$, $\rho^+ = 0$, $\rho^- = \rho$, $m^+ = m^- = m$, $\bar{v}^- = \bar{\nabla} \varphi$. Тут m пористість ґрунту, $\bar{v}^-$ - вектор швидкості фільтрації. З врахування цих співвідношень (4) набуває вигляду:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{m} (\bar{\nabla} \varphi, \bar{\nabla} \zeta). \quad (5)$$

Підставляючи (5) в (4) та відмічаючи, що для одиничного вектора нормалі до l , справедливо співвідношення $\bar{v} = \bar{\nabla} \zeta / |\bar{\nabla} \zeta|$, отримуємо

$$\bar{r}(t + dt) = \bar{r}(t) + \frac{1}{m} (\bar{\nabla} \varphi, \bar{v}) d\bar{r} \bar{v}. \quad (6)$$

Отже для розв'язку поставленої задачі потрібно знайти потенціал $\varphi(x, y, t)$, що задовольняє рівняння (1) та крайові умови (2), (6).

4. Алгоритм розв'язку задачі. Алгоритм розв'язку даної задачі наступний. Спочатку розв'язуємо задачу (1), (2) на момент часу t , в деякій фіксованій області $G(t)$. Потім згідно співвідношення (6) уточнюємо нове положення фронту нагнітання Γ_1 на час $t + \Delta t$. Після чого розв'язуємо задачу (1), (2) в новій області $G(t + \Delta t)$ і т.д..

Для розв'язання задачі (1), (2) використовуємо різницевий метод з використанням чисельних конформних відображень [4]. Цей метод пропонує алгоритм знаходження такої заміни змінних, яка конформно відображає область $G(t)$ на параметричний прямокутник $G^*(t)$, як показано на рис.3. При цьому вигляд рівняння (1) та крайових умов (2) в нових змінних залишається інваріантним:

$$\Delta\varphi(\xi, \eta, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \varphi \Big|_{\Gamma_3} = -\frac{kp}{\rho g}, \varphi \Big|_{\Gamma_4} = ky \left(\frac{1}{\sqrt{M}}, \eta \right). \quad (8)$$

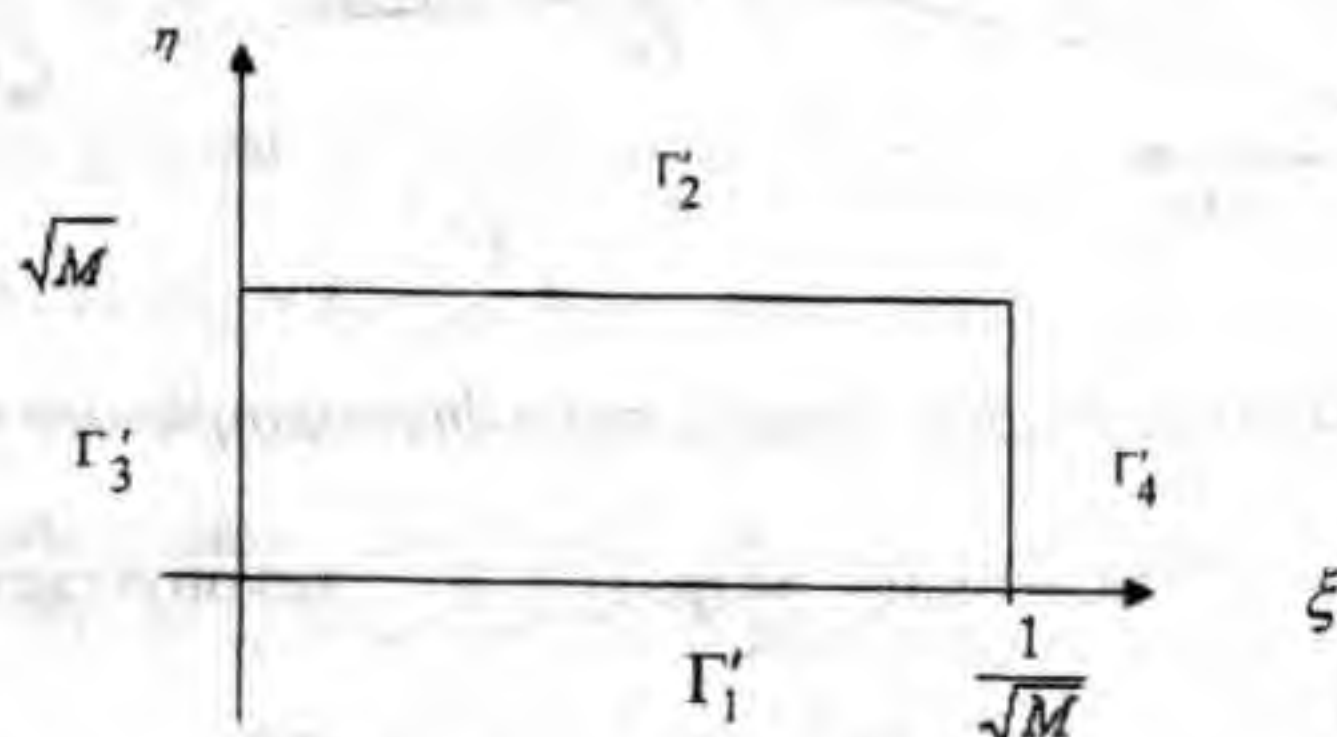


Рис.3. Параметричний прямокутник конформного відображення області $G(t)$.

Розв'язок задачі (7),(8) будемо проводити в два етапи. На нульовій ітерації розв'язуємо наступну задачу Діріхле для рівняння Лапласа на параметричному прямокутнику:

$$\Delta\varphi(\xi, \eta, t) = 0, \quad (9)$$

$$\varphi \Big|_{\Gamma_3} = -\frac{kp}{\rho g}, \quad \varphi \Big|_{\Gamma_4} = ky \left(\frac{1}{\sqrt{M}}, \eta \right), \quad (10)$$

$$\varphi \Big|_{\Gamma_1} = -\frac{kp}{\rho g} + \xi \frac{ky(\xi, 0) + \frac{kp}{\rho g}}{\frac{1}{\sqrt{M}}}, \quad \varphi \Big|_{\Gamma_2} = -\frac{kp}{\rho g} + \xi \frac{ky(\xi, \sqrt{M}) + \frac{kp}{\rho g}}{\frac{1}{\sqrt{M}}}. \quad (11)$$

Кожного разу, після отримання числового розв'язку задачі Діріхле, будемо перераховувати значення потенціалу у вузлах вільної межі згідно крайових умов на Γ_1' та Γ_2' за такими різницевиими співвідношеннями:

$$\varphi_{i,0}^{(s+1)} = \frac{1}{3}(-\varphi_{i,2}^{(s)} + 4\varphi_{i,1}^{(s)}), \quad \varphi_{i,2n}^{(s+1)} = \frac{1}{3}(-\varphi_{i,2n-2}^{(s)} + 4\varphi_{i,2n-1}^{(s)}) \quad (12)$$

Після того, як різниця між s -ю та $(s+1)$ -ю ітераціями стане меншою за ε (точність обчислень), отримуємо виконання наступних граничних умов:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_1} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_2} = 0. \quad (13)$$

Після чого уточняємо положення вільної межі Γ_4 за формулою (6). Як відомо [5], вектор зовнішньої нормалі до кривої визначається за формулою

$$\vec{v} = - \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} / \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right|, \quad (14)$$

де s – довжина кривої. Тоді перехід від параметра s до змінної η можна здійснити за допомогою наступних формул [5]:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{s'(\eta) \cdot \vec{r}''(\eta) - s''(\eta) \cdot \vec{r}'(\eta)}{(s'(\eta))^3}, \quad (15)$$

$$s'(\eta) = \sqrt{(x'(\eta))^2 + (y'(\eta))^2}, \quad s''(\eta) = \frac{x'(\eta)x''(\eta) + y'(\eta)y''(\eta)}{\sqrt{(x'(\eta))^2 + (y'(\eta))^2}}. \quad (16)$$

5. Різницева схема задачі. Алгоритм знаходження такої заміни змінних, яка здійснює числове конформне відображення області $G(t)$ на параметричний прямокутник згідно [4] покриває його рівномірною сіткою

з кроками $h_1 = \frac{1}{2n\sqrt{M}}, h_2 = \frac{\sqrt{M}}{2n}$

$$\Omega_{h_1, h_2} = ((\xi_i, \eta_j), \xi_i = i \cdot h_1, i = 0, 1, \dots, 2 \cdot n; \eta_j = j \cdot h_2, j = 0, 1, \dots, 2 \cdot n),$$

де $h_1 = \Delta \xi, h_2 = \Delta \eta$ – відповідно кроки сітки по координатах ξ, η (рис. 3), M – модуль прямокутника, значення якого знаходиться у вище згаданому алгоритмі.

Тоді числовий розв'язок задачі (9)-(11) $\varphi_{i,j}$, в кожен фіксований момент часу t_k $i = 1, 2, \dots, (2n-1), j = 1, 2, \dots, (2n-1)$, у внутрішніх вузлах сітки визначається із розв'язку наступної різницевої задачі:

$$(\Delta \varphi)_{i,j} = 0, \quad (17)$$

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{i,0}^{(s)}, \varphi_{i,2n} = \varphi_{i,2n}^{(s)}, \varphi_{0,j} = \varphi_{0,j}^{(s)}, \varphi_{2n,j} = \varphi_{2n,j}^{(s)}, \quad (18)$$

де $s=0,1,2,\dots$ – номер ітерації; Δ – різницевий оператор Лапласа на прямокутній сітці, визначений на дев'ятиточковому шаблоні типу “ящик” [4].

Числовий розв'язок різницевої схеми (17), (18) знаходиться методом послідовної верхньої релаксації [4,6]

$$\varphi^{(k+1)} = \omega \hat{\varphi}^{(k+1)} + (1 - \omega) \varphi^{(k)},$$

де $\varphi^{(k+1)}, \varphi^{(k)}$ - відповідно вектори $(k+1)$ -го та k -го наближеного розв'язку; ω - релаксаційний параметр, оптимальне значення якого дорівнює

$$\omega = \omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}};$$

$$\hat{\varphi}^{(k+1)} = \frac{1}{20} \left(\frac{2}{h_1^2 + h_2^2} \left[(5h_2^2 - h_1^2)(\varphi_{i-1,j}^{(k)} + \varphi_{i-1,j}^{(k+1)}) + (5h_1^2 - h_2^2)(\varphi_{i,j+1}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k+1)}) \right] + \right. \\ \left. (\varphi_{i+1,j+1}^{(k)} + \varphi_{i-1,j+1}^{(k)} + \varphi_{i-1,j-1}^{(k+1)} + \varphi_{i+1,j-1}^{(k+1)}) \right).$$

ρ - спектральний радіус, значення якого обчислюється за формулою [4]

$$\rho = 1 - \frac{12}{5} \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \cdot \left(h_2^2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} + h_1^2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right) + \frac{4}{5} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4n} \sin^2 \frac{\pi}{4n}.$$

В формулах (6), (14)-(16) $x'(\eta), y'(\eta), x''(\eta), y''(\eta)$ замінюємо наступними різницевими аналогами:

$u'_0 = (-u_{2n,2} + 4u_{2n,1} - 3u_{2n,0})/2/h_2$, $u'_{2n} = (u_{2n,2n-2} - 4u_{2n,2n-1} + 3u_{2n,2n})/2/h_2$,
якщо $0 < j < 2n$, то

$$u'_j = (u_{2n,j+1} - u_{2n,j-1})/2/h_2, \quad u''_0 = (2u_{2n,0} - 5u_{2n,1} + 4u_{2n,2} - u_{2n,3})/h_2^2, \\ u''_{2n} = (2u_{2n,2n} - 5u_{2n,2n-1} + 4u_{2n,2n-2} - u_{2n,2n-3})/h_2^2, \quad u''_1 = (u_{2n,0} - 2u_{2n,1} + u_{2n,2})/h_2^2, \\ u''_{2n-1} = (u_{2n,2n} - 2u_{2n,2n-1} + u_{2n,2n-2})/h_2^2,$$

якщо $1 < j < 2n-1$, то

$$u''_j = (u_{2n,j-2} - u_{2n,j-1} - u_{2n,j+1} + u_{2n,j+2})/3/h_2^2,$$

де під u розуміють x або y .

6. Програмна реалізація задачі. Для даної задачі розроблена програма в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 6.0. В програмі велику увагу приділено створенню дружнього інтерфейсу для організації діалогу з користувачем. Зокрема, в ній передбачено задання параметрів моделі та крайових умов в діалоговому режимі. Сервісне оформлення програми складається з головного та контекстних меню, що передбачають візуалізацію поширення фронту в'язучої рідини. Виведення результатів числових розрахунків здійснюється на екран монітора, принтер та у файл даних.

7. Результати числових експериментів. На основі програмної реалізації задачі, описаної вище, проведено числовий розрахунок еволюції

в часі фронту нагнітання. Нижче на рис. 4 наведено візуальний результат такого розрахунку для наступних вхідних даних: $k = 7,0 \cdot 10^{-5}$ м/с, $m=0,2$, $n=5$, рок по часу брали рівним $\tau=6$ с. Положення рухомої межі представлене на рисунку через кожні 12 хвилин. Вдovж осей відкладена відстань від початку координат в метрах.

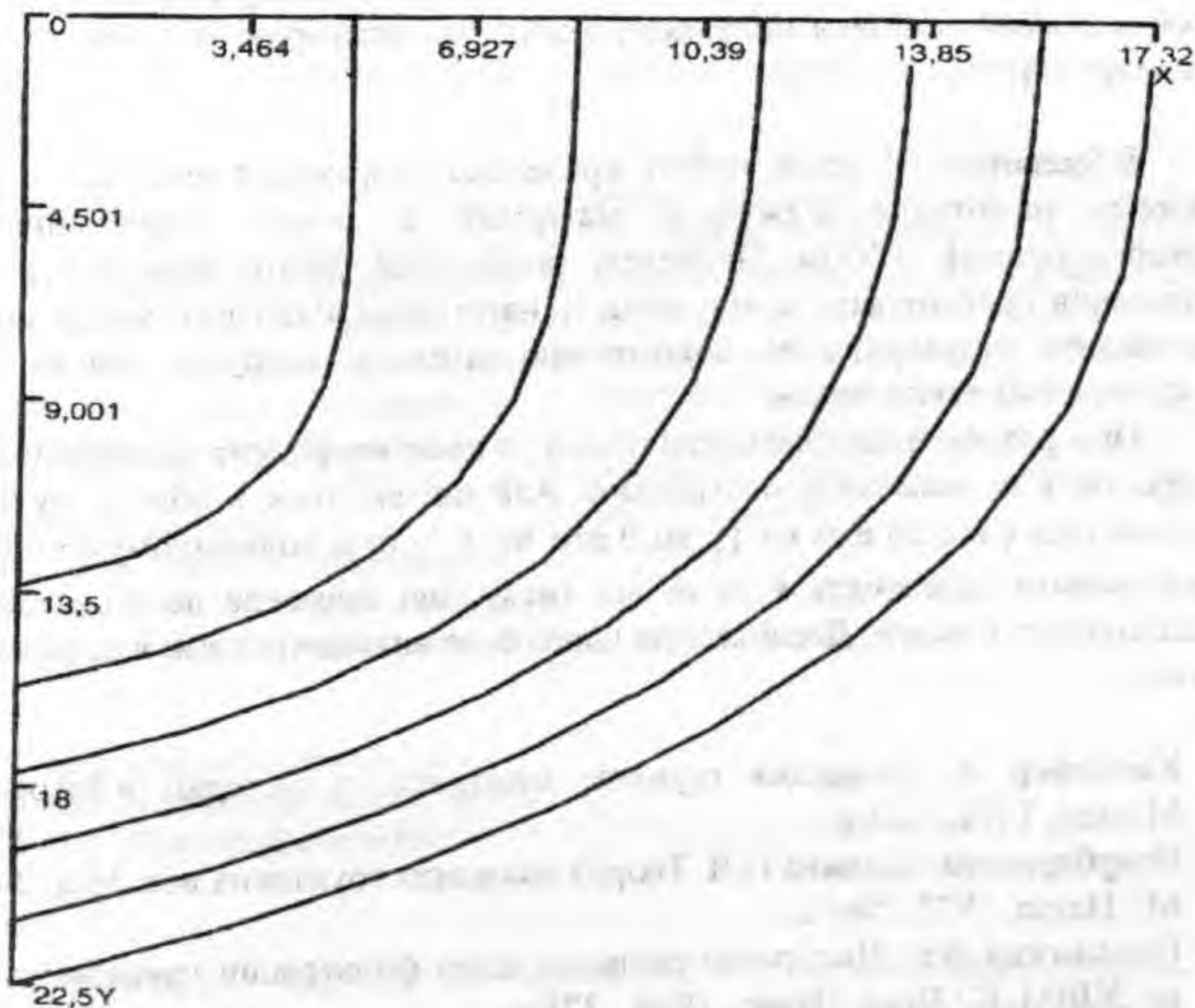


Рис.4. Еволюція вільної поверхні (фронту нагнітання) в'язучої рідини.

При заданні таких параметрів фільтрація відбувається на протязі приблизно однієї години (точніше 72 хвилини), що відповідає часу застигання рідини [1]. Ми вважали, що ін'єктор має глибину $b=10$ м, ширину $a=0,2$ м і закінчується півколом з радіусом $0,1$ м. Початкова форма рухомої межі області $G(t)$ невідома але ми вважаємо, що вона не буде впливати на її кінцеву форму. Для отримання початкової форми вільної межі, кожну точку границі ін'єктора зміщуємо в горизонтальному напрямку, для точок на глибині меншій 10 м і в радіальному напрямку для точок на глибині від 10 до $10,1$ м на відстань $\sqrt{2(p_0 + \rho_0 g h_i) / \rho_0 \tau_0}$, де $p_0 = 20$ атмосфер - тиск в ін'єкторі, h_i - глибина, на якій знаходиться точка,

$\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ - густина фільтруючої рідини, g – прискорення вільного падіння, τ_0 - ефективний час рівний 0,1 с.

При числових експериментах було відмічено, що в алгоритмі побудови конформних сіток краще користуватись шаблоном „ящик”, а не шаблоном „хрест”, це пов’язано з тим, що чотири відмічені точки входять в шаблон „ящик” звичайним чином [4]. Також в ньому рівняння вільної рухомої межі заміняли сплайном, який має неперервні похідні другого порядку [7].

8.Висновок. В даній роботі проведено розрахунок еволюції в часі фронту нагнітання в’язучого матеріалу в основі гідротехнічного (енергетичного) об’єкта. Проведені розрахунки дають можливість для інженерів прогнозувати в часі область нагнітання в’язучого матеріалу та проводити розрахунки по покращенню стійкості споруди, основа якої укріплюється таким чином.

При розрахунках параметри задачі, а саме коефіцієнт фільтрації k та пористість m вважались постійними. Але так як, тиск в області суттєво змінюється (від 20 атм на Γ_3 до 0 атм на Γ_4), то в подальшому потрібно враховувати залежність k та m від тиску, що призведе до виникнення нелінійності в задачі. Дослідження цього буде викладено нами в подальшій роботі.

1. Камбефор А. Инъекция грунтов, принципы и методы: «Энергия», Москва, 1971.- 323 с.
2. Полубаринова - Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1977.- 664 с.
3. Шаманский В.Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. К.: Наук. Думка, 1969.- 375 с.
4. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Чисельне розв’язування одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь. – Київ, 1994.- 23 с.-(Препр./ НАН України, Ін-т математики; 94.36).
5. Шабунин М.И., Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988. – 816 с.
6. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. –М. : Изд- во. иностр. лит., 1963. – 487 с.
7. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. – Физматлит, 2002. – 294 с.

Надійшла до редакції 15.10.04

УДК 519.8

Федір Г. Гаращенко¹, Олександр
М. Башняков², Володимир Г.
Клименко³

**Про інформаційно-аналітичну
систему для аналізу та
оптимізації транспортних
перевезень**

Розглядаються інформаційно-аналітичні системи, орієнтовані на оптимізацію транспортних перевезень. Досліджуються загальні вимоги до таких систем, аналізується сучасний інструментарій для їх створення. Представляється діюча авторська система, що задовольняє вищезазначеним вимогам.

Ключові слова: транспортна задача, оптимізація транспортних перевезень, інформаційно-аналітична система.

¹ E-mail: garash@unicyb.kiev.ua

² E-mail: bash@unicyb.univ.kiev.ua

³ E-mail: Klymenko@wjagro.com.ua

Fedir G. Garashchenko¹, Oleksandr
M. Bashnyakov², Volodymyr G.
Klymenko³

**About the information-analytical
system for the analysis and
optimization of transportations**

The information-analytical systems oriented to optimization of transportations are considered. The common requirements to such systems are explored, a modern tool for their creation is analyzed. The developed system, that satisfies the aforementioned requirements is presented.

Key Words: transport problem, transport optimization, information-analytical system.

Організація виробничих процесів в Україні безпосередньо пов'язана з проблемою транспортних перевезень. Аналіз різних планів транспортних перевезень є вельми трудомісткою задачею, для розв'язування якої необхідно задіяти цілі колективи фахівців відповідної кваліфікації. Застосування сучасних ЕОМ дозволяє, з одного боку, істотно скоротити часові витрати одержання результату, а з іншого – звести до мінімуму похибку обчислень. Однак простий аналіз планів транспортних перевезень не гарантує оптимальності отриманого результату. Тому розробка алгоритмів і відповідного програмного забезпечення, що дозволяє не тільки аналізувати, але також і оптимізувати транспортні перевезення, є актуальною.

Аналіз вимог до інформаційно-аналітичних систем, орієнтованих на оптимізацію транспортних перевезень

Обчислювальна техніка широко використовується при організації транспортних перевезень. Однак, основна функція сучасних систем полягає у зборі та накопиченні інформації та, у кращому випадку, проведенні статистичного аналізу. Для збору та накопичення інформації використовують, як правило, існуючі системи для організації баз даних, такі як Oracle, MySQL, Microsoft Access тощо. Аналіз отриманих даних проводиться як статистичними методами, так і шляхом візуалізації. Корисним додатковим елементом, який, як правило, теж надається користувачу, є підсистема підготовки документації за отриманими даними. Це можуть бути як робочі розрахунки, так і офіційні документи.

Для розрахунку оптимальності транспортних перевезень використовують відповідні математичні алгоритми. Однак реалізація стандартних алгоритмів, які не враховують специфіки задачі, можуть вимагати занадто великих обчислювальних ресурсів, а головне, – занадто великий час проведення розрахунків. Так, наприклад, для обчислення оптимального плану перевезень зернових з елеваторів у порти, (яких в Україні приблизно 600 та 14 відповідно) з використанням стандартних алгоритмів лінійного програмування необхідно затратити декілька годин на персональному ЕОМ з процесором Pentium-IV. Крім того, часто реальні задачі мають специфіку, яка унеможлиблює застосування стандартних алгоритмів.

Таким чином, сучасна інформаційно-аналітична система, орієнтована на оптимізацію транспортних перевезень, повинна складатися з наступних блоків:

- А). Блок збору та збереження інформації;
- Б). Блок проведення статистичного аналізу;
- В). Блок підготовки документації;
- Г). Блок оптимізації.

Інформаційно-аналітична система для аналізу та оптимізації транспортних перевезень

Згідно наведених вище вимог був розроблений програмний комплекс «Інформаційно-аналітична система для аналізу та оптимізації транспортних перевезень» (рис. 1). Даний комплекс призначений не тільки для проведення аналізу вартості й оптимізації транспортних перевезень, а також для розв'язування цілого ряду задач прогнозування. У системі використані як класичні підходи до розв'язування транспортних задач, так і авторські розробки.



рис.1

Система складається з 6 блоків, причому деякі з них, у свою чергу, також мають блокову структуру (рис. 2). Верхній рівень системи представлений блоком запуску, що відповідає за ініціалізацію і перевірку цілісності комплексу, а також за завантаження інтерфейсу користувача. Передбачені різні мови для організації інтерфейсу (англійська, українська та російська мови). Далі йде блок, що дозволяє вибрати необхідний тип розрахунків. Наступний блок призначений для введення параметрів, необхідних для проведення розрахунку. Блок алгоритмів являє собою набір класичних і авторських методів розв'язування різних транспортних задач. Блок виконаний таким чином, щоб користувач міг при необхідності підключати нові методи розв'язування без переустановки системи. Отримані результати обчислень можуть бути збережені в спеціалізованій базі даних розрахунків, для чого в системі присутній відповідний блок. І, нарешті, блок генерування результатів дозволяє, з одного боку, переглядати результати обчислень як на екрані монітора, так і роздруковувати на принтері, а з іншого, складати готові нормативні документи по заданих шаблонах.

Основні можливості системи

Система дозволяє:

1. Розраховувати оптимальні плани перевезень товарів від виробника до споживача, як при відсутності, так і при наявності обмежень;
2. Розраховувати оптимальні пункти подачі пароплавів для завантаження;
3. Працювати як з реальними даними, так і з модельними (прогнозованими);
4. Використовувати спеціалізовані калькулятори для моделювання рівномірного розподілу прогнозованого товару;
5. Генерувати звіти;

6. Організовувати базу даних проведених розрахунків;
7. Підтримувати різні мови інтерфейсу користувача.

Структура системи

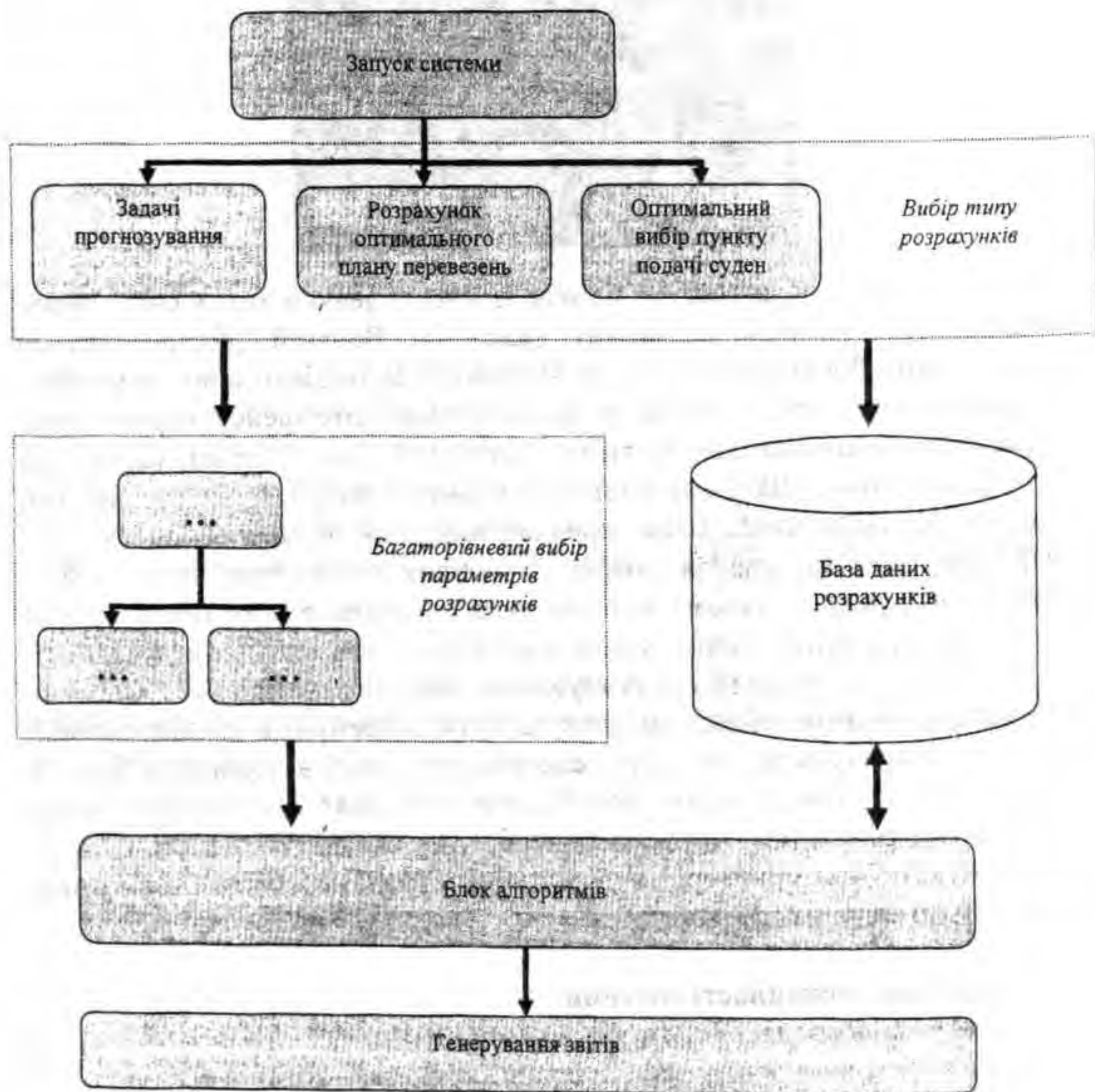


рис.2

Алгоритмічне наповнення

В системі використані відомі алгоритми та авторські розробки [1] спеціалістів кафедри моделювання складних систем Київського Національного університету імені Тараса Шевченка. Представлено 2 алгоритми розрахунку перевезень закупленого товару (з урахуванням та без урахування обмежень у пунктах прийому), 2 алгоритми по

прогнозуванню (за відсотковими та явно заданими ставками) та 2 алгоритми розрахунку оптимальних пунктів подачі суден для завантаження. Також надається можливість моделювання рівномірного розподілу прогнозованого товару з допомогою спеціалізованих калькуляторів.

Система була апробована на реальних задачах перевезення збіжжя з елеваторів (більше 600) у порти (до 12) України, що дозволило зекономити до 50% транспортних витрат.

Подальший розвиток системи передбачає підключення нових авторських алгоритмів, зокрема для задач оптимізації транспортних перевезень з обмеженнями на пропускну спроможність, що актуально при виникненні перешкод з транспортуванням товару, а також алгоритмів пошуку наближених розв'язків в реальному часі, що особливо важливо при необхідності отримання оперативних оцінок тощо. Важливим напрямком подальшої роботи над системою є адаптація під інші предметні області, такі як оптимізація фінансових потоків, аналіз міграції робочої сили в межах виробничої галузі тощо.

Література

1. Гаращенко Ф.Г., Клименко В.Г. Об одном алгоритме оптимального выбора пунктов доставки однородного товара с минимальными транспортными перевозками. //Кибернетика и вычислительная техника. –2003, –вып.140, –С.63-68.

Надійшла до редакції 10.02.2005

УДК 517.929*

Галина О. Доленко, Денис Я.
Хусаїнов

**Деякі зауваження про обернену
задачу лінійно-квадратичної
оптимізації**

*Розглянута обернена задача
лінійно-квадратичної оптимізації.
Запропонований алгоритм розв'язку цієї
задачі часткового випадку*

*Ключові слова: оптимізація,
лінійна диференціальна система,
квадратичний критерій, рівняння
Ріккати.*

Galina A. Dolenko, Denys Ya.
Khusainov

**Some observations for inverse
problem of linear-quadratic
optimization**

*The inverse problem of linear-
quadratic optimization was considered. The
algorithm of solving this problem was
proposed.*

*Key Words: optimization, linear
differential system, quadratic criterium,
Rikcati equation.*

*E-mail: dkh@unicyb.kiev.ua

Як правило, лінійно-квадратична задача оптимізації складається в
знаходженні керування у вигляді оберненого зв'язку $u = Kx, x \in R^n$, при
якому лінійна система керування

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m \quad (1)$$

асимптотично стійка, тобто $\operatorname{Re} \lambda_i(A + BK) < 0$, $i = \overline{1, n}$ і квадратичний
критерій якості

$$I[u(t)] = \int_0^\infty \{x^T(s)Cx(s) + u^T(s)Du(s)\}ds \quad (2)$$

на розв'язках системи (1) досягає мінімального значення [1,2]. Доведено,
що при додатно визначених матрицях C , D розв'язок (тобто матриця K)
має вигляд

$$K = -D^{-1}B^TH, \quad (3)$$

де H є розв'язком матричного рівняння Ріккати

$$A^TH + HA - HB D^{-1}B^TH + C = 0. \quad (4)$$

Останнім часом з'явився новий напрямок розвитку цієї задачі, який був
названий "оберненою задачею оптимізації" [3,4]. Суть його складається в

* Робота виконана при підтримці Державного комітету з науки і техніки України, проект 01.07/00081

наступному. Вважається, що матриця оберненого зв'язку, тобто фактично розв'язок рівняння Ріккати відомий і має вигляд H^* . Треба таким чином "підправити" параметри системи (1), (2), щоб "реконструйована система" дійсно мала оптимальне керування з оберненим зв'язком, що залежить від матриці H^* .

Одним з варіантів оберненої задачі оптимізації (частинна обернена задача) є задача, при якій "коректується" матриця B , тобто керована система має вигляд

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + (B + \Delta B)u(t), \quad t \geq 0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m \quad (5)$$

Треба знайти матрицю ΔB , при якій функціонал (2) досягає мінімальне значення при керуванні

$$u^*[x(t)] = K^*x(t), \quad (6)$$

де K^* - наперед задана матриця.

Л е м а. Розв'язок часткової оберненої лінійно-квадратичної задачі оптимізації по матриці B має вигляд

$$\Delta B = -[DK^*(H^*)^{-1}]^T - B.$$

Доведення. Поскільки функціонал (2) досягає мінімальне значення при

$$u^*[x(t)] = -D^{-1}(B + \Delta B)^T H^* x(t),$$

де H^* - розв'язок матричного рівняння Ріккати

$$A^T H^* + H^* A - H^* (B + \Delta B) D^{-1} (B + \Delta B)^T H^* + C = 0,$$

то

$$K^* = -D^{-1}(B + \Delta B)^T H^*.$$

Звідси

$$-[DK^*(H^*)^{-1}]^T - B = \Delta B,$$

що и треба було показати.

Розглянемо більш складний варіант оберненої задачі. Будемо шукати матрицю ΔB таким чином, щоб мінімальне значення функціоналу (2) досягалось при лінійному керуванні, в яке входить неперед задана матриця H^* , тобто будемо вважати, що шукане оптимальне значення функціонала (2) відоме і дорівнює

$$I[u^*(t)] = x_0^T H^* x_0, \quad (7)$$

тобто фактично відома додатно визначена матриця H^* . Треба знайти матрицю ΔB , при якій для "збуреної" системи (5) екстремальне значення функціонала (2) має вигляд (7). При частинній оберненій задачі будемо вважати, що на матрицю B обмежень не накладається.

Т е о р е м а. Частинна обернена задача лінійно-квадратичної оптимізації по матриці B розв'язується тоді і тільки тоді, коли матриця $A^T H^* + H^* A + C$ додатно напіввизначена і $\text{rank} D \geq \text{rank} M$. При цьому розв'язок має вигляд

$$\Delta B_i = V \text{diag}(\sqrt{M_0}) R \text{diag}(\pm \sqrt{d_1}, \pm \sqrt{d_2}, \dots, \pm \sqrt{d_m}) U^T - B, \quad i = \overline{1, 2^m}. \quad (8)$$

Тут U - ортонормована матриця, що приводить D до діагональної, V - ортонормована матриця, що приводить до діагональної матрицю M ,

$$(\text{diag} \sqrt{M_0})^T = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{m_m} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = (H^*)^{-1} (A^T H^* + H^* A + C) (H^*),$$

$d_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ - власні числа матриці D , $m_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ - власні числа матриці M , R - довільна ортонормована матриця.

Доведення. Лінійно-квадратична задача оптимізації для системи (5) з критерієм якості (2) розв'язується керуванням

$$u^*[x(t)] = -D^{-1}(B + \Delta B)^T H^* x(t).$$

І матриця H^* є розв'язком матричного рівняння Ріккати

$$A^T H^* + H^* A - H^* (B + \Delta B) D^{-1} (B + \Delta B)^T H^* + C = 0.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$H^* (B + \Delta B) D^{-1} (B + \Delta B)^T H^* = A^T H^* + H^* A + C.$$

Поскільки H^* - симетрична додатно визначена матриця, то вона невироджена і рівняння можна перетворити до вигляду

$$(B + \Delta B) D^{-1} (B + \Delta B)^T = (H^*)^{-1} (A^T H^* + H^* A + C) (H^*)^{-1}. \quad (9)$$

Таким чином задача знаходження матриці ΔB зводиться до розв'язку квадратного матричного рівняння (9). Позначимо

$$M = (H^*)^{-1} (A^T H^* + H^* A + C) (H^*)^{-1},$$

і перепишемо рівняння (9) таким чином

$$(B + \Delta B)D^{-1}(B + \Delta B)^T = M. \quad (10)$$

Поскільки матриця D - симетрична, додатно визначена, то і D^{-1} також буде симетричною, додатно визначеною. Тому, для того, щоб рівняння (10) мало розв'язок в полі дійсних чисел необхідно і достатньо, щоб матриця M була додатно напіввизначеною, причому виконувалась умова

$$\text{rank} D \geq \text{rank} M.$$

Поскільки D^{-1} - симетрична, додатно визначена, то існує ортогональна матриця U , що приводить її до головних осей, тобто

$$D^{-1} = U \text{diag} \left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_m} \right) U^T, \quad U^T U = I,$$

де $d_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ - власні числа матриці D , I - одинична матриця.

Перепишемо одержану залежність у вигляді

$$D^{-1} = U \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{d_m}} \right) \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{d_m}} \right) U^T.$$

Тоді рівняння (10) буде мати вигляд

$$\left[(B + \Delta B) U \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{d_m}} \right) \right] \times \\ \left[(B + \Delta B) U \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{d_m}} \right) \right]^T = M.$$

Розглянемо праву частину рівняння (10). Поскільки матриця M симетрична, додатно напіввизначена і $\text{rank} M = m$, то її можна записати у вигляді

$$M = V \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_m, 0, \dots, 0) V^T,$$

де $m_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, $m_s = 0$, $s = \overline{m+1, n}$ - власні числа матриці M , V - ортогональна матриця, що приводить M до діагональної. Поскільки останні $n - m$ - власних чисел в діагональній матриці нульові, то

$$\text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_m, 0, \dots, 0) = \text{diag} \sqrt{M_0} R R^T (\text{diag} \sqrt{M_0})^T,$$

де

$$(\text{diag} \sqrt{M_0})^T = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{m_m} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

R - довільна ортонормована матриця розміру $m \times m$, т.е. $RR^T = I$. Таким чином рівняння (10) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & \left[(B + \Delta B) U \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{d_m}} \right) \right] \times \\ & \left[(B + \Delta B) U \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{d_m}} \right) \right]^T = \\ & = \left[V \text{diag}(\sqrt{M_0}) R \right] \times \left[V \text{diag}(\sqrt{M_0}) R \right]^T. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$(B + \Delta B) U \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{d_m}} \right) = V \text{diag}(\sqrt{M_0}) R.$$

Далі

$$B + \Delta B = V \text{diag}(\sqrt{M_0}) R \text{diag}(\pm \sqrt{d_1}, \pm \sqrt{d_2}, \dots, \pm \sqrt{d_m}) U^T - B$$

Всього розв'язками будуть ΔB_i , $i = \overline{1, 2^m}$,

$$\Delta B_i = V \text{diag}(\sqrt{M_0}) R \text{diag}(\pm \sqrt{d_1}, \pm \sqrt{d_2}, \dots, \pm \sqrt{d_m}) U^T - B.$$

Зауваження. В побудованій матриці збурень ΔB присутні $i = \overline{1, 2^m}$ дискретних «варіацій» за рахунок взяття кореня та неперервні «варіації» за рахунок вибору матриці R .

ЛІТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., Мир, 1971 – 400 с.
2. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – Киев, Вища школа, 1975. – 328 с.
3. Доленко Г.А., Хусаинов Д.Я. Частичная системная оптимизация в динамических задачах. – International Conference “Dynamycal System Modelling and Stability Investigation”, Thesis of Conference Reports, Kyiv, May 27-30, 2003. – pp.50.
4. Ларин В.Б. Об обращении проблемы аналитического конструирования регуляторов // Проблемы управления и информатики, в.1, 2004. – С.17-25.

До редакції надійшла 08.11.2004.

УДК 518.61

Петро М. Зінко¹

**Побудова явних різницьових схем
для неоднорідного рівняння
теплопровідності зі змінними
коефіцієнтами**

Пропонуються нові числові алгоритми розв'язування крайових задач параболічного типу зі змінними коефіцієнтами, які базуються на теорії розв'язуючих операторів.

Ключові слова: крайова задача, числові алгоритми.

Petro M. Zinko¹

**Construction of the obvious
difference schemes for the heat
conduction equation with varied
factors**

On an example of the one-dimensional boundary value problems of parabolic type with varied factors we construct the numerical algorithms of the approximate solution based on the theory of solving operators.

Key Words: boundary value problem, numerical algorithms.

¹ E-mail: Zinko@unicyb.kiev.ua

В роботах [1-3] на основі теорії розв'язуючих операторів запропоновані нові алгоритми розв'язування крайових задач параболічного типу з постійними коефіцієнтами. В даній статті будуються нові числові алгоритми розв'язування крайових задач параболічного типу зі змінними коефіцієнтами.

Для спрощення викладок розглядається одновимірна перша крайова задача параболічного типу [4]: знайти в прямокутнику $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ розв'язок $u(x, t)$ рівняння

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + \varphi(x, t), \quad (1)$$

який задовільняє початковій умові

$$u(x, 0) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

і крайовим умовам

$$u(0, t) = \eta_1(t), \quad u(1, t) = \eta_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Коефіцієнт теплопровідності $k=k(x)$ обмежений знизу і зверху, відповідно константами c_1 і c_2

$$0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4)$$

Припускається, що задача (1) - (4) має єдиний розв'язок, а також існують необхідні нам похідні функцій $u(x, t)$ і $k(x)$.

Введемо рівномірну сітку ω_Δ з кроком $\Delta > 0$ на відрізку $0 \leq x \leq 1$:

$$\omega_\Delta = \{x_i = i \cdot \Delta, i = 0, 1, \dots, N, \Delta = 1/N\}.$$

Перший доданок правої частини в (1) представимо в такому вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = k(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dk(x)}{dx} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (5)$$

Згідно формули Тейлора для функції $k(x)$ можна записати рівності:

$$\begin{aligned} k(x + \Delta) &= k(x) + \frac{dk(x)}{dx} \cdot \Delta + \frac{d^2 k(x)}{dx^2} \cdot \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{d^3 k(x)}{dx^3} \cdot \frac{\Delta^3}{3!} + O(\Delta^4), \\ k(x - \Delta) &= k(x) - \frac{dk(x)}{dx} \cdot \Delta + \frac{d^2 k(x)}{dx^2} \cdot \frac{\Delta^2}{2!} - \frac{d^3 k(x)}{dx^3} \cdot \frac{\Delta^3}{3!} + O(\Delta^4). \end{aligned}$$

З двох останніх співвідношень знаходимо

$$\frac{dk(x)}{dx} = \frac{1}{2\Delta} (k(x + \Delta) - k(x - \Delta)) + O(\Delta^2). \quad (6)$$

Для апроксимації другої похідної $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ скористаємось відомою формулою [4]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (u(x + \Delta, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta, t)) / \Delta^2 + O(\Delta^2). \quad (7)$$

Підставимо праві частини формул (6), (7) в (5) і після нескладних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(k(x) - \frac{k(x + \Delta) - k(x - \Delta)}{4} \right) u(x - \Delta, t) - 2k(x)u(x, t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(k(x) + \frac{k(x + \Delta) - k(x - \Delta)}{4} \right) u(x + \Delta, t) \right] + O(\Delta^2). \quad (8) \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення $u(x_i, t) = u_i(t)$, $k(x_i) = k_i$, $\bar{\psi}_i(t) = \varphi(x_i, t)$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Тоді від рівняння з частинними похідними (1) з врахуванням сітки ω_Δ і апроксимації (8) прийдемо до такої системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $u_i(t)$, $i = \overline{1, N-1}$

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} \right) u_{i-1}(t) - 2k_i u_i(t) + \left(k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} \right) u_{i+1}(t) \right] + \bar{\psi}_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (9)$$

Із формули (2) випливає наступна початкова умова для системи (9)

$$u_i(0) = \mu(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (10)$$

Якщо в системі (9) покласти

$$\begin{aligned} V_i &= (k_{i+1} - k_{i-1})/4, \\ \psi_i(t) &= \bar{\psi}_i(t), \quad i = \overline{2, N-2}, \\ \psi_1(t) &= \bar{\psi}_1(t) + (k_1 - V_1)u_0(t), \\ \psi_{N-1}(t) &= \bar{\psi}_{N-1}(t) + (k_{N-1} + V_{N-1})u_N(t), \end{aligned}$$

то одержимо

$$\begin{cases} \frac{du_1(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [-2k_1 u_1(t) + (k_1 + V_1)u_2(t)] + \psi_1(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_2 - V_2)u_1(t) - 2k_2 u_2(t) + (k_2 + V_2)u_3(t)] + \psi_2(t), \\ \dots \\ \frac{du_i(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_i - V_i)u_{i-1}(t) - 2k_i u_i(t) + (k_i + V_i)u_{i+1}(t)] + \psi_i(t), \\ \dots \\ \frac{du_{N-2}(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_{N-2} - V_{N-2})u_{N-3}(t) - 2k_{N-2} u_{N-2}(t) + (k_{N-2} + V_{N-2})u_{N-1}(t)] + \psi_{N-2}(t), \\ \frac{du_{N-1}(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} [(k_{N-1} - V_{N-1})u_{N-2}(t) - 2k_{N-1} u_{N-1}(t)] + \psi_{N-1}(t), \end{cases} \quad (11)$$

Ввівши вектор функції $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t))^T$ і $f(u(t), t) = (f_1(u(t), t), f_2(u(t), t), \dots, f_{N-1}(u(t), t))^T$ (тут tr – знак транспонування, а $f(u(t), t)$ дорівнює правій частині рівності (11)), задачу Коші (11), (10) можемо переписати в такому вигляді

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u(t), t), \quad u(0) = (\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_{N-1}))^T. \quad (12)$$

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (12) використаємо формулу типу прогноз-корекція [2]

$$u(t+h) = p(t+h) + \int_t^{t+h} \left[E + (t+h-\tau) \frac{\partial f(p(t+h), t+h)}{\partial u} \right] \times \left[f(p(\tau), \tau) - \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right] d\tau, \quad (13)$$

де $p(\tau)$ – прогнозна функція, $h>0$ – крок інтегрування, E – одинична матриця розмірності $(N-1 \times N-1)$, $\tau \in [t; t+h]$. Прогнозну функцію $p(\tau)$ виберемо у вигляді перших двох доданків формули Тейлора

$$p(\tau) = u(t) + (\tau - t)f(u(t), t) \quad \tau \in [t; t+h]. \quad (14)$$

Із формули (14) легко отримати

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = f(u(t), t), \quad p(t+h) = u(t) + hf(u(t), t). \quad (15)$$

Матриця Якобі для системи рівнянь (11) наступна

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} -2k_1 & k_1 + V_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ k_2 - V_2 & -2k_2 & k_2 + V_2 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & k_i - V_i & -2k_i & k_i + V_i & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & k_{N-2} - V_{N-2} & -2k_{N-2} & k_{N-2} + V_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & k_{N-1} - V_{N-1} & -2k_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Після підстановки формул (14), (15) у (13) одержимо

$$u(t+h) = u(t) + \int_t^{t+h} f(p(\tau), \tau) d\tau - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \cdot f(u(t), t) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \int_t^{t+h} (-\tau + t + h) f(p(\tau), \tau) d\tau. \quad (16)$$

Виконавши громіздкі обчислення в (16), приходимо до наступної основної внутрішньої формули знаходження наближеного розв'язку задачі (1)-(3)

$$u_i(t+h) = u_{i-3} \alpha_{i-2} \alpha_{i-1} \alpha_i / 6 + u_{i-2} \alpha_{i-1} \alpha_i [0.5 - (\bar{k}_{i-2} + \bar{k}_{i-1} + \bar{k}_i) / 3] + u_{i-1} \alpha_i [1 - \bar{k}_{i-1} - \bar{k}_i + (\alpha_{i-1} \beta_{i-2} + 4\bar{k}_{i-1}^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & +\alpha_i\beta_{i-1}+4\bar{k}_i(\bar{k}_{i-1}+\bar{k}_i)+\alpha_{i+1}\beta_i)/6]+u_i[1-2\bar{k}_i+2\bar{k}_i^2-4\bar{k}_i^3/3+\alpha_i\beta_{i-1}(0.5-(\bar{k}_{i-1}+\bar{k}_i)/3)+ \\
 & +\alpha_{i+1}\beta_i(0.5-(\bar{k}_i+\bar{k}_{i+1})/3)-\bar{k}_i(\alpha_i\beta_{i-1}+\alpha_{i+1}\beta_i)/3+u_{i+1}\beta_i[1-\bar{k}_i-\bar{k}_{i+1}+ \\
 & +(\alpha_i\beta_{i-1}+4\bar{k}_{i+1}^2+\alpha_{i+1}\beta_i+4\bar{k}_i(\bar{k}_i+\bar{k}_{i+1})+\alpha_{i+2}\beta_{i+1})/6]+u_{i+2}\beta_i\beta_{i+1}[0.5-(\bar{k}_i+\bar{k}_{i+1}+\bar{k}_{i+2})/3]+ \\
 & u_{i+3}\beta_i\beta_{i+1}\beta_{i+2}/6+h[\psi_{i-2}\alpha_{i-1}\alpha_i-2\psi_{i-1}\alpha_i(\bar{k}_{i-1}+\bar{k}_i)+\psi_i(\alpha_i\beta_{i-1}+4\bar{k}_i^2+\alpha_{i+1}\beta_i)-2\psi_{i+1}\alpha_i(\bar{k}_i+\bar{k}_{i+1})+ \\
 & +\psi_{i+2}\beta_i\beta_{i+1}]/6+\int_i^{i+h}[\psi_i(\tau)+(t+h-\tau)(\alpha_i\psi_{i-1}(\tau)-2\bar{k}_i\psi_i(\tau)+\beta_i\psi_{i+1}(\tau))/h]d\tau, \quad i=\overline{3, N-3}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

де

$$\alpha_i = h(k_i - V_i)/\Delta^2; \quad \beta_i = h(k_i + V_i)/\Delta^2; \quad \bar{k}_i = hk_i/\Delta^2; \quad u_i = u_i(t); \quad \psi_i = \psi_i(t).$$

Якщо ж замість формули (13) для знаходження наближеного розв'язку задачі (12) використаємо наступну формулу

$$u(t+h) = p(t+h) + \int_i^{i+h} \left[f(p(\tau), \tau) - \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right] d\tau,$$

тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
 u_i(t+h) &= u_{i-2}\alpha_{i-1}\alpha_i/2 + u_{i-1}\alpha_i[1-\bar{k}_{i-1}-\bar{k}_i] + u_i[1-2\bar{k}_i+2\bar{k}_i^2+\alpha_i\beta_{i-1}/2+\alpha_{i+1}\beta_i/2] + \\
 & + u_{i+1}\beta_i[1-\bar{k}_i-\bar{k}_{i+1}] + u_{i+2}\beta_i\beta_{i+1}/2 + h[\alpha_i\psi_{i-1}-2\bar{k}_i\psi_i+\beta_i\psi_{i+1}]/2 + \int_i^{i+h}\psi_i(\tau)d\tau, \quad (18) \\
 & i=\overline{2, N-2}.
 \end{aligned}$$

Формули (17) і (18) перевірені на тестовому прикладі з $k(x) = x^2 + 1$, $\varphi(x, t) = -3x^2 - x(2t - 1)$ і відомим розв'язком $u(x, t) = t + x^2/2 + tx$.

Література

1. Бейко І.В., Зінько П.М., Рісний В.М. Застосування асимптотично розв'язуючих операторів для чисельного розв'язування крайових задач // Пр. міжн. конф. "Питання оптимізації обчислень". - Київ: ІК НАНУ, 1997. - С. 40-44.
2. Зінько П.М. Числові методи розв'язування крайових задач, які використовують розв'язуючі оператори і поліноми Лагранжа// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 1999. - вип.1. - С. 210-213.
3. Зінько П.М. Числові алгоритми побудови наближених розв'язків крайових задач за неявними схемами. Одновимірна задача// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2000. - вип. 3. - С. 233-238.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983. - 616 с.

Надійшла до редакції 23.12.2004

УДК 517.929

Абат Т. Кожаметов*

Оптимізаційний підхід до побудови функціоналів Ляпунова-Красовського

В статті запропонований новий метод побудови функціоналів Ляпунова-Красовського, що надає необхідні умови асимптотичної стійкості в заданому класі функціоналів квадратичного вигляду.

Ключові слова: система, квадратична форма, запізнення, функціонал Ляпунова-Красовського.

Abat T.Kozhametov*

Optimization approach to construction of Lyapunov- Krasovskiy functionals

In this article the new method to construction of Lyapunov-Krasovskiy functionals, which gives necessary conditions of asymptotic stability in competent class of quadratic kind functionals, is proposed.

Key Words: system, quadratic form, delay, Lyapunov-Krasovskiy functionals.

*E-mail: Khusainov@stab.univ.kiev.ua

При дослідженні стійкості систем лінійних функціонально-диференціальних рівнянь із запізнюючимся аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (1)$$

з сталим $\tau > 0$ одним з фундаментальних методів є метод функціоналів Ляпунова-Красовського [1]. Загальноприйнятим є використання функціоналів квадратичного вигляду [2]

$$V[x(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds. \quad (2)$$

Якщо існують додатно визначені матриці G , H , при яких матриця

$$S(G, H) = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB \\ -B^T H & G \end{bmatrix} \quad (3)$$

також додатно визначена, то система (1) асимптотично стійка [2]. Причому її розв'язки збігаються при $t \geq 0$ по експоненціальному закону [3]. На жаль, знаходження матриць G , H , що задовольняють визначеним умовам, є досить складною задачею. У роботі пропонується наступний підхід.

Симетрична матриця буде додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли буде додатним її мінімальне власне число [4]. Знаходження матриць G , H , при яких матриця $S(G, H)$ буде додатно визначеною, замінюється задачею знаходження матриць G_0 , H_0 , при яких мінімальне власне число матриці $S(G_0, H_0)$ буде максимальним. Якщо отримана матриця $S(G_0, H_0)$ буде додатно визначеною, то задача дослідження асимптотичної стійкості в

класі квадратичних функціоналів вигляду (2) розв'язується позитивно, Таким чином знайдені матриці G_0, H_0 фактично, забезпечують необхідні умови асимптотичної стійкості в класі квадратичних функціоналів.

Позначимо через $L = \{(G, H)\}$ - лінійний нормований простір, що складається з пар симетричних додатно напіввизначених матриць G, H з нормою

$$\|(G, H)\| = \sqrt{\sum_{s,k=1}^n g_{sk}^2 + \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2},$$

$$G = \{g_{sk}\}, H = \{h_{ij}\}, s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, n}.$$

Позначимо через $\lambda_{\min}(\bullet), \lambda_{\max}(\bullet)$ - мінімальне і максимальне власні числа відповідних симетричних матриць. Функція $\lambda_{\min}[S(G, H)]$ за змінними G, H є однорідною першого порядку. І задачу знаходження матриць (G_0, H_0) , при яких матриця $S(G_0, H_0)$ додатно визначена, можна замінити наступною оптимізаційною задачею

$$\varphi_0(G, H) \rightarrow \min_{(G, H) \in L} \quad (4)$$

$$\varphi_1(G) \leq 0, \quad \varphi_2(H) \leq 0, \quad \varphi_3(G, H) \leq 0. \quad (5)$$

Тут

$$\varphi_0(G, H) = -\lambda_{\min}[S(G, H)], \quad \varphi_1(G) = -\lambda_{\min}(G), \quad \varphi_2(H) = -\lambda_{\min}(H),$$

$$\varphi_3(G, H) = \lambda_{\max}^2(G) + \lambda_{\max}^2(H) - 1.$$

Позначимо через L_1 підмножину множини L , симетричних додатно напіввизначених матриць, що складається з пар, що задовольняють обмеженням (5).

Приведемо декілька допоміжних тверджень.

Лема 1. Задача оптимізації (4), (5) має розв'язок.

Доведення. Множина пар додатно напіввизначених матриць являє собою прямий добуток опуклих конусів і є опуклим конусом з вершиною в точці (Θ, Θ) .

Як випливає з вигляду функції $\varphi_3(G, H)$, обмеження $\varphi_3(G, H) \leq 0$ являє собою кулю одиничного радіуса. Таким чином, множина L_1 є перетином опуклого конуса з кулею одиничного радіуса і являє собою компакту множину. Функція $\varphi_0(G, H)$, як мінімальне власне число відповідної симетричної матриці, є кусково-диференційована функція. Звідси, за теоремою Вейєрштраса, вона досягає мінімального значення і задача оптимізації (4), (5) має розв'язок.

Лема 2. Функція $\varphi_0(G, H)$ на множині L_1 є опуклою.

Доведення. Твердження леми 2 випливає з лінійності матричного оператора $S(G, H)$ по змінній (G, H) і опуклості мінімального власного числа, як функції від матриці [5].

Сформульована задача оптимізації (4), (5) є задачею динамічного програмування з обмеженнями. Найбільш часто використовуваним методом розв'язку задач такого типу є градієнтний метод та його модифікації [6]. Однак у випадку великої розмірності матриць A , B обчислити власні числа матриці $S(G, H)$ важко. Використовуючи блоковий вигляд матриці $S(G, H)$ можна знизити розмірність задачі. Однак при цьому питання про опуклість отриманої цільової функції залишається відкритим. І замість побудови узагальненого градієнту для обчислення ітераційної процедури треба використовувати поняття похідної по напрямку.

Лема 3. Матриця $S(G, H)$ є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли будуть додатно визначеними матриця G і

$$Q(G, H) = -G - A^T H - HA - HBG^{-1}B^T H. \quad (6)$$

Доведення. Уведемо вектор $z^T(t, \tau) = (x^T(t), x^T(t-\tau))$. Умова додатної визначеності матриці $S(G, H)$ еквівалентна додатності мінімального власного числа

$$\lambda_{\min}[S(G, H)] = \min_{|z|=1} \{z^T(t, \tau)S(G, H)z(t, \tau)\} > 0.$$

Або виконанню умови

$$\min_{x(t-\tau)} \{z^T(t, \tau)S(G, H)z(t, \tau)\} > 0$$

при довільних $x(t) \in R^n$ [5]. У фігурних дужках записана квадратична форма

$$z^T(t, \tau)S(G, H)z(t, \tau) = x^T(t) \left[-A^T H - HA - G \right] x(t) - \\ - x^T(t)HBx(t-\tau) - x^T(t-\tau)B^T Hx(t) + x^T(t-\tau)Gx(t-\tau).$$

Необхідною і достатньою умовою її мінімуму по змінній $x(t-\tau)$ є рівність нулю частинної похідної по $x(t-\tau)$ і додатна визначеність матриці G , тобто

$$\frac{\partial}{\partial x(t-\tau)} \{z^T(t, \tau)S(G, H)z(t, \tau)\} = 0.$$

Обчислюючи похідну, одержимо

$$-B^T Hx(t) + Gx(t-\tau) = 0.$$

Оскільки матриця G додатно визначена, то вона неособлива і, отже

$$x(t-\tau) = G^{-1}B^T Hx(t).$$

Обчислимо значення квадратичної форми в отриманій точці $x(t-\tau)$

$$\min_{x(t-\tau)} \{z^T(t, \tau)S(G, H)z(t, \tau)\} = x^T(t) \left[-A^T H - HA - G - HBG^{-1}B^T H \right] x(t).$$

Звідси маємо, що матриця $S(G, H)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли будуть додатно визначеними G і

$$Q(G, H) = -G - A^T H - HA - HBG^{-1}B^T H$$

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Лема 4. Матриця $S(G, H)$ є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли будуть додатно визначеними матриці $-G - A^T H - HA$ і

$$\tilde{Q}(G, H) = G - HB(-G - A^T H - HA)^{-1} B^T H. \quad (7)$$

Використовуючи результати леми 3, сформулюємо оптимізаційну задачу (4), (5) в наступній формі

$$\psi_0(G, H) \rightarrow \min_{(G, H) \in L}, \quad (8)$$

$$\varphi_1(G) \leq 0, \quad \varphi_2(H) \leq 0, \quad \varphi_3(G, H) \leq 0,$$

де

$$\psi_0(G, H) = -\lambda_{\min} \left[-G - A^T H - HA - HB G^{-1} B^T H \right] \quad (9)$$

Приведемо ряд допоміжних результатів.

Лема 5. Задача оптимізації (8), (9) має розв'язок.

Доведення. Множина L_1 є компактною множиною. Функція $\psi_0(G, H)$ є неперервною при $\lambda_{\min}(G) > 0$ і на границі області може бути необмеженою. Але, поскільки розглядається задача мінімізації, то оптимізаційна задача (8), (9), еквівалентна задачі

$$\psi_0(G, H) \rightarrow \min, \quad \varphi_1(G) \leq \varepsilon, \quad \varphi_2(H) \leq 0, \quad \varphi_3(G, H) \leq 0, \quad (8.1)$$

де $\varepsilon > 0$ досить мала величина. Область (8.1) також компактна, але функція $\psi_0(G, H)$ в цій області вже неперервна і, таким чином, згідно теореми Вейерштраса, досягає мінімального значення.

Довести опуклість цільової функції $\psi_0(G, H)$ в загальному випадку не вдається. Тому для одержання умов розв'язку задачі оптимізації будемо використовувати поняття похідної по напрямку.

Визначення 1. Нехай для пар матриць $(G_0, H_0), (M, N) \in L_1$ і $0 \leq t \leq 1$, виконується $(G_0 + tM, H_0 + tN) \in L_1$. Якщо існує границя

$$\frac{d\psi_0(G_0, H_0)}{d(M, N)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \{ \psi_0(G_0 + tM, H_0 + tN) - \psi_0(G_0, H_0) \}, \quad (10)$$

то вираз $d\psi_0(G_0, H_0)/d(M, N)$ назвемо похідною функції $\psi_0(G, H)$ по напрямку (M, N) в точці (G_0, H_0) .

Лема 6. Похідна функції $\psi_0(G, H)$ по напрямку (M, N) в точці $(G_0, H_0) \in L_1$ має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0(G_0, H_0)}{d(M, N)} = & - (y_{\min}^0)^T \{ -M - A^T N - NA - NB G_0^{-1} B^T H_0 + \\ & + H_0 B G_0^{-1} M G_0^{-1} B^T H_0 - H_0 B G_0^{-1} B^T N \} y_{\min}^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут $y_{\min}^0$ – граничний одиничний власний вектор матриці $Q(G_0, H_0)$ по напрямку (M, N) , тобто

$$y_{\min}^0 = \lim_{t \rightarrow +0} y_{\min}(t), \quad y_{\min}(t) = y_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)] \quad (12)$$

Доведення. Розглянемо збурену матрицю $Q[(G_0 + tM, H_0 + tN)]$ та, відповідно, її мінімальне власне число $\lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)]$ і мінімальний нормований власний вектор $y_{\min}(t)$. В силу неперервності, при $t \rightarrow +0$ буде виконуватись $\lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)] \rightarrow \lambda_{\min} [Q(G_0, H_0)]$, $y_{\min}(t) \rightarrow y_{\min}^0$. За припущенням, для довільного малого $t > 0$ тотожно виконується

$$y_{\min}^T(t) y_{\min}(t) \equiv 1,$$

$$\lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)] \equiv y_{\min}^T(t) Q(G_0 + tM, H_0 + tN) y_{\min}(t).$$

Власне число і власні вектори симетричних матриць є кусково неперервно диференційованими функціями (крім випадку кратних коренів). І існує проміжок $t > 0$, в якому функції змінної t : $y_{\min}(t)$ і $\lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)]$ будуть мати похідні. Продиференціювавши приведені тотожності по t , одержимо

$$(y_{\min}(t))^T y_{\min}'(t) + y_{\min}^T(t) y_{\min}'(t) \equiv 0, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)] = (y_{\min}'(t))^T Q(G_0 + tM, H_0 + tN) y_{\min}(t) + \quad (14)$$

$$+ y_{\min}^T(t) \frac{d}{dt} Q(G_0 + tM, H_0 + tN) y_{\min}(t) + y_{\min}'(t) Q(G_0 + tM, H_0 + tN) y_{\min}'(t).$$

Підставивши в тотожність (14) співвідношення

$$\begin{aligned} Q(G_0 + tM, H_0 + tN) y_{\min}(t) &\equiv \lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)] y_{\min}(t), \\ Q(G_0 + tM, H_0 + tN) &= -(G_0 + tM) - A^T (H_0 + tN) - (H_0 + tM) A - \\ &- (H_0 + tN) B (G_0 + tM)^{-1} B^T (H_0 + tN), \end{aligned}$$

запишемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_0(G_0 + tM, H_0 + tN) &= -(y_{\min}'(t))^T \lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)] y_{\min}(t) - \\ &- y_{\min}^T(t) \frac{d}{dt} \{ -(G_0 + tM) - A^T (H_0 + tN) - (H_0 + tM) A - \\ &- (H_0 + tN) B (G_0 + tM)^{-1} B^T (H_0 + tN) \} y_{\min}(t) - y_{\min}'(t) \lambda_{\min} [Q(G_0 + tM, H_0 + tN)] y_{\min}'(t). \end{aligned}$$

Обчисливши похідну від матриці і використовуючи співвідношення (13), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_0(G_0 + tM, H_0 + tN) &= -y_{\min}^T(t) \{ -M - A^T N - NA - NB(G_0 + tM)^{-1} B^T (H_0 + tN) + \\ &+ (H_0 + tN) B (G_0 + tM)^{-1} M (G_0 + tM)^{-1} B^T (H_0 + tN) - \\ &- (H_0 + tN) B (G_0 + tM) B^T N \} y_{\min}(t). \end{aligned}$$

Спрямувавши $t \rightarrow +0$, маємо

$$\left. \frac{d}{dt} \psi(G_0 + tM, H_0 + tN) \right|_{t=0} = - (y_{\min}^0)^T \left\{ -M - A^T N - NA - \right. \\ \left. - NB G_0^{-1} B^T H_0 + H_0 B G_0^{-1} M G_0^{-1} B^T H_0 - H_0 B G_0^{-1} B^T N \right\} y_{\min}^0,$$

що і треба було довести.

Приведемо умови розв'язку задачі оптимізації в термінах узагальненого градієнту [6].

Визначення 2. Нехай $U \subseteq L$ деяка множина і $(G_0, H_0) \in U$. Напрямок (M, N) назовемо можливим в точці (G_0, H_0) , якщо існує $t_0 > 0$ таке, що при всіх $0 \leq t \leq t_0$ буде виконуватись $(G_0 + tM, H_0 + tN) \in U$.

Очевидно, якщо $(G_0, H_0) \in \text{int} U$ (середина множини U), то довільний напрямок є можливим в цій точці. Приведемо необхідні умови розв'язку задачі (8), (9).

Теорема 1. Нехай U_* – множина точок мінімуму функції $\psi_0(G, H)$ на L_1 і в точці (G_*, H_*) функція $\psi_0(G, H)$ має похідні по всім можливим напрямкам. Тоді необхідно виконується умова

$$\frac{d\psi_0(G_*, H_*)}{d(M, N)} \geq 0. \quad (15)$$

Доведення. Нехай $(G_*, H_*) \in L_1$ і (M, N) – можливий напрямок в цій точці. Тоді, за умовою

$$\psi_0(G_* + tM, H_* + tN) - \psi_0(G_*, H_*) \geq 0.$$

Розділивши на $t \geq 0$ и спрямувавши $t \rightarrow +0$, одержимо

$$\frac{d\psi_0(G_*, H_*)}{d(M, N)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\psi_0(G_* + tM, H_* + tN) - \psi_0(G_*, H_*)}{t} \geq 0,$$

тобто маємо твердження теореми.

Візьмемо за можливі напрямки базисні вектори, що побудовані таким чином. Візьмемо в просторі пар симетричних матриць за базис матриці (Δ_{sk}, Θ) , (Θ, Δ_{sj}) , де Δ_{sk} (відповідно Δ_{sj}) – матриця, у якій на місці (s, k) -го та (k, s) -го елементів стоїть одна друга, а інші елементи нулі (якщо $s = k$, тобто це діагональний елемент, то стоїть одиниця), Θ – нульова матриця. Тоді довільну пару (G, H) симетричних матриць

$$G = \{g_{sk}\}, H = \{h_{sj}\}, 1 \leq s \leq k \leq n, 1 \leq i \leq j \leq n$$

можна представити у вигляді

$$(G, H) = \sum_{1 \leq s \leq k \leq n} g_{sk} (\Delta_{sk}, \Theta) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} h_{ij} (\Theta, \Delta_{ij})$$

Візьмемо за базисні напрямки пари матриць (Δ_{sk}, Θ) , (Θ, Δ_{ij}) , $1 \leq s \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq j \leq n$. І за похідні по напрямкам (M, N) функції $\psi_0(G, H)$ будемо брати похідні по цим базисним напрямкам. Утворимо пару матриць, елементи яких є похідними по вказаних напрямках.

$$\nabla \psi_0(G, H) = (F_1(G_0, H_0), F_2(G_0, H_0)), F_1(G_0, H_0) = \{f_{sk}^1\}, F_2(G_0, H_0) = \{f_{ij}^2\} \quad (16)$$

де матриці $F_1(G_0, H_0)$, $F_2(G_0, H_0)$ складені з елементів згідно залежності (11), тобто мають вигляд $G = \{g_{sk}\}$, $H = \{h_{ij}\}$, $1 \leq s \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq j \leq n$, де

$$f_{sk}^1 = (y_{\min}^0(s, k))^T \{ \Delta_{sk} - H_0 B G_0^{-1} \Delta_{sk} G_0^{-1} B^T H_0 \} y_{\min}^0(s, k),$$
$$f_{ij}^2 = (y_{\min}^0(i, j))^T \{ A^T \Delta_{ij} + \Delta_{ij} A + \Delta_{ij} B G_0^{-1} B^T H_0 + H_0 B G_0^{-1} B^T \Delta_{ij} \} y_{\min}^0(i, j).$$

Тут $y_{\min}^0(s, k)$ – граничний одиничний мінімальний власний вектор матриці $Q(G_0, H_0)$, що відповідає напрямку (Δ_{sk}, Θ) , $y_{\min}^0(i, j)$ – граничний одиничний мінімальний власний вектор матриці $Q(G_0, H_0)$, що відповідає (Θ, Δ_{ij}) .

Визначення 3. Назвемо пару $\nabla \psi_0(G_0, H_0) = (F_1(G_0, H_0), F_2(G_0, H_0))$, що складена з похідних по базисних напрямках (16) градієнтом функції $\psi_0(G, H)$ по напрямкам базису (Δ_{sk}, Θ) , (Θ, Δ_{ij}) , $1 \leq s \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq j \leq n$ в точці (G_0, H_0) .

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. Якщо (G_0, H_0) є розв'язком задачі оптимізації (8), (9), то градієнт $\nabla \psi_0(G_0, H_0) = (F_1(G_0, H_0), F_2(G_0, H_0))$ по напрямкам базису (Δ_{sk}, Θ) , (Θ, Δ_{ij}) , $1 \leq s \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq j \leq n$ в точці (G_0, H_0) складається з невід'ємних елементів.

Доведення. Твердження теореми базується на твердженні попередньої теореми та вибору похідних по напрямках.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
2. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – К.: Наукова думка, 1989. – 208 с.
3. Іванов А.Ф., Кожаметов А.Т., Хусаїнов Д.Я. Одержання експоненційних оцінок збіжності розв'язків рівнянь з запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2004. – С.217-223.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., Наука, 1966. –
5. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 518 с.

Надійшла до редакції 25.10.2004.

УДК 510.649

Олександр В. Лялецький*,
Олександр З. Калиновський**

Про лінійні стратегії над упорядкованими диз'юнктами

Формулюються резолюційні лінійні стратегії для упорядкованих диз'юнктив. Доказ їхньої коректності та повноти використовує спеціальне секвенційне числення.

Ключові слова: логіка першого порядку, диз'юнкт, факторизація, пошук суперечності, резолюція, стратегія

*E-mail: lav@unicyb.kiev.ua

Alexander V. Lyaletski*,
Oleksandr Z. Kalinovskyy**

On linear strategies over ordered clauses

Linear strategies of the resolution type are formulated for ordered clauses. Their soundness and completeness are proven by using a special sequent-type calculus.

Key words: first-order logic, clause, factorization, refutation search, resolution, strategy.

**E-mail: okalin@unicyb.kiev.ua

Вступ

Сучасні інтелектуальні системи вимагають застосування ефективних машинних метод пошуку виведення в класичній логіці першого порядку. Як правило, перевага віддається резолюційному підходу, уперше запропонованому в [1]. У цьому зв'язку резолюційні методи є досить вивченими з погляду побудови різноманітних їхніх стратегій, під якими, найчастіше, розуміються різні обмеження, яким повинні задовольняти виведення, які будуються. Зокрема, досить добре була вивчена резолюційна техніка, що оперує з упорядкованими диз'юнктами [2]. Але в [3] було показано, що побудова "проекцій" деревоподібних структур, використовуваних у секвенційних численнях, приводить до появи нових резолюційних стратегій.

У даній роботі пропонуються лінійні стратегії резолюційного типу для упорядкованих диз'юнктив, що базуються на результатах роботи [3] про літерні дерева і розвитку для пошуку суперечності в "звичайному" випадку. Особливістю розглянутого підходу є те, що, як і в [3], коректність і повнота пропонуєваних стратегій є наслідком результатів і методів, розвинутих у [3]. У цьому зв'язку в роботі приводяться тільки ті поняття і визначення, що необхідні для розуміння її змісту. Відзначимо, що всі побудови і результати відносяться тільки до класичної логіки першого порядку без рівності. При цьому вважаються відомими такі поняття, як терм, атомарна формула та літера.

Як звичайно, виведенням називається послідовність формул, кожна з яких є або аксіома (тобто належить вхідній множині), або отримана з попередніх формул по одному із правил виведення.

Основні поняття та позначення

Нехай L є літера. Тоді $\sim L$ позначає її доповнення.

Формула виду $L_1 \vee \dots \vee L_n$ називається диз'юнктом ($L_1, \dots, L_n$ - літери). Тобто диз'юнкт є упорядкована мультимножина в термінології [4]. Порожній диз'юнкт позначається $\square$.

Нехай IS є вхідна множина (вхідних) диз'юнктів, досліджувана на невиконуваність. Якщо $C \in IS$, і C є диз'юнкт $L_1 \vee \dots \vee L_n$, то пара $\langle C, i \rangle$ ($1 \leq i \leq n$) називається *індексом* входження літери L_i в C відносно IS . Відзначимо, що при застосуванні будь-яких правил виведення до диз'юнктів з IS , а потім до їхніх наслідків і т.д., зберігаються індекси літер, що належать диз'юнктам з множини IS .

Підстановка, уніфікатор і найбільш загальний уніфікатор (н.з.у) розуміються в змісті роботи [1]. Крім того, якщо σ є підстановка і Ex є вираз чи множина виразів, то результат застосування σ до Ex позначається $Ex^* \sigma$.

Як і в [3], розглянуті резолюційні стратегії базуються на правилах слабкої факторизації [3] і правилах бінарної резолюції [2].

Слабка факторизація. Нехай $C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_{n-1} \vee L_n \vee C_n$ є диз'юнкт, у якому $C_1, \dots, C_n$ є диз'юнкти, і $L_1, \dots, L_n$ є літери, що мають один і той же індекс. Припустимо, що існує н.з.у. σ множини $\{L_1, \dots, L_n\}$. Тоді говориться, що із $C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_{n-1} \vee L_n \vee C_n$ за правилом слабкої факторизації *WF* може бути виведений диз'юнкт $(C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n)^* \sigma$.

Зауваження 1. У випадку, коли у формулюванні правила *WF* опущене вимога, щоб літери $L_1, \dots, L_n$ мали той самий індекс, ми одержуємо звичайне правило факторизації [4].

Бінарна резолюція. (Правило має два види в залежності від того, чи є серед його посилок вхідний диз'юнкт чи ні.) Нехай диз'юнкти C_1 і C_2 мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E$ ($D_2 \vee E \vee D_3$, у випадку його приналежності вхідній множині IS), де D_1, D_2, D_3 - диз'юнкти (можливо, порожні), і L, E - літери. Нехай існує н.з.у. σ множини $\{L, \sim E\}$. Тоді говориться, що із C_1 і C_2 за правилом бінарної резолюції *RR* може бути виведений диз'юнкт $(D_1 \vee D_2)^* \sigma ((D_1 \vee D_2 \vee D_3)^* \sigma)$.

Лінійна резолюція з слабкою факторизацією

Дана стратегія є упорядкованою лінійною резолюцією [2], у якій використовується правила *RR* і *WF*. Тобто вважається, що виведення $C_1, \dots, C_m$ ($m \geq 1$) задовольняє лінійній стратегії з слабкою факторизацією

відносно диз'юнкта C , що належить вхідній множини IS , якщо C_1 є варіант C , і для всякого $i = 2, \dots, m$ виконуються наступні умови:

- C_1 є варіант вхідного диз'юнкта з IS ;
- C_i є результат застосування WF до C_{i-1} ;
- C_i є результат застосування RR до C_{i-1} і D , де D є варіант або вхідного диз'юнкта, або раніше отриманого диз'юнкта C_j ($1 \leq j \leq i-1$).

Теорема 1 (про коректність і повноту лінійної резолюції з слабкою факторизацією). Нехай IS є вхідна множина і $C \in IS$, причому $IS \setminus \{C\}$ є виконувана множина. Множина IS є невиконуваною тоді і тільки тоді, коли існує лінійне виведення з слабкою факторизацією порожнього диз'юнкта $\square$ відносно C .

Доказ. Розглянута теорема є очевидним наслідком пропозиції 3 із роботи [3].

Приклад 1. Нехай IS є множина $\{L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}, \neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}\}$, де L - атомарна формула, $\neg$ є знак заперечення, а упорядковані пари натуральних чисел служать індексами входжень літери L . Тоді маємо наступне лінійне виведення:

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $L^{(1,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (2) і (1), за правилом RR)
4. $\neg L^{(2,2)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (3) і (2), за правилом RR)
5. $\neg L^{(2,2)}$ (із (4), за правилом WF)
6. $L^{(1,1)}$ (із (5) і (1), за правилом RR)
7. $\square$ (із (6) і (5), за правилом RR)

Отже, множина вхідних диз'юнктів є невиконуваною множиною.

Зауваження 2. При заміні звичайної факторизації правилом слабкої факторизації не можна уникнути появи тавтологій (тобто диз'юнктів, що містять літеру та її доповнення, таких як, наприклад, (3)) в любых виведеннях $\square$ навіть у випадку застосування бінарної резолюції без яких би то ні було обмежень. Цей факт легко перевіряється за допомогою приклада, приведенного вище.

Наслідок. Метод (звичайної) упорядкованої лінійної резолюції [2] є коректним та повним.

Зауваження 3. У випадку звичайної лінійної резолюції можна шукати виведення $\square$, що не містять тавтологій. Так, для наведеного вище приклада маємо:

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $L^{(1,1)}$ (із (1), за правилом звичайної факторизації)
4. $\neg L^{(2,1)}$ (із (2), за правилом звичайної факторизації)
5. $\square$ (із (4) і (3), за правилом RR)

Лінійне виведення з квазіпоглинанням

Спроба об'єднати правило RR і WF в одне правило приводить до стратегії поглинання.

Диз'юнкт C буде називатися початковим піддиз'юнктом диз'юнкта D тоді і тільки тоді коли D має вид $C \vee D'$, де D' є диз'юнкт. (У цьому визначенні враховується те, що графічно рівні літери з різними індексами вважаються різними.)

Правило RF . Нехай диз'юнкти D_1 і D_2 мають вигляд $C_1 \vee L$ і $C_2 \vee E$, існує н.з.у. σ множини $\{L, \neg E\}$, де L і E - літери, та C_1 і C_2 - диз'юнкти. Нехай існує така підстановка θ , що $(C_1 \vee C_2) * \sigma * \theta$ може бути виведеним із $(C_1 * \vee C_2) * \sigma$ деякими послідовностями застосувань правила WF , причому $(C_2 * \sigma) * \theta$ є початковим піддиз'юнктом диз'юнкта $(C_1 * \sigma) * \theta$. Тоді говориться, що за правилом RF із D_1 і D_2 може бути виведений диз'юнкт $(C_1 * \sigma) * \theta$.

Зауваження 4. Ясно, що θ є одночасним найбільш загальним уніфікатором певних множин, що складаються тільки з літер, що мають той самий (свій для кожної множини) індекс. Ця властивість дозволяє "переписати" правило RF тільки в термінах резолюції й уніфікації (не залучаючи поняття слабкої факторизації).

Стратегія лінійного виведення з квазіпоглинанням. Виведення $C_1, \dots, C_m$ ($m \geq 1$) називається лінійним виведенням з квазіпоглинанням відносно диз'юнкта C , що належить вхідній множині IS , якщо C_i є варіант C , і для всякого $i = 2, \dots, m$ виконуються наступні умови:

- C_i отриманий за правилом RR у випадку, коли хоча б одна із посилок цього застосування RR є варіантом вхідного диз'юнкта;
- C_i отриманий за правилом RF в інших випадках.

Теорема 2 (про коректність і повноту лінійної резолюції з квазіпоглинанням). Нехай IS є вхідна множина і $C \in IS$, причому $IS \setminus \{C\}$ є виконувана множина. Множина IS є невиконуваною тоді і тільки тоді, коли існує лінійне виведення з квазіпоглинанням порожнього диз'юнкта $\square$ відносно C .

Доказ. Якщо звернутися до числення LC з [3], то використав його властивості так, як це зроблено при доказі твердження 3 із [3], тобто аналізуючи секвенційні дерева Tr у виведеннях порожнього дерева в LC , і переходячи потім до диз'юнктивних образів $\lambda(Tr)$ дерев Tr , одержуємо необхідне.

Зауваження 5. Для пропозиціональної логіки одержуємо, що $(C_1 * \sigma) * \theta$ є піддиз'юнктом диз'юнкта D_1 (σ і θ - порожні підстановки), і D_1 , надалі пошуку виведення $\square$, може не приймати участь.

Приклад 2 (для лінійної стратегії з квазіпоглинанням).

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт);
2. $\neg E^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)

3. $E^{(3,1)} \vee \neg L^{(3,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
4. $\neg L^{(2,2)} \vee \neg L^{(3,2)}$ (із (3) і (2), за правилом RR)
5. $L^{(1,1)} \vee \neg L^{(3,2)}$ (із (4) і (1), за правилом RR)
6. $\neg L^{(3,2)}$ (із (5) і (4), за правилом RF)
7. $L^{(1,1)}$ (із (6) і (1), за правилом RR)
8. $\square$ (із (7) і (6), за правилом RF)

Отже, множина вхідних диз'юнктів є невиконуваною множиною.

Як і у випадку лінійної резолюції з слабкою уніфікацією, застосування цієї стратегії приводить до необхідності породження тавтологій (диз'юнкт (5)). Також відзначимо, що після одержання (6) можна блокувати (за допомогою поглинання) використання диз'юнктів (3), (4) і (5), і, у цьому випадку, диз'юнкт (2) можна буде не брати до уваги, тому що для літери $\neg E^{(2,1)}$ буде відсутній її доповнення.

Висновок

Сформульовані вище стратегії з'явилися в результаті аналізу виведень у численні літеральних дерев із [3] і їхніх диз'юнктивних образів. У цьому зв'язку результати про коректність і повноту побудованих стратегій виявилися простими наслідками коректності і повноти числення літеральних дерев, у той час як їхній прямий доказ зажадало б значних зусиль, не говорячи вже про формулювання самих стратегій. Цей факт можна пояснити тією причиною, що деревоподібні структури містять більше інформації про способи організації процесу пошуку, чим їхні лінійні аналоги. Автори виражають надію, що підхід запропонований у даній роботі, як і самі лінійні стратегії, виявляться корисними в різних інтелектуальних системах з апаратом пошуку логічного виведення.

Література

1. Robinson J. A. A machine-oriented logic based on resolution principle. J. of the ACM, 1965, 12, P. 23 - 41.
2. Chang C. and Lee R. Symbolic logic and mechanical theorem proving. Academic Press, Inc. Orlando, FL, USA, 1997.
4. Lyaletski A., Letichevsky A., and Kalinovskyy O. Literal trees and resolution technique. Advances in Soft Computing (Proceedings of the International Conference "Intelligent Information Systems 2005: New Trends in Intelligent Information Processing and Web Mining", Gdansk, Poland), 2005.
4. Bachmair, L., Ganzinger, H. Resolution theorem proving. Handbook of Automated Reasoning (Ed. by A. Robinson and A. Voronkov). Elsevier Science Pub., 2001, P. 19 - 99.

Надійшла до редакції 13.01.2005

УДК 517.956.6

Дмитро А. Номіровський¹

Dmitry A. Nomirovskii¹

До питань розв'язності та
керуваності систем С.Л. Со-
болева

On the solvability and the
controllability problems of the
Sobolev-type equations

Побудована шкала теорем єдиної
розв'язності для системи С.Л. Со-
болева та досліджено питання керованості.

A scale of the unique solvability
theorems for the Sobolev-type equati-
ons is established and the controllability
problems are studied.

Ключові слова: лінійне рівняння,
розв'язок, єдиність, шкала, рівняння
Соболева, апіорні нерівності, керованість.

Key Words: linear equation, so-
lution, unicity, scale, the Sobolev-type
equations, priority inequalities, controllability.

¹E-mail: vm214@dcpr.kiev.ua

В роботі [1] розглядаються системи С.Л. Соболева [2, 3], зокрема, досліджується рівняння

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{k=0}^6 \frac{\partial^k}{\partial t^k} A_k u = F.$$

Нагадаємо, що до операторів С.Л. Соболева в сучасній літературі відносять наступні:

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial t} A_1 u + A_0 u, \quad \mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_2 u + \frac{\partial}{\partial t} A_1 u + A_0 u, \dots$$

Оператори A_k не залежать від змінної t і задаються диференціальними виразами другого порядку

$$A_k u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij;k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_{i;k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_k(x) u.$$

Наприклад, оператори третього порядку $\mathcal{L}u \equiv A_1 u_t + A_0 u$ (які часто називають псевдопараболічними відносять до моделей типу С.Л. Соболева).

У застосуваннях часто виникають рівняння С.Л. Соболева другого порядку за часовою змінною t . Наприклад, рівняння, що описує лінійні іонні-звукові хвилі [4], має вигляд

$$\frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\Delta u - \frac{1}{\lambda_D^2} u \right] + \frac{1}{\lambda_D^2} \Delta u = f.$$

Також моделі С.Л. Соболева описують хвилі в експоненціально стратифікованих рідинах, поздовжні хвилі в тонкому пружному стержні з урахуванням поперечної інерції, довгі хвилі в електричних лініях передач з розподіленими параметрами, теорію внутрішніх хвиль в стратифікованих рідинах, що обертаються та багато інших актуальних фізичних процесів [3-11].

1. Теорема про гомеоморфізм системи С.Л. Соболева.

Для операторів моделей С.Л. Соболева в статті [1] доведена теорема узагальненої розв'язності (встановлено гомеоморфізм, що здійснює оператор задачі) в просторах $\bar{\mathcal{L}} : W_0^{k,1} \rightarrow W_T^{k-6,-1}$ для довільних значень $k = \overline{0,6}$ (означення просторів дивись в роботі [1]). Зокрема, доведена лема.

Лема 1. Для всіх $u \in W_0^{k,1}$, $k = \overline{0,6}$ мають місце нерівності

$$c\|u\|_{W_0^{k,1}} \geq \|\bar{\mathcal{L}}u\|_{W_T^{k-6,-1}} \geq c^{-1}\|u\|_{W_0^{k,1}}. \quad (1)$$

В даній статті ми дещо модифікуємо доведення відповідних тверджень (а також, деякі означення) так, щоб дістати повну шкалу апріорних нерівностей, які дають можливість встановлювати теореми про гомеоморфізм між просторами $W_0^{k,1}$ та $W_T^{k-6,-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, що здійснюється оператором $\bar{\mathcal{L}}$. Наведемо ці міркування.

Позначимо через $C_0^\infty(\bar{Q})$ – множину нескінченно диференційовних в $\bar{Q}$ функцій, що задовольняють умови

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^l u}{\partial t^l}|_{t=0} = 0, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (2)$$

$C_T^\infty(\bar{Q})$ – аналогічна множина, але функції задовольняють спряжені умови

$$v|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^l v}{\partial t^l}|_{t=T} = 0, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3)$$

Нехай $W_0^{k,1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – поповнення множини функцій $u(t, x) \in C_0^\infty(\bar{Q})$ за нормою

$$\|u\|_{W_0^{k,1}} = \left(\sum_{i=1}^n \int_Q (u_{x_i}^{(k)})^2 dQ \right)^{1/2},$$

де $f^{(k)}$ – k -та похідна функції f за часовою змінною. Розповсюдимо означення просторів $W_0^{k,1}$ для довільних цілих $k \in \mathbb{Z}$. Будемо вважати, що норми просторів $W_0^{k,1}$, $k \in \mathbb{Z}$ визначаються за індукцією наступними

рівностями:

$$\|u\|_{W_0^{k,1}} = \|u^{(1)}\|_{W_0^{k-1,1}} = \|u^{(-1)}\|_{W_0^{k+1,1}}, \quad u^{(-1)}(t, x) = \int_0^t u(\tau, x) d\tau.$$

Аналогічно вводяться до розгляду простори $W_T^{k,1}$ для довільних цілих $k \in \mathbb{Z}$. При визначенні $W_T^{k,1}$ потрібно зауважити, що замість функції $u^{(-1)}$ слід розглядати $v^{[-1]} = \int_T^t v(\tau, x) d\tau$. Негативні простори $W_0^{k,-1}, W_T^{k,-1}$ вводяться так само як і в роботі [1].

При такому введенні просторів $W_0^{k,1}, W_T^{k,1}$ доведення леми 1 роботи [1] залишається незмінним. Далі маємо

Лема 2. Для всіх $u \in W_0^{k,1}, k \in \mathbb{Z}$ мають місце нерівності

$$c\|u\|_{W_0^{k,1}} \geq \|\bar{\mathcal{L}}u\|_{W_T^{k-6,-1}} \geq c^{-1}\|u\|_{W_0^{k,1}}. \quad (4)$$

Доведення. Нехай $u \in C_0^\infty(\bar{Q})$. Тоді $u^{(1)} \in C_0^\infty(\bar{Q}) \subset W_0^{0,1}$ і зважаючи на лему 1 роботи [1], маємо

$$c\|u^{(1)}\|_{W_0^{0,1}} \geq \|\mathcal{L}(u^{(1)})\|_{W_T^{-6,-1}} \geq c^{-1}\|u^{(1)}\|_{W_0^{0,1}}$$

або

$$c\|u\|_{W_0^{1,1}} \geq \|(\mathcal{L}u)^{(1)}\|_{W_T^{-6,-1}} \geq c^{-1}\|u\|_{W_0^{1,1}}.$$

Проте легко встановити рівність $\|(\mathcal{L}u)^{(1)}\|_{W_T^{-6,-1}} = \|\mathcal{L}u\|_{W_T^{-5,-1}}$. Дійсно, оскільки $\mathcal{L}u = 0$ при $t = 0$, то

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}u)^{(1)}\|_{W_T^{-6,-1}} &= \sup_{v \in W_T^{6,1}} \frac{|((\mathcal{L}u)^{(1)}, v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{W_T^{6,1}}} = \sup_{v \in C_T^\infty(\bar{Q})} \frac{|((\mathcal{L}u)^{(1)}, v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{W_T^{6,1}}} = \\ &= \sup_{v \in C_T^\infty(\bar{Q})} \frac{|(\mathcal{L}u, v^{(1)})_{L_2(Q)}|}{\|v^{(1)}\|_{W_T^{5,1}}} = \sup_{v^{(1)} \in C_T^\infty(\bar{Q})} \frac{|(\mathcal{L}u, v^{(1)})_{L_2(Q)}|}{\|v^{(1)}\|_{W_T^{5,1}}} = \|\mathcal{L}u\|_{W_T^{-5,-1}}. \end{aligned}$$

Оскільки, множина функцій $u(t, x) \in C_0^\infty(\bar{Q})$ щільна в $W_0^{1,1}$, то дістаємо доведення нерівності леми для $k = 1$. Аналогічно доводиться лема і для решти $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Зауваження 1. Аналогічно до леми 2 доводяться і відповідні нерівності для спряженого оператора С.Л. Соболева. Відзначимо також, що доведення леми 2 можна було б викласти і у дусі леми 1 роботи [1] для довільного $k \in \mathbb{Z}$.

З доведених нерівностей (4) легко встановити теорему єдиної розв'язності рівнянь С.Л. Соболева.

Теорема 1. Нехай коефіцієнти оператора $\bar{\mathcal{L}}$ задовольняють умови роботи [1]. Тоді для довільної функції $F \in W_T^{k-6,-1}$, $k \in \mathbb{Z}$ існує єдиний розв'язок $u \in W_0^{k,1}$ рівняння $\bar{\mathcal{L}}u = F$.

Може здатися дивним, що для випадку $k > 6$ теорема буде гарантувати приналежність розв'язку рівняння $\bar{\mathcal{L}}u = F$ простору $u \in W_0^{k,1}$, бо це означає виконання для функції u однорідних початкових умов для $(k-1)$ порядку включно. Це пояснюється тим, що для таких значень k відповідні умови в точці $t = 0$ буде задовольняти і права частина $F \in W_T^{k-6,-1}$.

Зауважимо, що запропонована методика доведення критеріїв єдиної розв'язності може бути розповсюджена для дослідження систем з виродженнями. Це стосується, зокрема, і систем де оператор A_k при старшій похідній за часом не є оборотним.

2. Керованість системи С.Л. Соболева.

Нехай керування системою здійснюється через праву частину рівняння $\bar{\mathcal{L}}u = f(h)$, множиною керуючих впливів U простору керувань $\mathcal{C}$, де $f: \mathcal{C} \rightarrow (W_T^1)^*$ — керуюче відображення (можливо нелінійне), що визначене на множині U простору керувань.

Означення 1. Систему $\bar{\mathcal{L}}u = f(h)$ називають керованою в банаховому просторі E множиною керуючих впливів U , ($h \in U$), коли для довільного елемента $u^* \in E$ існує таке керування $h^* \in U$, що u^* — розв'язок рівняння $\bar{\mathcal{L}}u = f(h^*)$.

Означення 2. Систему $\bar{\mathcal{L}}u = f(h)$ називають ε -керованою в банаховому просторі E множиною керуючих впливів U , ($h \in U$), коли для довільного елемента u^* простору E існує така послідовність керувань h_i^* з допустимої множини U , що $\|u(h_i^*) - u^*\|_E \rightarrow 0$, при $i \rightarrow \infty$, де $u(h_i^*)$ — розв'язок рівняння $\bar{\mathcal{L}}u = f(h_i^*)$.

Теорема 2. Нехай коефіцієнти оператора $\bar{\mathcal{L}}$ задовольняють умови роботи [1]. Тоді

- 1) система $\bar{\mathcal{L}}u = f$ буде керованою в просторі W_0^k множиною керуючих впливів U тоді і лише тоді, коли $f(U) = W_T^{k-6,-1}$;
- 2) система $\bar{\mathcal{L}}u = f$ буде ε -керованою в просторі W_0^k множиною керуючих впливів U тоді і лише тоді, коли множина $f(U)$ щільна в просторі $W_T^{k-6,-1}$.

Доведення. Доведення нехайно випливає з того, що оператор $\bar{\mathcal{L}}$ здійснює гомеоморфізм між просторами W_0^k та $W_T^{k-6,-1}$. $\square$

Література

- [1] Номировский Д.А. О гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми дифференциальными операторами с частными производными // Украинський математичний журнал. – 2004. – №12. У друці.
- [2] Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. – New York: Wiley Interscience, 1999. – 656 p.
- [3] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, №4. – С. 47-74.
- [4] Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. – М.: Наука. 1998. – 448 с.
- [5] Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука. 1990. – 344 с.
- [6] Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
- [7] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 436 с.
- [8] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. – Новосибирск: Наука. 2000. – 336 с.
- [9] Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1999. – Т. 39, №6. С. 1006-1022.
- [10] Favini A., Yagi A. Generate Differential Equations in Banach Spaces. New York/ Basel/ Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999. – 313 p.
- [11] Stoker J.J. Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. – New York: Wiley Interscience, 1992. – 600 p.

Надійшла до редколегії 10.12.2004

УДК 515.126.83

Володимир В. Пічкур

Volodymyr V. Pichkur

Властивості звуження множини

Properties of narrowing of set

В статті вводиться означення звуження множини та аналізуються його властивості.

In paper is defined the narrowing of a set and analysed its properties.

Ключові слова: неперервне багатозначне відображення, звуження множини, розширення множини.

Key Words: continuous multifunction, narrowing of set, enlargement of set.

E-mail: pichkur@unicyb.kiev.ua

При означенні неперервних багатозначних відображень важливу роль відіграє поняття розширення (околу) множини [1-3]. Розширення множини є також зручним засобом для побудови монотонно спадної послідовності множин, збіжної до даної сукупності. Разом з тим в задачах аналізу практичної стійкості динамічних систем виникає необхідність у побудові такої послідовності компактів, яка б була монотонно зростаючою, належала деякій множині і збігалась до неї в метриці Хаусдорфа [4]. У даній статті вводиться поняття звуження множини. Показано, що для компактів, які є замиканням своєї внутрішньої частини, звуження множини створює неперервне багатозначне відображення. Аналізуються властивості звуження від опуклого компакту.

Будемо позначати $comp(R^n)$ – множина компактів з R^n ; $conv(R^n)$ – множина опуклих компактів з R^n ; $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ – евклідова норма простору R^n , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $\text{int } A$ – сукупність внутрішніх точок множини A ; ∂A – границя A ; $\bar{A}$ – замикання множини A ; $A^\varepsilon = \{x : \|x - a\| \leq \varepsilon, a \in A\}$ – ε -розширення множини $A \subset R^n$; $A \dot{-} B = \{x \in R^n : \{x\} + B \subseteq A\}$ – геометрична різниця, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$; coA – опукле замикання множини $A \subset R^n$; $K_r(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| \leq r\}$ – замкнена

куля, $a \in R^n$; $\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|$ – напівметрика Хаусдорфа, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$; $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ – метрика Хаусдорфа, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$; $\rho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$ – метрика Евкліда, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$; $co(f)$ – обопуклення функції f ; $c(A, \psi) = \sup_{a \in A} a^T \psi$ – опорна функція множини $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$. Нехай $A \subset R^n$, $\text{int } A \neq \emptyset$.

Означення 1. Сукупність $A^{(\varepsilon)} \subset A$ усіх точок $a \in A$ таких, що $a^\varepsilon \subseteq A$ називається ε -звуженням множини A .

Теорема 1. Припустимо, що множина A є замкнутою. Тоді

$$A^{(\varepsilon)} = A / R(\varepsilon), \quad R(\varepsilon) = \bigcup_{x \in \partial A} \text{int } x^\varepsilon.$$

Доведення. Виберемо довільну точку $y \in A^{(\varepsilon)}$. За означенням 1 $y^\varepsilon \subseteq A$. Це означає, що $\min_{x \in \partial A} \|x - y\| \geq \varepsilon$, тобто $y \notin R(A)$. І навпаки, якщо $y \in A / R(A)$, то $y \in A$ і $\min_{x \in \partial A} \|x - y\| \geq \varepsilon$. Тобто, $y^\varepsilon \subseteq A$ і $y \in A^{(\varepsilon)}$. Теорему доведено.

Виявляється, що не обов'язково $A^{(\varepsilon)} = A / \text{int}(\partial A)^\varepsilon$. Розглянемо наступний приклад. Нехай $A = K_\varepsilon(0)$. З означення 1 випливає $A^{(\varepsilon)} = \{0\}$. З іншої сторони $(\partial A)^\varepsilon = K_{2\varepsilon}(0)$ і $0 \in \text{int}(\partial A)^\varepsilon$. Наслідком означення 1 є включення $(A^{(\varepsilon)})^\varepsilon \subseteq A$. Але не завжди $(A^{(\varepsilon)})^\varepsilon = A$. Дійсно, якщо $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$, то $A^{(\varepsilon)} = [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon] \times [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Наприклад, точка $y = (1, 1)$ не належить $(A^{(\varepsilon)})^\varepsilon$, тому що $\rho(y, A(\varepsilon)) = \sqrt{2}\varepsilon$. Але для ряду випадків рівність $(A^{(\varepsilon)})^\varepsilon = A$ має місце. Так, якщо $A = K_1(0)$, то звуження $A^{(\varepsilon)} = K_{1-\varepsilon}(0)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ і $(A^{(\varepsilon)})^\varepsilon = K_{1-\varepsilon+\varepsilon}(0) = A$.

Розглянемо властивості множини $A^{(\varepsilon)}$. Припустимо, що $A^{(\varepsilon)} \neq \emptyset$. Якщо $A \subset R^n$ є замкнена, то $A^{(\varepsilon)}$ – замкнена множина. Це випливає з того, що сукупність $R(\varepsilon) = \bigcup_{x \in \partial A} \text{int } x^\varepsilon$ – відкрита, як об'єднання відкритих множин. Тому $A / R(\varepsilon)$ є замкнутою множиною. Якщо $A \subset R^n$ – компакт, то існує куля $K_\varepsilon(0) \supset A$. Звідси $K_\varepsilon(0) \supset A^{(\varepsilon)}$, що означає обмеженість, а, тому, і компактність $A^{(\varepsilon)}$.

З означення ε -звуження випливає, що $A^{(\varepsilon)} = \bigcup \{B : B^\varepsilon \subseteq A\}$. Таким чином, $A^{(\varepsilon)}$ є найбільшою множиною, ε -розширення якої міститься в A . Оскільки $a^\varepsilon = \{a\} + K_\varepsilon(0)$, то $A^{(\varepsilon)} = \{a : \{a\} + K_\varepsilon(0) \subseteq A\} = A - K_\varepsilon(0)$.

Теорема 2. Нехай $A \subset R^n$, $\varepsilon_i > 0$, $A^{(\varepsilon_i)} \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Якщо $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то $A^{(\varepsilon_1)} \subset \text{int } A^{(\varepsilon_2)}$.

Доведення. Позначимо $B = A^{(\varepsilon_2)}$. Виберемо $a \in A^{(\varepsilon_1)}$, $a^{\varepsilon_1} = a^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2} \subseteq A$. За означенням 1 $a^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \subseteq A^{(\varepsilon_2)} = B$. Таким чином, $a \in B^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$. Звідси випливає, що $A^{(\varepsilon_1)} \subseteq B^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$. Але $B^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \subset \text{int } B$. Тому $A^{(\varepsilon_1)} \subset \text{int } A^{(\varepsilon_2)}$. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай $A \subset R^n$ – компакт. Відображення $\Theta: \varepsilon \mapsto A^{(\varepsilon)}$ є неперервним у точці $\varepsilon > 0$.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і компакт $I = A'$, $r > 2\varepsilon$. Відображення $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ є неперервним, $\varepsilon > 0$. Оскільки $A^{(\varepsilon)} = A \cap (I / R(\varepsilon))$, то відображення Θ неперервне. Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай $A \subset R^n$ – компакт. Тоді $\alpha(\overline{\text{int } A}, A^{(\varepsilon)}) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Доведення. Оскільки $A^{(\varepsilon)} \subseteq \overline{\text{int } A}$, $\varepsilon > 0$, то $\beta(A^{(\varepsilon)}, \overline{\text{int } A}) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ і $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \beta(A^{(\varepsilon)}, \overline{\text{int } A}) = 0$. З іншого боку, для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує $\delta \in (0, \varepsilon)$ таке, що $\overline{\text{int } A} \subseteq (A^{(\delta)})^\varepsilon$. Дійсно. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Якщо $x \in \text{int } A$, то для деякого $\delta \in (0, \varepsilon)$ справджується включення $x^\delta \subset \text{int } A$. З означення 1 випливає $x \in A^{(\delta)}$, тому $x \in (A^{(\delta)})^\varepsilon$. Якщо $x^\delta \not\subset \text{int } A$ при $\delta \in (0, \varepsilon)$, то $x \notin A^{(\delta)}$ і за теоремою 1 $\rho(x, A^{(\delta)}) \leq \delta$. Звідси $x \in (A^{(\delta)})^\delta$ і $x \in (A^{(\delta)})^\varepsilon$ за умови, що $\varepsilon \geq \delta$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо в умовах теореми 4 компакт $A = \overline{\text{int } A}$, то відображення $\Theta: \varepsilon \mapsto A^{(\varepsilon)}$ є неперервним при $\varepsilon \geq 0$.

Розглянемо наступний приклад. Нехай $A = K_1(0) \cup P$, де $P = [1, 2] \times \{0\}$. Має місце $\overline{\text{int } A} = K_1(0)$, $\overline{\text{int } A} \neq A$ і умови наслідку теореми 4 не виконуються. Тоді $A^{(\varepsilon)} = K_{1-\varepsilon}(0)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ і в метриці Хаусдорфа $A^{(\varepsilon)} \rightarrow K_1(0)$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Таким чином, функція $\Theta: \varepsilon \mapsto A^{(\varepsilon)}$ у точці $\varepsilon = 0$ втрачає неперервність зліва. Зауважимо, що відображення $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ не є неперервним зліва при $\varepsilon = 0$, тому що $R(0) = \emptyset$ і порушується неперервність зверху в точці $+0$.

Приведемо властивості звуження опуклих множин.

Теорема 5. Якщо $A \subset R^n$ – опукла множина, $A^{(\varepsilon)} \neq \emptyset$, то $A^{(\varepsilon)}$ – опукла множина.

Доведення. Якщо $A^{(\varepsilon)}$ складається з однієї точки, то справедливість теореми є наслідком означення опуклої множини. Припустимо, що множина $A^{(\varepsilon)}$ складається більше ніж з однієї точки. Візьмемо будь-які два елементи $a_i \in A^{(\varepsilon)}$, $i = 1, 2$. Позначимо $P = \{a_\lambda: \lambda \in [0, 1]\}$, $a_\lambda = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$. За означенням 1 $a_i^\varepsilon \subset A$, $i = 1, 2$ і $a_1^\varepsilon \cup a_2^\varepsilon \subset A$. Таким

чином, $co(a_1^\varepsilon \cup a_2^\varepsilon) \subset A$, тому що A – опукла множина. Використовуючи властивість опуклого замикання ε -розширення, отримуємо [2]

$$co(a_1^\varepsilon \cup a_2^\varepsilon) = co(\{a_1\} \cup \{a_2\})^\varepsilon = (co(\{a_1\} \cup \{a_2\}))^\varepsilon = P^\varepsilon.$$

Таким чином, $P^\varepsilon \subseteq A$ і звідси $P \subseteq A^{(\varepsilon)}$. Теорему доведено.

Теорема 6. Якщо $A \in conv(R^n)$, $A^{(\sigma)} \neq \emptyset$, $\sigma > 0$, то

$$c(A^{(\sigma)}, \psi) = co(c(A, \psi) - \sigma \|\psi\|), \psi \in R^n.$$

Доведення теореми випливає з формули для опорної функції від геометричної різниці [3] і співвідношень $A^{(\varepsilon)} = A \dot{-} K_\varepsilon(0)$, $c(K_\sigma(0), \psi) = \sigma \|\psi\|$.

Теорема 7. Нехай $A \in conv(R^n)$, $B \in conv(R^n)$. Якщо $A \subseteq B^\sigma$, $A^{(\sigma)} \neq \emptyset$, то $A^{(\sigma)} \subseteq B$, $\sigma > 0$.

Доведення. Якщо $A \subseteq B^\sigma$, то $c(A, \psi) \leq c(B, \psi) + \sigma \|\psi\|$, $\psi \in R^n$. Звідси $c(A, \psi) - \sigma \|\psi\| \leq c(B, \psi)$. За теоремою 6 $c(A^{(\sigma)}, \psi) \leq c(B, \psi)$, $\psi \in R^n$. З властивостей опорної функції [1,3] та з теореми 6 випливає включення $A^{(\sigma)} \subseteq B$. Теорему доведено.

У подальших дослідженнях теореми 1-7 будуть застосовуватись в задачах аналізу практичної стійкості диференціальних включень.

Література

1. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН, 1985, т.169. – с.194-252.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. -К.: Наукова думка, 1992.
4. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000.

Надійшла до редакції 15.06.2004

УДК 532.72:532.546:519.63

Ольга М. Степанченко¹

**Чисельне моделювання
розчинення пласта солі з
врахуванням осмосу**

Сформульовано математичну модель нелінійної задачі дифузійного розчинення, з врахуванням осмосу, сольового пласта, перекритого зверху шаром ґрунту скінченної товщини, в рамках задачі типу Стефана. Числовий розв'язок отримано методом скінченних різниць. Побудовано монотонну різницеву схему для даної нелінійної задачі порядку точності $O(h^2 + \tau)$ та обчислювальний алгоритм її розв'язку. На основі проведених числових експериментів виявлено вплив на товщину зони повного розчинення нормального та аномального осмосу.

Ключові слова: чисельне моделювання, розчинення, дифузія, математична модель, монотонна різницева схема, обчислювальний алгоритм, осмос.

Olga M. Stepanchenko¹

**Numerical modelling of salt seam
dissolution taking into account
osmosis**

The article develops mathematical model of non-linear problem of salt seam diffusive dissolution taking into account osmosis, which is blocked above by ground layer of final thickness, within the framework of Stephan's type task. The numerical decision was obtained by a method of finite differences. A monotonic difference scheme for the given nonlinear task of order of exactness $O(h^2 + \tau)$ and computational algorithm of its decision is up built. On the basis of the conducted number experiments there is found out the influence on the area thickness of complete dissolution of normal and anomalous osmosis.

Keywords: numerical modelling, dissolution, diffusion, mathematical model, monotonic difference scheme, computational algorithm, osmosis.

E-mail: O.M.Stepanchenko@rstu.rv.ua

1. Вступ. В сучасних умовах значна кількість гідротехнічних, енергетичних та ін. об'єктів експлуатується в умовах підвищеного техногенного ризику, які в силу обставин побудовані і експлуатуються в несприятливих гідрогеологічних умовах – залягання під ними водорозчинних порід, закарстованості ґрунтів, тектонічних розломів та ін. В процесі експлуатації цих споруд, внаслідок протікання різних фізико-хімічних процесів (дифузійного розчинення, фільтрації підземних вод, масопереносу та ін.) відбувається розчинення підземних водорозчинних масопереносу та ін.) відбувається розчинення підземних водорозчинних порід в основах вищевказаних об'єктів. В зв'язку з цим набуває актуальності задача прогнозу розвивання зон повного розчинення та утворення каверн в основах даних споруд, що впливає на оцінку їх стійкості та надійності.

Вперше така задача поставлена в роботах [1-3]. В [1,2] отримано автономні розв'язки чисто дифузійного розчинення монолітного пласта

солі в рамках одновимірної моделі відповідно без врахування та з врахуванням термодифузії. У [3] отримано чисельний розв'язок задачі дифузійного розчинення в рамках двовимірної моделі. В подальшому така задача отримала розвиток в роботі [4]. Дана робота є продовженням робіт [1-4] з врахуванням осмотичних явищ та нелінійності процесу розчинення.

2. Постановка задачі. Розглянемо процес дифузійного розчинення необмеженого монолітного водорозчинного пласта солі, перекритого зверху шаром ґрунту скінченної товщини l_0 , з врахуванням осмотичних явищ, нелінійності процесу дифузійного розчинення та наявності рухомого дифузійного примежевого шару, товщиною δ в околі фронту розчинення (рис. 1).

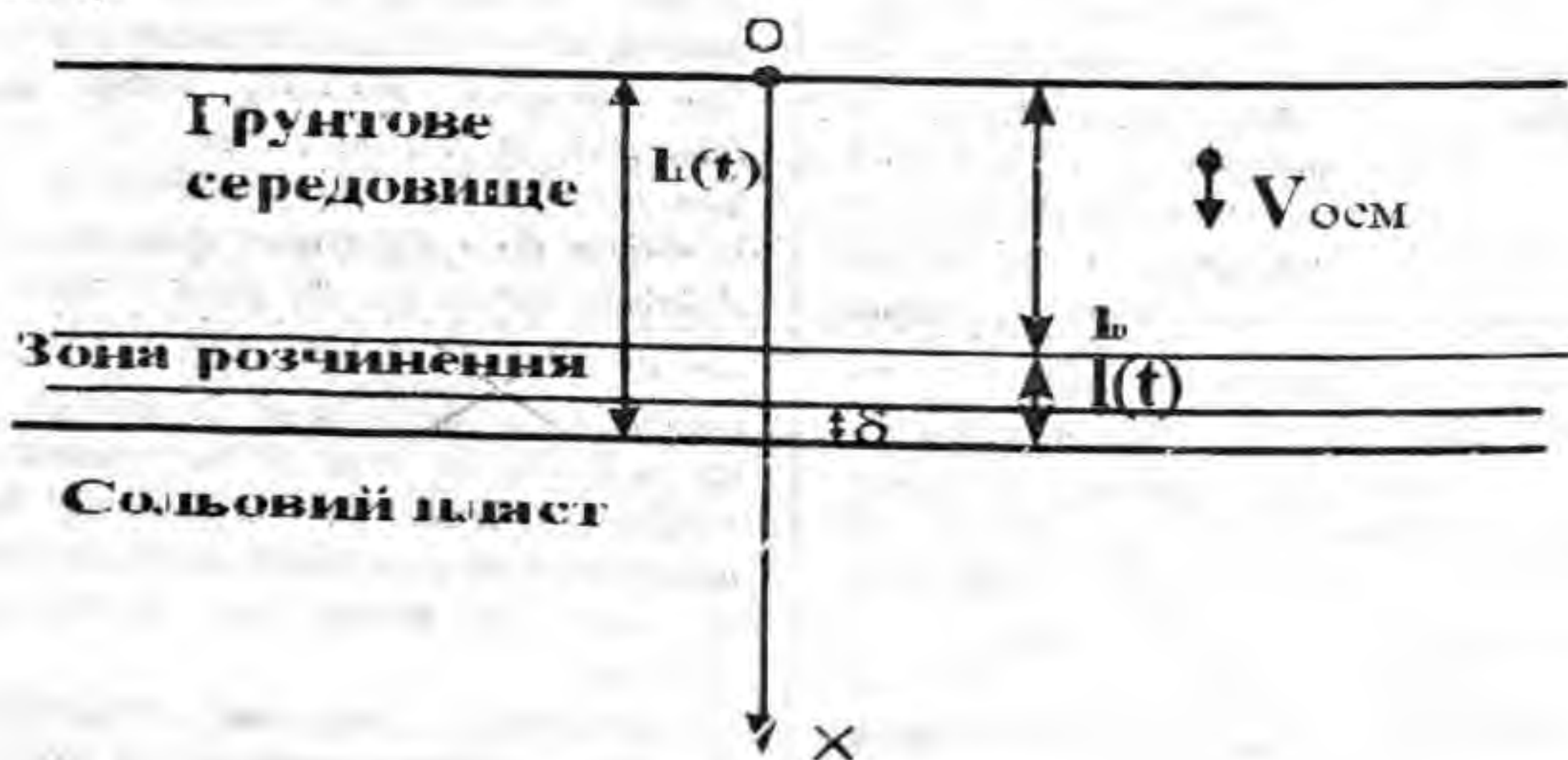


Рис. 1

Допускається, що процес розчинення відбувається під впливом молекулярної дифузії за рахунок зміни градієнту концентрації солей в рамках нелінійної моделі. Припустимо, що в момент часу $t=0$ верхній шар ґрунту товщиною l_0 наситився ґрунтовими водами з початковою концентрацією солі $C_0(x)$, яка менша концентрації граничного насичення C_m ($C_0(x) < C_m$). Крім того в ґрунті відбувається осмотична фільтрація розчину з швидкістю $V_{осм}$. В результаті процесу розчинення пласта солі виникає і розвивається з часом зона повного розчинення сольового пласта товщиною $l(t)$, в якій солі повністю перейшли в розчинений стан. Зона розчинення з часом заповнюється ґрунтовим середовищем з тими самими фізико-хімічними властивостями, що і шар ґрунту.

В зв'язку з цим потрібно розрахувати розподіл концентрації солі в ґрунті протягом певного проміжку часу, еволюцію зони повного розчинення з врахуванням впливу осмотичних явищ.

3. Математична модель задачі. Виберемо початок координат на поверхні ґрунту і направимо вісь OX вниз. Тоді математична модель

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_A} = h \quad \text{на } \Gamma, \quad (4)$$

де $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma)$, $\frac{\partial}{\partial \nu_A} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega, A), H^{-1/2}(\Gamma))$ – конормальна по відношенню до оператора A похідна.

Як відомо [3], при сформульованих вище умовах існує єдиний розв'язок задачі (2) – (4).

Нехай γ_i , $i = \overline{1, N}$, гладкі однозв'язні орієнтовні відкриті $(n-1)$ -вимірні поверхні в R^n з гладкими границями, що містяться всередині області Ω , які попарно не перетинаються, $\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bar{\gamma}_i \subset \Omega$. Нехай орієнтація поверхні γ_i визначається неперервною сім'єю одиничних нормалей $\nu(x)$, $x \in \gamma_i$. Позначимо через Ω_i відкриту підобласть в Ω ($\bar{\Omega}_i \subset \Omega$) з гладкою однозв'язною границею $\partial\Omega_i$, яка містить поверхню γ_i , таку що нормальний вектор ν до поверхні γ_i направлений зовні області Ω_i , через γ_{i-} – ту сторону поверхні γ_i , орієнтація якої співпадає з орієнтацією зовнішньої сторони поверхні $\partial\Omega_i$, а через γ_{i+} – протилежну сторону поверхні γ_i . Будемо вважати, що області $\bar{\Omega}_i$ попарно не перетинаються. Будемо, крім того, припускати, що поверхні $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ є такими, що область $\Omega' := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{\gamma}_i$ може бути розбита кусково гладкими $(n-1)$ -вимірними многовидами на скінченне число областей, зіркових відносно всіх точок деякої кулі, своєї для кожної області.

Нехай Γ_j , $\Gamma_j \subset \Gamma$, $j = \overline{1, N_1}$, відкриті $(n-1)$ -вимірні підмноговиди Γ (частини поверхні Γ), які попарно не перетинаються.

Припустимо, що на поверхнях γ_i спостерігаються функції

$$y_i^{(1)}(\varphi, \eta_i^{(1)}; x) = \int_{\gamma_i} K_i^{(1,1)}(x, y) \varphi(y) d\gamma_{iy} + \int_{\gamma_i} K_i^{(1,2)}(x, y) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu_A} d\gamma_{iy} + \eta_i^{(1)}(x), \quad (5)$$

$$y_i^{(2)}(\varphi, \eta_i^{(2)}; x) = \int_{\gamma_i} K_i^{(2,1)}(x, y) \varphi(y) d\gamma_{iy} + \int_{\gamma_i} K_i^{(2,2)}(x, y) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu_A} d\gamma_{iy} + \eta_i^{(2)}(x), \quad (6)$$

$$x \in \gamma_i, \quad i = \overline{1, N},$$

а на поверхнях Γ_j – функції

$$y_j(x) = y_j(\varphi, \eta_j; x) = \int_{\Gamma_j} K_j(x, y) \varphi(y) d\Gamma_{jy} + \eta_j(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad (7)$$

де $\varphi(x)$ – розв'язок крайової задачі (2) – (4), $\eta_i^{(1)}(x)$, $\eta_i^{(2)}(x)$ і $\eta_j(x)$ – похибки спостережень, які є вибірковими функціями неперервних

в середньоквадратичному випадкових полів, визначених відповідно на поверхнях γ_i і Γ_j , $K_i^{(r,j)} \in L^2(\gamma_i \times \gamma_i)$, $r, j = 1, 2$ і $K_j \in L^2(\Gamma_j \times \Gamma_j)$ – задані функції. Крім того, припускається, що існує хоча б одне число i_0 , $1 \leq i_0 \leq N$, хоча б одне число $\tilde{j}$, $1 \leq \tilde{j} \leq 2$, і хоча б одне число j_0 , $1 \leq j_0 \leq N_1$, такі що виконується хоча б одна із умов¹

$$\int_{\gamma_{i_0}} K_{i_0}^{(\tilde{j},1)}(x, y) d\gamma_{i_0} \neq 0, \quad (8)$$

або

$$\int_{\Gamma_{j_0}} K_{j_0}(x, y) d\Gamma_{j_0} \neq 0, \quad (9)$$

а інтегральні оператори $G_i^{(j)}$ що визначені ядрами $K_i^{(j,2)}(\xi, x)$ вигляду

$$G_i^{(j)}\psi(x) = \int_{\gamma_i} K_i^{(j,2)}(\xi, x)\psi(\xi)d\gamma_{i\xi}, \quad (10)$$

$j = 1, 2$, є лінійними обмеженими операторами, які відображають простори $L^2(\gamma_i)$ в $H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$, $i = \overline{1, N}$ (прикладом таких ядер є, наприклад, вироджені ядра $K_i^{(j,2)}(\xi, x) = \sum_{r=1}^l a_r^{(ij)}(\xi)b_r^{(ij)}(x)$, где $a_r^{(ij)} \in L^2(\gamma_i)$, $b_r^{(ij)} \in H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$).

Зауважимо, що оскільки в наших припущеннях $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = \overline{1, n}$, то для будь-якої підобласті ω такої, що $\bar{\omega} \in \Omega$, розв'язок φ задачі (2) – (4) належить $H^2(\omega)$, звідки внаслідок теореми про сліди $\varphi|_{\gamma_i}, \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu_A}|_{\gamma_i} \in L^2(\gamma_i)$, $i = \overline{1, N}$, і тому інтеграли в (5) – (6) мають смисл.

Позначимо через G_0 множину функцій $\tilde{F} := (\tilde{f}, \tilde{h})$, що задовольняють умові

$$\int_{\Omega} \tilde{f}^2(x)q^2(x)dx + \int_{\Gamma} \tilde{h}^2q_1^2d\Gamma \leq 1, \quad (11)$$

а через G_1 множину випадкових функцій $\tilde{\eta}(\cdot) := (\tilde{\eta}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \tilde{\eta}_N^{(1)}(\cdot), \tilde{\eta}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \tilde{\eta}_N^{(2)}(\cdot), \tilde{\eta}_1(\cdot), \dots, \tilde{\eta}_{N_1}(\cdot))$, що задовольняють умовам

$$M\tilde{\eta}_i^{(1)}(x) = 0, \quad M\tilde{\eta}_i^{(2)}(x) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad M\tilde{\eta}_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} M(\tilde{\eta}_i^{(1)}(x))^2 (r_i^{(1)}(x))^2 d\gamma_i + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} M(\tilde{\eta}_i^{(2)}(x))^2 (r_i^{(2)}(x))^2 d\gamma_i + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\Gamma_j} M(\tilde{\eta}_j(x))^2 r_j^2(x) d\Gamma_j \leq 1, \end{aligned} \quad (13)$$

¹Іншими словами, не всі інтегральні оператори, що визначені першими доданками в правих частинах (5), (6), а також в (7), переводять константи в нуль.

де $q(x), q_1(x), r_i^{(1)}(x), r_i^{(2)}(x), i = \overline{1, N}, r_j(x), j = \overline{1, N_1}$, – функції, неперервні на множинах $\bar{\Omega}, \Gamma, \bar{\gamma}_i$ і $\bar{\Gamma}_j$ відповідно, які не обертаються там в нуль, а через $M\xi$ позначено математичне сподівання випадкової величини ξ .

Будемо також далі вважати, що в рівняннях (2) – (4) функції $f(x), h(x)$, а також другі моменти $M(\eta_i^{(1)}(x))^2, M(\eta_i^{(2)}(x))^2$ і $M(\eta_j(x))^2$ випадкових полів $\eta_i^{(1)}(x), \eta_i^{(2)}(x)$ і $\eta_j(x)$ в спостереженнях (5), (6) (7) невідомі точно, а відомо лише, що

$$F := (f, h) \in G_0, \quad (14)$$

$$\eta(\cdot) = (\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_N^{(1)}(\cdot), \eta_1^{(2)}(\cdot), \dots, \eta_N^{(2)}(\cdot), \eta_1(\cdot), \dots, \eta_{N_1}(\cdot)) \in G_1.$$

Нехай в області Ω та на її границі Γ задані функції $l_0 \in L^2(\Omega)$ і $l_1 \in L^2(\Gamma)$. Задача полягає в тому, щоб за спостереженнями вигляду (5) – (7) за станом $\varphi(x)$ системи, яка описується крайовою задачею Неймана (2)–(4) при умовах (14), оцінити значення лінійного функціоналу

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} l_0(x) \varphi(x) dx + \int_{\Gamma} l_1(x) \varphi(x) d\Gamma \quad (15)$$

в класі лінійних за спостереженнями оцінок вигляду

$$\widehat{l(\varphi)} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(u_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(\varphi, \eta_i^{(1)}; x) + u_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(\varphi, \eta_i^{(2)}; x) \right) d\gamma_i + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\Gamma_j} u_j(x) y_j(\varphi, \eta_j; x) d\Gamma_j + c, \quad (16)$$

де $u_i^{(1)}, u_i^{(2)} \in L^2(\gamma_i), i = \overline{1, N}, u_j \in L^2(\Gamma_j), j = \overline{1, N_1}, c \in \mathbb{R}^1$.

Означення 1. Оцінку

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(\hat{u}_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(\varphi, \eta; x) + \hat{u}_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(\varphi, \eta; x) \right) d\gamma_i + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\Gamma_j} \hat{u}_j(x) y_j(\varphi, \eta_j; x) d\Gamma_j + \hat{c},$$

в якій функції $\hat{u}_i^{(1)}, \hat{u}_i^{(2)}, \hat{u}_j$ і число $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\inf_{\substack{u_i^{(1)}, u_i^{(2)} \in L^2(\gamma_i), u_j \in L^2(\Gamma_j) \\ i=\overline{1, N}, j=\overline{1, N_1}, c \in \mathbb{R}^1}} \sup_{\bar{F} \in G_0, \bar{\eta} \in G_1} M[l(\bar{\varphi}) - \widehat{l(\bar{\varphi})}]^2 = \sup_{\bar{F} \in G_0, \bar{\eta} \in G_1} M[l(\bar{\varphi}) - \widehat{\widehat{l(\bar{\varphi})}}]^2, \quad (17)$$

де

$$\widehat{l(\tilde{\varphi})} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(u_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}; x) + u_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}; x) \right) d\gamma_i + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\Gamma_j} u_j(x) y_j(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}_j; x) d\Gamma_j + c,$$

а $\tilde{\varphi}(x)$ – деякий розв'язок крайової задачі Неймана

$$\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega, A), \quad (2')$$

$$A\tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (3')$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu_A} = \tilde{h} \quad \text{на } \Gamma, \quad (4')$$

назвемо мінімаксною оцінкою виразу (15). Величину $\sigma(\varphi) := \{\mathbf{M}[l(\varphi) - \widehat{l(\varphi)}]^2\}^{1/2}$ назвемо потибкою мінімаксного оцінювання.

Очевидно, що $\sigma(\varphi) \leq \sigma := \{\sup_{\tilde{f} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbf{M}[l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})}]^2\}^{1/2}$.

Використовуючи методи, розроблені в роботах [1] і [2], встановимо справедливість наступних тверджень.

Теорема 1. Мінімаксна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд

$$\widehat{l(\varphi)} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(\hat{u}_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(\varphi, \eta_i^{(1)}; x) + \hat{u}_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(\varphi, \eta_i^{(2)}; x) \right) d\gamma_i + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\Gamma_j} \hat{u}_j(x) y_j(\varphi, \eta_j; x) d\Gamma_j + \hat{c}, \quad (18)$$

де $\hat{c} = 0$,

$$\hat{u}_i^{(1)}(x) = (r_i^{(1)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(x, \xi) p(\xi) + K_i^{(1,2)}(x, \xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i\xi}, \quad (19)$$

$$\hat{u}_i^{(2)}(x) = (r_i^{(2)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(2,1)}(x, \xi) p(\xi) + K_i^{(2,2)}(x, \xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i\xi}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\hat{u}_j(x) = r_j^2(x) \int_{\Gamma_j} K_j(x, \xi) p(\xi) d\Gamma_{j\xi} \quad j = \overline{1, N_1}, \quad (20)$$

а функція $p(x)$ знаходиться із розв'язку задачі

$$z \in H^1(\Omega', A^*), \quad (21)$$

$$A^* z(x) = l_0(x) \quad \text{в } \Omega', \quad (22)$$

$$\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_{A^*}} = l_1(x) - \int_{\Gamma_j} K_j(\xi, x) \hat{u}_j(\xi) d\Gamma_{j\xi} \quad \text{на } \Gamma_j, \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N_1} \Gamma_j \right), \quad (23)$$

$$[z(x)]_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,2)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(1)}(\xi) + K_i^{(2,2)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi}, \quad (24)$$

$$\left[\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_{A^*}} \right]_{\gamma_i} = - \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(1)}(\xi) + K_i^{(2,1)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi} \quad \text{на } \gamma_i, \quad i = \overline{1, N},$$

$$p \in H^1(\Omega', A), \quad (25)$$

$$Ap(x) = q^{-2}(x)z(x) \quad \text{в } \Omega', \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_A} = q_1^{-2}z \quad \text{на } \Gamma, \quad (27)$$

$$[p]_{\gamma_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (28)$$

де $[z(x)]_{\gamma_i} = z(x)|_{\gamma_{i+}} - z(x)|_{\gamma_{i-}}$, $\left[\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i} = \frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \Big|_{\gamma_{i+}} - \frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \Big|_{\gamma_{i-}}$, $z|_{\gamma_{i+}}$, $z|_{\gamma_{i-}}$ і $\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \Big|_{\gamma_{i+}}$, $\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \Big|_{\gamma_{i-}}$ – сліди функцій $z(x)$ і $\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A}$ на різних сторонах γ_{i+} і γ_{i-} поверхні γ_i , причому, внаслідок теореми про сліди для гладких кусків $(n-1)$ -вимірних поверхонь в $\mathbb{R}^n$, $z|_{\gamma_{i+}} \in H^{1/2}(\gamma_{i+})$, $z|_{\gamma_{i-}} \in H^{1/2}(\gamma_{i-})$ і $[z(x)]_{\gamma_i} \in H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$, $\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \Big|_{\gamma_{i+}} \in \left(H_{00}^{1/2}(\gamma_{i+}) \right)'$, $\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \Big|_{\gamma_{i-}} \in \left(H_{00}^{1/2}(\gamma_{i-}) \right)'$ і $\left[\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i} \in H^{-1/2}(\gamma_i)$, $[p(x)]_{\gamma_i}$ і $\left[\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i}$ мають аналогічний зміст, а рівності (22) – (24) та (26) – (28) слід розуміти як рівності елементів із просторів $L^2(\Omega')$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$, $H^{-1/2}(\gamma_i)$ та $L^2(\Omega')$, $L^2(\Gamma)$, $L^2(\gamma_i)$, $i = \overline{1, N}$, відповідно і в співвідношеннях (19) через $p(y)$ і $\frac{\partial p(y)}{\partial \nu_A}$ позначені спільні значення слідів функції p і граничних значень її конормальних похідних на різних сторонах поверхонь γ_i , $p(x)|_{\gamma_i}$, $\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A} \Big|_{\gamma_i} \in L^2(\gamma_i)$. Задача (21) – (28) однозначно розв'язна.

Потім мінімаксного оцінювання $\sigma(\varphi)$ значення функціоналу $l(\varphi)$ задовольняє нерівність

$$\sigma(\varphi) \leq [l(p)]^{1/2} = \left[\int_{\Omega'} l_0(x)p(x) dx + \int_{\Gamma} l_0(x)p(x) d\Gamma \right]^{1/2}. \quad (29)$$

Зауваження. Якщо в рівняннях (1) і (24) замінити функції $\hat{u}_j(x)$, $j = \overline{1, N_1}$, і $\hat{u}_i^{(1)}(x)$, $\hat{u}_i^{(2)}(x)$, $i = \overline{1, N}$, на їх вирази в правих частинах (20) і (19), то ці функції можна виключити з системи рівнянь (21) – (28).

Альтернативне представлення для мінімаксної оцінки через розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь спеціального вигляду знайдено в поданій нижче теоремі. Цей розв'язок не залежить від конкретного вигляду функціоналу (15).

Теорема 2. Мінімаксна оцінка виразу (15) має вигляд

$$\widehat{l(\varphi)} = l(\hat{\varphi}) = \int_{\Omega'} l_0(x) \hat{\varphi}(x) dx + \int_{\Gamma} l_1(x) \hat{\varphi}(x) d\Gamma, \quad (30)$$

де функція $\hat{\varphi}(x)$ визначається із розв'язку задачі (31)–(38):

$$\hat{p} \in H^1(\Omega', A^*), \quad (31)$$

$$A^* \hat{p}(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega', \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}(x)}{\partial \nu_{A^*}} &= \int_{\Gamma_j} K_j(\xi, x) (r_j^2(\xi) y_j(\xi) - \hat{v}_j(\xi)) d\Gamma_{j\xi} \quad \text{на} \quad \Gamma_j, \quad j = \overline{1, N_1}, \\ \frac{\partial \hat{p}(x)}{\partial \nu_{A^*}} &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N_1} \Gamma_j \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} [\hat{p}(x)]_{\gamma_i} &= - \int_{\gamma_i} K_i^{(1,2)}(\xi, x) \left[(r_i^{(1)}(\xi))^2 y_i^{(1)}(\xi) - \hat{v}_i^{(1)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi} - \\ &\quad - \int_{\gamma_i} K_i^{(2,2)}(\xi, x) \left[(r_i^{(2)}(\xi))^2 y_i^{(2)}(\xi) - \hat{v}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi}, \\ \left[\frac{\partial \hat{p}(x)}{\partial \nu_{A^*}} \right]_{\gamma_i} &= \int_{\gamma_i} K_i^{(1,1)}(\xi, x) \left[(r_i^{(1)}(\xi))^2 y_i^{(1)}(\xi) - \hat{v}_i^{(1)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi} + \\ &\quad + \int_{\gamma_i} K_i^{(2,1)}(\xi, x) \left[(r_i^{(2)}(\xi))^2 y_i^{(2)}(\xi) - \hat{v}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi} \\ &\quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\hat{\varphi} \in H^1(\Omega', A), \quad (35)$$

$$A \hat{\varphi}(x) = q^{-2}(x) \hat{p}(x) \quad \text{в} \quad \Omega', \quad (36)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu_A} = q_1^{-2} \hat{p} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (37)$$

$$[\hat{\varphi}]_{\gamma_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (38)$$

де

$$\hat{v}_i^{(1)}(\xi) = (r_i^{(1)}(\xi))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\eta) + K_i^{(1,2)}(\xi, \eta) \frac{\partial \hat{\varphi}(\eta)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i\eta},$$

$$\hat{v}_i^{(2)}(\xi) = (r_i^{(2)}(\xi))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(2,1)}(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\eta) + K_i^{(2,2)}(\xi, \eta) \frac{\partial \hat{\varphi}(\eta)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i\eta},$$

$$\hat{v}_j(\xi) = r_j^2(\xi) \int_{\Gamma_j} K_j(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\eta) d\Gamma_{j\eta},$$

а праві частини в (2) і (34) розглядаються для кожних реалізацій випадкових полів $y_j(\xi)$ і $y_i^{(1)}(\xi)$, $y_i^{(2)}(\xi)$, які належать з ймовірністю 1 просторам $L^2(\Gamma_j)$, $i = \overline{1, N_1}$, і $L^2(\gamma_i)$, $i = \overline{1, N}$, відповідно.

Задача (31) – (38) має єдиний розв'язок.

На заключення відзначимо, що аналогічним чином можуть бути отримані мінімаксні оцінки станів систем, що описуються крайовими задачами Діріхле або змішаними крайовими задачами для еліптичних рівнянь у випадку спостережень вигляду (5) – (7).

Результати, отримані в роботі, можуть знайти використання при розробці систем автоматизованої обробки результатів спостережень стаціонарних процесів фільтрації, теплопровідності, при розв'язанні задач локалізації джерел, що створюють дані фізичні поля, а також для розв'язання ряду обернених задач.

Література

1. Ковалюк А., Наконечный А.Г., Подлипенко Ю.К. Минимаксное оценивание решений краевых задач Неймана для эллиптических уравнений в условиях неопределенности. // Проблемы управления и информатики. №6, 2001, с.77-95.

2. Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В. Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей. // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – №2 с. 104 – 128.

3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

Надійшла до редакції 02.11.2004

УДК 519.168

Олена В. Порхун

Методи та алгоритми для розв'язання задач класифікації

Робота присвячена розгляду задач класифікації та методам її розв'язання. Розглядаються існуючі методи визначення числа класів. Запропоновано евристичний алгоритм, який ґрунтується на використанні нейронної мережі Кохонена та методі ідеальної точки.

Ключові слова: нейронна мережа Кохонена, оптимальний граф, ідеальна точка.

Helen V. Porkhun

Methods and algorithms for solving problems of classification

The article deals with consideration of classification problem and methods of its solving. The existing methods for defining number of classes are considered. There is offered heuristic algorithm is based on use Kohonen's neural network and method of ideal point.

Key Words: Kohonen's neural network, optimal graph, ideal point.

Розглянемо множину з m об'єктів $\{x\}$, кожний з яких є n -вимірним вектором з дійсними координатами (у випадку комплексних координат особливих труднощів з даним методом також не виникає, але формули стають більш складними, а комплексні значення ознак трапляються рідко).

Задамо простір ядер класів E , і міру близькості $\text{dist}(a, x)$, де a – точка з простору ядер, а x – точка з простору об'єктів.

Задача класифікації полягає в наступному: для заданого числа класів k необхідно підібрати k ядер таким чином, щоб сумарна міра близькості була мінімальною. Сумарна міра близькості записується в наступному вигляді:

$$H = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in K_i} \text{dist}(a^i, x) \quad (1)$$

де K_i – множина об'єктів i -го класу.

В якості інструменту для розв'язання даної задачі пропонується використати одну із моделей штучних нейронних мереж, а саме нейронну мережу Кохонена.

Структура и принцип роботи мережі Кохонена

Мережа Кохонена для класифікації на m класів складається з m нейронів (ядер), кожний з яких обчислює близькість об'єкта до свого класу. Усі нейрони працюють паралельно. Об'єкт належить до того класу, нейрон якого видав мінімальний сигнал.

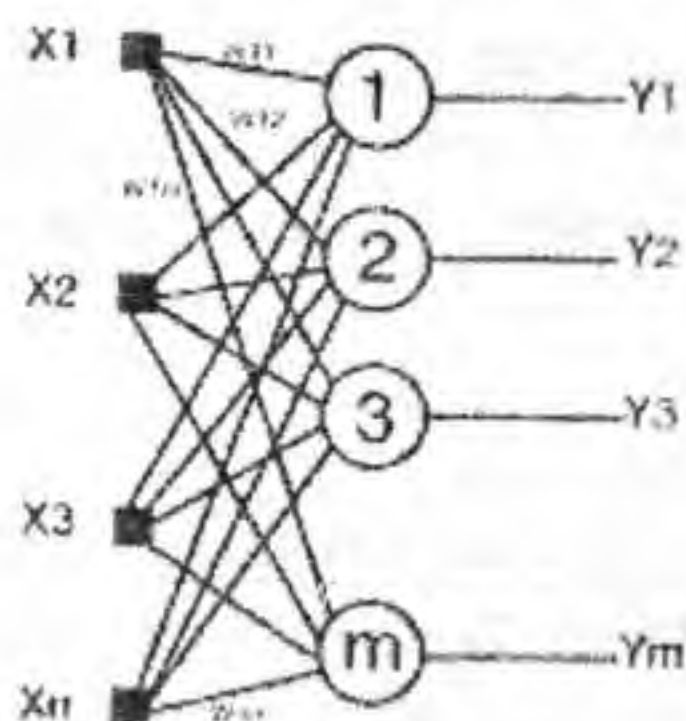


Рис.1. Структура мережі Кохонена

При навчанні мережі Кохонена вважається, що цільовий функціонал не заданий. Однак алгоритм навчання працює так, що в ході навчання мінімізується функціонал (1), хоча і немонотонно.

В мережі Кохонена в якості нейронів виступають формальні (класичні) нейрони, які являють собою лінійні зважені суматори. Їх вихід формується за формулою:

$$Y = F\left(\sum_i w_i * x_i\right) \quad (2),$$

де:

x_i — значення на i -му вході (i -та компонента вхідного вектора);

w_i — ваговий коефіцієнт i -го входу;

Y — вихід нейрону;

F — деяка функція, як правило нелінійна (активаційна функція).

Задача мережі зводиться до класифікації вхідних сигналів, які належать n -вимірному гіперпростору на деяке число класів. В класичній мережі Кохонена активаційна функція кожного нейрону — лінійна:

$$Y_k = D * S_k \quad (3),$$

де:

Y_k — вихід k -го нейрону;

D — коефіцієнт пропорційності;

S_k — зважена сума входів k -го нейрону.

Однак в задачах класифікації часто використовують SOFTMAX-функцію, яка має наступний вигляд:

$$Y_k = \frac{e^{S_k}}{\sum_i e^{S_i}} \quad (4)$$

При застосуванні цієї функції сумування проводиться по всьому шару нейронів. Строго кажучи, це порушує принцип локальності — один нейрон використовує значення інших нейронів у шарі. Однак її застосування дає деякі

переваги перед використанням лінійної функції — сума виходів шару завжди дорівнює 1, що дозволяє трактувати виходи нейронів як ймовірність належності вхідного вектора до того чи іншого класу. Ця корисна властивість забезпечила високу популярність цієї функції в задачах класифікації.

Процес навчання мережі Кохонена

Запропонований фінським вченим Кохоненом метод навчання мережі полягає в наступному. Задамо деякий початковий набір параметрів нейронів. Далі пред'являємо мережі один об'єкт x . Знаходимо нейрон, що видав максимальний сигнал. Тоді вагові коефіцієнти нейрона - "переможця" коректуються за наступним правилом:

$$w_m = w_m + \alpha * (x_m - w_m) \quad (5)$$

де:

w_m — ваговий коефіцієнт m -го входу;

x_m — значення на вході m ;

α — швидкість навчання, частіше всього мала додатня числова константа.

Якщо після чергового циклу пред'явлення всіх об'єктів виявиться, що параметри всіх нейронів змінилися на величину меншу наперед заданої точності ϵ , то навчання можна вважати завершеним.

Ще одним критерієм зупинки процесу навчання є наступний: навчання слід припинити, якщо кількість підряд вдалих класифікацій для кожного нейрону буде дорівнювати деякій величині. Ця величина залежить від задачі і звичайно лежить на відрізку [25,60].

Визначення числа класів

Простий перебір

Ідея методу полягає в тому, щоб почавши з малого числа класів поступово збільшувати його доти, поки не буде отримана «хороша» класифікація. Поняття «хороша» класифікація може бути формалізоване по різному. При простому підборі класів як правило оперують таким поняттям, як часто відтворюваний клас. Проводиться досить велика серія класифікацій з різним початковим набором класів. Визначаються класи, що виникають у різних класифікаціях. Обчислюються частоти появи таких класів. Критерієм одержання «реального» числа класів може служити зниження числа часто повторюваних класів. Тобто при числі класів k число часто повторюваних класів помітно менше ніж при числі класів $k-1$ і $k+1$. Починати слід з двох класів.

Методи «віджиму»

Запропонований метод перебору кількості класів добре працює при невеликому «реальному» числі класів. При досить великій потужності множини

точок, яку необхідно розбити на класи, така процедура перебору стає занадто повільною. Альтернативою методу перебору є метод "віджиму". Ідея цього методу полягає в тому, що на основі критерію якості класу приймається рішення про видалення цього класу, розбивці класу на два або про злиття цього класу з іншим. Якщо клас «хороший», то він залишається без змін. Існує багато різних критеріїв якості класу. Розглянемо деякі з них.

1. Кількісний критерій. Клас, у якому менше N точок вважається порожнім і підлягає видаленню. Поріг числа точок вибирається із змісту задачі і виду міри близькості.

2. Критерій рівномірності. Середня міра близькості точок класу від ядра повинна бути не менше половини або третини від максимуму міри близькості точок від ядра (радіуса класу). Якщо це не так, то клас розбивається на два (породжується ще одне ядро поблизу первинного).

3. Критерій сферичної роздільності. Два класи вважаються сферично роздільними, якщо сума радіусів двох класів менше відстані між ядрами цих класів. Якщо класи сферично нероздільні, то ці класи зливаються в один.

Третій критерій застосовується тільки в тих випадках, коли ядра класів є точками того ж простору, що і ті точки, що складають класи.

Початкове число класів можна задавати по різному. Наприклад, почати з двох класів і дозволити мережі «самій» збільшувати число класів. Або почати з великого числа класів і дозволити мережі відкинути «зайві» класи. У першому випадку система може зупинитися у випадку наявності ієрархічної класифікації. Починаючи з великого числа класів, ми ризикуємо не дізнатися про існування ієрархії класів.

Іншим критерієм може служити щільність точок у класі.

Визначимо об'єм класу як об'єм кулі з центром у ядрі класу і радіусом рівним радіусу класу. Для простоти можна вважати об'єм класу рівним об'єму куба із стороною рівною радіусу класу. Щільністю класу будемо вважати відношення числа точок у класі до об'єму класу. Відзначимо, що цей критерій застосуємо для будь-яких мір близькості, а не тільки для тих випадків, коли ядра і точки належать одному простору.

Метод застосування цього критерію наступний: розбиваємо перший клас на два і запускаємо процедуру налаштування мережі (метод динамічних ядер або навчання мережі Кохонена). Якщо щільності обох класів, отриманих розбивкою одного класу, не менше щільності вихідного класу, то вважаємо розбивку вірною. У протилежному випадку відновлюємо класи, що передували розбивці, і переходимо до наступного класу. Якщо після чергового перегляду всіх класів не вдалося одержати жодної вірної розбивки, то вважаємо отримане число класів відповідним «реальному». Цю процедуру варто запускати з малого числа класів, наприклад, з двох.

Евристичний алгоритм визначення числа класів

Алгоритм ґрунтується на припущенні про те, що вірне розбиття на класи – це розбиття з найбільшою частотою відповідей нейронної мережі при розв'язанні задачі класифікації.

Перевагою даного алгоритму є наочне представлення всіх розв'язків задачі класифікації із вказанням їх оцінок, на основі яких був вибраний даний розв'язок.

В результаті роботи нейронної мережі можна отримати розбиття не на m класів, яке було задано, а на l , де $l < m$, наприклад, $l = m - 2$. Звідси автоматично відпадає потреба в класифікації на $m - l$ класів. Враховуючи цю властивість нейронної мережі, пропонується виконувати процес класифікації починаючи з максимального числа класів і далі опускатися до найменшого.

Нехай для n об'єктів була проведена серія розбиттів на m класів, $m \in \overline{n, 2}$. Для кожного розбиття на m класів було здійснено k спроб і отримано k розв'язків.

Для кожного m побудуємо матрицю A_m розмірності $n \times \sum_{l=1}^k |Q_l|$, де рядкам матриці відповідає множина об'єктів P , які класифікуються, а стовпчикам – класи розбиттів Q_l , $l = \overline{1, k}$. Елемент матриці обчислюється наступним чином:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, p_i \in C_l^j \\ -1, p_i \notin C_l^j \end{cases} \quad (6)$$

де $i = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, k}$, $C_l^j \subset Q_l$, $Q_l \subset \bigcup_{l=1}^k Q_l$.

Далі кожній матриці A_m поставимо у відповідність повний граф G_m . Для кожного ребра e графа G_m вкажемо його оцінку $c(e)$, як силу зв'язку i -го вузла з j -м. Ця оцінка обчислюється наступним чином:

$$c(e) = \left(\sum_{q \in Q_l, l=1, k} w_q \right) / k \quad (7)$$

де $w_q = \begin{cases} 1, \exists C_l^j \subset Q_l : p_i \in C_l^j \ \& \ p_j \in C_l^j, l = \overline{1, m} \\ -1, \text{інакше} \end{cases}$

Таким чином ми отримали граф, в якому оцінки ребер відповідають силі зв'язків відповідних об'єктів класифікації.

Наступним кроком є вибір оптимального графа G .

Оптимальним графом будемо вважати граф, в якому сумарна оцінка ребер (сумарна сила зв'язків) – максимальна. Цей граф буде відповідати розбиттю з найбільшою частотою відповідей нейронної мережі.

Останнім кроком алгоритму є виділення класів вузлів (елементів) в оптимальному графі. Розв'язок пропонується шукати у відповідності з

критерієм: якщо сила зв'язку між i -м та j -м елементом більше 0, то їх слід відносити до одного класу, інакше – вони належать різним класам. Починаючи з вузлів, ребра між якими мають найбільшу оцінку, шляхом перебору всієї множини вузлів, ми отримаємо необхідні класи.

Зауваження. В результаті застосування цього алгоритму можна отримати розбиття на класи, яке не відповідає розбиттям, отриманих нейронною мережею. Пропонується розглядати цей розв'язок, як комбінацію розв'язків, отриманих після роботи даного алгоритму та нейронної мережі.

Недоліком даного алгоритму є те, що він намагається розбити вибірку на якнайменше менше число класів. Тому цей алгоритм пропонується застосовувати в комбінації з іншим, який буде зважувати цей недолік.

В якості такого алгоритму пропонується застосувати критерій, який є оптимізацією цільової функції:

$$F = -\sum_{i \in M} f_i + g \rightarrow \max \quad (8),$$

де M – кількість класів, отриманих при розбитті,

$$f_i = \begin{cases} 0, m = 0 \\ \frac{d_0 + \dots + d_m}{m}, m \neq 0 \end{cases}, i = \overline{1, M} \quad (9),$$

де $d_i = \text{dist}(p_i, p_c)$ – відстань від точки класу p_i до ядра класу p_c ;

$g = \text{Argmax}(D)$, $D = \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i, j \in M}} \text{dist}(p_{ci}, p_{cj})$ – множина відстаней між ядрами класів.

На відміну від попереднього алгоритму, даний критерій дає змогу знаходити розв'язки серед розбиттів з більшою потужністю, тобто перевага надається розбиттям з більшим числом класів.

Для зважування результатів наведених алгоритмів пропонується скористатися *методом ідеальної точки*.

Перш ніж перейти до цього методу введемо до розгляду деякі означення та поняття.

Розглянемо нашу задачу у наступній постановці:

$$y_i = f_i(x) \rightarrow \max, i = \overline{1, m}, x \in X \subseteq E^n,$$

де X – множина альтернатив (множина допустимих розв'язків), $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ – цільові функції. Вектор $y(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ називається *оцінкою альтернативи x* . Множину оцінок, яка відповідає всім альтернативам позначимо $Y = \{y | y = y(x), x \in X\}$.

Простір E^n підмножиною якого є множина X називається простором альтернатив, а простір $E^m, Y \subseteq E^m$ - називається простором оцінок (простором значень критеріїв).

Метод ідеальної точки

Ідеальною називається точка $A = (a_1, \dots, a_m)$, яка визначена в просторі оцінок, кожна координата якої дорівнює найкращому значенню відповідного критерія, тобто $a_i = \max f_i(x), i = \overline{1, m}$.

Правило вибору в цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка буде мати оцінку найближчу до ідеальної точки в деякій заданій метриці.

Для цього визначимо поняття відстані. Відстань від оцінки до ідеальної точки будемо обчислювати наступним чином:

$$\rho_s(y, a) = \left(\sum_{i \in P} |y_i - a_i|^s \right)^{1/s}, \text{ де } s = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Тоді правило вибору буде мати вигляд:

$$I(Y) = \text{Arg min } \rho_s(y, a) \quad (11)$$

Отже знаходження оптимального розбиття на класи пропонується здійснювати за наступним алгоритмом:

1. Для кожного розбиття, отриманого нейронною мережею, будується граф та знаходиться розв'язок за евристичним алгоритмом.
2. До кожного отриманого розв'язку застосовується критерій (8).
3. Знаходиться ідеальна точка, координати якої дорівнюють відповідно сумарній силі зв'язків оптимального графа та оптимальній оцінці критерія (8).
4. Для кожної точки з простору оцінок обчислюється відстань до ідеальної точки згідно (10).
5. За правилом вибору (11) знаходиться оптимальне розбиття.

Приклад застосування евристичного алгоритму для визначення числа класів

Для ілюстрації роботи евристичного алгоритму визначення числа класів була розглянута задача класифікації художніх текстів за їх авторами. Для прикладу було вибрано чотири художніх твори: два твори Горького ("Макар Чудра", "Страсти-мордасти") та два – Набокова ("Красавица", "Встреча"). Ці тексти кодується у вектори частот; одержали 4 частотні вектори розмірності 2767. Після роботи нейронної мережі Кохонена було одержано результати класифікації відповідно на 4, 3 та 2 класи. Згідно евристичному алгоритму визначення числа класів для кожного варіанту класифікації будується граф, в якому оцінки ребер відповідають силі зв'язків відповідних об'єктів

класифікації. На рис. 2а, 2б, 2в зображено графи, побудовані згідно результатів класифікації на 4, 3 та 2 класи відповідно.

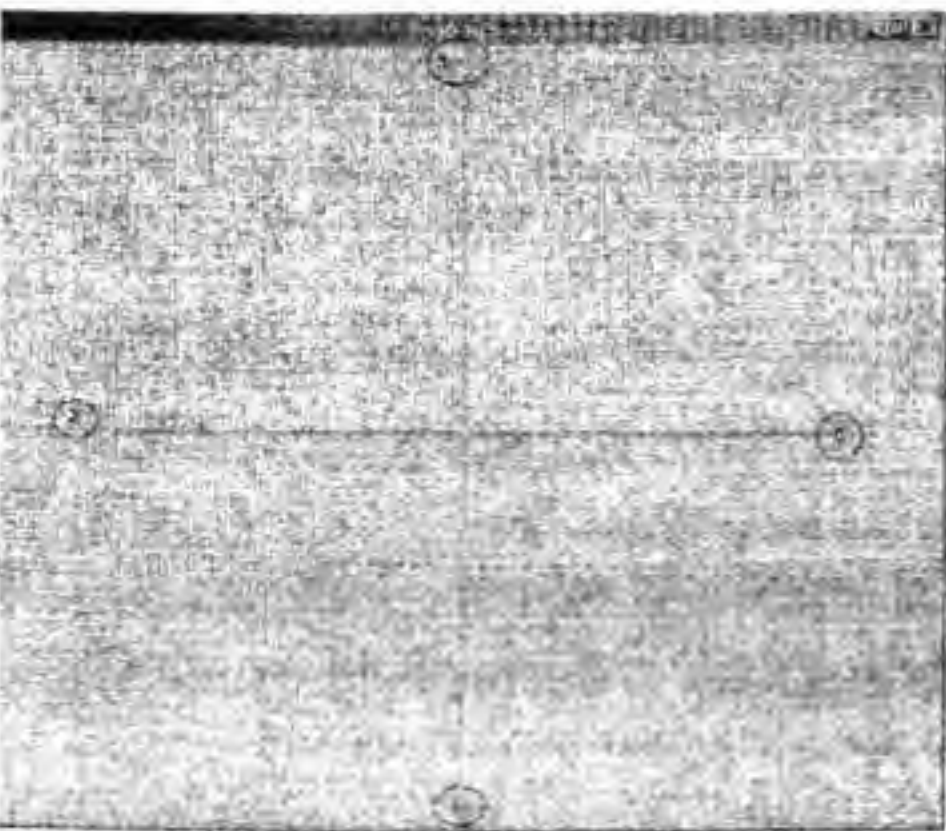


Рис. 2а. Класифікація на 4 класи

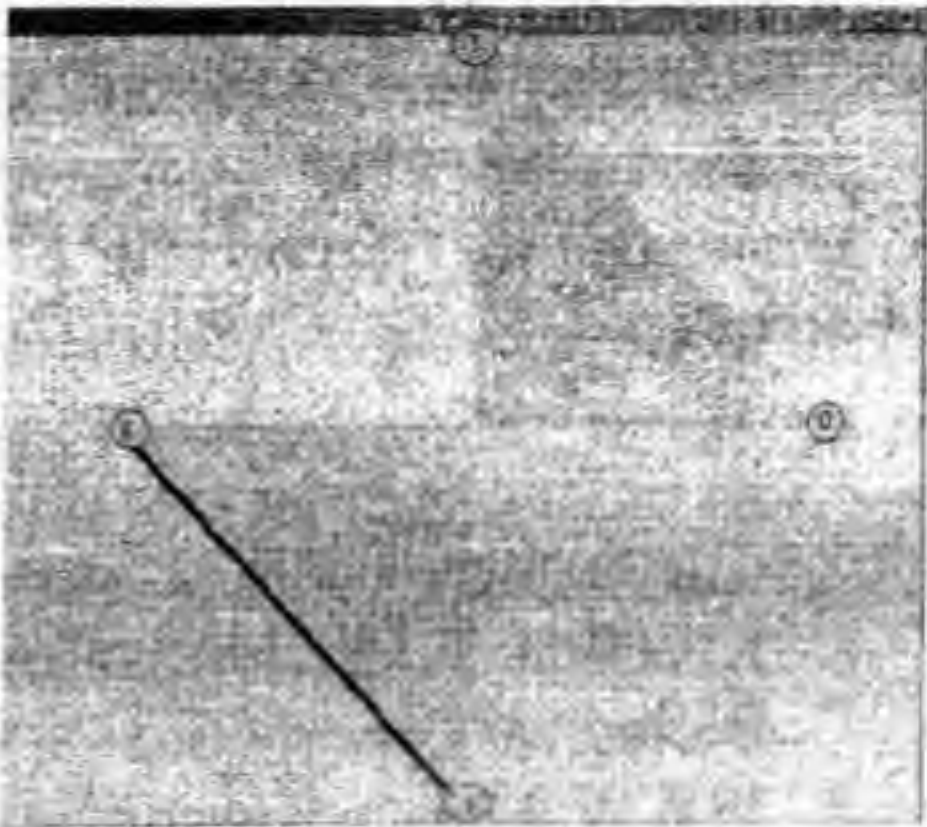


Рис. 2б. Класифікація на 3 класи

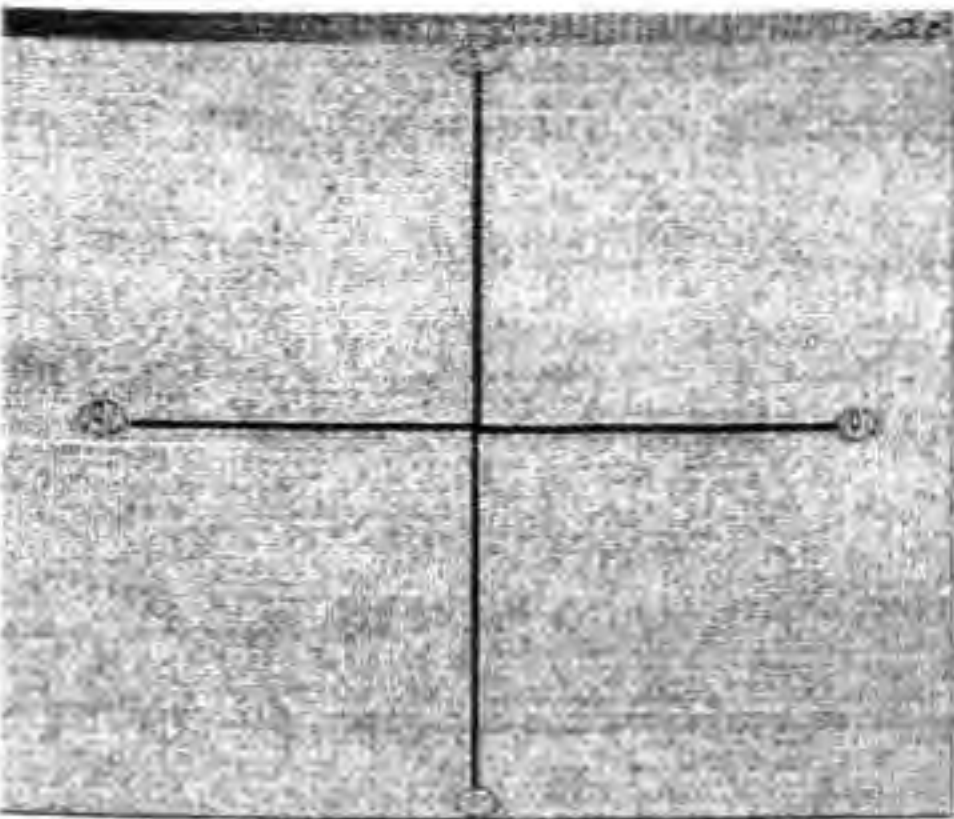


Рис. 2в. Класифікація на 2 класи

Вершини графа відповідають порядковим номерам вибраних текстів (0 – “Встреча” (Набоков), 1 – “Страсти-мордасти” (Горький), 2 – “Красавица” (Набоков), 3 – “Макар Чудра” (Горький)).

Для кожного графу було обчислено сумарні оцінки ребер, які становлять для графа (2а) – 5.6, для (2б) – 6, для (2в) – 6 відповідно.

Отже, в цьому випадку виявилось, що зробити однозначний вибір оптимального графа неможливо. Тому до отриманих розбиттів було застосовано критерій, який визначається оптимізацією цільової функції (10).

Отримано наступні результати:

Розбиття на:	<i>F</i>
4 класи	1147.60505443891
3 класи	3398.98487723953
2 класи	5365.51120454729

Ідеальна точка, координати якої визначаються як найкращі значення критеріїв оптимального графа та оптимізації цільової функції (10), дорівнює:
 $A = (6, 5365.51120454729)$.

Згідно методу ідеальної точки найменшу відстань від ідеальної точки має розбиття на 2 класи (дане розбиття і є ідеальною точкою), отже воно є оптимальним розбиттям в сенсі алгоритму евристичного визначення числа класів.

Література

1. Kohonen T.. Self-organized formation of topologically correct feature maps // Biological Cybernetics 43, 1982, p. 59-69.
2. WWW: <http://www.softcraft.ru>
3. Горбань А. Н.. Обучение нейронных сетей // М.: СП Параграф, 1990, С. 90-95.
4. Горбань А. Н. Алгоритмы и программы быстрого обучения нейронных сетей. Эволюционное моделирование и кинетика // Новосибирск: Наука, 1992. С.36-39.
5. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации // Проблемы кибернетики.- М.: Наука, 1978, вып. 33.- С. 5-68.

Надійшла до редакції 25.01.2005

УДК 519.8

Юрій К. Подлипенко,*
Алекс Ковалюк, Олег Л. Левосишч
Оптимальне оцінювання розв'язків еліптичних рівнянь в умовах невизначеності

Доведені теореми про загальний вигляд мінімаксних оцінок значень функціоналів від розв'язків лінійних еліптичних рівнянь другого порядку.
Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, функціонали від розв'язків.

Yuri K. Podlipenko,*
Alex Kovalyuk, Oleg L. Levoshych
Optimal estimation of solutions of elliptic equations under uncertainty conditions

The theorems on a general form of minimax estimates of values of functionals from solutions of the linear second order elliptic equations are proved.
Key words: minimax estimates, observations, functionals from solutions.

*E-mail: yourip@mail.ru

В роботі одержані мінімаксні оцінки розв'язків крайової задачі Неймана для лінійних еліптичних рівнянь 2-го порядку за неповними даними. При цьому використовується клас спостережень, розподілених на системі поверхонь, розташованих в області, де задана крайова задача, а також на її границі, які можуть залежати як від самих розв'язків так і від їх конормальних похідних.

Встановлено, що мінімаксні оцінки значень функціоналів від розв'язків, що спостерігаються, та від правих частин еліптичних рівнянь виражаються через розв'язки спеціальних інтегро-диференціальних рівнянь з крайовими умовами Неймана на границі області та з умовами спряження на поверхнях, де здійснюються спостереження. Сформульовані нижче твердження узагальнюють результати, отримані в [1].

Введемо позначення: $x = (x_1, \dots, x_n)$ – просторова змінна, що належить обмеженій відкритій множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з ліпшицевою границею Γ ; $dx = dx_1 \cdots dx_n$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$; $L^2(\Omega)$ – простір функцій, сумовних з квадратом в області Ω ; для цілого додатнього $m \geq 1$ позначимо через $H^m(\Omega)$ – простір Соболева порядку m в області Ω .

Нехай Λ замкнена або незамкнена $(n-1)$ -вимірна ліпшицева поверхня в $\mathbb{R}^n$. Тоді через $d\Lambda$ позначимо елемент міри на поверхні Λ . Через $L^2(\Lambda)$ позначимо простір функцій, сумовних з квадратом на поверхні Λ .

Введемо тепер простір Соболева $H^{1/2}(\Gamma)$ як простір слідів на Γ функцій $u(x)$, що пробігають $H^1(\Omega)$. Простір, дуальний до $H^{1/2}(\Gamma)$, позначимо через $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Нехай γ – незамкнена $(n-1)$ -вимірна гладка поверхня класу C^∞ в $\mathbb{R}^n$,

$\partial\gamma$ – її границя, точки якої не належать γ , $\partial\gamma \cap \gamma = \emptyset$, а $\hat{\gamma}$ – замкнена гладка поверхня $((n-1)$ -вимірний многовид без краю) класу C^∞ , що містить γ , $\gamma \subset \hat{\gamma}$, і розбиває простір $\mathbb{R}^n$ на дві області: обмежену і необмежену. Покладемо $H^{1/2}(\gamma) := \{v|_\gamma : v \in H^{1/2}(\hat{\gamma})\}$. Через $H^{-1/2}(\gamma)$ позначимо простір, спряжений до $H^{1/2}(\gamma)$. Відзначимо, що елементи $H^{-1/2}(\gamma)$, продовжені нулем на $\hat{\gamma} \setminus \gamma$, є елементами $H^{-1/2}(\hat{\gamma})$.

Позначимо через $\rho(x)$ регулярну на поверхні γ функцію, еквівалентну відстані від точки x до границі $\partial\gamma$ поверхні γ в околі $\partial\gamma$. Визначимо простір

$$H_{00}^{1/2}(\gamma) := \{u \in H^{1/2}(\gamma), \rho^{-1/2}u \in L^2(\gamma)\} = \{u \in H^{1/2}(\gamma), \tilde{u} \in H^{1/2}(\hat{\gamma})\}$$

з нормою $\|u\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} = \left(\|u\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 + \|\rho^{-1/2}u\|_{L^2(\gamma)}^2 \right)^{1/2}$, де через $\tilde{u}$ позначено продовження функції u нулем зовні γ .

Через $(H_{00}^{1/2}(\gamma))'$ позначимо простір, спряжений до $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. При цьому виявляється, що

$$(H_{00}^{1/2}(\gamma))' = \{f = f_0 + f_1, f_0 \in H^{-1/2}(\gamma), \rho^{1/2}f_1 \in L^2(\gamma)\}.$$

Через $\mathcal{L}(X; Y)$ будемо позначати простір лінійних неперервних операторів, які відображають гільбертів простір X у гільбертів простір Y .

Нехай $a_{ij}(x)$ і $a_0(x)$ – функції із $C^1(\bar{\Omega})$, A – диференціальний оператор, заданий в області Ω , вигляду

$$A\varphi(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial/\partial x_i (a_{ij}(x) \partial\varphi(x)/\partial x_j) + a_0(x)\varphi(x), \quad (1)$$

коефіцієнти $a_{ij}(x)$ і $a_0(x)$ якого задовольняють умовам $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \forall \xi_i \in \mathbb{R}^1$ і $a_0(x) \geq \alpha_1$ майже скрізь в Ω , де $\alpha, \alpha_1 > 0$, а частинні похідні функції $\varphi(x)$ в (1) слід розуміти в смислі розподілів в Ω .

Поставимо у відповідність оператору A простір $H^1(\Omega, A)$, визначений виразом $H^1(\Omega, A) = \{u \in H^1(\Omega) : Au \in L^2(\Omega)\}$ з нормою $\|u\|_{H^1(\Omega, A)} = \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|Au\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$.

Нехай стан $\varphi(x)$ системи визначається як узагальнений розв'язок задачі Неймана

$$\varphi \in H^1(\Omega, A), \quad (2)$$

$$A\varphi(x) = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

процесу дифузійного розчинення пласта солі з врахуванням осмотичних явищ, та нелінійності процесу на основі [1-4] прийме наступний вигляд:

$$\frac{\partial \left(D(x, c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} - V(x, c)_{осм} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial (\sigma c)}{\partial t}, \quad x \in (0; l_1) \quad t > 0, \quad (1)$$

$$V(x, c)_{осм} = \pm v(x, c) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (2)$$

$$c(x, 0) = C_0(x), \quad x \in (0; l_0), \quad (3)$$

$$c(0, t) = C_1(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$l_2 c(l_1(t), t) = c + \frac{\delta}{D} \frac{\partial c(l_1(t), t)}{\partial x} = C_m, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\rho \frac{dl}{dt} = D(l_1(t), c) \frac{\partial (c(l_1(t), t))}{\partial x}, \quad t > 0. \quad (6)$$

Тут: $c(x, t)$ - концентрація солі в ґрунті у точці з координатою x в момент часу t ; $D(x, c)$ - коефіцієнт молекулярної дифузії; $V(x, c)_{осм}$ - швидкість осмотичної фільтрації; $v(x, c)$ - коефіцієнт осмосу, де знак „+” відповідає нормальному осмосу, а знак „-” - аномальному; σ - пористість ґрунту; $l(t)$ - глибина зони повного розчинення пласта; δ - товщина рухомого дифузійного примежевого шару в околі фронту розчинення $x = l_1(t)$; C_m - концентрація граничного насичення; ρ - густина сольового пласта; $l_1 = l_0 + l(t)$ - товщина ґрунту разом із товщиною розчиненої зони.

Диференціальне рівняння (1) описує процес розподілу концентрації солі в ґрунті та зоні розчинення з часом за рахунок дифузійного розчинення пласта по закону Фіка-Фур'є внаслідок існування градієнта концентрації з врахуванням осмотичних явищ та нелінійності процесу розчинення. Рівняння (2) задає швидкість осмотичної фільтрації [5]. Умова (3) задає розподіл концентрації в початковий момент часу $t = 0$, а умова (4) - розподіл концентрації на верхній межі ґрунту. Рівняння (5), (6) задають відповідно балансову [3] та кінематичну умову [1] на рухомій межі фронту розчинення пласта $x = l_1(t)$.

Особливістю крайової задачі (1)-(6), що утруднює знаходження її розв'язку, є нелінійність (як в рівнянні (1), так і в крайових умовах (5), (6)), наявність конвективного члену в рівнянні (1), наявність рухомої межі фронту розчинення та наявність рухомого дифузійного примежевого шару, товщиною δ .

Можна показати на основі робіт [6-8], що при певних вимогах на коефіцієнти рівняння (1) та крайові умови (4)-(5) задача (1)-(6) коректно поставлена.

4. Різницева схема задачі. Поставимо крайовій задачі типу Стефана (1)-(6) її дискретний аналог. В зв'язку з цим, побудуємо монотонну різницеву схему даної задачі з порядком апроксимації $O(h^2 + \tau)$. Вона матиме наступний вигляд:

$$\mu_{i2}^k d_{i+1}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2} +$$

$$+ r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h} = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \quad (7)$$

$$C_i^0 = C_0(ih), \quad i = \overline{0, n}, \quad (8)$$

$$C_0^{k+1} = C_1^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, K_1 - 1, \quad (9)$$

$$\delta \frac{C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}}{h} + C_n^{k+1} = C_m, \quad (\text{при } \delta = 0: C_n^{k+1} = C_m), \quad (10)$$

$$\text{де } d_i^k = \frac{D(x_i, C_i^k) + D(x_{i-1}, C_{i-1}^k)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \frac{D(x_{i+1}, C_i^k) + D(x_i, C_{i-1}^k)}{2},$$

$$r_i = r_{i+} + r_{i-} = \pm v(x_i, C_i^k),$$

$$r_{i+}^k = 0,5(r(x_i, C_i^k) + |r(x_i, C_i^k)|) \geq 0, \quad r_{i-}^k = 0,5(r(x_i, C_i^k) - |r(x_i, C_i^k)|) \leq 0,$$

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}}, \quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_{i+1}^k}}$$

Тут: h і τ - кроки відповідно по осях Ox і Ot .

Рівняння руху межі (6) апроксимуємо наступним чином:

$$\rho \frac{l_i^{k+1} - l_i^k}{\tau} = D(l_i, C_n^{k+1}) \frac{C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}}{h}. \quad (11)$$

Звідки маємо

$$l_i^{k+1} = l_i^k + \frac{\tau D(l_i, C_n^{k+1})}{\rho h} (C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}). \quad (12)$$

Неважко показати згідно [9], що дана різницева схема стійка з порядком апроксимації $O(h^2 + \tau)$.

5. Обчислювальний алгоритм. Розв'язок побудованої різницевої схеми (7)-(11) отримаємо методом прогонки. В зв'язку з цим, запишемо (7)-(10) в прогоночному вигляді

$$a_i^k C_{i-1}^{k+1} - c_i^k C_i^{k+1} + b_i^k C_{i+1}^{k+1} = -f_i^k, \quad (13)$$

$$C_n^{k+1} = \chi_1 C_1^{k+1} + \mu_1, \quad C_n^{k+1} = \chi_2 C_{n-1}^{k+1} + \mu_2, \quad (14)$$

$$\text{де } a_i^k = \frac{1}{h} \left(\frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h} - r_{i-}^k \right), \quad b_i^k = \frac{1}{h} \left(\frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h} + r_{i+}^k \right), \quad (15)$$

$$c_i^k = \frac{1}{h^2} (d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k) + \frac{|r_i^k|}{h} + \frac{\sigma}{\tau}, \quad f_i^k = \frac{\sigma}{\tau} C_i^k.$$

$$\chi_1 = 0, \quad \mu_1 = C_1(k\tau), \quad \chi_2 = \frac{\delta}{\delta + h}, \quad \mu_2 = \frac{h}{\delta + h} C_m \quad (16)$$

Неважко переконатись, що умови стійкості методу прогонки виконані, а саме:

$$a_i^k \neq 0, \quad b_i^k \neq 0, \quad |c_i^k| > |a_i^k| + |b_i^k|, \quad \forall i = \overline{1, n-1}, \quad \forall k = \overline{1, K}.$$

$$|\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| \leq 1.$$

Отже, для знаходження числового розв'язку різницевої схеми (7)-(12), на кожному кроці по часу можна застосовувати метод прогонки з наступним перерахунком товщини зони розчинення $l(k\tau)$ та кроку сітки h .

6. Результати числових експериментів. Програмна реалізація даного алгоритму здійснена в середовищі Borland C++ Builder 6.0. Розроблена програма працює з користувачем в діалоговому режимі. В ній реалізовано: діалоговий режим задання граничних та початкових умов, динамічне задання товщини примежевого дифузійного шару, динамічне задання кількості кроків розбиття по часу та ширині. Значна увага приділена графічному представленню результатів. Зокрема, розроблено можливість реверсивної побудови графіків, накладання декількох графіків, та зручне перенесення графіків і табличних результатів в текстові та графічні редактори.

Числові розрахунки для розмірених величин проведено для таких вихідних даних:

$$C_1(t) = 0, \quad C_m = 350 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad l_0 = 10 \text{ м},$$

$$\sigma = 0,4, \quad D_m = 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доб}}, \quad \tau = 30 \text{ діб},$$

$$C_0(x) = \frac{C_m - C_0}{l_0^2} x^2 + C_0.$$

Чисельно досліджувалися різні випадки нелінійності для коефіцієнта дифузії, а саме:

$$D(x, c) = D_m + \alpha c, \quad D(x, c) = D_m e^{(-\alpha c)} \text{ та інші.}$$

Для більш наглядного представлення результати числових експериментів наведені нижче у вигляді графіків для такого коефіцієнта дифузії: $D(x, c) = D_m + \alpha c$.

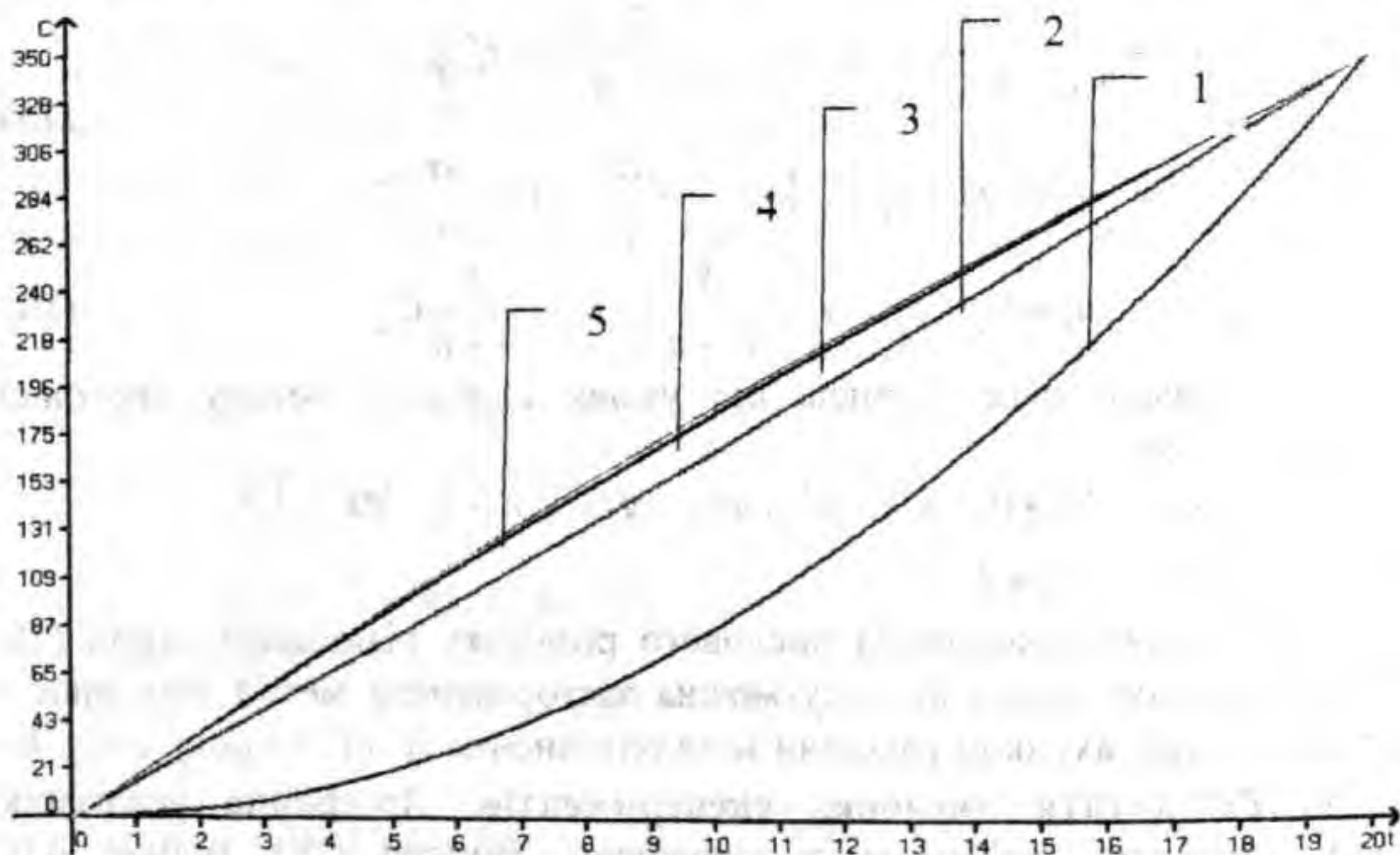


Рис 2. Графіки розподілу концентрації солі в ґрунті при $\delta = 0$, $\alpha = 10^{-4}$ та $\nu = 10^{-6}$ через 50 років.

(1), (2), (3), (4), (5)– графіки розподілу концентрації відповідно при $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$, $t = 30$, $t = 40$, $t = 50$ (років).

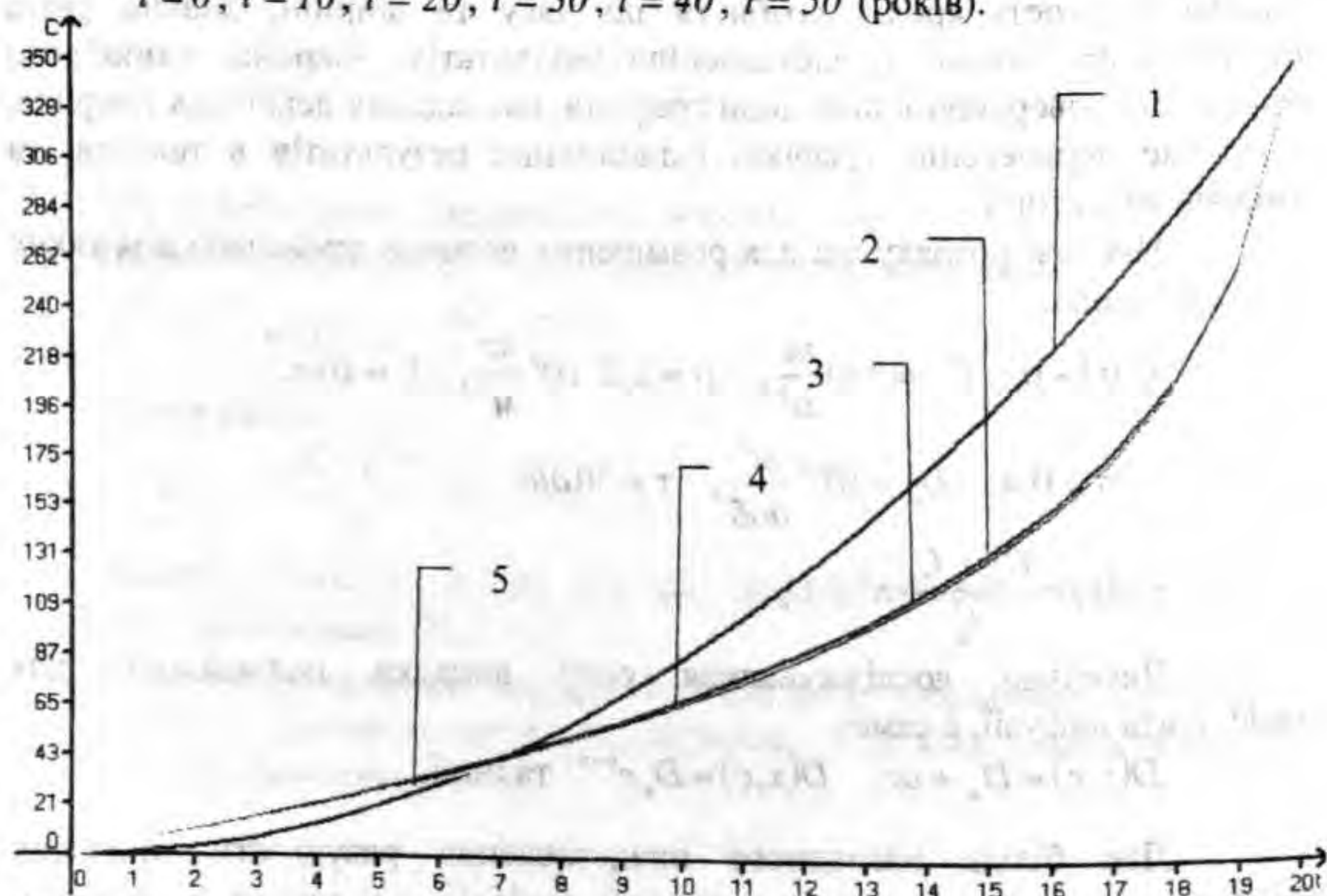


Рис 3. Графіки розподілу концентрації солі в ґрунті при $\delta = 0$, $\alpha = 10^{-4}$ та $\nu = -10^{-6}$ через 50 років.

(1), (2), (3), (4), (5)– графіки розподілу концентрації відповідно при $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$, $t = 30$, $t = 40$, $t = 50$ (років).

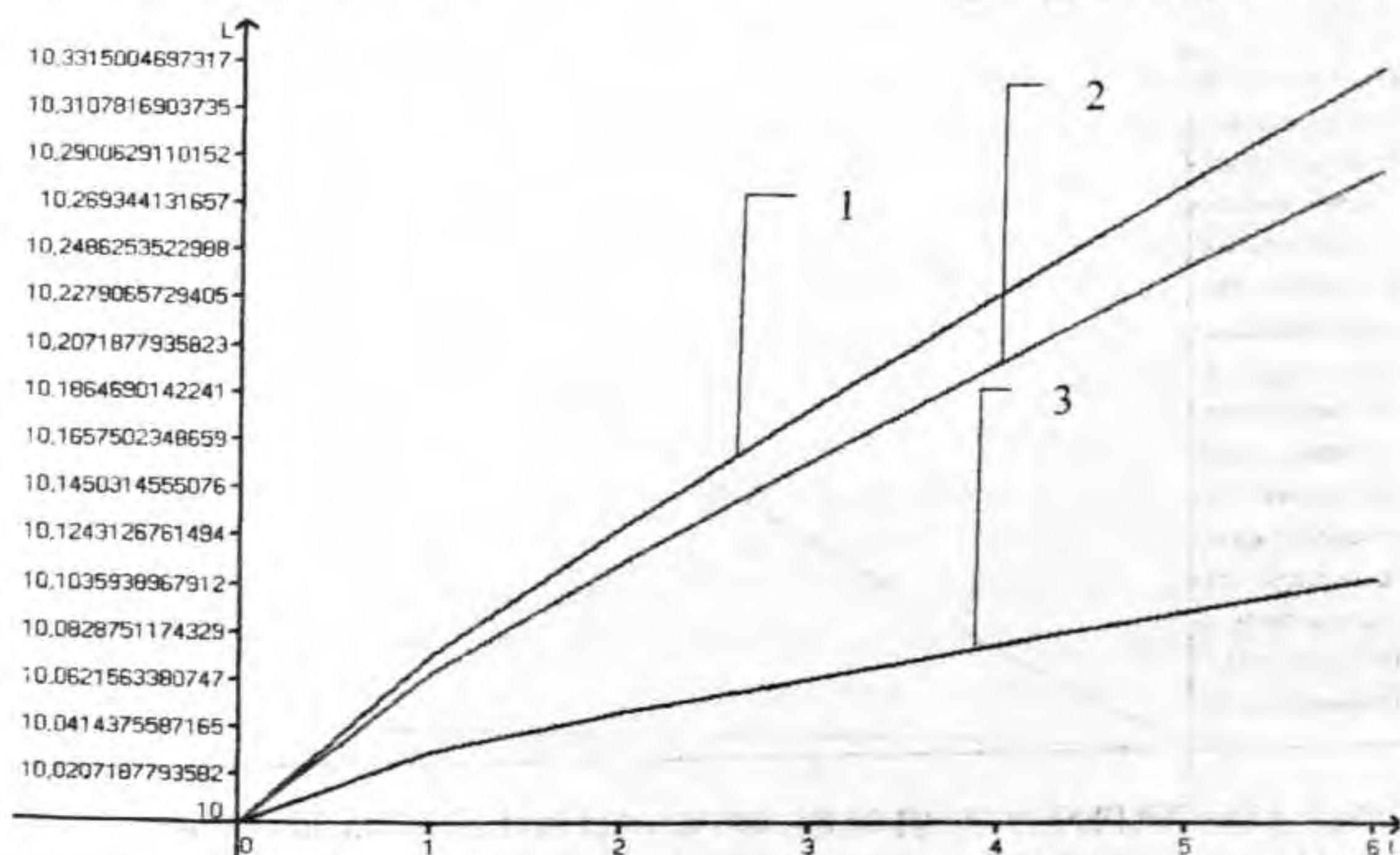


Рис. 4. Графіки руху межі фронту розчинення при $\alpha = 0$ за 50 років.

(1), (2), (3), – графіки руху межі відповідно при $\nu = 0$ $\nu = 10^{-6}$, $\nu = 10^{-5}$ м.

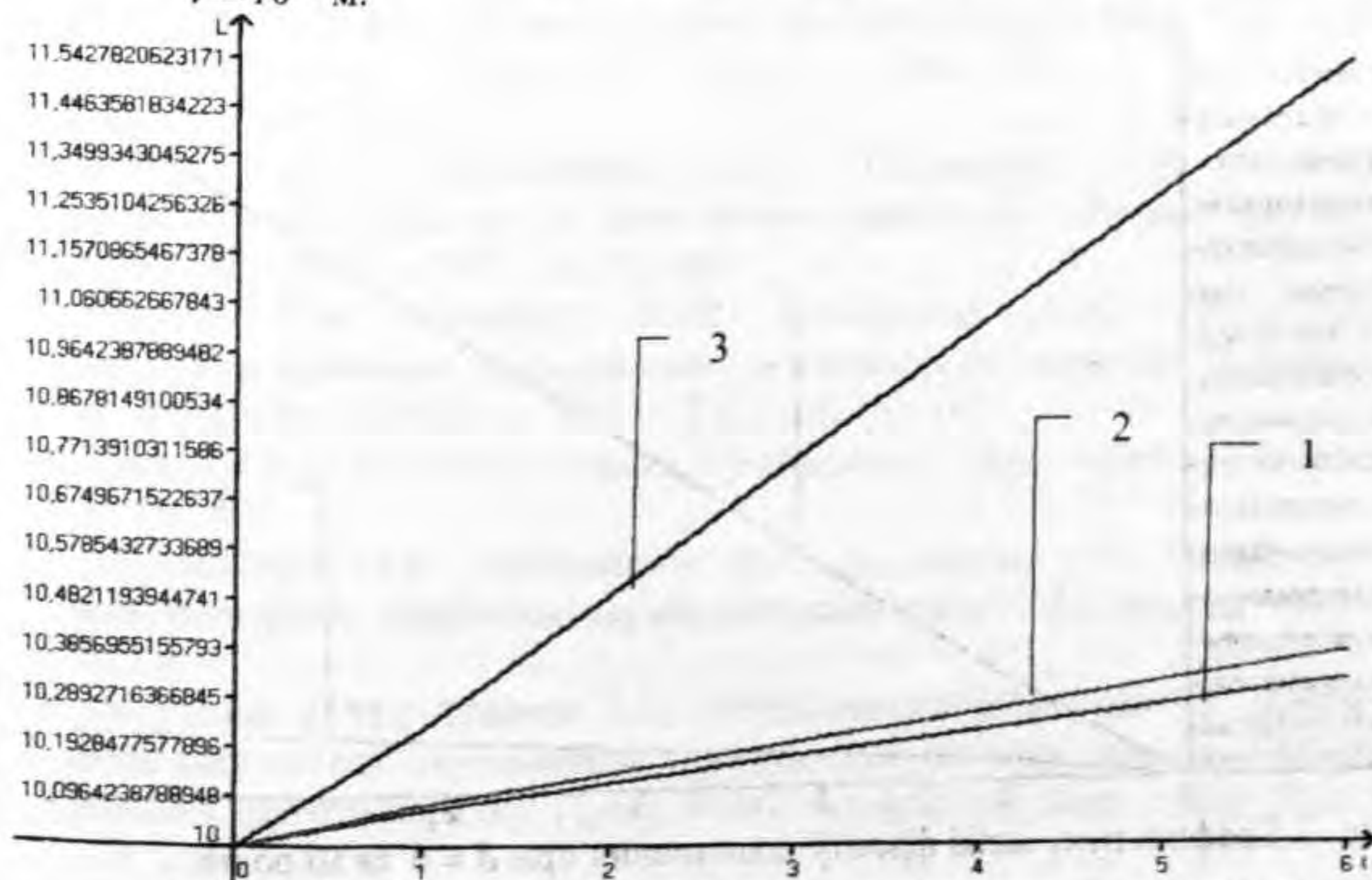


Рис. 5. Графіки руху межі фронту розчинення при $\alpha = 0$ за 50 років.

(1), (2), (3), – графіки руху межі відповідно при $\nu = 0$ $\nu = -10^{-6}$, $\nu = -10^{-5}$ м.

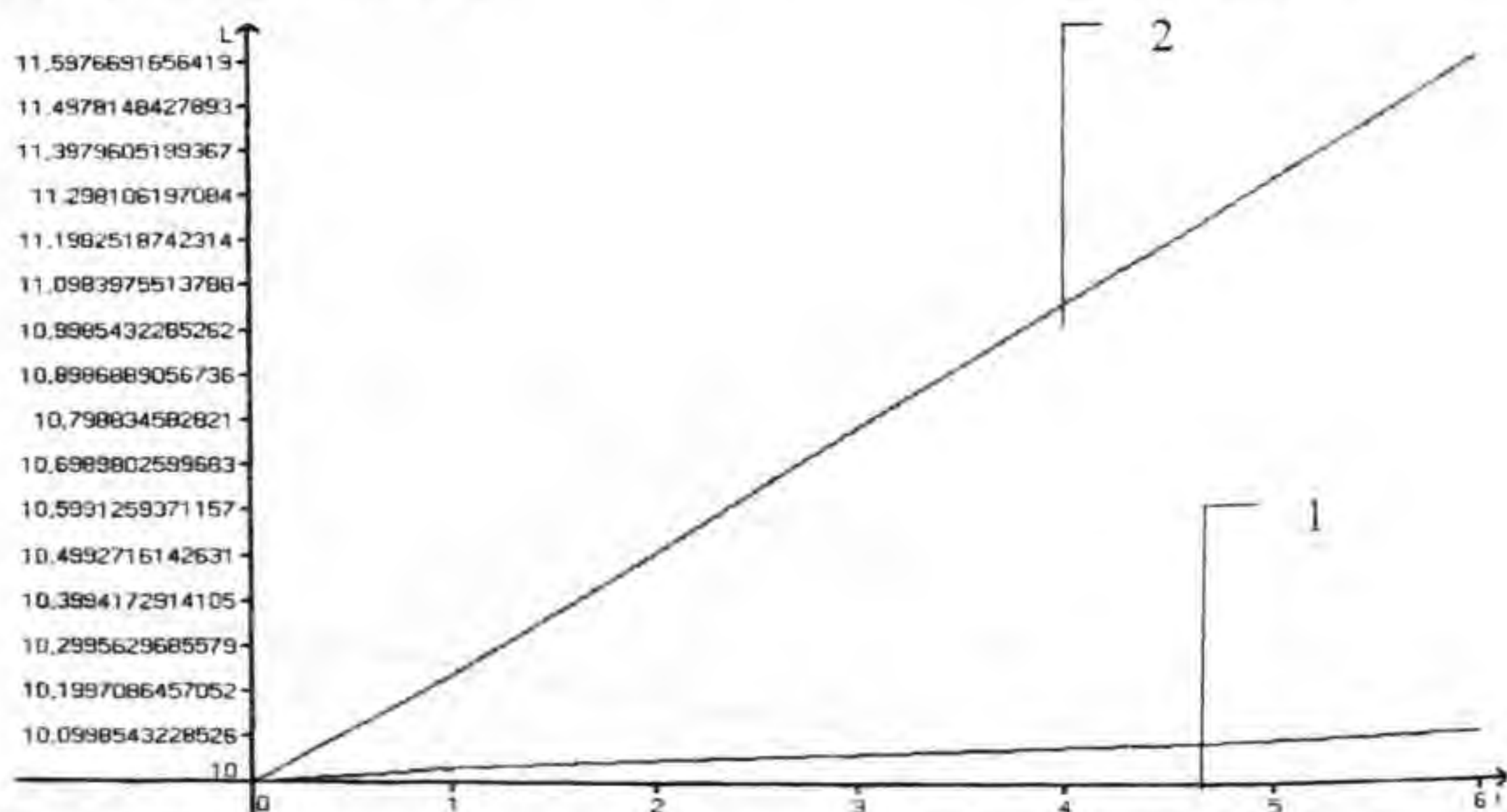


Рис. 6. Графіки руху межі фронту розчинення при $\delta = 0$ за 50 років.

- (1) – графік руху межі фронту розчинення при $\alpha = 10^{-7}$ та $\nu = -10^{-5}$.
(2) – графік руху межі фронту розчинення при $\alpha = 10^{-7}$ та $\nu = -10^{-5}$.

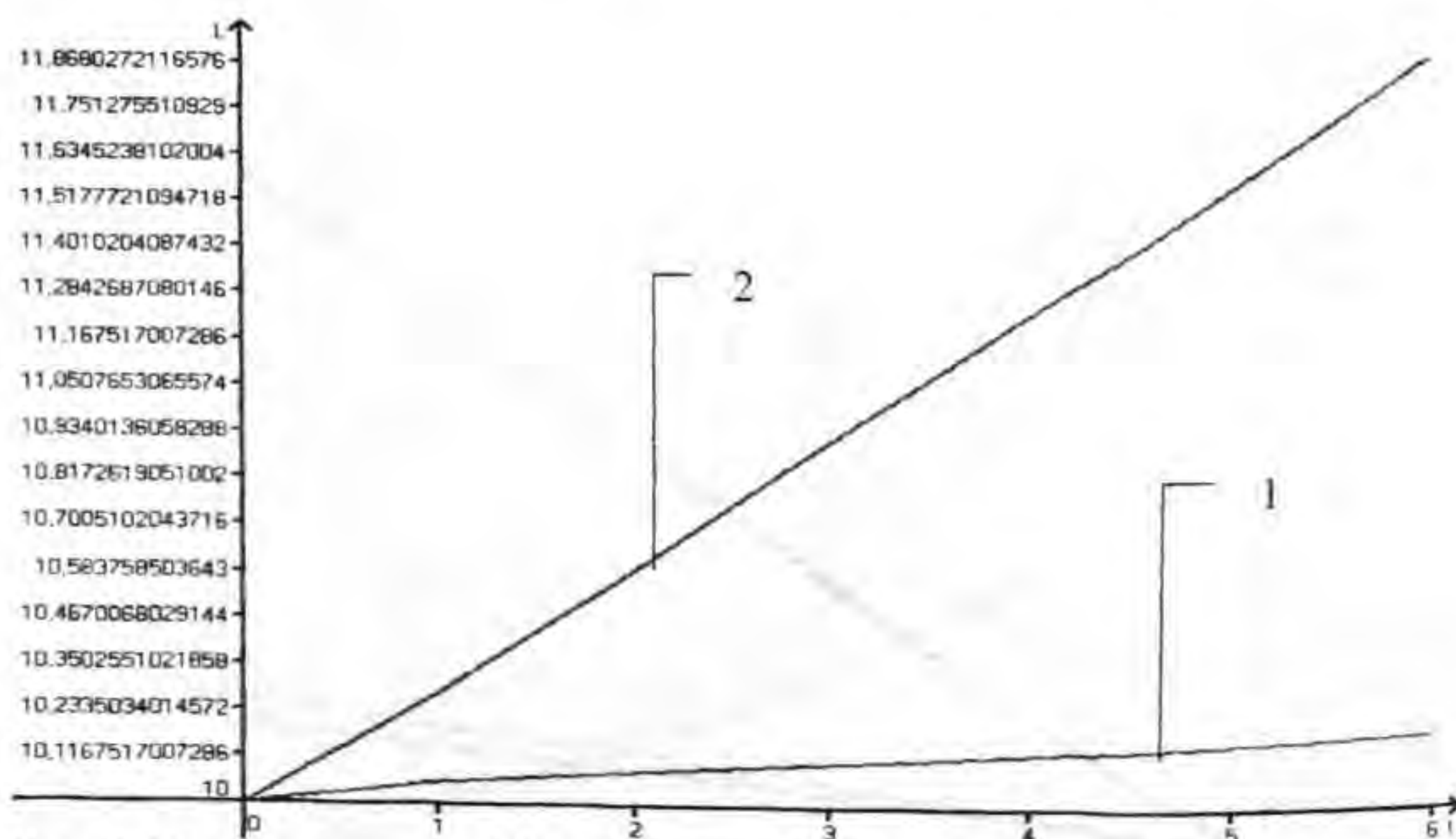


Рис. 7. Графіки руху межі фронту розчинення при $\delta = 0$ за 50 років.

- (1) – графік руху межі фронту розчинення при $\alpha = 10^{-7}$ та $\nu = 10^{-5}$.
(2) – графік руху межі фронту розчинення при $\alpha = 10^{-7}$ та $\nu = 10^{-5}$.

7. Висновки. На основі проведених числових експериментів встановлено, що з плином часу товщина зони повного розчинення пласта $l(t)$ зростає, причому тим інтенсивніше, чим більша товщина дифузійного примежевого шару δ . Як видно з (рис 4, 5, 6, 7) наявність нормального осмосу гальмує процес розчинення пласта солі, а аномального – прискорює. Графічний вигляд $l(t)$ аналогічний, як і у випадку автомобельного розв'язку [2]. Аналогічно ведуть себе графіки потоків солі q з кривлі пласта. Це пояснюється тим, що з ростом товщини примежевого шару δ прискорюється зміна концентрації в примежевому шарі, а отже і по всій товщині ґрунту, і тим швидше відбувається розчинення пласта солі.

При збільшенні ступеня нелінійності коефіцієнта дифузії, як показали результати проведених числових експериментів, спостерігається значний ріст концентрації в шарі ґрунту (до насичення), що приводить до збільшення товщини зони повного розчинення в порівнянні з відповідними результатами для лінійної задачі (рис. 5, 6, 7).

1. Веригин Н.Н. Диффузия у поверхности твёрдого тела, находящегося в жидкости // Журн. физ. химии. – 1958. – 32, №9. – С. 2097 – 2106.
2. Власюк А.П. Об одной задаче растворения пласта горной породы. // Рукопис деп. В ДНТБ України 15.12.93, №2441 Ук93. – 14 с.
3. Власюк А.П. Математичне моделювання процесів масопереносу в областях з криволінійними фіксованими границями // Вісн. Укр. держ. академії водного господарства. Зб. наук. праць. Вип. 1. Ч.1. – Рівне, 1998. – С.203-207.
4. Власюк А.П., Степанченко О.М., Татевський С.В. Чисельне моделювання однієї задачі розчинення пласта солі // Вісник УДУВГП, Рівне.-Вип.2(26) – 2004. – С.399-405.
5. Рельтов Б.Ф., Новицкая Н.А., Большакова Ю.С. Дальнейшие экспериментальные исследования осмотических явлений в связных грунтах //Изв. ВНИИГ. – 1955. – Т.53. – С.147-167.
6. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – 40, №5. – С. 133-185.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1973. – 473 с.
8. Мартинюк П.М., Власюк А.П. Дослідження існування та єдиності розв'язку однієї квазілінійної параболічної системи диференціальних рівнянь другого порядку: Препр./НАН України. Ін-т математики; 2001.З. – К.:2001. – 20 с.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. 2-е изд. – М.: Науч. мир, 2003. – 316 с.

Надійшла до редакції 27.10.04

УДК 517.929

Денис Я. Хусайнов*, Олена І.
Кузьмич

Оцінки стійкості логіко- динамічних систем з часовим перемиканням

В статті запропонований новий метод оцінки величини збурень розв'язків логіко-динамічних систем з часовим перемиканням. Для побудови оцінок використовуються функції Ляпунова, що побудовані за допомогою матричних експоненціалів.

Ключові слова: диференціальна система, перемикання, квадратична форма, функція Ляпунова.

Denys Ya.Khusainov*, Helen I.
Kuzmich

The estimations of logic-dynamical systems stability with time switching

In this article the new method of an estimation of a perturbation measure of a logic-dynamical systems decisions with time switching is offered. For construction of estimations the Lyapunov's functions, constructed with help of matrix exponentials are used.

Key Words: differential system, quadratic form, Lyapunov functions.

*E-mail: Khusainov@stab.univ.kiev.ua

Вступ

Проблемам дослідження стійкості та одержання оцінок розбіжності розв'язків на скінченному проміжку часу була присвячена значна кількість робіт. Слід відмітити класичні роботи [1-4]. Подальший розвиток цієї проблеми у напрямку дослідження диференціальних включень проводився в роботах [5,6]. Останнім часом поновлюється інтерес до динамічних систем, що описані сукупністю диференціальних рівнянь з логічними законами перемикання, в яких функціонування кожної підсистеми відбувається на скінченному проміжку часу. Вони були названі гібридними (логіко-динамічними) системами [7]. Найпростішим варіантом такого типу динамічних систем є системи з часовим перемиканням. В роботі [8] був запропонований загальний підхід до дослідження оцінок збурення розв'язків рівнянь такого типу за допомогою другого методу Ляпунова. В названій роботі розглянуто клас лінійних стаціонарних систем. За допомогою матричного експоненціала одержано конструктивний вигляд максимальної величини збурення і її залежність від початкових умов.

Одержання оцінок стійкості

Нехай логіко-динамічна система представлена набором підсистем, що становлять лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Кожна з підсистем описує динаміку збурень на заданому скінченному проміжку часу $t_{i-1} \leq t < t_i$, $i = \overline{1, N}$, $t_0 = 0$. Підсистеми можуть бути як стійкими, так і нестійкими. Припустимо, що початкове збурення $x(0)$ знаходиться у δ -околі стану рівноваги, тобто $|x(0)| < \delta$. Оцінимо величину відхилення розв'язку $x = x(x_0, t)$ логіко-динамічної системи (1) від стану рівноваги в момент $t = t_N$. Оскільки розглядається скінчений проміжок часу і при перемиканні фазові координати не мають розривів, тобто

$$\lim_{s \rightarrow +0} x(t_i - s) = \lim_{s \rightarrow +0} x(t_i + s), i = \overline{1, N-1}, \quad (2)$$

та на окремих ділянках підсистеми є системами лінійних диференціальних рівнянь, то в силу неперервної залежності розв'язків від початкових умов, для довільного $\delta > 0$ всі розв'язки, що починаються з δ -околу не покинуть $\varepsilon(\delta)$ -оکیل. І навпаки, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що $|x(t_N)| < \varepsilon$, при $|x(0)| < \delta$.

Стаття присвячена проблемам оцінки характеристики стійкості на скінченному проміжку часу, тобто обчисленню цих величин. При дослідженні використовується метод функцій Ляпунова. Оскільки підсистеми лінійні, то використовуються функції квадратичного вигляду [3].

Відомо, що для лінійної системи зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t) \in R^n, t \geq 0$$

загальний розв'язок має вигляд $x(x_0, t) = e^{At}x_0$, де матричний експоненціал має вигляд матричного ряду

$$e^{At} = I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots$$

І динаміка системи може оцінюватись квадратичною функцією Ляпунова, що побудована як квадрат інтегралу [9]

$$V(x, t) = x_0^T x_0 = (e^{-At}x)^T (e^{-At}x),$$

або у вигляді неавтономної квадратичної форми

$$V(x, t) = x^T H(t)x, H(t) = e^{-A^T t} e^{-At}.$$

Функція, що вибрана у такий спосіб найточніше описує динаміку процесу. Область $V(x, t) < \alpha$ становить середину еліпса, що виходить з околу $|x_0| < \alpha$ та змінюється з часом вздовж розв'язків $x = x(x_0, t)$.

Теорема 1. Нехай початковий стан логіко-динамічної системи (1) задовольняє умові $|x(0)| < \delta$. Тоді при $t = t_N$ буде виконуватись нерівність

$$|x(t_N - 0)| < \frac{\delta}{\sqrt{\prod_{i=1}^N \lambda_{\min}[H_i(t_i)]}}, \quad (3)$$

де

$$H_i(t_i) = e^{-A_i^T(t_i-t_{i-1})} e^{-A_i(t_i-t_{i-1})}, \quad i = \overline{1, N}, t_0 = 0.$$

Доведення. Розглянемо першу ділянку динаміки системи (1), тобто підсистему

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t), \quad x(t) \in R^n, \quad t_0 \leq t < t_1, \quad t_0 = 0. \quad (4)$$

В якості функції Ляпунова виберемо

$$V(x, t) = x^T H_1(t) x, \quad H_1(t) = e^{-A_1^T t} e^{-A_1 t}.$$

Для неї виконується двостороння нерівність

$$\lambda_{\min}[H_1(t)] |x(t)|^2 \leq V_1(x(t), t) \leq \lambda_{\max}[H_1(t)] |x(t)|^2, \quad 0 \leq t < t_1.$$

Для повної похідної функції $V_1(x, t)$ в силу підсистеми (4) буде мати місце тотожність

$$\frac{d}{dt} V_1(x(t), t) = \dot{x}^T(t) H_1(t) x(t) + x^T(t) \frac{d}{dt} H_1(t) x(t) + x^T(t) H_1(t) \dot{x}(t) \equiv 0.$$

Тому для довільного $t: 0 \leq t < t_1$ функція на траєкторіях є сталою, тобто

$$V_1(x(t), t) \equiv V_1(x(0), 0) = \text{const}, \quad 0 \leq t < t_1.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}[H_1(t_1 - 0)] |x(t_1 - 0)|^2 &\leq V_1(x(t_1 - 0), t_1 - 0) = \\ &= V_1(x(0), 0) \leq \lambda_{\max}[H_1(0)] |x(0)|^2 = |x(0)|^2 \end{aligned}$$

І для першої ділянки маємо нерівність

$$|x_1(t_1 - 0)| \leq \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_1(t_1)]}}.$$

Розглянемо другу ділянку, тобто підсистему

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t), \quad x(t) \in R^n, \quad t_1 \leq t < t_2. \quad (5)$$

Функцію Ляпунова на цій ділянці будемо брати у вигляді

$$V_2(x, t) = x^T H_2(t) x, \quad H_2(t) = e^{-A_2^T(t-t_1)} e^{-A_2(t-t_1)}.$$

Для неї справедлива двостороння нерівність

$$\lambda_{\min}[H_2(t)] |x(t)|^2 \leq V_2(x(t), t) \leq \lambda_{\max}[H_2(t)] |x(t)|^2.$$

Для повної похідної функції $V_2(x, t)$ в силу підсистеми (5) також виконується

$$\frac{d}{dt} V_2(x(t), t) \equiv 0, \quad t_1 \leq t < t_2,$$

Тобто

$$V_2(x(t), t) \equiv V_2(x(t_1 + 0), t_1 + 0) = \text{const}, \quad t_1 \leq t < t_2.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}[H_2(t_2 - 0)] |x(t_2 - 0)|^2 &\leq V_2(x(t_2 - 0), t_2 - 0) = \\ &= V_2(x(t_1 + 0), t_1 + 0) \leq \lambda_{\max}[H_2(t_1 + 0)] |x(t_1 + 0)|^2 = |x(t_1 + 0)|^2. \end{aligned}$$

І для другої ділянки отримаємо нерівність

$$|x(t_2 - 0)| \leq \frac{|x(t_1 + 0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_2(t_2)]}}.$$

Оскільки в момент перемикавання виконуються умови неперервності (2), то

$$|x_2(t_2 - 0)| \leq \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_2(t_2)]\lambda_{\min}[H_1(t_1)]}}.$$

Продовжуючи процес далі, отримаємо

$$|x_N(t_N - 0)| \leq \frac{|x(0)|}{\sqrt{\prod_{i=1}^N \lambda_{\min}[H_i(t_i)]}}, \quad (6)$$

тобто довели твердження теореми.

При доведенні теореми 1 в моменти перемикань $t = t_i$, $i = \overline{1, N}$ накладається достатньо „жорстке” обмеження. Це вимога до поверхні рівня $(i-1)$ -ї функції Ляпунова $V_{i-1}(x, t)$ на $(i-1)$ -му кроці, яка повинна бути еліпсом в кінці $(i-1)$ -го кроку, що міститься в момент перемикавання всередині поверхні рівня i -ї функції Ляпунова $V_i(x, t)$, що становить кулю на початку i -го кроку.

Розглянемо більш „слабкий” випадок, коли поверхня рівня i -ї функції Ляпунова на $(i-1)$ -му кроці становить еліпс, що збігається в момент перемикавання з еліпсом попередньої функції Ляпунова.

Теорема 2. Нехай початковий стан логіко-динамічної системи (1) задовольняє умову $|x(0)| < \delta$. Тоді при $t = t_N$ виконується нерівність

$$|x(t_N - 0)| < \frac{|\delta|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_N(t_N)]}}, \quad (7)$$

Де

$$H_N(t_N) = \prod_{i=N}^1 e^{-A_i^T(t_i - t_{i-1})} \prod_{j=1}^N e^{-A_j(t_j - t_{j-1})}, \quad t_0 = 0.$$

Доведення. Так само, як і при доведенні попередньої теореми, для першої ділянки $0 \leq t < t_1$ в якості функції Ляпунова виберемо

$$V_1(x, t) = x^T H_1(t) x, \quad H_1(t) = e^{-A_1^T t} e^{-A_1 t}.$$

Оскільки на першій ділянці виконується

$$\frac{d}{dx} V_1(x(t), t) = 0, \quad 0 \leq t < t_1,$$

То

$$x^T(t_1 - 0) e^{-A_1^T t_1} e^{-A_1 t_1} x(t_1 - 0) = V_1(x(t_1 - 0), t_1 - 0) = V_1(x(0), 0) = |x(0)|^2. \quad (8)$$

Якщо для першої ділянки функцію Ляпунова будемо, виходячи з квадрату інтеграла, тобто

$$V_1(x, t) = (e^{-A_1^T t} x)^T e^{-A_1 t} x = x^T (e^{-A_1^T t} e^{-A_1 t}) x,$$

то для другої ділянки будуюмо „деформовану” функцію Ляпунова

$$V_2(x, t) = (C_2 e^{-A_2 t} x)^T C_2 e^{-A_2 t} x = x^T (e^{-A_2 t} C_2^T C_2 e^{-A_2 t}) x,$$

де C_2 – невироджена матриця з сталими коефіцієнтами. Умова „склеювання” в момент перемикавання $t = t_1$ визначає матрицю C_2 наступним чином

$$e^{-A_1 t_1} = C_2 e^{-A_2 t_1}.$$

Звідси

$$C_2 = e^{-A_1 t_1} e^{A_2 t_1}, \quad (9)$$

І на другій ділянці функція Ляпунова має вигляд

$$V_2(x, t) = x^T (e^{-A_2^T t} e^{A_2^T t_1} e^{-A_1^T t_1} e^{-A_1 t_1} e^{A_2 t_1} e^{-A_2 t}) x = x^T H_2(t) x,$$

Де

$$H_2(t) = e^{-A_2^T (t-t_1)} e^{-A_1^T t_1} e^{-A_1 t_1} e^{-A_2 (t-t_1)}.$$

Оскільки для функції Ляпунова $V_2(x, t)$ на другій ділянці також виконуються нерівності

$$\lambda_{\min}[H_2(t)] |x(t)|^2 \leq V_2(x(t), t) \leq \lambda_{\max}[H_2(t)] |x(t)|^2,$$

$$\frac{d}{dx} V_2(x(t), t) \equiv 0, t_1 \leq t < t_2,$$

То

$$x^T(t_2 - 0) (e^{-A_2^T (t_2-t_1)} e^{-A_1^T t_1} e^{-A_1 t_1} e^{-A_2 (t_2-t_1)}) x(t_2 - 0) = V_2(x(t_2 - 0), t_2 - 0) = V_2(x(t_1), t_1)$$

Враховуючи умову „склеювання” (9) та (8), одержимо

$$\begin{aligned} x^T(t_2 - 0) (e^{-A_2^T (t_2-t_1)} e^{-A_1^T t_1} e^{-A_1 t_1} e^{-A_2 (t_2-t_1)}) x(t_2 - 0) &= V_2(x(t_2 - 0), t_2 - 0) = \\ &= V_2(x(t_1), t_1) = V_1(x(t_1 - 0), t_1 - 0) = |x(0)|^2. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$|x(t_2 - 0)| \leq \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_2(t_2)]}}, \quad H_2(t_2) = e^{-A_2^T (t_2-t_1)} e^{-A_1^T t_1} e^{-A_1 t_1} e^{-A_2 (t_2-t_1)}.$$

Продовжуючи процес далі, отримаємо

$$|x(t_N - 0)| \leq \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_N(t_N)]}},$$

де

$$H_N(t_N) = e^{-A_N^T (t_N-t_{N-1})} e^{-A_2^T (t_2-t_1)} e^{-A_1^T t_1} \dots e^{-A_1 t_1} e^{-A_2 (t_2-t_1)} e^{-A_N (t_N-t_{N-1})},$$

тобто твердження теореми справджуються.

Наслідок 1. Для того, щоб при $t = t_N$ виконувалась нерівність $|x(t_N - 0)| \leq \varepsilon$ достатньо

$$|x(0)| < \sqrt{\lambda_{\min}[H_N(t_N)]} \cdot \varepsilon. \quad (10)$$

У приведених твердженнях розглядалися початкові та кінцеві моменти часу, тобто $t = t_i$, $i = \overline{0, N}$. Оцінка поведінки розв’язків здійснювалася саме

у ці моменти часу. Тому, взагалі кажучи, можлива ситуація, коли розв'язок міг „вискакувати” з ε -околу. Щоб уникнути цього, треба накласти умови на весь проміжок $t: 0 \leq t \leq t_N$.

Наслідок 2. Для того, щоб при $t: 0 \leq t \leq t_N$ виконувалась нерівність $|x(t)| \leq \varepsilon$ достатньо, щоб

$$|x(0)| < \sqrt{\prod_{i=1}^N \min_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \{\lambda_{\min}[H_i(t)]\}} \cdot \varepsilon.$$

Наслідок 3. Для того, щоб при $t: 0 \leq t \leq t_N$ виконувалась нерівність $|x(t)| \leq \varepsilon$ достатньо, щоб

$$|x(0)| < \min_{i=1, N} \left\{ \min_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \sqrt{\lambda_{\min}[H_i(t)]} \right\},$$

де

$$H_N(t_N) = e^{-A_N^T(t_N-t_{N-1})} e^{-A_2^T(t_2-t_1)} e^{-A_1^T t_1} \dots e^{-A_1^T t_1} e^{-A_2^T(t_2-t_1)} e^{-A_N^T(t_N-t_{N-1})}.$$

Попередні результати отримані за припущення, що функція Ляпунова обрана у вигляді неавтономної квадратичної форми $V(x, t) = x^T H(t) x$, $H(t) = e^{-A^T t} e^{-A t}$. Це достатньо «жорстке» припущення, оскільки фактично потрібно мати розв'язок у аналітичному вигляді $x(x_0, t) = e^{A t} x_0$.

Оцінимо збурення, використовуючи автономну функцію Ляпунова $V(x) = x^T H x$. Але тоді потрібно накласти умову асимптотичної стійкості кожної з підсистем. У цьому випадку на ділянках $t_{i-1} \leq t < t_i$ функцію Ляпунова можна брати у вигляді $V_i(x) = x^T H_i x$, де додатно визначенні матриці H_i є розв'язками матричних рівнянь Ляпунова

$$A_i^T H + H A_i = -C, \quad i = \overline{1, N} \quad (11)$$

при довільних додатно визначених матрицях $C = C_i, i = \overline{1, N}$.

Теорема 3. Нехай кожна з підсистем логіко-динамічної системи (1) асимптотично стійка. Тоді при $t = t_N$ виконується співвідношення

$$|x(t_N - 0)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^N \varphi_i(H_i)} |x(0)| e^{\frac{1}{2} \prod_{i=1}^N [\gamma(H_i) - \gamma(H_{i-1})] - \frac{1}{2} \gamma(H_N) t_N} \quad (12)$$

де

$$\varphi_i(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}, \quad \gamma(H_i) = \frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)}, \quad i = \overline{1, N},$$

C_i – довільні додатно визначені матриці, H_i – відповідні розв'язки матричних рівнянь (11).

Доведення. Розглянемо першу підсистему (4). За припущенням вона асимптотично стійка. Тому при довільній додатно визначеній матриці C_1 існує додатно визначена матриця H , що є розв'язком матричного рівняння

Ляпунова

$$A_1^T H + H A_1 = -C_1.$$

Повна похідна функції Ляпунова $V_1(x) = x^T H_1 x$ при $0 \leq t < t_1$ задовольняє нерівності

$$\frac{d}{dx} V_1(x(t)) \leq -\lambda_{\min}(C_1) |x(t)|^2.$$

Оскільки

$$\lambda_{\min}(H_1) |x(t)|^2 \leq V_1(x(t)) \leq \lambda_{\max}(H_1) |x(t)|^2,$$

то

$$\frac{d}{dt} V_1(x(t)) \leq -\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} V_1(x(t)).$$

Звідси

$$V_1(x(t)) \leq V_1(x(0)) e^{-\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} t}.$$

Крім того

$$\lambda_{\min}(H_1) |x(t)|^2 \leq V_1(x(t)) \leq V_1(x(0)) e^{-\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} t} \leq \lambda_{\max}(H_1) |x(0)|^2 e^{-\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} t}.$$

Тому для оцінки збурень на першій ділянці отримали залежність

$$|x(t_1 - 0)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)}} |x(0)| e^{-\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{2\lambda_{\max}(H_1)} t_1}. \quad (13)$$

Розглянемо другу підсистему. Для неї вибираємо функцію Ляпунова вигляду $V_2(x) = x^T H_2 x$, де H_2 – розв'язок матричного рівняння

$$A_2^T H + H A_2 = -C_2$$

з довільною додатно визначеною матрицею C_2 . Для розв'язків на ділянці $t_1 \leq t < t_2$ будуть отримані аналогічні оцінки.

$$|x(t_2 - 0)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_2)}{\lambda_{\min}(H_2)}} |x(t_1 + 0)| e^{-\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2\lambda_{\max}(H_2)} (t_2 - t_1)}.$$

Використовуючи умову (13) на неперервність при перемиканні, отримаємо

$$|x(t_2 - 0)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_2)}{\lambda_{\min}(H_2)} \cdot \frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)}} e^{\frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\max}(H_2)} - \frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} \right] t_1} e^{-\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2\lambda_{\max}(H_2)} t_2}.$$

Продовжуючи процес далі, маємо

$$|x(t_N - 0)| \leq \sqrt{\prod_{i=0}^N \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}} |x(0)| e^{\frac{1}{2} \prod_{i=2}^N \left[\frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)} - \frac{\lambda_{\min}(C_{i-1})}{\lambda_{\max}(H_{i-1})} \right] t_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(C_N)}{\lambda_{\max}(H_N)} t_N},$$

тобто твердження теореми справджується.

Література

1. Карачаров К.А., Пилютник А.Г. Введение в техническую устойчивость движения. – М., Физметгиз, 1962. – 244с.
2. Мартынюк А.А. Практическая устойчивость движения. – Киев, Наукова думка, 1983. – 248с.
3. Кириченко Н.Ф. Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1972. – 212с.
4. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Киев, Наукова думка, 1985. – 304с.
5. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – Київ, Київський університет, 2000. – 197с.
6. Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Оптимальные множества практической устойчивости дифференциальных включений // Проблемы управления и информатики, №2, 2003. – с.10-19.
7. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М., Физматгиз, 1962. – 476с.
8. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф., Ковальский И.П. Устойчивость и стабилизация движения систем при изменениях математической модели. – В кн.: Моделирование и оптимизация систем управления. – Киев, Изд-во при Киевском университете, 1974. – С.10-23.
9. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М., Наука, 1970. – 240 с.

Надійшла до редакції 11.10.2004.

УДК 517.929

Денис Я. Хусаїнов*, Оксана І.
Стадник*, Андрій В. Шатирко

**Обчислення стаціонарних станів
моделей нелінійних динамічних
систем з дробово-раціональною
правою частиною**

*В статті розроблений алгоритм
обчислення стаціонарних режимів та
зведення системи збуреного руху до
уніфікованої схеми.*

*Ключові слова: дискретна
система, стаціонарний режим, дробово-
раціональна права частина.*

*E-mail: dkh@unicyb.kiev.ua

Denys Ya. Khusainov*, Oxana I.
Stadnik*, Andrey V. Shatyrko

**Calculation of Stationary States of
Models of Nonlinear Dynamical
Systems with Fractionally Rational
Right-hand Side**

*In article, the algorithm of
calculation of stationary states and
reduction the system of perturbation motion
to an uniform scheme was developed.*

*Key Words: discrete system, steady-
state conditions, fractionally rational right-
hand side.*

Вступ

Дана робота є продовженням дослідження динамічних систем, що описуються моделями різницевих рівнянь з дробово-раціональними правими частинами [1-3]. В роботі [3] був приведений алгоритм зведення систем з дробово-раціональною правою частиною до уніфікованого векторно-матричного вигляду. Слід відмітити, що в багатьох математичних моделях (особливо економічних, біологічних моделях, моделях динаміки популяцій та ін.) інтерес викликає не нульовий стан рівноваги, а стаціонарний, що визначає усталений динамічний процес. Таким чином виникає необхідність розробки алгоритму одержання стаціонарного стану рівноваги та переходу до уніфікованих "рівнянь збурення", що описують поведінку розв'язків навколо стану рівноваги. В роботі [3] була запропонована уніфікована модель нелінійної різницевої системи з дробово-раціональною правою частиною вигляду

$$x(k+1) = [E + X^T(k)D]^{-1} (A + X^T(k)B)x(k).$$

Тут $x^T(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ - n -мірний вектор $k = 0, 1, 2, \dots$ дискретного змінного; $x^T(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ - n -мірний вектор $t \geq 0$ неперервного змінного;

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} - \text{прямокутні сталі } n^2 \times n \text{ матриці, що складаються з}$$

матриць $B_i, D_i, i = \overline{1, n}$; $X^T(k) = \{X_1^T(k), X_2^T(k), \dots, X_n^T(k)\}$ - матриця розмірності $n \times n^2$, що складається з квадратних $n \times n$ матриць, у яких i -й рядок містить вектор-рядок $x^T(k) = \{x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)\}$, а решта елементів - нулі, тобто

$$X_i^T(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1(k) & x_2(k) & \dots & x_n(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, n};$$

A - квадратна $n \times n$ матриця з сталими коефіцієнтами, E - одинична матриця розмірності $n \times n$.

Показано, що досить багато математичних моделей з техніки, біології, динаміки популяцій за допомогою відповідних позначень можна привести до такого вигляду.

Дослідження стаціонарних режимів

Як випливає з практичних міркувань, в основному інтерес представляють ненульові стаціонарні режими. Покажемо, що для систем уніфікованого вигляду, розгляд нетривіального положення рівноваги можна звести до дослідження нульового рішення системи, від якої майже не відрізняється від початкової.

Позначимо через $\{y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)\}$ нові незалежні змінні, визначені як зсуви щодо положення рівноваги x_* , тобто $y(k) = x(k) - x_*$, де $y^T(k) = (y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k))$, $x_*^T = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Введемо нові позначення: X_* - матриця вигляду $X(k)$, у якій замість вектор-рядка $x^T(k)$ стоїть вектор-рядок x_*^T . $Y(k)$ отримуємо з матриці $X(k)$ заміною вектора $x^T(k)$ на $y^T(k)$.

Л е м а 1. Дослідження динаміки положення рівноваги $x(k) = x_*, k = 0, 1, 2, \dots$ системи

$$x(k+1) = [E + X^T(k)D]^{-1}(A + X^T(k)B)x(k) \quad (1)$$

можна звести до дослідження динаміки нульового положення рівноваги $y(k) \equiv 0, k = 0, 1, 2, \dots$ системи

$$y(k+1) = (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1}(\tilde{A} + Y^T(k)B)y(k), \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= E + X^T D, \quad \tilde{A} = \tilde{A} + X^T (\tilde{B} - \tilde{D}), \quad \tilde{A} = A + X^T B, \\ (\tilde{B} - \tilde{D})^T &= \{B_1 - D_1, B_2 - D_2, \dots, B_n - D_n\}.\end{aligned}\quad (3)$$

Доведення. Нехай $x(k) = x_*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ положення рівноваги системи (1), тобто

$$x_* = [E + X^T D]^{-1} (A + X^T B)x_*, \quad (4)$$

де X^T - $(n \times n^2)$ прямокутна матриця, що утворена за допомогою вектора $x_*^T = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Робимо заміну

$$x(k) = y(k) + x_*$$

і одержуємо систему

$$y(k+1) + x_* = (E + (X_* + Y(k))^T D)^{-1} (A + (X_* + Y(k))^T B)(y(k) + x_*), \quad (5)$$

нульовий стан рівноваги $y(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ якої еквівалентний стану рівноваги вихідної системи (1). Перетворимо одержану систему (5) таким чином

$$\begin{aligned}y(k+1) &= ((E + X_*^T D) + Y^T(k)D)^{-1} ((A + X_*^T B) + Y^T(k)B)y(k) + \\ &+ ((E + X_*^T D) + Y^T(k)D)^{-1} ((A + X_*^T B) + Y^T(k)B)x_* - x_*.\end{aligned}$$

Позначимо

$$E + X_*^T D = \tilde{E}, \quad A + X_*^T B = \tilde{A}.$$

Оскільки

$$(\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{E} + Y^T(k)D) = E,$$

то можна записати

$$\begin{aligned}y(k+1) &= (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k)B)y(k) + \\ &+ (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k)B)x_* - (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{E} + Y^T(k)D)x_*.\end{aligned}$$

Або

$$y(k+1) = (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k)B)y(k) + (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} [(\tilde{A} + Y^T(k)B) - (\tilde{E} + Y^T(k)D)]x_*.$$

Звідси одержуємо

$$y(k+1) = (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k)B)y(k) + (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} [(\tilde{A} - \tilde{E})x_* + Y^T(k)(B - D)x_*].$$

З умови (4) маємо, що

$$[E + X_*^T D]x_* = (A + X_*^T B)x_*,$$

або

$$(\tilde{A} - \tilde{E})x_* = [(A + X_*^T B) - (E + X_*^T D)]x_* = 0.$$

Таким чином залишається

$$y(k+1) = (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k)B)y(k) + (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} Y^T(k)(B - D)x_*.$$

Неважко перевірити, що

$$Y^T(k)Bx_k = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i b_{i1}^1 & \sum_{i=1}^n y_i b_{i2}^1 & \dots & \sum_{i=1}^n y_i b_{in}^1 \\ \sum_{i=1}^n y_i b_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n y_i b_{i2}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n y_i b_{in}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n y_i b_{i1}^n & \sum_{i=1}^n y_i b_{i2}^n & \dots & \sum_{i=1}^n y_i b_{in}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j^* \sum_{i=1}^n y_i b_{ij}^1 \\ \sum_{j=1}^n x_j^* \sum_{i=1}^n y_i b_{ij}^2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n x_j^* \sum_{i=1}^n y_i b_{ij}^n \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}^1 x_j^* \right) y_i, \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}^2 x_j^* \right) y_i, \dots, \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}^n x_j^* \right) y_i \right)^T.$$

Крім того

$$X \cdot \tilde{B}y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j^* b_{1j}^1 & \sum_{j=1}^n x_j^* b_{1j}^2 & \dots & \sum_{j=1}^n x_j^* b_{1j}^n \\ \sum_{j=1}^n x_j^* b_{2j}^1 & \sum_{j=1}^n x_j^* b_{2j}^2 & \dots & \sum_{j=1}^n x_j^* b_{2j}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n x_j^* b_{nj}^1 & \sum_{j=1}^n x_j^* b_{nj}^2 & \dots & \sum_{j=1}^n x_j^* b_{nj}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^n x_j^* b_{ij}^1 \right), \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^n x_j^* b_{ij}^2 \right), \dots, \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^n x_j^* b_{ij}^n \right) \right)^T.$$

Таким чином

$$Y^T[B-D]x_k = X^T(\tilde{B}-\tilde{D})y(k),$$

де

$$(\tilde{B}-\tilde{D})^T = \{B_1 - D_1, B_2 - D_2, \dots, B_n - D_n\}$$

прямокутна $(n \times n^2)$ -матриця, елементами якої є різниці $B_i - D_i$, $i = \overline{1, n}$. Таким чином маємо

$$y(k+1) = (\tilde{E} + Y^T(k)D)^{-1} \{(\tilde{A} + Y^T(k)B) + X^T(\tilde{B}-\tilde{D})\}y(k),$$

тобто одержали твердження леми 1.

З а у в а ж е н н я 1. Якщо матриці B_i , D_i - симетричні, тобто $B_i^T = B_i$, $D_i^T = D_i$, то $B - D = \tilde{B} - \tilde{D}$.

Покажемо, що аналогічними властивостями володіє і система (1.17).

$$x(k+1) = (X^T(k)D)^{-1} [A + X^T(k)B]x(k). \quad (6)$$

Л е м а 2. Дослідження динаміки положення рівноваги $x(k) = x_*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ системи (6) можна звести до дослідження динаміки нульового положення рівноваги $y(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ системи

$$y(k+1) = (\tilde{E}_1 + Y^T(k)D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k)B)y(k), \quad (7)$$

де

$$\tilde{E}_1 = X_*^T D, \quad \tilde{A} = \tilde{A} + X_*^T (\tilde{B} - \tilde{D}), \quad \tilde{A} = A + X_*^T D, \quad (\tilde{B} - \tilde{D})^T = \{B_1 - D_1, B_2 - D_2, \dots, B_n - D_n\}. \quad (8)$$

Доведення. Нехай, як і в попередній лемі, $x(k) = x_*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ станом рівноваги системи є

$$x_* = [X_*^T D]^{-1} (A + X_*^T B) x_*, \quad (8)$$

де X_*^T - $(n \times n^2)$ прямокутна матриця, що утворена за допомогою вектора $x_*^T = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Робимо заміну

$$x(k) = y(k) + x_*$$

і одержуємо систему

$$y(k+1) + x_* = ((X_* + Y(k))^T D)^{-1} (A + (X_* + Y(k))^T B) (y(k) + x_*).$$

Далі маємо

$$y(k+1) = (X_*^T D + Y^T(k) D)^{-1} ((A + X_*^T B) + Y^T(k) B) y(k) + \\ + (X_*^T D + Y^T(k) D)^{-1} ((A + X_*^T B) + Y^T(k) B) x_* - x_*.$$

Позначимо

$$X_*^T D = \tilde{E}_1, \quad A + X_*^T B = \tilde{A}.$$

Оскільки тотожно виконується

$$(\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D) = E,$$

то одержимо

$$y(k+1) = (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k) B) y(k) + \\ + (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k) B) x_* - (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D) x_*.$$

Або

$$y(k+1) = (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k) B) y(k) + (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} [(\tilde{A} + Y^T(k) B) - (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)] x_*.$$

Звідси

$$y(k+1) = (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k) B) y(k) + (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} [(\tilde{A} - \tilde{E}_1) x_* + Y^T(k) (B - D) x_*].$$

З умови (9) одержуємо

$$X_*^T D x_* = (A + X_*^T B) x_*.$$

Звідси

$$(\tilde{A} - \tilde{E}_1) x_* = [A + X_*^T (B - D)] x_* = 0$$

і система буде мати вигляд

$$y(k+1) = (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} (\tilde{A} + Y^T(k) B) y(k) + (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} Y^T(k) (B - D) x_*.$$

Оскільки

$$Y^T(k) (B - D) x_* = X_*^T (\tilde{B} - \tilde{D}) y(k),$$

то маємо

$$y(k+1) = (\tilde{E}_1 + Y^T(k) D)^{-1} \{ \tilde{A} + Y^T(k) (B + X_*^T (\tilde{B} - \tilde{D})) \} y(k),$$

тобто одержали твердження лемми 2.

Нарешті розглянемо систему

$$x(k+1) = L + \{A + [E + X^T(k)D]^{-1} X^T(k)B + [E + X^T(k)Q]^{-1} X^T(k)S\}x(k). \quad (10)$$

Одержимо аналогічні результати зведення дослідження положення рівноваги $x(k) = x_*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ цієї системи до тривіального положення рівноваги $y(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ системи

$$y(k+1) = \{A + [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} [Y^T(k)B + R] + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} [Y^T(k)S + N]\}y(k). \quad (11)$$

Попередньо доведемо доцільний результат.

Лема 3. Нехай матриці $E + (Y(k) + X_*)^T D$ і $E + X_*^T D$ не вироджені. Тоді має місце рівність

$$[E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} - [E + X_*^T D]^{-1} = -[(E + X_*^T D) + Y^T(k)D]^{-1} Y^T(k)D [E + X_*^T D]^{-1}. \quad (12)$$

Доведення. Як випливає з умов невиродженості, має місце тотожність

$$E = [(E + X_*^T D) + Y^T(k)D]^{-1} [E + X_*^T D] - Y^T(k)D [E + X_*^T D]^{-1}.$$

Домножимо її зліва на $[(E + X_*^T D) + Y^T(k)D]^{-1}$ і одержимо

$$[(E + X_*^T D) + Y^T(k)D]^{-1} = [E + X_*^T D]^{-1} - [(E + X_*^T D) + Y^T(k)D]^{-1} Y^T(k)D [E + X_*^T D]^{-1},$$

тобто твердження леми 3.

Лема 4. Нехай матриці $E + (Y(k) + X_*)^T Q$ і $E + X_*^T Q$ не вироджені. Тоді має місце рівність

$$[E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} - [E + X_*^T Q]^{-1} = -[(E + X_*^T Q) + Y^T(k)Q]^{-1} Y^T(k)Q [E + X_*^T Q]^{-1}. \quad (13)$$

Доведення. Аналогічно попередній лемі.

За допомогою приведених лем 3, 4 доведемо наступне твердження.

Лема 5. Дослідження динаміки положення рівноваги $x(k) = x_*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ системи (10) можна звести до дослідження динаміки нульового положення $y(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ системи (11).

$$y(k+1) = \{A + [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} [Y^T(k)B + R] + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} [Y^T(k)S + N]\}y(k).$$

Тут

$$D_1 = E + X_*^T D, \quad Q_1 = E + X_*^T Q, \quad N = X_*^T (S + \tilde{S} - \tilde{N}_1), \quad R = X_*^T (B + \tilde{B} - \tilde{R}_1),$$

$$\tilde{S}^T = (S_1, S_2, \dots, S_n), \quad \tilde{B}^T = (B_1, B_2, \dots, B_n), \quad N_1 = Q[E + X_*^T Q]^{-1} X_*^T S = \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ \dots \\ N_{1n} \end{bmatrix},$$

$$R_1 = D[E + X_*^T D]^{-1} X_*^T B = \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ \dots \\ R_{1n} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{N}_1 = \begin{bmatrix} N_{11}^T \\ N_{12}^T \\ \dots \\ N_{1n}^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} R_{11}^T \\ R_{12}^T \\ \dots \\ R_{1n}^T \end{bmatrix}.$$

Доведення. Нехай $x(k) = x_*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ положення рівноваги системи (10), тобто

$$x_* = L + \{A + [E + X_*^T D]^{-1} X_*^T B + [E + X_*^T Q]^{-1} X_*^T S\} x_*.$$

Зробимо заміну

$$x(k) = y(k) + x_*,$$

і одержуємо систему наступного вигляду

$$y(k+1) + x_* = L +$$

$$+ \{A + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} (Y(k) + X_*)^T B + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} (Y(k) + X_*)^T S\} (y(k) + x_*).$$

Перепишемо її у вигляді

$$\begin{aligned} y(k+1) = & \{A + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} (Y(k) + X_*)^T B + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} (Y(k) + X_*)^T S\} y(k) + \\ & + \{A + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} (Y(k) + X_*)^T B + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} (Y(k) + X_*)^T S\} x_* - \\ & - \{A + [E + X_*^T D]^{-1} X_*^T B + [E + X_*^T Q]^{-1} X_*^T S\} x_*. \end{aligned}$$

Звівши подібні, одержуємо

$$\begin{aligned} y(k+1) = & \{A + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} (Y(k) + X_*)^T B + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} (Y(k) + X_*)^T S\} y(k) + \\ & + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} Y^T(k) B x_* + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} X_*^T S x_* - \\ & - A + [E + X_*^T D]^{-1} X_*^T B - [E + X_*^T Q]^{-1} X_*^T S\} x_*. \end{aligned}$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} y(k+1) = & \{A + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} (Y(k) + X_*)^T B + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} (Y(k) + X_*)^T S\} y(k) + \\ & + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} Y^T(k) B x_* + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} Y^T(k) S x_* - \\ & - \{[E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} - [E + X_*^T D]^{-1}\} X_*^T B + \{[E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} - [E + X_*^T Q]^{-1}\} X_*^T S\} x_*. \end{aligned}$$

Оскільки

$$Y^T(k) B x_* = X_*^T \tilde{B} y(k), \quad Y^T(k) S x_* = X_*^T \tilde{S} y(k),$$

де

$$\tilde{S}^T = (S_1, S_2, \dots, S_n), \quad \tilde{B}^T = (B_1, B_2, \dots, B_n),$$

то використовуючи рівності (12), (13) лем 3, 4, перепишемо систему у наступному вигляді

$$\begin{aligned} y(k+1) = & \{A + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} (Y(k) + X_*)^T B + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} (Y(k) + X_*)^T S + \\ & + [E + (Y(k) + X_*)^T D]^{-1} X_*^T \tilde{B} + [E + (Y(k) + X_*)^T Q]^{-1} X_*^T \tilde{S}\} y(k) - \\ & - \{([E + X_*^T D] + Y^T(k) D)^{-1} Y^T(k) D (E + X_*^T D)^{-1}\} X_*^T B + \\ & + \{[E + X_*^T Q + Y^T(k) Q]^{-1} Y^T(k) Q (E + X_*^T Q)^{-1}\} X_*^T \tilde{S}\} x_* - \end{aligned}$$

Позначимо

$$D_1 = E + X^T D, Q_1 = E + X^T Q, Q(E + X^T Q)^{-1} X^T S = N_1, D(E + X^T D)^{-1} X^T B = R_1.$$

Тоді будемо мати

$$y(k+1) = \left\{ A + [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} Y^T(k)B + [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} X^T (B + \tilde{B}) + \right. \\ \left. + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} Y^T(k)S + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} X^T (S + \tilde{S}) \right\} y(k) - \\ - \left\{ [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} Y^T(k)R_{1x} + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} Y^T(k)N_{1x} \right\}.$$

І оскільки

$$Y^T(k)R_{1x} = X^T \tilde{R}_1 y(k), Y^T(k)N_{1x} = X^T \tilde{N}_1 y(k),$$

то одержуємо

$$y(k+1) = \left\{ A + [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} Y^T(k)B + [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} X^T (B + \tilde{B}) + \right. \\ \left. + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} Y^T(k)S + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} X^T (S + \tilde{S}) - \right. \\ \left. - [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} X^T \tilde{R}_1 - [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} X^T \tilde{N}_1 \right\} y(k).$$

Або, остаточно

$$y(k+1) = \left\{ A + [D_1 + Y^T(k)D]^{-1} [Y^T(k)B + X^T (B + \tilde{B}) - X^T \tilde{R}_1] + \right. \\ \left. + [Q_1 + Y^T(k)Q]^{-1} [Y^T(k)S + X^T (S + \tilde{S}) - X^T \tilde{N}_1] \right\} y(k),$$

що і треба було довести.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хусаїнов Д.Я., Кирашук Д.Д. Дослідження стійкості різницевої системи з дробово-раціональною правою частиною з запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 1999. – С.239-242.
2. Хусаїнов Д.Я., Иванов А.Ф., Бычков А.С., Кирашук Д.Д. Исследование устойчивости разностных систем большой размерности с запаздыванием // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №1(87), 2002. – С.3-10.
3. Хусаїнов Д.Я., Стадник О.І., Шатирко А.В. Уніфікація класу нелінійних динамічних систем з дробово-раціональною правою частиною // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2004. – С.239-242.

Надійшла до редколегії 27.10.2004

УДК 510.6

Степан С. Шкільняк*

**Композиційно-номінативні
логіки квазіарних предикатів**
Серія: фізико-математичні науки

Досліджені фінітарні логіки часткових предикатів над іменними множинами. Розглянута ієрархія таких логік. Для логік кванторного та функціонально-екваційного рівня побудовані секвенційні числення без обмежень різнокванторності, доведені теореми повноти.

Ключові слова: логіки, ієрархія, числення, секвенції.

*E-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

Stepan S. Shkilniak*

**Composition nominative logics
of quasi-ary predicates**
Series: Physics & Mathematics

The finitary logics of partial predicates over named sets are investigated. The hierarchy of such logics is considered. For logics of the quantifier level and of the functional-equation level the sequential calculi without different-quantifier restrictions are constructed. The completeness theorems are proved.

Key Words: logics, hierarchy, calculi, sequents.

Апарат математичної логіки широко використовується в інформатиці, програмуванні, лінгвістиці, інших сферах діяльності людини. За останні роки виникло багато логічних формалізмів, які застосовуються для моделювання різноманітних предметних областей. Тому актуальною стає проблема інтеграції та уніфікації логічних формалізмів, побудови ієрархії логік різного рівня абстрактності та загальності. Для розв'язку цієї проблеми видається природним використання композиційно-номінативного підходу [1]. Згідно такого підходу побудову починаємо з гранично абстрактних рівнів розгляду предметних областей, поступово їх конкретизуючи. Логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі. Це означає, що спочатку будуємо відповідні розглянутому рівню абстракції математичні моделі предметних областей, які задають семантичні аспекти логік, після чого будуємо формально-аксіоматичні логічні числення, які задають синтаксичні аспекти.

Особливе місце в ієрархії логік займає класична логіка предикатів. Вона детально досліджена, має багатий досвід застосування, є основою низки спеціальних логік. Проте класична логіка має багато обмежень, які ускладнюють її використання. Згідно проведеного в [2] аналізу класичної логіки можна стверджувати, що будовані нові логіки мусять базуватися на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень – квазіарних відображеннях.

Рівні абстрактності розгляду предметних областей відрізняються трактуванням рівня абстрактності множини даних. Природно виділити пропозиційний, сингулярний та номінативний рівні.

На *пропозиційному* рівні дані трактуються гранично абстрактно. На цьому рівні предикати – це часткові відображення вигляду $A \rightarrow \{T, F\}$, де A – множина абстрактних даних. Базовими композиціями пропозиційного рівня є диз'юнкція $\vee$ та заперечення $\neg$.

На *сингулярному* рівні дані розглядаються гранично конкретно. На цьому рівні фіксується єдиний клас даних. Композиціями сингулярного рівня є гранично конкретні аплікативні композиції. Практично кожний логічний засіб може трактуватися як аплікативна композиція.

На *номінативному* рівні дані будуються індуктивно із множини предметних імен та множини предметних значень. Такий рівень надзвичайно багатий, він розпадається на низку підрівнів. В даній роботі обмежимося розглядом 1-рівневих однозначних номінативних даних – іменних множин.

Невизначені тут поняття і позначення розуміємо в смислі робіт [3, 4].

Функції над іменними множинами називають *квазіарними*. Будемо розглядати квазіарні функції двох типів. Функцію вигляду $P: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$ назовемо *V-квазіарним предикатом на A*. Функцію вигляду $f: {}^V A \rightarrow A$ назовемо *V-квазіарною функцією на A*.

На рівні іменних множин виділяємо реномінативний, кванторний, кванторно-екваційний, функціональний та функціонально-екваційний рівні.

Реномінативний рівень. Реномінативні логіки є найабстрактнішими серед логік номінативного рівня. Починаючи з реномінативного рівня можна перейменовувати компоненти даних. Це дає змогу ввести композицію *реномінації* (перейменування). Базовими композиціями реномінативних логік є $\vee, \neg$ та реномінація $R_{\bar{H}}^{\bar{V}}$. Такі логіки досліджені в [3, 5].

Кванторний рівень. На кванторному рівні можна застосовувати предикати до всіх предметних значень. Це дозволяє ввести композиції *квантифікації* $\exists x$ та $\forall x$. Базовими композиціями логік кванторного рівня є $\vee, \neg, R_{\bar{H}}^{\bar{V}}, \exists x$. Такі логіки розглянуті, зокрема, в [2, 3].

Кванторно-екваційний рівень. На кванторно-екваційному рівні додаються можливості ототожнення і розрізнення значень предметних імен, використовуючи спеціальні *предикати рівності* $=_{xy}$. Логіки такого рівня досліджені в [6]. Базовими композиціями цих логік є $\vee, \neg, R_{\bar{H}}^{\bar{V}}, \exists x$.

Функціональний рівень. На функціональному рівні маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій та предикатів. Це дає змогу ввести композицію *суперпозиції* $S^{\bar{x}}$. Базовими композиціями функціонального рівня є $\vee, \neg, R_{\bar{H}}^{\bar{V}}, \exists x, S^{\bar{x}}$.

Для роботи з компонентами даних природно виділити множину спеціальних *функцій розіменування* $'x$. Тоді реномінація моделюється за допомогою суперпозиції, тому до базових композицій віднесемо $\vee, \neg, \exists x, S^{\bar{x}}$.

Логіки функціонального рівня розглянуті в [7].

Функціонально-екваційний рівень. На додаток до можливостей функціонального рівня, функціонально-екваційний рівень дає змогу ототожнювати і розрізняти предметні значення. На цьому рівні можна ввести спеціальну *композицію рівності* $=$. Враховуючи наявність функцій розіменування, базовими композиціями такого рівня є $\vee, \neg, \exists x, S^{\bar{x}}, =$.

Логіки функціонально-екваційного рівня розглянуті, зокрема, в [3].

Клас квазіарних предикатів дуже потужний. Для таких предикатів у загальному випадку не діють деякі важливі закони класичної логіки. Можна довести, що для квазіарних предикатів з умови $\models \Phi$ випливає $\models \forall x \Phi$. Проте не завжди з умови $\models \forall x \Phi$ випливає $\models \Phi$. Це показує наступний приклад.

Визначимо $p_A(d) = T$ при $x \in \text{im}(d)$, $p_A(d) = F$ при $x \notin \text{im}(d)$. Нехай Φ – це формула $\forall x p \rightarrow p$. Тоді $(\forall x p \rightarrow p)_A(d) = F$ при $x \notin \text{im}(d)$, тому $\not\models \Phi$. Але для квазіарних предикатів завжди $\models \forall x (\forall x A \rightarrow A)$, тому $\models \forall x \Phi$.

Таким чином, для збереження основних властивостей класичної логіки клас квазіарних предикатів варто обмежити.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів. Дуже природне обмеження задається властивістю *еквітонності*, яка означає, що значення відображення не змінюється при розширенні даних.

Функція g *еквітонна*, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ із умов $d' \supseteq d$ та $g(d) \downarrow$ випливає $g(d') \downarrow = g(d)$.

Другим важливим обмеженням є *повнототальність*. Вона означає визначеність функції на максимальних даних – V -повних іменних множинах.

Функція g *повнототальна*, якщо $g(d) \downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Умови еквітонності та повнототальності справджуються для класичної логіки, вона є логікою тотальних еквітонних скінченно-арних предикатів.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів названі неокласичними [2], бо вони найближчі до класичної логіки, зберігають основні її закони при істотному розширенні класу семантичних моделей.

Для логік повнототальних еквітонних предикатів відповідного рівня збудовані аксіоматичні системи Гільбертівського типу – неокласичні числення. Для таких числень доведені теореми несуперечливості та повноти.

Логіки еквітонних предикатів. Такі логіки теж можна віднести до неокласичних, вони зберігають основні закони класичної логіки. Проте для логік еквітонних предикатів (логік ЕП) вже не діють [8] деякі правила виведення (*modus ponens* та споріднене з ним правило перетину).

Відмова від *modus ponens* спонукає вести дослідження синтаксичних властивостей логік ЕП на базі Генценівських систем – секвенційних числень. Такі числення збудовані [4, 7, 9, 10] для логік ЕП відповідного рівня.

Клас моделей логіки ЕП істотно ширший за клас моделей логіки повнототальних еквітонних предикатів. Тому дуже природним є намагання збудувати неокласичні логіки з максимально широкими класами моделей.

Логіки локально-еквітонних предикатів. Для таких предикатів вимагається збереження значення лише при скінченних розширеннях даних.

Функція g *локально-еквітонна*, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ із того, що $g(d) \downarrow$, $d' \supseteq d$ та $d' \setminus d$ скінченна, випливає $g(d') \downarrow = g(d)$.

Семантичні та синтаксичні властивості логіки локально-еквітонних предикатів (логіки ЛЕП) аналогічні [11] відповідним властивостям логіки ЕП. Логіки ЛЕП досліджені в [11], для них збудовані секвенційні числення.

Клас моделей логіки ЛЕП є розширенням класу моделей логіки ЕП.

2.4. Логіки еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів. Такі логіки враховують неповноту наявної інформації про предметну область. Вони базуються на класах предикатів, визначених на даних з неповною інформацією. Еквісумісність функції означає, що при можливості розширення різних даних (сумісність даних) до одного більшого даного, значення функції на таких даних мусять співпадати. При локально-еквісумісності вимагаємо збереження значень лише для скінченних розширень.

Іменні множини d та d' сумісні, що позначаємо $d \approx d'$, якщо функція $d \cup d'$ однозначна.

Функція g еквісумісна, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ із умов $d \approx d'$, $P(d) \downarrow$ та $P(d') \downarrow$ випливає $g(d) = g(d')$.

Функція g локально-еквісумісна, якщо для довільних $d, d' \in {}^V A$ таких, що $(d \setminus d') \cup (d' \setminus d)$ скінченна, із умов $d \approx d'$, $P(d) \downarrow$ та $P(d') \downarrow$ випливає $P(d) = P(d')$.

Логіки еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів досліджені в [12]. Класи еквісумісних предикатів (ЕСП) та локально-еквісумісних предикатів (ЛЕСП) є розширеннями класів ЕП та ЛЕП (приклади див. [12]).

Секвенційні числення для розглянутих тут класів логік квазіарних предикатів базуються на семантичних властивостях відношення $\models$ логічного наслідку для множин формул. Властивості відношення $\models$ для логік ЛЕП, ЕСП, ЛЕСП [11, 12] аналогічні властивостям відношення $\models$ для логік еквітонних предикатів [4], тому секвенційне числення певного рівня може описувати кожну із зазначених вище логік відповідного рівня. Інакше кажучи, на кожному рівні фактично маємо одне і те ж секвенційне числення для логік еквітонних предикатів, ЛЕП, ЕСП, ЛЕСП.

Секвенційні числення кванторного рівня. Кванторні секвенційні числення, орієнтовані на різнокванторні секвенції, збудовані в [4, 9]. Будемо їх називати QBN -численнями. Пропоновані тут QZN -числення не мають такого обмеження. Для їх побудови, поряд із властивостями обмеженої $R\exists$ -дистрибутивності $R\exists_{\perp}$ та $R\exists_{\neg}$, використовуємо властивості загальної $R\exists$ -дистрибутивності $R\exists\exists_{\perp}$ та $R\exists\exists_{\neg}$:

$$R\exists\exists_{\perp}) \quad R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ_z^x(\Phi), \Gamma \models \Delta.$$

$$R\exists\exists_{\neg}) \quad \Gamma \models \Delta, R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ_z^x(\Phi).$$

Для $R\exists\exists_{\perp}$ та $R\exists\exists_{\neg}$ умова: z тотально неістотне та $z \notin \text{nt}(R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x \Phi))$.

Тут $\text{nt}(\Phi)$ – множина всіх предметних імен, що фігурують в формулі Φ .

Замість $PsN_{\perp}$ та $PsN_{\neg}$ візьмемо загальніші властивості $\Phi N_{\perp}$ та $\Phi N_{\neg}$.

Вводимо базові секвенційні форми $\vdash \neg$, $\neg \neg$, $\vdash \vee$, $\neg \vee$, $\vdash RT$, $\neg RT$, $\vdash R \neg$, $\neg R \neg$, $\vdash R \vee$, $\neg R \vee$, $\vdash RR$, $\neg RR$ (див. [4, 9]) та наведені нижче форми:

$$\vdash \Phi N \quad \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}}(A), \Sigma} \quad \text{при } y \in \mu(A) \quad \neg \Phi N \quad \frac{\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\neg R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}}(A), \Sigma} \quad \text{при } y \in \mu(A)$$

$$\begin{array}{l} \vdash R\exists \frac{\vdash \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x A), \Sigma} \text{ при } x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\} \quad \vdash R\exists \frac{\vdash \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x A), \Sigma} \text{ при } x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\} \\ \vdash R\exists\exists \frac{\vdash \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ_z^x(A), \Sigma}{\vdash R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x A), \Sigma} \quad \vdash R\exists\exists \frac{\vdash \exists z R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n} \circ_z^x(A), \Sigma}{\vdash R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x A), \Sigma} \end{array}$$

Для $\vdash R\exists\exists$ та $\vdash R\exists$ умови: $x \in \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$, z тотально неістотне та $z \notin nm(R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\exists x A))$. Отже, при $x \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ використовуємо $\vdash R\exists$ та $\vdash R\exists$, якщо ж $x \in \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$, то використовуємо $\vdash R\exists\exists$ та $\vdash R\exists\exists$.

$$\vdash \exists \frac{\vdash R_y^x(A), \Sigma}{\vdash \exists x A, \Sigma} \quad \vdash \exists \frac{\vdash R_{z_1}^x(A), \dots, \vdash R_{z_m}^x(A), \Sigma, \vdash \exists x A}{\vdash \exists x A, \Sigma}$$

Для $\vdash \exists$ y тотально неістотне та $y \notin nm(\Sigma, A)$. Для $\vdash \exists \{z_1, \dots, z_m\}$ – це множина усіх імен доступних [4, 9] формул секвенції $\vdash \exists x A, \Sigma$.

Для доведення повноти QZN-числень дещо модифікуємо визначення модельної множини.

Множина **H** специфікованих формул із множиною імен $W = nm(\mathbf{H})$ модельна, якщо виконуються наведені в [4, 9] умови 1) – 8) та наступні умови.

9-1) При $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$: якщо $\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in \mathbf{H}$, то $\vdash \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$;

якщо $\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in \mathbf{H}$, то $\vdash \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$.

9-2) При $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$: для деякого тотально неістотного $z \in W$ такого, що $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi))$, маємо:

якщо $\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in \mathbf{H}$, то $\vdash \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x(\Phi) \in \mathbf{H}$;

якщо $\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \in \mathbf{H}$, то $\vdash \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x(\Phi) \in \mathbf{H}$;

10) Якщо $\vdash \exists x \Phi \in \mathbf{H}$, то існує $y \in W$ таке, що $\vdash R_y^x(\Phi) \in \mathbf{H}$;

якщо $\vdash \exists x \Phi \in \mathbf{H}$, то для кожного $y \in W$ $\vdash R_y^x(\Phi) \in \mathbf{H}$.

Стисло опишемо побудову секвенційного дерева в QZN-численнях.

На початку побудови дерева для секвенції Σ зафіксуємо деякий нескінченний список TN тотально неістотних імен такий, що імена списку TN не зустрічаються в формулах секвенції Σ . Процедура побудови дерева розбивається на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться лише до скінченної множини доступних формул. На початку кожного етапу виконується крок доступу: до списку доступних формул додається по одній формулі з $\vdash$ -списку та $\vdash$ -списку. Якщо в секвенції немає недоступних $\vdash$ -формул чи $\vdash$ -формул (відповідний список вичерпаний), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку. На початку побудови доступні лише перші формули списків

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі $k+1$ перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій). Якщо всі листи дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево, процедура завершена позитивно.

Нехай існують незамкнені листи секвенційного дерева. Для кожного такого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого виконуємо наступні дії, добудовуючи скінченне піддерево з вершиною ξ :

(1) Активізуємо всі доступні непримітивні формули ξ .

(2) По черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму. Секвенційні форми $\vdash RT$ та $\neg RT$ допоміжні: перед застосуванням однієї з секвенційних форм $\vdash \Phi N$, $\vdash RR$, $\vdash R\neg$, $\vdash R\vee$, $\vdash R\exists$ чи $\neg \Phi N$, $\neg RR$, $\neg R\neg$, $\neg R\vee$, $\neg R\exists$ ми усуваємо в разі наявності тотожні перейменування, застосовуючи належну кількість раз $\vdash RT$ чи $\neg RT$. Після застосування недопоміжної форми формула дезактивується.

Спочатку виконуємо всі $\vdash \exists$ -форми. При застосуванні $\vdash \exists$ беремо y як перше незадіяне ім'я списку TN . Після виконання $\vdash \exists$ -форм виконуємо всі $\vdash R\exists\exists$ -форми та $\neg R\exists\exists$ -форми. При цьому беремо y тотально неістотне таке, що $z \notin \text{nt}(R_u^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$, із наявних імен доступних формул. Якщо такого y серед наявних імен немає, то беремо як y нове ім'я із TN . Потім до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну їй форму $\vdash \neg$, $\neg \neg$, $\vdash \vee$, $\neg \vee$, $\vdash \Phi N$, $\neg \Phi N$, $\vdash RR$, $\neg RR$, $\vdash R\neg$, $\neg R\neg$, $\vdash R\vee$, $\neg R\vee$, $\vdash R\exists$, $\neg R\exists$, $\vdash \exists$. При застосуванні $\neg \exists$ множина $\{z_1, \dots, z_m\}$ складається з усіх імен доступних формул листа. Без обмежень загальності усуваємо всі повтори формул в секвенції.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

- 1) Процедура завершена позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.
- 2) Процедура завершена негативно або не завершується, маємо скінченне незамкнене дерево або нескінченне дерево. В такому дереві існує [4, 9] скінченний або нескінченний незамкнений шлях $\wp$.

Теорема 1. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях в секвенційному дереві, H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді H – модельна множина.

Теорема 2. Нехай H – модельна множина, нехай $W = \text{nt}(H)$. Тоді існують АС $A = (A, I)$ з $|A| = |W|$ та ін'єктивна $\delta \in {}^V A$ з $\text{im}(\delta) = W$ такі:

- 1) якщо $\vdash \Phi \in H$, то $\Phi_A(\delta) = T$; 2) якщо $\neg \Phi \in H$, то $\Phi_A(\delta) = F$.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деяку ін'єктивну $\delta \in {}^V A$ з $\text{im}(\delta) = W$. Доводимо індукцією за складністю формули згідно до побудови модельної множини. Спочатку задамо значення базових предикатів на δ та на іменних множинах вигляду $r_u^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо $\vdash p \in H$, то візьмемо $p_A(\delta) = T$; якщо $\neg p \in H$, то візьмемо $p_A(\delta) = F$.

Якщо $\vdash R_u^{\bar{v}}(p) \in H$, то $p_A(r_u^{\bar{v}}(\delta)) = T$; якщо $\neg R_u^{\bar{v}}(p) \in H$, то $p_A(r_u^{\bar{v}}(\delta)) = F$.

Задані вказаним чином значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю, враховуючи умови неістотності імен, на відповідні $h \in {}^V A$.

В усіх інших випадках $d \in {}^V A$ значення $p_A(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи еквітонність та обмеження стосовно неістотних імен: для всіх $d, h \in {}^V A$ таких, що $d||-\mu(p) = h||-\mu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$.

Неважко довести, що значення базових предикатів визначені коректно.

Подальше доведення аналогічне доведенню відповідної теореми для QBN -числень [4]. Розглянемо лише доведення для п. 9-1) і п. 9-2) визначення $\mathbf{H}$.

Нехай $\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in \mathbf{H}$ та $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$. За визначенням $\mathbf{H}$ $\vdash \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}\Phi \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $(\exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi))_A(\delta) = T$, звідки $(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))_A(\delta) = T$.

Нехай $\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in \mathbf{H}$ та $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$. За визначенням $\mathbf{H}$ $\vdash \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x (\Phi) \in \mathbf{H}$ для деякого тотально неістотного $z \in W$ такого, що $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$. За припущенням індукції $(\exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \circ_z^x (\Phi))_A(\delta) = T$, звідки $(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))_A(\delta) = T$.

Для випадку $\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in \mathbf{H}$ доведення аналогічне. ■

На основі теореми 2, як і для випадку QBN -числень [9], отримуємо:

Теорема 3 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \neg \Delta$ вивідна.

Секвенційні числення функціонального рівня. В роботах [4, 7, 10] збудовані секвенційні числення функціонального та функціонально-екваційного рівнів, орієнтовані на різнокванторні секвенції. В пропонованих тут $FEZN$ -численнях таке обмеження знімаємо. Для побудови $FEZN$ -числень, поряд із властивостями обмеженої $S\exists$ -дистрибутивності $S\exists_{\vdash}$ та $S\exists_{\neg}$, використовуємо властивості загальної $S\exists$ -дистрибутивності $S\exists\exists_{\vdash}$ та $S\exists\exists_{\neg}$.

Позначимо $nm(\varphi)$ множину всіх предметних імен, що входять до складу терма чи формули φ . Позначимо $dnm(\varphi)$ множину предметних імен, відповідних тим ДНС, що входять до складу φ . Множину $nm(\varphi) \cup dnm(\varphi)$ позначимо $ndn(\varphi)$. Визначимо множину $\{y \mid y \in ndn(\varphi)\}$ ДНС-дублів імен φ .

Властивості $S\exists\exists_{\vdash}$ та $S\exists\exists_{\neg}$ мають такий вигляд:

$$S\exists\exists_{\vdash}) \quad S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists y S^{\bar{v},x}(\Phi, \bar{t}, y), \Gamma \models \Delta.$$

$$S\exists\exists_{\neg}) \quad \Gamma \models \Delta, S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists y S^{\bar{v},x}(\Phi, \bar{t}, y).$$

Тут $y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}))$ та y тотально неістотне.

Базові секвенційні форми $FEZN$ -числень індуковані відповідними властивостями відношення $\models$. Це форми $\vdash \neg, \neg \vdash, \vdash \vee, \neg \vee, \vdash S\Phi, \neg S\Phi, \vdash S\neg, \neg S\neg, \vdash S\vee, \neg S\vee, \vdash S\exists, \neg S\exists, \vdash S\exists\exists, \neg S\exists\exists, \vdash \exists, \neg \exists, \vdash ZN\Phi, \neg ZN\Phi, \vdash Z\Phi, \neg Z\Phi, \vdash SE, \neg SE$. Використовуємо також форми $\vdash TrN$ та $\neg TrN$ для нормалізації термів. Для більшої виразності замість $\vdash ZN$ та $\neg ZN$ [7, 10] використовуємо загальніші форми $\vdash ZN\Phi$ та $\neg ZN\Phi$, отримані на основі властивостей $ZN\Phi_{\vdash}$ та $ZN\Phi_{\neg}$.

Наведемо форми $\vdash ZN\Phi, \neg ZN\Phi, \vdash S\exists, \neg S\exists, \vdash S\exists\exists, \neg S\exists\exists, \vdash \exists, \neg \exists$:

$$\vdash ZN\Phi \quad \frac{\vdash S^{\bar{v}}(A, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{x,\bar{v}}(A, \bar{t}, \bar{t}), \Sigma} \quad \neg ZN\Phi \quad \frac{\neg S^{\bar{v}}(A, \bar{t}), \Sigma}{\neg S^{x,\bar{v}}(A, \bar{t}, \bar{t}), \Sigma}$$

Для $\vdash ZN\Phi$ та $\neg ZN\Phi$ умова: $x \in \mu(A)$.

$$\vdash S\exists \quad \frac{\vdash \exists x S^{\bar{v}}(A, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\exists x A, \bar{t}), \Sigma} \quad \neg S\exists \quad \frac{\neg \exists x S^{\bar{v}}(A, \bar{t}), \Sigma}{\neg S^{\bar{v}}(\exists x A, \bar{t}), \Sigma}$$

$$\vdash S\exists\exists \quad \frac{\vdash \exists y S^{\bar{v},x}(A, \bar{t}, y), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\exists x A, \bar{t}), \Sigma} \quad \neg S\exists\exists \quad \frac{\neg \exists y S^{\bar{v},x}(A, \bar{t}, y), \Sigma}{\neg S^{\bar{v}}(\exists x A, \bar{t}), \Sigma}$$

Для $\vdash S\exists$ та $\neg S\exists$ умови: $x \notin \{\bar{v}\}$ та $x \in \mu(\bar{t})$. Для $\vdash S\exists\exists$ та $\neg S\exists\exists$ умови: $x \in \{\bar{v}\}$ або $x \in \mu(\bar{t})$, y тотально неістотне та $y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}))$.

$$\vdash \frac{\vdash S^x(A, 'y), \Sigma}{\vdash \exists x A, \Sigma} \quad \vdash \frac{\vdash S^x(A, t_1), \dots, \vdash S^x(A, t_n), \Sigma, \vdash \exists x A}{\vdash \exists x A, \Sigma}$$

Для $\vdash \exists$ умова: y тотально неістотне та $y \notin ndn(\Sigma, A)$.

Для $\vdash \exists$ терми $t_1, \dots, t_n$ нормальні, побудовані з ФС і ДНС-дублів імен доступних формул секвенції $\vdash \exists x A, \Sigma$.

Для FEZN-числень дещо модифікуємо визначення модельної множини.

Множина H специфікованих формул *модельна*, якщо виконуються умови 1), 3)–10), 12), E1)–E5) визначення модельної множини [4] та умови:

2) Якщо $\vdash S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \in H$ та $y \in \mu(\Phi)$, то $\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H$;

якщо $\vdash S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \in H$ та $y \in \mu(\Phi)$, то $\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H$.

11-1) Якщо $\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) \in H$ та $x \notin \{\bar{v}\}$ і $x \in \mu(\bar{t})$, то $\vdash \exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H$;

якщо $\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) \in H$ та $x \notin \{\bar{v}\}$ і $x \in \mu(\bar{t})$, то $\vdash \exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H$.

11-2) Якщо $x \in \{\bar{v}\}$ або $x \notin \mu(\bar{t})$, то для деякого тотально неістотного $y \in W$ такого, що $y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}))$, маємо:

якщо $\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) \in H$, то $\vdash \exists y S^{\bar{v}, x}(\Phi, \bar{t}, 'y) \in H$;

якщо $\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) \in H$, то $\vdash \exists y S^{\bar{v}, x}(\Phi, \bar{t}, 'y) \in H$.

Побудова секвенційного дерева в FEZN-численнях подібна до відповідної побудови в QZN-численнях. На початку побудови дерева для секвенції Σ зафіксуємо деякий нескінченний список TN "нових" тотально неістотних імен, такі імена та відповідні "нові" ДНС не зустрічаються в Σ . Як і для QZN-числень, процедура побудови дерева розбита на етапи.

Із кожним листом дерева пов'язуємо списки ATr , AFs , ADn активних термів, ФС, ДНС-дублів імен. Терми нормальні, будуються з ФС та ДНС-дублів імен доступних формул. На початку кожного етапу перевіряємо, чи всі листи – замкнені секвенції. Якщо так, то маємо замкнене секвенційне дерево, процедура завершена позитивно. Якщо ні, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, відповідно розширюємо AFs та ADn , після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ . Для цього активізуємо всі доступні непримітивні формули ξ , по черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Спочатку виконуємо всі $\vdash \exists$ -форми. Після кожного виконання беремо новий $v \in TN$ та відповідно розширюємо ADn . Потім розширюємо ATr , будуючи із наявних AFs та ADn всеможливі терми в нормальній формі із вкладеністю суперпозицій $\leq k$. На етапі $k+1$ довжини списків імен суперпозицій $\leq k$, в них для кожного ФС f можна використати тільки перші k неістотних для f предметних імен.

Після виконання $\vdash \exists$ -форм виконуємо всі $\vdash S\exists\exists$ -форми та $\vdash S\exists\exists$ -форми. При цьому беремо y тотально неістотне таке, що $y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}))$, із наявних імен доступних формул. Якщо такого y серед наявних імен немає, то беремо як y нове ім'я із TN , після чого, як і для $\vdash \exists$ -форм, розширюємо ADn та ATr . Потім до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну

її форму типу $\vdash \neg, \neg \vdash, \vdash \vee, \neg \vee, \vdash \text{SS}\Phi, \neg \text{SS}\Phi, \vdash \text{S}\neg, \neg \text{S}\neg, \vdash \text{S}\vee, \neg \text{S}\vee, \vdash \text{SE}, \neg \text{SE}, \vdash \text{S}\exists, \neg \text{S}\exists, \neg \exists$. При застосуванні $\neg \exists$ -форми використовуємо терми ATr . До кожної нової формули як допоміжні застосовуємо при можливості форми типу $\vdash \text{Z}\Phi, \neg \text{Z}\Phi, \vdash \text{ZN}\Phi, \neg \text{ZN}\Phi$. Якщо нова формула елементарна, але не примітивна, додатково застосовуємо форми типу $\vdash \text{TrN}, \neg \text{TrN}$.

Якщо будоване дерево скінченне незамкнене або нескінченне, в ньому існує [4, 10] незамкнений шлях $\wp$. Як і для QZN -числень, множина $\mathbf{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій шляху $\wp$ – модельна.

Теорема 4. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях в секвенційному дереві, $\mathbf{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху $\wp$, W – множина імен, відповідних множині Dn ДНС-дублів імен формул $\mathbf{H}$. Тоді існують АС $\mathbf{A}=(A, I)$ та функція $\delta \in {}^V A$ з $im(\delta)=W$ такі:

1) якщо $\vdash \Phi \in \mathbf{H}$, то $\Phi_A(\delta)=T$; 2) якщо $\neg \Phi \in \mathbf{H}$, то $\Phi_A(\delta)=F$.

Нехай $Tr=\{t_0, t_1, \dots, t_m, \dots\}$ – множина нормальних термів, збудованих із ΦC та Dn . При цьому $Dn=\{v \mid v \in W\} \subseteq Tr$. Рівність індукує на Tr відношення еквівалентності: $t \sim s \Leftrightarrow \vdash t=s \in \mathbf{H}$. Нехай $A=Tr/\sim$ – фактор-множина Tr по $\sim$. Клас еквівалентності з представником t позначимо $[t]$.

Визначимо $\delta = [v \mapsto [v] \mid v \in W]$. Нехай $W=\{v_0, \dots, v_m, \dots\}$, причому кожне v_j суть t_{kj} . Тоді $\delta = [v_0 \mapsto [t_{k0}], \dots, v_j \mapsto [t_{kj}], \dots]$. Позначимо $[t_i]$ як a_i .

Визначимо f_A так, щоб виконувалась умова $(t_i)_A(\delta)=a_i$ для всіх $t_i \in Tr$.

Нехай $t_m='x$. Тоді $(t_m)_A(\delta) = ('x)_A(\delta) = ['x] = [t_m] = a_m$.

Нехай $t_m=f$. Задамо $f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$.

Нехай $t_m=S^{v_1 \dots v_n} f_{j_1 \dots j_n}$. Тоді задамо $f_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = a_m$.

Визначимо тепер p_A , враховуючи $(t_i)_A(\delta)=a_i$.

Якщо $\vdash p \in \mathbf{H}$, то $p_A(\delta)=T$. Якщо $\neg p \in \mathbf{H}$, то $p_A(\delta)=F$.

Якщо $\vdash S^{v_1 \dots v_n} p_{j_1 \dots j_n} \in \mathbf{H}$, то задамо $p_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = T$;

Якщо $\neg S^{v_1 \dots v_n} p_{j_1 \dots j_n} \in \mathbf{H}$, то задамо $p_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = F$.

Так визначені значення f_A та p_A продовжимо за еквітонністю. Для всіх інших $d \in {}^V A$ значення f_A та p_A задаємо довільним чином, враховуючи еквітонність та неістотність імен: для всіх $d, h \in {}^V A$ із $d \parallel -\mu(f) = h \parallel -\mu(f)$ впливає $f_A(d)=f_A(h)$ та з $d \parallel -\mu(p) = h \parallel -\mu(p)$ впливає $p_A(d)=p_A(h)$.

Після побудови АС $\mathbf{A}=(A, I)$ індукцією за складністю формули згідно побудови моделі:ої множини доводимо твердження 1) та 2) теореми.

Для пунктів 2)–9), 10), 12) визначення модельної множини доведення наведені в [10, 4]. Доведемо для пунктів 11-1) та 11-2).

Нехай $\vdash S^{\bar{v}} (\exists x \Phi, \bar{t}) \in \mathbf{H}$, $x \notin \{\bar{v}\}$, $x \in \mu(\bar{t})$. За визначенням $\mathbf{H}$ $\vdash \exists x S^{\bar{v}} (\Phi, \bar{t}) \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $(\exists x S^{\bar{v}} (\Phi, \bar{t}))_A(\delta)=T$, звідки $(S^{\bar{v}} (\exists x \Phi, \bar{t}))_A(\delta)=T$.

Нехай $\vdash S^{\bar{v}} (\exists x \Phi, \bar{t}) \in \mathbf{H}$ та $(x \in \{\bar{v}\} \text{ або } x \notin \mu(\bar{t}))$. За визначенням $\mathbf{H}$ $\vdash \exists y S^{\bar{v}, x} (\Phi, \bar{t}, y) \in \mathbf{H}$ для деякого тотально неістотного $y \in W$: $y \notin ndn(S^{\bar{v}} (\exists x \Phi, \bar{t}))$. За припущенням індукції $(\exists y S^{\bar{v}, x} (\Phi, \bar{t}, y))_A(\delta)=T$, звідки $(S^{\bar{v}} (\exists x \Phi, \bar{t}))_A(\delta)=T$.

Для випадку $\neg S^{\bar{v}} (\exists x \Phi, \bar{t}) \in \mathbf{H}$ доведення аналогічне. ■

РАДІОФІЗИКА

ΑΔΙΟΦΘΙΝΚΑ.



НАХОДКІН МИКОЛА ГРИГОРОВИЧ

25 січня виповнилося 80 років відомому вченому у галузях фізичної електроніки та фізики поверхні, двічі лауреату Державної премії України, Заслуженому діячеві науки і техніки, академіку НАН України Миколі Григоровичу Находкіну.

Весь трудовий шлях М.Г. Находкіна нерозривно пов'язаний з Київським університетом імені Тараса Шевченка. Після закінчення фізичного факультету у 1950 році він вступив до аспірантури, успішно закінчив її і в 1954 році під керівництвом професора Моргуліса Н.Д. захистив кандидатську дисертацію на тему "Исследование вторичной эмиссии некоторых металлов и полупроводников". Уже в 1952 році він починає працювати викладачем кафедри фізичної електроніки. У 1966 році М.Г. Находкін захистив докторську дисертацію ("Взаимодействие электронов и мягких рентгеновских лучей с веществом в тонком слое") і в цьому ж році йому присвоєно звання професора по кафедрі "електроніка". В 1972 році М.Г. Находкін заснував і очолив кафедру кріогенної та мікроелектроніки, якою керував на протязі 26 років. В цьому ж році його було обрано деканом радіофізичного факультету. В 1973 році М.Г. Находкіна було обрано членом-кореспондентом Академії наук УРСР, в 1990 році - дійсним членом АН України.

М.Г. Находкін - талановитий педагог. На протязі всіх років він читає курс загальної фізики ("Атомна фізика"), спецкурс "Фізичні основи мікроелектроніки".

Педагогічна діяльність М.Г. Находкіна поєднується з талантом вченого. Він очолює наукову школу "Емісійна електроніка та електронна спектроскопія" напрямки роботи якої охоплюють вивчення процесів взаємодії електронів та м'якого рентгенівського випромінювання з твердим тілом, вторинну електронну емісію, мас-спектрометрію, формування структури

тонких плівок, термостійкістю напівпровідників та оксидних катодів, тунельну скануючу мікроскопію. Цикл робіт, пов'язаний з термопластичним записом інформації, виконаний під керівництвом Находкіна М.Г., отримав Державну премію УРСР в області науки й техніки за 1970 рік. В 1962-1995 роках ним проводились роботи по вивченню фундаментальних закономірностей поверхневого масопереносу, кінетиці електронних процесів на поверхні і в приповерхневих шарах твердих тіл. Були визначені відмінності кінетичних явищ та розкрита їх фізична природа на поверхні і в об'ємі твердого тіла. Спостережена низка нових ефектів, зокрема, ефекту інтерференції каналів пружного та непружного розсіяння електронів середніх енергій тощо. Використання яких дозволило розробити нові методи діагностики поверхонь. Цей цикл робіт отримав Державну премію в галузі науки й техніки за 1997 рік.

Значне місце в діяльності М.Г. Находкіна займає робота з молодими науковцями як факультету, так і інших регіонів із держав СНД. Серед його учнів багато докторів та кандидатів наук, Лауреати Державних премій.

В науковому доробку М.Г.Находкіна близько 300 наукових праць, 37 авторських свідоцтв. За участю Находкіна М.Г. та під його редакцією видано 3 монографії ("Лазеры в криминалистике и судебных экспертизах" под ред. Н.Г. Находкина и В.И. Гончаренко К.: Вища школа. Головне вид.-во, 1986, 31с; "Атлас ионизационных спектров" под ред., д.ф.м.н. Н.Г. Находкина К.: Вища школа. Вид.-во при Київському ун-ті. 1989, - 232с.; "Ионизационная спектроскопия" под ред. акад. Н.Г. Находкина К.:Либідь. 1992, -212с.), учбовий посібник.

Багато сил та енергії М.Г.Находкін віддає науково-організаційній діяльності. Він був один з ініціаторів створення та головою Національної ради з питань науки та технологій, одним із засновників та першим Президентом Українського комітету радіосоюзу (відділення URSI). М.Г.Находкін був членом Наукових рад по фізичній електроніці та по голографії АН СРСР, декількох секцій АН УРСР засновником та на протязі 20 років головним редактором міжвідомчого збірника "Фундаментальные основы оптической памяти и среды", членом редколегій "Українського фізичного журналу" та "Фізичної енциклопедії". М.Г. Находкін був науковим керівником декількох міжвідомчих наукових програм та програм Міносвіти України. Зараз М.Г. Находкін - член Президії відділення фізики й астрономії НАНУ, член ВАК України.

Заслуги М.Г.Находкіна відзначені орденом "За заслуги" III ступеня, орденом "Знак почета", медалями, Почесною Грамотою Президії Верховної ради УРСР. В 1995 році йому присвоєно звання "Заслужений діяч науки і техніки". В 1999 році М.Г. Находкін став "Заслуженим професором Київського національного університету імені Тараса Шевченка".

Наукова громадськість університету щиро вітає Миколу Григоровича з ювілеєм, бажає йому міцного здоров'я, успіхів у творчій праці.

УДК 621.315.592

Ю.М.Гуденко, Л.В.Іщук

**“Повільні” і “швидкі” електрони
у плівках легованого оловом
оксиду індію**

Робота є продовженням дослідження нелінійності залежності поля Холла від магнітного поля у плівках легованого оловом оксиду індію, поясненої наявністю у цих плівках двох типів електронів - “повільних” і “швидких”. Вперше аналітично отримано вирази для визначення концентрації і рухливості “швидких” електронів. Узгодження результатів експерименту і теоретичних розрахунків підтверджують коректність запропонованої моделі.

Ключові слова: ефект Холла, “швидкі” і “повільні” електрони, концентрація, рухливість, слабкі і сильні магнітні поля.

Yu.M.Gudenko, L.V.Ishchuk

**“Slow” and “fast” electrons
in the indium-tin oxide films**

This paper presents the continuation of investigation of the Hall field vs the magnetic field non-linear dependence in the indium-tin oxide films. This effect was explained based on the model that takes into account the presence of “slow” and “fast” electrons in the film. The analytical form of expressions for the concentration and mobility of “fast” electrons were determined. The fitting of the theoretical calculations with experimental data confirms the correctness of the proposed model.

Key Words: Hall effect, “slow” and “fast” electrons, concentration, mobility, weak and strong magnetic fields.

ВСТУП

Плівки легованого оловом оксиду індію $\text{In}_2\text{O}_3(\text{Sn})$ завдяки унікальній комбінації електрофізичних властивостей (великі електропровідність, коефіцієнти відбиття світла в близький інфрачервоний та прозорості у видимій ділянках спектру) викликають останнім часом цікавість до них як до складової світловипромінюючих приладів на основі неорганічних напівпровідників [1], у яких вони застосовуються як прозорий контакт, що інjektує дірки [2]. Моделювання роботи таких приладів вимагає чіткої уяви про реальну зонну структуру всіх їх компонентів. Щодо $\text{In}_2\text{O}_3(\text{Sn})$, такі дані в літературі практично відсутні.

Під час досліджень електрофізичних властивостей плівок легованого оловом оксиду індію $\text{In}_2\text{O}_3(\text{Sn})$ була зафіксована нелінійна залежність поля Холла E_y від індукції магнітного поля B [3]. Ефект пояснили, користуючись ідеєю, запропонованою Віллардсоном, Харманом і Біром [4], які довели наявність “легких” і “важких” дірок у германії.

Ми припустили, що крім характерних для плівок $\text{In}_2\text{O}_3(\text{Sn})$ “повільних” електронів з малою рухливістю μ_1 і великою концентрацією

n_1 , існують і “швидкі” електрони з великою рухливістю μ_2 , але малою (порівняно із “повільними” електронами) концентрацією n_2 .

Запропонована в [3] модель дозволила визначити концентрацію і рухливість “повільних” і “швидких” електронів. Розраховані в рамках цієї моделі залежності $E_y(B)$ добре узгоджувались з експериментальними результатами, що підтвердило її коректність.

До недоліків запропонованої в [3] методики визначення концентрації і рухливості “повільних” і “швидких” електронів слід віднести те, що параметри “швидких” електронів визначались чисельно, підбором за методом ітерацій значень μ_2 і n_2 , при яких розрахована залежність $E_y(B)$ співпадала з експериментальною у межах заданої похибки. Такі обчислення тривали для кожної залежності від кількох годин до кількох діб в залежності від заданої точності обчислення, тому виникла потреба аналітичного розв’язку даної задачі, що і було метою даної роботи.

1. Теоретична модель

Розглянувши протікання струму у напівпровіднику n -типу провідності і припускаючи наявність у ньому двох типів електронів – “повільних” з рухливістю і концентрацією μ_1, n_1 і “швидких” – з μ_2, n_2 відповідно, причому

$$\mu_1 \ll \mu_2, \quad n_1 \gg n_2, \quad (1)$$

в [3] отримали залежність поля Холла E_y від B

$$E_y = - \left[\frac{\mu_1^2 n_1}{1 + (\mu_1 B)^2} + \frac{\mu_2^2 n_2}{1 + (\mu_2 B)^2} \right] \cdot \left[\frac{\mu_1 n_1}{1 + (\mu_1 B)^2} + \frac{\mu_2 n_2}{1 + (\mu_2 B)^2} \right]^{-1} E_x B. \quad (2)$$

Вираз (2) містить чотири невідомі параметри μ_1, n_1, μ_2, n_2 , визначенню яких і присвячена дана робота. Для того, щоб мати уяву про хід залежності $E_y(B)$, проаналізуємо отриману формулу у граничних випадках та на екстремуми.

2. Аналіз залежності $E_y(B)$

2.1. Граничні випадки

За відсутності “швидких” електронів ($n_2 = 0$), формула (2) набуває класичного вигляду [5]

$$E_y = -\mu_1 E_x B. \quad (3)$$

При $B \rightarrow 0$ для обох типів електронів буде виконуватись умова слабого магнітного поля $\mu_{1,2}B \ll 1$, отже у (2) можна буде знехтувати доданками $(\mu_{1,2}B)^2$ у порівнянні із одиницею. Тоді (2) набуває вигляду

$$E_y = -\frac{\mu_1^2 n_1 + \mu_2^2 n_2}{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2} E_x B. \quad (4)$$

У крайньому випадку $B = 0$ холлівське поле $E_y = 0$.

При $B > B_0$ умова сильного магнітного поля

$$\mu_2 B \gg 1 \quad (5)$$

виконується для "швидких" електронів, і формула (2) набуває вигляду (3).

Слід зауважити, що при $B \rightarrow \infty$ поле Холла (3) прямує у нескінченність. Це пов'язано з тим, що застосована модель не враховує особливостей поведінки носіїв заряду у сильних полях.

Із порівняння формул (3) і (4) бачимо, що кути нахилу лінійних ділянок залежності $E_y(B)$ суттєво відрізняються при $B < B_0$ та $B > B_0$, що узгоджується із експериментальними даними [3].

2.2. Дослідження першої похідної $\frac{dE_y(B)}{dB}$

Відомо, що необхідною умовою існування екстремуму функції у визначеній точці є рівність першої похідної нулю та нерівність нулю другої похідної. Узявши першу похідну $\frac{dE_y}{dB}$ і прирівнявши її до нуля, одержали біквадратне рівняння

$$AB^4 + CB^2 + D = 0, \quad (6)$$

де $A = \mu_1^3 \mu_2^3 (n_1 + n_2) (\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2)$,

$$C = \mu_1 \mu_2 [3 \mu_1 \mu_2 (n_1 + n_2) (\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - (\mu_1^2 n_1 + \mu_2^2 n_2) (\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2)],$$

$$D = (\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) (\mu_1^2 n_1 + \mu_2^2 n_2).$$

У залежності від знаку дискримінанту

$$\Delta = C^2 - 4AD = \mu_1^2 \mu_2^2 n_1 n_2 (\mu_1 + \mu_2) (\mu_1 - \mu_2)^2 \times \\ \times [n_1 n_2 (\mu_1 + \mu_2) (\mu_1 - \mu_2)^2 - 8 \mu_1 \mu_2 (n_1 + n_2) (\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)] \quad (7)$$

рівняння (6) не має дійсних розв'язків, якщо $\Delta < 0$; має два дійсних розв'язки, якщо $\Delta = 0$; має чотири дійсних розв'язків, якщо $\Delta > 0$.

У двох останніх випадках половина розв'язків рівняння (6) є від'ємними. Функція $E_y(B)$ (2) є симетричною відносно початку координат, тобто $E_y(B) = -E_y(-B)$. Це означає, що при зміні напрямку

магнітного поля міняється тільки напрямом поля Холла, але не його величина. Тому надалі будемо розглядати тільки додатні розв'язки.

У випадку $\Delta > 0$ таких розв'язків два B_1 і B_2 (явний вигляд цих розв'язків дуже громіздкий і для матеріалу, що розглядається, несуттєвий, тому у статті не наводиться), причому $B_1 < B_2$. Оскільки $\frac{d^2 E_y(B_1)}{dB^2} < 0$, а

$\frac{d^2 E_y(B_2)}{dB^2} > 0$, точка B_1 є точкою максимуму, а B_2 – мінімуму. Наявність

двох екстремумів на експерименті нами не спостерігалася, тому в даній статті не аналізується і не використовується.

У випадку $\Delta = 0$ єдиний додатній розв'язок має вигляд

$$B_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 n_2 + \mu_2 n_1)} \left[\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^2 n_1 n_2}{2\mu_1 \mu_2 (n_1 + n_2)} - (\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) \right]}. \quad (8)$$

2.3. Дослідження другої похідної $\frac{d^2 E_y(B)}{dB^2}$

Рівняння $\frac{d^2 E_y(B)}{dB^2} = 0$ є необхідною і достатньою умовою існування точки перегину. З нього знайдемо координату точки перегину

$$B_0^* = \sqrt{\frac{3(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 n_2 + \mu_2 n_1)}}. \quad (9)$$

Вираз для B_0^* (9) зовні суттєво відрізняється від B_0 (8). Далі покажемо, що у нашому випадку ці значення співпадають.

2.4. Порівняння B_0 та B_0^* .

Для порівняння величин B_0 та B_0^* знайдемо їх відношення :

$$\frac{B_0}{B_0^*} = \sqrt{\frac{1}{3(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)} \left[\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^2 n_1 n_2}{2\mu_1 \mu_2 (n_1 + n_2)} - (\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) \right]}.$$

Скориставшись співвідношеннями (1) між рухливостями і концентраціями "повільних" і "швидких" електронів, отримаємо

$$\frac{B_0}{B_0^*} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{2 \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 \cdot \frac{n_1}{n_2} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right]}} - 1. \quad (10)$$

На цьому етапі обчислення потрібно знати конкретні значення відношень концентрацій і рухливостей. Скориставшись даними, отриманими в [3] чисельним методом, маємо $\frac{\mu_1}{\mu_2} \sim 10^{-3}$, $\frac{n_1}{n_2} \sim 10^5$, звідки $\frac{B_0}{B_0^*} \approx 1$. Оскільки

$$\frac{d^2 E_y(B_0)}{dB^2} \approx \frac{d^2 E_y(B_0^*)}{dB^2} = 0, \text{ точка } B_0 \text{ є точкою перегину.}$$

3. Визначення рухливості і концентрації “повільних” і “швидких” електронів

3.1. “Повільні” електрони

Згідно із запропонованою у [3] моделлю, для “швидких” електронів у магнітних полях із $B > B_0$ буде виконуватись умова сильного поля (5), і E_y виникатиме лише за рахунок “повільних” електронів, а внеском “швидких” електронів в E_y можна знехтувати. Тоді $\mu_1 \approx \mu(B > B_0)$.

Також, згідно із моделлю, $n_1 \gg n_2$ (1), тому можна вважати, що концентрація повільних електронів співпадає з отриманою із холлівських вимірів ($n_1 \approx n$).

3.2. “Швидкі” електрони

Знаходження двох невідомих величин, якими є μ_2 і n_2 , потребує системи двох незалежних рівнянь, які визначають характер залежності $E_y(B)$. У якості першого з них візьмемо рівність $\Delta = 0$ (7), як ознаку відсутності екстремумів на кривій та наявності перегину. Другим рівнянням було вибрано вираз для координати точки перегину (9), значення якої можна легко знайти з експериментальних даних. Розв’язавши сумісно цю систему рівнянь, отримали

$$\mu_2 = \frac{4\mu_1 B_0 + \sqrt{3}(1 + \mu_1^2 B_0^2)}{(1 - 3\mu_1^2 B_0^2)B_0}; \quad (11)$$

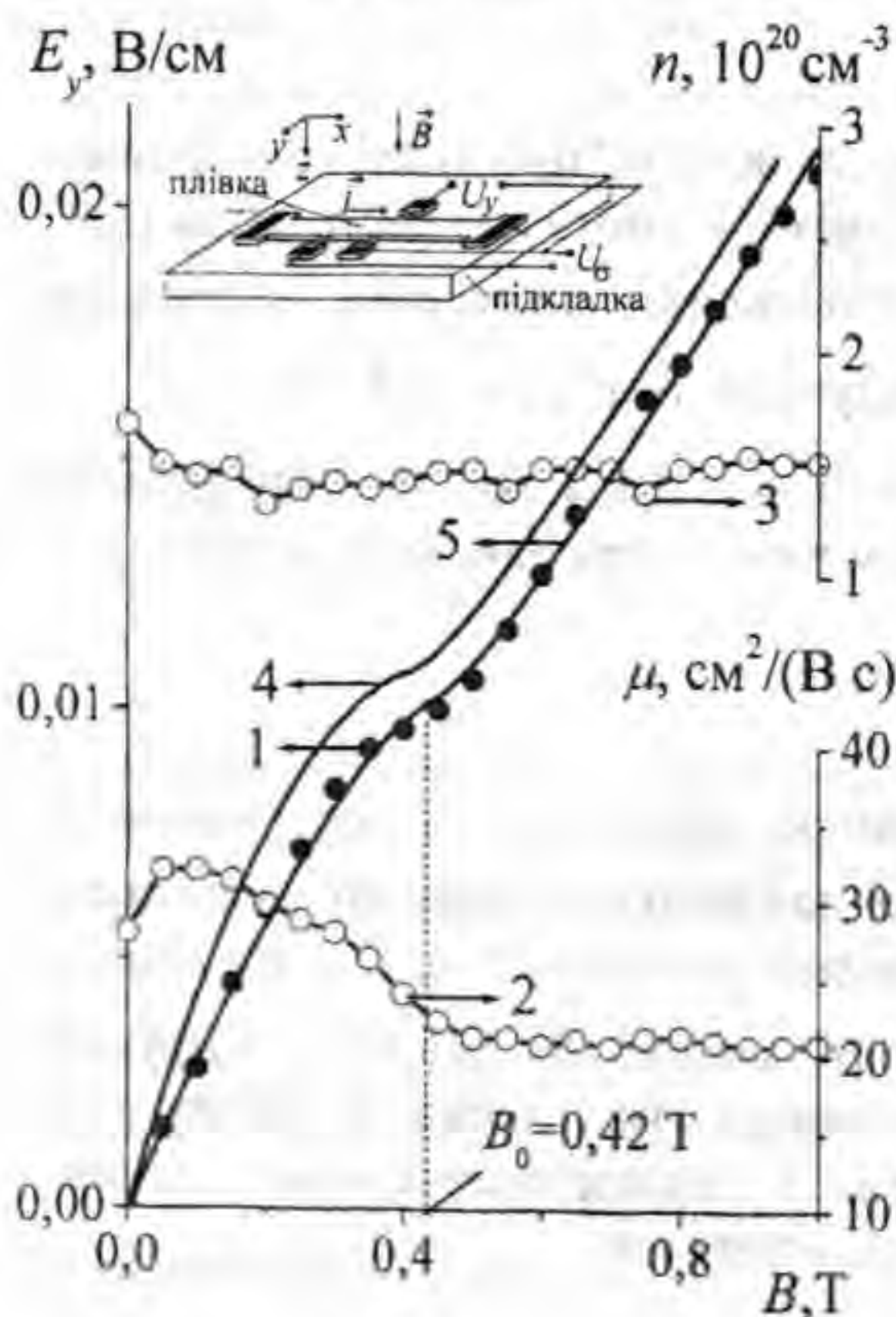
$$n_2 = 8n_1 \frac{\mu_1^2 B_0^2 [5\mu_1 B_0 - 3\mu_1^3 B_0^3 + \sqrt{3}(1 + \mu_1^2 B_0^2)]}{(1 - 3\mu_1^2 B_0^2)(3 - \mu_1^2 B_0^2)[4\mu_1 B_0 + \sqrt{3}(1 + \mu_1^2 B_0^2)]}. \quad (12)$$

Знайдені рухливість (11) і концентрація (12) “швидких” електронів визначаються через величини, що знаходяться безпосередньо з експерименту (μ_1, μ_2, B_0).

4. Використання результатів розрахунку в обробці експериментальних даних

Для визначення числових значень рухливості і концентрації “швидких” електронів за отриманими аналітично формулами (11) і (12) скористаємось експериментальними даними, наведеними у [3].

На рисунку кривою 1 (точки) наведена експериментальна залежність $E_y(B)$ для поздовжнього поля $E_x = 10 \text{ В/см}$. Методом чисельного диференціювання було визначене значення магнітного поля $B_0^* = 0,42 \text{ Т}$, при якому відбувається перегин на залежності $E_y(B)$.



За даними кривої 1 за стандартною методикою [5] були розраховані холлівська рухливість і концентрація електронів. Вони наведені на рисунку кривими 2 і 3 відповідно.

Користуючись методикою, розглянутою у [3], а також у підрозділі 3.1, визначили, що рухливість “повільних” електронів $\mu_1 = 21 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, а їх концентрація $n_1 = 1,5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

Користуючись отриманими даними, за формулами (11) і (12) були визначені рухливість і концентрація “швидких” електронів : $\mu_2 = 4,1 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, $n_2 = 3,1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

Побудована за формулою (2) із використанням отриманих

значень рухливості і концентрації “повільних” і “швидких” електронів залежність $E_y(B)$ наведена на рисунку кривою 4.

Для порівняння рухливості і концентрація “швидких” електронів були визначені чисельним методом [3]. Вони становили $\mu'_2 = 2,3 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, $n'_2 = 1,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Побудована за цими даними залежність $E_y(B)$ наведена на рисунку кривою 5.

Розбіжність у значеннях рухливості і концентрації “швидких” електронів, отриманих різними способами не суттєва. Дещо завищені значення, отримані із аналітичних виразів (11) і (12) пов’язані, можливо, із

недосконалістю вибраної теоретичної моделі, яка не враховує розподіл електронів по швидкостях, а також не враховує особливості поведінки носіїв заряду у сильних магнітних полях.

Користуючись отриманими значеннями, за формулами (4) для $B < B_0$ та (3) для $B > B_0$ були розраховані кути нахилу відповідних лінійних ділянок. Вони становили відповідно 285 см/с та 210 см/с, що узгоджується із експериментальними даними (тангенс кута нахилу при $B < B_0$ більший, ніж при $B > B_0$).

ВИСНОВКИ

Проаналізований хід теоретичної залежності поля Холла від магнітної індукції $E_y(B)$, що дало можливість визначення у плівках $\text{In}_2\text{O}_3(\text{Sn})$ рухливості і концентрації “швидких” електронів у аналітичному вигляді.

Обчислені числові значення рухливості і концентрації “швидких” електронів у таких плівках.

За результатами обчислень була розрахована теоретично залежність $E_y(B)$. Узгодження цієї залежності з експериментальною, а також із розрахованою за іншою методикою підтвердило коректність проведених розрахунків.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Vaufrey D., Ben Khalifa M., Tardy J. et al. ITO-on-top organic light-emitting devices: a correlated study of opto-electronic and structural characteristics // *Semicond. Sci. Technol.* – 2003. – V.18, N4. – P.253-260.
2. Chan I., Hsu T., Hong F. Enhanced hole injections in organic light-emitting devices by depositing nickel oxide on indium tin oxide anode // *Appl.Phys.Lett.* – 2002. – V.81, N10. – P.1899-1901
3. Добровольський В.М., Ішук Л.В., Нінідзе Г.К., Гуденко Ю.М., Лозова О.Ю. Нелінійність ефекту Холла у слабких магнітних полях у плівках легованого оловом оксиду індію // “Вісник Київського університету”, сер.:Фіз.-мат.науки. – 2004, №2. – С.395-401.
4. Willardson R.K., Harman T.C., Beer A.C. Transverse Hall and Magnetoresistance Effects in *p*-Type Germanium // *Phys.Rev.* – 1954. – V.96, №6. – P.1512-1518.
5. Смит Р. Полупроводники. – М., Мир, 1982. – 558 с.

Надійшла до редакції 13 січня 2005 р.

УДК 535.375

Анатолій І. Іванісік,
Андрій В. Конопатський*,
Сергій О. Дудка

Експериментальне виявлення перехідного ефекту при фазовій самомодуляції світла

Подані експериментальні дані, що доводять наявність перехідного ефекту, породжуючого нові спектральні компоненти на фізичній межі середовища при фазовій самомодуляції наносекундних імпульсів лазерного випромінювання внаслідок квазістаціонарного самофокусування у керрівській рідині. Нові спектральні компоненти, що генеруються у результаті перехідного ефекту, зміщені до 100cm^{-1} та переважно в стоксів бік відносно частоти збуджуючого випромінювання.

Ключові слова: самофокусування перехідний ефект, фазова самомодуляція.

Anatoliy I. Ivanisik,
Andriy V. Konopatskiy*,
Sergiy O. Dudka

Experimental discovery of transition effect under phase self- modulation of light

Experimental results are given to prove existence of the transition effect, which generates new spectral components on a physical boundary of environment under phase self-modulation of nanosecond laser radiation pulses in consequence of quasi-stationary self-focusing in Kerr-liquids. New spectral components generated as result of the transition effect have shift up to 100cm^{-1} and predominantly in Stokes side relatively to the frequency of stimulating radiation.

Key Words: transition effect, phase self-modulation, self-focusing.

E-mail: *konopatskiy@univ.kiev.ua

Вступ

Теоретичне дослідження перехідного ефекту при фазовій самомодуляції лазерних імпульсів наносекундного діапазону внаслідок квазістаціонарного самофокусування було вперше виконане в роботі [1]. Ефект полягає у тому, що потужній лазерний промінь самофокусуючись утворює в керрівській рідині локалізовану ділянку з іншим показником заломлення. Ця ділянка, що збігається з фокальною областю пучка, відповідно до миттєвої потужності лазерного імпульсу швидко рухається, міняє свої розміри й показник заломлення. Випромінювання, утворивши ділянку, саме ж і проходить через неї, тож, зазнає фазової модуляції, оскільки параметри ділянки та її розташування змінюються. Проте протягом руху ділянки в об'ємі середовища зміни фази незначні та повільні і не призводять до суттєвого зміщення частоти випромінювання. Інша справа, коли фокальна область перетинає вихідну межу середовища й ділянка з іншим показником заломлення з'являється (на фронті імпульсу) або зникає (на спаді імпульсу). В цей момент унаслідок великої (навіть

надсвітлової) швидкості фокальної області довжина ділянки стрімко змінюється, що веде до генерації нових спектральних компонент.

Спектральні компоненти, що породжуються у результаті передбаченого ефекту, можна назвати випромінюванням перехідного типу, оскільки існує певна аналогія з класичним перехідним випромінюванням [2] від рівномірно рухаючихся зарядів у неоднорідному середовищі або через його межу (В. Л. Гінзбург, І. М. Франк; 1945 р.). Істотна відмінність є в тому, що в даному випадку мова йде про рух через межу середовища згустка нелінійної поляризації.

Мета роботи полягала в експериментальному виявленні перехідного ефекту та порівнянні його характеристик із теоретичними оцінками.

Методика досліджень

Схема експериментальної установки подана на рис. 1. Використовувався рубіновий лазер з активним елементом діаметром 8 мм, лінійним резонатором довжиною 34 см і пасивною модуляцією добротності (фталоціанін хлористого галію розчинений у хлорбензолі), що випромінював світлові імпульси на довжині хвилі $\lambda_L = 0,6943$ мкм з енергією 0,5 Дж та тривалістю $\tau_L = 30$ нс на половинному рівні інтенсивності. Середньоквадратичний розкид енергії імпульсів складав 5 %. Форма імпульсу лазера (на осцилографі С7-10Б із смугою пропускання після лінії затримки 650 МГц) була гладкою, але містила незначні осциляції з періодом ~ 2 нс. У перетині пучок лазера був неоднорідний, з великою кількістю ($\sim 10^2$) максимумів та мінімумів інтенсивності. За діафрагмою 0,4 мм на шляху пучка, яка виділяла фрагмент хвильового фронту імпульсу, на осцилограмах спостерігалися глибокі (до 50 % від амплітуди) осциляції із середнім періодом 7 нс.

Ширина спектра генерації лазера вимірювалася за допомогою інтерферометра Фабрі-Перо з товщиною кільця 30 мм та різкістю ~ 20 . На рис. 2 наведено фрагмент центральної частини інтерферограми, зареє-



Рис. 1. Схема експериментальної установки.

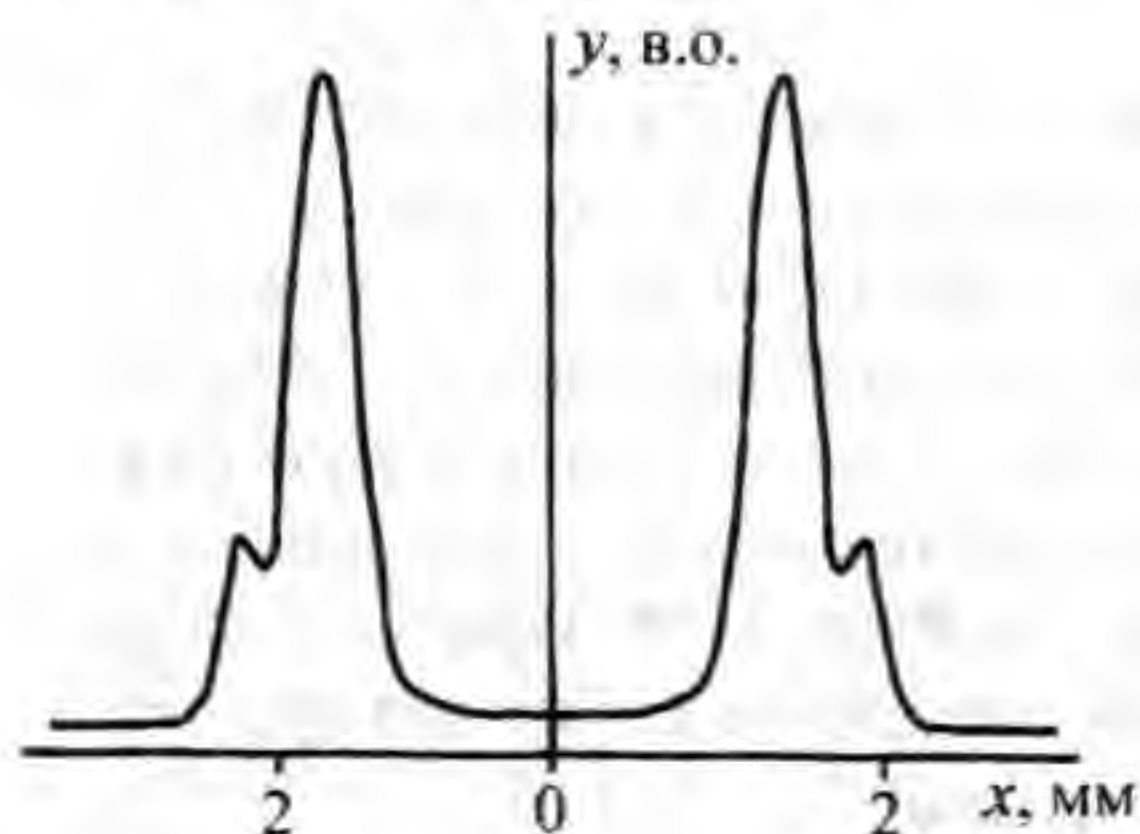


Рис. 2. Фрагмент інтерферограми.

2,14 нс, де c – швидкість світла в см/с.

Випромінювання лазера при потребі ослаблювалося каліброваними світлофільтрами та спрямовувалося в кювету з толуолом довжиною $L=25$ см або $L=12,5$ см, що розташовувалася на відстані ~ 1 м від лазера. Вихідна межа кювети проектувалася у масштабі 1:1 лінзою з фокусною віддаллю $F=10$ см на вхідну щілину спектрографа на базі камери УФ-90 із дифракційною ґраткою 600 штр/мм. Обернена лінійна дисперсія спектрографа становила 1,33 нм/мм, а апертурний кут, що визначається відносним отвором останнього – 70 кут. хв. У фокусі проектуючої лінзи перпендикулярно щілині спектрографа розташовувався екран у вигляді смужки шириною 2,5 мм для поглинання надто інтенсивного осьового випромінювання в межах кутів ± 43 кут. хв. Утворені за такою методикою **просторово-частотні** спектри реєструвалися цифровою камерою С-750UZ із поверхні матового скла, розташованого в касетній частині спектрографа. Ширина вхідної щілини спектрографа зазвичай становила 100 мкм, що обмежувало спектральну роздільність величиною 0,13 нм. Проте більш суттєве обмеження обумовлювалося використанням матового скла – на рівні 0,2 нм. Цей же фактор призводив до просторової роздільності ~ 150 мкм.

Результати та їх аналіз

Типові фотографії просторово-частотних спектрів в області довжини хвилі лазерного випромінювання показані на рис. 3. Потужність лазера P_L після ослаблюючих світловільтрів становила 75% (а) та 52% (б) від максимальної потужності $P_{L, \max}$, а довжина кювети – 25 см. На рис. 3 у вигляді довгої вертикальної лінії спостерігається зображення щілини спектрографа на довжині хвилі $\lambda_L=0,6943$ мкм. Від цієї лінії відходять горизонтальні смуги, які відповідають спектральним розширенням лазерного випромінювання з локальних ділянок пучка – фокальних областей, що виникають внаслідок дрібномасштабного самофокусування

строваної за об'єктивом з $F=60$ см. Ширина спектра на половинному рівні становила $0,01 \text{ см}^{-1}$, що не перевищує спектральну відстань між двома сусідніми поздовжніми модами. Проте спостерігалася слабо інтенсивна бокова поздовжня мода на відстані $\delta \nu_m=0,0156 \text{ см}^{-1}$ від центральної моди. За такого модового складу огибаюча імпульсу може містити осциляції з періодом $T=1/(\delta \nu_m c)=$

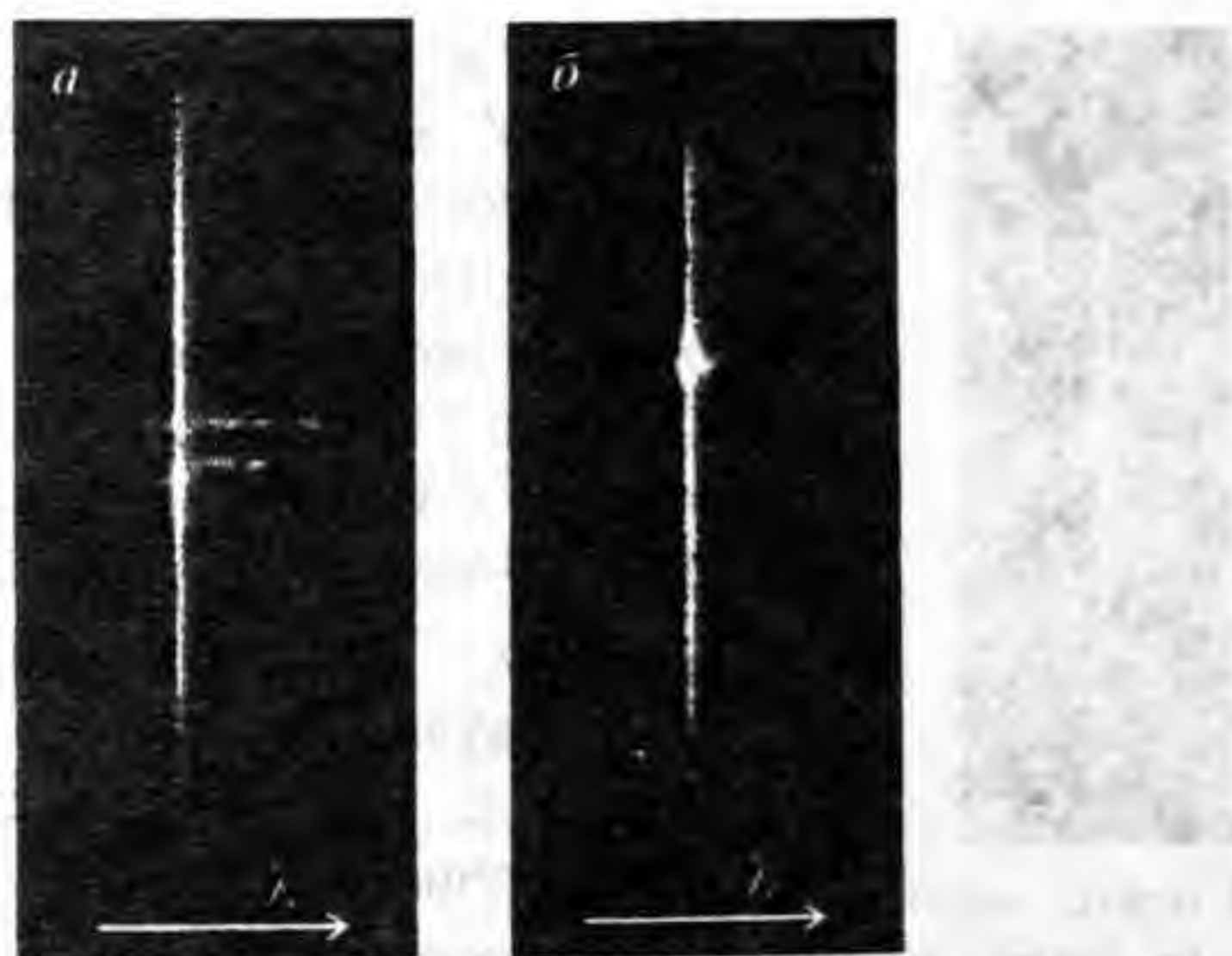


Рис. 3. Спектральні розширення лазерного випромінювання: потужність імпульсу $P_L=0,75P_{L,\max}$ (а) та $P_L=0,52P_{L,\max}$ (б); довжина кювети – $L=25$ см; стрілками вказаний напрямок зростання довжини хвилі λ .

та перетинають вихідне вікно кювети. На рис. 3,а максимальне спектральне розширення $\Delta\nu_{\max}$ складає 53 см^{-1} у стоксів бік і 13 см^{-1} в антистоксів бік (верхня смужка), а на рис. 3,б – 6 см^{-1} лише у стоксів бік. Переважне та навіть виняткове розширення спектрів у стоксів бік було характерною ознакою всіх отриманих спектрів при всіх потужностях.

Різний характер спектрів на рис. 3,а та рис. 3,б відображає загальну тенденцію: зменшення потужності лазера супроводжується зменшенням спектральних розширень та збільшенням яскравості зображення фокальних областей на частоті випромінювання лазера. На порозі самофокусування спостерігалися лише яскраві зображення фокальної області на частоті випромінювання лазера та були відсутні спектральні розширення. Поряд з іншими результатами це загалом свідчить про тісний та вирішальний зв'язок величини розширень із швидкістю перетинання фокальною областю межі повітря-керрівська рідина. Адже на порозі самофокусування (залежного від довжини кювети) фокальна область утворюється та зникає на межі кювети і має нульову швидкість.

Зменшення довжини кювети від $L=25$ см до $L=12,5$ см вело до зменшення максимальних спектральних розширень у випадку $P_L=P_{L,\max}$ від 74 см^{-1} до 18 см^{-1} (середні значення). Важливо зазначити, що меншій довжині кювети відповідає менша швидкість фокальної області на виході кювети та більша миттєва потужність лазера у цей момент. Тому очевидним є, що швидкість перетинання фокальною областю межі повітря-керрівська рідина має істотніше значення, ніж миттєва потужність



Рис. 4. Спектр зареєстрований з глибини кювети.

лазера у цей момент.

У випадку проектування на вхідну щілину спектрографа глибоких зрізів кювети на відстані до 12 см від вихідного вікна, спектри носили дифузний характер (рис. 4, відстань 11,25 см) і не містили типових для виходу з кювети частотних розширень. Це певною мірою теж підтверджувало зв'язок останніх з перехідним ефектом при фазовій самомодуляції лазерного випромінювання.

На рис. 5 узагальнені результати досліджень залежності максимального частотного розширення $\Delta\nu_{\max}$ у стоксів бік від потужності та довжини кювети. Нанесені точки середніх значень $\Delta\nu_{\max}$ та вказані середньоквадратичні відхилення для них (стандартна похибка). У реалізованих експериментальних умовах за великих потужностей і довжини кювети у кожному спектрі спостерігалось до 10 фокальних областей і відповідних локальних спектрів різної протяжності внаслідок зменшення потужності при віддаленні від центру пучка. Процедура попереднього відбору даних полягала у визначенні в кожному спектрі положення крайнього максимуму (якщо такий був) на стоксовій межі спектра для фокальної області, з якої надходило випромінювання з найбільшим частотним розширенням. При подальшому усередненні нульові результати, якщо такі були (особливо за низьких значень $P_{\text{л}}$), відкидалися, оскільки пов'язувалися з певною

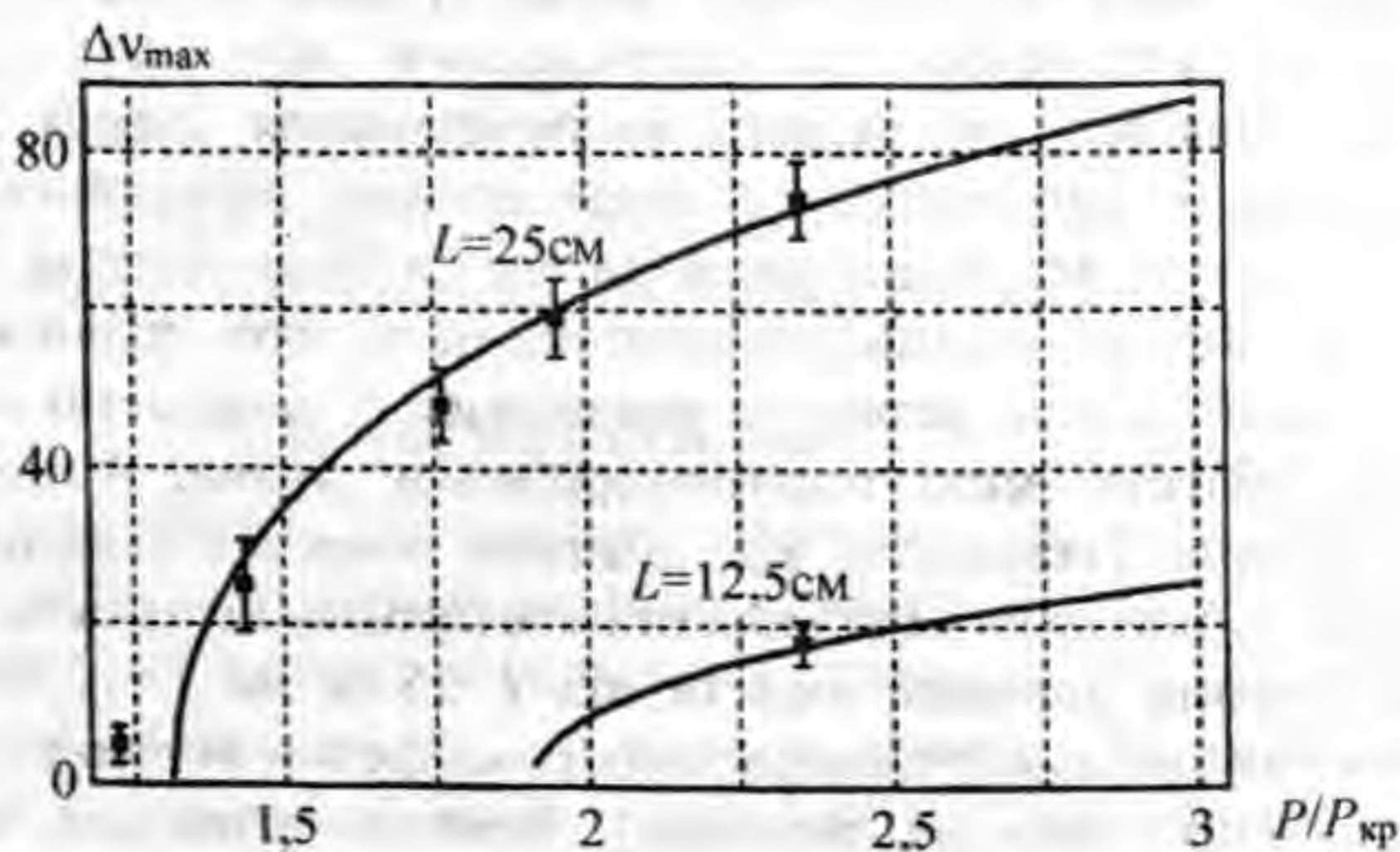


Рис. 5. Порівняння середніх даних експерименту (■) для стоксового значення $\Delta\nu_{\max}$ з теоретичними розрахунками (суцільна лінія) залежно від нормованої потужності $P/P_{\text{кр}}$ та довжини кювети L .

ймовірністю непотрапляння жодної фокальної області, яка перетнула вихідне вікно кювети, в межі поверхні, що проектувалася на вхідну щілину спектрографа.

Теоретичний розрахунок (рис. 5, суцільні лінії) виконувався за методикою описаною в [1, 3] для імпульсів гаусової форми. Так, для осьового випромінювання визначався додатковий набіг фази $\Delta\varphi(L, t)$ на виході з кювети для тієї частини пучка, що утворила окремий фокус:

$$\Delta\varphi(L, t) = \frac{2\pi}{\lambda_L} \int_0^L \Delta n(z, t) dz, \quad (1)$$

де $\Delta n(z, t)$ – наведена добавка до показника заломлення, яка залежить від координати z уздовж осі кювети та часу t . Далі розраховувалася миттєва частота випромінювання в момент $t=t_k$ перетинання фокальною областю межі повітря-толуол:

$$\Delta\nu_{\max}[\text{см}^{-1}] = \Delta\nu(t_k) = -\frac{1}{2\pi c} \left. \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial t} \right|_{t=t_k}. \quad (2)$$

Характеристики толуолу для розрахунків взяті з роботи [3].

Задовільне кількісне узгодження експериментальних даних та теоретичних розрахунків (рис. 5) досягнуте при таких параметрах: 1) тривалість імпульсу випромінювання $2\tau=2$ нс на рівні $1/e$; 2) діаметр фрагменту пучка на вході в кювету, що самофокусувався, $d_0=225$ мкм; 3) перевищення потужності P фрагмента пучка над критичною $P_{\text{кр}}$ на вершині імпульсу $P/P_{\text{кр}}=2,35$. Такі параметри уявляються реальними з урахуванням наявності у лазерному випромінюванні побічної повздовжньої моди та неоднорідності пучка в перетині. Відсутність збігу теоретичних та експериментальних результатів за найменшого значення $P/P_{\text{кр}}$ ($L=25$ см) можна пояснити тим, що в основу розрахунків покладені формули, які дають точний результат лише за умови $P/P_{\text{кр}} \geq 1,5$ [4]. А також тим, що на порозі самофокусування максимальний частотний зсув реалізується в момент часу $t \neq t_k$. Крім того, розрахунок виконувався для осьового випромінювання, а реєструвалося випромінювання у діапазоні $\pm(43 \div 70)$ кут. хв. Зазначимо, що такого ж рівня узгодженості експериментальних даних та теоретичних розрахунків можна досягти і за інших трьох вказаних параметрів у межах їх корельованої зміни на 20%. Наприклад: $2\tau=1,7$ нс; $d_0=260$ мкм; $P/P_{\text{кр}}=2,65$. З урахуванням нульових результатів: $2\tau=1,6$ нс; $d_0=280$ мкм; $P/P_{\text{кр}}=2,8$.

Серед інших експериментальних результатів важливим є спостереження просторово-частотних спектрів в області антистоксової компоненти вимушеного комбінаційного розсіяння (ВКР) світла. На відміну від лазерного випромінювання спектри антистоксової компоненти з фокальних областей містили значні частотні розширення (декілька сотень см^{-1} у стоксів

бік) при проектуванні на щілину спектрографа глибоких зрізів кювети.

Висновки

Отримані експериментальні дані доводять, що при фазовій самомодуляції лазерних імпульсів наносекундного діапазону внаслідок квазістаціонарного самофокусування перехідний ефект є відповідальним за породження нових спектральних компонент, зміщених до 100см^{-1} та переважно в стоксів бік відносно частоти збуджуючого випромінювання.

Основними доказами на користь безпосереднього зв'язку перехідного ефекту із зареєстрованими спектральними розширеннями є:

а) зменшення потужності лазера супроводжувалося зменшенням спектральних розширень та суттєвим збільшенням яскравості зображення фокальних областей на частоті випромінювання лазера;

б) зменшення довжини кювети вело до зменшення максимальних спектральних розширень;

в) у випадку проектування на вхідну щілину спектрографа глибоких зрізів кювети, спектри не містили типових для виходу з кювети частотних розширень лазерної компоненти;

г) задовільне кількісне узгодження експериментальних даних та теоретичних розрахунків;

д) відсутність тісної кореляції між спектральними розширеннями лазерної та антистоксової компоненти.

Несиметричність розширень лазерної компоненти внаслідок перехідного ефекту пов'язана, на наш погляд, з інерційністю ефекту Керра та виснаженням лазерного випромінювання у процесі ВКР під час зворотного перетинання фокальною областю межі кювети на спаді імпульсу.

Література

1. Дудка С. О., Іванісік А. І., Коротков П. А. Аналог перехідного випромінювання в оптиці // Вісник Київського університету. Сер: фіз.-мат. науки. – 2003. – В.4. – С.324 – 330.
2. Гинзбург В. Л. Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова-Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления) // Успехи физических наук. – 2001. – Т.171. №10. – С. 1097 – 1106.
3. Іванісік А. І., Дудка С. О., Борисенко А. Д. Квазістаціонарна фазова самомодуляція лазерних імпульсів у керрівських рідинах // Вісник Київського університету. Сер: фіз.-мат. науки. - 2003. - В.1. - С.259-267.
4. Dawes E. L., Marburger J. H. Computer studies in self-focusing // Phys. Rev. - 1969. - V. 179, №3. - P. 862 - 868.

Надійшла до редакції 10.01.2005 р.

УДК 537.86/.87:530.182

Андрій В. Іванчук*, Михайло В.
Кононов*

Розпізнавання томографічних магніторезонансних зображень за допомогою нейронної мережі персептрона

В даній роботі нейронна мережа персептрона застосована в системі розпізнавання магніторезонансних томографічних зображень. Розроблено метод для нормалізації MRT зображень, який заснований на аналізі текстурних характеристик зображення. Наведено результати розпізнавання зображень, інваріантного до трансляції та масштабування, які отримані за допомогою даного методу.

Ключові слова: персептрон, нейронні мережі, магніторезонансні томографічні зображення, інваріантне розпізнавання, текстурні параметри

Andrew V. Ivanchuk*, Michael V.
Kononov*

Magnetic resonance tomography image recognition with the perceptron neural network

In the work the perceptron neural network model is adopted for use with magnetic resonance tomography image recognition system. A method based on texture parameters analysis is developed for MRT image normalization and the results of translation and scale invariant recognition obtained with the help of this method are given.

Key Words: neural networks, magnetic resonance tomography images, invariant recognition, texture parameters

*E-mail: tassadar@univ.kiev.ua, mvk@univ.kiev.ua

Розпізнавання зображень є класом задач, який є надзвичайно важливим для систем автоматизації медичних досліджень. В першу чергу, це пов'язане з тим, що сучасні методи медичної діагностики базуються на аналізі великих об'ємів інформації. Перше місце за інформативністю займають різні види зображень – ретгенівські знімки, томографічні та ультразвукові зображення внутрішніх органів тощо. Багато задач їх ефективного використання – пошук за зображенням йому подібних, виділення інформативних ознак, стиснення графічних даних та інші – зводяться до задачі розпізнавання образів. Для вирішення даних задач широко використовуються моделі нейронних мереж. Більшість із них є неспецифічними універсальними методами, які можна використовувати для широкого класу задач. Найбільш широко вживаною є модель багат шарового персептрона з алгоритмом навчання методом зворотнього розповсюдження похибки [1].

В даній роботі було застосовано нейронну мережу тришарового персептрона для розпізнавання магніторезонансних томографічних зображень [2], розроблено алгоритм нормалізації напівтонових зображень

та досліджено залежність швидкості навчання від вибору малого параметра у алгоритмі зворотнього розповсюдження похибки. Розмір мережі підбирався експериментально, відповідно до результатів дослідження [3] питання про залежність похибки узагальнення від кількості нейронів у проміжних шарах мережі.

Розділення системою розпізнавання простору вхідних ознак на класи є характеристикою, яка визначає її ефективність. Тому було проведено дослідження областей рішень тришарового персептрона на прикладі двовимірних ознак з метою оцінити розподіл даних навчальної вибірки на кількість ітерацій, необхідних для досягнення певної ймовірності розпізнавання по навчальній вибірці. Простором ознак є частина площини, обмежена квадратом розмірами 1×1 , а об'єктом є двовимірний вектор (x, y) , $0 < x, y < 1$. В загальному випадку бажаний вихід нейронної мережі для об'єкту X класу K в просторі розмірності N матиме вигляд $(0, 0, 0, \dots, K, \dots, 0)$. Тобто $X_i = 0, \forall i \neq k$. При поданні на вхід мережі невідомого об'єкту належність до класу визначається номером нейрона, який має найбільше значення виходу. Навчання закінчується після досягнення 100% ймовірності розпізнавання по навчальній вибірці. При різних випадкових ініціалізаціях синаптичних ваг мережі розмірністю 60 нейронів у першому проміжному шарі та 20 у другому були отримані області рішень для заданого двовимірного розподілу, наведені на Рис.1.



Рис.1 Апроксимація складної навчальної вибірки

Границі між класами є гладкими кривими і можуть давати складні області рішень. Характерною рисою персептрона є те, що їх вигляд залежить від початкової ініціалізації синаптичних ваг. Очевидно, що в самих навчальних даних не міститься інформації про те, яким має бути узагальнення. Тій самій навчальній вибірці можуть відповідати різні, певним чином еквівалентні області рішень, оскільки всі вони адекватно класифікують розподіл навчальних даних. Різні рішення відповідають різним мінімумам функції похибки, в які потрапляє мережа під час навчання.

Для оцінки складності розподілу навчальних даних на тривалість навчання ситему було протестовано на розподілах з 5-ти класами об'єктів. Для даної мети було використано більшу мережу – з 120 та 60 проміжними

нейронами в першому та другому прихованих шарах відповідно. На рис.2 наведено випадки областей рішень мережі для чотирьох різних розподілів.



Рис.2 Области рішень для різних розподілів з 5-ти класів об'єктів

При навчанні мережі на цих навчальних вибірках при різних початкових ініціалізаціях синаптичних ваг було отримано, що на навчання за даними з першої вибірки було витрачено на порядок менше часу ніж на три наступні, хоча кількість даних в усіх чотирьох вибірках є приблизно однаковою. Звідси можна зробити висновок, що час навчання залежить не стільки від кількості даних у навчальній вибірці, скільки від складності функції їх розподілу. Тому має сенс використовувати процедури ортогоналізації для спрощення задачі навчання і збільшення ефективності розпізнавання.

Для зображень часткова ортогоналізація навчальної вибірки досягається шляхом забезпечення інваріантності зображень відносно зсуву та масштабування. Існує багато методів вирішення даної проблеми, включаючи перетворення Фур'є вхідного зображення [1]. В даній системі для визначення координат прямокутника, що обмежує рецептивне поле мережі на вхідному зображенні використовується алгоритм, заснований на бінаризації зображення за рівнем статистичної енергії околу точки [4,5] та аналізі центрів мас різних частин отриманої бітової маски.

Першим етапом даного алгоритму є розрахунок статистичної енергії

$$E = \sum_{i=0}^N P^2(n)$$

для околу кожної точки зображення, де N – кількість рівнів градацій яскравості, $P(n)$ – ймовірність знайти в даному околі точку з інтенсивністю n . Далі формується бітова маска – бінаризоване зображення. Точкам, у яких значення даного параметра менше 0.5 від усередненого за даним зображенням присвоюється значення 1, всім іншим – 0.

Далі визначається центр мас бітової маски всього зображення $M_0 = (M_{0x}, M_{0y})$. Координатами лівого нижнього кута прямокутника, який обмежує зображення вибрано $(0,0)$, а правого верхнього – (X,Y) .

$$M_0 = \frac{1}{XY} \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} I(x,y) \vec{(x,y)}, \quad I = \{0,1\}$$

та центри мас M_1, M_2, M_3 і M_4 прямокутників зображення зверху, знизу, зліва та справа центру мас зображення відповідно:

$$M_1 = \frac{1}{X(Y - M_{0Y})} \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=M_{0Y}}^{Y-1} I(x, y) (\vec{x}, y), \quad M_2 = \frac{1}{XM_{0Y}} \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{M_{0Y}-1} I(x, y) (\vec{x}, y)$$

$$M_3 = \frac{1}{M_{0X}Y} \sum_{x=0}^{M_{0X}-1} \sum_{y=0}^{Y-1} I(x, y) (\vec{x}, y), \quad M_4 = \frac{1}{(X - M_{0X})Y} \sum_{x=M_{0X}}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} I(x, y) (\vec{x}, y)$$

Використовуючи ці вектори знаходимо координати прямокутника $\{\vec{R}_1, \vec{R}_2\}$, який обмежує інформативну частину зображення:

$$R_{1X} = M_{0X} + \alpha(M_{3X} - M_{0X}) \quad R_{1Y} = M_{0Y} + \alpha(M_{2Y} - M_{0Y})$$

$$R_{2X} = M_{0X} + \alpha(M_{1X} - M_{0X}) \quad R_{2Y} = M_{0Y} + \alpha(M_{4Y} - M_{0Y})$$

Коефіцієнт α вибирається таким чином, щоб, з одного боку, якомога більша частина зображення попала в рецептивне поле мережі. З іншого, не можна допустити, щоб інформативна частина була „зрізана” перетворенням і не потрапила в поле зору. Виконання останньої умови забезпечує рефлексивність нормалізуючого перетворення для вже нормалізованих зображень:

$$F(X) = X$$

Загалом, коефіцієнт визначається класом зображень і для сильно несиметричних об'єктів потрібно використовувати різні його значення для всіх чотирьох координат. Для конкретного класу зображень зрізів головного мозку еспериментально вибрано значення $\alpha = 1.7$.

Оскільки дана модель персептрона працює з фактично аналоговими даними, яскравість зображення нормалізувалась за її середнім значенням I_c для інформативної частиною зображення:

$$I = I / I_c$$

Було проведено дослідження з метою вибору малого коефіцієнта η в алгоритмі зворотнього розповсюдження похибки для модифікації синаптичних ваг w :

$$w_{ij} = w_{ij} - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$$

При $\eta = 0.01$ швидкість навчання є дуже малою. Крім того, малі значення значення η можна використовувати лише в поєднанні з алгоритмами уникнення локальних мінімумів [6]. Набільшу швидкість навчання дає значення коефіцієнту 0.1, що і використовується в даній системі. На рис.3 (а) наведено залежність ймовірності розпізнавання від кількості ітерацій при різних значеннях малого параметра. На рис.3 (б) наведено залежність кількості ітерацій, необхідних для досягнення 80% ймовірності розпізнавання від значення малого параметра.

Роботу системи розпізнавання образів на основі тришарового персептрона було оцінено на реальних медичних магніторезонансних зображеннях. Навчальна і валідаційна вибірки були сформовані наступним чином. За основу бралися зображення головного мозку в

одному й тому ж ракурсі (сагітальні зрізи). До кожного з них застосовувались чотири послідовні повороти на 90 градусів та дзеркальне відображення також з поворотами. Після кожного повороту зображення зберігалось у новий файл. Отже, маємо вісім класів об'єктів, кожен клас визначається кутом повороту і орієнтацією. Для кожного класу було надано шість об'єктів, 48 всього у навчальній вибірці і така ж кількість у валідаційній.

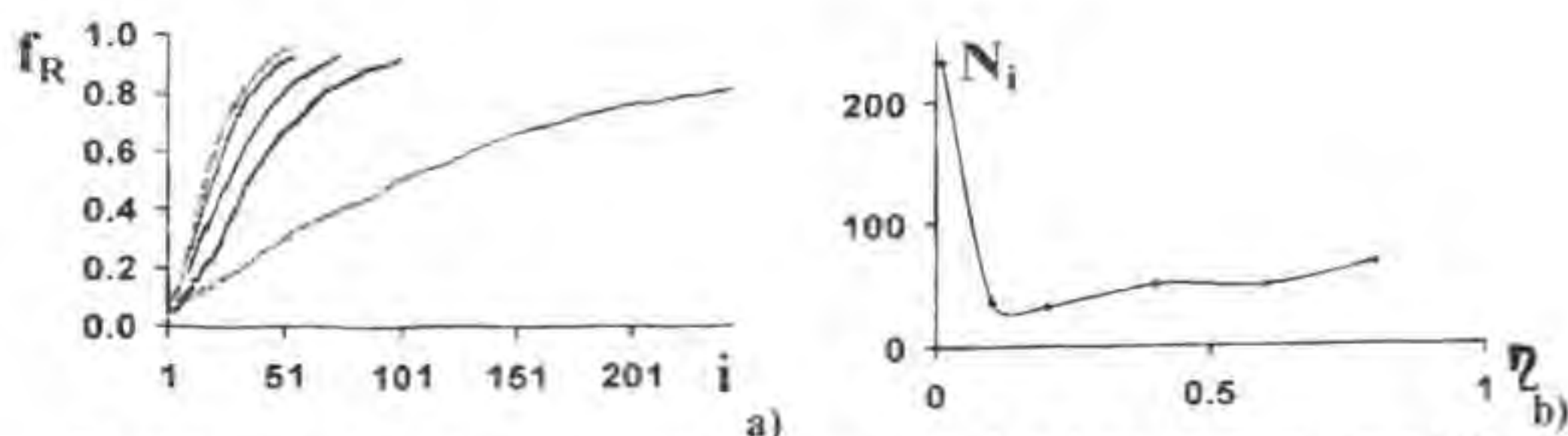


Рис.3 Залежність ймовірності розпізнавання f_R від кількості ітерацій (a) та залежність кількості ітерацій навчання від малого параметра (b)

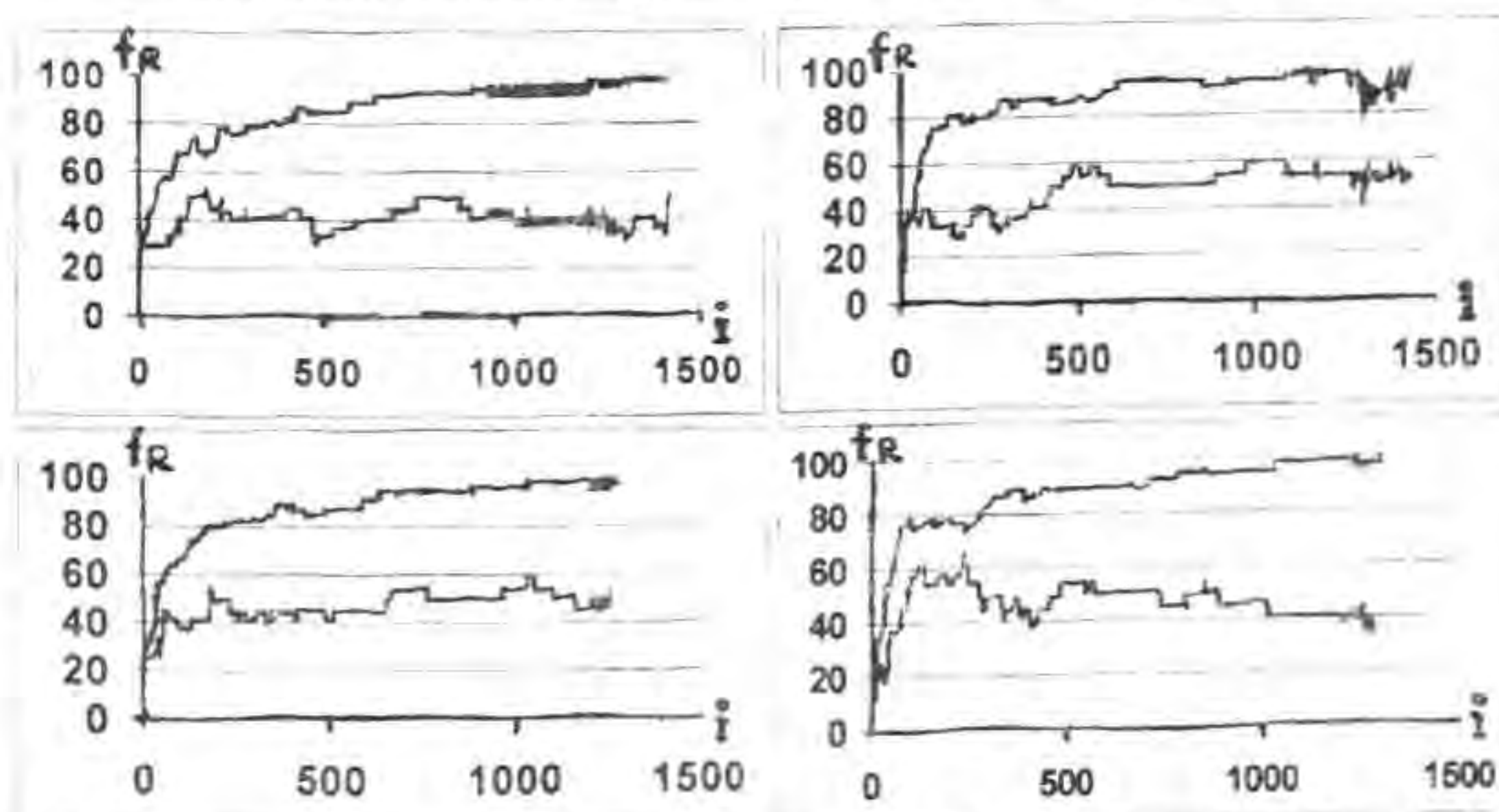


Рис.4 Залежність ймовірності розпізнавання (у %) за навчальною та валідаційною вибірками для чотирьох різних початкових ініціалізацій синаптичних ваг

У валідаційну вибірку входили зовсім інші зображення, ніж у навчальну. Це ставить систему у справжні умови і дає змогу оцінити не лише похибку навчання, але і похибку узагальнення. Залежність ймовірності розпізнавання за навчальною та валідаційною вибірками для нейронної мережі з кількістю входів 400 (растр 20×20), 40 нейронів у першому проміжному шарі, 15 у другому, кількістю виходів 8 (дорівнює кількості класів) та малим параметром 0.1 наведено на рис.4. Видно, що ймовірність розпізнавання за валідаційною вибіркою має максимум і при подальшому навчанні має тенденцію до зниження.

Висновки

1. Нейронна структура з двома прихованими шарами нейронів забезпечує області рішень, які можуть екстраполювати складний розподіл даних навчальної вибірки. Для тієї ж навчальної вибірки існують різні області рішень в залежності від початкової ініціалізації синаптичних ваг, отже, система може знаходити різні способи розв'язку задачі і робити різні узагальнення. Це узгоджується з тим, що залежність від початкових умов є характерною особливістю нелінійних систем.

2. Кількість ітерацій, необхідних для навчання системи залежить від статистичного розподілу даних у навчальній вибірці. Було застосовано метод виділення інформативної частини за текстурними ознаками (локальною енергією) з застосуванням оригінального перетворення, яке забезпечує інваріантність вісно зсуву та масштабування і отже, оптимальність подальшого розпізнавання магніторезонансних томографічних зображень за допомогою нейронної мережі.

3. Оскільки кінцевою метою для системи розпізнавання є розпізнавання невідомих об'єктів, то кількість ітерацій навчання мережі має обмежуватися значенням, при якому досягається максимум ймовірності розпізнавання за валідаційною вибіркою, до якого вона зростає і мережа робить узагальнення, а не запам'ятовує навчальні дані.

4. Незважаючи на відсутність у моделі персептрона оптимізації для роботи з даними великої розмірності і неможливість використання кореляцій, присутніх у реальних МРТ зображеннях, розроблений алгоритм нормалізації зображень забезпечує 40-50% ймовірність розпізнавання за валідаційною вибіркою при 8-ми класах зображень.

Література

1. B. Muller, J. Reinhardt, M. T. Strikland Neural Networks: An Introduction. // NY.: Springer, 1995. 2nd upd. and corr. ed.
2. Х. Хауссер, Х. Р. Кальбитцер. ЯМР в медицине и биологии: структура молекул, томография, спектроскопия in-vivo. // К.: Наукова думка, 1993.
3. S. Lawrence, C.L. Giles, A.C. Tsoi What Size Neural Network Gives Optimal Generalization? Convergence Properties of Backpropagation // Technical Report UMIACS-TR-96-22 and CS-TR-3617. Institute of Advanced Computer Studies, University of Maryland, June, 1996.
4. А.В. Іванчук, А.В. Мисник, М.К. Новоселець „Нелінійний ентропійний аналіз медичних даних за допомогою нейронних мереж з метою сегментації магніторезонансних та ультразвукових зображень” Вісник Київського університету. Серія: фіз-мат. науки. – 2001. – 2.
5. Прэтт У. Цифровая обработка изображений // Пер с англ. М.: Мир, 1982. гл. 17.
6. А.А. Ежов С.А. Шумский. Нейрокомпьютинг и его приложения в экономике. // МИФИ, 1998.

Надійшла до редакції 10.01.2005

УДК 519.9

Василь В.Льченко¹, Віктор О.
Кандиба., Олександр І. Кравченко,
Василь В. Лендел, Анжеліка І.
Лученко, Володимир А. Макара,
Микола М.Мельниченко, Катерина
В. Свеженцова, Володимир М.
Телега, Валерій П. Чехун.

**Про можливість використання
особливостей вольт-амперних
характеристик структур
наноструктурована плівка
кремнію – кремній для аналізу
складу газового середовища**

Проведено експериментальне
дослідження газової чутливості
структур хімічно модифікований
кремній-кремній на основі аналізу
особливостей вольт-амперних
характеристик та їх других похідних.

Ключові слова: вольт-амперна
характеристика, друга похідна, газова
чутливість.

Vasyl V. Il'chenko¹, Viktor O.
Kanduba, Olexandr I. Kravchenko,
Vasyl V. Lendel, Angelika I.
Lychenko, Volodymyr A. Makara,
Mykola M. Melnichenko, Kateryna
V. Svezhentsova, Volodymyr M.
Telega, Valeriy P. Chehun.

**About the possibility of usage of
the features a current-voltage
characteristics of nanostructural
silicon film - silicon for the
analysis of composition gaseous
environment**

The experimental research of the gas
sensitivity of nanostructural silicon film -
silicon were investigate on the basis of the
analysis of current-voltage characteristic
and their second derivate.

Key Words: current-voltage
characteristic, second derivate, sensitivity.

¹ E-mail vai@univ.kiev.ua

Вступ

Сучасний розвиток та застосування нанотехнологій стимулює інтенсивне вивчення наноструктурованих матеріалів на основі монокристалічного кремнію. Яскравим прикладом об'ємних наноструктур є поруватий кремній, нанорозмірність та впорядкованість якого визначається хімічним процесом травлення. При цьому наявність пор з діаметром та глибиною їх проникнення в монокристалічний кремній в межах декількох десятків нанометрів суттєво змінює геометричні, хімічні, електронні та адсорбційні властивості реальної поверхні монокристалічного кремнію. Останнім часом одержання та застосування плівок наноструктурованого кремнію знаходить все більше використання в мікроелектроніці, газових та біосенсорах [1,2]. В роботі [3] показано, що дослідження особливостей похідних вольт-амперних характеристик (ВАХ) гетероструктур може бути використано для аналізу складу оточуючого газового середовища. Контакт наноструктурований кремній – кремній можна розглядати як гетероструктуру [4] і тому постає питання про

можливість використання параметрів її ВАХ для аналізу складу газового середовища.

Структура експериментальних зразків та методи її дослідження

Для отримання наноструктурованого шару в роботі використовувалися пластини монокристалічного кремнію р-типу (100) орієнтації, леговані бором, з питомим опором $1 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. З метою очищення поверхні від забруднень і її попередньої підготовки зразки оброблялися у водному 50% розчині КОН. Наноструктуровані шари отримували шляхом хімічного травлення в розчині на основі плавикової й азотної кислот [5]. Процес хімічного травлення здійснювався при кімнатній температурі і природному денному освітленні в інтервалі від 1 до 5 хв. Дослідження структури хімічно модифікованої поверхні здійснювалося за допомогою скануючого тунельного мікроскопа (СТМ) на повітрі. Елементний склад наноструктурованої поверхні вивчався методом електронної Оже-спектроскопії. Для вивчення розподілу елементів по глибині, поверхня зразків піддавалася іонному травленню. Швидкість травлення відповідала 30 ангстремам в хвилину. Вивчення (ВАХ) здійснювалося на сформованих структурах $\text{In} - \text{моно Si} - \text{нано Si}$ (наноструктурована плівка кремнію) – In . Контакти з In товщиною 0.2 мкм. та площею 1 мм^2 отримували методом магнетронного розпорошення з використанням металеві маски. Зворотній контакт був суцільним.

За допомогою СТМ досліджень морфології поверхні монокристалічної підкладки встановлено що морфологія поверхні дуже розвинута та має мікрорельєф з розмірами елементів від 2 до 15 мкм. Після хімічного травлення поверхня підкладок модифікується і спостерігаються елементи структури розмірами від 20 до 60 нм (Рис.1).

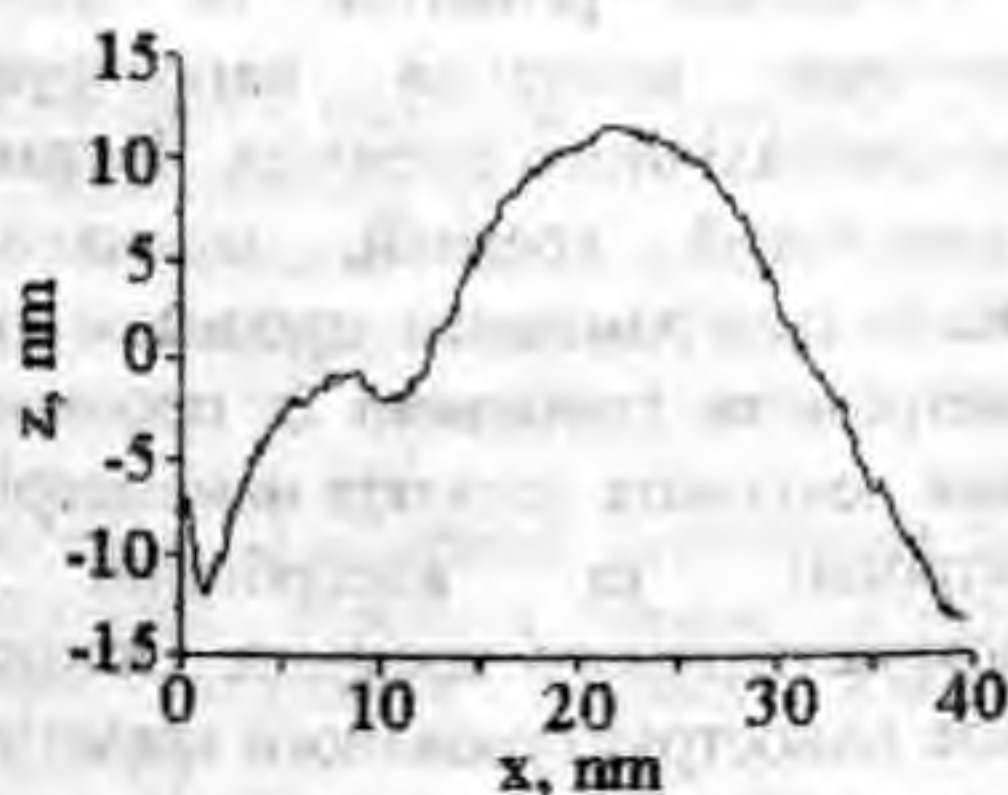
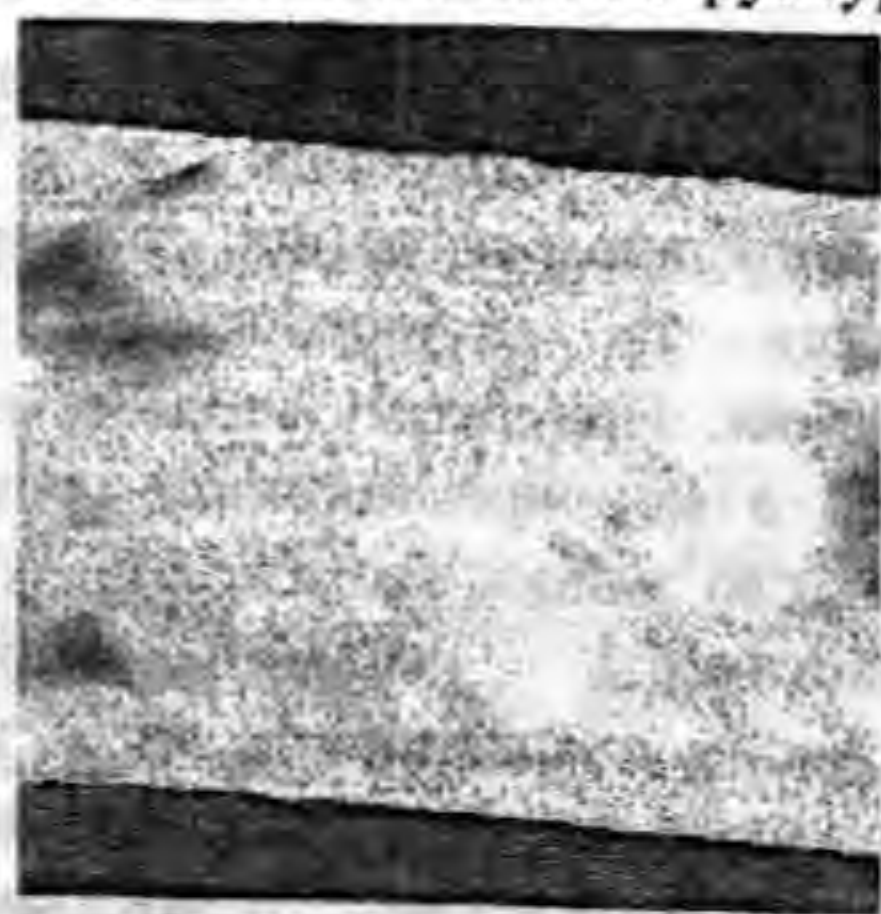


Рис.1. Трьохвимірне зображення хімічно модифікованої поверхні монокристалічного кремнію (область сканування $40 \times 40 \text{ нм}$) та його поперечний переріз.

При цьому слід звернути увагу на те що використовуючи методи атомної силової мікроскопії (АСМ) та СТМ авторами [5] було вказано, що на поверхні мікрорельєфу при хімічній модифікації формується нанорельєф з розмірами кристалітів в декілька нанометрів. Нанорельєф спостерігається у вигляді підвищень нанометрових розмірів над поверхнею мікрорельєфа. Аналіз АСМ та СТМ зображень поперечних перерізів дозволив зробити висновок авторам [5], що висота нанорельєфу не перевищує 20 нанометрів.

Використовуючи методи Оже-електронної спектроскопії було вивчено хімічний склад наноструктурованої поверхні після хімічної модифікації [5]. Основними елементами в досліджених поверхнях є кисень, вуглець, кремній, діоксид кремнію та SiO_x . За допомогою пошарового іонного травлення було проведено вивчення розподілу вказаних елементів по глибині наноструктурованого шару (Рис.2). Як видно з рисунку на самій поверхні спостерігається значна атомна концентрація кисню та вуглецю, а кремній знаходиться в комплексах SiO_x . Слід зазначити, що в глибину поверхні, склад вказаних елементів досить значно зменшується (при цьому кількість атомів кремнію різко зростає) та при травленні приблизно 20 нм концентрація комплексу SiO_x спадає до нуля.

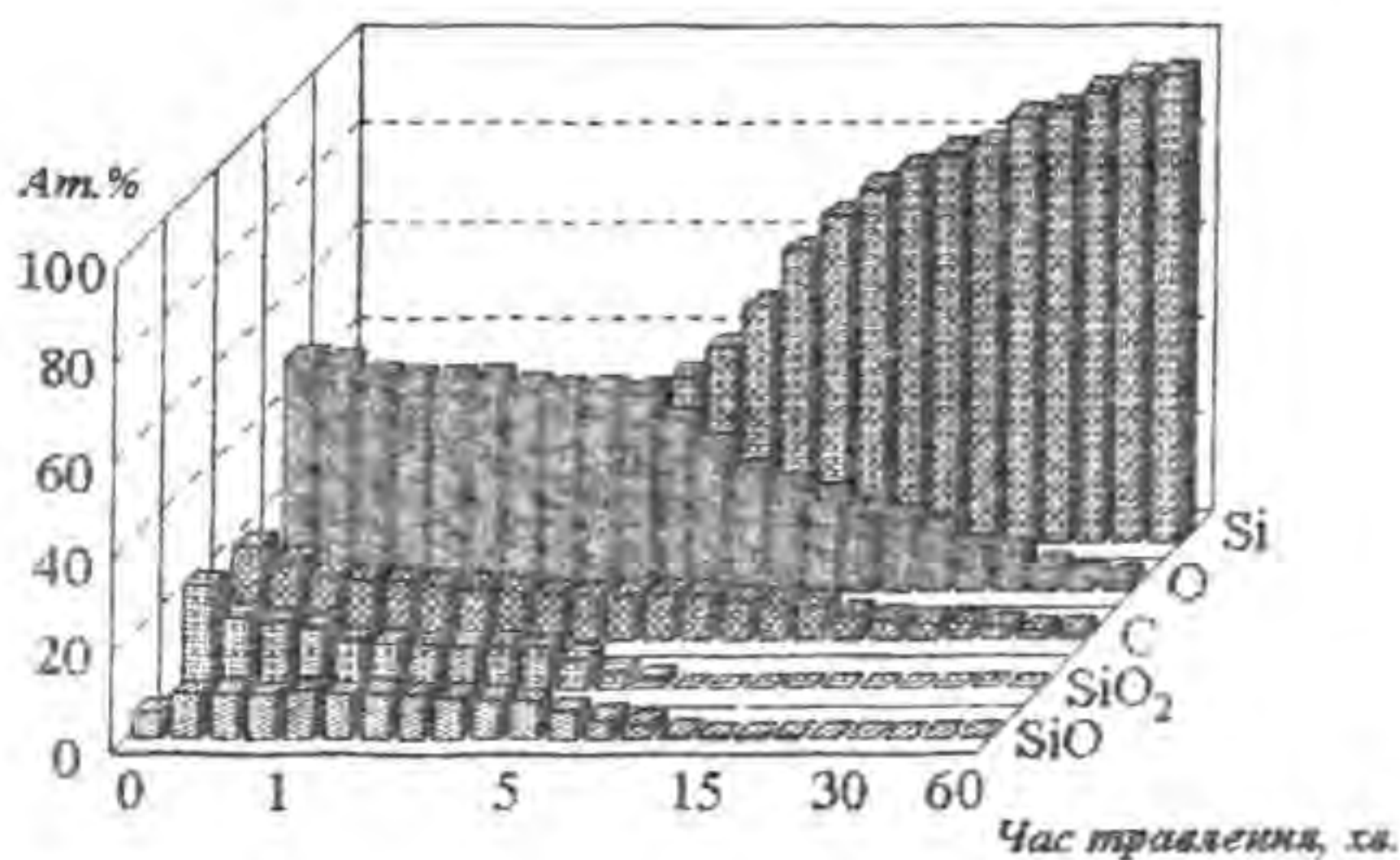


Рис.2. Розподіл складу структури наноструктурована плівка кремнію-кремній по глибині.

Результати експериментальних досліджень чутливості структур до оточуючого газового середовища

Експериментальну установку для дослідження вольт-амперних характеристик структур та їх другої похідної, а також методику досліджень наведено в [6].

Вимірювання вольт-амперної характеристики структури та другої похідної ВАХ проводилися при контрольованому газовому середовищі в

яке було поміщено експериментальні зразки. Типовий вигляд ВАХ структури що досліджувалася наведено на рис.3.

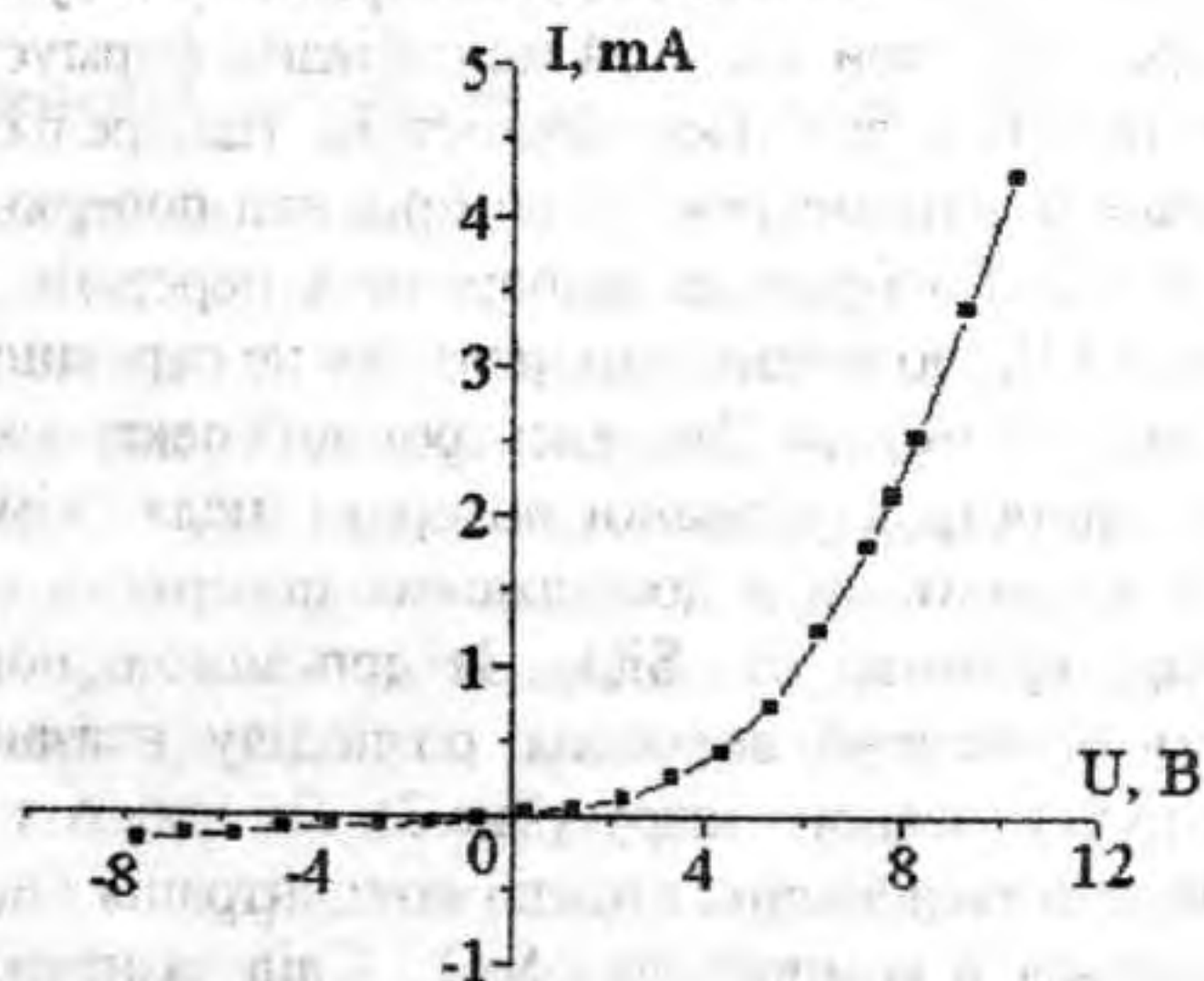


Рис.3. Вольт-амперна характеристика структури
In – моно Si – хімічно модифікований Si– In.

Авторами роботи [3] було вказано на залежність вигляду ВАХ структури від частоти малого тестуючого сигналу ω [6]. При експериментальних дослідженнях залежність вигляду ВАХ In – моно Si – хімічно модифікований Si– In від ω також спостерігалася (рис.4.).

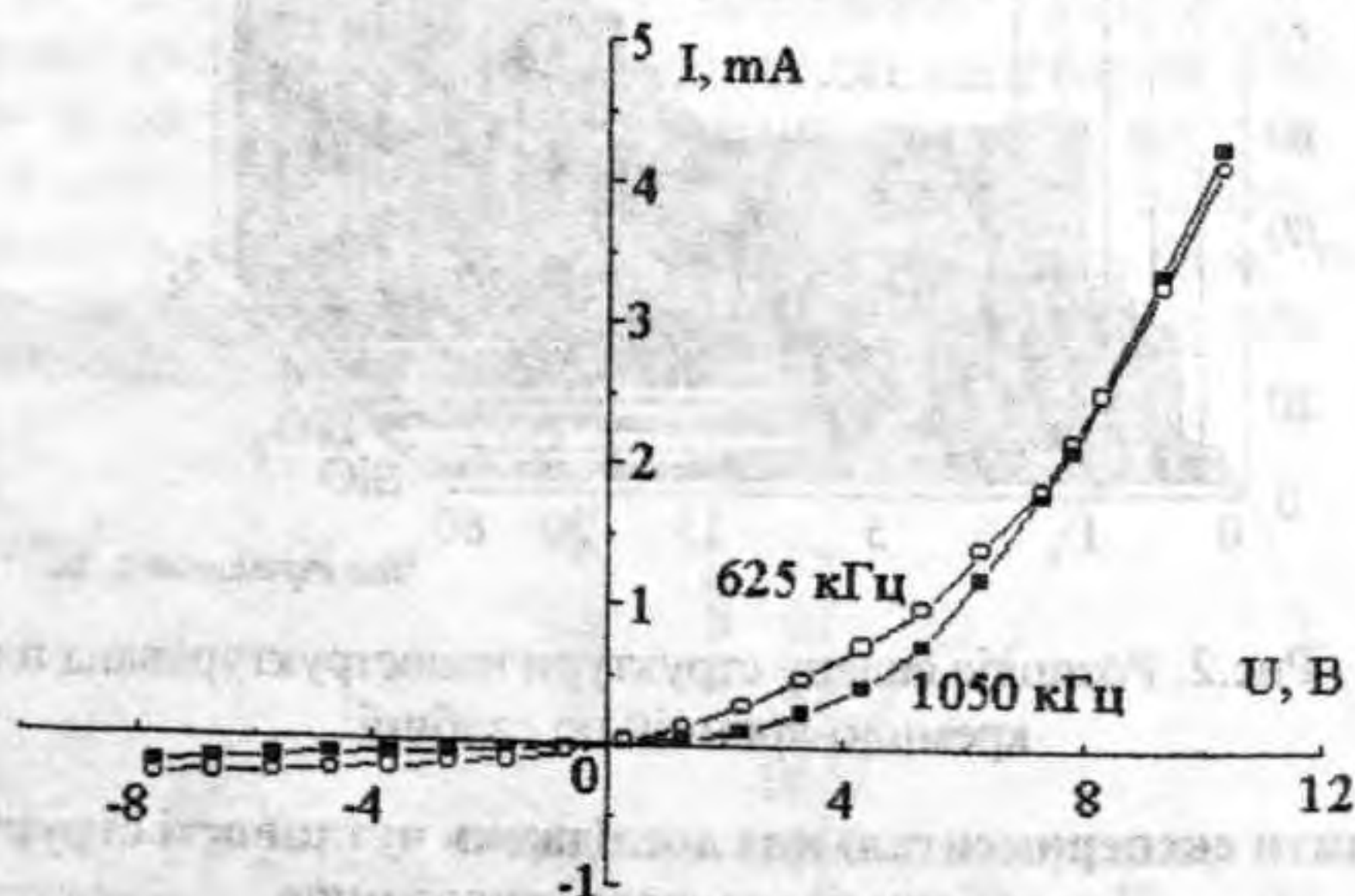


Рис.4. Вольт-амперні характеристики структури у вакуумі ($p = 10^{-5}$ Тор.)
на частотах 625 та 1075 кГц.

Подальші експериментальні дослідження другої похідної d^2I/dV^2 ВАХ структури виявили цілий ряд особливостей, а саме:

1. Наявність принаймні трьох резонансних частот ω (при яких спостерігається максимум амплітуди другої похідної).
2. Різну поведінку даних частот при зміні параметрів газового середовища (тиску та роду газу що досліджувався). Іншими словами, зсув максимумів другої похідної не був рівномірним.

Отримані експериментальні залежності наведені на рис.5. На Рис.5 введено додаткову вісь частот, за допомогою якої можна побачити поведінку максимуму (другої похідної) ВАХ в залежності від параметрів газового середовища. Крива А – відповідає максимуму при $\omega = 625$ кГц в атмосфері парів етилового спирту та у вакуумі; В – максимум при $\omega = 1050$ кГц в атмосфері етилового спирту; С – максимум при $\omega = 1075$ кГц у вакуумі; D – максимум при $\omega = 1200$ кГц у вакуумі; Е – максимум при $\omega = 1205$ кГц в атмосфері етилового спирту.

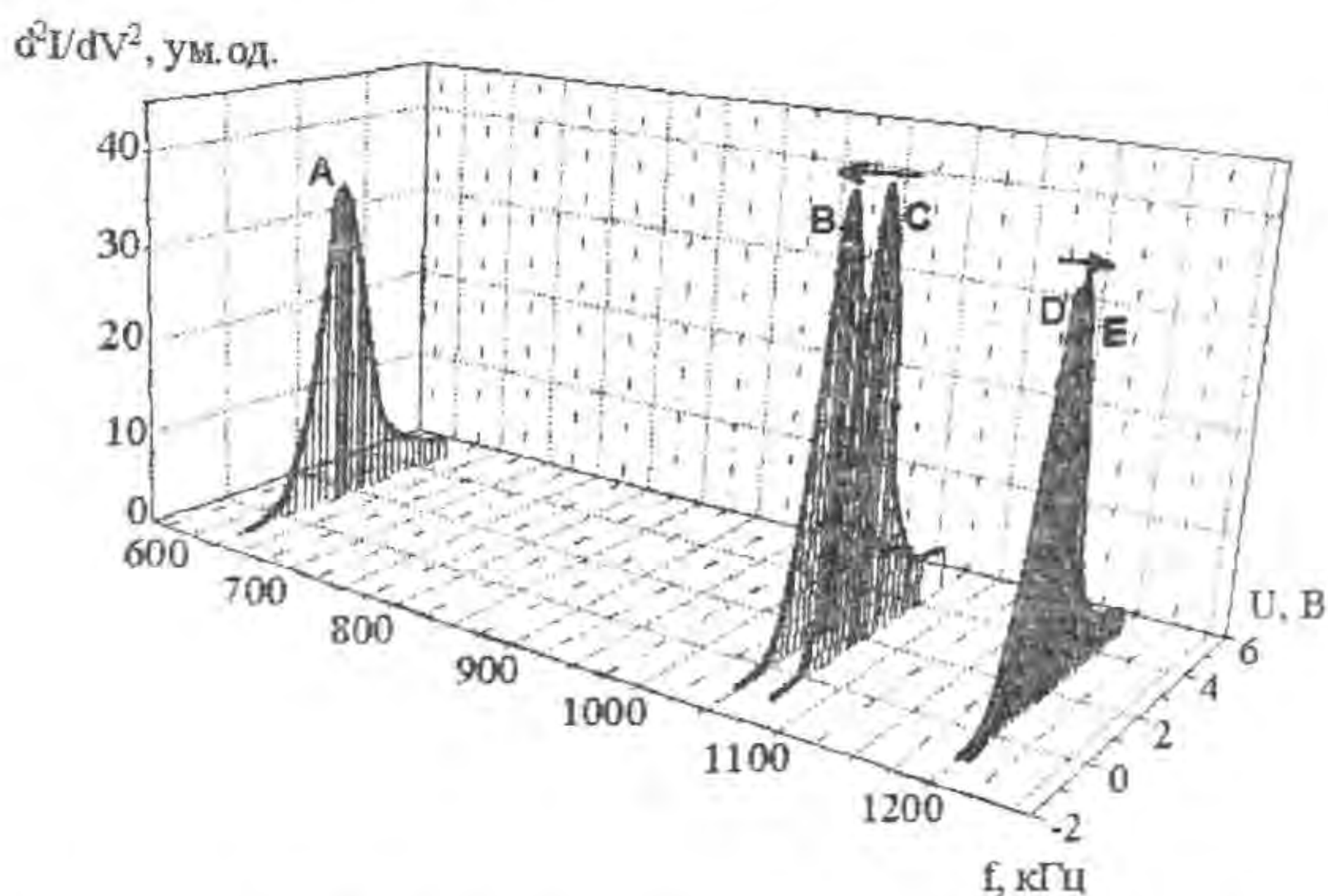


Рис. 5. Друга похідна вольт-амперної характеристики структури.

Детальний аналіз представлених результатів дозволяє зробити такі висновки:

- а). Положення максимуму (другої похідної) ВАХ при частоті $\omega = 625$ кГц не є чутливим до зміни роду газу, що досліджувався (у двох інших випадках положення максимумів змінюється);

б). Зміна резонансної частоти, при якій спостерігаються максимуми В, С та D, Е, при зміні роду газу в який занурено структуру – не є одного знаку (напрямок стрілок на рисунку).

На основі всього вище сказаного, можна зробити висновок, що не всі резонансні частоти, які спостерігаються для даної структури, змінюються при зміні роду газу (пари етилового спирту та вакуум). Іншими словами, не всі максимуми другої похідної є чутливими до зміни роду газу.

Таким чином, для того щоб говорити про чутливість структури Іп – моно Si – хімічно модифікований Si– Іп до зміни роду газового середовища, необхідно проаналізувати зміну положення максимуму d^2I/dV^2 ВАХ (резонансної частоти), який є газочутливим, при зміні роду газу. Цю залежність представлено на рис.6. Крива А отримана при вимірюванні у вакуумі на резонансній частоті $\omega = 1200$ Гц, В – у атмосфері парів етилового спирту при тій же частоті, С – у атмосфері парів етилового спирту на резонансній частоті, яка дорівнює $\omega = 1205$ кГц. Відповідно, дія парів етилового спирту проявляється у вигляді зміни резонансної частоти на 5 кГц.

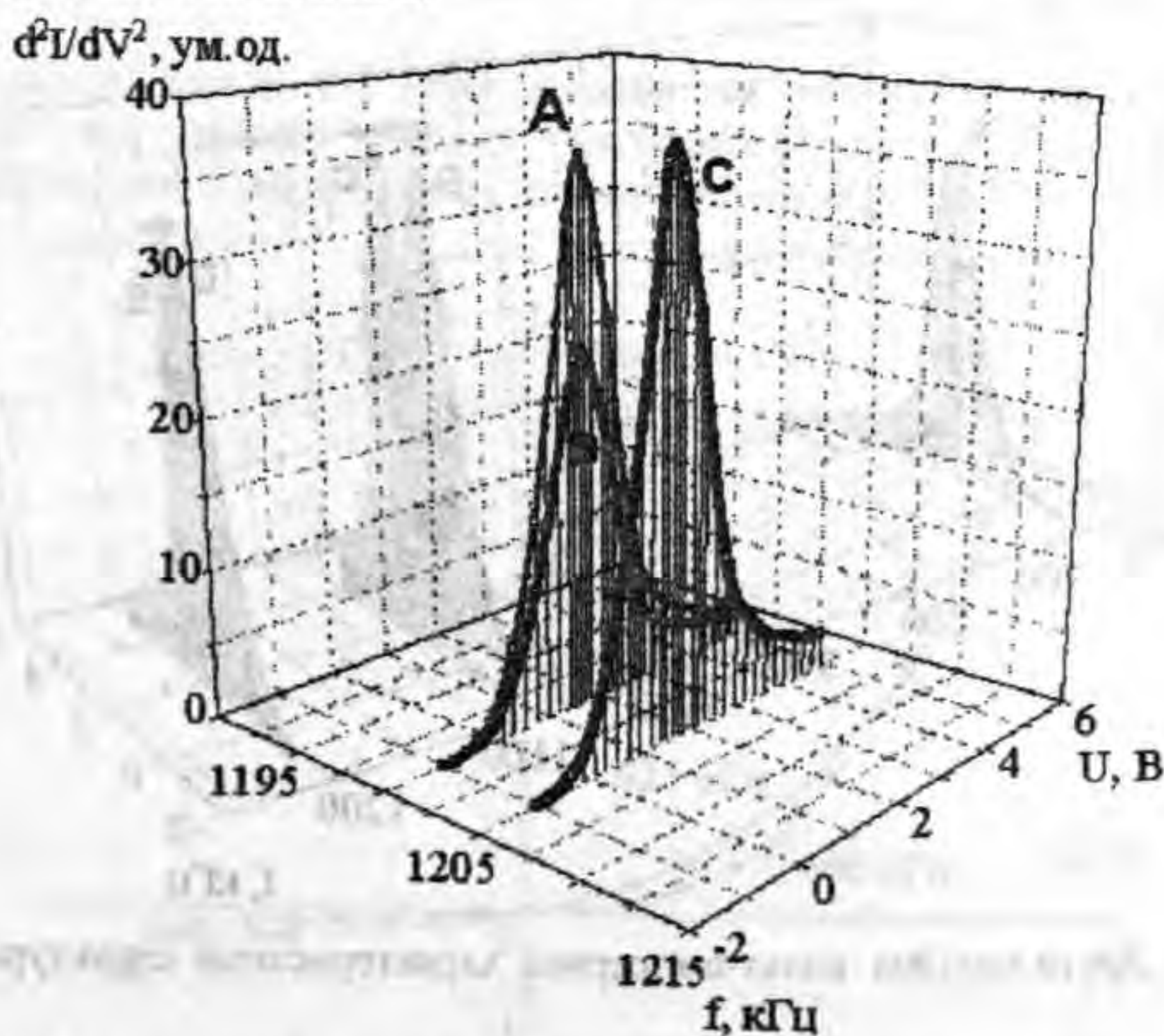


Рис.6. Зміна резонансної частоти як наслідок зміни роду газу що досліджується.

Висновки

Отримані результати можна узагальнити наступним чином. Особливості d^2I/dV^2 ВАХ, що спостерігаються на гетероструктурах хімічно модифікований кремній - кремній відрізняються від результатів, що мали місце на інших гетероструктурах подібного типу [3,6]. Перш за все це стосується кількості максимумів на кривій d^2I/dV^2 . При цьому в [3] спостерігалась монотонна зміна максимуму d^2I/dV^2 при зміні концентрації домішок у оточуючому газовому середовищі. В нашому ж випадку спостерігається не тільки зміна кількості максимумів d^2I/dV^2 в залежності від частоти тестуючого сигналу, але і тенденції їх змін при зміні концентрації домішок газового середовища (криві В,С та D,Е рис.5.). Такі особливості d^2I/dV^2 ВАХ можуть бути пов'язані, на нашу думку, з особливостями структури (морфології) плівок після хімічної модифікації. Ці особливості перш за все полягають в існуванні наноструктурованості кремнію двох типів; так би мовити макро наноструктурованості (порядку 30-40 нм.) і мікро наноструктурованості (порядку 8-10 нм.) (див.Рис. 2). Що повинно приводити до зміни поверхневого потенціалу елементів поверхні, які знаходяться в різному морфологічному оточенні, а це в свою чергу до змін умов адсорбції молекул оточуючого газового середовища. З прикладної точки зору цей ефект може бути використаний, як ще один дискримінуючий параметр для підвищення селективності до певних газів.

Література

1. Ed.L.Canham /Properties of porous silicon // IEE,London. EMIS Datareviews series. 1997. N 18.
2. Starodub, I. P. Goraychuk, V.M. Starodub, V.V.II'chenko, G.V. Kuznetsov. Application of a new electrometric approach to study interaction between biological molecules. // Proc. of the Conference Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MEOMS. Paris, May 9-11, 2000, pp. 506-516.
3. V.V.II'chenko, A.I.Kravchenko, I.V.Skrigun. Resonant phenomena in heterostructure n-SnO₂(Ni) /p-Si at the condition of the gas adsorption.- 9th International Meeting on Chemical Sensores, USA, 2002. pp.146-147.
4. V.A.Vikulov, V.I. Strikha, V.A. Skryshevsky, S.S. Kilchitskaya, E. Souteyrand and J-R Martin. Electrical features of the metal-thin porous silicon – silicon sructure. // J.Phys. D: Appl.Phys.33(2000). pp.1957-1964.

5. V.A.Makara, M.M.Melnichenko, K.V.Svezhentsova, L.Yu.Khomenkova, O.M.Shmyryeva / Structure and luminescence study of nanoporous silicon layers with high internal surface // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. 2003.V.6, N 4. pp. 492-495.
6. В.В. Ильченко, А.И. Кравченко, В.Н. Телега, В.П. Чехун, И.В. Скригун. О возможности использования нелинейных свойств гетеропереходов на основе структур наноразмерная пленка SnO_2 - кремний для анализа газовой среды. Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии/ Збірник наукових праць/ Том 2, вип. 2. – Київ: Академперіодика, 2004. с. 467-476.

Надійшла до редакції 14.02.2005

УДК 533.9:536.3

Ірина В. Присяжневич, Валерій Я.
Черняк¹, Павло А. Коротков²,
Вадим В. Наумов³, Іда Л. Бабіч,
Юрій І. Слюсаренко, Віталій В.
Юхіменко, Василь А. Зражевський

Визначення характеру заселення збуджених електронних рівнів атомів у плазмі поперечної дуги за емісійними спектрами

Розроблена методика визначення характеру заселення збуджених електронних рівнів атомів за емісійними спектрами з слабо розділеною структурою мультиплетів. За допомогою даної методики досліджено плазму поперечної дуги. Промодельовані мультиплети атомарного кисню з урахуванням апаратних функцій, півширина яких змінюється в межах від 0,2 до 2 нм. Отримані результати можуть бути використані для діагностики плазми спектральними приладами з апаратними функціями гаусовського типу.

Ключові слова: неізотермічна плазма, температура заселення збуджених електронних рівнів.

Irina V. Prisyazhnevich, Valeriy Ya.
Chernyak¹, Pavlo A. Korotkov²,
Vadim V. Naumov³, Ida L. Babich,
Yuriy I. Slyusarenko, Vitaliy V.
Yukhymenko, Vasyl A. Zrazhevskiy

Defenition of the excited electron levels ocupation in plasma from the emition spectrum of the transversal electric arc

The defenition method of the character of the excited electron levels ocupation from atomic emission spectrum with low separeted structure of the multiplets was suggested. The plasma of transversal electric arc was investigated by the developed method. Some multiplets of the atomic oxigen were simulated with taking into account the apparatus functions with halfwidth changing from 0.2 to 2 nm. The received results could be used for diagnostic of the plasma by the spectral equipment that have hardware function of the Gaussian type.

Key Words: nonisotermic plasma, the temperature of the ocupation of the excited electron levels

¹ E-mail: chern@mail.univ.kiev.ua

² E-mail: pak@mail.univ.kiev.ua

³ E-mail: naumov@ifpht.kiev.ua

Вступ

Фундаментальними характеристиками нерівноважної плазми є параметри заселення збуджених електронних, коливальних і обертальних рівнів. Традиційними методами дослідження шільної плазми є методи оптичної спектроскопії [1-3]. Зокрема, температуру заселення збуджених електронних рівнів визначають методом Орштейна, суть якого полягає у вимірюванні відносної інтенсивності атомних ліній в емісійних спектрах та апроксимації розподілу заселенностей по енергіям рівнів Больцманівським

законом. Необхідною умовою для реалізації цього методу є вибір спектральних ліній, вільних від самопоглинання.

Діагностування плазми за емісійними спектрами відомими методами оптичної спектроскопії вимагає від реєструючих пристроїв високу роздільну здатність, можливість реєстрації широкого спектрального діапазону, мінімальний час реєстрації спектрів. Спектральні прилади такого класу, як правило, є дорогими. У зв'язку з цим, актуальним є використання приладів з невисокою роздільною здатністю разом з методами комп'юторного моделювання для створення "синтетичних спектрів". Розгляду саме такого підходу для визначення параметрів заселення електронних збуджених рівнів атомів кисню в нерівноважній плазмі поперечного дугового розряду в потоці повітря присвячена дана робота.

Методика обробки емісійних спектрів з слабо розділеною структурою мультиплетів атомів

Розроблено методику визначення параметрів заселення збуджених електронних рівнів за емісійними атомарними спектрами з нерозділеною структурою мультиплетів. В якості об'єкту моделювання розглянуто атомарний кисень. Вибір цього об'єкту обумовлений тим, що атомарні лінії кисню є інтенсивними та не перекриваються з іншими лініями для широкого діапазону струмів електричних розрядів у повітрі. Приклад емісійного спектру плазми поперечного дугового розряду в потоці повітря, зареєстрованого за допомогою спектрометру SL 40 на базі ПЗЗ лінійки, зображено на (рис. 1.).

Як видно, спектри такого роду є багатокомпонентними, містять спектральні лінії матеріалу електродів (міді), кисню, азоту, оксиду азоту, тощо. Зокрема, спостерігаються мультиплети ліній атомарного кисню з нерозділеною структурою ($\lambda_1=777$ нм, $\lambda_2=844$ нм, $\lambda_3=926$ нм). Таким чином, під час розрахунку заселенностей електронних рівнів виникає проблема вибору статистичної ваги нижнього рівня g_1 та сили осцилятора f_{12} для результуючій лінії нерозділеного мультиплету. З метою вирішення даної задачі проведено моделювання цих мультиплетів з урахуванням апаратної функції спектрометру та запропоновано наступну методику розрахунків.

1. На першому етапі, використовуючи відомі спектроскопічні константи [4 - 6], представлені в таблиці 1, розраховувались відносні інтенсивності окремих ліній в мультиплеті в припущенні рівноважного заселення верхніх рівнів мультиплетів:

$$i_{0i} = B \frac{(g_1 \cdot f_{12})}{\lambda_{0i}^3} \cdot \frac{N_0}{g_0} e^{-\frac{E_{2i}}{T_e}} \quad (1)$$

де B – числова константа, N_0 і g_0 – заселеність та статистична вага основного рівня, g_1 – статистична вага нижнього рівня, f_{12} – сила осцилятора, λ_{0i} – довжина хвилі окремої компоненти в мультиплеті [нм], E_{2i} – енергія верхнього збудженого рівня, T_e – температура заселення електронних рівнів, i – номер лінії в мультиплеті.

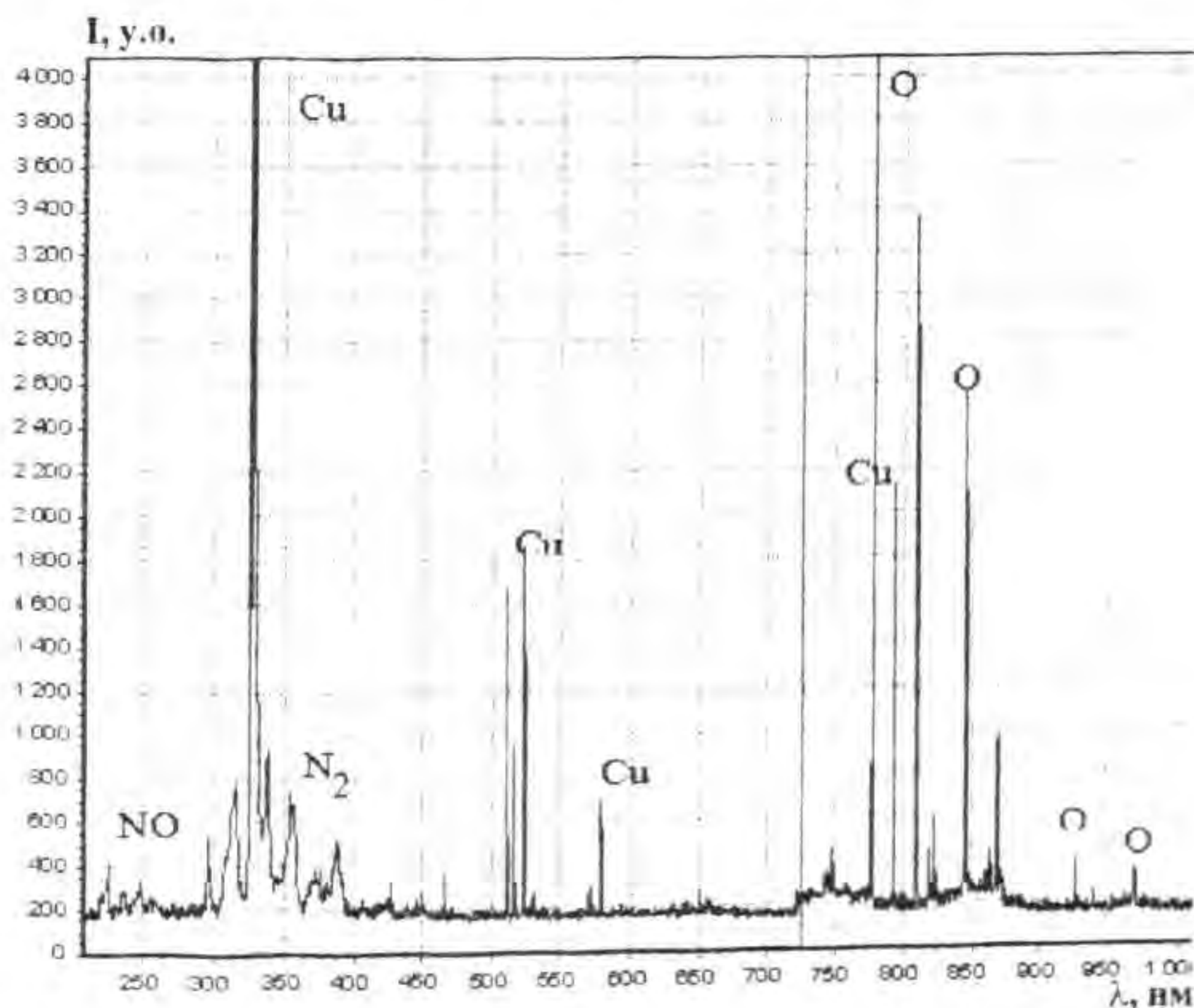


Рис. 1. Емісійний спектр плазми поперечної дуги у потоці повітря, зареєстрований спектрометром SL 40 з роздільною здатністю 1,5 нм.

З співвідношення (1) видно, що найбільш інтенсивними в даних мультиплетах є лінії, умовно позначені λ_m , яким відповідають найбільші сили осциляторів f_{12} :

- Для першого триплету $\lambda_m = 777,194$ нм;
- Для другого триплету $\lambda_m = 844,636$ нм;
- Для мультиплету, який містить дев'ять компонент, $\lambda_m = 926,601$ нм.

Таблиця 1. Оптичні константи мультиплетів атомарного кисню [4].

λ , нм	g_1	g_2	f_{12}	E_1	E_2
777.194	5	7	0.468	9.14609	10,74093
777.417	5	5	0.335	9.14609	10,74047
777.539	5	3	0.201	9.14609	10,74022
844.625	3	1	0.115	9.52137	10,98888
844.636	3	5	0.574	9.52137	10,98886
844.676	3	3	0.345	9.52137	10,98879
926.0806	3	1	0.191	10.74022	12,07866
926.0848	3	3	0.430	10.74022	12,07866
926.0936	3	5	0.334	10.74022	12,07864
926.2582	5	3	0.086	10.74047	12,07866
926.2670	5	5	0.335	10.74047	12,07864
926.2776	5	7	0.535	10.74047	12,07863
926.5826	7	5	0.027	10.74093	12,07864
926.5932	7	7	0.191	10.74093	12,07863
926.6006	7	9	0.737	10.74093	12,07862

2. На ' другому етапі, враховувались параметри апаратної функції спектрального приладу, на якому реєстрували спектри.

Апаратна функція спектрометру SL 40-2-3648 USB була виміряна з використанням He-Ne лазера і апроксимувалась функцією гаусовського типу I_G (рис. 2):

$$I_G = I_0 \exp \left\{ - \frac{4 \ln 2 (\lambda - \lambda_0)^2}{w_i} \right\} \quad (2)$$

де λ_0 — довжина хвилі, що відповідає максимуму функції, w_i — півширина (ширина на половині висоти функції).

Отже, з урахуванням апаратної функції спектрометру для кожної лінії мультиплету спостережений розподіл інтенсивності:

$$i_i = i_{0i} \exp \left\{ - \frac{4 \ln 2 (\lambda - \lambda_0)^2}{w_i^2} \right\} \quad (3)$$

де i_{0i} — інтенсивність i -тої компоненти мультиплету, розрахована за формулою (1).

3. На наступному етапі сумувались інтенсивності компонент мультиплету i_i та будувалась результуюча лінія мультиплету з інтенсивністю $I(\lambda)$, в якій враховано апаратну функцію реєструючого пристрою (рис. 3)

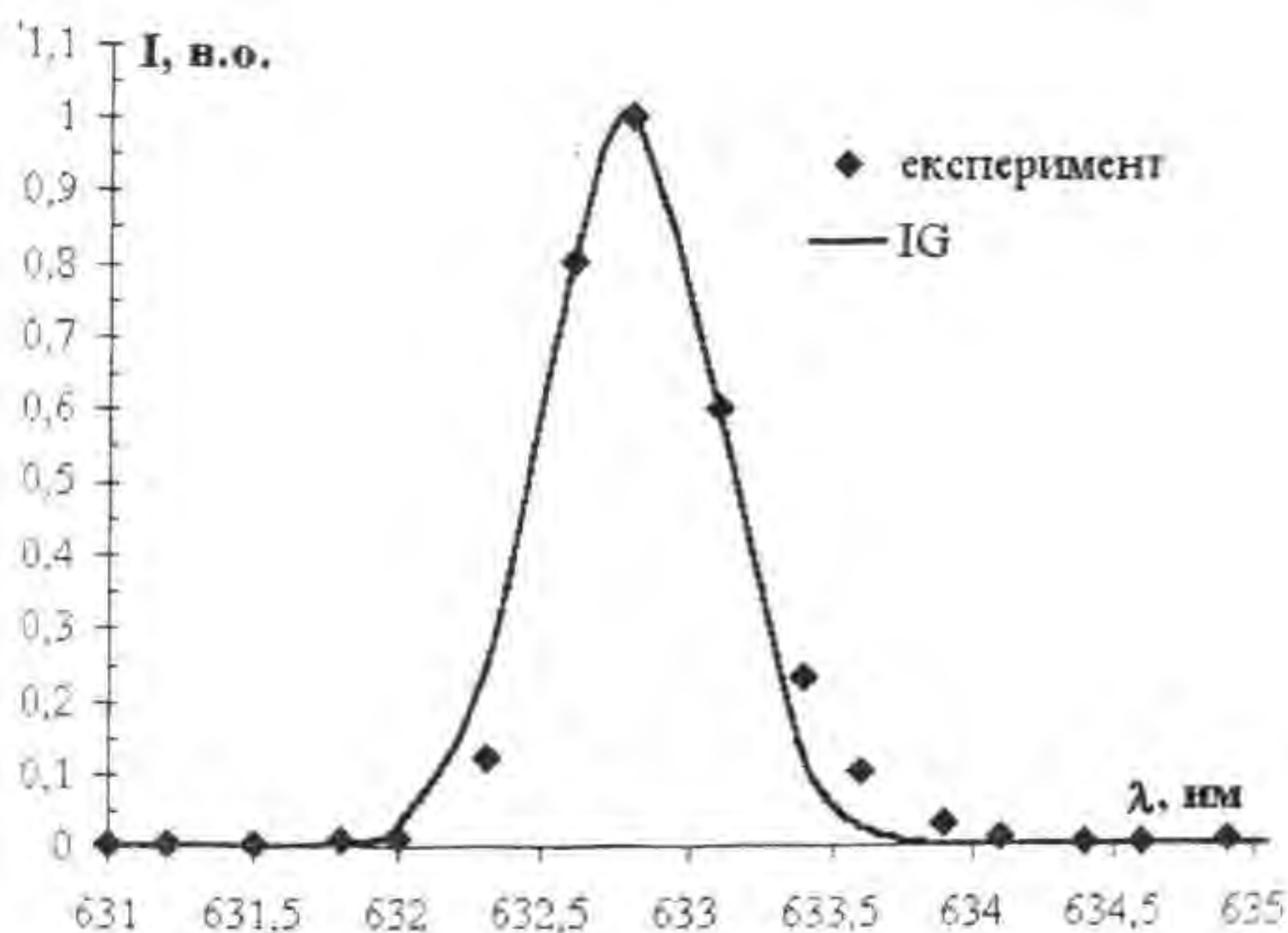


Рис. 2. Апаратна функція спектрометру SL 40-2-3648 USB та її апроксимація функцією гаусовського типу.

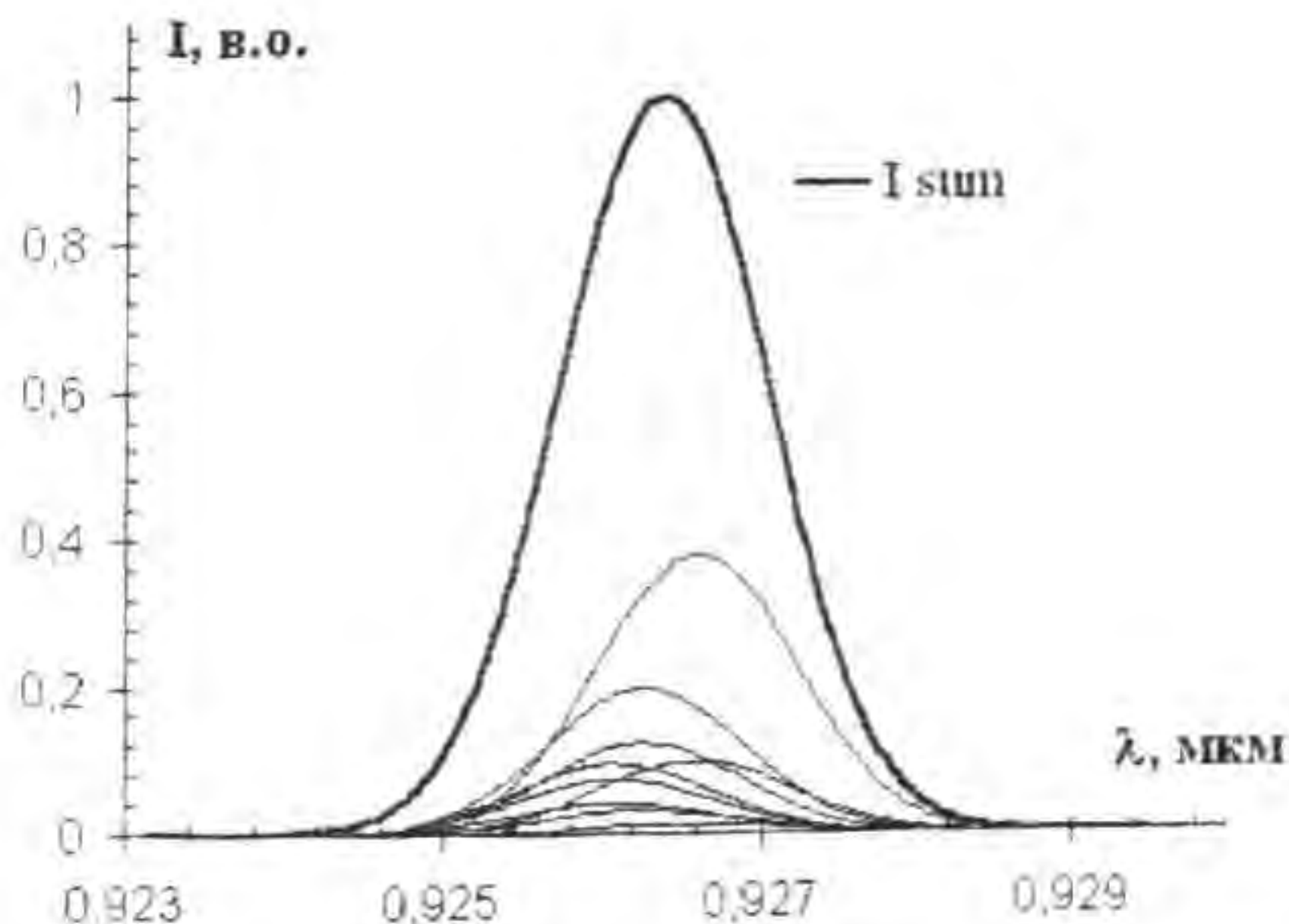


Рис.3. Лінія мультиплету атомарного кисня, модельована з урахуванням апаратної функції спектрометру з $w_i=1.46$ нм.

Для результуючій лінії визначалось максимальне значення інтенсивності I_0 :

$$I_{\text{sum}}(\lambda) = \sum i_i(\lambda) \quad (4)$$

$$I_0 = \max(I_{\text{sum}}) \quad (5)$$

Інтенсивність результуючої лінії мультиплету з нерозділеною внутрішньою структурою описувалась виразом:

$$I_0 = A \cdot \frac{(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}}}{\lambda_m^3} \cdot \exp\left\{-\frac{E'_2}{T_e}\right\} \quad (6)$$

де A – константа, E'_2 – енергія верхнього рівня найбільш інтенсивної лінії в мультиплеті, T_e – температура заселення збуджених електронних рівнів, λ_m – довжина хвилі найбільш інтенсивної лінії мультиплету, $(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}}$ – ефективна величина, введена як:

$$(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}} = K \cdot \sum (g_1 \cdot f_{12})_i \quad (7)$$

де K – коефіцієнт пропорційності.

2. На заключному етапі з рівняння (6) знаходять $(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}}$:

$$(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}} = \frac{I_0 \cdot \lambda_m^3}{A \cdot \exp\left(-\frac{E'_2}{T_e}\right)} \quad (8)$$

Значення коефіцієнту пропорційності K оцінювалось з співвідношення (7).

Розраховані значення $(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}}$, коефіцієнти пропорційності K для мультиплетів атомарного кисня ($\lambda_1=777$ нм, $\lambda_2=844$ нм, $\lambda_3=926$ нм), зареєстрованих спектрометром, апаратна функція якого апроксимовувалась функцією гаусовського типу з півшириною $w_i=1.46$ нм, подані у таблиці 2.

Таблиця 2.

$w_i=1,46$ нм	$\lambda_1=777$ нм	$\lambda_2=844$ нм	$\lambda_3=926$ нм
$(g_1 \cdot f_{12})_{\text{sum}}$	5,02	3,10	14,33
$(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}}$	4,88	3,09	13,56
K	0,97	1,00	0,95
$w_i=0,3$ нм	$\lambda_1=777$ нм	$\lambda_2=844$ нм	$\lambda_3=926$ нм
$(g_1 \cdot f_{12})_{\text{sum}}$	5,02	3,10	14,33
$(g_1 \cdot f_{12})_{\text{eff}}$	2,94	3,01	6,86
K	0.58	0.97	0.48

Досліджено залежності коефіцієнтів пропорційності K , для апаратних функцій гаусовського типу з різними півширинами w_i в діапазоні від 0,2 до 3 нм (рис. 4).

З (рис. 4) видно, що для розглянутих мультиплетів кисню при апаратних функціях гаусовського типу з $w_i \geq 2$ нм, коефіцієнт K є близьким до одиниці. Отже, в цьому випадку під час розрахунку заселеності верхнього рівня за інтенсивністю лінії можна підставляти значення суми добутків статистичної ваги на силу осцилятора:

$$\frac{N_2}{g_2} = \frac{I_0 \cdot \lambda_m^3}{B \cdot \sum (g_i \cdot f_{i2})_i} \quad (9)$$

де B – числова константа, I_0 – інтенсивність спектральної лінії, λ_m – довжина хвилі, яка відповідає найбільш інтенсивній лінії в мультиплеті, $(g_i \cdot f_{i2})_i$ – добуток статистичної ваги на силу осцилятора i -тої компоненти мультиплету.

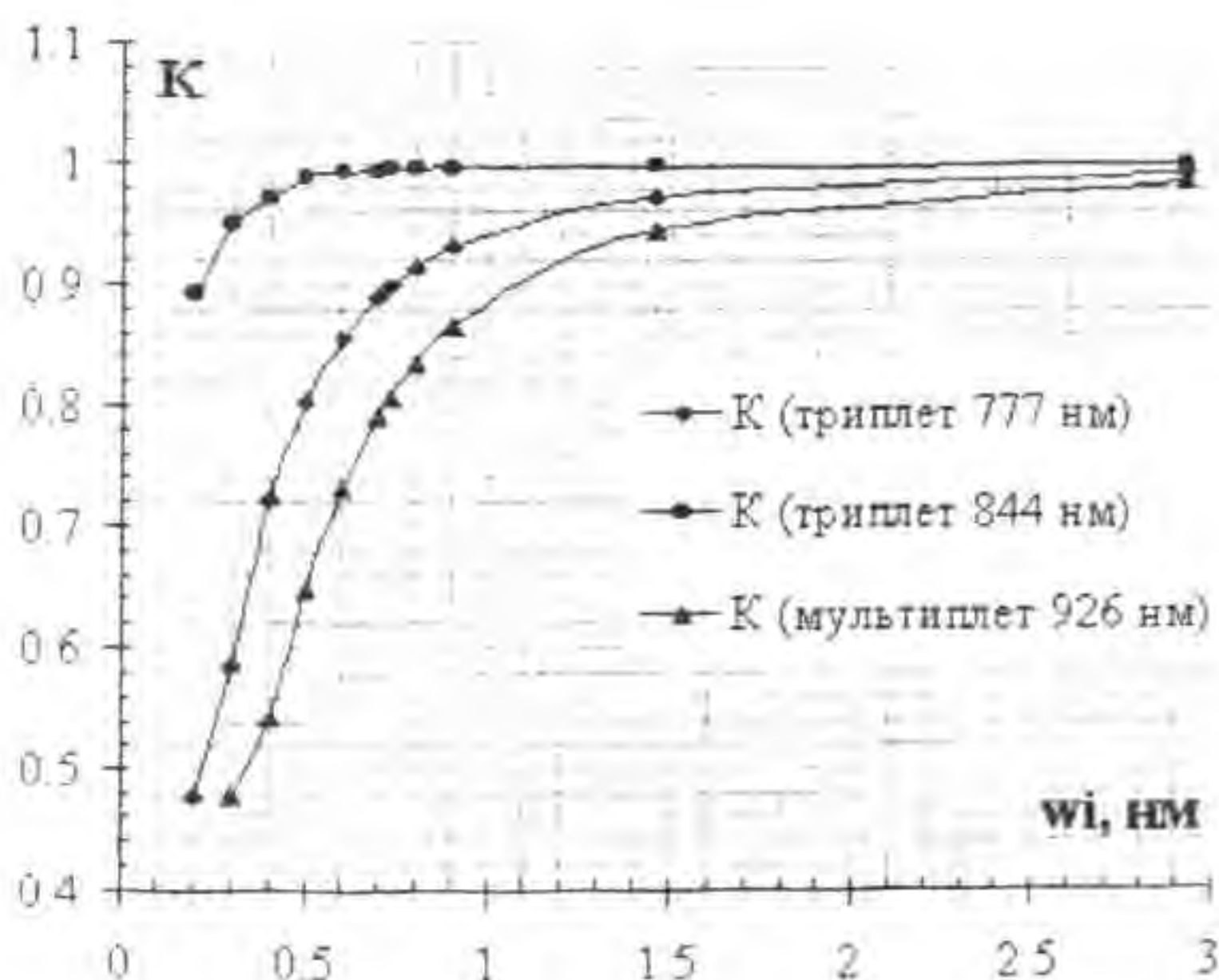


Рис.4. Залежності коефіцієнтів пропорційності K від півширини апаратної функції реєструючого пристрою w_l .

При апаратних функціях гаусовського типу з $w_l < 1$ нм, необхідно враховувати коефіцієнт K , особливо для мультиплетів ($\lambda_1=777$ нм, $\lambda_3=926$ нм). Оскільки відмінність довжин хвиль між компонентами триплету ($\lambda_2=844$ нм) досить мала (вона складає соті долі нм), то навіть при $w_l \geq 0.2$ нм K є близьким до одиниці, і структура цього триплету не спостерігається (рис. 5 б).

У роботі промодельовано також появу структури мультиплетів атомарного кисня при зменшенні півширини апаратної функції до $w_l = 0.2$ нм (рис. 5).

З (рис.5) видно, що структура в першу чергу спостерігається для мультиплету $\lambda_3=926$ нм (вона з'являється вже при $w_l \approx 0.4$ нм), оскільки відстань між його складовими порядка півширини апаратної функції.

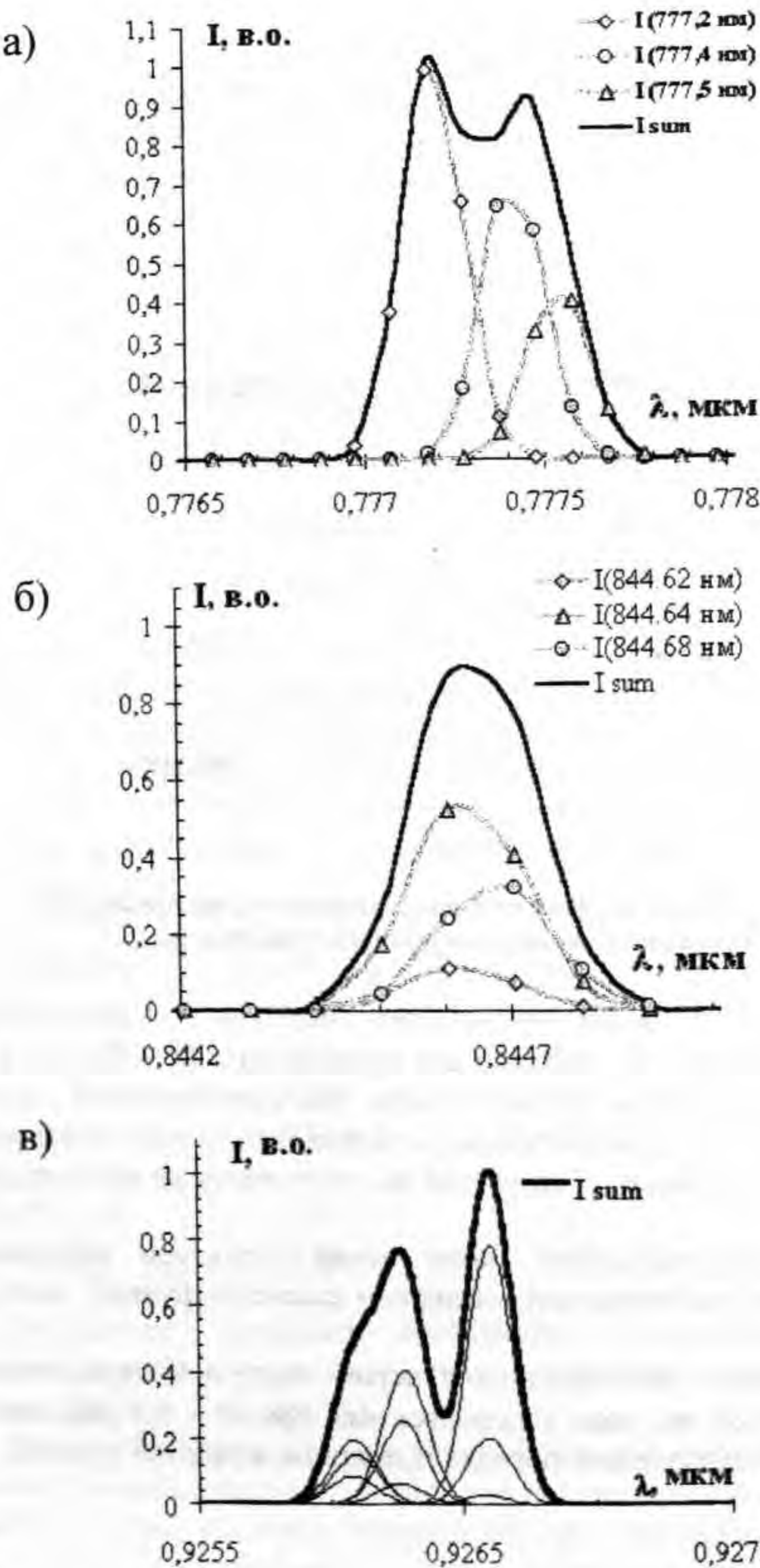


Рис. 5. Результирующая линия I_{sum} мультиплетів з урахуванням апаратної функції гаусовського типу з $w_i=0,2 \text{ нм}$: (а)– 777 нм; (б)– 844 нм; (в)– 926 нм.

Дослідження характеру заселення електронно збуджених рівнів атомів в плазмі поперечної дуги

За допомогою розробленої методики визначено відносні заселеності збуджених електронних рівнів атомів кисню. Типові розподіли вимірних заселеностей по енергіям наведено на (рис. 6.).

Як видно з рис.6 для плазми поперечної дуги в дослідженому діапазоні параметрів характерна лінійна залежність логарифму заселеності рівнів від їх енергії. Це вказує на рівноважний характер заселення електронно збуджених рівнів атомів кисню.

Отримані значення температури заселення для атомів кисню в декілька разів менші за раніше виміряні температури заселення для

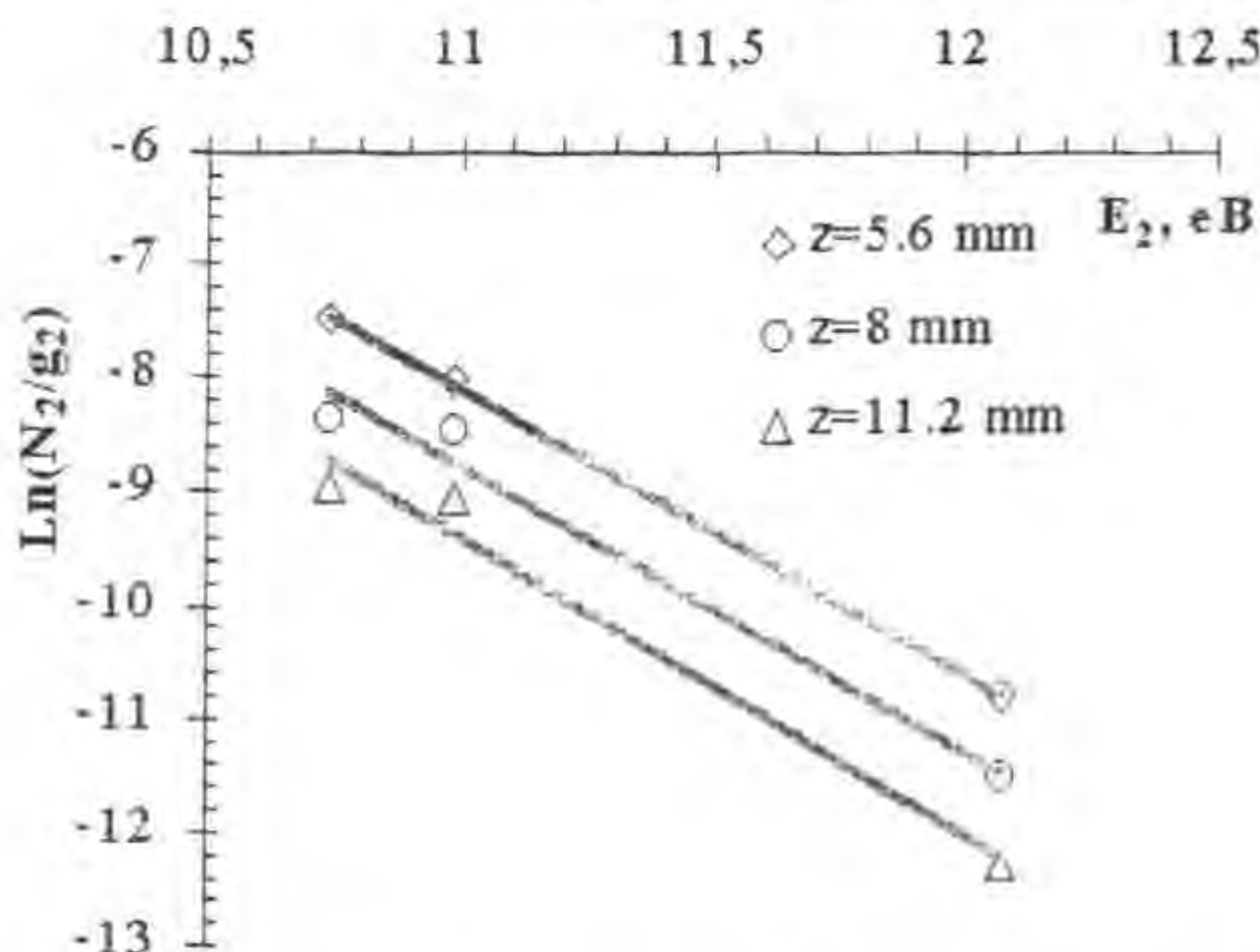


Рис. 6. Залежність заселення збуджених електронних рівнів атому кисню в плазмі поперечної дуги в потоці повітря від відстані від осі разряду z для струму разряду $I=930 \text{ mA}$.

атомів матеріалу електродів (міді) [7] та мають різні закони розподілу вздовж осі газового потоку, що вказує на сильну неізотермічність плазми атмосферного тиску поперечної дуги в потоці обдуваючого газу, та зміну рівня неізотермічності плазми по потоку газу.

Висновки

В представленій роботі розглянутий підхід до визначення заселеностей електронно збуджених рівнів атомів в плазмі з її емісійних спектрів з слабким розділенням мультиплетів.

Розроблену методику застосовано в дослідженнях характеру заселення електронно збуджених рівнів атомів кисню в плазмі поперечної дуги в потоці повітря.

Показано, що заселення електронно збуджених рівнів атомів обдуваючого дугу молекулярного газу має рівноважний характер, як і атомів матеріалу електродів дугового розряду, але з суттєво меншими температурами заселення рівнів. Рівень неізотермічності плазми поперечної дуги непостійний та зменшується вздовж потоку газу.

Література

1. Диагностика плазмы / Под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда – М., «Мир», 1967. – 515с.
2. Фриш С.Э. Оптические спектры атомов. - М.: «Наука», 1963. – 640с.
3. Подгорный И.М. Лекции по диагностике плазмы. – М.: «Атомиздат», 1968. – 218с.
4. NIST Atomic Spectra Database Data <http://physics.nist.gov/cgi-bin/AtData/>
5. Касабов Г.А., Елисеев В.В. Спектроскопические таблицы для низкотемпературной плазмы. – М.: «Атомиздат», 1973. – 160с.
6. Егоров В.С., Толмачев Ю.А., Ключарев А.Н. и др. Справочник констант элементарных процессов с участием атомов, ионов, электронов, фотонов. – СПб.: «С.-Петербургского университета», 1994. – 336с.
7. Chernyak V.Ya., Naumov V.V., Babich I.L., Yukhymenko V.V., Woewoda Yu.V. Study of nonequilibrium plasma in transverse arc discharge air flow// Electronic Proc. Intern. Workshop Nonequilibrium Processes in Combustion and Plasma Based Technologies. August 21-26, 2004, Minsk, Belarus.- 6 p.

Надійшла до редакції 10.02.2005

УДК 533.9.1

Юрій І.Чутов, Олександр Ю.
Кравченко, Тамара Є.Лиситченко,
Галина І.Левада, Роман О.
Романенко, Микола М. Юрчук

Методика моделювання запорошених радіочастотних розрядів в аргоні

В роботі представлена методика числового моделювання радіочастотних розрядів низького тиску ($p \leq 1 \text{ тор}$) в аргонівій плазмі з пиловими частинками. Приведений аналіз моделі задачі на основі експериментальних даних для перетинів основних елементарних процесів в аргонівій плазмі. Взаємодія електронів та іонів з пиловими частинками в рамках моделі зводиться до додаткових елементарних процесів – кулонівського розсіювання та осідання на пилинках. Крім того, заряд пилових частинок враховується в рівнянні Пуассона при визначенні самоузгодженого потенціалу електричного поля. Методика основана на методі "частинок в комірках" та методі Монте-Карло для моделювання елементарних процесів.

Ключові слова: плазма, радіочастотний розряд, пилові частинки, комп'ютерне моделювання.

¹ E-mail: yuch@mail.univ.kiev.ua

² E-mail: kay@mail.univ.kiev.ua

Yurij I. Chutov, Olexander I.
Kravchenko, Tamara E. Lisitchenko,
Galina I. Levada, Roman O. Roma-
nenko, Mykola M. Yurchuk

The Simulation Method of Dusty RF Discharge in the Argon

In this article has presented the numerical modeling method of the low pressure ($p \leq 1 \text{ mtorr}$) radio-frequency discharges in argon plasmas with dust particles. The analysis of the model made using experimental dates of cross-sections of main elementary processes in argon plasma with dust particles. The interaction of electrons and ions with dust particles reduced to additional elementary processes – a coulomb dispersion and a deposition on dust particles. Furthermore, the dust particles charge takes into account in the Poisson equation at calculations of the self-consistent electric potential. The computational procedure involves the PIC - method merged with Monte-Carlo collision calculations.

Key Words: plasma, radio-frequency discharge, dust particles, computer simulation.

Вступ

На сьогоднішній день приділяється значна увага до вивчення радіочастотних розрядів (РЧ). Це пов'язано з широким застосуванням їх в промисловості. Зокрема, РЧ розряди середнього тиску ($p \sim 10 - 100 \text{ торр}$) використовуються для накачки вискоєфективних, надійних та малогабаритних CO_2 -лазерів. РЧ-розряди низького тиску ($p \sim 10^{-3} - 1 \text{ торр}$)

використовуються для травлення, нанесення тонких плівок, вирощування інтегральних схем в мікроелектронній промисловості [1,2].

Як показано в ряді робіт, в РЧ розрядах можуть виникати пилові частинки. Їх поява може бути викликана хімічними реакціями в об'ємі розряду та розпорошенням електродів. Крім того, пилові частинки можуть штучно вводиться в розрядну камеру для дослідження їхнього впливу на параметри розряду.

Для описання розрядів низького тиску використовується, як правило, кінетичний підхід, оскільки функції розподілу електронів та іонів в цих розрядах суттєво відрізняються від максвелівських. Особливо це стосується високо-енергетичної частини функції розподілу електронів, для яких характерні часи максвелізації внаслідок різних елементарних процесів можуть переважати характерний час задачі. В запорошеній плазмі відхилення функцій розподілу електронів та іонів від максвелівських обумовлено також селективним осіданням їх на пилових частинках.

При комп'ютерному моделюванні РЧ розрядів в рамках кінетичного підходу в ряді робіт використовувався метод частинок в комірках разом з методом Монте-Карло (CIC+MC) [3,4]. В даній роботі представляється розвиток цієї методики для випадку радіочастотних розрядів з пиловими частинками, яка була в наших попередніх роботах [5,6].

1. Фізична модель

Розглянемо радіочастотний розряд в аргоні між двома плоскими електродами, які розташовані на відстані d один від одного (рис.1).

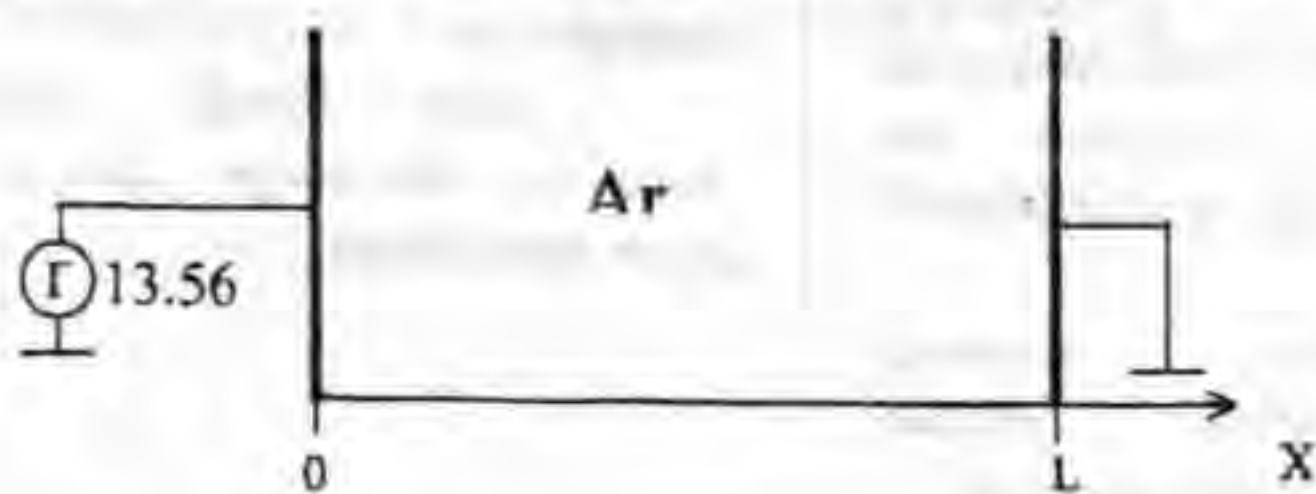


Рис.1.

Один з електродів заземлений ($x = L$), а на другий ($x = 0$) подається напруга, яка змінюється за законом $V = V_0 \cdot \sin \omega t$, де частота $\omega = 13,56 \text{ МГц}$. Тиск газу в розрядній камері $P < 1 \text{ тор}$ і вважається постійним. Припускаємо, що розрядна плазма складається з електронів, однократно заряджених іонів та атомів аргону, а також сферичних пилових частинок з радіусом r_p . Концентрація та склад нейтральних атомів вважаються постійними на протязі всього розряду.

Внаслідок великої різниці мас пилинок та інших частинок плазми, рухом пилових частинок на протязі моделювання будемо нехтувати. Просторовий розподіл пилових частинок будемо вважати заданим.

Приведемо дані для перетинів основних елементарних процесів, які можуть суттєво впливати на властивості аргонної плазми в радіочастотному розряді при низьких тисках ($p < 1 \text{ тор}$) [8].

Для перетину пружних зіткнень електронів з нейтральними атомами аргону використаємо експериментальні дані [7], які апроксимуються наступною залежністю від енергії електронів E

$$\sigma_{ea} = 9.07 \cdot 10^{-19} \cdot E^{1.55} \frac{(E + 70.0)^{1.1}}{(14.0 + E)^{3.25}}. \quad (1)$$

Серед непружних зіткнень електронів з нейтралами в нашій моделі враховуються лише іонізація електронним ударом та збудження нейтральних атомів [8]. Як впливає з [8], серед процесів збудження електронним ударом в аргонній плазмі основну роль відіграють переходи атомів з основного стану в збуджені стани. При цьому наближено вважається, що всі процеси збудження можна об'єднати в один сукупний процес, що має порогову енергію 12 eV . Для аргону такі перетини були визначені експериментально [9], а емпірична формула, яка апроксимує одержані результати деякою функцією від енергії електронів E , має вигляд

$$\sigma_{ex}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } E < 12 \text{ eV}, \\ \left[3.85116 \cdot \ln\left(\frac{E}{3.4015}\right) - 4.85227 \right] \frac{10^{-19}}{E} & \text{при } E \geq 12 \text{ eV}. \end{cases} \quad (2)$$

Для перетинів іонізації нейтральних атомів аргону електронним ударом ми використовуємо експериментальні дані, приведені в [10]. Емпірична формула, яка апроксимує їх в залежності від енергії електрону, має вигляд

$$\sigma_{ion} = 1.3596 \cdot \frac{10^{-18}}{E} \log \left(\frac{E + \frac{120}{E}}{15.76} \right) \cdot \arctg \left(\frac{E^2 - 9.76 \cdot E + 2.4}{20.6 \cdot E + 206} \right). \quad (3)$$

Залежності (1), (2) та (3) зображені на рис.2 кривими 1, 2 та 3, відповідно.

Експериментальні значення перетинів пружного розсіювання іонів на нейтральних атомах σ_{ei} та перетинів перезарядки σ_{rich} можна апроксимувати наступними співвідношеннями [7]

$$\sigma_{ei} = 1.8 \cdot 10^{-19} + \frac{4 \cdot 10^{-19}}{E + 10^{-10}} \quad (4)$$

$$\sigma_{rich} = 2.1 \cdot 10^{-19} + \frac{5.5 \cdot 10^{-19}}{E + 10^{-10}} \quad (5)$$

Приведені залежності перетинів від енергії зображені на рис.2 кривими 4,5.

Перетин кулонівської взаємодії електронів та іонів з зарядженими пиловими частинками визначається співвідношенням [11]

$$\sigma_{ed} = 2\pi b_0^2 \ln \left(\frac{b_0^2 + \lambda_{De}^2}{b_0^2 + b_c^2} \right), \quad (6)$$

де $b_0 = \frac{eq_d}{8\pi\epsilon_0 r_d E}$, $b_c = r_d \left(1 - \frac{eq_d}{4\pi\epsilon_0 E} \right)$, q_d - заряд пилової частинки.

В нашій моделі ми нехтуємо емісійними процесами з поверхні пилових частинок і вважаємо, що зарядка пилинок відбувається завдяки поглинанню електронів та іонів з плазми. Вважаємо, що електрони, які попадають на поверхню пилових частинок, поглинаються, а іони викидають електрони та рекомбінують. Для описання процесу зарядки пилових частинок будемо використовувати теорію обмеженого орбітального руху. При виконанні умови

$$r_d \ll \lambda_D \ll l_{(e)},$$

де λ_D позначає довжину екранування, r_d - радіус пилової частинки, $l_{(e)}$ - довжину вільного пробігу електронів (іонів), із законів збереження енергії та моменту імпульсу можна визначити перетини поглинання електронів та іонів пиловою частинкою.

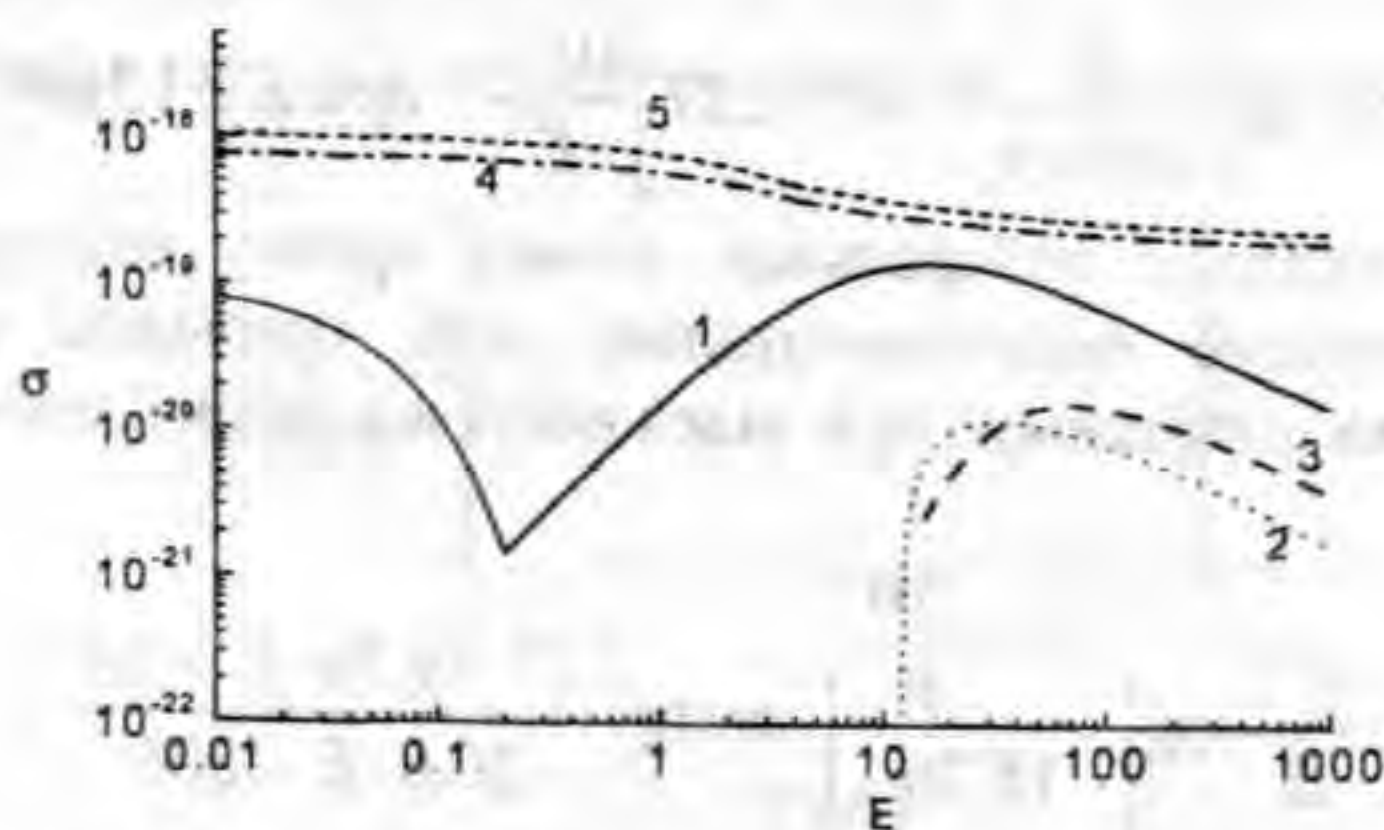


Рис.2. Залежності від енергії перетинів елементарних процесів в аргонівій плазмі (1 – перетин пружного розсіяння електронів на нейтральних атомах, 2 – перетин сукупного процесу збудження атомів аргону електронним ударом, 3 – перетин іонізації атомів електронним ударом, 4 – перетин пружного розсіяння іонів на нейтральних атомах, 5 – перетин перезарядки).

В наближенні, що електрони та іони поглинаються в тому випадку, коли їх траєкторії перетинають чи дотикаються до поверхні пилової частинки, ці перетини мають вид

$$\sigma_{\alpha} = \begin{cases} \pi r_d^2 \left(1 - \frac{q_{\alpha} q_d}{4\pi\epsilon_0 r_d E} \right), & \frac{q_{\alpha} q_d}{4\pi\epsilon_0 r_d E} < 1 \\ 0, & \frac{q_{\alpha} q_d}{4\pi\epsilon_0 r_d E} > 1 \end{cases}, \quad (7)$$

де індекс $\alpha = e, i$ для електрона та іона відповідно, $q_e = -e$ - заряд електрона, $q_i = e$ - заряд іона.

Зазначимо, що записані формули для перетинів осідання є не точними у випадку, коли відстань між пиловими частинками менша від довжини екранування λ_D , оскільки в цьому випадку в рівняннях збереження імпульсу та енергії потрібно враховувати вплив інших пилових частинок.

2. Математична модель

В рамках кінетичного підходу для описання плазми справедливі наступні рівняння

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r} + \frac{q_{\alpha} E}{m_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v} = \sum_j S_{j\alpha}(\sigma_{\alpha}, v_{\alpha}), \quad (8)$$

$$\frac{dq_d(x)}{dt} = I_e(x) + I_i(x), \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\frac{e(n_i - n_e + Z_d n_d)}{\epsilon_0}, \quad (10)$$

де індекс $\alpha = e, i$ для електронів та іонів, відповідно, f_{α} - функція розподілу частинок сорту α ; $Z_d = \frac{q_d}{e}$. Доданок $S_{j\alpha}$ описує зміну функції розподілу частинок сорту α внаслідок j -го елементарного процесу. Електронний та іонний струми на пилову частинку визначаються наступним чином:

$$I_e(x) = \int_{-\sqrt{\frac{m_e q_d}{4\pi\epsilon_0 r_d}}}^{\infty} e v_e \sigma_{ed}^{\alpha}(v_e) f_e(v_e) dv_e, \quad (11)$$

$$I_i(x) = - \int_0^{\infty} e v_i \sigma_{id}^{\alpha}(v_i) f_i(v_i) dv_i.$$

де $\sigma_{ed}^{\alpha}(v)$, $\sigma_{id}^{\alpha}(v)$ - перетини осідання електронів та іонів на пиловій частинці, які визначаються згідно (7).

Концентрація іонів та електронів в рівнянні Пуасона (10) визначається:

$$n_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha} d^3 v. \quad (12)$$

Напруженість електричного поля визначається співвідношенням:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (13)$$

Система рівнянь (8)-(13) доповнюється наступними граничними та початковими умовами:

$$\begin{aligned} \phi &= V_0 \sin \omega t, \quad f_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ \phi(L) &= 0, \quad f_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x = L, \\ f_\alpha &= 0 \quad \text{при} \quad v \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (14)$$

при $t = 0$

$$q_d = 0, \quad f_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} n_0 \exp \left(-\frac{m_\alpha v^2}{2k T_\alpha} \right). \quad (15)$$

3. Дискретна модель

3.1. Дискретизація рівнянь

Для числового моделювання задачі (8)-(15) використовуємо метод “частинок в комірках” (CIS–метод) та метод Монте-Карло для розрахунку елементарних процесів [3]. Згідно CIS –методу плазма представляється дискретним набором елементів фазових рідин електронної та іонної компонент, які можна інтерпретувати як деякі макрочастинки, що характеризуються певними значеннями координат та швидкостей $\{x_i, v_i; i = 1, N_p\}$. Кожній такій макрочастинці відповідає N_p реальних електронів (іонів), які мають приблизно однакові значення координат та швидкостей. Рівняння руху макрочастинок мають вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= v_i, \\ M_\alpha \frac{dv_i}{dt} &= Q_\alpha \cdot E(x_i). \end{aligned} \quad (16)$$

Тут індекс $\alpha = e, i$ для макроелектронів та макроіонів, $M_\alpha = N_p m_\alpha$, $Q_\alpha = q_\alpha N_p$ - маса та заряд макрочастинки, $E(x_i)$ - напруженість електричного поля в точці x_i . Система рівнянь (16) є дискретною вибіркою рівнянь характеристик гіперболічного рівняння (8). Таким чином, перехід від рівняння (8) до системи рівнянь (16) є першою стадією побудови дискретної моделі задачі. Заключна стадія дискретизації полягає в заміні неперервного часу t дискретним набором часових шарів t_n , таких що $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $n = 1, 2, K$, Δt - крок по часу.

В нашій роботі використовувалася кінцево-різницева “схема з переступанням”, в якій координати макрочастинок і поля визначаються на цілих часових шарах t_n , а швидкості визначаються на пів-цілих часових шарах $t_{n+1/2} = 0.5 \cdot (t_n + t_{n+1})$.

Дискретні аналоги рівнянь (16) мають вигляд:

$$\begin{aligned}x_i^{n+1} - x_i^n &= v_i^{n+1/2} \Delta t \\v_i^{n+1/2} - v_i^{n-1/2} &= \frac{Q_i \Delta t}{M_i}\end{aligned}\quad (17)$$

Для стійкості розрахунку необхідно виконати умову, щоб крок по часу Δt був малим в порівнянні з характерними періодами, які розглядаються в системі.

Для визначення потенціалу вводиться просторова сітка з кроком Δx , на якій апроксимується рівняння Пуасона і визначається густина заряду електронів та іонів. Вузли цієї сітки визначаються співвідношеннями

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x, \quad j = 0, K, N_x - 1; \quad x_0 = 0, \quad \Delta x = L / N_x,$$

де N_x - кількість комірок просторової сітки.

Для визначення густин заряду використовується модель СІС (хмаринки в комірці). Згідно цього методу макрочастинка має ширину, що дорівнює ширині комірки просторової сітки і, як правило, міститься одночасно в двох сусідніх комірках. При визначенні густини заряду у вузлах просторової сітки заряд макрочастинки роздається в ці комірки у відповідності до площі макрочастинки, яка знаходиться в тій чи іншій комірці. Якщо x_i - координата центра макрочастинки, x_j та x_{j+1} - центри сусідніх комірок просторової сітки, таких що $x_j \leq x_i \leq x_{j+1}$, то до j -го вузла роздається частина заряду макрочастинки $\Delta Q_j = \frac{|x_i - x_j|}{\Delta x} Q_i$, а до

$$(j+1)\text{-го} - \Delta Q_{j+1} = \frac{|x_i - x_{j+1}|}{\Delta x} Q_i.$$

Густина заряду в j -ому вузлі визначається в результаті "зважування" всіх макрочастинок:

$$\rho_j = \sum_i \Delta Q_i / \Delta x.$$

Дискретний аналог рівняння Пуасона має вигляд:

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = -\frac{\rho_j}{\epsilon_0}, \quad j = 1, K, N_x - 1; \quad (18)$$

$$\phi_0 = V_0 \sin \omega t, \quad \phi_{N_x} = 0,$$

а дискретне співвідношення для напруженості електричного поля у вузлах сітки

$$E_j = \frac{\phi_{j-1} - \phi_{j+1}}{2\Delta x}. \quad (19)$$

Значення електричної сили, що діє на макрочастинку, координата центру якої x_i , визначається за допомогою інтерполяції

$$F(x_i) = Q_i \frac{E(x_{j+1/2}) \cdot (x_i - x_{j-1/2}) + E(x_{j-1/2}) \cdot (x_{j+1/2} - x_i)}{\Delta x}. \quad (20)$$

3.2. Моделювання елементарних процесів за допомогою методу Монте-Карло

Для моделювання елементарних процесів ми використовуємо метод Монте-Карло [3]. Елементарні процеси за участю електронів (іонів) розділяються на дві групи – процеси взаємодії з нейтральними атомами і процеси взаємодії з пиловими частинками. Кожна з цих груп елементарних процесів розглядається окремо, незалежно від іншої. При цьому ми припускаємо, що кожен електрон (іон) на протязі часового кроку може приймати участь лише в одному елементарному процесі першої групи і в одному елементарному процесі другої групи. Розглянемо процес моделювання елементарних процесів однієї з груп, який умовно можна розділити на кілька етапів. На першому етапі визначаються номери макроелектронів (макроіонів), які на протязі часового кроку Δt приймають участь в елементарних процесах. Зазначимо, що при постійній частоті елементарного процесу ймовірність того, що k -а макрочастинка на протязі часу Δt прийме участь в елементарному процесі визначається

$$p_k^\alpha = 1 - e^{-\nu_j^\alpha \Delta t} \quad (21)$$

де індекс $\alpha = e, i$ для електронів та іонів, ν_j^α – частота j -го елементарного процесу для частинок сорту α . Частоти елементарних процесів, що розглядаються в нашій моделі, залежать від енергії електронів (іонів), а у випадку взаємодії з пиловими частинками від концентрації та заряду пилових частинок. Для того, щоб використати формулу (21), крім реальних елементарних процесів розглядається нуль-процес, який не змінює характеристик частинок, а його частота вибирається з умови, щоб сумарна частота $\nu_{tot}^\alpha = \sum_j \nu_j^\alpha$ була постійною. Тоді ймовірність прийняти участь макрочастинці сорту α в будь-якому елементарному процесі (включаючи нуль-процес) можна записати

$$p^\alpha = 1 - \exp(-\nu_{tot}^\alpha \Delta t) \quad (22)$$

Використовуючи (22), можна визначити кількість макроелектронів N_e^{coll} та макроіонів N_i^{coll} , які приймають участь в різних елементарних процесах, включаючи нуль-процес, на протязі часового кроку:

$$N_\alpha^{coll} = N_\alpha^\alpha p^\alpha.$$

Припускаючи, що ймовірність прийняти участь в елементарному процесі для всіх макроелектронів (макроіонів) однакова, за допомогою випадкових чисел знаходимо номери макрочастинок, що на протязі часового кроку візьмуть участь в якомусь одному елементарному процесі.

На другому етапі методу Монте-Карло визначається, який саме елементарний процес має місце для кожного з відібраних N_e^{coll} макроелектронів та N_i^{coll} макроіонів. При цьому вважається, що $\nu_{tot}^\alpha \Delta t = 1$, а отже $p^\alpha \approx \nu_{tot}^\alpha \Delta t$. Ця умова може бути виконана при виборі достатньо

малого кроку по часу. Аналогічно, ймовірності того, що з k -ю макрочастинкою сорту α за час Δt відбудеться j -й елементарний процес, визначаються співвідношеннями

$$(p_k^a)_j \approx \nu_j^a \Delta t = \sigma_j^a v_k n_\beta \Delta t \quad (23)$$

де σ_j^a - перетин j -го елементарного процесу, n_β - концентрація атомів чи пилових частинок ($\beta = a, d$), v_k - відносна швидкість взаємодіючих частинок. З (23) випливає, що ймовірності $(p_k^a)_j$ пропорційні $\sigma_j^a / \sigma_{tot}^a$, причому $0 < \sigma_j^a / \sigma_{tot}^a < 1$. Визначення типу елементарного процесу, в якому бере участь макрочастинка з номером k , відбувається шляхом порівняння випадкового числа $R \in [0, 1]$ з числами $\sigma_1^a / \sigma_{tot}^a$, $(\sigma_1^a + \sigma_2^a) / \sigma_{tot}^a$, $(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a) / \sigma_{tot}^a$... Кількість таких чисел для кожного сорту макрочастинок дорівнює кількості елементарних процесів з нейтральними атомами (пиловими частинками), що враховуються в моделі. Якщо $0 < R < \sigma_1^a / \sigma_{tot}^a$, то вважаємо, що має місце перший елементарний процес, перетин якого σ_1^a . Якщо $\sigma_1^a / \sigma_{tot}^a < R < (\sigma_1^a + \sigma_2^a) / \sigma_{tot}^a$, то має місце другий елементарний процес і т.д.

На останньому етапі методу Монте-Карло проводиться зміна швидкостей макрочастинок, які взаємодіють з нейтральними атомами чи пиловими частинками. Закон, згідно якого відбувається ця зміна, залежить від типу елементарної взаємодії. Пружні зіткнення змінюють кут вектора швидкості розсіяних електронів, при реакції перезарядки енергія іона зменшується і змінюється кут вектора швидкості, при іонізації також зменшується енергія електронів, змінюється кут їх швидкості та створюються електронно-іонні пари з новими швидкостями. Впливом елементарних процесів на нейтральний газ нехтуємо. Для прикладу, вважаємо що збуджені атоми мають час життя менший від часового кроку і тому можна знехтувати ступеневою іонізацією.

4. Висновки

В роботі в рамках РІС та МС методів описана методика числового моделювання радіочастотних розрядів низького тиску ($P < 1 \text{ тор}$) з нерухомими сферичними пиловими частинками. Методика дозволяє розраховувати просторово-часові розподіли потенціалу самоузгодженого електричного поля, густини заряду пилових частинок, концентрацій та напрямлених потоків іонів і електронів, а також функції розподілів електронів та іонів за швидкостями. Взаємодія пилових частинок з плазмою в нашій моделі зводиться до осідання і кулонівського розсіювання електронів та іонів на пилинках, а заряд, який набувають пилинки, враховується при визначенні самоузгодженого електричного

поля в розряді. Представлена методика дозволяє враховувати процеси іонізації та збудження атомів електронним ударом, пружне розсіяння електронів та іонів на нейтральних атомах, а також процеси перезарядки.

Література

1. Ю.П. Райзер. Высокочастотный емкостной разряд и его приложения //Соросовский образовательный журнал.- 1999.- № 8.- С.90-96.
2. Goedheer W.J. Lecture notes on radio-frequency discharges, dc potential, ion and electron energy distribution //Plasma Sources Sci.Technol.- 2000.- 9.- P.507-516.
3. Birdsall C.K. Particle-in-Cell Charged-Particle Simulations, Plus Monte Carlo collisions with neutral atoms, PIC-MCC// Transactions on Plasma Science.- 1991. - 19, № 2. - p.65-84.
4. M.Yan, W.J.Goedheer. A PIC-MC simulation of the effect of frequency on the characteristics of VHF SiH_4/H_2 discharges //Plasma Sources Sci. Technol. -1999. -8. – p. 349-354.
5. Yu.I. Chutov, W. Goedheer, O.Yu. Kravchenko, G.I. Levada, T.E. Lisitchenko, R.O. Romanenko, R.D. Smirnov. Dusty RF discharges with various profiles of dust particles // 30th EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Phys., St. Petersburg, 7-11 July 2003 ECA Vol. 27A, P-4.114.
6. Yu. I. Chutov, W.J. Goedheer, O.Yu. Kravchenko, O.A. Lavrov, R.Romanenko. Dusty discharges with secondary emission. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics (7). - 2002.- No 4.- P.168-169.
7. J. Vlcek. A collisional-radiative model applicable to argon discharges over a wide range of conditions. I. Formulation and basic data //J. Phys. D: Appl. Phys. -1989. – 22. –p. 623-631.
8. M.Surendra, D.B.Graves, G.M.Jellum. Self-consistent model of a direct-current glow discharge: Treatment of fast electrons // Phys. Rev. A. - 1990. – 41, N 2. – p. 1112-1126.
9. E.Eggarter. Comprehensive optical and collision data for radiation action. II. Ar //J.Chem.Phys. -1975. – V.62.-P.833-847.
- 10.L.R.Petersson, J.E.Allen. Electron Impact Cross Sections for Argon // J. Chem. Phys. - 1972. –56. – p. 6068-6076.
- 11.P.K.Shukla, A.A.Mamun. Introduction to dusty plasma physics. –Bristol and Philadelphia: IoP, 2002.

Надійшло до редколегії 4.01.2005 р.

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 577.3

Ольга І. Гічан[♥], провідний інженер,
Леонід Б. Лерман^{*}, канд. техн. наук,
Леонід Г. Гречко^{*}, д-р фіз.-мат. наук,
Юрій П. Склярів, асистент.

Olga I. Gichan, Junior researcher
Leonid B. Lerman, Dr. Ph
Leonid G. Grechko, Dr. Ph.
Yuriy P. Sklyarov, research staff

Просторово-часові структури в моделі ФітцХ'ю – Нагумо для збудливого та бістабільного середовищ

Spatio-temporal patterns in the Fitz-Hugh – Nagumo model for excitable and bistable media

Досліджується утворення просторово-часових структур в реакційно-дифузійній моделі, які виникають в результаті різних типів нестійкостей. Для режиму реалізації бістабільного середовища встановлені обмеження на параметри моделі. Наводяться приклади конкретних розрахунків.

The formation of pattern sequences in the simple reaction-diffusion model under different types of instabilities was investigated. The restrictions on the system parameters for the bistability regime realization are derived. The analytical calculations for some special cases are presented.

Ключові слова: збудливість, бістабільність, формування структур, нестійкість Хопфа, нестійкість Тюрінга.

Key words: excitability, bistability, patterns formation, Hopf instability, and Turing instability.

[♥]E-mail: pvo1@mail.ru

^{*}E-mail: user@surfchem.freenet.kiev.ua

Вступ. Утворення та самоорганізація просторово-часових структур в системах віддалених від стану термодинамічної рівноваги є одним з актуальних напрямків, які досліджуються сучасною наукою. В хімічних, фізичних та біологічних системах спостерігаються автохвилі, дисипативні структури та інші динамічні об'єкти [1-4]. При дослідженні процесів самоорганізації у нерівноважних системах різної природи [5-7] в якості базових моделей використовуються реакційно-дифузійні системи з двома динамічними змінними. Сучасна теорія утворення структур бере свій початок з оригінальної роботи Тюрінга 1952 року [8], де він визначив умови, при яких просторово-однорідний стан двохкомпонентної системи втрачає свою стійкість внаслідок дифузійної нестійкості. При перевищенні початковим збуренням деякого критичного значення в початково однорідній системі виникають стаціонарні локалізовані структури, які зветься структурами Тюрінга. Характеристики таких дисипативних структур визначаються швидкостями реакції та дифузії, що є властивими даній системі, і не залежать від зовнішніх просторових та інших обмежень.

У статті на основі моделі ФітцХ'ю – Нагумо (ФХН) [9,10], яка є важливим прикладом вказаних систем, аналізується просторово-часова поведінка змінних. В доповнення до відомих результатів, визначаються критерії виникнення можливих динамічних режимів. Зокрема, для бістабільного середови-

ща встановлюються обмеження на параметри відповідних нелінійних диференціальних рівнянь. Наводяться приклади чисельних розрахунків, що дозволяють простежити вплив параметрів біфуркації.

1. Загальна характеристика моделі ФітцХ'ю – Нагумо. Модель ФХН широко використовуються для опису нелінійної динаміки активних середовищ, до яких належать також і такі біологічні об'єкти, як нервові та м'язові волокна [11,12]. Модель ФХН описує просторово-часову еволюцію функції збудження, активатора u , та функції відновлення, інгібітора v , яка в одновимірному випадку має наступний вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де t, x - безрозмірні часова і просторова змінні, $f(u, v) = u(n - u)(u - 1) - v$, $g(u, v) = \varepsilon(u - av + b)$, D_u, D_v - коефіцієнти дифузії активатора та інгібітора, відповідно, а n, a, b - дійсні параметри, які характеризують систему.

Вважається, що в системі (1) присутній малий параметр $\varepsilon = T_u / T_v$, який визначає вплив інгібітора на активатор, T_u, T_v - часові константи ($T_v \gg T_u$). При цьому вважається, що завжди $a > 0$. Якщо покласти $b = 0$, то отримаємо спрощену систему ФХН, яка була докладно досліджена в [13]. В цій роботі досліджується більш загальна трьохпараметрична модель.

Для системи (1) в статті приймаються періодичні граничні умови, які відповідають випадку відсутності потоку через границі інтервалу $0 < x < d$, де d деяка константа. Початкова умова описує збурення системи при $t = 0$ у вигляді імпульсу певного типу, прикладеного до межі $x = 0$ (в [13] розглядається імпульс, діючий в початку координат необмеженої області). У наведених далі прикладах чисельних розрахунків приймалася трикутна форма імпульсу. Зауважимо, що поведінка розв'язків системи рівнянь ФХН може якісно змінюватися в залежності від величини збурення. В ній можуть виникати або автохвилі, або дисипативні структури. Властивості цих просторово-часових структур визначаються саме властивостями системи, і слабо залежать від початкових та граничних умов.

Нуль-ізокліни системи (1) задаються системою алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} f(u, v) = 0, \\ g(u, v) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(n - u)(u - 1) - v = 0, \\ u - av + b = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Від співвідношення між значеннями параметрів n, a, b залежить кількість стаціонарних точок системи (1), які в площині u, v визначаються координатами точок перетину нуль-ізоклін. Параметрами, що не впливають на кількість стаціонарних точок системи (1), але від яких залежить стабільність стаціонарних станів, є відношення ε та коефіцієнти дифузії D_u, D_v , які мо-

жна вважати параметрами біфуркації. При їх відповідних значеннях можуть виникати наступні режими:

- збудливий режим, коли нуль-ізокліни перетинаються в єдиній точці, що може лежати на одній із спадних, зовнішніх гілок нуль-ізокліни $f(u, v) = 0$, і при цьому стаціонарна точка є стійкою лише до малих збурень;

- режим Хопфа-Тюрінга, коли стаціонарна точка лежить на зростаючій, внутрішній ділянці нуль-ізокліни $f(u, v) = 0$ і є нестійкою; розв'язок може втратити стійкість двома шляхами: або через біфуркацію Хопфа, що веде до утворення в системі часових структур – осциляцій, або через біфуркацію Тюрінга, що призводить до формування регулярних просторових структур;

- бістабільний режим, коли нуль-ізокліни перетинаються в трьох точках, що лежать на різних гілках нуль-ізокліни $f(u, v) = 0$, дві з яких є стабільними, а одна є нестабільною.

Система (2) зводиться до кубічного рівняння відносно u , яке може мати або один, або три дійсних кореня, що і визначають точки перетину ізоклін. Умови реалізації таких випадків визначаються знаком величини

$$Q = (p/3)^3 + (q/2)^2, \quad (3)$$

де $p = -(n+1)^2/3 + n+1/a$, $q = -2(n+1)^3/27 + (n+1)(n+1/a)/3 + b/a$.

Досліджуючи вплив параметрів на знак величини Q , можна прогнозувати поведінку конкретної системи. При $Q > 0$ матимемо один дійсний корінь; при $Q \leq 0$ - три дійсних кореня. Якщо $Q = 0$, з трьох дійсних коренів один два будуть кратними (особливий випадок). Безпосередній аналіз нерівностей провести досить важко, тому зручно застосовувати метод, запропонований в [14].

Розглянемо докладніше різні можливі режими системи ФХН.

2. Автохвилі в моделі ФітцХ'ю – Нагумо. Автохвилі є найбільш цікавими динамічними об'єктами в активних середовищах [15], прикладами яких в одновірному випадку є хвилі перемикавання, біжучі імпульси або їх послідовність. Періодична послідовність біжучих імпульсів може виникати в системі ФХН внаслідок втрати однорідним станом своєї стійкості через біфуркацію Хопфа. Остання визначається з умови $\text{Re } \lambda(k_i) > 0$ і $\text{Im } \lambda(k_i) \neq 0$, що накладається на корені характеристичного рівняння (4):

$$\lambda^2 + [(D_u + D_v)k^2 - f_v - g_v] \lambda + D_u D_v k^4 - k^2(D_v f_u + D_u g_v) + f_u g_v - f_v g_u = 0, \quad (4)$$

де нижніми індексами u, v позначені частинні похідні функцій $f(u, v), g(u, v)$ по змінним u, v , які обчислюються в стаціонарних точках системи ФХН. При

цьому період осциляцій є $T = 2\pi / \text{Im}\{\lambda(k_0)\}$, де k_0 – нульове хвильове число.

Для системи ФХН частота автоколивань $\omega = \sqrt{f_u g_v - f_v g_u} = \sqrt{\varepsilon(1 - \varepsilon a^2)}$.

Наявність дифузії в системі ФХН може призводити до складних осциляцій та різноманітних явищ синхронізації, приклади яких наведені на рис. 1а, 1б. Це автохвильові режими системи ФХН з однією стаціонарною точкою, що лежить на зростаючій ділянці ізокліни. Граничні умови задавалися для проміжку $0 < x < 3$. Початкові умови були задані локальним збуренням у центрі відрізка по першій динамічній змінній. Всі інші точки простору знаходилися в стаціонарному стані. Результати отримані при наступних значеннях параметрів системи: $a = 4$, $b = -0,48$, $n = 0,4$ для обох випадків (особлива точка системи $u = 0,742$, $v = 0,065$), $\varepsilon = 0,001$. Коефіцієнти дифузії приймалися різними: для рис. 1а $D_u = 0,1$, $D_v = 0,05$, а для рис. 1б $D_u = 0,001$, $D_v = 0,01$.

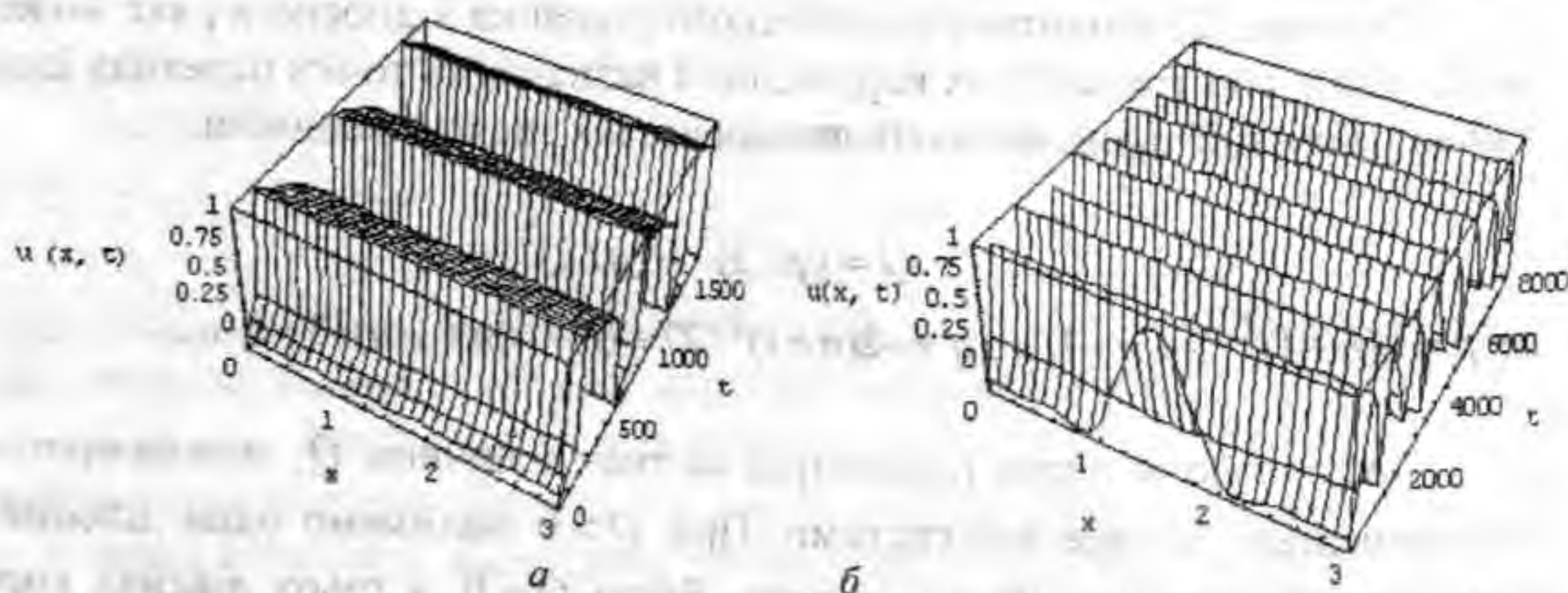


Рис. 1. Автохвильові режими в системі ФХН з однією стаціонарною точкою, що лежить на зростаючій ділянці нуль-ізокліни $f(u, v) = 0$.

З наведеного приклада випливає, що коефіцієнти дифузії при незмінному збуренні суттєво впливають на період (частоту) виникаючих автоколивань. Аналогічні результати мають місце і для інших значень коефіцієнтів дифузії.

3. Режим бістабільного середовища. Режим бістабільного середовища реалізується в системі ФХН, коли вона має три особливі точки. Для існування таких розв'язків необхідне одночасне виконання двох нерівностей, $n^2 - n + 1 > 9/(2a)$ та $b_1 < b < b_2$. З першої нерівності випливає, що можливі значення параметрів n та a лежать зовні від дзвіноподібної кривої, що визначається рівнянням $n^2 - n + 1 - 9/(2a) = 0$, і навпаки, для значень параметрів n та a , що лежать у внутрішній області дзвіноподібної кривої система ФХН має лише одну стаціонарну точку. Значення параметра b , що обмежують зростаючу ділянку „И-подібної” нуль-ізокліни, на якій стаціонарні точки є нестійкими, визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{27} \left((1+n) \left(-9 + a(2-5n+2n^2) \right) - \sqrt{1-n+n^2} \left(-9 + 2a(1-n+n^2) \right) \right) , \\ b_2 &= \frac{1}{27} \left((1+n) \left(-9 + a(2-5n+2n^2) \right) + \sqrt{1-n+n^2} \left(-9 + 2a(1-n+n^2) \right) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

В загальному випадку параметр b може приймати, як від'ємні, так і додатні значення, в залежності від значень параметрів a, n . Особливий випадок виникає при $n = 1/2$, $a = 6$, коли інтервал можливих значень b стягується до однієї точки. Маючи формули (5) неважко проаналізувати можливість виникнення режиму бістабільного середовища для конкретних систем.

При режимі бістабільного середовища дві особливі точки, що лежать на зовнішніх гілках ізокліни $f(u, v) = 0$ є стійкими, а третя особлива точка, що знаходиться між ними є нестійкою (сідлом). Кожен з цих станів має свою область притягання. Межами цих двох областей притягання є входні сепаратриси сідла. Вибираючи початкові умови з різних областей фазової площини, можна потрапити або у верхній, або у нижній стан. При певному співвідношенні між коефіцієнтами дифузії активатора та інгібітора і відповідних значеннях параметрів в системі можливе співіснування двох стійких просторово-однорідних станів. Кожен такий стан характеризується своїм пороговим значенням. Це величина збурення, після якого система вже не повертається у вихідний стан, а переходить в інший: відбувається перемикання. Межа області притягання того чи іншого стану у фазовому просторі точно визначає величину збурення. При цьому для бістабільних систем з кубічною нелінійністю виконується наступне правило: система прагне опинитися в просторово-однорідному стані з більшим порогом. У деякому сенсі більший поріг еквівалентний більш глибокій потенційній ямі. Хоча ці системи не консервативні і потенціал для них особливого фізичного змісту не має, спостерігається явна аналогія.

При взаємному розміщенні ізоклін, коли поріг верхнього стабільного стану більше порога нижнього стану, в системі можна збудити хвилю перемикання нижнього стану у верхній. Для цього потрібно, щоб частина простору була збурена вище порога. Хвиля, що при цьому поширюється, переводить весь просторовий відрізок з нижнього стану у верхній. Зсунувши координати сідлової точки вправо, можна спостерігати ситуацію, коли поріг нижнього стану виявляється більшим від порога верхнього стану, при цьому виникне хвиля, що переключає верхній стан у нижній. Взаємодіючі фронти перемикання, зіштовхуючись, як правило, анігілюють. У деяких ситуаціях вони можуть відбиватися один від одного і утворювати в результаті своєї взаємодії автохвилю чи стаціонарний пік [16].

Особливий інтерес має явище виникнення стаціонарного піка. Він може утворюватися, якщо швидкості хвиль, що зіштовхуються, є незначними. На рис. 2 проілюстровано утворення стаціонарного піку в результаті взаємодії двох хвиль перемикання. Розрахунки були виконані при наступних зна-

ченнях параметрів системи ФХН: (а) $\varepsilon = 0,02$, $a = 9,3995$, $b = -0,2637$, $n = 0,4$, $D_u = 0,001$, $D_v = 0,05$; (б) $\varepsilon = 0,002$, $a = 9,3995$, $b = -0,2637$, $n = 0,4$, $D_u = 0,001$, $D_v = 0,05$.

Як показують розрахунки, такий неізотропний розподіл речовини (його амплітуда і ширина) не залежить від вибраної довжини відрізка середовища. Він може підніматися на "рівнині", що перевищує його розміри в десятки і більше разів. Пік стабілізується тим, що ширше розподілений у просторі інгібітор, не дає поширюватися активатору.

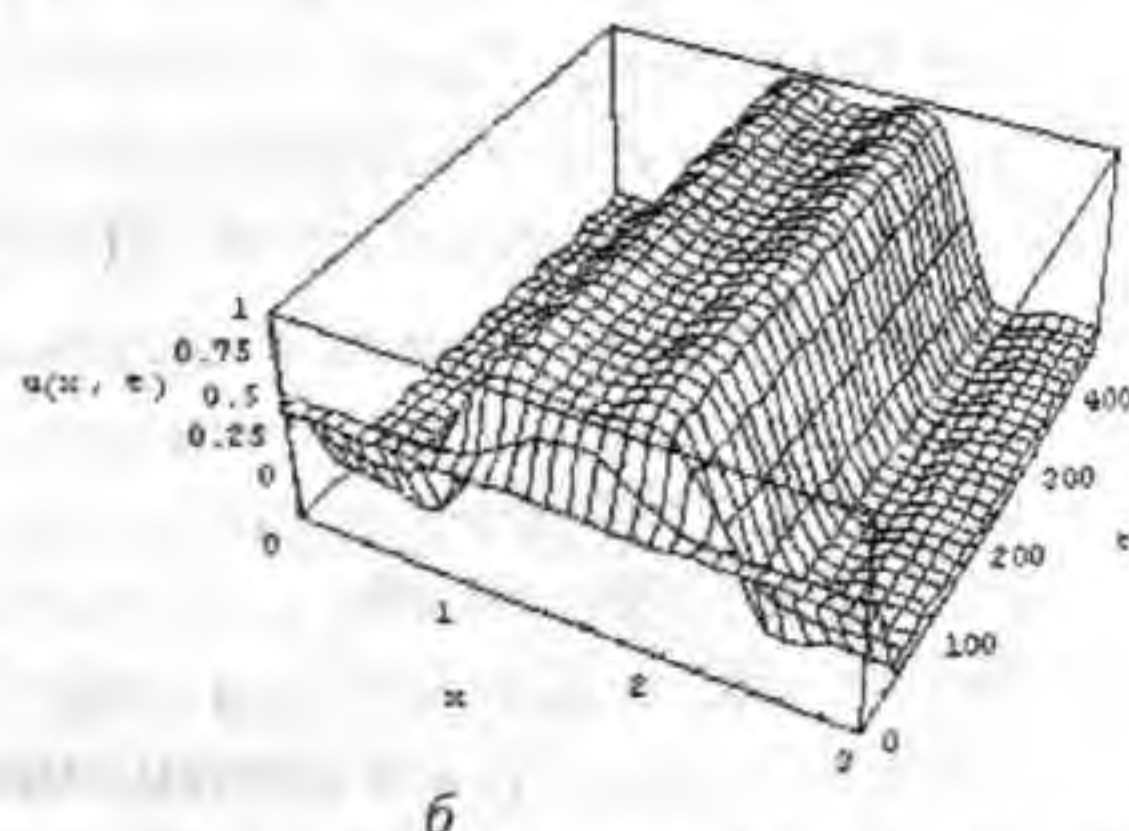
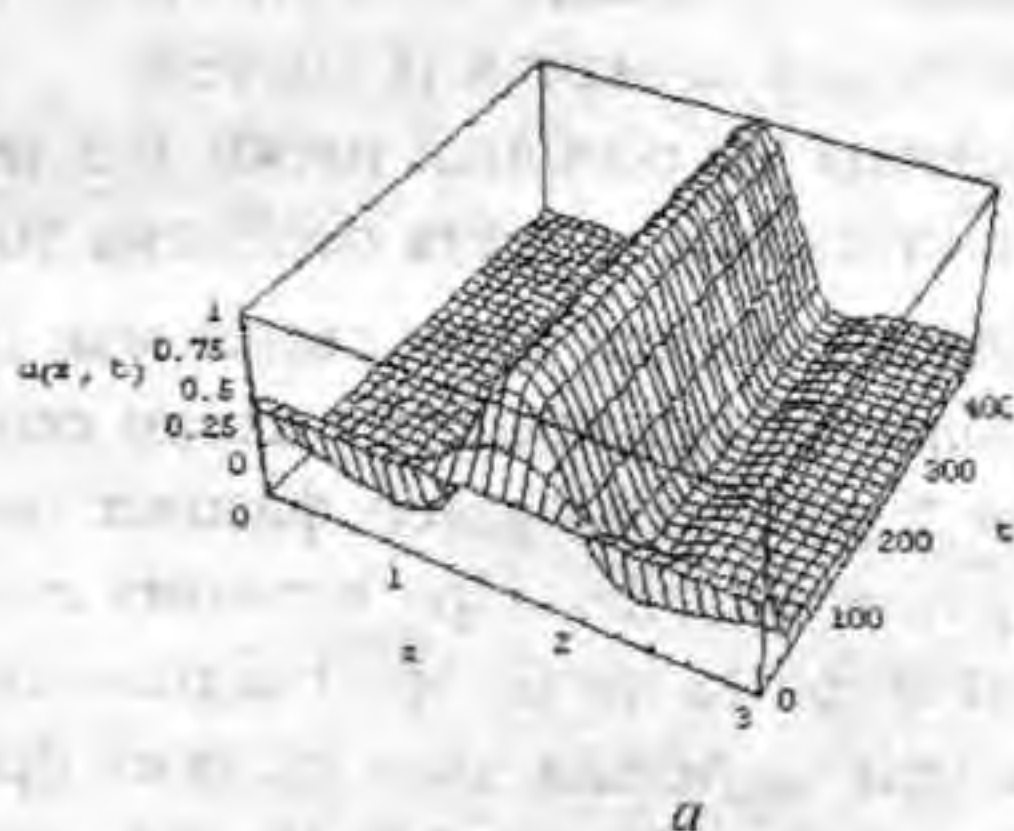


Рис. 2. Утворення стійкого стаціонарного піку в результаті взаємодії двох фронтів, що переключають верхній стан у нижній.

4. Регулярні просторові структури. Ще одним яскравим прикладом самоорганізації, який описує система ФХН, є утворення регулярних просторових структур. Дослідимо цей процес, вибравши параметри системи таким чином, щоб єдина особлива точка лежала на зростаючій гілці "І-подібної" ізокліни і була нестійкою по відношенню до флуктуацій з хвильовим числом k та нульовою частотою (біфуркація Тюрінга). Хвильове число визначається як $k = (D_v f_u + D_u g_v) / (2D_u D_v)$ або для системи ФХН $k = (\varepsilon / \sqrt{D_u D_v}) (1 - a \sqrt{D_u / D_v})$. Умова, яка при цьому накладається на корені характеристичного рівняння (4), є $\text{Re}\{\lambda(k)\} > 0$ і $\text{Im}\{\lambda(k)\} = 0$. Слабке збурення початкового просторово-однорідного розподілу веде до наростання збурень за механізмом Тюрінга і формуванню дисипативних структур з характерною довжиною $L = 2\pi / k$. На рис. 3, 4 зображений процес формування просторових структур у початково ізотропній системі при зміні біфуркаційних параметрів D_v та ε . Для результатів, наведених на рис 3а, 3б, значення параметрів $a=4$, $b=-0,48$, $n=0,4$, $D_u=0,001$, $\varepsilon = 0,01$ зберігались незмінними, і приймалось, що $D_v=0,043$ для рис. 3а і $D_v=0,07$ для рис. 3б. Для рис. 4а, 4б незмінними були параметри $a=9,3995$, $b=-0,34$, $n=0,4$, $D_u=0,01$, $D_v=0,07$, а змінювались значення ε : $\varepsilon=0,2$ для рис. 4а і $\varepsilon=0,002$ для рис. 4б.

Стійке співіснування областей підвищеної та зниженої концентрації речовини в середовищі з вільною дифузією можливе завдяки тому, що акти-

ватор, прискорюючи власне виробництво, компенсує втрати на дифузійний відтік речовини, а інгібітор, завдяки значно більшому коефіцієнту дифузії, здатний локалізувати область простору, у якій існує висока концентрація активатора. Відношення між часовими константами двох змінних ε також впливає на стійкість утворених просторових структур. Так, значення ε більші деякого порогу пригнічують розвиток цих структур, що веде до релаксації системи до свого гомогенного стану.

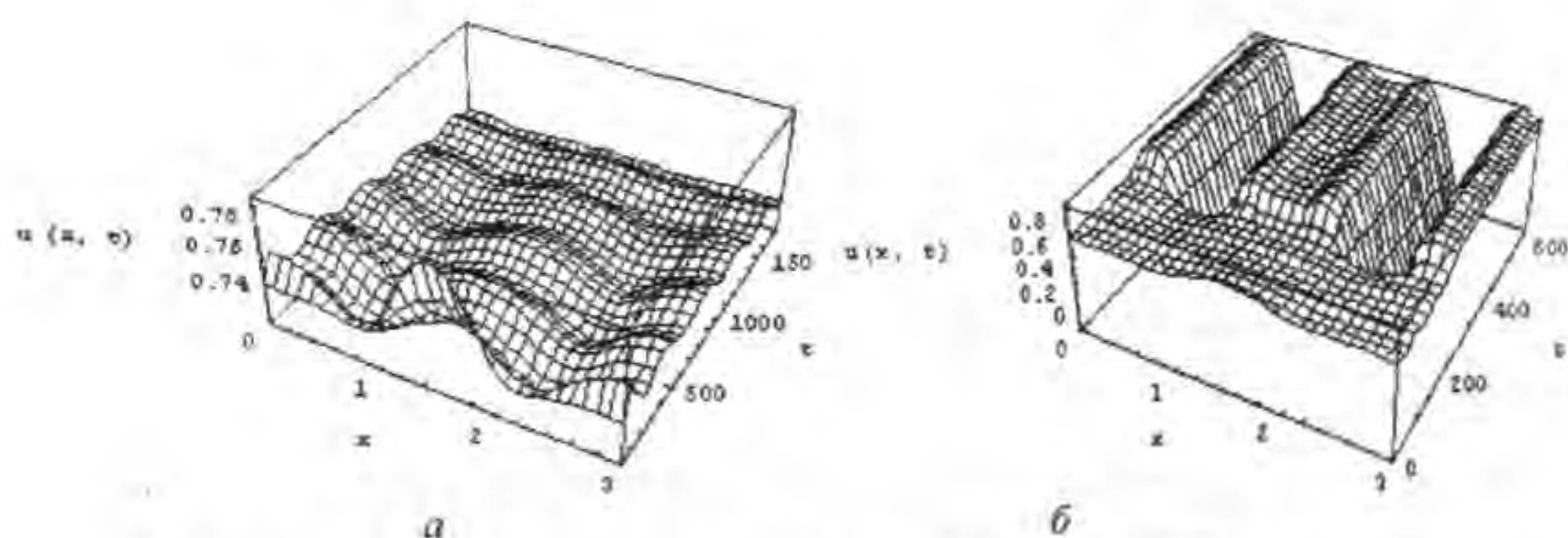


Рис. 3. Процес утворення структури Тюрінга в системі ФХН з єдиною стаціонарною точкою.

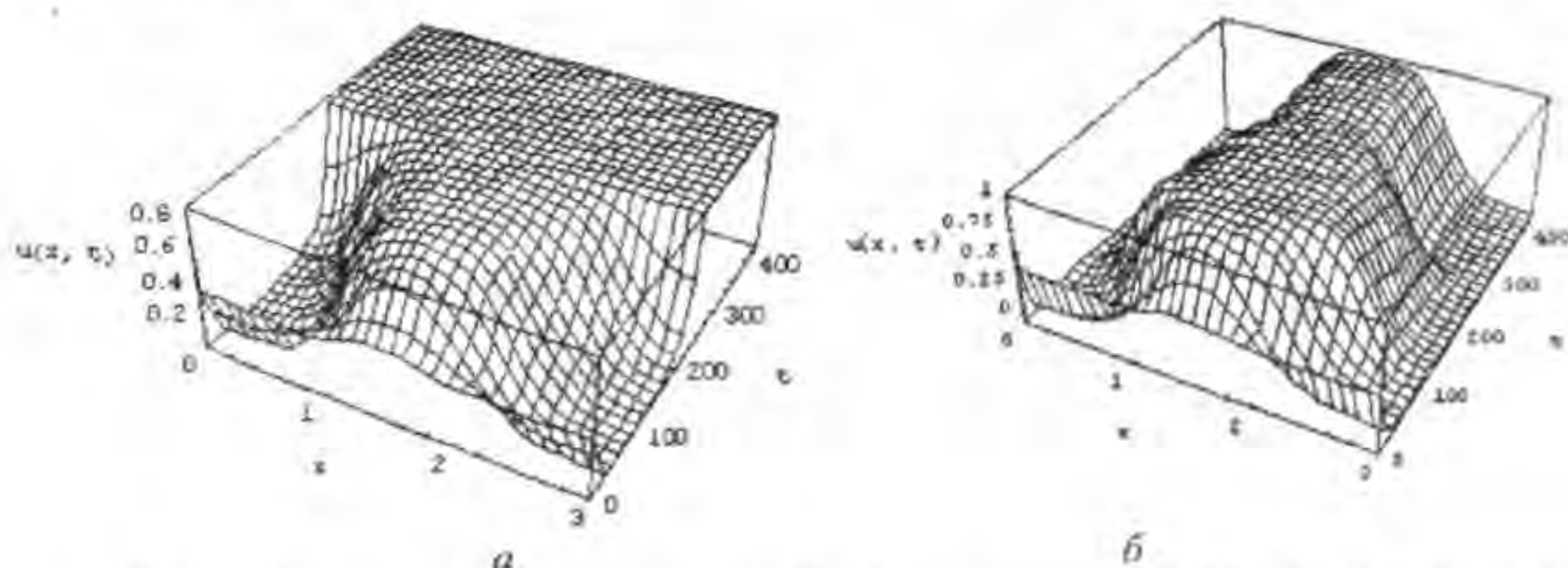


Рис. 4. Процес утворення структури Тюрінга в системі ФХН з трьома стаціонарними точками, коли існують три фронти, що з'єднують два стійкі стаціонарні стани.

Висновки. Розглянуті різні динамічні режими поведінки реакційно-дифузійних систем з двома динамічними змінними: автохвилі, дисипативні структури, виникнення яких неможливо в лінійних системах. Вони виникають у результаті того, що нелінійність створює у фазовому просторі області нестійкості, у яких система прагне вийти з рівноваги. У розглянутому випадку ця область формується зростаючою ділянкою "И-подібної" ізокліни. Тоді втрата стійкості однорідного стану відбувається двома шляхами, або через біфуркацію Хопфа, що веде до утворення в системі часових структур – осциляцій, або через біфуркацію Тюрінга, що призводить до формування регуля-

рних просторових структур. Подібні автохвильові процеси спостерігаються в системах різної природи, що вказує на схожий сценарій утворення просторово-часових структур. Тому важливим є виявлення спільних особливостей та закономірностей цих процесів самоорганізації, дослідження можливих типів просторово-часових структур та їх поведінки, встановлення необхідних умов, яким повинна задовольняти система для формування того чи іншого типу структур. Проведений чисельний аналіз розглянутої моделі показує, що типи утворюваних структур визначаються, головним чином, співвідношенням між характерними просторовими та часовими шкалами системи та шляхом, яким вона збуджується.

Література

1. V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade and P. De Kepper // *Phys. Rev. Lett.* – 1990, 64. – P. 2953.
2. Ouyang Q., Swinney H. L. // *Nature*. – 1991, 352. – P. 610.
3. Kapral R. and Showalter K. *Chemical Waves and Patterns*. – Kluwer Academic Publishers, 1995.
4. Cross M.C. and Hohenberg P.C. // *Rev. Mod. Phys.* – 1993, 65, 2
5. Ф.И. Атауллаханов, В.И. Зарницына, А.Ю. Кондратович, Е.С. Лобанова, В.И. Сарбаш. Особый класс автоволн – автоволны с остановкой – определяет пространственную динамику свертывания крови // *УФН*. – 2002, т. 172, №6. – с. 671–690.
6. Кернер Б. С., Осипов В. В. *Автосолитоны*. – М.: Наука, 1991. – 364 с.
7. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // *Philos. Trans. Roy. Soc.* – 1952. London B 237. – P. 37 – 72.
8. Сугаков В. Й. *Основы синергетики*. – К.: Обереги, 2001. – 287 с.
9. FitzHugh R. Impulses and Physiological States in Models of Nerve Membrane // *Biophys. J.* – 1961, № 1. – P. 445.
10. Nagumo J.S., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon // *Proc. IRE*. – 1962, 50. – P. 2061.
11. Gichan O.I., Grechko L.G., Levchuk Yu.N. The nonlinear dynamics of the excitable biological membranes in the FitzHugh-Nagumo model // *Physics of the alive*. – 2001, V. 9, № 2. – P. 97–108.
12. Булавин Л.А., Гичан О.И., Гречко Л.Г. Точное решение редуцированной системы ФитцХью-Нагумо для возбудимых биологических мембран // *Доповіді НАНУ*. – 2002, № 8. – с. 75 – 79.
13. Argentina M., Coullett P., Krinsky V. Head-on Collisions of Waves in an Excitable Fitz-Nagumo System: a Transition from Wave Annihilation to Classical Wave Behavior // *J. theor. Biol.* – 2000, 205. – P.47-52.
14. Grechko L.G., Davidova O.A., Ogenko V.M., Schkoda N.G. Non-Linear Bistability of a Small Metallic Particle in Alternating Electric Field // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 2001. –Т. 6, № 4. – С. 344-352.
15. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. науч. тр. / Под ред. М. Т. Греховой. – Горький, 1981. – 286 с.
16. Hagberg A., Meron E. // *Nonlinearity*. – 1994, 7. – P. 805–835.

Надійшла до редколегії 11.01.2005.

УДК 519.9

Юрій І. Горобець¹, Оксана
Ю. Горобець², Сергій П. Мазур³,
Олександр М. Бруква⁴

**Квазіперіодична структура
поверхні сталевого циліндра при
його корозії в розчині азотної
кислоти в постійному
магнітному полі.**

У роботі досліджено взаємозв'язок розподілу швидкостей електроліту в околі сталевого циліндра зі зміною в часі структури поверхні циліндра при його корозії в 7% водному розчині азотної кислоти в магнітному полі. Отримана регулярна (квазіперіодична) неоднорідно структурована поверхня сталевого циліндра в магнітному полі, тоді як при таких же умовах експерименту без магнітного поля відбувається однорідна корозія. Експериментально виявлено, що виникнення квазіперіодичних неоднорідностей супроводжується перебудовою вихрових структур і ротацією областей електроліту.

Ключові слова:
магнітогідродинамічне
перемішування; багатовихрова
структура; мікромасштабне
штучне структурування

Yuriy I. Gorobets¹, Oksana
Yu. Gorobets², Sergiy P. Mazur³,
Oleksandr M. Brukva⁴

**Quasiperiodical structure of a
surface of the steel cylinder at its
corrosion in a solution of a nitric
acid in a constant magnetic field.**

Temporary changes of the surface structure of a steel cylinder under its corrosion in a 7% nitric acid aqueous solution in magnetic field were investigated. It is shown that application of a constant external magnetic field leads to a regular (quasi-periodic) inhomogeneous surface structure of the cylinder. In absence of the field, a uniform corrosion was observed. The etch nonuniformity is shown to arise simultaneously with the reorganization of vortex structures and rotation in the electrolyte.

Key words: magnetohydrodynamic
mixing; multivortex structure;
artificial microscale structuring

²E-mail: gor@nuft.kiev.ua

Вступ

У останні десятиліття відзначається зростаючий інтерес до явищ, що відбуваються у розчинах електролітів під дією магнітного поля. Так у цій області досліджень накопичено значний обсяг достовірних експериментальних даних, що успішно використовуються для практичного застосування. Одним з найбільш досліджених ефектів у даній області є ефект (масопереносу) у схрещених електричному і магнітному полях [1-4]. Добре відомо [5-9], що перемішування електролітів звичайно призводить до прискорення або зміни характеру хімічних і електрохімічних процесів, які в них відбуваються [5-9]. У такий спосіб явище магнітогідродинамічного перемішування електролітів у схрещених електричному і магнітному полях стало базисом при розробці більш досконалих способів спільного магнітоелектрохімічного осадження декількох металів і інертних часток, одержання більш якісних покриттів при катодному осадженні металів, створення хаотичного магнітогідродинамічного перемішування електролітів (типу хаосу Лагранжа) при дуже малих числах Рейнольдса [10]. У роботі [10] відзначається необхідність розвитку методів перемішування в мікрооб'ємах для прискорення хімічних і біологічних процесів. На сьогоднішній день вплив магнітного поля на приелектродні процеси в електролітах пояснюється впливом на дисоційовані іони сили Лоренца, сили з боку зовнішнього електричного поля, а також градієнтних сил, викликаних наявністю магнітного поля (у моделі газу парамагнітних молекул) типу $H^2 \cdot \nabla C$ і $C \cdot \nabla(H^2)$ [10,13], де C - концентрація парамагнітних молекул, H - магнітне поле. Градієнтними "магнітними" силами звичайно нехтують при розгляді процесів далеко від електрода ($\nabla C = 0$) та в однорідному магнітному полі $\nabla(H^2) = 0$ [11,13]. У такий спосіб вплив магнітного поля на приелектродні процеси в електролітах описується на основі замкнутої системи рівнянь - рівнянь магнітної гідродинаміки і конвективної теорії дифузії. Порівняно нещодавно був виявлений ефект перемішування електроліту в околі окремого електрода в магнітному полі без прикладення зовнішнього електричного поля [11,12]. Зокрема, у роботі [11] було виявлено виникнення багатовихрової структури розподілу швидкостей електроліту в околі довгого металевого циліндра під впливом магнітного поля, так що в сусідніх вихорах напрямки обертання є взаємно протилежними. Детально гідродинаміка багатовихрової динамічної структури водного розчину азотної кислоти в околі сталевго циліндра була досліджена в роботі [15]. Розподіл швидкостей в одному з вихорів було теоретично отримано в роботі [13]. Проте, очевидно, що багатовихрова структура, не може бути описана на основі тільки рівнянь магнітної гідродинаміки (з урахуванням градієнтних магнітних сил, якими не можна знехтувати в задачі про рух електроліту в

безпосередній близькості до електроду) і конвективної теорії дифузії без задання спеціальних неоднорідних уздовж осі циліндра граничних умов для швидкості електроліту в безпосередній близькості до поверхні металевого циліндра.

Експериментальна частина

У даній роботі був досліджений взаємозв'язок розподілу швидкостей електроліту в околі сталевого циліндра при його корозії в 7% водному розчині азотної кислоти в магнітному полі зі зміною в часі структури поверхні зазначеного циліндра в процесі корозії. Дана задача має фундаментальне значення в зв'язку з актуальністю вивчення процесів самоорганізації і виникнення дисипативних структур при фізико-хімічній взаємодії металів з електролітами. Як буде показано нижче, дана задача також становить інтерес у зв'язку з можливостями штучного мікрмасштабного структурування поверхні металу. Є очевидним, що неоднорідність розподілу швидкостей неминуче повинна призводити до неоднорідності структури поверхні циліндра при його корозії в електроліті в магнітному полі. Виходячи з цього припущення, провадилося порівняння поверхні сталевих циліндрів у результаті корозії в 7% розчині азотної кислоти без магнітного поля й у магнітному полі, направленому вздовж осі сталевого циліндра. Причому поверхня сталевих циліндрів, які були вибрані для експериментів, початково (до занурення їх у розчин) мала достатньо гладку структуру (рис. 1). Середній радіус сталевого циліндра R_0 дорівнював 258 мкм із похибкою щодо середнього значення не більш одного мікрона уздовж усієї довжини, що для визначеності вибиралася рівною 18 мм в усіх експериментах.

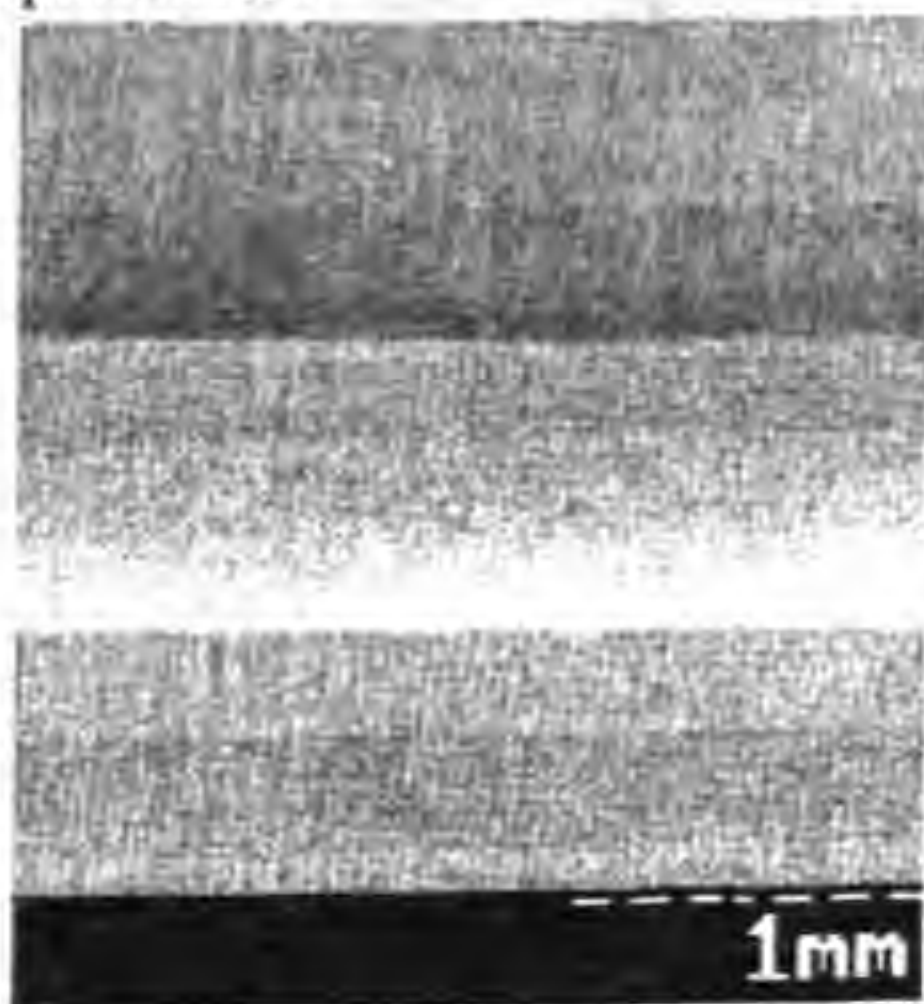


Рис. 1. Сталевий циліндр до обробки в 7% водному розчині азотної кислоти.

Експерименти проводилися на установці, описаній в роботі [16]. Для експериментів були виготовлені скляні циліндричні кювети радіусів $R_1 = 3.5$ мм, $R_2 = 9.5$ мм, $R_3 = 14$ мм, відповідно, у яких коаксіально

розміщався сталевий циліндр радіуса R_0 . Кювета зі сталевим циліндром закріплювалася між полюсними наконечниками електромагніта на час $t = 5$ хв при величині поля 3000 Е. Контрольні експерименти були зроблені при таких же умовах у відсутності магнітного поля. Метод орієнтації осі циліндра строго уздовж поля полягав у тому, що циліндр підвішувався на нитці, яка прикріплювалася посередині довжини циліндра, а при ввімкненні магнітного поля відбувалася самоорієнтація ферромагнітного циліндра уздовж магнітного поля за рахунок ефекту форми - різниці в розмагнічуючих факторах циліндра, у поздовжньому і поперечному напрямках.

Дослідження поверхонь проводилося на скануючому електронному мікроскопі REMT-100. Були отримані результати, які подані на рис. 2-3.

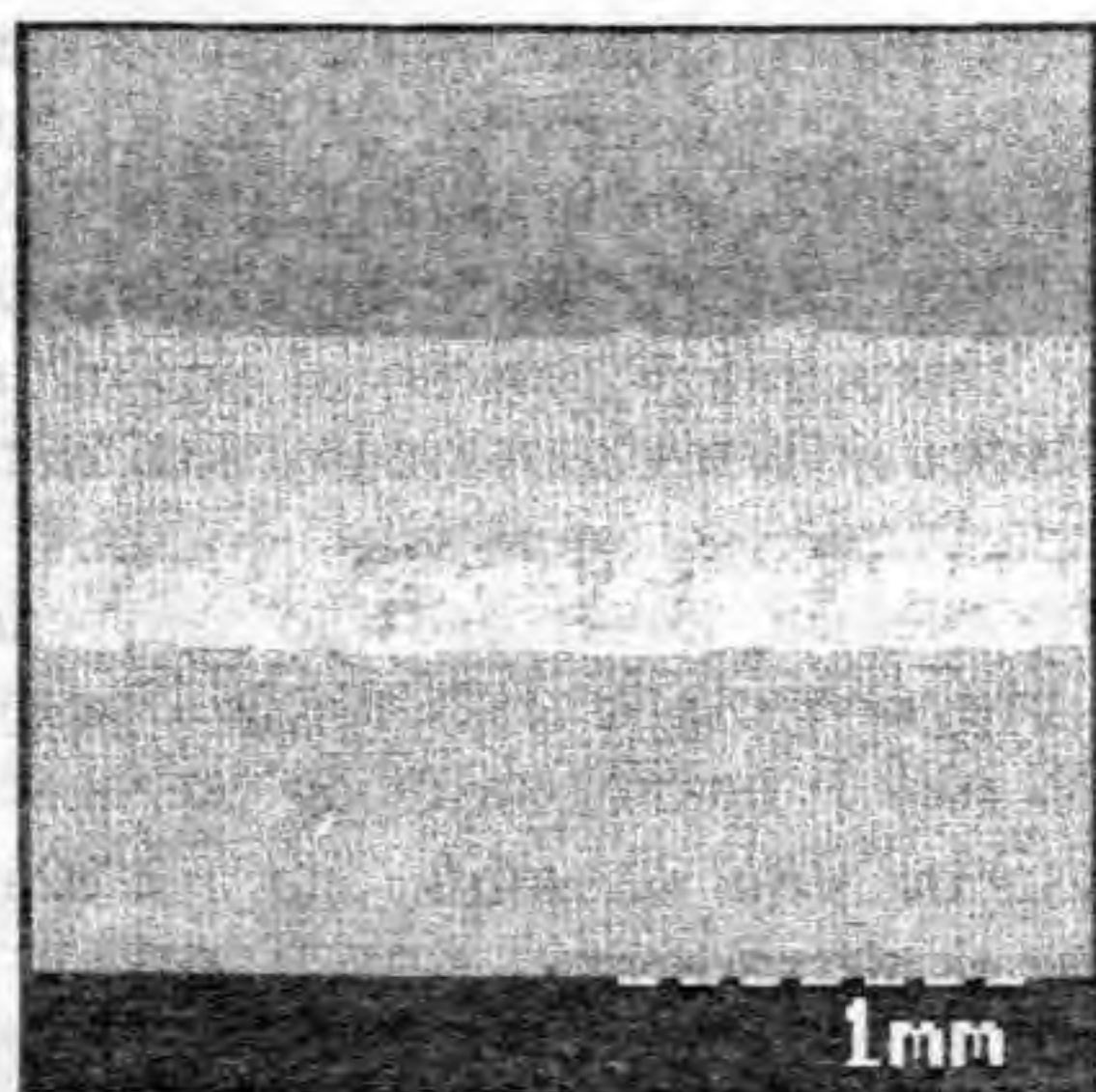


Рис. 2 Сталевий циліндр після 5 хв обробки в 7% водному розчині азотної кислоти в магнітному полі 3000 Е в кюветі радіуса R_2 .

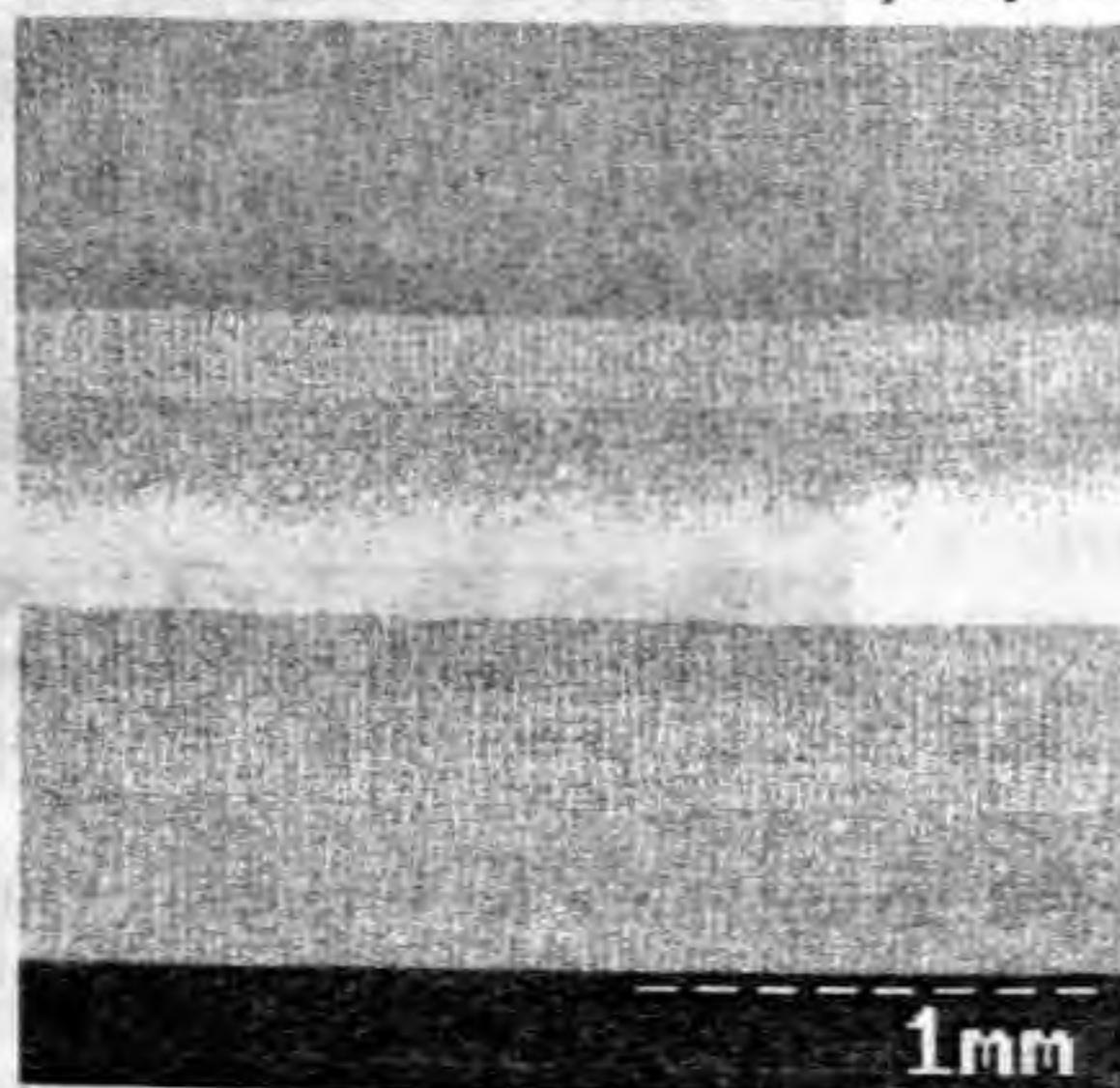


Рис. 3 Сталевий циліндр після 5 хв обробки в 7% водному розчині азотної кислоти без магнітного поля в кюветі радіуса R_1 .

З рис. 2 очевидно, що за допомогою прикладення зовнішнього магнітного поля до даної системи, у якій відбувається корозія сталі в азотній кислоті, є можливим одержання регулярної (квазіперіодичної) неоднорідно структурованої поверхні сталевго об'єкта з характерним масштабом неоднорідностей: висота виступу 10-25 мкм, довжина виступу 100-300 мкм і довжина впадини 100-300 мкм. Тоді як, у вище зазначеній системі сталевий об'єкт - електроліт без магнітного поля відбувається однорідна корозія (рис. 3). Порівняння поверхонь при корозії сталевго циліндра в азотній кислоті в магнітному полі для кювет різного радіуса, при тому, що характерні розміри кювети були набагато більші характерної товщини циліндра і дифузійного шару, дозволило зробити висновок, що виникнення неоднорідної структури й її характеристики слабо залежать від розміру кювети і кількості оточуючого електроліту.

Так як період мікронеоднорідностей поверхні і період вихрової структури не співрозмірні, то для з'ясування причини виникнення неоднорідностей були проведені додаткові експерименти. Проводилося порівняння перебудови динамічної структури вихорів і еволюції неоднорідностей поверхні з часом. За даних умов експерименту було встановлено, що через час рівний 4-5 хв чотирьохвихрова структура змінюється двохвихровою, а неоднорідності мають максимально виражений характер під час зміни вихрової структури, з часом неоднорідності згладжуються і майже зникають. Таким чином, виникнення даних неоднорідностей може бути зв'язане з перебудовою вихрових структур і ротацією областей електроліту.

Література

1. Tacken R. A. , Janssen L. J. J. Applications of Magnetoelectrolysis // J. Appl. Electrochem. - 1995. - V. 25. - p. 1-5.
2. Fahidy T. Z. Magnetoelectrolysis // J. Appl. Electrochem. - 1983. - V. 13. - p. 553-563.
3. Waskaas M. , Kharkats Y. I. Magnetoconvection Phenomena: a Mechanism for Influence of Magnetic Fields on Electrochemical Processes // J. Phys. Chem. - 1999. - V. B103. - p. 4876-4883.
4. Coey J. M. D. , Hinds G. , Lyons M. E. G. Magnetic Field Effects on Fractal Electrodeposits // Europhys. Lett. - 1999. - V. 47. - p. 267-272.
5. Dash J. US Patent. - 1987. - 4 666 568.
6. Matsushita Electric Works Ltd. Japanese Patent. - 1984. - 59 31 894.
7. O'Brien N. , Santhanam K. S. V. // J. Appl. Electrochem. - 1990. - V. 20. - p. 781.

8. Zhang H. , Zhang G. // Chem. Abstr. - 1991. - V. 115. - p. 217159.
9. Xiang Yu, Bau Haim H. Complex magnetohydrodynamic low-Reynolds-number flows // Phys. Rev. - 2003. - E 68. - p. 016312.
10. Leventis N. , Gao X. Steady-state voltammetry with stationary disk microelectrodes in magnetic fields: nonlinear dependence of the mass-transfer limited current on the electron balance of the Faradaic process // J. Phys. Chem. B. - 1999. - V. 103. - p. 5832-5840.
11. Gorobets S. V. , Gorobets O. Yu. , Reshetnyak S. A. Permanent magnetic field as an accelerator of chemical reaction and an initiator of rotational motion of electrolyte flows near thin steel wire // JMMM (to be published)
12. Shinohara Kenji, Aogaki Ryoichi Magnetic field effect on copper corrosion in nitric acid // Electrochem. - 1999. - V. 67. - 2.
13. Bar'yakhtar V. , Gorobets Yu. , Gorobets O. Velocity distribution in electrolyte in the vicinity of a metal cylinder in a steady magnetic field // JMMM (to be published)
14. Gorobets S. , Gorobets O. , Ukrainetz A. et al. Intensification of the process of sorption of copper ions by yeast of *Saccharomyces cerevisiae* 1968 by means of a permanent magnetic field // JMMM (to be published)
15. Gorobets Yu. I. , Gorobets O. Yu. , Mazur S. P. Vortex structure of electrolyte in a steady magnetic field in the vicinity of a metallic cylinder // Magnetohydrodynamics. - 2004. - 1.
16. Горобец С.В., Пименов Ю. М. Установка для исследования взаимодействия насадок магнитных фильтров с неферромагнитными частицами // Наука производству. - 1998. - 4. - с.28-31.

УДК 519.9

Ігор М. Каденко¹,
Руслан В. Єрмоленко¹,
Наталія Р. Дзисюк

**Визначення перерізів ядерної
реакції $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)^{182m}_{73}\text{Ta}$.**

За допомогою активаційного методу шляхом вимірювання гамма-спектрів продуктів активації визначено перерізи ядерної реакції $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)^{182m}_{73}\text{Ta}$ при трьох значеннях енергії нейтронів (2, 58, 149 кеВ) та визначено ізомерне співвідношення перерізів.

Ключові слова: активаційний метод, перерізи, ізомерне співвідношення

¹E-mail: ndef@univ.kiev.ua
[www: http://atom.univ.kiev.ua](http://atom.univ.kiev.ua)

Ihor M. Kadenko¹,
Ruslan V. Yermolenko¹,
Nataliya R. Dzysyuk

**Determination of cross sections of
nuclear reaction $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)^{182m}_{73}\text{Ta}$.**

Cross Sections of nuclear reaction $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)^{182m}_{73}\text{Ta}$ have been determined for three neutron energies (2, 58 and 149 keV) using activation method with subsequent measuring gamma-ray spectra. Isomer ratios have been determined for this reaction too.

Key Words: activation method, cross sections, isomer ratio

Дослідження взаємодії нейтронів в широкому енергетичному діапазоні з атомними ядрами є дуже важливими для вирішення різноманітних фундаментальних та прикладних задач, в тому числі для розвитку термоядерних технологій, радіаційної та відповідно механічної стійкості конструкційних матеріалів, проблем радіаційного захисту тощо. Також дослідження структури атомних ядер було і залишається одним із фундаментальних завдань ядерної фізики, які також виконуються з використанням нейтронів.

Одним із методів дослідження структури ядра є вивчення його властивостей на предмет існування у нього довго живучих метастабільних станів, для отримання яких використовуються різні ядерні реакції. В даній роботі використовується реакція радіаційного захоплення (n, γ) . Явище ядерної ізомерії є досить поширеним і добре узгоджується з моделлю ядерних оболонок [1], тобто досліджуючи ізомерні співвідношення можна встановити тип та порядок мультипольності гамма-випромінювання.

В представленій роботі описуються результати визначення перерізів реакції $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)^{182m}_{73}\text{Ta}$, в результаті якої ядро-продукт утворюється в метастабільному стані. Процес розрядження із заселеного метастабільного

рівня 519.572 KeV, 10^- (Рис.1) починається із випромінюванням в каскаді трьох гамма-ліній з рівня 10^- , з часом життя ізомерного стану 15.84 хв.

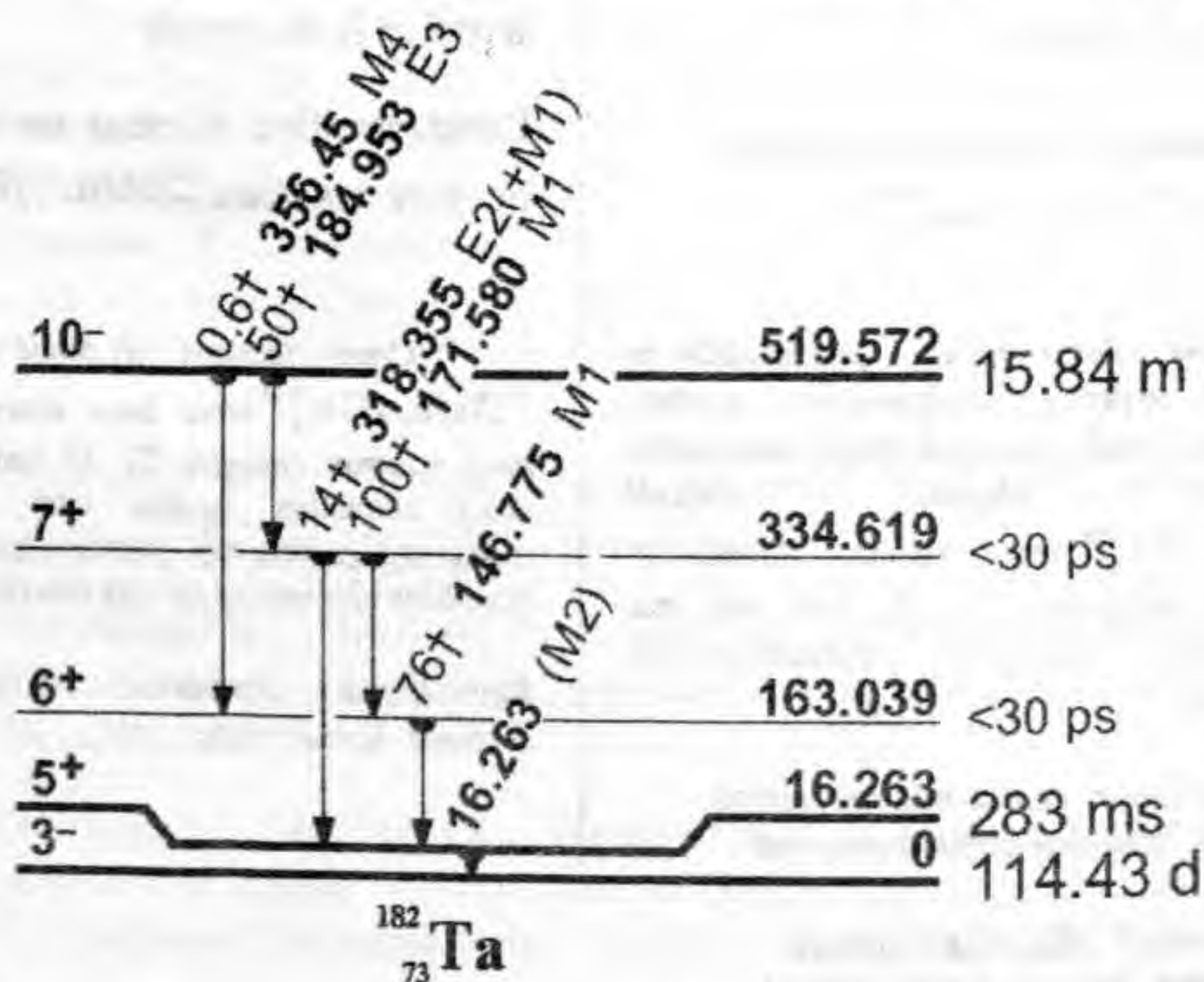


Рис.1 Схема основних гамма-переходів в ядрі танталу-182

Перебування танталу в метастабільному стані є можливим внаслідок того, що поблизу основного стану є рівень 7^+ , який сильно відрізняється за величиною кутового моменту, тобто виконується основна умова $|\Delta I| \geq 4$.

Перерізи реакції $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)^{182m}_{73}\text{Ta}$ у даній роботі визначалися шляхом дослідження гамма-спектрів продуктів активації ядер ^{181}Ta нейтронами різних енергій. Зразки, що являли собою фольги діаметром 28,3 см різної товщини (200 та 400 мкм) із природного танталу опромінювалися фільтрованим пучком нейтронів із реактора ВВР-М (Інститут ядерних досліджень НАН України). Застосування нейтронних фільтрів дало можливість отримати для вимірювань три квазімоноенергетичні енергії нейтронів 2, 58 та 149 кеВ.

Вимірювання гамма-спектрів продуктів активації проводилось на спектрометрі з напівпровідниковим Ge-детектором, з роздільною здатністю 2 кеВ для $E_\gamma = 1332 \text{ кеВ } \text{Co}^{60}$. Приклад апаратного спектру продуктів реакції наведений на Рис.2. Було проведено енергетичну калібровку спектрометра з використанням калібрувальних джерел Cs^{137} , Co^{60} , Eu^{152} .

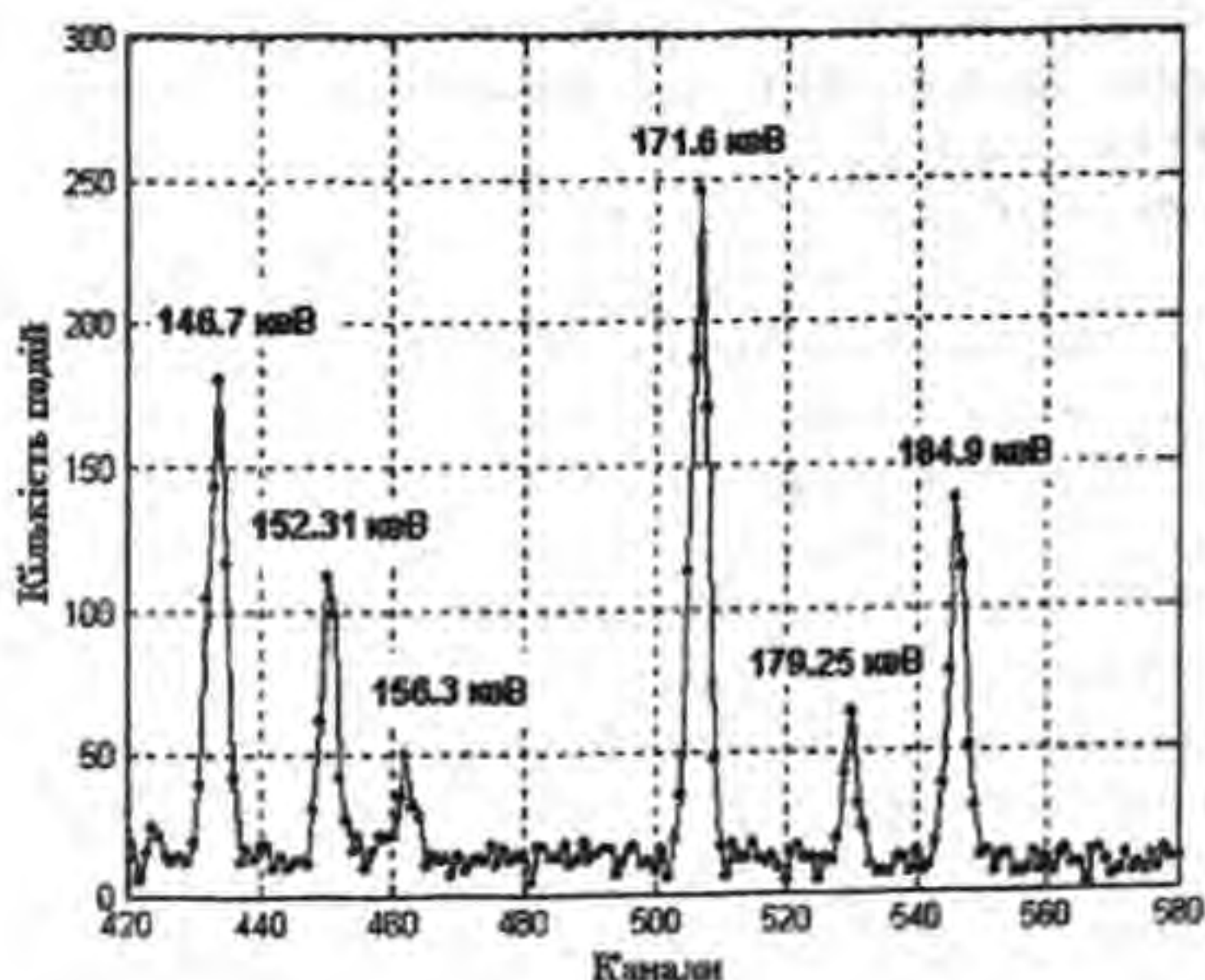


Рис.2 Ділянка апаратного спектру гамма-квантів Ta_{73}^{182}

Перерізи визначалися відносним методом, де в якості монітора використано реакцію $^{115}_{49}\text{In}(n, \gamma)^{116m}_{49}\text{In}$. Вибір саме цього монітору пояснюється ще тим, що період напіврозпаду ^{116m}In достатній для неодноразового використання зразків в процесі періодичних вимірювань, а чистота зразків ^{115}In відносно ізотопних домішок є досить високою.

Вся експериментальна інформація записувалася у вигляді потоків часових подій, а для отримання енергетичних і часових розподілів попередньо було створено відповідне програмне забезпечення, яке дало змогу провести конвертацію файлів. При цьому використано програмний пакет C++ Builder. При визначенні площ піків повного поглинання в результаті обробки апаратних спектрів, використовувалася програма WinAdams.

При роботі з потоками гамма випромінювання суттєвим моментом є врахування часової не стаціонарності. Для цього використовувалася спеціально створена інтерфейсна плата [2] та програмне забезпечення, що забезпечило можливість виконання аналізу розподілів живого та мертвого часів вимірювальної установки.

При обробці апаратних гамма-спектрів виникла також необхідність врахування ефектів, які ставали причиною втрати відліків у піках повного поглинання.

Оскільки випромінювач γ -квантів має кінцеві розміри, суттєве значення мають поправки, які враховують ефект самопоглинання гамма-квантів у матеріалі зразка. Для визначення цих поправок робилося припущення про

паралельність пучка гамма-квантів, тобто, що всі гамма-кванти випромінюються зразком паралельно в напрямку, перпендикулярному площині детектора, а також те, що вся активність рівномірно розподілена по всьому об'єму зразка [3,4].

Поправки визначалися для трьох ліній 146, 171, 184 кеВ. Для моніторної лінії індію 1293 кеВ поправка не визначалася, оскільки в таких геометричних умовах проведеного експерименту цей ефект для високо енергетичних гамма-квантів є несуттєвим.

Аналіз апаратного спектру ^{182m}Ta показав, що крім піків повного поглинання, які відповідають трьом основним енергіям переходів, спостерігаються також піки одночасної реєстрації двох гамма-квантів, що є одним із проявів ефекту каскадного додавання гамма-квантів. Для розрахунку поправки на цей ефект було використано емпіричну методику [5]. У даній роботі виміри проводились в умовах далекої геометрії (5 см), тому ефект каскадного додавання був незначним і склав не більше 3%.

Інформацію про схеми переходів, часи життя та квантові виходи для гамма-квантів досліджуваного танталу взято з [6].

Одним із найбільш важливих моментів при визначенні перерізів відносним методом є знаходження залежності ефективності реєстрації спектрометра гамма-випромінювання детектора, на базі якого побудовано спектрометричну установку

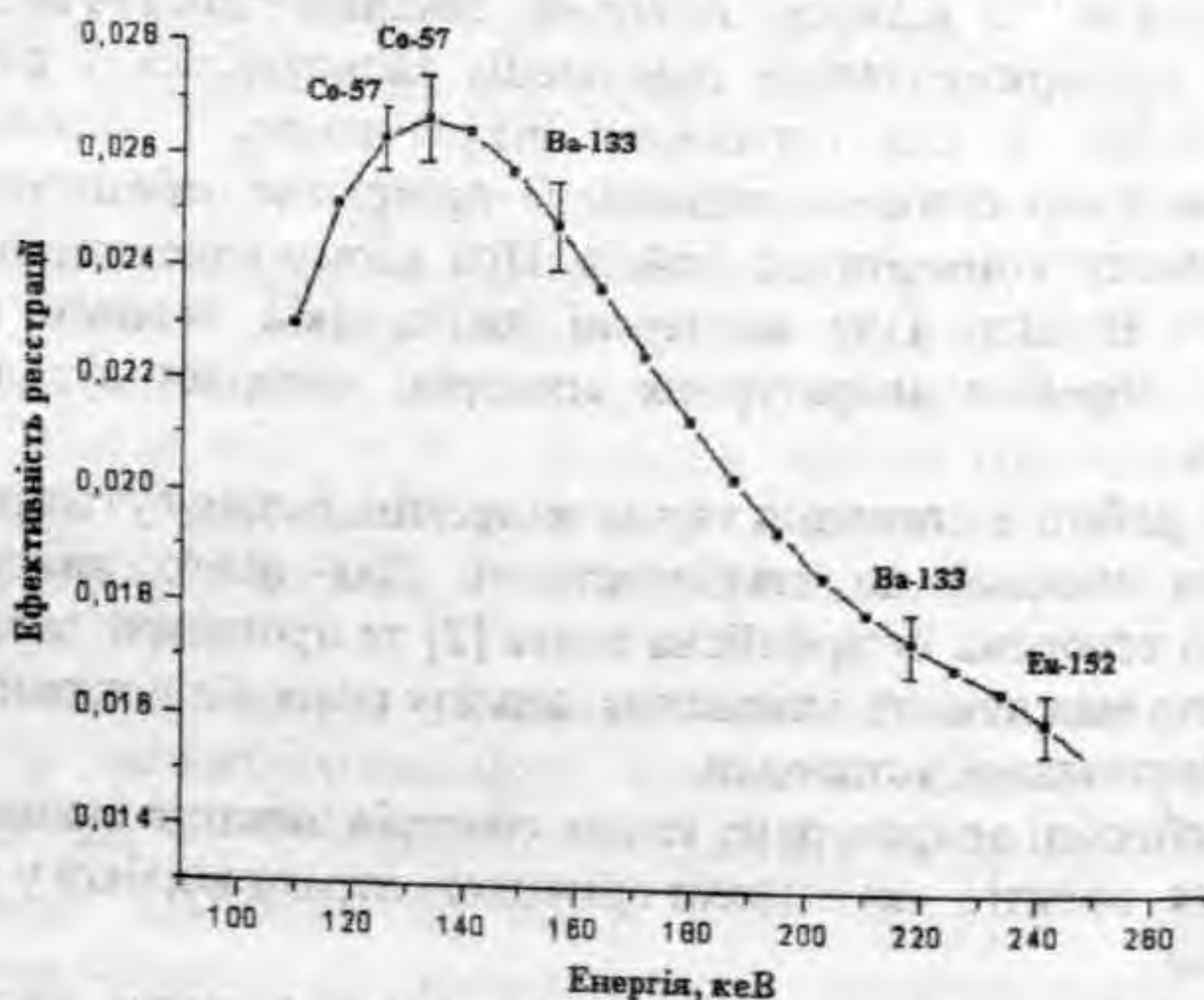


Рис.3 Залежність ефективності реєстрації від енергії гамма-квантів для умов експерименту.

Для отримання значення ефективності проведено додаткові виміри калібрувальних джерел. При цьому використовувалися джерела: ^{133}Ba , ^{152}Eu , ^{137}Cs , ^{60}Co , ^{57}Co , ^{182}Ta . Ці джерела вибиралися з тих міркувань, щоб мати відому активність з високою точністю та щоб енергетичні лінії калібрувальних джерел потрапляли до потрібного енергетичного діапазону. Було побудовано залежність $\varepsilon_a = f(E_\gamma)$ [7] з використанням інтерполяційного поліному четвертого порядку (Рис.3), після визначення параметрів якого розраховувались значення ефективності реєстрації енергетичних ліній 146, 171, 184 кеВ, необхідні для визначення перерізів.

При роботі з калібрувальними джерелами спостерігалось велике вхідне завантаження спектрометричного тракту $\sim 10^4$, саме тому виникла необхідність проведення корекції на ефекти мертвого часу. Було використано створену програму для реалізації диференційного методу вимірювань [8], який є ефективним та універсальним методом при вирішенні такої проблеми. Застосування диференційного методу суттєво зменшує систематичну похибку при визначенні кількісних характеристик потоку гамма-квантів (інтенсивність, активність) під час експериментальних вимірювань.

Після обробки експериментальної інформації та розрахунку всіх вище згаданих поправок було визначено три величини перерізів реакції з утворенням ядра Ta_{73}^{182m} в метастабільному стані, які наведені у таблиці 1, де містяться величини перерізу монітору та перерізів досліджуваної реакції $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)\text{Ta}_{73}^{182m}$.

Таблиця 1

Визначені перерізи реакції $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)\text{Ta}_{73}^{182m}$ ($T_{1/2}=15.84$ хв)

Енергія нейтронів, кеВ	Переріз, σ $^{113}_{49}\text{In}(n, \gamma)\text{In}_{49}^{116m}$, барн	Переріз (σ), барн	Похибка $\Delta\sigma$, %
2	1.99	$2.17 \cdot 10^{-3}$	11
58	0.51	$3.93 \cdot 10^{-4}$	20
149	0.3	$3.82 \cdot 10^{-4}$	14

При вимірюванні різних перерізів та проведенні визначення функції збудження різних ядерних реакцій можна також визначати ізомерне співвідношення, яке дає можливість порівнювати перерізи. При чому порівняння проводиться конкретно по якомусь із каналів реакції.

В даній роботі для розрахунку ізомерного відношення використано перерізи, визначені за результатами роботи, а також перерізи, з бібліотек експериментальних ядерних даних Exfor. Це повні перерізи реакції радіаційного захвату нейтронів, який включає в себе як утворення ядра в двох метастабільних станах (Рис.1), так і в основному стані.

$$R(E) = \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_{m1} + \sigma_{m2} + \sigma_g},$$

де: σ_{m1} -переріз утворення ядра танталу в першому ізомерному стані (283мс), σ_{m2} -переріз утворення ядра танталу у другому метастабільному стані (15.84 хв), σ_g -переріз утворення ядра танталу в основному стані.

Отримані значення співвідношень показують долю ймовірності, з якою реакція протікає по ізомерному каналу. Дана величина важлива для проведення систематик та створення баз ядерних даних, а також забезпечує інформацією для вивчення залежності спіну від густини ядерних рівнів.

Таблиця 2

Визначені ізомерні співвідношення

Енергія нейтронів, кеВ	Переріз, σ $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)\text{Ta}^{182m}_{73}$, барн	Літературні дані $\sigma_{m1} + \sigma_{m2} + \sigma_g$, барн		$R(E)$
2	$2.17 \cdot 10^{-3}$	3.76	[9]	$5.7 \cdot 10^{-4}$
58	$3.93 \cdot 10^{-4}$	0.42	[10]	$9.4 \cdot 10^{-4}$
149	$3.82 \cdot 10^{-4}$	0.31	[11]	$1.2 \cdot 10^{-3}$

Висновки

Вперше отримані значення перерізів реакції радіаційного захвату нейтронів $^{181}_{73}\text{Ta}(n, \gamma)\text{Ta}^{182m}_{73}$ з утворенням ядра-продукту в метастабільному стані для значення енергії нейтронів 2, 58, 149 кеВ. В базах ядерних даних є експериментальна інформація про цю реакцію, але для інших значень енергії нейтронів.

Отримана нова інформація дає можливість проведення перевірки ядерних моделей з урахуванням сучасних уявлень про ядерні реакції. Представлені результати виконаної роботи викликають інтерес в першу чергу тим, що визначені результати є принципово новою інформацією.

По мірі удосконалення та уточнення експериментальної інформації проводиться періодичне оновлення банків оцінених даних. Так, до 2005 року заплановано вихід нової версії банку оцінених ядерних даних ENDF/B — ENDF/B-VII. Отримані експериментальні результати можуть певним чином вплинути на оцінені дані.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. М.И. Корсунский. Изомерия атомных ядер. М.: Атомиздат 1954
2. Каденко І.М., Єрмоленко Р.В., Яценко В.О., Бражий О.М. Пристрій зв'язку аналого-цифрового перетворювача з персональним комп'ютером. Вісник Київського університету, випуск4, 2002, ст 379
3. Norman H. Cutshall, Ingvar L.Larsen. Direct analysis of ^{210}Pb in sediment samples: self-absorption corrections. 1982
4. Н.А. Вартанов, П.С. Самолов. Прикладная сцинтилляционная гамма-спектрометрия. М.: Атомиздат 1975 р.
5. Г.Е. Щукин. Учет и использование эффектов суммирования каскадных γ - квантов в полупроводниковых детекторах. Прикладная ядерная спектроскопия. ст. 302.
6. Firestone R.B, Table of Isotopes CD-ROM. Eight Edition, V1.0, 1996
7. И. С. Днепровский, С.Н. Зайцев, А.Н. Клейменов, С.С. Куючкин, И.В. Федюкин. Определение абсолютной эффективности регистрации гамма-излучения Ge(Li)-детекторами по каскадному гамма-излучению. Прикладная ядерная спектрометрия. с.127
8. Westphal G.P. On the performance of loss-free counting a method for real-time compensation of dead-time and pile-up losses in nuclear spectroscopy. Nucl. Instr. and Meth., 163 (1979), P.189-196
9. R.L. Macklin, J, NSE, 86, 362, 8404; see 6234 1451 144 EXFOR data set 12966.003
10. Xis Yijun, Yang Jinfu, Guo Huachong, Wang Minghua Xie Bizheng, Wang Shiming. J, CST, 22, 3 , 315, 198805, Exfor
11. K.Wisshak, F.Voss, F.Kaeppler, G.Reffo. J, PR/C, 42, 1731, 199010, Exfor

Надійшла до редколегії 2004-12-30

УДК 537.32

Копань В.С., професор
Хуторянська Н.В., пров. інженер
Копань Ю.В., асистент.

Вплив магнітного поля і механічних напруг на термо- е.р.с. нікелю

Зміну термо-е.р.с. нікелю внаслідок деформації можна подати виразами:
 $E = -1,3 \cdot 10^{15} \sigma$ (В/К), де $\sigma < 20 \cdot 10^7$ Па – напруга розтягу; $E = 0,5 \cdot 10^{13} \sigma$, де σ – напруга одноосного стискання. В магнітному полі $H = 5$ кЕ $E = \text{const} = -3 \cdot 10^7$ В/К в інтервалі $\sigma = [0-20 \cdot 10^7]$ Па. Це засвідчує, що енергетичний спектр 3d-електронів нікелю не залежить від механічних напруг.

Ключові слова: термо-е.р.с., нікель, механічні напруги.

V.S. Kopan,
N. V. Hutoryanska,
U. V. Kopan

The magnetic field and mechanical stress influence on the thermoelectric power of Nickel

The Nickel TEP change is given by
 $E = -1,3 \cdot 10^{15} \sigma$ (V/K), where $\sigma < 20 \cdot 10^7$ Pa is the tensile stress, and by $E = 0,5 \cdot 10^{13} \sigma$ under the longitudinal compression. Under the action of magnetic field of $H = 5$ kE $E = \text{const} = -3 \cdot 10^7$ V/K at $\sigma = [0-20 \cdot 10^7]$ Pa. This is significant fact that energetical spectrum of 3d-electrons of Ni is independent on σ .

Key Words: thermoelectric power, Nickel, mechanical stress.

*E-mail: kopa@pulsary.com.ua

У працях [1, 2] було показано, що причиною зміни термо-е.р.с. металів внаслідок деформації є дефекти кристалічної будови. Проте до сьогодення немає відповіді, які параметри дефектів лежать в першорядній впливу на термо-е.р.с.

В роботах [3, 7] досліджено вплив магнітного поля на термо-е.р.с. низки металів. Однак, ще невідомо, як змінюється цей вплив при деформації металів.

Метою роботи було дослідження впливу магнітного поля і механічних напруг на термо-е.р.с. нікелю.

Нікель (чистота 99,99) був обраний за об'єкт дослідження по двом причинам: він добре деформується пластично, в нього велика (у порівнянні із залізом, наприклад) константа магнітострикції. Наприклад, $\lambda_{100} = -45,9 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_{111} = -24,3 \cdot 10^{-6}$, в той час, як у заліза ці константи становлять $20,7 \cdot 10^{-6}$ та $-21,2 \cdot 10^{-6}$, відповідно [8]. Обидві константи у нікелю від'ємні, тому слід чекати значної магнітострикції у полікристалічних фольгах (отже, і значних механічних напруг як наслідок) в протилежність до заліза, де $\lambda_{100} > 0$, а $\lambda_{111} < 0$. Попередніми експериментами нами встановлено, що зміна термо-е.р.с. при намагнічуванні

полікристалічних залізних фольг знаходиться в межах похибок експерименту.

В кобальту обидві константи магнітострикції великі і від'ємні, проте він непластичний. Інші метали (Gd, Tb, Dy, Ho, Er та Tm) мають феромагнітні властивості при низьких температурах і незручні по цій причині для досліджень. Тому ми зосередили свою увагу на дослідженні полікристалічних нікелевих фольг.

Техніка експерименту

Вимірювання термо-е.р.с. здійснювали на потенціометрі з малим вхідним опором (20 Ом) та ціною поділки 10^{-8} В. Клеми, що компенсують паразитні термо-е.р.с. у контактах мідь – нікель, були винайдені раніше [9]. Вони пристосовані нами для вимірювання термо-е.р.с. у магнітному полі. Їх схема наведена на рис. 1

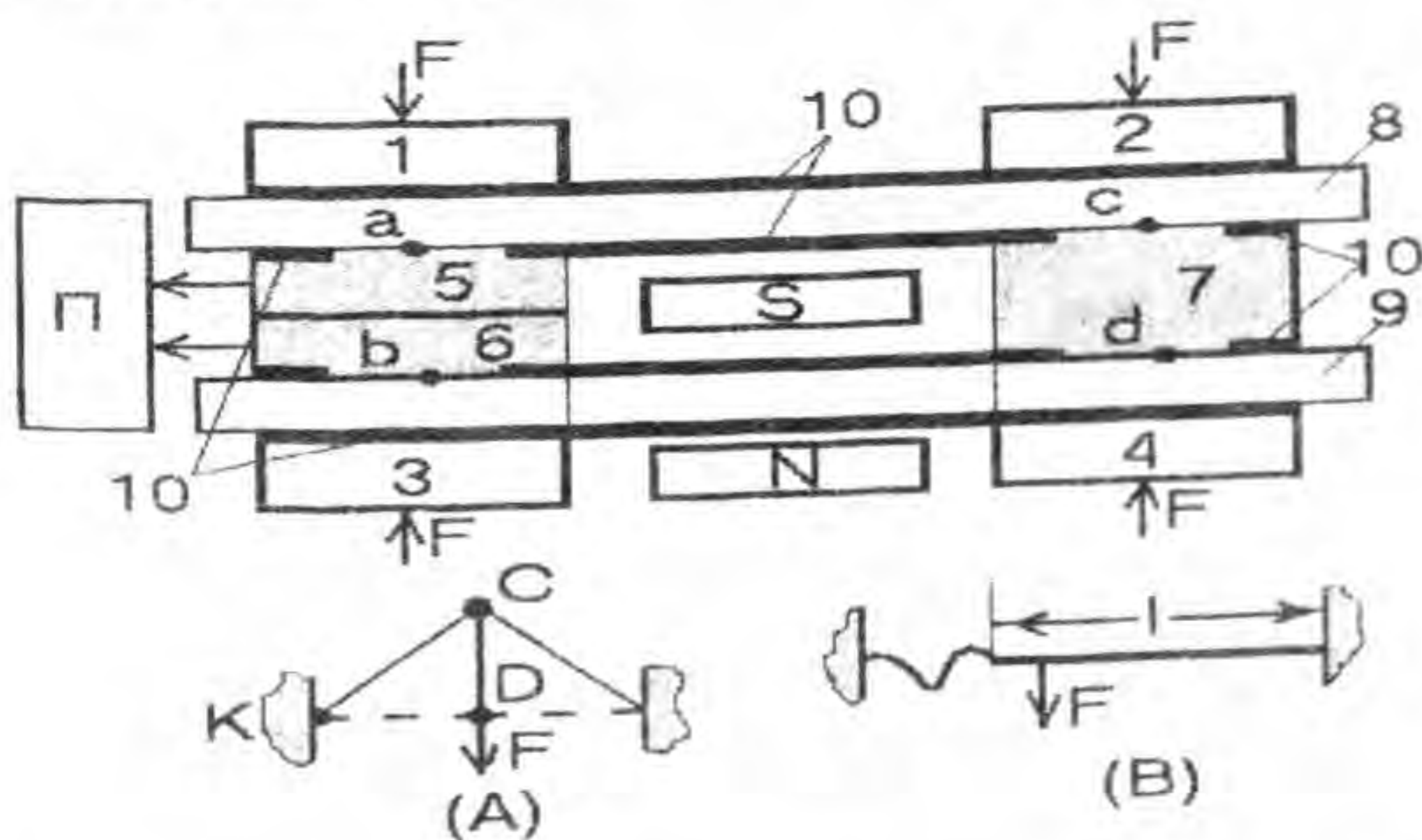


Рис. 1. Схема будови клем установки та форми зразків, що навантажуються стисканням (А) та консольним згином (В); П – потенціометр, S-N – полюси магніту, 8-9 – нікелеві еталон та зразок, що утворюють вітки термопар.

Клеми виготовлені з міді по схемі слюсарних тисків. Частини 1-4 рухомі, їх стискають сили F . Частини 5-7 нерухомі. Нікелевий еталон 8 та зразок 9 притиснуті частинами 1-4 до частин 5-7 так, що вони електрично контактують до останніх у точках а, б, с, d. Через усі мідні деталі прокачується рідина, температура якої стабілізована з точністю до $0,05^\circ\text{C}$. Але температури в точках а і б та с і d не відрізняються більше, ніж на $0,0001^\circ\text{C}$, бо частини 5 і 6 мають спільну порожнину, через яку прокачується трансформаторне масло ($T=20\pm 0,1^\circ\text{C}$), а через центральну

порожнину в деталі 7 прокачується дистильована вода ($T=64\pm0,05^{\circ}\text{C}$). Тому паразитні термо-е.р.с., що виникають в точках контакту Cu-Ni (a, b, c, d) не перевершують 10^{-8} В. Пластинки 10 з електроізолятора забезпечують електроконтакти еталона 8 і зразка 9 саме в точках a, b, c, d. Крім того, вони унеможливають прогин зразка 9 у магнітному полі між полюсами S-N. Для вимірювання залежності термо-е.р.с. від напруг стискання зразок 9 мав форму А рис.1 і навантажувався силою F . Таку ж форму мав зразок і при навантаженні розтягом, але був дзеркально симетричним показаному на рис. 1 в позиції А. Напруги σ розтягу (чи стискання) в перерізі зразка підраховували за формулами (1)

$$\sigma = \frac{F}{2ab \sin \alpha}, \quad \alpha = \arctg \frac{CD}{KD}, \quad (1)$$

де F - діюча сила (рис.1, А), a і b - ширина і товщина зразка, $CD=\lambda$ - стріла прогину зразка, $KD=l/2$ - напівдовжина зразка при $F=0$. Коли $\lambda < 0,05l$, то

$$\sigma = \frac{Fl}{2\lambda ab}, \quad (2)$$

При консольному згині зразок 9 мав форму, показану на рис. 1В. Він складався з лівої тонкої (20-30 мкм) половини у формі зигзагу та правої товстої (270 мкм). Середню напругу стискання чи розтягу в точках защемлення зразка частинами 4 і 7 клем розраховували за формулою 3)

$$\sigma = \frac{Fl}{b^2 a}, \quad (3)$$

Експериментальні результати та їх обговорення

На рис. 2 наведено термо-е.р.с. термопарі нікель – нікель. Струм у нагрітому спаї термопарі протікає від намагніченої вітки до розмагніченої, тому намагніченому нікелю слід приписати знак “мінус”. На всіх рисунках криві представлені так, що цифри вище “0” шкали E слід вважати від’ємними.

Оскільки E найбільша при $H=5$ кЕ, всі подальші виміри виконані у цьому полі. Зразок був відпалений при 400°C протягом 2 годин. Спостерігаємо (рис. 3) такі закономірності:

1. Зразок зруйнувався при $\sigma=32\cdot10^7$ Па.
2. Не дивлячись на те, що при $\sigma>10\cdot10^7$ Па нікель деформується пластично, нульова точка E ($H=0$, $\sigma=0$), яку одержуємо розвантаженням і розмагніченням зразка, не зміщується.
3. Крива $E(\sigma)$ не має гістерезису і схожа на криву розтягу нікелевих зразків $\sigma(\varepsilon)$, де ε – пружна деформація.

Створюється враження, що дефекти кристалічної будови впливають на $E(\sigma)$ за рахунок тієї складової їх полів напруг, що швидко релаксують,

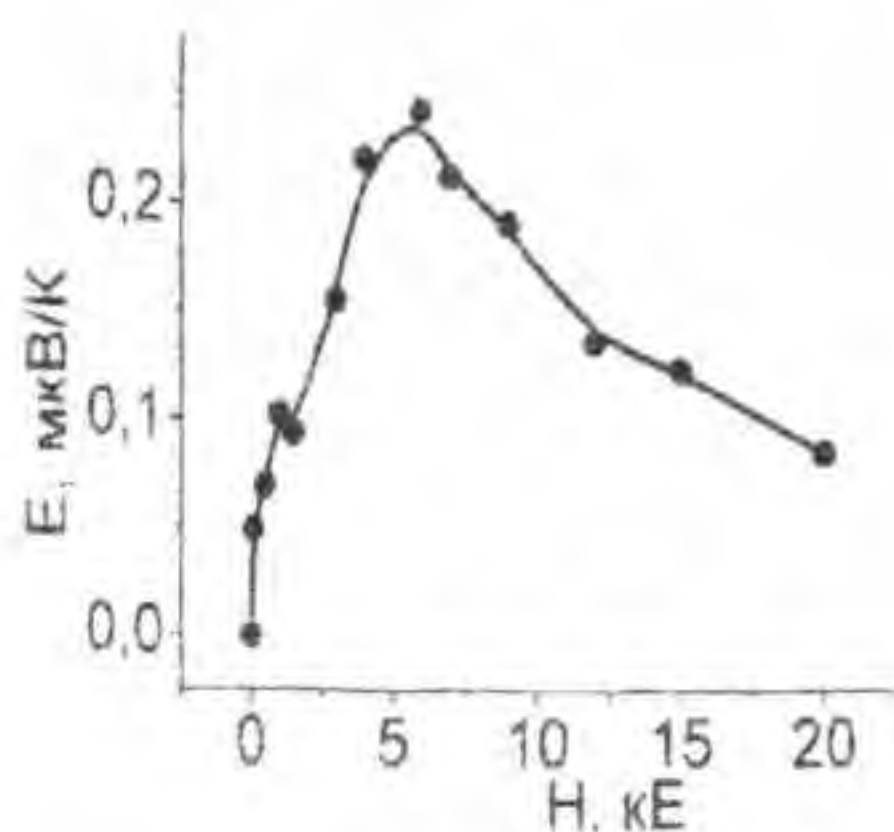


Рис.2. Термо-е.р.с. E термонари Ni-Ni, одна вітка якої знаходиться у полі H .

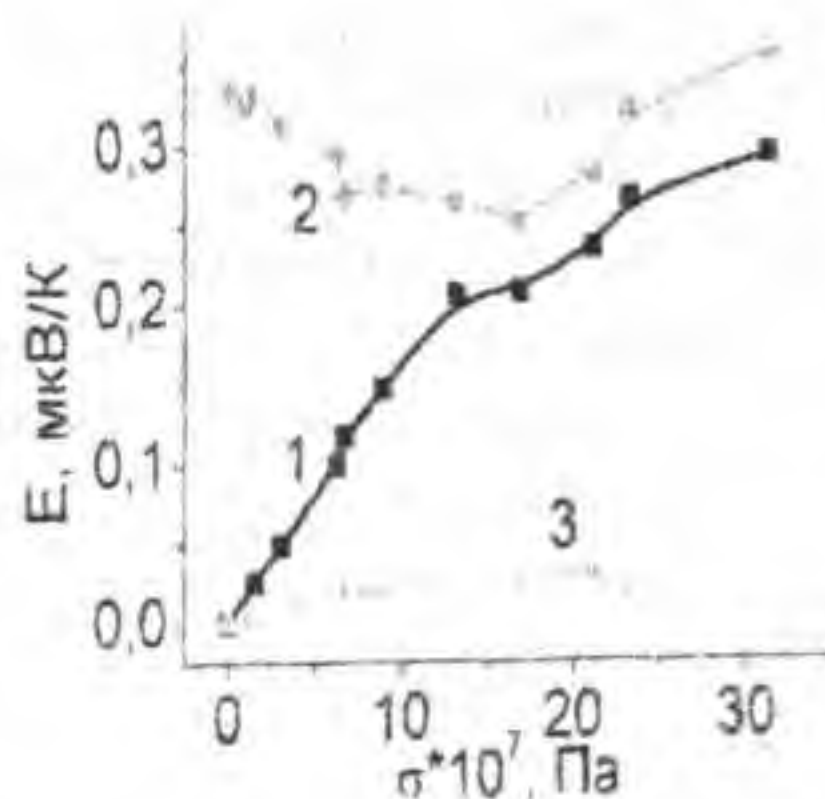


Рис.3. Залежність термо-е.р.с. E нікелю від напруги σ , коли розтяг здійснюється без магнітного поля (крива 1) та у полі (крива 2) $H=5$ кЕ; крива 3 – положення нульової точки ($\sigma=0$, $H=0$)

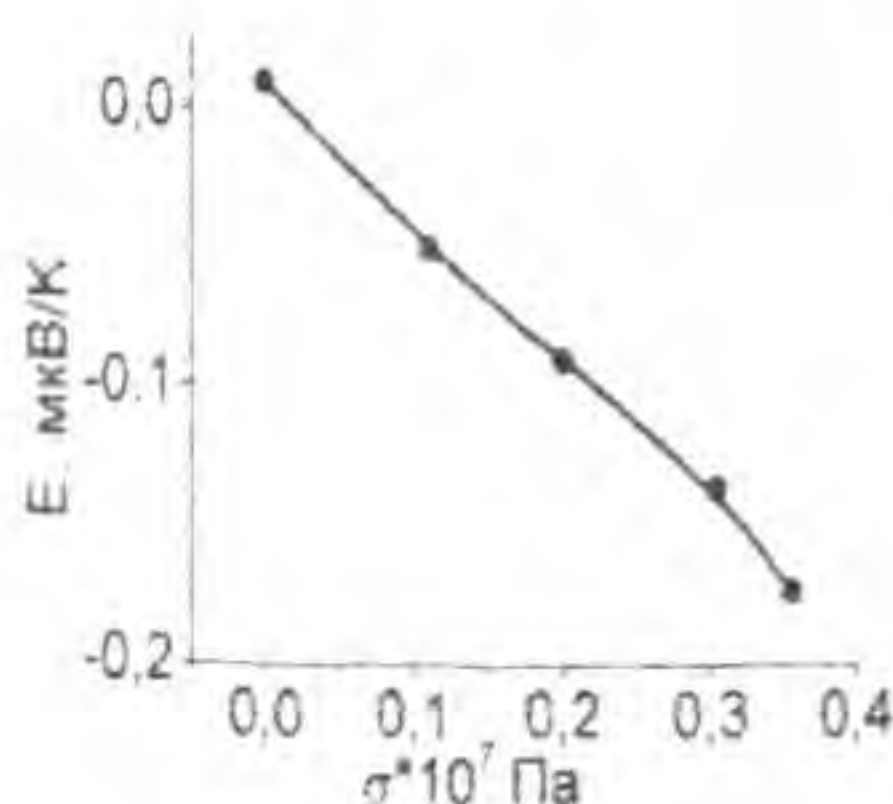


Рис. 4. Залежність термо-е.р.с. E Ni від напруги стискання σ .

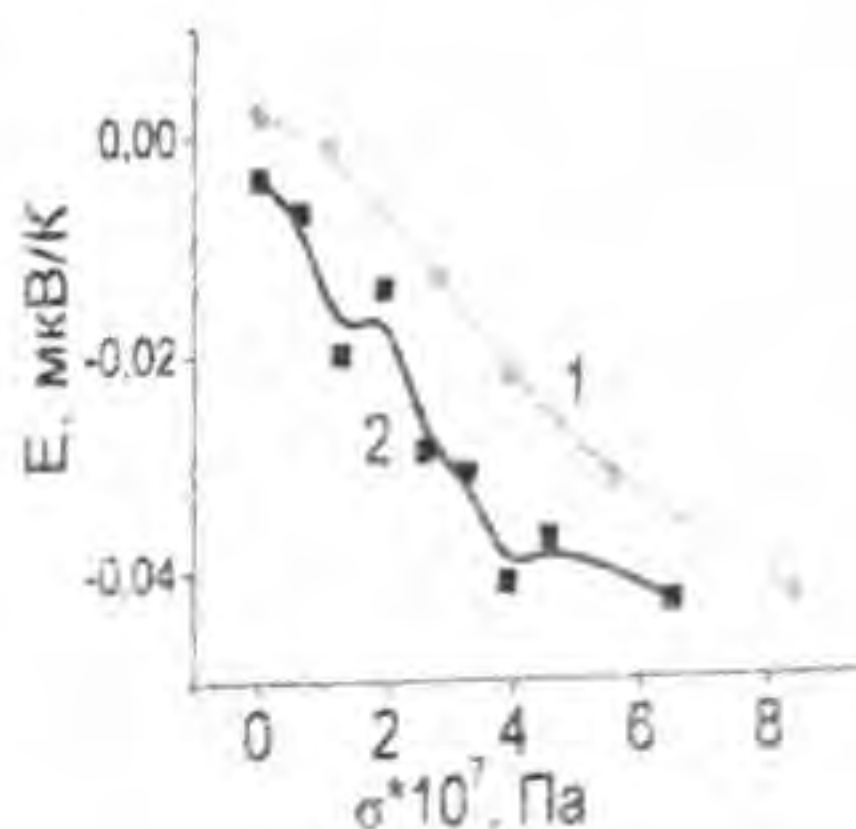


Рис. 5. Залежність термо-е.р.с. E нікелю від поздовжньої напруги σ , що виникає при консольному згинанні зразків: 1 – деформований прокаткою, 2 – відпалений при 400°C 2 години.

коли зразок розвантажують. Наприклад, поле напруг крайової дислокації має, згідно [10], вигляд:

$$\sigma_{xx} = -D \frac{\sin \Theta}{r}, \quad \sigma_{yy} = D \frac{\cos \Theta}{r}, \quad \sigma_{xy} = D \frac{\sin \Theta}{r}, \quad (4)$$

де Θ і r – полярні координати точки, в якій знаходимо напругу поля дислокації, що знаходиться в центрі координат, D і ν – константи. Ці поля зникають, коли дислокації анігілюють. Доводиться припускати, що напруги σ_{rr} , $\sigma_{r\Theta}$ і σ_{33} мало впливають на $E(\sigma)$, оскільки містять, про що свідчать формули (4), як додатну, так і від'ємну складову. Припущення правдоподібне, якщо $E(\sigma)$ при стисканні зростає протилежно по знаку до зміни $E(\sigma)$ при розтязі. Це і спостерігаємо, порівнюючи рисунки 3 і 4. Нахил $E(\sigma)$ по рис. 3 становить $\Delta E/\Delta\sigma=1,3\cdot 10^{-15}$ ВК⁻¹Па⁻¹, а по рис. 4 $\Delta E/\Delta\sigma=-0,5\cdot 10^{-13}$. Отже, напруга стискання змінює $E(\sigma)$ на два порядки сильніше, ніж напруга розтягу.

При згині консольного зразка (рис.1, В) верхня половина зразка розтягується, а нижня – стискається. Оскільки напруга стискання сильно змінює $E(\sigma)$, то слід чекати, що при згинанні зразка $E(\sigma)$ зростатиме у від'ємну сторону, як при стисканні. Це і спостерігаємо: $E(\sigma)$ спадає зі збільшенням σ (рис. 5) з $\Delta E/\Delta\sigma\approx -0,5\cdot 10^{-15}$ ВК⁻¹Па⁻¹.

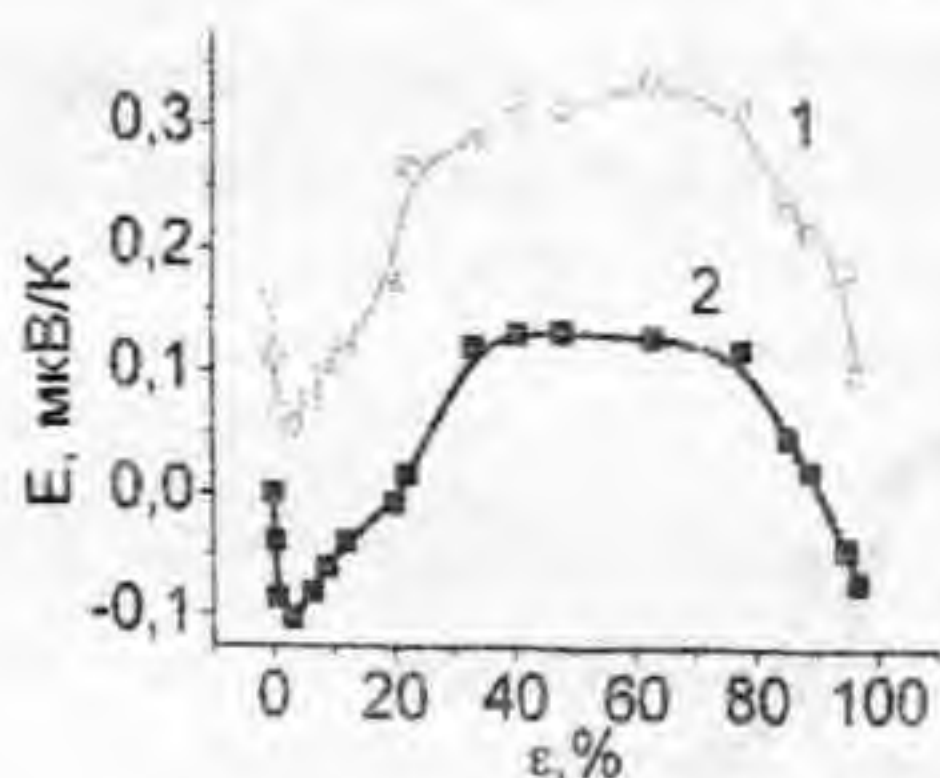


Рис. 6. Зміна термо-е.р.с. E Ni в залежності від пластичної деформації вальцюванням ϵ : крива 1 – $H=5$ кЕ, крива 2 – $H=0$.

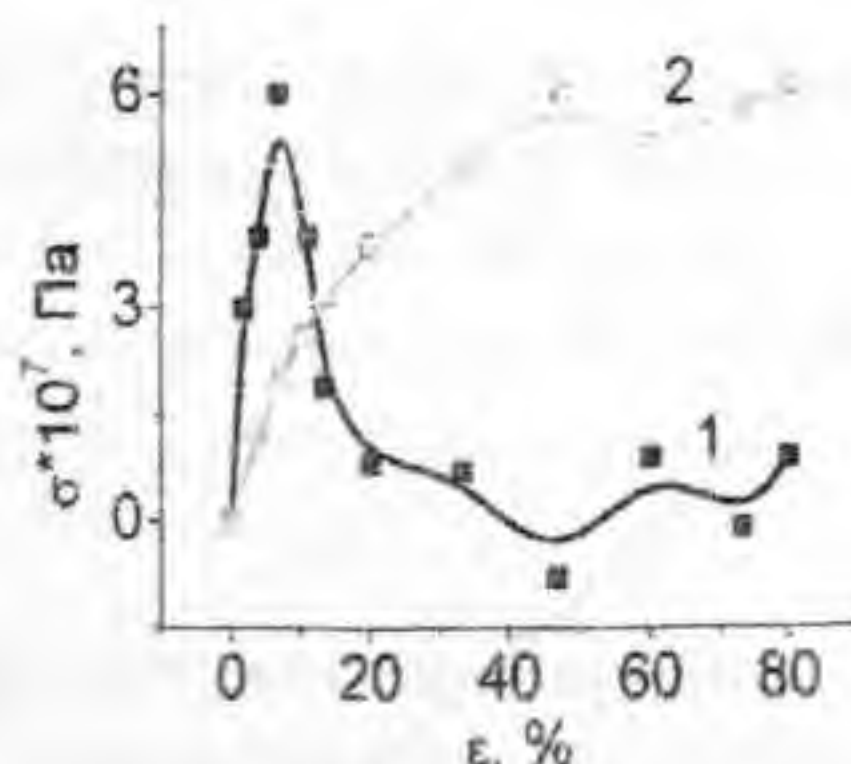


Рис. 7. Залежність макронапруг (крива 1) та мікронапруг (крива 2) від пластичної деформації вальцюванням ϵ .

На рис. 6 наведено $E(\epsilon)$, де ϵ – пластична деформація вальцюванням при кімнатній температурі. Початкова товщина фольги $b_0=0,27$ мм, кінцева $b_k=8$ мкм.

Зміна термо-е.р.с. $E(H=5 \text{ кЕ}) - E(H=0) \approx \text{const}$, тобто не залежить від концентрації дефектів кристалічної будови, що наростає зі зростанням ϵ . На кривих 1 і 2 спостерігаються: мінімум $E(\epsilon)$ при $\epsilon < 20\%$, плато $E(\epsilon)$ в інтервалі ϵ [20%-80%] та крутий спад $E(\epsilon)$ при $\epsilon > 80\%$. Незалежність $E(H) - E(0)$ від ϵ засвідчує, що енергетичний стан підсистеми d-електронів нікелю не змінюється при зростанні пластичної деформації. Про цій причині, до речі, намагніченість насичення нікелю також не залежить від пластичної

деформації [8]. Стан підсистеми d-електронів також слабо змінюється зі зростанням пружної деформації, адже $E(H)$ слабо відчуває зростання σ (рис. 3, крива 2).

Плато на кривих рис. 6. пояснюється [1, 2] насиченням зразка дислокаціями до граничних концентрацій $10^{11} - 10^{12} \text{ см}^{-2}$. Спад $E(\epsilon)$ при $\epsilon > 80\%$ можна пояснити масштабним (розмірним) ефектом термо-е.р.с., адже фольгові зразки при товщинах 8 – 12 мкм ($\epsilon > 90\%$) являють собою напівпрозорі сітки, „жилки” яких мають ножевидний переріз з гострими краями товщиною менше 1 мкм. Не дивлячись на те, що довжина вільного пробігу електрону у нікелі приблизно рівна 0,01 мкм (при 20°C), раніше масштабний ефект термо-е.р.с. спостерігали навіть у дротах діаметром 10 – 20 мкм [11, 12].

Щоб пояснити мінімум $E(\epsilon)$ при $\epsilon < 20\%$, ми визначили залишкові напруги у фольгах по зміщенню та розширенню дифракційної лінії (111) нікелю. Експерименти провели на дифрактометрі ДРОН-4. Фольги при знятті дифрактограми обертали (аби зменшити похибку, обумовлену текстурою вальцювання). Результати наведені на рис. 7.

На початку, коли $\epsilon < 15\%$, зразок товстий (100 – 270 мкм), і рентгенівський промінь дифрагує у приповерхневому шарі товщиною 5 – 10 мкм. Ми бачимо, що у приповерхневому шарі зосереджені макронапруги (напруги першого роду) стискання. Оскільки мікронапруги (другого роду) $\sigma(\epsilon)$ не вийшли на насичення, то це засвідчує, що при $\epsilon < 15\%$ головний вклад в $E(\epsilon)$ дають напруги стискання, а вони, як встановлено по рис. 4 і 5, на два порядки ефективніше змінюють термо-е.р.с., ніж напруги розтягу, причому $E(\sigma)$ змінюється у від'ємну сторону. Тому на початку кривих $\sigma(\epsilon)$ рисунка 6 спостерігаємо мінімум. При потоншенні зразка до 10 – 20 мкм рентгенівський промінь дифрагує по всій товщині зразка, де є шари стиснені і розтягнуті. Тому лінія (111) не зміщується і нам здається, що макронапруги при $\epsilon > 20\%$ відсутні. Оскільки на $E(\epsilon)$ продовжують впливати мікронапруги, то $E(\epsilon)$ виходить на насичення, коли $\epsilon > 20\%$.

Висновки

1. Для нікелю $E(H) - E(0) = \text{const} = -0,3 \pm 0,02 \text{ мкВ/К}$, де $E(H)$ – термо-е. р. с. зразка, намагніченого у полі $H = 5 \text{ кЕ}$, $E(0)$ – термо-е. р. с. розмагніченого зразка. Це справедливо у діапазоні $\sigma = [0 - 20 \cdot 10^7] \text{ Па}$.
2. При пластичній деформації вальцюванням $\epsilon \leq 98\%$ $E(H) - E(0)$ не залежить від ϵ . Тому можна вважати, що пластична деформація не впливає на енергетичний стан 3d електронів нікелю.
3. Зміна термо-е. р. с. $E(\sigma)$ при зростанні пружних напруг розтягу σ та $H = 0$ має лінійний характер. Гістерезис не спостерігається.
4. Нахил кривих $E(\sigma)$ становить: $\Delta E / \Delta \sigma = -1,3 \cdot 10^{-15} \text{ ВК}^{-1} \text{ Па}^{-1}$ при розтягові зразка, $\Delta E / \Delta \sigma = 0,5 \cdot 10^{-13}$ при одноосному стисканні зразка. Отже,

напруги розтягу і стискання змінюють $E(\sigma)$ в протилежні сторони по знаку, причому, напруги стискання майже на 2 порядки ефективніші.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Герцрикен С.Д., Новиков Н.Н., Копань В.С.. О природе термо-э.д.с., возникающей в результате деформации металла// УФЖ – 1959. – Т. 4, №3. – С. 293 - 299.
2. Лухвич А.А.. Влияние дефектов на электрические свойства металлов. Минск. – 1976. – С. 104.
3. Дорфман Я. Г., Янус Р.И., Кикоин И.И., Zs. Phys. – 1928, 54, 277. – С. 989.
4. Дорфман Я. Г., Янус Р.И., Григорев К.В., Черниковский М.Г.. ЖЭТФ. – 1931. 1. – С. 155.
5. Гуревич Л.Э., Недлин Г.М.. ЖЭТФ. – 1963. 45. – С. 576.
6. Гуревич Л.Э., Недлин Г.М.. ЖЭТФ. – 1964. 46. – С. 1056.
7. Гуревич Л.Э., Коренблиш И.Я.. ФТТ. – 1964. 6. – С. 2471.
8. Тикадзуми С.. Физика ферромагнетизма. М. «Мир». – 1987. – С. 420.
9. Борисенко В.Д., Копань В.С., Бессонов В.Б.. Термоэлектрическое устройство для контроля неоднородности материалов. А.С.СССР №750357. Бюллетень изобретений. – 1980, №27.
10. Фридель Ж.. Дислокации. М. «Мир». – 1967. – С. 644.
11. Бете Г., Зоммерфельд А.. Электронная теория металлов. М. ОНТИ. – 1938. – С. 340.
12. Зейтц Ф.. Современная теория твердого тела. М. ИИЛ. – 1957. – С. 740.

Надійшла до редколегії 06.01.2005.

УДК 537.32

Копань В.С., професор
Хуторянська Н.В., пров. інженер
Копань Ю.В., асистент.

Термо-е.р.с. багатошарового композиційного матеріалу Cu-Al

Термо-е.р.с. відносно Pb
багатошарового композиційного
матеріалу Cu-Al можна виразити:

$$E = \frac{E_{12}}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{100}{C} - 1 \right)} + E_{23}$$

де термо-е.р.с. Cu відносно Al і Pb є
відповідно $E_{12} = E_{Cu-Al} = -3.24 \cdot 10^{-6} \text{ В К}$ і
 $E_{23} = E_{Cu-Pb} = -3.3 \cdot 10^{-6} \text{ В К}$; питомий опір
Al і Cu $\rho_1 = \rho_{Al} = 2.891 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$,
 $\rho_2 = \rho_{Cu} = 1.828 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$;

$$C = \frac{h_{Al}}{h_{Al} + h_{Cu}} \cdot 100\% \text{ об. Al,}$$

h_{Al} та h_{Cu} - товщини шарів з Al та Cu.

Ключові слова: шаруваті
композиційні матеріали,
термоелектрорушійна сила.

V.S. Kopan,
N. V. Hutoryanska,
U. V. Kopan

Thermoelectric power of multilayered Cu-Al composite material

TEP of multilayered Cu-Al
composite material relative to Pb is given
by

$$E = \frac{E_{12}}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{100}{C} - 1 \right)} + E_{23}$$

where TEP of Cu relative to Al and to Pb
are $E_{12} = E_{Cu-Al} = -3.24 \cdot 10^{-6} \text{ V K}$ and
 $E_{23} = E_{Cu-Pb} = -3.3 \cdot 10^{-6} \text{ V K}$;
 $\rho_1 = \rho_{Al} = 2.891 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm} \cdot \text{cm}$,
 $\rho_2 = \rho_{Cu} = 1.828 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm} \cdot \text{cm}$;

$$C = \frac{h_{Al}}{h_{Al} + h_{Cu}} \cdot 100\% \text{ vol. Al,}$$

h_{Al} and h_{Cu} are Al and Cu layer thickness.

Key Words: Thermoelectric power,
multilayered composite material.

*E-mail: kopa@pulsary.com.ua

Перша робота по вивченню впливу деформацій ϵ на термо-е.р.с. $E(\epsilon)$ металів опублікована у 1959 р. [1]. Детальні дослідження цього явища в металах і композиційних матеріалах (КМ) наведені в монографіях [2, 3] і роботах [4, 5], відповідно. До сьогодення відсутні публікації по залежностям $E(C)$ КМ від об'ємної концентрації C складових в широкому $[0 \div 100\% \text{ об.}]$ інтервалі концентрацій. Оскільки нових властивостей в КМ досягають переважно просторовим розташуванням в об'ємі зразка компонент та зміною їх об'ємної концентрації, то нам видається доцільним дослідження $E(C)$.

Техніка експерименту

КМ Cu-Al був обраний за об'єкт дослідження, бо раніше [6] ми розробили технологію виготовлення цього КМ з шарами товщиною до 10-20 нм, причому було доведено, що границя міцності при розтягові КМ ($\sigma \sim 90 \cdot 10^7 \text{ Па}$, $C = 35\% \text{ об. Al}$) перевершує майже вдвічі σ авіаційних

алюмінієвих сплавів. Тож існує потреба подальшого вивчення і вдосконалення КМ Cu-Al з метою впровадження його у практику. Зразки для досліджень E були виготовлені так. Спочатку складали пакет із алюмінієвих фольг товщиною, наприклад, $h_{Al}=9$ мкм та мідних з $h_{Cu}=17$ мкм. Чистота металів 99,96-99,98. Пакет пресували при кімнатній температурі так, що його товщина зменшувалась вдвічі. При такому пресуванні фольги зварювались холодним способом. Потім пакет прокатували. У скільки разів зменшувалась товщина пакету, у стільки разів потоншувався кожен шар пакету. Раніше [4] було доведено, що за такої технології середня концентрація атомів, що продифундували у сусідній шар при холодному зварюванні фольг, не перевершує 0,2% ат., причому при віддаленні від границі між шарами на 0,7 нм – 1,4 нм – 10 нм концентрація спадає як 0,4% ат. – 0,3% ат. – 0,002% ат., відповідно. Варіюючи h_{Al} та h_{Cu} в пакетах, одержували КМ з різною об'ємною концентрацією компонент. Термо-е.р.с. вимірювали компенсаційним методом на потенціометрі з вхідним опором 20 Ом та ціною поділки 10^{-8} В.

Експериментальні результати та їх обговорення

Концентраційна залежність $E(C)$ наведена на рис. 1, 2. Бачимо, що вона однакова як для пакету з незварених фольг (між якими є повітряні проміжки), так і для багатошарових композиційних матеріалів. Залежність $E(C)$ на рис.1 зсунута відносно $E(C)$ рис.2 на $\Delta E=3,4$ мкВ/К. Ці експериментальні результати можна пояснити наступним чином. Розглянемо комбіновану термопару з трьох віток (фольг) 1 - 2 - 3 (Рис.3а). Нехай фольги 2 і 3 виготовлені з одного матеріалу, наприклад, міді з питомим опором ρ_2 , та товщиною h_2 . Фольга 1 з алюмінію, наприклад, має питомий опір ρ_1 та товщину h_1 . Відстань між вітками 1 - 2 $\Delta y > a$, де a - параметр кристалічної ґратки. Оскільки в режимі компенсації потенціометра $I_3=0$, то товщина фольги 3 несуттєва. У колі з віток 1 - 2 генерується термо-е.р.с. E_{12} та тече струм I_1 , так що

$$I_1 \left(\frac{\rho_1 l_1}{h_1 d_1} + \frac{\rho_2 l_2}{h_2 d_2} \right) = E_{12}, \quad (1)$$

де l_1, d_1 , та l_2, d_2 - довжини та ширини фольг 1 - 2, відповідно.

Нехай $l_1=l_2=l$, $d_1=d_2=d$, тоді

$$E_{12} = \int_{(1)} E \nabla T dx, \quad (2)$$

де ∇T - градієнт температур у вітках 1 і 2, E - диференціальна термо-е.р.с., що генерується у термопарі з двох віток 1-2.

Припустимо, що $\nabla T = \text{const}$. Потенціометр Π вимірює в режимі компенсації різницю потенціалів між точками T_x, T_n , до якої додається E_{23} , яку позначимо через E_e , тоді

$$E_e = \frac{\rho_2 l}{h_2 d} * I_1 + E_{23}, \quad I_3 = 0. \quad (3)$$

Якщо вітки 2 і 3 з одного металу (мідь), то $E_{23} = 0$. Підставивши вирази (2) і (3) у вираз (1), одержимо

$$E_e = \frac{\int_{(1)} E \nabla T dx}{1 + \frac{\rho_1 h_2}{\rho_2 h_1}} \quad (4)$$

Оскільки $\int_{(1)} E \nabla T dx = E_{12}$, і об'ємна концентрація компоненти 1 в термопарі

$$1 - 2 \quad \frac{h_1}{h_1 + h_2} * 100 = C \% \text{ об.}, \text{ то}$$

$$E_e = E(T_H - T_X) = \frac{E_{12}}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{100}{C} - 1 \right)} \quad (5)$$

Розраховуючи $E(C)$ за формулою 5, використовували такі дані:

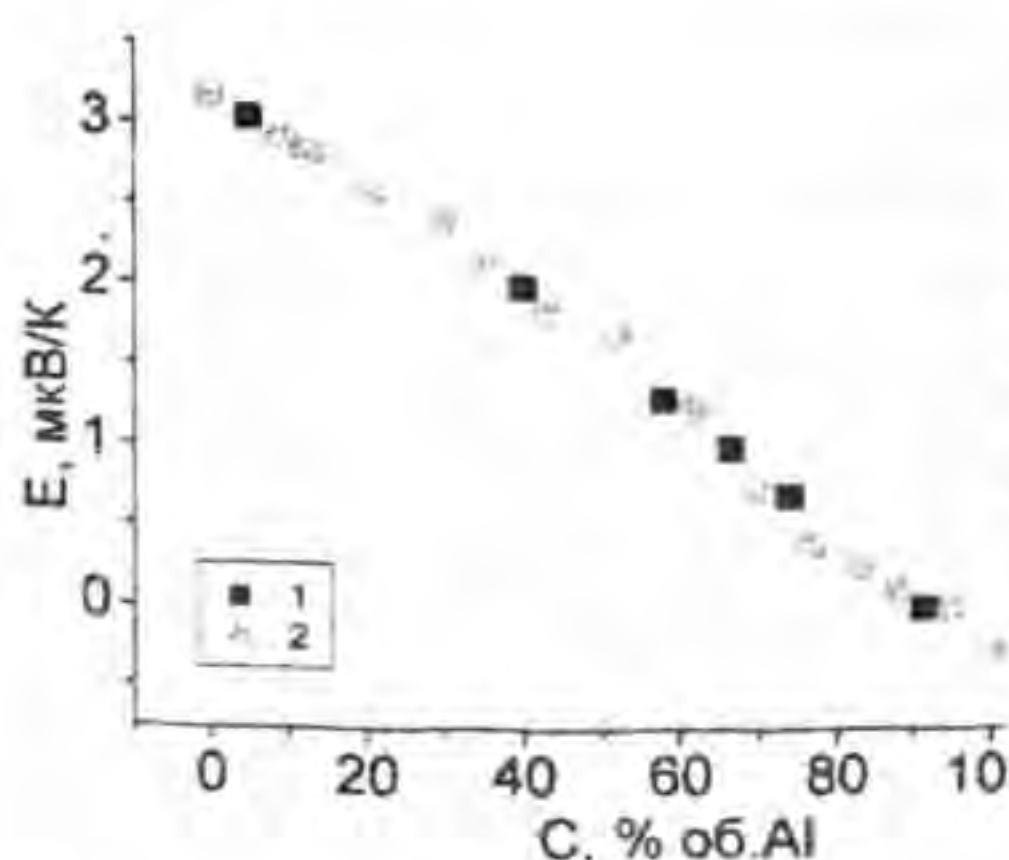


Рис.1. Залежність термо-е.р.с. E КМ Cu-Al від концентрації $C \% \text{ об. Al}$. 1 - значення E , розраховані за формулою (6); 2 - експериментальні; еталон - Рв.

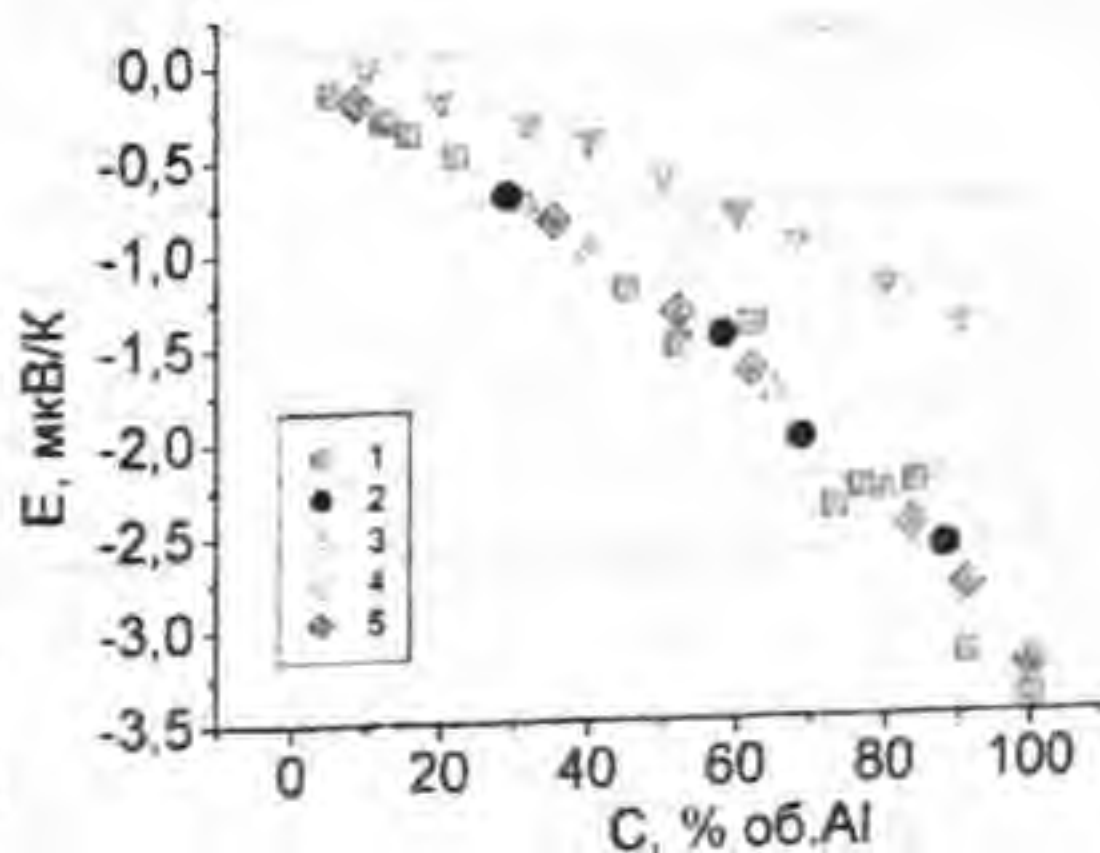


Рис.2. Залежність термо-е.р.с. E для Cu-Al від концентрації $C \% \text{ об. Al}$: 1 - E для пакету, що складений з незварених фольг; 2 - E для КМ. Еталон - Cu; 3 - для біметалу; 4 - для КМ, в якому шари алюмінію фрагментовані на острівці; 5 - розрахована $E(C)$ за формулою (5).

$\rho_1 = \rho_{Al} = 2.891 * 10^{-6} \text{ Ом} * \text{см}$ та $\rho_2 = \rho_{Cu} = 1.828 * 10^{-6} \text{ Ом} * \text{см}$ (для 40°C),
 $E_{12} = E_{Cu-Al}(T_H - T_X) = -3.24 \text{ (мкВ/К)} * (64^\circ \text{C} - 20^\circ \text{C})$, де E_{Cu-Al} - диференціальна термо-е.р.с. термопару Cu-Al, що визначена з рис. 2 при $C = 100 \% \text{ об. Al}$.

Функція $E(C)$, що відображена точками 1 на рис. 1, розрахована за формулою (3), що переписана у вигляді (6)

$$E = \frac{E_{Cu-Al}}{1 + \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} \left(\frac{100}{C} - 1 \right)} + E_{Cu-Pb} \quad (6)$$

де $E_{Cu-Pb} = 3,3$ мкВ/К – диференціальна термо-е.р.с. термопар 2 – 3 (рис. 3) з мідної та свинцевої віток. E_{Cu-Pb} визначається з рис. 1. при $C=0$.

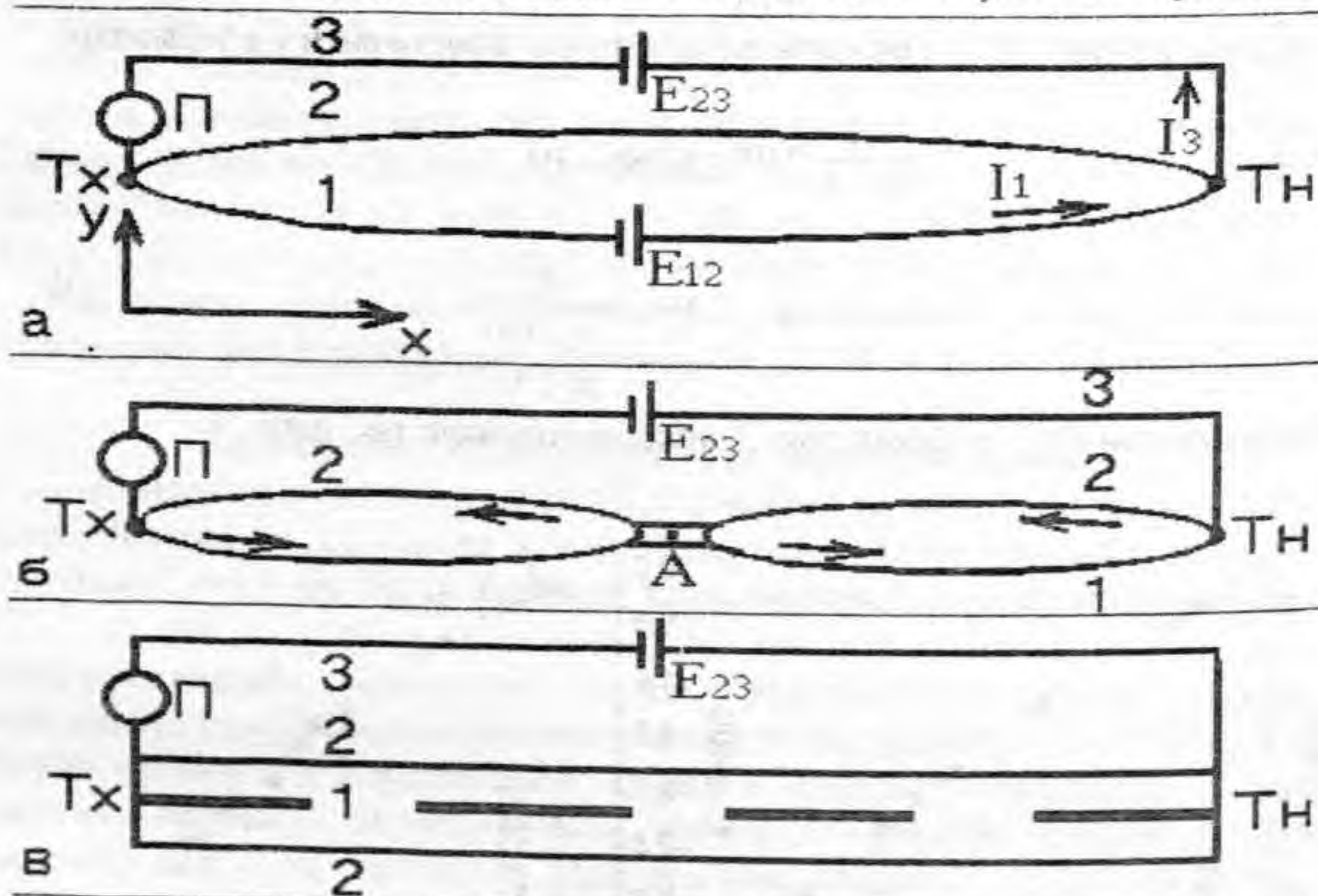


Рис.3. Схеми комбінованих термопар з трьох віток 1-2-3; T_H і T_X – температури гарячого і холодного спаїв, відповідно, П – потенціометр; 1 – Al, 2 – Cu, 3 – Cu або Pb.

Оскільки $E(C)$, розрахована по формулі (6), узгоджується з експериментом (рис.1), то наведені пояснення (формули 1-6) дослідних результатів правдоподібні.

Пояснимо далі причину співпадання $E(C)$ пакета незварених фольг з $E(C)$ КМ (рис. 2). Нехай вітки 1 – 2 комбінованої (рис. 3а) термопар 1 зварені посередині в точці А (рис. 3б). В утворених двох петлях струми протікають проти годинникової стрілки, тому струм через ділянку А у напрямку ОУ (впоперек) не протікає за умови, що по всій довжині термопар 1 (від T_H до T_X) градієнт $\nabla T = \text{const}$, тоді E_{12} генерується на двох петлях:

$$E_{12} = \int_{(1)} E \nabla T dx + \int_{(2)} E \nabla T dx = \int_{(T)} E \nabla T dx \quad (7)$$

Формула (5) залишається незмінною. Отже, $E(C)$ пакету незварених фольг співпадає з $E(C)$ КМ. Можна всі дрібні шари h_{i1} одного сорту у КМ скласти

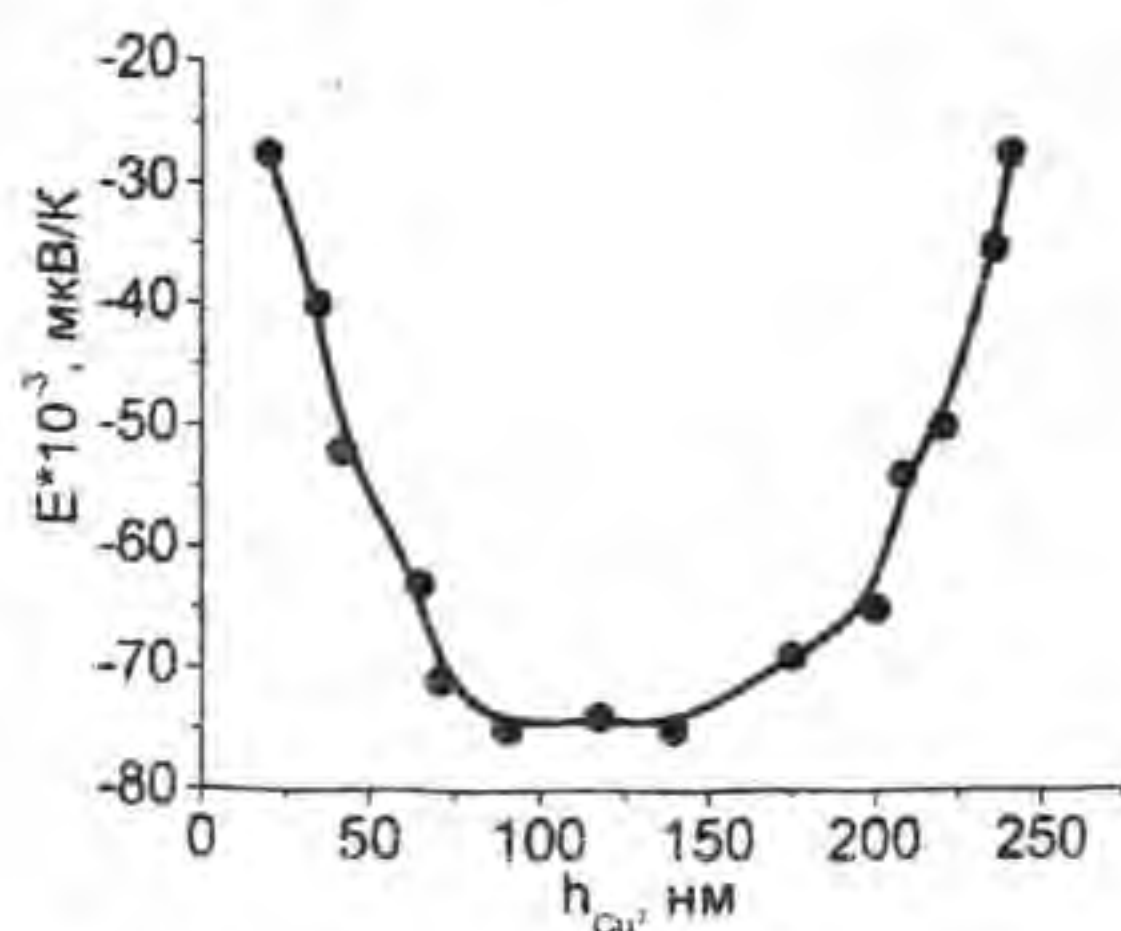


Рис. 4. Залежність термо-е.р.с. E КМ Cu-Al ($C=35\%$ об. Al) від товщини мідного шару h_{Cu}

разом так, щоб вони не чергувались з шарами h_{i2} другого сорту, але так, щоб $h_1 = \sum h_{i1}$, $h_2 = \sum h_{i2}$. Тоді КМ буде біметалом. Формули 4-5 не зміняться, тому $E(C)$ пакету незварених фольг співпадає як з $E(C)$ біметалу, так і з $E(C)$ КМ (рис.2).

У роботі [4] було доведено, що границя міцності КМ Cu-Al зростає зі зменшенням товщини шару h , поки $h > 20 - 30$ нм. При подальшому деформуванні КМ з метою зменшення h настає

фрагментація шарів на острівці. Механізм деформації КМ потоншенням шарів заміщається механізмом ковзання острівців по їх границях контакту. При цьому не змінюються міцність, питомий електроопір, густина тощо. Цікаво дослідити, чи впливає фрагментація шарів на $E(C)$. На рис. 3в наведено схему будови трьохшарового КМ з шарів 2 - 1 - 2. Нехай $h_2 = 0,5h_1$, а сумарна довжина острівців l_0 становить половину довжини вітки термопари $l_0 = 0,5l$. З генерування термо-е.р.с. виключається половина довжини вітки 2 - 1 - 2 комбінованої термопари. Чисельник у рівнянні (4) буде вдвічі менший, бо інтегрування здійснюється по довжині $0,5l$. При $C=50\%$ об. Al з (4) та (5) одержуємо, що $E=0,65$ мВ/К. Розрахована $E(C)$ для КМ з фрагментованими алюмінієвими шарами при $l_0=0,5l$ показана на рис. 2 точками 4. Ми приходимо до висновку: у КМ при фрагментації неперервних шарів на острівці відбувається зменшення $|E|$. На базі цього висновку можна пояснити зміну E при зменшенні товщини мідного шару h у нан шаруватому КМ Cu-Al (рис.4). Товщину h зменшували шляхом повільного вальцювання (швидкість 1 - 3 см/с при кімнатній температурі) багатошарового зразка КМ до деформацій 99,98 - 99,999%. Еталонна вітка термопари була виготовлена з такого ж КМ, що мав товщину мідного шару $h_{Cu}=6$ мкм та деформацію 65%. Зростання $|E|$ зі зменшенням h_{Cu} до 120 нм ми пояснюємо зростанням густини дислокацій у шарах. Зменшення $|E|$ при $h < 80$ нм свідчить, як доведено вище (рис. 2, точки 4), про фрагментацію неперервних шарів КМ на острівці. Явище фрагментації у нан шаруватих КМ обмежує досягнення гранично великих міцностей [4] КМ.

Висновки

1. Диференціальна термо-е.р.с. $E(C)$ композиційного матеріалу (КМ) Al-Cu квазілінійно змінюється (формули 5-6) при зміні об'ємної концентрації компонент С, поки товщина шарів $h > 0,1 - 1$ мкм. $E(C)$ зменшується обернено пропорційно відношенню питомих опорів шарів.
2. Термо-е.р.с. $E(C)$ біметалу КМ та пакету з фольг (в якому фольги не прилягають щільно одна до одної), однакові, якщо $C = \text{const}$.
3. При фрагментації на острівці суцільних шарів КМ $|E|$ зменшується, що пояснюється вкороченням довжини генеруючих термо-е.р.с. ділянок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Герцрикен С.Д., Новиков Н.Н., Копань В.С.. О природе термо-э.д.с., возникающей в результате деформации металла// УФЖ – 1959. – Т. 4, №3. – С. 293 - 299.
2. Лухвич А.А.. Влияние дефектов на электрические свойства металлов. Минск. – 1976. – С. 104.
3. Лухвич А.А., Каролик А.С., Шарандо В.И.. Структурная зависимость термоэлектрических свойств и неразрушающий контроль. Минск. – 1990. – С. 192.
4. Копань В.С.. Микрослоистые композиционные материалы на основе алюминия, меди и железа. Автореферат докторської дисертації. Київ. - 1988. – 37 с.
5. Іваненко К.О.. Термо-е.р.с. та електроопір наноструктурних композиційних матеріалів. Автореферат кандидатської дисертації. Київ. - 2004. – 20 с.
6. Копань В.С., Лысенко А.В.. Об электросопротивлении и механических свойствах многослойных композиций на основе меди и алюминия// Физика металлов и металловедение – 1970. – Т. 29, №5. – С.1074 – 1080.
7. Копань В.С.. Композиційні матеріали. Київ: Пульсари, 2004. – 200 с.

Надійшла до редколегії 03.03.2005.

УДК 541.1+543.42

М.Є.Корнієнко,
О.В.Круть

**Спостереження граткових мод
рідкого CS₂ в області сумарних
коливальних смуг ІЧ
поглинання**

Запропонована і реалізована ідея спостереження граткових мод рідин у високочастотній області складених коливальних смуг. На прикладі дослідження спектрів ІЧ поглинання CS₂ при кімнатній температурі встановлені нові квантові закономірності рідкого стану речовини. Вперше показано, що при зникненні в рідинах слідів граткових коливань у низькочастотній області, вони чітко виявляються у високочастотній області сумарних коливальних смуг 2- і 3-го порядків. Зростанню інтенсивностей цих смуг сприяє ріст ангармонізму в рідині. У смугах сумарних тонів в області мод ν_1 і $\nu_1 + \nu_2$ CS₂ спостерігалися поперечні і поздовжні акустичні і лібраційні моди і визначені їх характерні параметри. Ці дослідження відкривають нові шляхи для дослідження рідин і інтеграції природничих наук.

Ключові слова: рідина, лібраційна мода, ІЧ спектр поглинання, граткові коливальні моди, смуги складених тонів.

*E-mail: nikkorn@mail.univ.kiev.ua

M. Ye. Korniyenko,
O.V.Krut

**Observation of the lattice modes
of CS₂ liquid in the sum vibration
bands region of IR absorption**

The idea of observation the lattice modes of liquids in high-frequency area of compound vibration bands is offered and realized. On an example of research of IR spectra of absorption CS₂ at room temperature the new quantum laws of a liquid state of substance are established. For the first time it is shown, that at disappearance of traces lattice modes in low-frequency area in liquids, they are precisely shown in high-frequency region of sum vibration bands of 2-nd and 3-rd orders. The growth of anharmonicity in a liquid promotes the increasing of these bands intensity. The transverse and longitudinal acoustic and libration modes of a liquid CS₂ were observed in the bands of sum tones in the region of modes ν_1 and $\nu_1 + \nu_2$, and their characteristic parameters are determined. These researches open the new ways for research of liquids and integration of natural sciences.

Key Words: liquid libration mode, IR spectra of absorption, lattice vibration modes, compound bands.

Вступ і постановка проблеми

Спектральні дослідження властивостей коливальних і електронних збуджень в рідкому стані речовини дуже важливі для розвитку послідовних квантовомеханічних уявлень для неупорядкованих конденсованих середовищ. Розвиток таких уявлень є важливою фізичною проблемою і необхідний для розгляду широкого кола макроскопічних явищ на основі єдиних фундаментальних положень, створення наукової бази сучасної біології і медицини, а також розвитку нових технологій. Слід

відзначити, що незважаючи на майже столітній розвиток квантової теорії, квантові уявлення добре розвинуті тільки для окремих атомів і молекул, а також кристалічних твердих тел. Надзвичайно велика кількість складових частинок в конденсованому стані речовини не дозволяє проводити розрахунок квантових станів навіть з допомогою сучасної обчислювальної техніки. Ситуація в даному випадку більш складна ніж при застосуванні класичних рівнянь до багаточастинкових систем. Складнощі теоретичного аналізу усугубляються недостатністю даних про потенціали взаємодії в конденсованому стані, а також взаємовпливом різних зв'язків і недостатністю врахування тільки парних взаємодій складових частинок. Тому для більш повного розуміння неупорядкованого конденсованого стану речовини на мікроскопічному рівні необхідний пошук нових квантових закономірностей в складних системах. В зв'язку з цим необхідно більш повно використовувати наявну експериментальну інформацію, зокрема результати спектральних досліджень, які дають найбільш детальну інформацію про енергетичні стани. На відміну від спектроскопії ізольованих атомів чи молекул, для конденсованого стану речовини крім частотного положення спектральних смуг дуже важливим є детальне вивчення форми спостережуваних смуг, аналіз і розуміння механізмів її формування, зокрема виникнення тонкої структури спектрів. Крім методів коливальної і електронної спектроскопії для вивчення надмолекулярної структури речовини можуть бути важливими і більш низькочастотні методи, наприклад, акустичної і радіоспектроскопії, ЯМР, а також розсіяння світла і нейтронів.

Низькочастотні коливальні смуги, що спостерігаються в спектрах комбінаційного розсіювання (КР) світла, спектрах поглинання в далекій інфрачервоній (ІЧ) області, або методом непружного розсіювання нейтронів, виникають внаслідок міжмолекулярних коливань в рідинах [1]. Прийнято інтерпретувати їх на основі уявлень про разупорядковану квазікристалічну структуру. Вперше вони виявлені Гроссом і Вуксом в КР спектрах твердих органічних сполук. У кристалах низькочастотні коливальні лінії досить вузькі і мають високу інтенсивність, порівнянну і навіть перевищуючу інтенсивність смуг внутрішньомолекулярних коливань. При плавленні низькочастотні смуги сильно розширюються і замінюються широким крилом Релея, що простягається до $150\text{--}200\text{ см}^{-1}$. У деяких випадках сліди широких низькочастотних смуг зберігаються й у ряді в'язких рідинах.

Новий підхід до фізики рідкого стану відкрився після виявлення методами лазерної спектроскопії колективних властивостей коливальних збуджень рідин і наявності в них такої характеристики як хвильовий вектор [2-9]. Тільки з використанням цієї концепції вдалося пояснити всі аномалії, що спостерігаються при поширенні інтенсивного лазерного випромінювання в рідинах і стеклах, у тому числі аномальні спектральні

розширення і незвичайну кутову дифузію випромінювання [2-5], які не мали адекватного пояснення близько 20 років. Кутові і поляризаційні залежності спектрів гіперкомбінаційного розсіювання, а також непружне розсіювання нейтронів, підтверджують наявність колективних властивостей для всіх коливальних станів крім низькочастотної області ($\nu \leq 300 \text{ cm}^{-1}$) [8-9]. Виконання закону збереження імпульсу для процесів з участю коливальних збуджень вимагає врахування макроскопічної симетрії середовища, а не симетрії молекул, як це прийнято в молекулярній моделі середовища [10]. Прийнято вважати, що в неупорядкованих середовищах коливання делокалізовані, якщо характерна висота випадкового потенційного рельєфу ΔU , в полі якого існують і розповсюджуються коливальні збудження, менша енергії цього збудження. В середовищах з топологічним характером разупорядкування можна очікувати, що величина ΔU буде порядку енергії зовнішніх коливань структурних одиниць середовища, порівнянної з енергією теплового руху $\sim kT$ при кімнатній температурі ($\nu \approx 200 \text{ cm}^{-1}$) [9]. Таким чином, для більшості внутрішньомолекулярних коливальних мод з високими частотами проявляються колективні властивості, що підтверджується спостереженням поздовжньо-поперечного (LO-TO) розщеплення найбільш сильних у ІЧ поглинанні коливальних мод ряду рідин (CHCl_3 , CCl_4 , C_6H_6 , CS_2 і ін.) [2-6,8,9]. Відповідно до підходу Максвелла [11] у високочастотній області рідини ведуть себе як аморфні тверді тіла, у яких можливі напруги зсуву релаксують за деякий характерний час τ . При $t \leq \tau$ рідини за рахунок міжмолекулярних взаємодій характеризуються модулем зсуву μ , а при $t \geq \tau$ їм властива в'язкість і плинність. Для низькочастотних збуджень період коливань часток стає меншим характерного часу релаксації τ і колективні властивості рідин повинні зникати. Характерні значення граничних частот низькоенергетичних коливальних збуджень, починаючи з яких виявляються колективні властивості збуджень, у даний час можна визначати тільки експериментально. Для води з розвинутою системою водневих зв'язків LO-TO розщеплення добре виражено для моди в області $180\text{-}270 \text{ cm}^{-1}$ [7], але колективні властивості води проявляються і в області поперечних і поздовжніх акустичних мод в областях $\sim 50\text{-}70$ і $120\text{-}135 \text{ cm}^{-1}$. В даній роботі розвивається новий підхід до проблеми існування квазіграткових мод рідин на прикладі такої еталонної рідини як CS_2 . Вперше встановлено, що поблизу температури кипіння CS_2 при відсутності слідів квазіграткових мод у низькочастотній області, можливе чітке їх спостереження у високочастотній області складених тонів з участю внутрішньо- і міжмолекулярних коливань. Несподівано виявилось, що спостереження таким методом граткових коливальних мод у рідинах реалізується більш легко в порівнянні з відповідними кристалами. Все це вимагає переосмислення існуючих уявлень про властивості рідин і можливості

існування в них збуджених станів ґраткових коливальних мод.

Вибір середовища і методика дослідження

Через низькі частоти ґраткових мод в молекулярних середовищах їх дослідження в далекій ІЧ області методами спектроскопії поглинання сильно ускладнено, тому що для більшості серійних спектрометрів область до 100 см^{-1} недоступна. У спектрах КР спостереженню низькочастотних мод перешкоджає інтенсивне крило лінії Релея. Крім того в довгохвильовій області спектру через спотворення інформації необхідна спеціальна математична обробка спектрів, пов'язана з використанням певних моделей [12], що знижує надійність отримуваної інформації. На сучасному етапі розвитку фізики рідкого стану бажано використовувати найбільш загальні безмодельні методики обробки спектральної інформації. Тому доцільніше вивчати ґраткові моди в області сумарних і різницевих частот з участю більш високочастотних внутрішньомолекулярних мод. При цьому спектральна інформація переноситься із малодоступної спектральної області у більш доступну. У зв'язку з цим бажано мати найбільш простий коливальний спектр досліджуваної рідини, щоб можливі складові тони фундаментальних мод не перешкоджали спостереженню складових тонів з участю ґраткових мод. Для проведення ключового експерименту, який би для фізики рідкого стану речовини мав таке значення як атом водню в теорії атомів, потрібно правильно вибрати досліджувану рідину. Вона повинна мати просту структуру молекул з мінімальним числом атомів і, отже, мінімальним числом нормальних коливань, з якими пов'язані коливальні моди зв'язаного конденсованого середовища. Дуже важливо щоб для відповідного молекулярного кристала були добре виражені ґраткові коливальні моди.

Рідини з двохатомних молекул типу H_2 , N_2 , O_2 , Cl_2 чи CO , HCl , HBr з одним нормальним типом коливання при нормальних умовах мають малу температурну область існування рідкої фази, що може не дозволити достатньо надійно виявити їх квантові властивості. А низькі температури плавлення і кипіння цих речовин не дозволяють проводити експерименти при кімнатній температурі. Рідини з триатомних молекул типу H_2O , CS_2 , COS , HCN і SO_2 мають значно більшу область існування рідини і тільки по три коливальні моди, які відповідають нормальним коливанням молекул. Це істотно спрощує ідентифікацію можливих складових тонів, що часто являється не дуже простою задачею в зв'язку з існуванням поздовжньо-поперечного і давидівського розщеплення коливальних мод [2-9], а також проявом ліній «гарячих» коливань і коливальних смуг, відповідних наявності ізотопних молекул. Для COS і SO_2 при нормальних умовах рідка фаза існує тільки при температурах відповідно менших -50°C и -10°C . Для цілей цієї роботи CS_2 в порівнянні з H_2O і HCN має ту перевагу, що її фундаментальні моди більш ізольовані через відсутність у молекулі CS_2 легких атомів водню. Причому деформаційне $\nu_2 = 391\text{ см}^{-1}$ і

повносиметричне $\nu_1 = 654 \text{ cm}^{-1}$ коливання знаходяться в більш зручній низькочастотній області, вільній від парів води і CO_2 в атмосфері, велика кількість обертальних ліній яких може перешкоджати отриманню якісних спектрів ІЧ поглинання.

Граткові коливання 73 і 83 cm^{-1} а також обертон 145 cm^{-1} (2×73) в кристалі CS_2 спостерігались методом КР при температурі 77 K [13]. Ці коливальні моди відносяться до лібрацій (обертальних качань) молекул в кристалічній гратці, причому в КР смуга 73 cm^{-1} більш ніж в 4 рази інтенсивніша за смугу 83 cm^{-1} . В КР спектрах при температурах 18 і 79 K спостерігалась також трансляційна мода CS_2 66 cm^{-1} [14]. Для багатьох речовин орієнтаційне плавлення, коли спостерігається орієнтаційне розупорядкування, відбувається при меншій температурі ніж звичайне плавлення, коли речовина втрачає трансляційну інваріантність. Особливістю CS_2 є те, що найбільш інтенсивне розупорядкування лібраційних мод спостерігається в температурному інтервалі $163\text{--}169 \text{ K}$ [15], тобто після звичайного плавлення. Цікаво відзначити, що для CS_2 рідкий стан існує в температурному інтервалі від $-111,9^\circ\text{C}$ до $46,24^\circ\text{C}$, величина якого значно перевищує область існування конденсованого стану води з вираженою сіткою водневих зв'язків. Характерно, що в CS_2 явно виражена смуга граткових коливальних мод спостерігається в інтервалі $\sim 10^\circ\text{C}$ вище температури плавлення і далі її можна бачити в виді слабовираженого плеча аналогічно смузі трансляційних коливань молекул води в сітці водневих зв'язків при 80°C [7]. По результатам наших експериментів, а також робіт інших авторів, в спектрі КР при кімнатній температурі ніяких слідів граткових мод не спостерігається.

Якість коливальних мод дуже добре виявляється при вимушеному комбінаційному розсіянні (ВКР). У спектрах ВКР при вузькосмуговому збуджуючому лазерному випромінюванні звичайно виявляється тільки одна з коливальних мод з найбільшим відношенням пікової інтенсивності спонтанного КР до напівширини коливальної лінії. Прикладами таких високочастотних коливальних мод, які добре проявляються в ВКР, є моди $\nu_1=656$, $\nu_2=992$, 2330 cm^{-1} для рідких CS_2 , C_6H_6 і N_2 відповідно, а також моди 1086 і 1332 cm^{-1} кристалів кальциту й алмазу. Відзначимо, що ширина лінії ν_1 спонтанного КР CS_2 становить $0,5 \text{ cm}^{-1}$, а в рідкому азоті – $0,067 \text{ cm}^{-1}$ [16], і ці моди дуже добре проявляються в спектрах ВКР. В результаті когерентного збудження при ВКР найбільш високочастотної моди, збудження інших мод не відбувається. Лише в окремих випадках в ВКР проявляються дві різні моди чистої речовини. Така ситуація реалізується зокрема при ВКР в CHBr_3 , коли одночасно спостерігаються стоксові і антистоксові компоненти коливальних мод 155 і 222 cm^{-1} . Аналогічна ситуація спостерігається і для закристилізованого при 77 K CS_2 , де разом з інтенсивним в КР внутрішньомолекулярним коливанням 656 cm^{-1} , в ВКР проявляється і зовнішнє коливання 75 cm^{-1} . При збудженні рубіновим

лазером (694,3 нм) або другою гармонікою неодимового лазера (530 нм) спостерігалось до 4-5 стоксових компонент граткової моди 75 см^{-1} і лише 2 компоненти моди 656 см^{-1} [17-20]. Дві компоненти ВКР на гратковій моді 75 см^{-1} спостерігались навіть при збудженні слабим антистоксовим випромінюванням з участю коливання 656 см^{-1} [20]. Це ясно показує високу добротність граткових мод твердого CS_2 і одночасно з наведеними вище даними підтверджує правильність зробленого вибору речовини.

В цій роботі ми вперше використали новий метод спостереження коливальних мод квазікристалічної гратки рідини V_{Cr} в високочастотній області складових тонів $V_1 \pm V_{Cr}$ з участю внутрішньомолекулярної моди V_1 або більш високочастотних мод. Така методика широко використовується не тільки при візуалізації ІЧ сигналів але і зображень [21-23]. Вкажемо, що в кристалі CS_2 при 77 К в спектрі КР спостерігалась дуже слабка широка смуга 727 см^{-1} біля повносиметричної моди $V_1 = 656\text{ см}^{-1}$, яка правильно інтерпретувалась як сумарний тон V_1 з гратковою модою $V_{Cr} = 73\text{ см}^{-1}$ [13]. В більш детальній роботі [14] в кристалі CS_2 при 79 К спостерігалась сукупність сумарних і різницевих частот $V_1 \pm V_{Cr}$ поблизу всіх внутрішньомолекулярних мод $V_1 = 652\text{ см}^{-1}$, $V_2 = 395\text{ см}^{-1}$ і $V_3(\text{TO}) = 1495\text{ см}^{-1}$. Поблизу деформаційної моди V_2 спостерігались складові смуги з участю граткових коливань 37 і $81\text{-}88\text{ см}^{-1}$, в області антисиметричної моди V_3 – смуги з участю граткової моди 75 см^{-1} . Найбільша кількість граткових мод проявлялась в області симетричного коливання V_1 . Тут проявлялись сумарні смуги $V_1 + V_{Cr}$ з гратковими модами $27, 50, 62, 74$ і 83 см^{-1} , а в різницевих смугах спостерігалось менше частот. При зменшенні температури до 18 К частоти граткових мод трохи підвищувались і зникали різницеві смуги $V_1 - V_{Cr}$, в результаті зменшення термічного збудження граткових коливальних мод. Але для рідкого стану CS_2 а також інших рідин такі складові смуги не спостерігались ні в КР ні в ІЧ спектрах [24-25]. Навіть при тисках до 10 кбар, коли підсилюється міжмолекулярна взаємодія, в спектрах КР рідкого CS_2 граткові коливальні моди не проявлялись [26]. Граткові моди дуже добре виражені у воді, але їх частоти відносно високі [7], що не дуже зручно для спостереження складових тонів з участю цих мод.

Спостереження граткових мод рідкого CS_2

в області коливальних мод другого і третього порядків

Крім вказаних особливостей рідкого сірковуглецю, обумовлених великою температурною областю існування його рідкої фази (158°), а також незвичайним проявом лібраційних мод після плавлення кристалу і в процесі ВКР, важливе значення для спостереження граткових мод в області складених мод відіграє центросиметричність молекул і пов'язані з

цим прояви альтернативної заборони. Повносиметричне коливання ν_1 ізольованої лінійної молекули CS_2 відповідно до точкової групи симетрії $D_{\infty h}$ дозволено в спектрі КР, а двічі вироджене деформаційне коливання ν_2 і сильно дипольне антисиметричне коливання ν_3 дозволено в спектрі ІЧ поглинання. Однак для рідин, в результаті міжмолекулярної взаємодії, правила добору по симетрії, встановлені для точкової групи симетрії молекули, порушуються і крім симетрії молекули важливе значення має симетрія середовища [9]. В результаті цього в ІЧ спектрі спостерігається смуга моди ν_1 більш слабка в порівнянні з дозволеними коливаннями $\nu_{2,3}$. Одночасно в КР спектрі спостерігаються "заборонені" смуги $\nu_{2,3}$. Мала інтенсивність смуги ν_1 в ІЧ спектрі сильно полегшує спостереження бічних смуг другого порядку $\nu_1 \pm \nu_{1r}$ з участю граткових коливальних мод ν_{1r} . Ця методична особливість нашої роботи дозволила вперше спостерігати граткові моди в рідкому стані речовини. Використання сучасного двопробеневого ІЧ спектрометра "Specord 80M" і майже гранично можливих часів накопичення сигналу в кожній спектральній точці (20-60 с), а також можливість регулювати інтенсивність ІЧ смуги поглинання вибором товщини кювети з рідиною, дозволили отримати рекордні по якості спектри поглинання рідкого CS_2 . Використовувались кювети з КВг фіксованої товщини. Френелівські втрати на зовнішніх гранях вікон кювет і поглинання в КВг компенсувались розміщенням плоскопаралельної пластинки з відповідною товщиною в каналі порівняння. Використання ІЧ спектроскопії на відміну від методу КР дозволяє проводити абсолютні виміри параметрів коливальних смуг. Вузкість смуги ν_1 ($\delta\nu_1 \sim 0,5 \text{ см}^{-1}$), яка визначалась з використанням інтерферометра Фабрі-Перо [16], аналогічна монохроматичності лазерів при нелінійному параметричному перетворенні частоти, приводить лише до незначного розширення коливальних смуг низькочастотних граткових мод ν_{1r} при спостереженні їх в області складових тонів. Це дозволило визначити параметри смуг граткових коливальних мод з достатньою точністю.

Спостережуваний спектр коефіцієнтів ІЧ поглинання рідкого CS_2 $\alpha(\nu) = -\ln T(\nu)/d$, де $T(\nu)$ - спектр пропускання, а d - товщина кювети, в області моди ν_1 і обертону $2\nu_2$ ілюструється рис.1а. На відміну від вузької смуги КР тут спостерігається широка асиметрична смуга складної форми. Ці смуги знаходяться між більш сильними в ІЧ поглинанні смугами ν_2 і ν_3 різницеvim тоном $\nu_3 - \nu_1 \sim 850 \text{ см}^{-1}$. Проводилося виділення досліджуваної смуги поглинання на фоні далеких крил більш сильних смуг і особливо більш близької смуги різницевого тону $\nu_3 - \nu_1$. Для цього фон апроксимувался поліномом з використанням максимального числа реперних точок в областях мінімального поглинання між досліджуваними смугами, як це показано пунктирною кривою на рис.1а. Шукана форма досліджуваної

смуги при цьому легко отримувалась в різницевому спектрі, який приведено на рис.1б. Тут же для порівняння показана та ж смуга ν_1 , отримана в спектрі спонтанного КР. Спектр КР реєструвався з використанням автоматизованого подвійного монохроматора ДФС-24 з охолоджуванним фотопомножувачем і схемою реєстрації, що працює в режимі лічби фотонів. У якості збуджуючого використовувалося лазерне випромінювання аргонного лазера з довжиною хвилі 514,5 нм і потужністю ~50 мВт. Смуга КР істотно вужча в порівнянні зі смугою ІЧ поглинання. Їх напівширини відрізняються майже в 60 разів. На низькочастотній стороні смуги КР спостерігається більш слабка смуга, що відповідає моді ν_1 ізотопозаміщеної молекули $C^{32}S^{34}S$ [13,14].

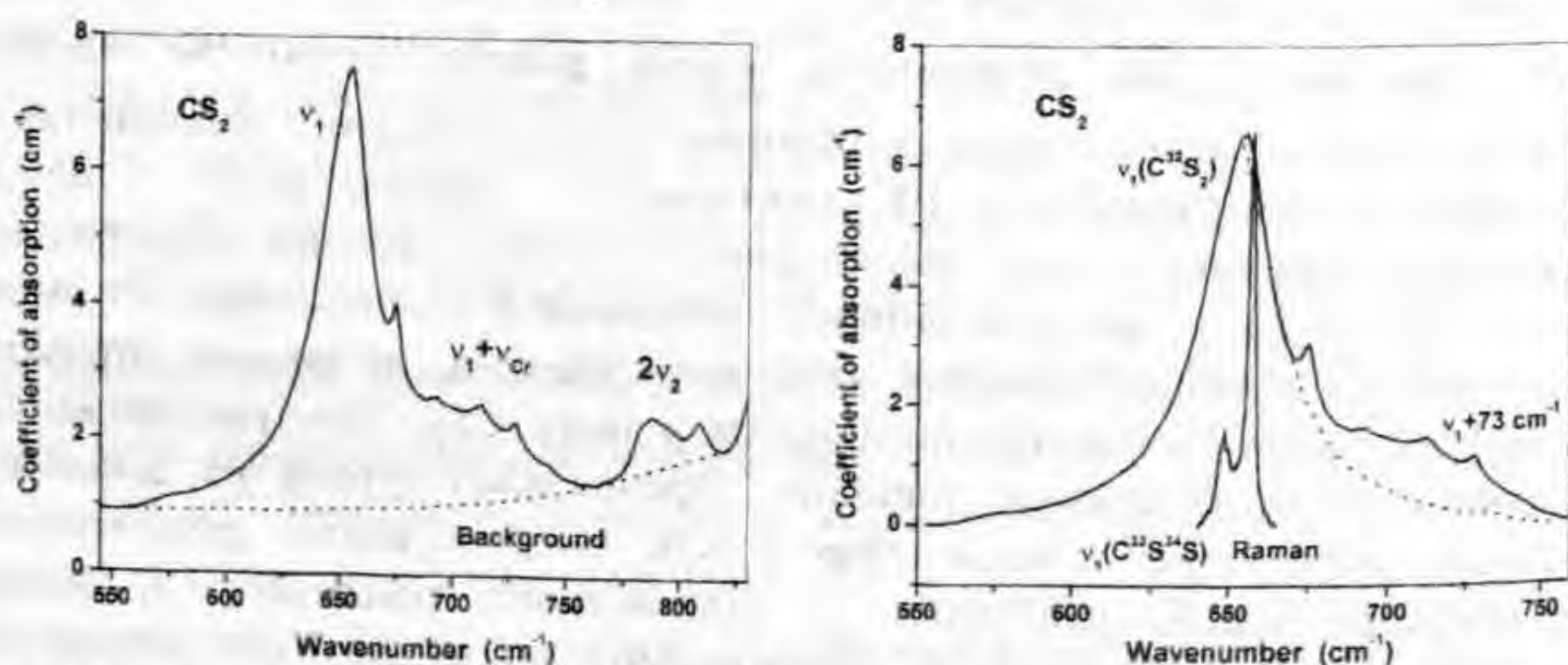


Рис.1 Виділення смуг ІЧ поглинання CS_2 в області повносиметричної моди ν_1 і обертопу деформаційної моди $2\nu_2$ на фоні далеких крил більш сильних смуг (а) і порівняння віділених смуг поглинання і раманівського розсіяння, а також виділення спектру сумарних тонів $\nu_1 + \nu_{cr}$ на крилі смуги ν_1 (б).

Можна було б думати, що дуже велика ширина смуги ІЧ поглинання ν_1 може бути обумовлена малим часом життя асоціативних молекул, існування яких приводить до порушення точних правил добору і спостереженню "заборонених" смуг. Однак така точка зору недолуга з декількох причин. Насамперед слід зазначити, що широкі заборонені смуги ν_1 і ν_2 відповідно в ІЧ і КР спектрах мають істотно різні форми і напівширини. Досліджувана в цій роботі ІЧ смуга ν_1 має напівширину 28 cm^{-1} , а аналогічна КР смуга ν_2 має істотно більшу напівширину 112 cm^{-1} . Спостережувана смуга поглинання ν_1 має сильно асиметричну форму з рядом добре виражених характерних високочастотних максимумів, які як буде показано відповідають характерним гратковим модам кристалу. Крім того для багатьох рідин, у тому числі і для CS_2 , доведено існування більш вузьких поперечних і поздовжніх компонентів найбільш сильних у ІЧ поглинанні смуг, обумовлених існуванням колективних властивостей рідин [2-9]. І нарешті в експериментах по ВКР [2-5] і гіперкомбінаційному розсіянні

відповідають сумарним тонам 3-го порядку з участю граткових коливальних мод $\nu_1 + \nu_2 + \nu_{cr}$. Зміщення бокових смуг в cm^{-1} відносно максимуму смуги $\nu_1 + \nu_2 = 1036 \text{ cm}^{-1}$ вказані на рис.2б. Більшість з них відповідають частотам граткових мод, виявлених в області смуги ν_1 . Правильність запропонованої інтерпретації численних особливостей спектрів рідин підтверджується винятково точною відповідністю частот граткових коливальних у високочастотній області рідкого стану коливальним модам кристалів при низьких температурах.

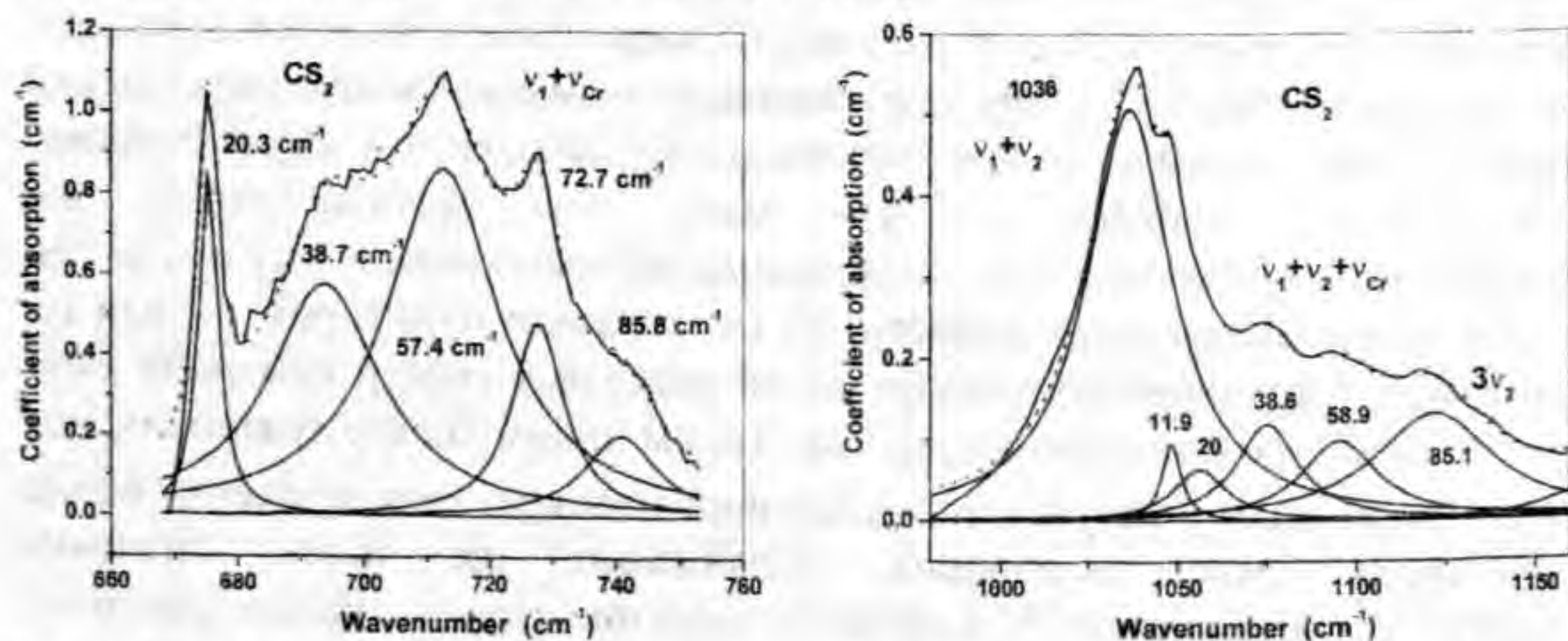


Рис.2.а,б Розкладання на елементарні компоненти гауссової форми виділених спектрів поглинання сумарних тонів 2-го $\nu_1 + \nu_{cr}$ і 3-го порядків $\nu_1 + \nu_2 + \nu_{cr}$ з участю граткових мод рідкого CS_2 .

Обговорення результатів і висновки

Отримані результати показують повну відповідність спостережуваних граткових мод рідин в високочастотній області низькочастотним модам кристалів. Вкажемо також, що інтенсивності двох лібраційних смуг в ІЧ спектрі рідкого CS_2 (див. рис. 2а) дуже добре відповідають співвідношенню їх інтенсивностей в КР спектрі кристалу при низьких температурах [15], що не залишає сумнівів у їх відповідності.

Характерною рисою проведених спектральних досліджень граткових мод рідкого стану речовини в області складених тонів є відсутність різницевих смуг $\nu_1 - \nu_{cr}$. Відомо, що різницеві смуги в коливальних спектрах виникають у результаті оптичних переходів з термічно збуджених низькочастотних коливальних мод типу ν_{cr} у більш високочастотні енергетичні стани, наприклад, внутрішньомолекулярні коливання ν_1 . Уже при температурах порядку 77 К термічної заселеності граткових мод кристалу CS_2 достатньо для спостереження різницевих смуг [14]. Однак при 18 К різницеві смуги в спектрі КР не реєструвалися, що вказує на недостатню величину термічного збудження вихідних

коливальних станів. У наших експериментах при кімнатних температурах термічної заселеності граткових коливань було б достатньо, тому що вони виявляються і при значно більш низьких азотних температурах. Отже негативний результат експериментів по спостереженню різницевих коливальних смуг в областях ν_1 і $\nu_1 + \nu_2$ вказує на відсутність низькочастотних станів граткових мод. У той же час спостереження смуг сумарних тонів, що відповідають переходам з початкового незбудженого стану в стани $\nu_1 + \nu_{1,2}$ і $\nu_1 + \nu_2 + \nu_{1,2}$, надійно вказує на прояви граткових коливальних мод у високочастотній області. Це являється однією з важливих нових квантових закономірностей некристалічного стану речовини, коли низькочастотні збудження граткових мод відсутні, але добре зберігаються складові цих мод в високочастотній області.

Дуже важливо, що в рідинах при високих температурах частоти граткових мод такі ж як і в кристалах, або навіть перевищують їх. В той же час згідно результатам роботи [15] частоти переходів між нижчими квантовими станами граткових мод плавно зменшуються з ростом температури, а їх напівширини швидко зростають. Поблизу температури плавлення швидкість зменшення частот граткових мод зростає і, наприклад, при 167 К частоти лібраційних мод 73 і 83 cm^{-1} зменшуються відповідно до 66,5 і 76 cm^{-1} . Спостереження ж фактично незмінних частот граткових коливальних мод в високочастотній області показує, що колективні властивості рідин підсилюються з ростом енергії збудження, в чому важливу роль може відігравати зменшення періоду коливань у відповідних станах. При цьому в високочастотній області рідин проявляються властивості, які характерні для кристалів при низьких температурах. Із порівняння частот поперечних і поздовжніх акустичних а також лібраційних мод CS_2 в твердому і рідкому станах видно, що в рідкому стані частоти трансляційних мод зменшуються, а частоти лібрацій трохи зростають. Це вказує на зменшення жорсткості структури рідкого CS_2 відносно зміщень молекул і збереження пружності відносно лібрацій молекул.

Надзвичайно важливою властивістю рідкого стану речовини є зростання нелінійності, що проявляється в суттєвому зростанні інтенсивностей смуг поглинання вищих порядків. В цій роботі це показано на прикладі коливальних смуг 2-го і 3-го порядків. Для кристалів характерний менший ангармонізм коливальних мод, що не дозволяє спостерігати в спектрах смуги вищого порядку. Зокрема нам невідомі роботи по спостереженню в коливальних спектрах кристалів граткових коливальних мод в смугах 3-го порядку. Несподіване відкриття існування граткових коливальних мод рідин в високочастотній області суттєво змінює уявлення про рідкий стан речовини і відкриває нові перспективи вивчення їх властивостей. Відкриття цих незвичайних властивостей рідин вказує на можливість з'ясування ролі розчинника в протіканні хімічних і

біохімічних реакцій і показує можливість створення наукових основ сучасної біології і медицини, що веде до інтеграції природничих наук.

Список використаної літератури

1. Blatz L.A., Low-Frequency Raman Lines from Liquid Benzene Derivatives and other Organic Liquids// J.Chem.Phys. –1967- v.47, № 2- p.841-849.
2. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Природа частотно-угловой структуры излучения при ВКР в жидкостях// Доклады АН УССР, сер.А-1983.- № 4.- с.65-68.
3. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Антистоксово комбинационное рассеяние на поляритах в жидкости, индуцированное ВКР// Оптика и спектроскопия – 1986. - т. 60, № 6.- с. 1171-1174.
4. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В. Генерация возбужденных колебательных состояний при ВКР и полчритонный механизм релаксации в жидкостях// Оптика и спектроскопия – 1986.- т. 61, № 1.- с. 174-177.
5. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Федорченко А.М. Тонкая структура и аномальное уширение спектров при вынужденном комбинационном рассеянии// Сб."Физика жидкого состояния", Киев,- 1986.- вып. 14. - с. 41-54.
6. Корнієнко М.Є., Спостереження поздовжньо-поперечного розщеплення в спектрах комбінаційного розсіяння рідкого хлороформу//УФЖ – 2001.-Т.46, № 5- 6. - с.546-552.
7. Корнієнко М.Є., Низькочастотні колективні моди системи водневих зв'язків води.// УФЖ. – 2002.- Т.47, № 4. - с.361-364.
8. Денисов В.Н., Маврин Б.Н., Подобедов В.Б., Стерин Х.Е. Гиперкомбинационное рассеяние на поляритах в четыреххлористом углероде// Письма в ЖЭТФ – 1982. - т. 35, вып. 8.- с. 312-314.
9. Денисов В.Н., Маврин Б.Н., Подобедов В.Б., Стерин Х.Е. Гиперкомбинационное рассеяние и правила отбора по волновому вектору и матричному элементу в колебательных спектрах стекол и жидкости// ЖЭТФ -1983.- т. 84, вып. 4.- с. 1266-1278.
10. Сушинский М.М., Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов// М., Наука, 1969. - с.576.
- 11.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости// М., Наука, 1987. - с. 246.
- 12.Либов В.С., Перова Т.С. Низкочастотная спектроскопия межмолекулярных взаимодействий в конденсированных средах// Труды ГОИ, 1992.-т.81, вып.215.
13. Mitsuo Ito, Raman and Infrared Spectra of Crystalline Carbonyl Disulfide, // J.Chem.Phys.,- 1965 - v. 42, № 3 –p. 815.
14. Anderson A., Grout P.J., Leech J.W. and Sun T.S. Raman spectra of molecular crystals. Carbon disulphide// Chem. Phys. Lett. – 1973.- v.21, №1-

р.9-14.

15. Торгунков Н.Г., Невзоров Б.П., Николаенко П.Т., Сечкарев А.В., Изучение межмолекулярной динамики конденсированных состояний вещества методами колебательной спектроскопии// Изв. вузов. Физика - 1973.- № 4- с.105-108.
16. Clements W.R. and Stoicheff B.P. Raman Line widths for Stimulated Treshold and Gain Calculations// Appl. Phys. Lett. – 1968- v.12, № 8- p. 246-248.
17. Бобович Я.С., Борткевич А.В., О возможном влиянии на ВКР самофокусировки света за счет возбужденных колебательных состояний// Оптика и спектроскопия -1969.-Т.27, вып. 4.- с.689-691.
18. Бобович Я.С., Борткевич А.В., Крюков В.В., Спектры ВКР мелкокристаллических веществ при возбуждении сверхкороткими импульсами рубинового лазера// Оптика и спектроскопия -1971.-Т.30, вып. 2. - с.257-259.
19. Андреев Р.Б., Бобович Я.С., Борткевич А.В., Волосов В.Д., Аномальное поведение антистоксова ВКР // Оптика и спектроскопия -1976.-Т.41, вып. 4.- с.684-685.
20. Петров В.И., Бобович Я.С., О генерации ВКР в неидеальных кристаллах// Оптика и спектроскопия.-1980.-Т.48, вып. 3.- с.536-541.
21. Карпенко С.Г., Корниенко Н.Е., Стрижевский В.Л., О нелинейной спектроскопии инфракрасного диапазона при использовании расходящейся и немонахроматичекой накачки// Квантовая электроника, Москва –1974.- т.1, № 8.- с. 1768-1779.
22. Корниенко Н.Е., Пространственная эволюция амплитуд волн, устойчивость решений и бифуркации при генерации суммарных и разностных частот в условиях двухфотонного резонанса// Квантовая электроника, Москва – 1985.- т.12, №8.- с.1595-1601.
23. Dolinchuk S.G., Kornienko N.E., Zadorozhnyi V.I, Noncritical vectorial phase matchings in nonlinear optics of crystals and infrared up-conversion// Infrared Physics. Technol. – 1994.- 35, No.7.- pp.881-895.
24. Creighton J.A. and Sinclair T.J., Further observations on the effects of dilution and change of temperature on the Raman spectra of liquid SiCl_4 and CS_2 // Spectrochim Acta – 1973. - v.29A, № 5 –p.817-820.
25. Ribnikar S.V. and Puzic O.S., The infrared spectrum of carbon disulphide in liquid and dissolved states: anharmonicity of the carbon disulphide molecule in the liquid// Spectrochim Acta – 1973.- v.29A, № 2 –p.307-317.
26. S.Ikawa and E.Whalley, Polarized and depolarized Raman spectra of liquid carbon disulfide in the pressure range 0-10 kbar. I. Vibration frequensis C-S bond length and Fermi resonance// J.Chem.Phys. -1986, v.85, № 5, p. 2538-2547.

Надійшла до редколегії 20.01.05.

Лоза Є.А.*

Обчислення оптичних сталих за допомогою перетворення Крамерса-Кроніга

Еліпсометрія, не зважаючи на високу вартість поляризуючих призм, малий спектральний інтервал та складний механізм автоматизації вимірювань, є одним з найточніших методів визначення оптичних сталих. Альтернативою може бути відносно дешевий, але менш точний метод, оснований на перетворенні Крамерса-Кроніга в широкому робочому спектральному діапазоні вимірювань.

В даній роботі розглядаються шляхи підвищення точності перетворення Крамерса-Кроніга, що можливо завдяки потужності сучасних комп'ютерів; проведена оцінка впливу експериментальної похибки на кінцеву похибку; подаються шляхи уточнення методу відкритих квадратур; знайдено можливість обчислення оптичних сталих для випадку, коли плазмова частота знаходиться за межами експериментального діапазону.

Ключові слова: перетворення Крамерса-Кроніга, формула відкритих квадратур, екстраполяція коефіцієнта відбивання.

1. Підвищення точності чисельної реалізації співвідношення Крамерса-Кроніга

Зазвичай перетворення Крамерса-Кроніга записують для дійсної та уявної частини діелектричної проникності [1], але оскільки на практиці вимірюється спектр відбивання зразка, краще перейти до коефіцієнта відбивання R та фази θ [2] для випадку нормального падіння. Для інших випадків потрібно враховувати поляризацію падаючого світла і задача значно ускладнюється з точки зору виконання експерименту. Тоді величини оптичних сталих визначаються за співвідношеннями [2]:

$$n = \frac{1 - R}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}, \quad (1)$$

Eugene A. Loza*

Optical constants determination using Kramers-Kronig transform

Ellipsometry is one of the most accurate methods of optical constants determination. This method is very expensive and difficult in automatisation. An alternative is method, based on Kramers-Kronig transform. It has wide spectral range, but low accuracy.

In this work we consider opportunity to increase accuracy of Kramers-Kronig transform, possible with aid of modern computers. We also give estimates for error in calculated values and ways of open quadrature formula accuracy increase due to integrand peculiarities consideration. There is also a possibility to calculate optical constants accurately when plasma frequency is beyond the bounds of experimental range.

Key Words: Kramers-Kronig transform, open quadrature formula, reflectance extrapolation.

*E-mail: LozaE@ukr.net

$$k = \frac{2\sqrt{R} \sin \theta}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}, \quad (2)$$

де n – показник заломлення, k – показник поглинання.

В класичному варіанті співвідношення Крамерса-Кроніга [2] для величин R та θ має вид:

$$\theta(w_0) = -\frac{w_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln[R(w)]}{w^2 - w_0^2} dw, \quad (3)$$

де w та w_0 – величини пропорційні частоті, $\pi = 3.14...$ Інтеграл (3) береться у розумінні головного значення Коші. В [3] запропоновано модернізацію формули (3) для усунення розбіжності у підінтегральній функції при $w = w_0$, для чого від (3) необхідно відняти $\ln(R(w_0)) \cdot \int_0^\infty \frac{1}{w^2 - w_0^2} dw = 0$, в результаті чого отримаємо:

$$\theta(w_0) = -\frac{w_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} dw, \quad (4)$$

де невизначеність у підінтегральній функції усувається за допомогою метода Лапласа. Виходячи з того, що аналітичний вигляд функції $R(w)$ невідомий, точку $w = w_0$ потрібно пропустити при розрахунках. Така заміна збільшує точність отриманих результатів в наслідок того, що функція $(w^2 - w_0^2)^{-1}$ є дуже "гострою" і значення інтеграла (4) визначаються в основному близьким okolом точки w_0 . Функція $\ln(R(w)/R(w_0))$ в околі точки w_0 близька до нуля, а, отже, значення частин інтегралу до і після w_0 зменшаться при незмінному значенні всього інтегралу, а додавання менших величин зменшить чисельні похибки.

Похибки у значення θ вносяться експериментальними похибками величини R . Якщо подати R у вигляді $R(w) = R_m(w) + \delta R(w)$, де $R_m(w)$ - значення коефіцієнта відбивання для якого перетворення Крамерса-Кроніга виконується точно, а $\delta R(w)$ - похибка величини R , то для похибки величини θ отримаємо наступне співвідношення:

$$\Delta\theta(w_0) \sim \delta R(w_0) / R_m(w_0). \quad (5)$$

Похибки, викликані похибками апроксимації коефіцієнта відбивання за межами експериментального діапазону, можуть бути знайдені шляхом обчислення інтегралу (4) від апроксимаційних функцій з додаванням чи відніманням відповідних похибок.

Інтеграл типу (4) від експериментально-визначеної функції $R(w)$ можна обчислювати за допомогою адаптованого методу відкритих квадратур, використовуючи метод порядку від 3 до 8. Вихід за межі цього інтервалу призводить до зменшення точності. Також варто додати до набору функцій, за якими будується метод відкритих квадратур, ще дві функції: $(w^2 - w_0^2)^{-1}$ та $\ln(w) \cdot (w^2 - w_0^2)^{-1}$. Точне значення інтегралу від цих функцій отримується розкладанням підінтегральної функції в ряд Маклорена. Відмітимо, що в роботі [4] було запропоновано використовувати метод Фур'є-перетворення, який є

значно швидший ніж метод відкритих квадратур, однак він має меншу точність.

2. Апроксимації коефіцієнта відбивання

Для точного обчислення інтегралу (4) необхідно мати значення коефіцієнта відбивання в інтервалі частот $[0; \infty)$. На жаль, це неможливо принципово, отже, потрібно користуватись певними наближеннями.

В високоенергетичній ділянці для спектрального відбивання R існує проста і точна апроксимація [3]:

$$R(w) \approx R(w_2) \cdot w_2^4 \cdot w^{-4}; w > w_2 > w_p, \quad (6)$$

де w_p – частота плазмових коливань, яка для більшості речовин має величину порядку 20eV, w_2 – верхня межа експериментального діапазону.

Точність апроксимації можна ще підвищити завдяки використанню логарифмічної прямої:

$$\ln[R(w)] \approx a + b \ln(w), \quad (7)$$

де a і b – параметри прямої, отриманої методом найменших квадратів. Для всіх зразків показник степеня при w в співвідношенні (6), тобто b , близький до теоретичного значення -4 (табл. 1).

Аналіз спектрів відбивання багатьох зразків в інфрачервоній області показує, що з непоганою точністю можна апроксимувати спектр відбивання логарифмічною прямою. Слід додати, що в цьому випадку b прямує до нуля.

Іноді важливо отримати значення оптичних сталих, коли верхня межа експериментальних даних не досягає значення плазмової частоти. В цьому випадку можна використати ту ж саму формулу (7). З загальних міркувань величина b обмежується тим, що вона повинна бути лише від'ємною. В протилежному випадку показник відбивання при збільшенні частоти не матиме фізичного змісту. Після досягнення плазмової частоти слід змінити b на -4. Якщо величина w_p невідома, то її потрібно оцінити.

Розрахунки інтегралів від апроксимуючих функцій займають досить багато часу. Для того, щоб значно збільшити швидкість та точність чисельних розрахунків були розроблені "правила сумування" [3]. Для цього в інтеграл (4) слід підставити апроксимуючу функцію (7), в результаті чого отримаємо:

$$I = -\frac{w_0}{\pi} \int_{w_1}^{w_2} \frac{\tilde{a} + b \ln w}{w^2 - w_0^2} dw, \quad (8)$$

$$\tilde{a} = a - \ln[R(w_0)].$$

Інтеграл (8) не береться в елементарних функціях, взяти його можна, якщо розкласти підінтегральну функцію в ряд Тейлора. Для цього потрібно розглянути три випадки:

Табл. 1. Значення параметра b для різних зразків

Зразок	Значення b
Al	- 4,00285
Au	- 4,04733
Cu	- 4,00997
Si	- 4,00878
SiO ₂	- 4,00023

$w_0 \in (w_1; w_2)$, $w_0 < w_1$ та $w_0 > w_2$. У випадку $w_0 = w_1$ або $w_0 = w_2$ інтеграл (8) є розбіжним.

3. Порівняння точності обчислення оптичних сталих та її залежність від ширини спектрального інтервалу

Отримані нами результати показують, що при наявності детальних експериментальних даних в широкому спектральному інтервалі, точність визначення показника заломлення перевищує точність обчислення показника поглинання, іноді на декілька порядків. Пояснити цей факт можна тим, що показник поглинання (2) пропорційний синусу величини θ , в яку входять всі похибки чисельних обчислень і апроксимацій, а показник заломлення (1) пропорційний величині R , для якої властиві лише експериментальні похибки.

Для опису ширини спектрального інтервалу введемо величину $Sw = |\lg(w_{\max}/w_{\min})|$, де $w_{\max}$ та $w_{\min}$ – відповідно верхня та нижня межа експериментального спектрального інтервалу, виражена в одиницях, пропорційних частоті.

Чим більше значення Sw , тим вища точність визначення оптичних сталих. Бажано мати Sw близько величини 2.5 і навіть більше (рис.1). У випадку, коли величина Sw невелика, падає точність як показника заломлення так і показника поглинання. Причому, точність обчислення показника заломлення стає меншою, ніж точність обчислення показника поглинання. При зменшенні Sw до величин менших за одиницю, визначення показника заломлення за даним методом стає неможливим, а точність обчислення показника поглинання, хоч і дуже чутлива до точності апроксимації, залишається досить непоганою, але при обчисленнях іноді виявляються "хибні" смуги пропускання (рис.2), які не спостерігаються експериментально.

4. Висновки

4.1. Показано можливість збільшення точності величин оптичних сталих, отриманих за допомогою перетворення Крамерса-Кроніга. Перехід від класичної формули (3) до виразу (4) збільшує точність у на порядок на межі експериментального діапазону, а також дає змогу усунути розбіжність інтегралу (3). Більш точна апроксимація коефіцієнта відбивання дозволяє збільшити точність, іноді, в десятки разів.

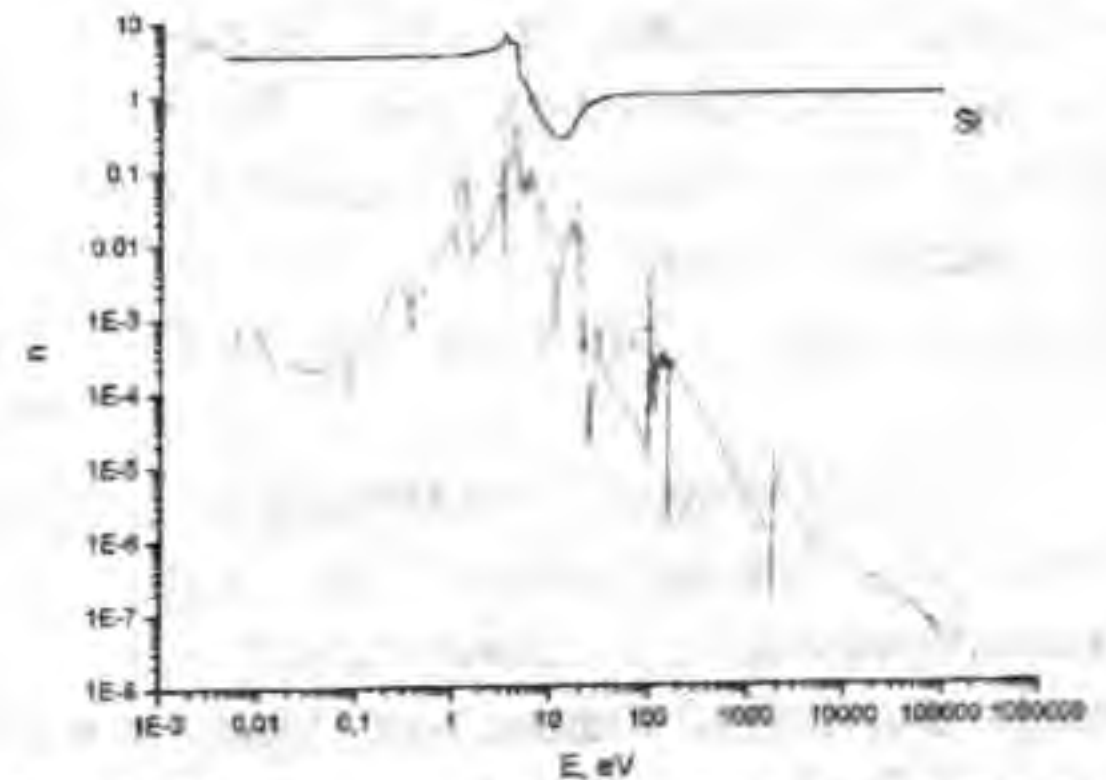


Рис.1. Показник заломлення для кристалічного Si ($SW=7.4$). Суцільна лінія – експериментальні дані, пунктир – похибки розрахункової формули

Для виконання перетворення Крамерса-Кроніга зазвичай застосовується інтегрування за методом трапецій або метод Фур'є-перетворення. Використання методу відкритих квадратур порядку 3 - 8 дозволяє збільшити точність розрахунків майже на 50%. За рахунок обчислення інтегралу (8) у вигляді ряду Маклорена, вдалося підвищити точність на 0,2% та зменшити час розрахунків у $2 \cdot 10^6$ раз.

4.2. Похибка визначення інтеграла Крамерса-Кроніга від експериментально-визначеного

коефіцієнта відбивання має порядок відносної експериментальної похибки.

4.3. Додаткове збільшення точності обчислених величин можна досягти, якщо проводити комп'ютерні розрахунки з підвищеною кількістю знаків після коми. До набору функцій, на яких будується метод відкритих квадратур варто додати ще 2 функції, які враховують особливості підінтегральної функції $(w^2 - w_0^2)^{-1}$ та $\ln(w) \cdot (w^2 - w_0^2)^{-1}$.

4.4. Спектр відбивання у області великих частот має багато ділянок, що добре описуються степеневим законом. Причому важливим є те, що коефіцієнт b , що визначає кут нахилу логарифмічної прямої, набуває значення $b = -4$ лише на частотах, що на порядок перевищують плазмову, а точніше 400eV або 10^{17} Hz, що не відповідає класичній теорії і потребує додаткового з'ясування.

Подяки

Автор висловлює свою подяку науковому керівнику проф., д.ф.-м.н., Л.В.Поперенко за допомогу та підтримку при виконанні цієї роботи, а також за надані таблиці оптичних сталих зразків. Також автор вдячний д.ф.-м.н. В.М.Вашенко за допомогу при написанні даної роботи.

1. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М:Наука, 1982, с.389
2. Kramers-Kronig Transform. Thermo-galactic algorithms. www.galactic.com.
3. D.L. Greenaway, G. Harbeke Optical properties and band structure of semiconductors. Pergamon press, 1968.
4. Kramers-Kronig Transform and Applications obtained. Shimadzu Corporation. C103-E031. Spectrophotometric analysis. No. A228.
5. Кравец В.Г. «Температурные зависимости дисперсии оптических характеристик аморфных сплавов на основе железа» // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. г.Киев 1990г.

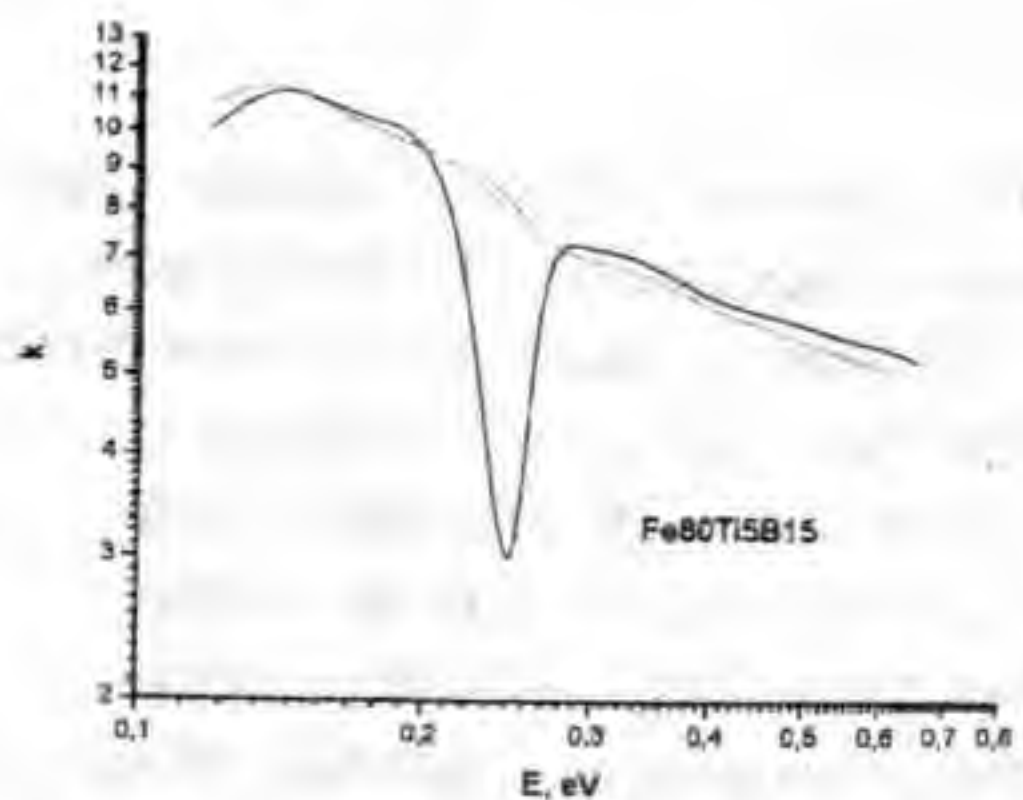


Рис.2. "Хибна" смуга пропускання для аморфного сплаву $\text{Fe}_{80}\text{Ti}_5\text{B}_{15}$. $\text{SW}=0.8$ [5]
пунктир – експериментальні дані

Надійшла до редколегії 11.01.2005

РЗС не була позбула суттєвих недоліків. Так у цій моделі кожен іон моделювався зарядженою сферою, потенціал всередині якої, без врахування потенціалу, створеного усіма іншими іонами решітки, вважався постійним і рівним значенню потенціалу на її поверхні. Такий розподіл потенціалу відповідає ситуації, коли весь заряд іона сконцентрований на його поверхні. Але зрозуміло, реальний розподіл заряду іона зовсім інший. Крім того в моделі РЗС знехтувалось "пустими" областями між зарядженими сферами, тоді як ці області займають майже половину об'єму решітки. Також як недолік моделі РЗС можна зазначити врахування тільки першої гармоніки змінної складової потенціалу решітки, тоді як гармоніки більшого порядку можуть також мати значний вклад у потенціал решітки.

Щоб позбутися недоліків, присутніх в моделі РЗС, в даній роботі запропоновано нову модель поля решітки. В цій моделі враховується реальний розподіл електронної густини іонів решітки, який апроксимується функцією типу

$$\rho_i(r) = A_i(1 - \exp(-b_i r^2)) \exp(-c_i r), \quad (1)$$

де індекс i відповідає аніону чи катіону. Параметри функції апроксимації (1) для іонів Cl^- та K^+ наведено у таблиці 1.

Табл. 1.

Параметри A_i , b_i та c_i функції апроксимації розподілу електронної густини (1) та середні значення потенціалів U_{sra} та U_{srk} по об'єму комірки для аніону Cl^- та катіону K^+ .

	C_i	b_i	a_i	U_{sra} (a.o.e.)
Аніон Cl^-	-16.56126	1511.35152	0.9	-0.0389
Катіон K^+	-22.60685	1655.18114	1.22946	0.6215

Знаючи розподіл електронної густини $\rho_i(r)$ іонів решітки можна обрахувати потенціал $U_i(r)$, створений кожним іоном решітки:

$$U_i(r) = - \int_0^r \left(\int_0^r \rho_i(r) dr \right) / r^2 dr + Z_i / r. \quad (2)$$

У формулі (2) перший доданок відповідає потенціалу, створеному електронною оболонкою, а другий – потенціалу, створеному ядром іона; Z_i – заряд відповідного іона (надалі, як і у (2), використовується атомна система одиниць).

Припустимо, що кожен іон решітки займає кубічну комірку, з ребром рівним півперіоду решітки $d = (r_a + r_k)$ (r_a та r_k – радіуси аніону та катіону відповідно). Комірки розташовані в просторі так, що центр кожної комірки припадає на ядро іона, який цю комірку займає. Тоді середнє

значення потенціалу відповідного іона по об'єму комірки, яку він займає, можна обчислити за допомогою формули

$$U_{sri} = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} U_i(x,y,z) dr/d^3 \quad (3)$$

Середнє значення потенціалу по об'єму всього кристалу U_{sr} буде рівним середньому арифметичному з середніх значень потенціалів створених аніоном U_{sra} та катіоном U_{srk} по об'єму комірок, які вони займають:

$$U_{sr} = (U_{sra} + U_{srk})/2. \quad (4)$$

Необхідно зазначити, що при обрахуванні в такий засіб середніх значень потенціалів не знехтується "пустими" областями між іонами, як це робилось у моделі РЗС. Значення U_{sra} та U_{srk} наведені у таблиці 1.

Крім потенціалу U_{sr} необхідно врахувати потенціал $U_m(x,y,z)$, створений в комірці усіма іонами решітки, крім іона, який цю комірку займає.

Потенціал, створений усіма іонами решітки, крім найближчого, в центрі комірки буде дорівнювати потенціалу Маделунга U_{m0} для даного типу решітки (для решітки КСІ $U_{m0}=0.2945$). Для того щоб знайти значення потенціалу $U_m(x,y,z)$ на деякій відстані від ядра, необхідно обрахувати суми, аналогічні до тих, за допомогою яких розраховується потенціал Маделунга. Такий розрахунок був проведений і він показав, що відхилення потенціалу $U_m(x,y,z)$ від потенціалу Маделунга в межах кубічної комірки не перевищує 10%. Виходячи з того можна вважати потенціал $U_m(x,y,z)$ по об'єму комірки постійним і рівним потенціалу Маделунга, взятим з відповідним знаком.

Знаючи значення потенціалів U_m та U_{sri} можна записати вираз для ефективного потенціалу решітки U_{lat} у вигляді

$$U_{lat}(x,y,z) = ((U_{sra} - U_{srk})/2 + U_{m0}) \cdot (-1)^n - U_{sr}, \quad (5)$$

де

$$n_x = \text{round}(x/d), \quad (6)$$

$$n_y = \text{round}(y/d), \quad (7)$$

$$n_z = \text{round}(z/d), \quad (8)$$

$$n = n_x + n_y + n_z. \quad (9)$$

Число n_x позначає номер комірки, у яку потрапить точка $(x,0,0)$, рахуючи від комірки, яку займає іон активатора, чий номер нульовий. Аналогічний зміст мають числа n_y і n_z . Функція $\text{round}(x/d)$ округляє число x/d до його найближчого цілочисельного значення. Осі координат спрямовані уздовж

кристалографічних осей 4 -го порядку, початок координат – у центрі комірки, зайнятої іоном активатора.

Так як при обрахуванні радіальних хвильових функцій необхідно мати сферично симетричний потенціал, усереднимо потенціал (5) по сфері

$$U_{av}(r) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U_{lat}(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi / 4\pi. \quad (10)$$

Слід зазначити, що в обрахованому в такий засіб потенціалі, на відміну від моделі РЗС, враховуються всі гармоніки змінної складової потенціалу.

Для спрощення розрахунків потенціал (10) був апроксимований функцією

$$U_L(r) = -0.58578 / (1 + \exp((r - 3.65487) / (-0.31721))) + 0.2945. \quad (11)$$

Відхилення потенціалу U_{av} від результату його апроксимації функцією U_L не перевищує 5%.

При розрахунку радіальних хвильових функцій іона Tl^{+3} використовувалась така ж методика, як і у [7,9]. Для цього розв'язується система рівнянь Хартрі (12)-(16) з врахуванням потенціалу решітки $U_L(r)$ (11):

$$Z'_i = P'_i, \quad (12)$$

$$Y' = (Y - Z + \sum h_i Z'_i - 13) / r, \quad (13)$$

$$Y'_i = (Y_i - Z_i) / r, \quad (14)$$

$$W'_i = (\varepsilon_i + l_i(l_i + 1) / r^2 - 2(Y + Y'_i - St) / r) P_i - 2U_L P_i, \quad (15)$$

$$P'_i = W_i, \quad (16)$$

де значення i відповідають електронним оболонкам з різним значенням l_i ; l_i - орбітальне квантове число; h_i - кількість електронів в i -тій оболонці; ε_i - подвійне власне значення енергії i -того електрона; P_i - радіальна хвильова функція відповідного електрона; Y_i та Z_i мають зміст ефективного заряду i -тої електронної оболонки для потенціалу та напруженості відповідно; Y має зміст ефективного заряду для потенціалу іона Tl^{+3} ; $Z+13$ - величина, обрахована за даними роботи [10], за допомогою якої враховується ефективний заряд ядра та внутрішніх електронів іона талію. Функції у рівняннях (12)-(16) відповідають наступним граничним умовам: $Y(0)=81$, $Y_i(0)=0$, $Z_i(0)=0$, $Y_i(\infty)=1$, $Z_i(\infty)=1$, $P_i(\infty)=P_i(0)=0$, $Y(\infty)=N_{ion}$, де N_{ion} - ступінь іонізації іона. Радіальна хвильова функція P_i в області $0 < r < \infty$ повинна мати $n_i - l_i - 1$ вузол.

Потенціал U_m створюється усіма іонами решітки, окрім найближчого. Він також враховує потенціал створений іоном талію на відстанях, що перевищують його радіус. Тому з ефективного заряду іона

талію треба відняти одиницю, якщо $r > r_{ion}$ (r_{ion} – радіус іона активатора). Ця обставина врахована за допомогою введення ступінчатої функції St в (26):

$$St = \exp(-\ln 2 \exp(-b(r - r_{ion}))). \quad (17)$$

Параметр b обрано рівним 2, що відповідає швидкості зміни електронної густини іони при $r \approx r_{ion}$.

У такий засіб було розраховано радіальні хвильові функції d -електронів вільного трьохвалентного іона талію та у решітці KCl у основному $5d^{10}$ стані та радіальні хвильові функції d - та p -електронів цього ж іону у збудженому $5d^9 6p$ стані. Результати розрахунків представлено на рис.1. Власні значення енергії указані в таблиці 2.

Табл.2.

Подвійні власні значення енергії ϵ_d d -електронів конфігурації $5d^{10}$, ϵ_p p -електронів конфігурації $5d^9 6p$ та ϵ_f f -електронів конфігурації $5d^9 5f$ вільного трьохвалентного іона талію та іона у оточенні решітки KCl.

	ϵ_d	ϵ_p	ϵ_f
KCl	2.240	1.438	1.087
Vacuum	3.153	1.956	1.037

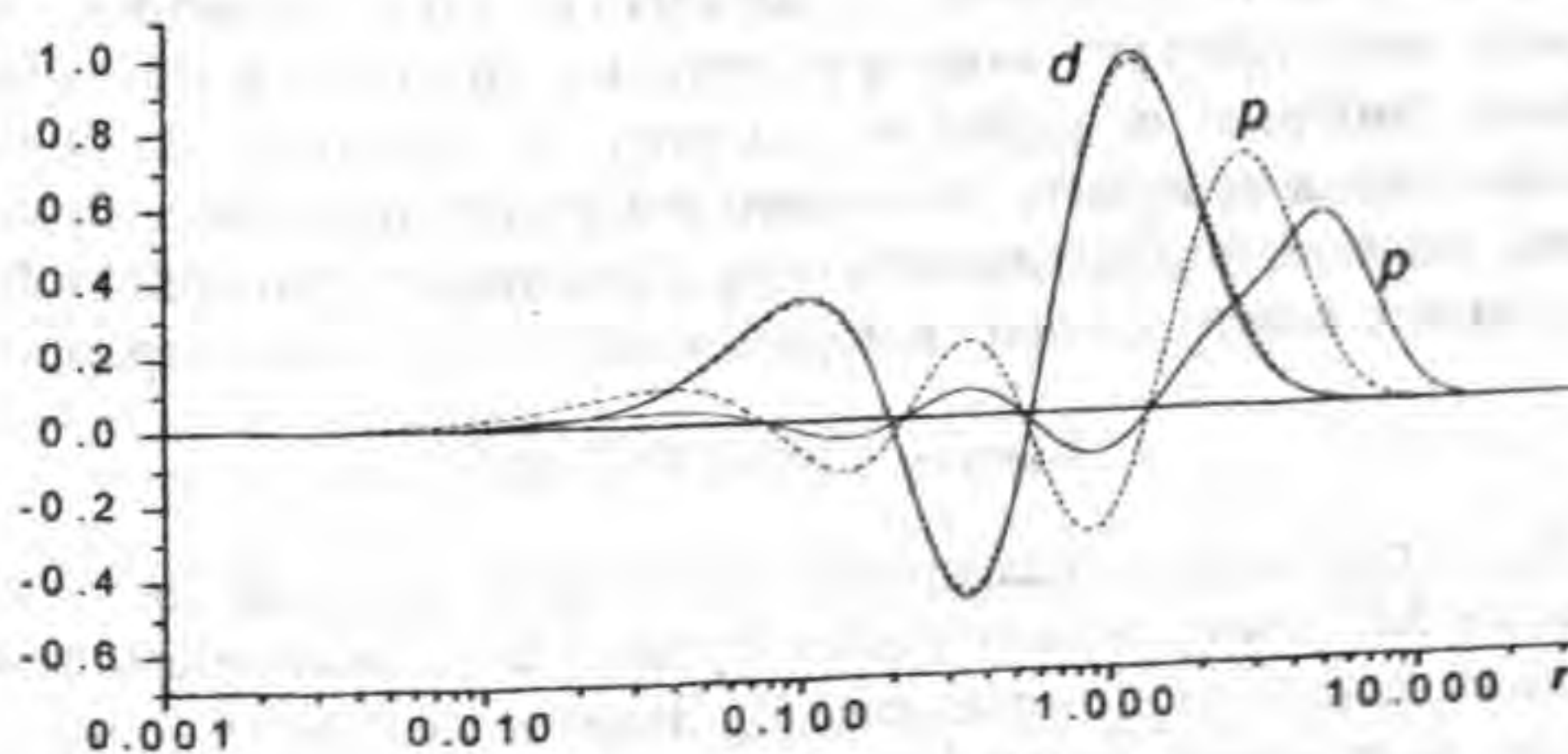


Рис.1. Радіальні хвильові функції d та p електронів вільного (пунктир) та у решітці KCl (суцільна лінія) трьохвалентного іона талію у збудженому $5d^9 6p$ стані.

Можна зазначити, що радіальні хвильові функції d – електронів вільного іона та іона в оточенні решітки KCl практично співпадають. Можна зауважити, що такий збіг радіальних хвильових функцій існує в усіх розрахованих станах як і у трьохвалентного, як і у одновалентного

іона талію (тому не було представлено на рисунках радіальні хвильові функції d - електронів іона у основному $5d^{10}$ стані – вони співпадають з відповідними функціями стану $5d^9 6p$). Це дає змогу зробити висновок, що радіальна хвильова функція d – електронів не чутлива ні до зміни конфігурації зовнішньої електронної оболонки, ні як до зміни оточення, ні як до зміни ступеню іонізації іону талію.

Така поведінка радіальних хвильових функцій d - електронів дає змогу спростити розрахунок хвильових функцій інших електронів.

Так як радіальна хвильова функція $5d$ - електронів майже не змінюється при переході від однієї конфігурації до іншої, то логічним було б допустити, що не змінюється і ефективний потенціал, який створюється цими електронами. В такому випадку знайшовши цей потенціал та знаючи потенціал, який створюється внутрішніми електронами, можна знайти ефективний потенціал для електрона, радіальну хвильову функцію якого хочемо знайти. Для знаходження радіальної хвильової функції, в цьому випадку, замість системи рівнянь Хартрі достатньо розв'язати просто рівняння Шредінгера, що значно спростить розрахунки.

Ефективний потенціал, створений усіма електронами іона у основному $5d^{10}$ стані, дорівнює відношенню ефективного заряду для потенціалу іона до відстані від ядра. Цей потенціал включає до себе потенціал всіх десяти d - електронів. В той час як на справді електрон, який перейшов у збуджений стан, рухається у полі дев'яти d - електронів. Тому з ефективного заряду для потенціалу іона потрібно відняти ефективний заряд для потенціалу одного d - електрона. Крім сказаного, потрібно врахувати член $l(l+1)/r^2$, який з'являється у виразі для потенціалу при розділенні змінних на радіальну частину та сферичні гармоніки. Ще необхідно також врахувати потенціал, створений решіткою. Враховуючи все вище сказане, можна записати вираз ефективного потенціалу U_{eff} для j -го збудженого електрона при "замороженому" остові d - електронів

$$U_{eff} = I_j(l_j+1)/r^2 - 2(Y + Y_d - St)/r - 2U_L. \quad (18)$$

При розрахунку радіальних хвильових функцій d - електронів основного $5d^{10}$ стану, можна знайти функції для ефективного заряду для потенціалу іона Y та d - електрона Y_d . Знаючи ці функції можна знайти функцію ефективного потенціалу за формулою (18) для того електрона, радіальні хвильові функції якого хочемо знайти. Розв'язавши звичайне одномірне рівняння Шредінгера для знайденого потенціалу ми і знайдемо шукані радіальні хвильові функції та власні значення енергії:

$$Z_i = P_i, \quad (19)$$

$$W_i = (\epsilon_i + U_{eff})P_i, \quad (20)$$

$$P_i = W_i, \quad (21)$$

де рівняння (19) відповідає за нормування хвильової функції, а рівняння (20)-(21) відповідають рівнянню Шредінгера.

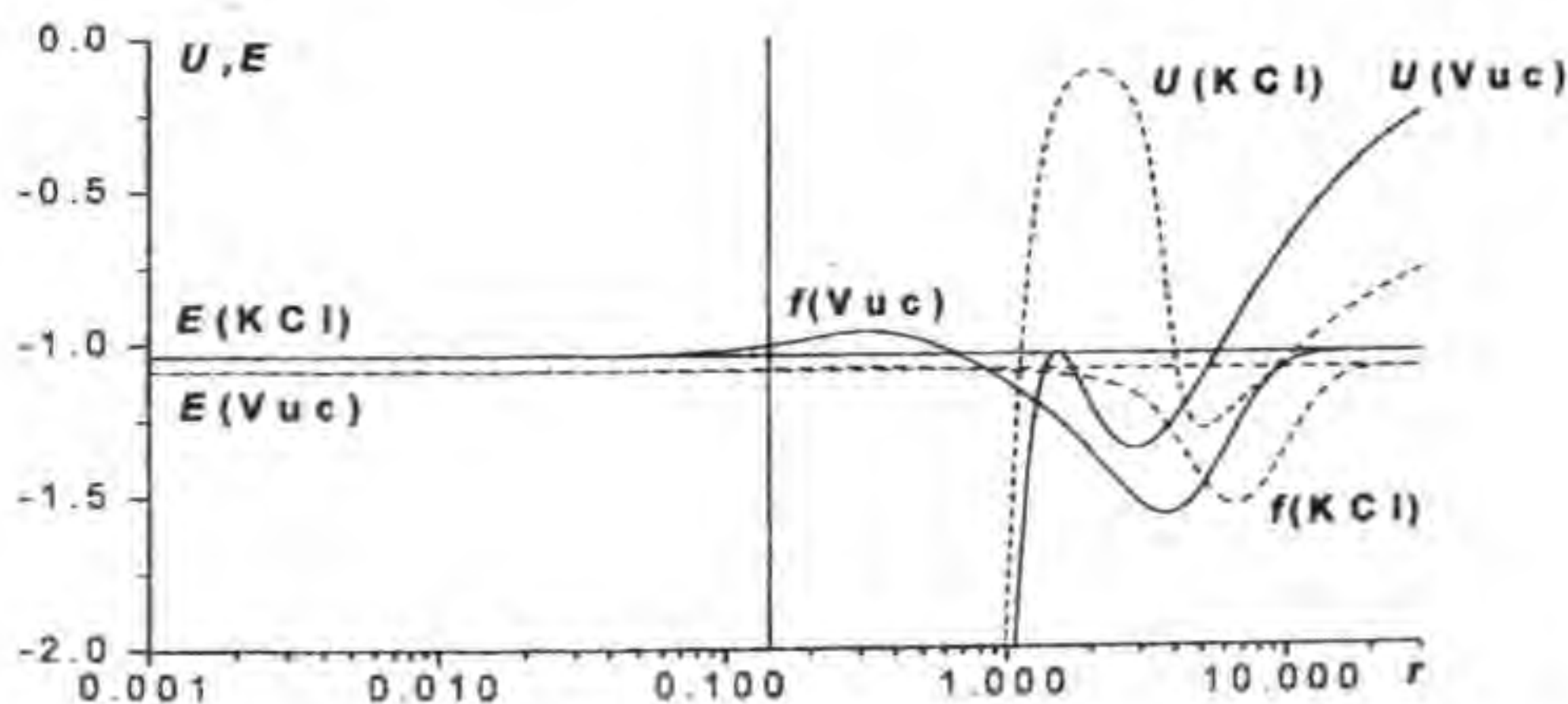


Рис.2. Радіальні хвильові функції, подвійний ефективний потенціал U та подвійний рівень енергії E для f - електрона вільного (суцільна лінія) іона Tl^{+3} та іона у решітці KCl (пунктир). За нуль відліку для хвильових функцій взято відповідні рівні енергії.

У такий спосіб, для перевірки методу, були розраховані радіальні хвильові функції та власні значення енергії $6p$ - електрону вільного трьохвалентного іону талію та іону у оточенні решітки KCl з конфігурацією зовнішньої електронної оболонки $5d^9 6p$ і були порівняні з результатами розрахунків за методом самоузгодженого поля. Радіальні хвильові функції розраховані у обидва способи практично повністю співпали. Різниця же у власних значеннях енергії проявляється лише у третьому знаку після коми.

За допомогою методу "заморожених" d - електронів було розраховано радіальні хвильові функції f - електронів. Результати розрахунку представлені на рис.2. Власні значення енергії подано у таблиці 2.

Проаналізуємо поведінку радіальних хвильових функцій вільного іона Tl^{+3} та у решітці KCl.

Як вже було зазначено вище, радіальні хвильові функції d - електронів майже не змінюються. Зовсім інакше поведуть себе радіальні хвильові функції p - та f - електронів. Для іона Tl^{+3} при упровадженні його у кристалічну решітку спостерігається зміщення хвильових функцій як p - так і f - електронів в бік великих r . Тобто явища колапсу у рамках запропонованої моделі не спостерігається.

Однак такий результат не остаточний, так як не враховано перекриття радіальних хвильових функцій зазначених електронів з хвильовими функціями іонів решітки, що призводить до утворення додаткового потенціалу відштовхування.

Література

1. Кристофель Н.Н. Теория примесных центров малых радиусов в ионных кристаллах// М.: Наука.-1974.-336с.
2. Белый М.У., Зеленский С.Е., Охрименко Б.А., Яблочков С.М., Взаимодействие центров люминесценции в калиево-боратном стекле с мощным лазерным излучением// Опт. и спектр., Т. 55, № 1, 1983, С. 78-82.
3. Белый М.У., Зеленский С.Е., Охрименко Б.А., Яблочков С.М. Люминесценция ртутеподобных ионов в стёклах при интенсивном возбуждении// Изв. АН СССР, сер.физ. Т. 49, №10, 1985, С. 2010-2014.
4. Белый М.У., Колесник А.С., Охрименко Б.А., Ящук В.П. Разгорание люминесценции комплексов свинца в замороженных растворах электролитов// ЖПС, Т.47, № 6, 1987, С. 924-930.
5. Білий М.У., Охріменко Б.А., Поглинання та люмінесценція галоїдних розчинів різновалентних іонів талію і олова// Укр. фіз. журн., Т. 6, 1961, С. 730-735.
6. Белый М.У., Биндюкевич В.Н., Колесник А.С., Охрименко Б.А., Ящук В.П. Анализ скрытой структуры спектров люминесценции и поглощения комплексов талію// ЖПС, Т.67, №1, 2000, С. 74-77.
7. Охріменко Б.А., Старков Д.Ю. Оцінка можливості колапсу електронної оболонки активаторного іона талію. //Вісник Київ. Унів. Сер. фіз.-мат. науки., 2003, №1, с.388-394.
8. Каразия Р.И., Коллапс орбиты возбужденного электрона и особенности атомных спектров// УФН,Т. 135, №1, 1981, С. 79-115.
9. Белый М.У., Охрименко Б.А. Влияние поля решётки неточечных ионов на радиальные волновые функции иона Tl^{+} // Изв. ВУЗов, Сер. Физика, Т. 38, №2, 1995, С. 42.-47.
10. Douglas A.S., Hartree D.R., Runciman W.A. Atomic wave function for gold and tallium. // Proc. Cambr. Soc.-1955.-v.51.-№4.-p.486-503.

Надійшла до редакції 20.01.2005.

УДК 532.5, 539.172.17

Гідродинамічна вихорова нестійкість ядерної матерії при зіткненнях високозбуджених важких ядер

Е.А. Пашицький, В.М. Мальнев,
Д.В. Анчишкін, Р.О. Нарішкін*

У роботі показано, що при ультра-релятивістських зіткненнях важких ядер з великими орбітальними моментами можливий розвиток гідродинамічної оберткової нестійкості, яка повинна проявитися в розподілах вилітаючих продуктів ядерних реакцій.

Знайдено профілі гідродинамічних швидкостей, які перетворюють на нуль доданок із в'язкістю в рівняннях Нав'є-Стокса і залежать від азимутального кута. Такий роз'язок відповідає широко обговорюваній у літературі "еліптичній" течії (elliptic flow), пов'язаній з нецентральною зіткненням важких ядер.

Ключові слова: зіткнення важких ядер, фактор, модель Бьоркена, еліптична течія, гідродинамічна нестійкість, об'ємний стік

*E-mail: naryshkin@univ.kiev.ua

1. Вступ

Прискорені до високих енергій ($E > 1 \text{ GeV}$) важкі атомні ядра із зарядом $Z \gg 1$, завдяки релятивістському скороченню поздовжніх розмірів на фактор $\gamma = \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \ll 1$ (де v_0 – швидкість ядер, що зіштовхуються, c – швидкість світла), мають форму сильно сплюснутих у напрямку руху еліпсоїдів обертання (рис.1). При їх лобовому зіткненні в лабораторній системі відліку (ЛСВ) виникає нерухомий згусток щільної та гарячої ядерної матерії (ЯМ) у формі тонкого диска з деяким початковим радіусом R_0 , товщиною $h_0 = \gamma R_0$ і сумарною масою $\mu_0 = 2At_N/\gamma$ (де A – атомний номер, m_N – маса нуклона). Внаслідок великої густини частинок і малості довжини їх вільного пробігу всередині такого диска, до опису його еволюції на початковій стадії $t < t_f$ (поки відстань між частинками не

Hydrodynamic rotational instability of nuclear matter in collisions of highly excited heavy nuclei

E.A. Pashitskii, V.M. Malnev,
D.V. Anchishkin, R.O. Naryshkin*

It is shown that a hydrodynamic rotational instability may develop in ultra-relativistic collisions of heavy nuclei with large angular momenta. This instability must influence the distributions of out-going products of nuclear reactions.

Profiles of hydrodynamic velocity, which nullify the term with viscosity in Navier-Stokes equations and depend on azimuthal angle, are found. This solution corresponds to the widely discussed "elliptic flow", which connects with a non-centrality of heavy ion collisions.

Key Words: heavy ion collisions, fireball, Bjorken model, elliptic flow, hydrodynamic instability, bulk sink

стане більшою за радіус дії ядерних сил $r \sim \hbar/m_\pi c$, де $m_\pi \approx 140 \text{ MeV}/c^2$ – маса π -мезона) застосовний гідродинамічний опис. Згідно Ландау [1], згусток ЯМ починає розширюватися уздовж осі зіткнення одномірним чином (рис.1) аж до його повного розльоту (freeze-out) на часах порядку $t_f \sim 10 \text{ fm}/c$.

При лобовому зіткненні ядер симетрія задачі є аксіальною, і тому ми будемо розглядати рух у циліндричній системі координат. Завдяки одномірності розширення (уздовж осі z), радіальну v_r і азимутальну v_ϕ компоненти гідродинамічної швидкості $\mathbf{v}$ у поперечній площині можна вважати нерелятивістськими за весь час, поки взагалі застосовний гідродинамічний опис руху. Крім цього, відповідно до сценарію одномірного розширення Бьоркена [2], більша кількість частинок міститься у внутрішніх шарах згустку ЯМ (фаєрбола), які рухаються з поздовжніми швидкостями

$$v_z = \frac{z}{t}, \quad t > t_1 \quad (t_1 \ll t_f), \quad (1)$$

(де $t_1 = 0.1 \div 1 \text{ fm}/c$ – час формування фаєрбола), і лише у вузькому зовнішньому шарі речовина рухається зі швидкостями $v \rightarrow c$ (рис.1).

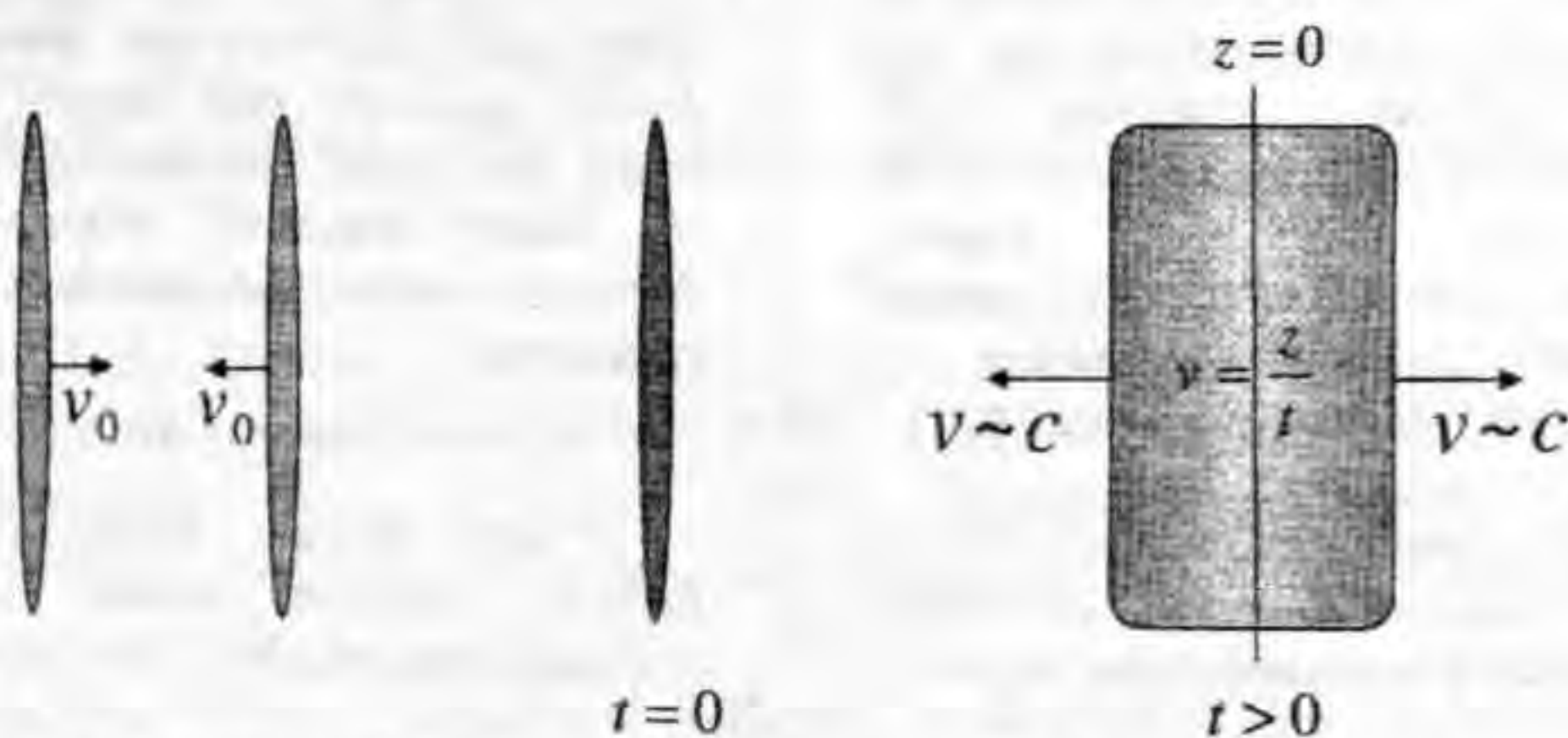


Рис.1. Еволюція зіткнення ультра-релятивістських лоренц-скорочених важких ядер. Ліворуч - ядра, що налітають до зіткнення, у центрі – в момент зіткнення, і праворуч - згусток, гарячої ядерної матерії (фаєрбол), який розширюється одновимірно.

Ми будемо припускати, що працюємо в такій області фаєрбола або для таких часів руху (у моделі Бьоркена час формування частинок з великими поздовжніми імпульсами перевищує час формування повільних частинок), коли для поздовжньої швидкості також застосовний нерелятивістський гідродинамічний опис. Цим самим ми спрощуємо розгляд нашої задачі, що не впливає на якісну поведінку описаної нижче гідродинамічної нестійкості.

2. Гідродинамічна нестійкість при лобових зіткненнях важких ядер

Запишемо рівняння Нав'є-Стокса [3] для руху ядерної речовини у циліндричних координатах:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left[\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \quad (4)$$

де P – тиск, ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості, і

$$(\mathbf{v}\nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Усередині згустку ЯМ (фаєрбола), що утворився при зіткненні важких ядер, відбуваються різні ядерні реакції, що супроводжуються вильотом утворених продуктів (частинок, джетів) і зменшенням із часом загальної маси $\mu(t)$. Останнє можна змодельовати за допомогою об'ємного стоку речовини $q(t)$ в рівнянні неперервності [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = -q(t), \quad (5)$$

де $\rho(\mathbf{r}, t)$ – густина ядерної матерії. Далі ми будемо припускати, що застосовна модель нестисливої рідини, тобто під час руху виконується рівняння (причому $\rho(\mathbf{r}, t) \neq \text{const}$!):

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\rho = 0.$$

Тоді, для нестисливої ЯМ, рівняння неперервності (5) можна представити у вигляді:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\tau(t)}, \quad (6)$$

де τ – характерний час виносу ядерної речовини із фаєрбола за рахунок ядерних реакцій (перетворень часток, анігіляції, тунелювання тощо), причому $q/\rho = 1/\tau$.

Враховуючи те, що з міркувань симетрії в середній площині згустку $v_z = 0$, і вважаючи згусток досить тонким ($\gamma \ll 1$), будемо задавати поздовжню v_z гідродинамічну швидкість у вигляді

$$v_z(z, t) = \alpha(t)z, \quad (7)$$

де для моделі Бьоркена (1) маємо

$$\alpha(t) = \frac{1}{t}, \quad t > t_0. \quad (8)$$

Профіль радіальної поперечної гідродинамічної швидкості відповідно до [4] покладемо:

$$v_r(r, t) = -\beta(t)r. \quad (9)$$

Від'ємний знак v_r відповідає збіжному радіальному потоку ЯМ усередині файєрбола, що забезпечує виконання рівняння неперервності при наявності стоку і поздовжнього розширення.

Для аксіально-симетричних профілів швидкості, які не залежать від азимутального кута φ , рівняння неперервності (6) з урахуванням (7) і (9) приводить до наступного співвідношення

$$\alpha(t) - 2\beta(t) = -\frac{1}{\tau(t)}. \quad (10)$$

Припустимо далі, що ядра, які зіштовхуються, перебувають у високо збуджених станах з великими орбітальними квантовими $L_z \gg 1$ числами. Тоді у квазікласичному наближенні можна вважати, що у важких ядрах і згустку, що утвориться, існує деяке початкове обертання ядерної речовини як цілого з гідродинамічною азимутальною швидкістю

$$v_{\varphi 0} = \Omega_0 r \quad (r \leq R_0), \quad (11)$$

де Ω_0 – початкова кутова швидкість обертання, пов'язана із початковим моментом імпульсу згустку M_{z0} співвідношенням

$$M_{z0} = I_{z0} \Omega_0. \quad (12)$$

Тут I_{z0} – початковий момент інерції, який для згустку ЯМ у формі диска товщиною $h_0 = \gamma R_0 \ll R_0$ дорівнює

$$I_{z0} = \frac{1}{2} \mu_0 R_0^2, \quad \mu_0 = \pi R_0^3 \gamma \rho_0, \quad (13)$$

де $\rho_0 = \mu_0 / \pi R_0^2 h_0$ – початкова густина ЯМ.

Як відзначалося вище, у результаті ядерних реакцій і втрати речовини за рахунок частинок, що вилітають, повна маса згустку $\mu(t) = \pi R^2(t) \int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \rho(z,t) dz$ ($h(t)$ – товщина диска ЯМ, $\rho(z,t)$ – його густина) і його поперечні $R(t)$ розміри зменшуються. Ми будемо припускати, що виконується умова сталості інтеграла $\int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \rho(z,t) dz = \rho_0 h_0 = \text{const}$ під час розширення фаєрбола, яка виконувалася б тотожно при одномірному розширенні за відсутності ядерних реакцій. При цьому, зменшення $R(t)$ буде відбуватися тільки завдяки наявності об'ємного стоку у фаєрболі (а не за рахунок його розширення). Звідси випливає, що момент інерції спадає пропорційно до четвертого ступеня радіуса $R(t)$:

$$I_z(t) = \frac{1}{2} \mu(t) R^2(t) = \frac{\pi}{2} \rho_0 h_0 R^4(t). \quad (14)$$

Далі, у силу закону збереження моменту кількості руху $M_z = M_{z0} = \text{const}$ та згідно (12), існує зв'язок між кутовою швидкістю обертання згустку $\Omega(t)$ і його поточним радіусом $R(t)$:

$$\Omega(t) = \Omega_0 \left[\frac{R_0}{R(t)} \right]^4. \quad (15)$$

З іншого боку, для азимутальної гідродинамічної швидкості $v_\varphi(r,t)$ усередині згустку справедливе рівняння руху (3) Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right]. \quad (16)$$

При "твердотільному" обертанні нестисливої рідини, коли $v_\varphi(r, t) = \Omega(t)r$ при $r \leq R(t)$, права частина рівняння (16) тотожно обертається в нуль, так що для $\Omega(t)$ з урахуванням (9) отримуємо наступне рівняння

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} - 2\beta(t)\Omega(t) = 0. \quad (17)$$

Розв'язок рівняння (17) при $\Omega_0 \neq 0$ описує експоненціальну гідродинамічну нестійкість обертового руху ЯМ у згустку (з урахуванням (10)):

$$\Omega(t) = \Omega_0 \exp \left\{ \int_{t_i}^t \left(\frac{1}{\tau(t')} + \alpha(t') \right) dt' \right\}, \quad t > t_i. \quad (18)$$

Для постійного $\tau = \text{const}$ і в моделі Бьоркена, коли $\alpha(t) = \frac{1}{t}$, вираз (18) отримується у вигляді

$$\Omega(t) = \Omega_0 \frac{t}{t_i} \exp \left\{ \frac{t - t_i}{\tau} \right\}, \quad t > t_i.$$

Згідно (15), це відповідає експоненціальному зменшенню (при нехтуванні більш повільним ступеневим законом) радіуса згустку

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t_i}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{t - t_i}{4\tau} \right\}, \quad t > t_i, \quad (19)$$

і експоненціальному наростанню в часі максимальної азимутальної швидкості ЯМ на границі згустку:

$$v_\varphi^{\max}(t) = \Omega(t)R(t) = \Omega_0 R_0 \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ \frac{3}{4} \frac{t - t_i}{\tau} \right\}, \quad t > t_i. \quad (20)$$

Остання повинна приводити до зміни розподілів по імпульсах вилітаючих вторинних частинок і до появи кутового моменту в розподілі тих продуктів ядерних реакцій, які будуть виносити із собою частину обертового моменту системи.

Відмітимо, що рівняння Нав'є-Стокса для радіальної компоненти швидкості v_r (2) має вигляд

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right], \quad (21)$$

де P – тиск всередині згустку. Однак, для лінійної радіальної залежності $v_r \sim r$, доданок в (21), що містить в'язкість, також тотожно обертається на нуль. При цьому рівняння (21) визначає зміну в часі радіальної частини тиску ЯМ усередині згустку $r \leq R(t)$:

$$P(r, t) = P_0 + \frac{\rho r^2}{2} [\Omega^2(t) - \beta^2(t) - \dot{\beta}(t)] \quad (22)$$

де P_0 – тиск при $r = 0$, а крапка над літерою позначає похідну за часом.

Цікаво відзначити, що аксіальна частина тиску P , залежна від координати z , яка знаходиться з рівняння (4), має вигляд

$$P(z, t) = - \int \rho z (\dot{\alpha} + \alpha^2) dz + \text{const}$$

і для моделі Бюркена тотожно зводиться до постійної величини в силу рівності $\dot{\alpha} = -1/t^2 = -\alpha^2$, так що тиск виявляється сталим уздовж осі розширення ядерної речовини (вираз (22) з урахуванням (8) і (10)):

$$P(r, z, t) = P_0 + \frac{\rho r^2}{2} \left[\Omega^2(t) - \frac{1}{\tau} \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{\tau} \right) \right].$$

3. Обертова нестійкість при нецентральных зіткненнях ядер

При нецентральному зіткненні важких ядер, коли прицільний параметр відмінний від нуля, виникає область перекриття ядер, яка має асиметрію в поперечній до осі зіткнення площині. Завдяки цьому виникає асиметрія просторових градієнтів тиску і густини, що приводить до появи асиметрії також і в імпульсному розподілі частинок [5]. При цьому, азимутальні кутові розподіли вторинних частинок описуються формулою (розвинення в ряд Фур'є):

$$\frac{dN}{d\varphi} = \frac{N_0}{2\pi} (1 + 2\nu_1 \cos \varphi + 2\nu_2 \cos 2\varphi + \dots).$$

Випадок $\nu_2 \neq 0$ відповідає "еліптичній" течії (elliptic flow). Параметр ν_2 монотонно залежить від поперечного імпульсу вилітаючих частинок $p_{\perp} = \sqrt{p_r^2 + p_{\varphi}^2}$ і змінюється у межах $\nu_2 = 0 \div 0.2$ [6]. Слід зазначити, що подібна азимутальна асиметрія зайвий раз вказує на присутність ефекту колективності ядерної речовини, яка утворюється при зіткненнях важких ядер й описується гідродинамічно [7].

Ми будемо описувати аксіально-несиметричний згусток ЯМ як такий, який має форму вигляду $R(t) = R_0(1 + \xi \cos 2\varphi)$ і наступні компоненти швидкості:

$$v_r(r, \varphi, t) = -\beta r(1 + \varepsilon \cos 2\varphi), \quad v_{\varphi}(r, \varphi, t) = \Omega r(1 + \delta \sin 2\varphi), \quad v_z(z, t) = \alpha z. \quad (23)$$

Тут $\xi(t), \varepsilon(t), \delta(t)$ – деякі функції часу. Для таких кутових і радіальних залежностей доданки із в'язкістю в рівняннях Нав'є-Стокса також тотожно обертаються на нуль за умови $\beta\varepsilon = \Omega\delta$:

$$\begin{aligned} \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} \right] &\equiv 0, \\ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \varphi^2} - \frac{v_{\varphi}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] &\equiv 0. \end{aligned}$$

Рівняння ж неперервності (7) у цьому випадку знову приводить до співвідношення (10):

$$2\beta(t) - \alpha(t) = \frac{1}{\tau(t)}.$$

Підставляючи профілі швидкостей (23) у рівняння Нав'є-Стокса (4)-(6), знаходимо залежність кутової швидкості від часу, яка виявляється такою ж, як і для лобових зіткнень важких ядер (див. (18))

$$\Omega(t) = \Omega_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{\tau(t')} + \alpha(t') \right) dt' \right\}, \quad t > t_0$$

і розподіл тиску (також незалежний від z) всередині фаєрбола:

$$P(r, z, t) = P_0 + \frac{P_0^2}{2} \left[\Omega^2(t) - \beta^2(t) - \dot{\beta}(t) - \Omega^2(t) \delta^2(t) + \dot{\delta}(t) \Omega(t) \cos 2\varphi \right]$$

Таким чином, в розглянутої прийнятої нами гідродинамічної моделі, нецентральный характер зіткнень важких ядер практично не впливає на механізм розвитку гідродинамічної обертової нестійкості. Остання визначається наявністю стоку в рівнянні неперервності і початкової відмінної від нуля "завихореності" згустку ЯМ і відповідають профілям гідродинамічної швидкості, які зануляють в рівнянні Нав'є-Стокса доданки, що описують в'язкість.

4. Висновки

В даній роботі розглянуто колективний рух згустку ядерної матерії (ЯМ), який утворюється в процесі зіткнення важких ядер при високих енергіях з великими значеннями квантових чисел поздовжніх обертальних моментів, в рамках нерелятивістської гідродинамічної моделі. При відмінній від нуля початковій "завихореності" ЯМ (ненульовому моменту кількості руху) навіть при центральних зіткненнях можливий розвиток гідродинамічної обертової (вихорової) нестійкості з експоненціально наростаючою в часі кутовою швидкістю типу "твердотільного обертання". Така нестійкість повинна приводити до зміни розподілів по імпульсах вилітаючих вторинних частинок і до появи кутового моменту в розподілі тих продуктів ядерних реакцій, які будуть виносити із собою частину обертового моменту системи.

В більшості експериментальних подій, зіткнення важких ядер є нецентральним. Саме з цим пов'язується спостережувана на досліді невелика кутова залежність в розподілі продуктів ядерних реакцій [5,6]. В нашій роботі показано, що нецентральный характер зіткнень важких ядер якісно не впливає на механізм нестійкості і зводиться до невеликої азимутальної асиметрії гідродинамічної швидкості і тиску.

На нашу думку, гідродинамічна нестійкість ЯМ має універсальний характер і визначається наявністю об'ємного стока речовини і початковим моментом імпульсу.

- [1] Л. Д. Ландау // Известия АН СССР, сер. физ. 17 (1953) 51.
- [2] J. D. Bjorken // Phys. Rev. D 27 (1983) 140.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Гидродинамика, Москва, "Наука", 1986.
- [4] Е. А. Пашицький // Прикладна гідродинаміка 4 (76) (2002) 50.
- [5] L. McLerran // Pramana 60 (2003) 575-786 (Invited talk presented at the International Conference on the Physics and Astrophysics of the Quark Gluon Plasma, Nov. 26-30, 2001); [arXiv: hep-ph/0202025 (2002)].
- [6] C. Adler et al. (STAR Collaboration) // Phys. Rev. C 66 (2002) 034904.
- [7] В. М. Емельянов, С. Л. Тимошенко. Введение в релятивистскую ядерную физику, Москва, МИФИ, 2003.

Надійшла до редакції 17.02.2005.

УДК 537.525

Л.В. Поперенко*, проф., д. ф.-м. н.,
З.П. Корольова, інж.,
О.М. Борбат, доц., к. ф.-м. н

L.V. Poperenko*, prof., Dr. Sci.,
Z.P. Korol'ova, eng.,
O.M. Borbat, associate prof.,
Cand. of Phys.-Math. Sci.

**Особливості спектрів
випромінювання плазми
всередині порожнинного
катодного вузла в аномальному
тліючому розряді**

**The features of the radiation
spectra of plasma inside hollow
cathode in glow discharge**

*Досліджуються спектри
випромінювання гетерофазного
дрібнодисперсного середовища, що
утворюється всередині металевій
порожнини катодного вузла в умовах
формування мікронних і субмікронних
конусів при аномальному тліючому
розряді.*

*The radiation spectra of heterophase
subdispersive medium formed inside
metallic hollow cathode with its microne
and submicrone surface cones were
investigated.*

*Key Words: hollow cathode, plasma
emission spectra, microresonator.*

*Ключові слова: порожнинний
катод, емісійний спектр плазми,
мікрорезонатор.*

*E-mail: plv@univ.kiev.ua

1. Вступ

Дослідження умов збудження і властивостей резонансів, які з'являються в спектрах випромінювання при взаємодії електромагнітних хвиль з поверхневими елементами мікрометрового діапазону (мод шептальної галереї (ШГ)[1,2]) і створення на їх основі дискретних оптичних систем малих розмірів і високої добротності є актуальною задачею. Метою даної роботи стало дослідження спектрів випромінювання гетерофазного дрібнодисперсного середовища (кластерної плазми [3]), що утворюється всередині металевій порожнини катодного вузла в умовах формування мікронних і субмікронних конусів при аномальному тліючому розряді.

2. Методика експерименту

Об'єктом дослідження була кластерна плазма в порожнині катодного вузла, виготовленої з нікельової фольги товщиною 50 мкм. Ефективний об'єм порожнини дорівнював $0,5 \text{ см}^3$. Всередині порожнини знаходився активатор на основі сплаву барію з алюмінієм або складних сполук барію. Режим роботи катодів – аномальний тліючий розряд з нестационарними катодними мікроплямами і нестационарним викидом матеріалу активатора. В результаті в порожнині створювалась багатокомпонентна кластерна

плазма – система буферного газу (гелію з добавкою водню) при тиску 260 Па, в який порціями поступала речовина активатора. Розрядний струм змінювався в межах 0,02-0,08 А.

Дослідження спектрів випромінювання проводилось в діапазоні довжин хвиль $330 \div 500$ нм. Спектри реєструвалися фотографічним методом з наступним мікрофотометричним скануванням. Випромінювання плазми всередині порожнини експонувалося через кільцевий анод у напрямі, нормальному до площини отвору порожнини.

3. Результати та обговорення

Інтегральне випромінювання плазми всередині порожнини нагадувало випромінювання абсолютно чорного тіла з максимумом енергії у синьо-зеленій області. У напрямі нормальному до вісі розрядної трубки можна було бачити факел плазми, що виходив з отвору порожнини, інтенсивність свічення якого значно перевищувала інтенсивність випромінювання плазми позитивного стовпа.

Характерною особливістю емісійних спектрів плазми всередині металеві порожнини катодного вузла є присутність в них спектральних ліній елементів, які входять до складу активатора та матеріалу порожнини. В спектрах присутні спектральні лінії як нейтральних, так і іонізованих атомів елементів активатора і буферного газу. Розкид по енергіях іонізації складає від 2,72 еВ (Ва II 455,4 нм) до 51 еВ (He II 468,5 нм). В порожнині збуджується повна серія Бальмера та серія гелію (рис. 1). Енергія іонізації водню 13,59 еВ, що вказує на імовірність появи в порожнині іонізованого водню (протонів).

Зафіксовано випромінювання попарних смуг з розділеними лініями і короткохвильовими кантами в області 463,7 нм, 466,8 нм та в області 367,7 нм, 366,5 нм (рис. 1, а).

На крилах інтенсивних спектральних ліній гелію зареєстровано тонку

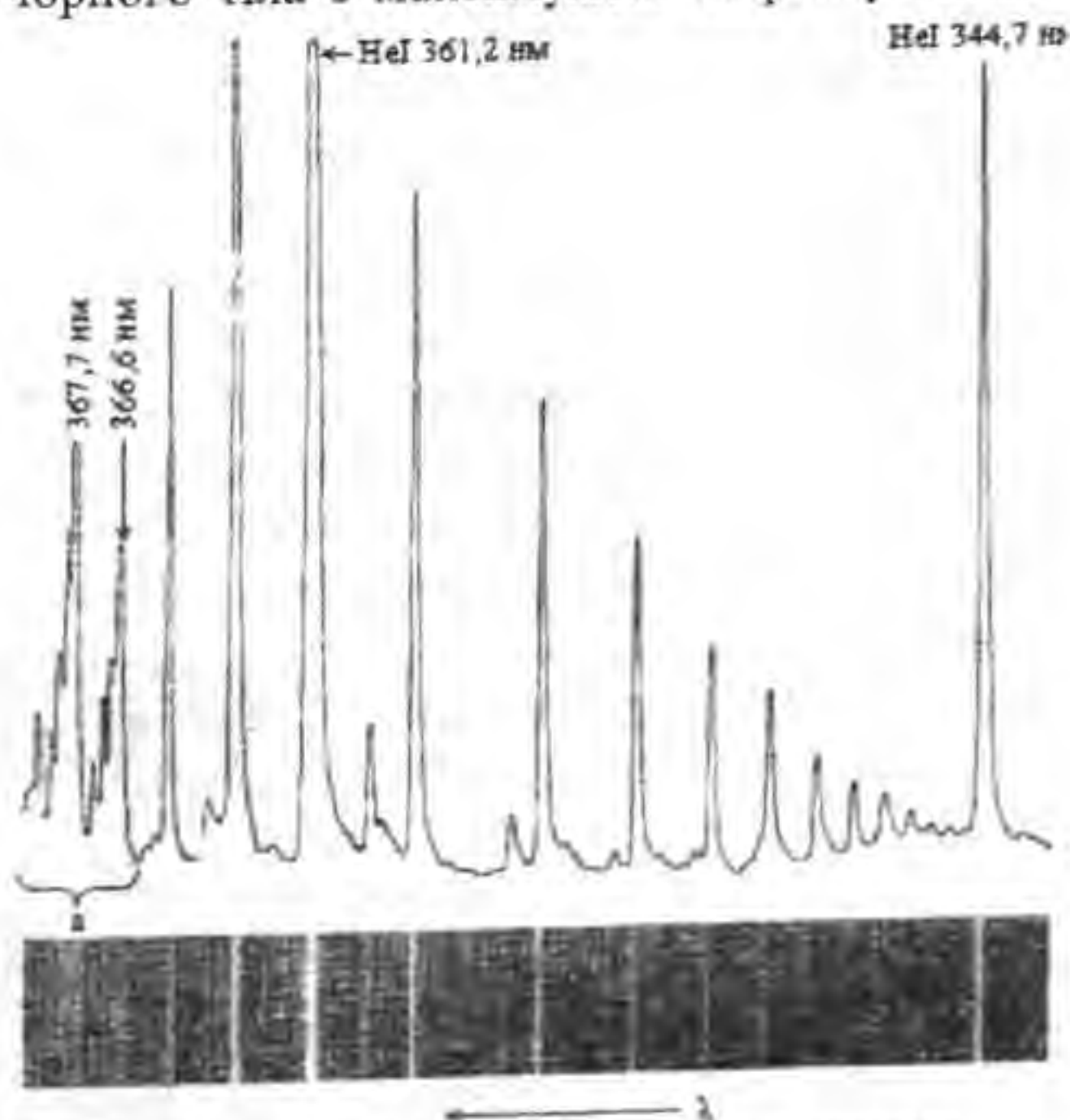


Рис. 1. Ділянка спектру випромінювання плазми всередині порожнинного катода (а – типові попарні смуги).

структуру у вигляді еквідистантних гострих максимумів з відстанню між ними $\sim 0,38$ нм (рис. 2). Вказана структура з'являється по обидві сторони від збуджуючої спектральної лінії. Спектральна лінія разом із структурою може займати інтервал ~ 8 нм. У випадку нерозділення еквідистантних максимумів спектральні лінії мали значне уширення.

Склад і вигляд спектрів суттєво залежав від величини розрядного струму. До розрядних струмів 0,06-0,07 А в попарних смугах лінії були розділені, а тонка структура на крилах спектральних ліній гелію була найбільш чіткою. При таких розрядних струмах спектри випромінювання містили безліч спектральних ліній як значно уширених, так і надзвичайно вузьких. При значних експозиціях спектральні лінії зливалися, створюючи враження суцільного спектра.

Вторинним процесом взаємодії розряду з деталями поверхонь всередині порожнини катодного вузла була зміна їх топографії.

На початку експериментів розміри неоднорідностей на внутрішніх поверхнях порожнини знаходилися в межах $5 \div 10$ мкм. В кінці ресурсу катодного вузла висота створених розрядом конусів дорівнювала $10 \div 60$ мкм (рис. 3). Серед утворених розрядом структур мікронного і субмікронного розміру траплялися порожнинні. Здебільшого це були конуси. Порожнинні конуси мали

діаметр отвору при вершині $20 \div 30$ мкм. Переріз порожнин між асоціаціями конусів становив $10 \div 40$ мкм.

Розряд з порожнинним катодним вузлом підтримується нестационарними катодними мікроплямами, що виникають на внутрішніх поверхнях порожнини, з яких у критичні моменти для розряду

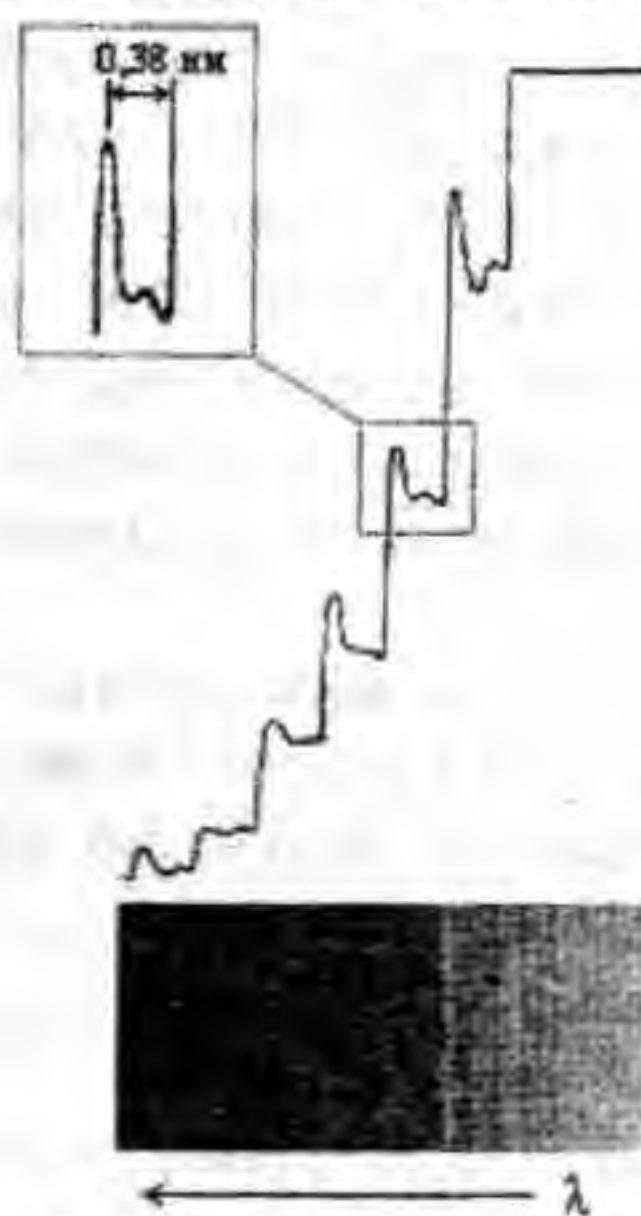


Рис. 2. Тонка структура на довгохвильовому крилі спектральної лінії HeI 388,8 нм.



Рис. 3. Топографія ділянки внутрішньої поверхні порожнинного катода (а – порожнинний конус, створений розрядом; збільшення 300).

відбувається інжекція матеріалу катода. Інкєкція має нестационарний характер. Час між окремими викидами становить $10^{-3} - 10^{-4}$ с. Цей час корелює з періодом коливань у розряді, які мають органічний зв'язок з ежекцією матеріалу катода. Частота викиду матеріалу катода і частота коливань збільшуються з ростом розрядного струму. Як підтримування розряду прискореними зарядженими клампами (кусками) матеріалу катода, так і безперервна зміна рельєфу внутрішніх поверхонь катодного вузла спонукає безлічну зміну розташування електричного і магнітного полів, що в свою чергу викликає безліч типів коливань з власними частотами (модами) і поповнення спектрів випромінювання безліччю нових мод, роздільність яких обумовлюється роздільною здатністю реєстраційної апаратури.

Для виникнення резонансів у порожнинному катодному вузлі при перемішуванні електричних і магнітних полів є кілька можливостей. По-перше, металева порожнина катодного вузла – резонатор. Розміри порожнини значно більші за довжини хвиль оптичного діапазону, тому власні частоти її лежать за його межами. По-друге, в металевій порожнині катодного вузла формуються структури (конуси), розміри яких співвимірні з розмірами довжини електромагнітної хвилі. По-третє, певний відсоток конусів порожнинний. Порожнини довільної форми утворюються і між асоціаціями конусів. Отже, в металевій порожнині катодного вузла під дією розряду виникають системи порожнинних мікрорезонаторів кінчної і довільної форми. По-четверте, в об'ємі порожнини катодного вузла кластери мікрочастинок (клампів) з радіусами кривини поверхонь, співвимірними з довжиною хвилі можуть стати мікрорезонаторами.

Висновки

Фізичними процесами, а саме: розпиленням матеріалу катода і зміною топографії внутрішніх поверхонь порожнинного катодного вузла пояснюється виникнення в спектрах випромінювання кластерної плазми оптичної дискретної системи з безліччю вузьких спектральних ліній – мод шептальної галереї мікрорезонаторів, створених розрядом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Брагинський В.Б., Ильченко В.С., Городецкий М.Л. Оптические микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи // УФН. – 1990. – Т. 160, вып. 1. – С. 157-163.
2. Дацюк В.В., Измайлов И.А. Оптика микрокапель // УФН. – 2001. - Т. 171, вып. 10. – С. 1117-1127.
3. Смирнов Б.М. Кластерная плазма // УФН. – 2000. - Т. 170, вып. 5. – С. 495-534.

Надійшла до редколегії 17.12.2004

УДК 535.323.341

Вадим М. Прокопець¹, Любомир
Й. Робур, Ігор А. Шайкевич

**Поверхнева генерація другої
гармоніки при відбиванні від
керамік на основі карбіду
кремнію та нітриду алюмінію**

Приведені експериментальні дослідження поверхневої генерації другої гармоніки (ДГ) при відбиванні від зразків гарячепресованої кераміки SiC, AlN, SiC+20%AlN, SiC+50%AlN та теоретичні розрахунки за допомогою електромагнітної теорії. Для зразків SiC, AlN спостерігається добре якісне узгодження теоретичних та експериментальних даних. Порівняння експериментальних та теоретичних кутових залежностей ДГ для композитних керамік SiC+20%AlN, SiC+50%AlN показує як на кількісну, так і якісну розбіжність, що вказує на необхідність подальшого уточнення теоретичної моделі.

Ключові слова: кераміка, поверхнева генерація другої гармоніки.

¹ E-mail: vadym_pr@mail.univ.kiev.ua

Vadym M. Prokopets¹, Lubomyr Y.
Robur, Igor A. Shaykevich.

**Surface second harmonic
generation in reflection from
silicone carbide and aluminium
nitrogen ceramics**

The experimental and theoretical investigation of surface second harmonic generation in reflection from SiC, AlN SiC+20%AlN, SiC+50%AlN are presented. The angular dependences of second harmonic generation are in good quality agreement with observations on SiC, AlN. The comparisons of experimental and theoretical second harmonic generation data for composite ceramics SiC+20%AlN, SiC+50%AlN show as quantitative as well as quality disagreement. The disagreement points at the necessity of the theoretical model improving.

Key Words: ceramic, surface harmonic generation.

Генерація гармонік оптичного випромінювання при відбиванні потужного лазерного випромінювання є ефективним методом дослідження поверхні [1-3]. Є багато теоретичних і експериментальних робіт присвячених цій проблемі, але в них об'єктами досліджень, як правило є чисті напівпровідники або метали [4-6]. Дослідження нелінійних оптичних характеристик керамічних матеріалів ще не проводилось.

Нами проведено комплексні експериментальні дослідження і теоретичні розрахунки кутових залежностей генерації другої гармоніки на поверхні керамічних матеріалів SiC, AlN та композитів SiC+20%AlN, SiC+50%AlN отриманих методами порошкової металургії – гарячим пресуванням.

1. Експериментальна методика

Дослідження нелінійного відбивання лазерного випромінювання від зразків кераміки проводили на довжині хвилі $\lambda=1,064$ мкм. Схема експериментальної установки подібна до описаної в [7]. Як джерело накачки першої гармоніки застосований лазер на монокристалі алюмоітрієвого граната легovanого неодимом, який працює в режимі пасивної модуляції добротності. Лазер генерує імпульси з максимальною енергією 85 мДж, довжиною ~ 15 нс, на довжині хвилі 1064 нм, з частотою повторення 1-10 Гц. Падаюче лазерне випромінювання та хвиля другої гармоніки були поляризовані в площині падіння – р-поляризація. Дослідження проводили для кутів падіння світла на зразок θ від 30° до 86° з кроком 2° . При кожному фіксованому куті падіння значення інтенсивності другої гармоніки усереднювались за 120-300 лазерними імпульсами в залежності від величини сигналу. Для калібрування системи реєстрації був використаний зразок кристалічного кварцу, для якого компоненти тензора нелінійної сприйнятності добре відомі [8]. Щоб позбавитися впливу на результати дослідження нестабільності енергії та модового складу лазерного випромінювання була застосована двоканальна схема для одночасного вимірювання інтенсивності першої та другої гармоніки. Так як реєстрація проводилась на рівні порогу чутливості реєструючого обладнання то сигнал ДГ постійно перевірявся на відповідність таким критеріям [9, 10]: сигнал ДГ повинен співпадати в часі і по довжині із сигналом першої гармоніки; це повинно бути монохроматичне випромінювання з довжиною хвилі, що відповідає другій гармоніці $\lambda=532$ нм; інтенсивність ДГ повинна квадратично залежати від інтенсивності накачки.

2. Теорія генерації другої гармоніки при відбиванні

Залежність інтенсивності ДГ при відбиванні від кута падіння буде визначатися кутовими характеристики нелінійної поляризації $\bar{P}^{NL}$. Знаючи нелінійну поляризацію можна розрахувати амплітуди та фази відбитої хвилі ДГ [11]:

$$\bar{E}_r^p(2\omega) = \frac{4\pi\bar{P}_p^{NL}(2\omega)\sin\theta_2\sin^2\theta_i\sin(\theta_2+\theta_i+\alpha)}{\varepsilon_2(2\omega)\sin\theta_r\sin(\theta_i+\theta_2)\sin(\theta_i+\theta_r)\cos(\theta_i-\theta_r)} \quad (1)$$

$$\bar{E}_r^s(2\omega) = -\frac{4\pi\bar{P}_s^{NL}(2\omega)\sin\theta_2\sin^2\theta_i}{\sin\theta_r\sin(\theta_i+\theta_2)\sin(\theta_i+\theta_r)}$$

де $\bar{E}_r^p$, $\bar{E}_r^s$ – р- та s- компоненти відбитої хвилі ДГ; $\bar{P}_p^{NL}$, $\bar{P}_s^{NL}$ – р- та s- компоненти нелінійної поляризації; α – кут між $\bar{P}_p^{NL}$ та хвильовим

вектором заломленої хвилі основної частоти $\vec{k}_i(\omega)$; θ_2 , θ_i , θ_r - кути заломлення ДГ, основної частоти, та кут відбивання відповідно.

Тобто проблема зводиться до розрахунку нелінійної поляризації, яка наводиться в керамічному матеріалі хвилею першої гармоніки.

Нелінійна поляризація визначається за формулою [12]:

$$\vec{P}^{NL} = \chi : \vec{E}' \vec{E}' \quad (2)$$

де χ - тензор нелінійної сприйнятності, $\vec{E}'$ - напруженість електричного поля світлової хвилі яка пройшла в нелінійне середовище.

Амплітуда $\vec{E}'$ буде визначатись за формулами Френеля, які залежать від лінійних оптичних характеристик. В формулі (2) вектори нелінійної поляризації, напруженості, електричного поля та тензор нелінійної сприйнятності записані в кристалографічній системі координат. Так як вимірювання, як правило, проводять відносно лабораторної системи координат, яка пов'язана із променем (р-, s-площини), то нелінійна поляризація визначається: $\vec{P}^{NL} = \chi' : \vec{E}_i \vec{E}_i$, де χ' - тензор нелінійної поляризації в лабораторній системі координат, компоненти якого знаходять із закону перетворення тензорів третього рангу [13]:

$$\chi'_{ijk} = R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} \chi_{i'j'k'} \quad (3)$$

де $R_{ii'}$ - матриця переходу від кристалічної системи координат до лабораторної.

Так як кераміка це полікристалічне середовище, в якому кристалики орієнтовані рівноймовірно за напрямом, то для розрахунку інтенсивності ДГ потрібно усереднити значення $\vec{P}^{NL}$ за всіма можливими орієнтаціями кристаликів з яких складається зразок. Для цього розглянемо нелінійну поляризацію яку створює один кристалик, вибраний довільно та довільно орієнтований відносно лабораторної системи координат. Розглянемо геометрію взаємодії зображену на рис. 1. Лабораторна система координат позначена XYZ, X'Y'Z' - система координат кристалика.

Компоненти вектора напруженості світлової хвилі в лабораторній системі координат виражені через р-, s-компоненти матимуть вигляд:

$$\begin{cases} E_x = E^s \cos \theta \\ E_y = E^p \cos \theta \\ E_z = (E^p + E^s) \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} E_{ix} = E_i^s \cos \theta_i = E^s t_{12}^s \cos \theta_i \\ E_{iy} = E_i^p \cos \theta_i = E^p t_{12}^p \cos \theta_i \\ E_{iz} = (E_i^s + E_i^p) \sin \theta_i = (E^s t_{12}^s + E^p t_{12}^p) \sin \theta_i \end{cases} \quad (4)$$

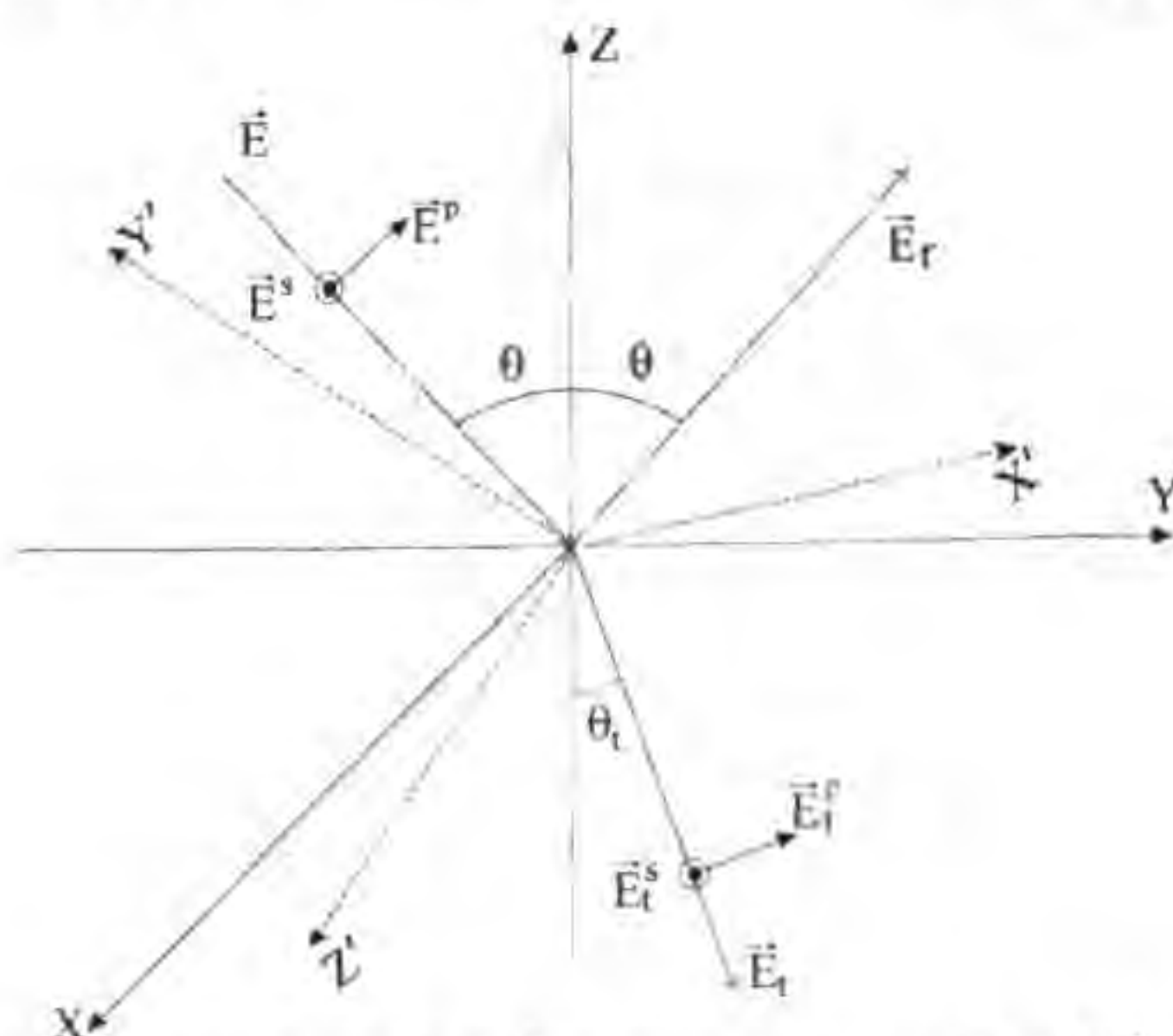


Рис.1. Геометрія взаємодії світлових хвиль на межі поділу двох середовищ.

Так як кристалик орієнтовано довільно, то перехід від штрихованої системи координат до не штрихованої можна виконати будь-яким способом. Виконаємо перехід за допомогою кутів Ейлера. Матриці повороту мають вигляд [13]:

$$R(\rho) = \begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho & 0 \\ -\sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

де $\rho, \varphi, \psi \in [0, \pi]$ – кути Ейлера.

Матриця переходу від системи координат пов'язаної із кристалом до лабораторної, яка пов'язана із променем, буде добуток трьох матриць:

$$R(\rho, \varphi, \psi) = R(\rho)R(\varphi)R(\psi) \quad (6)$$

Компоненти тензора нелінійної сприйнятності будуть визначатись:

$$\chi'_{ijk} = R_{ii'}(\rho, \varphi, \psi) R_{jj'}(\rho, \varphi, \psi) R_{kk'}(\rho, \varphi, \psi) \chi_{i'j'k'} \quad (7)$$

Використовуючи (3) та (7) знаходимо декартові компоненти нелінійної поляризації, яка створюється одним кристаликом, в лабораторній системі координат. Виразимо р- і s- компоненти нелінійної поляризації через Декартові в лабораторній системі координат:

$$P_p^{NL}(\rho, \varphi, \psi) = P_y^{NL}(\rho, \varphi, \psi) + P_z^{NL}(\rho, \varphi, \psi) \quad (8)$$

$$P_s^{NL}(\rho, \varphi, \psi) = P_x^{NL}(\rho, \varphi, \psi)$$

Так як кристалики орієнтовані рівно ймовірно, то щоб знайти нелінійну поляризацію, проведемо усереднення по всіх можливих значеннях ρ, φ, ψ .

$$\begin{aligned} \langle P_{\rho}^{NL} \rangle &= \frac{1}{\pi^3} \int_0^{\pi} d\rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (P_y^{NL}(\rho, \varphi, \psi) + P_z^{NL}(\rho, \varphi, \psi)) d\psi \\ \langle P_s^{NL} \rangle &= \frac{1}{\pi^3} \int_0^{\pi} d\rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (P_x^{NL}(\rho, \varphi, \psi)) d\psi \end{aligned} \quad (9)$$

Отримані значення нелінійної поляризації (9) підставляємо в формули (1) і розраховуємо напруженість електричного поля ДГ.

3. Обговорення результатів

Застосовуючи вище описану методику та використовуючи явний вигляд тензора нелінійної сприйнятності для кристалів SiC та AlN [8]:

$$d_{i\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

де $d_{i\lambda} = \chi_{ijk}$, та індекси приймають значення: $\lambda = jk$; $i, j, k = x, y, z$.

і літературні дані значень компонент тензора нелінійної сприйнятності для SiC та AlN [14, 15]: SiC: $d_{15}=9.1 \times 10^{-12}$ В/м, $d_{31}=9 \times 10^{-12}$ В/м, $d_{33}=24 \times 10^{-12}$ В/м; AlN: $d_{15}=0.35 \times 10^{-12}$ В/м, $d_{31}=0.35 \times 10^{-12}$ В/м, $d_{33}=7.5 \times 10^{-12}$ В/м були розраховані кутові залежності інтенсивності ДГ.

На рис. 2 приведені експериментальні та теоретично розраховані залежності інтенсивності ДГ від кута падіння для двох зразків кераміки карбіду кремнію виготовлених із однакового вихідного матеріалу.

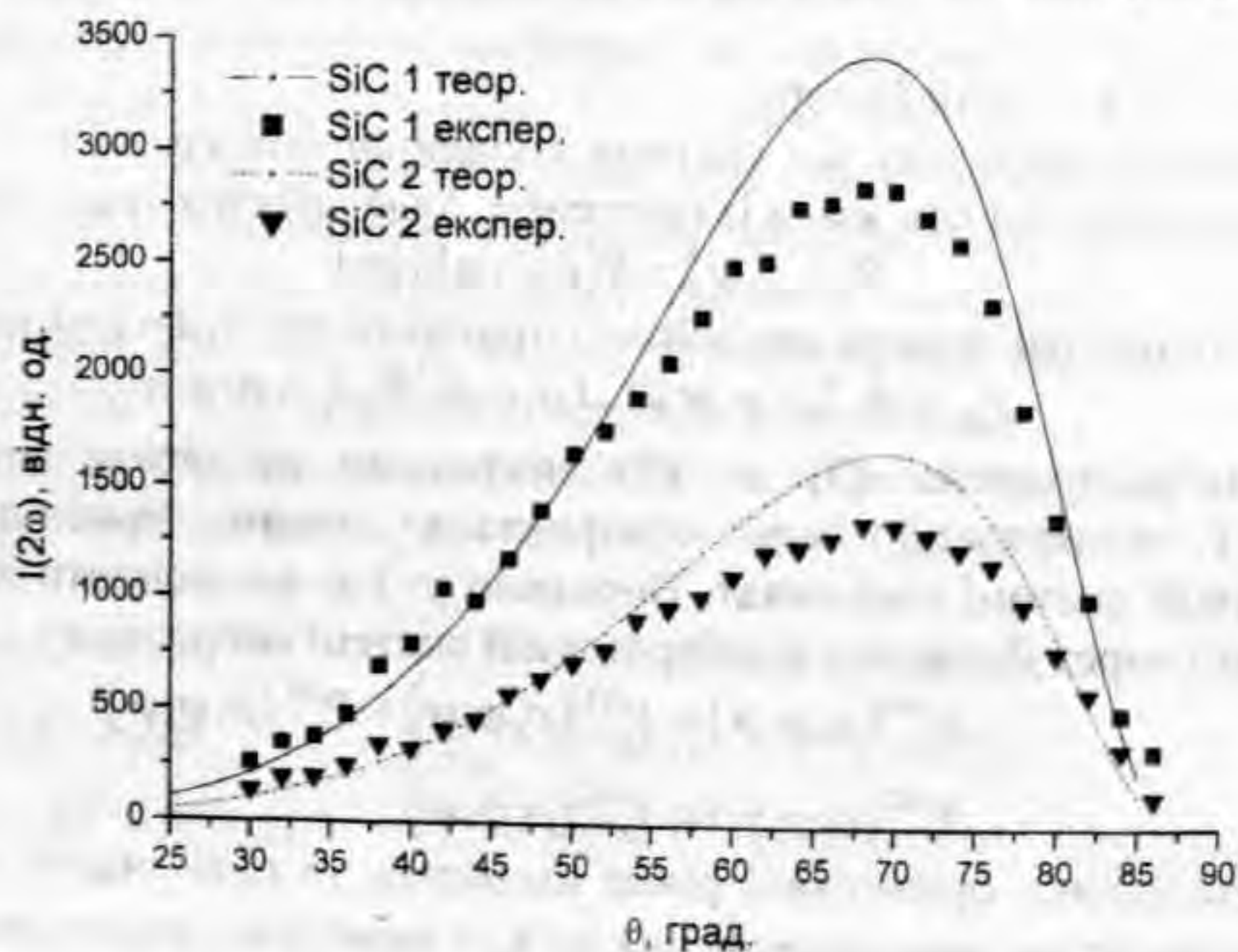


Рис. 2. Порівняння експериментальних та теоретично розрахованих кутових залежностей генерації другої гармоніки в карбіді кремнію.

На рис.3 показані аналогічні залежності ДГ для двох зразків кераміки нітриду алюмінію. На рис. 4 показані кутові залежності ДГ для композитних зразків SiC+AlN. Інтенсивність ДГ, на рис. 2-4, приведена в довільних одиницях, але в одному масштабі. З наведених залежностей видно, що найбільшу ефективність нелінійного перетворення, як і очікувалось, має кераміка на основі карбіду кремнію. Максимальне значення інтенсивності другої гармоніки при відбиванні від кераміки AlN менше за максимум для SiC в більш ніж 20 разів. Очевидно, що це пов'язано із значно меншими значеннями компонент тензора нелінійної сприйнятності нітриду алюмінію в порівнянні з карбідом кремнію [14, 15]. З представлених залежностей видно, що для карбіду кремнію і нітриду алюмінію (рис. 2 – 3) спостерігається добре якісне узгодження теоретичних та експериментальних даних, розташування максимумів ДГ в межах точності вимірювання співпадає. Розходження спостерігається в області малих кутів падіння, експериментальні значення дещо вищі за теоретичні. Кількісна розбіжність спостерігається для всіх зразків, теоретично розраховані значення максимуму ДГ вищі за експериментально виміряні. Очевидно це пов'язано із тим що в реальних зразках значення компонент тензора нелінійної сприйнятності відрізняються від літературних даних.

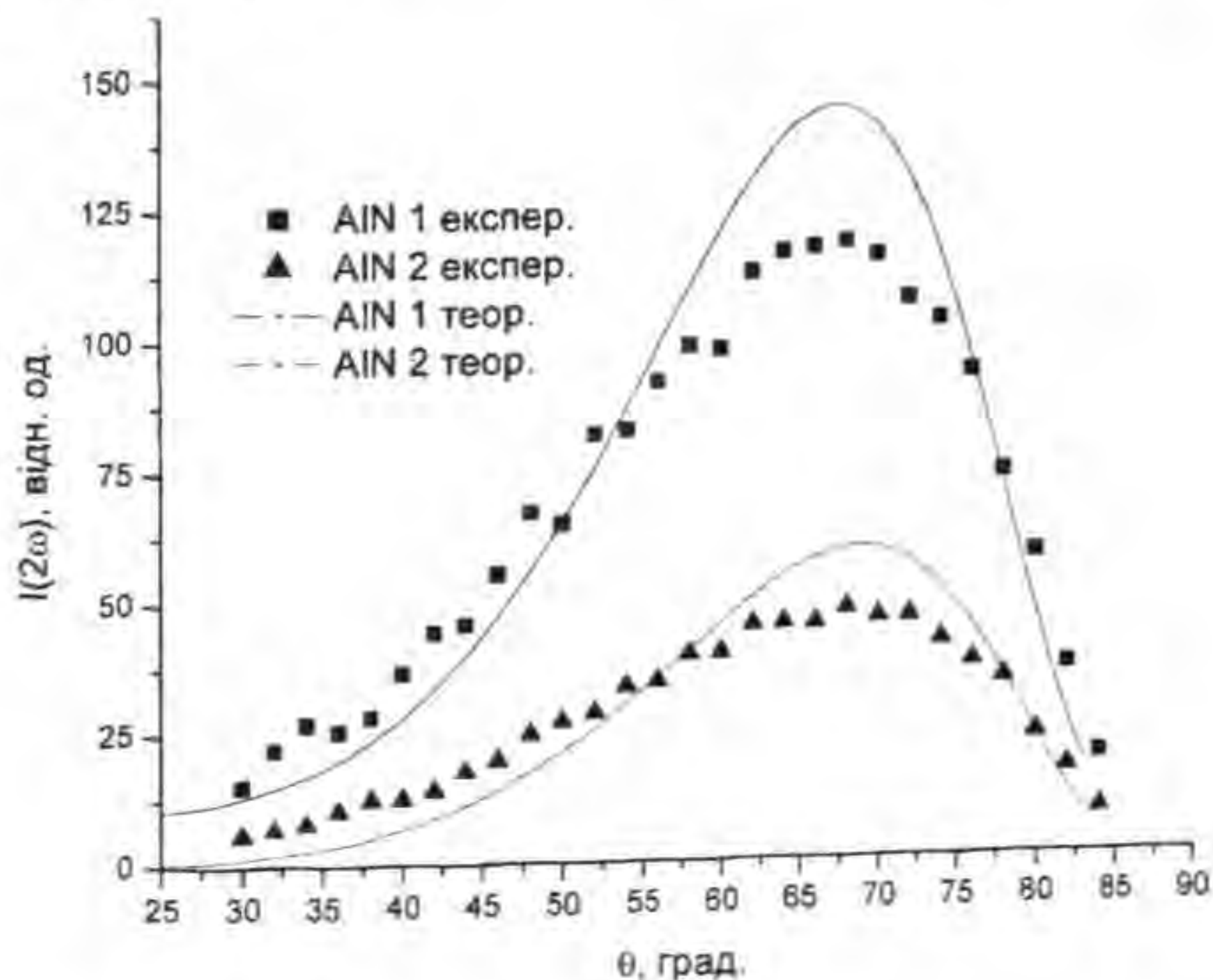


Рис. 3. Порівняння експериментальних та теоретично розрахованих кутових залежностей генерації другої гармоніки в нітриді алюмінію.

Як видно з представлених експериментальних даних на рис. 2 та рис.3 значення інтенсивності ДГ відрізняється для зразків виготовлених із одного вихідного матеріалу: SiC №1, SiC №2 (рис.2), та AlN №1, AlN №2 (рис. 3). Як показано в [16] значення лінійних оптичних характеристик сильно впливає на кутові залежності генерації другої гармоніки на поверхні металів. Значення показників заломлення та поглинання на довжинах хвиль першої та другої гармоніки приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення показників заломлення та поглинання керамік на довжинах хвиль 530 та 1060 нм

Зразок	$\lambda = 1060 \text{ нм}$		$\lambda = 530 \text{ нм}$	
	n	k	n	k
SiC №1	1,88	0,4	1,78	0,5
SiC №2	2,05	0,16	2,04	0,3
AlN №1	1,78	0,2	1,57	0,36
AlN №2	1,82	0,23	20,4	0,54
SiC+20%AlN	2,13	0,45	1,75	0,5
SiC+50%AlN	1,92	0,2	1,8	0,53

Лінійні оптичні характеристики були виміряні за допомогою спектроеліпсометрії (метод Бітті). З таб.1 видно, що значення n , k на частотах першої та другої гармоніки відрізняються для зразків, які виготовлені із одного вихідного матеріалу (зразки SiC №1, SiC №2 та AlN №1, AlN №2). Нами був проведений теоретичний аналіз впливу лінійних оптичних характеристик на кутові залежності ДГ для SiC. Для спрощення розрахунків, був розглянутий випадок монокристалу карбіду кремнію, вирізаного і орієнтованого так, щоб кристалічна система координат співпадала із лабораторною, на який падає р-поляризоване випромінювання першої гармоніки. Для розрахунку були використані співвідношення (1). За початкові значення показника заломлення та поглинання були прийняті n і k для зразка SiC №2 (таб. 1), як більш близьких до значення чистого карбіду кремнію. Для спрощення інтенсивність накачки $I(\omega)$ прийнята за одиницю. Результати розрахунків приведені в таб. 2. Для кутової залежності наведені значення кута падіння $\theta_{\max}$ в якому спостерігається максимум інтенсивності другої гармоніки, та значення інтенсивності другої гармоніки в максимумі. Для оптичних сталих вказано відносне відхилення $\frac{n' - n}{n}$, та $\frac{k' - k}{k}$, де k, n - це початкові значення показника заломлення та поглинання, а n', k' - поточні. Як видно із таб. 2 найбільший вплив на інтенсивність другої гармоніки і положення

максимуму має значення показника заломлення на частоті накачки. При збільшенні $n(\omega)$ на 10% інтенсивність зменшується приблизно в 2,4 рази, а при зменшенні зростає в $\sim 2,5$. Цим, очевидно, пояснюється різниця в інтенсивності другої гармоніки для різних зразків виготовлених із однакового матеріалу таких як SiC №1, SiC №2 (рис.2), та AlN №1, AlN №2 (рис. 3).

Таблиця 4.2

Залежність теоретичних значень інтенсивності другої гармоніки та положення максимуму від відхилення показника заломлення та поглинання від номінального.

$\frac{\Delta n(\omega)}{n(\omega)}$	$\frac{\Delta k(\omega)}{k(\omega)}$	$\frac{\Delta n(2\omega)}{n(2\omega)}$	$\frac{\Delta k(2\omega)}{k(2\omega)}$	$I_{\max}(2\omega)$, відн. од.	$\theta_{\max}$, град
0	0	0	0	88,2	70,8
+0,1	0	+0,1	0	36,8	72,1
-0,1	0	-0,1	0	229	69,5
0	+0,1	0	+0,1	87,5	70,8
0	-0,1	0	-0,1	88,8	70,8
0	0	+0,1	+0,1	63,3	70,9
0	0	-0,1	-0,1	125,7	70,7
+0,1	+0,1	0	0	51,3	72,1
-0,1	-0,1	0	0	160,2	69,6
+0,1	+0,1	+0,1	+0,1	36,6	72,1
-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	230,8	69,5
-0,1	-0,1	+0,1	+0,1	224,5	69,5
+0,1	+0,1	-0,1	-0,1	37,1	72,1

На рис. 4 представленні кутові залежності генерації другої гармоніки при відбиванні від зразків композитних керамік SiC+20%AlN та SiC+50%AlN. Так як теоретичних моделей нелінійної поляризації композитів, в яких обидва компоненти мають квадратичну нелінійність немає, то для розрахунку ДГ в композитних матеріалах SiC+AlN нелінійна поляризація вибиралась у вигляді лінійної комбінації:

$$\bar{P}^{NL} = (1 - c)\bar{P}_{SiC}^{NL} + c\bar{P}_{AlN}^{NL} \quad (4.9)$$

де c – концентрація нітриду алюмінію в композиті; $\bar{P}_{SiC}^{NL}$, $\bar{P}_{AlN}^{NL}$ – нелінійна поляризація карбіду кремнію та нітриду алюмінію відповідно. Хоча в першому зразку вміст карбіду кремнію більший інтенсивність другої гармоніки в максимумі вища для другого зразка. Це пов'язано із різними значеннями лінійних оптичних характеристик – показника заломлення та поглинання (таблиці 1). В зразка SiC+20%AlN значення

показника заломлення на частоті першої гармоніки вище на 0,21 за $n(\omega)$ зразка SiC+50%AlN.

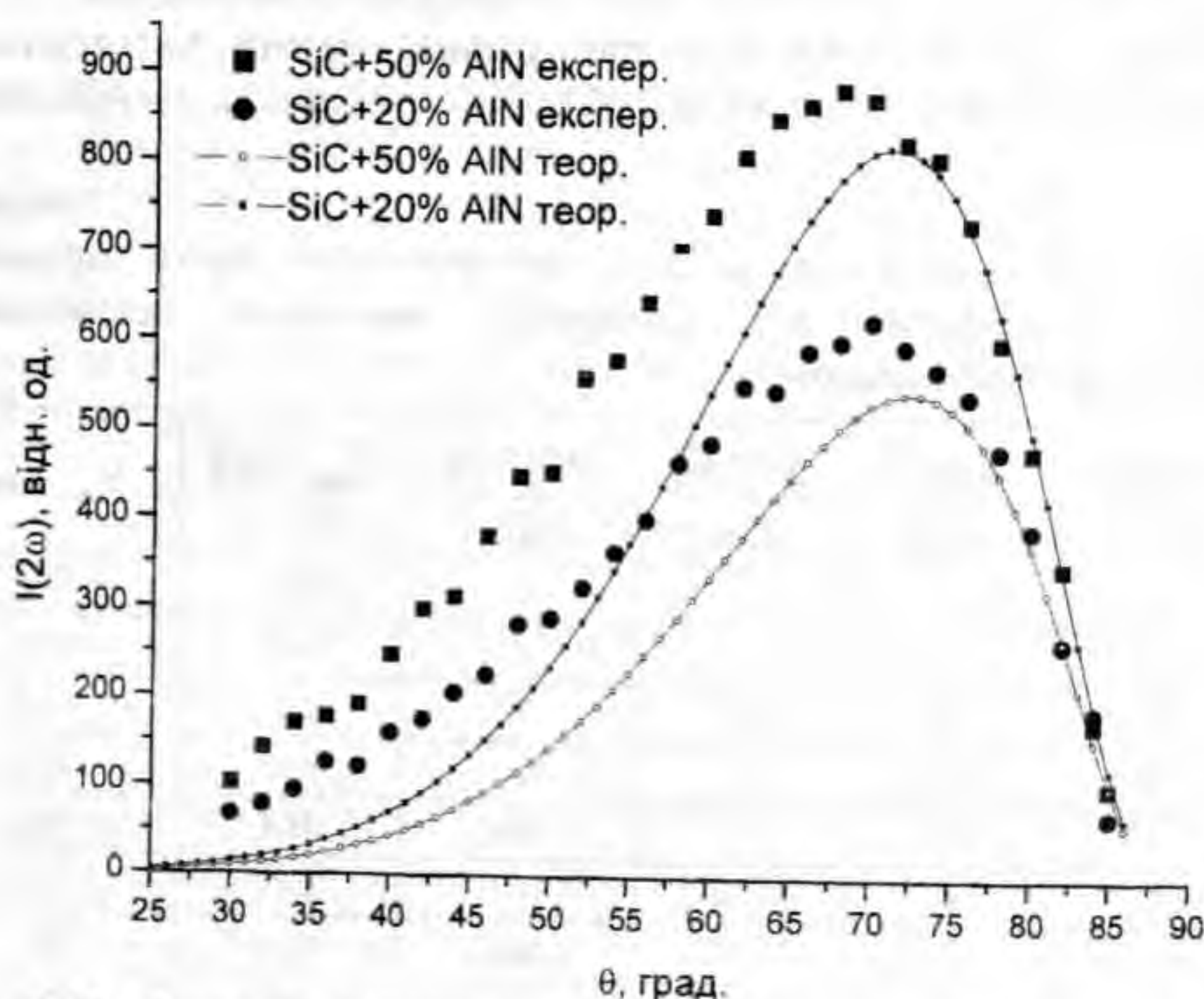


Рис. 4. Порівняння експериментальних та теоретично розрахованих кутових залежностей генерації ДГ в композитних кераміках SiC+AlN.

Порівняння експериментальних та теоретичних даних для композитних керамік SiC+20%AlN, SiC+50%AlN (рис. 4) показує як на кількісну так і якісну розбіжність. Не співпадають як положення максимумів ДГ, так і їх величина, теоретично розраховані значення дещо нижчі за експериментальні. Очевидно це пов'язано із недоліками вибраної моделі нелінійної поляризації композиту, яка не враховує різницю в лінійних оптичних властивостях кожної компоненти.

Висновки

Проведені експериментальні дослідження поверхневої генерації ДГ при відбиванні від зразків гарячепресованої кераміки SiC, AlN, SiC+20%AlN, SiC+50%AlN та теоретичні розрахунки за допомогою електромагнітної теорії. Для зразків карбіду кремнію і нітриду алюмінію спостерігається добре якісне узгодження теоретичних та експериментальних даних, розташування максимумів ДГ в межах точності вимірювання співпадає. Перевищення теоретично розрахованих значень, максимального значення інтенсивності ДГ при відбиванні, може бути пов'язано з тим, що в реальних зразках значення компонент тензора

нелінійної сприйнятності відрізняються від літературних даних.

Порівняння експериментальних та теоретичних кутових залежностей ДГ для композитних керамік SiC+20%AlN, SiC+50%AlN показує як на кількісну, так і якісну розбіжність. Відмінність положення максимумів інтенсивності ДГ та їх величини вказує на недоліки вибраної моделі нелінійної поляризації композиту та необхідне подальше уточнення теоретичної моделі.

Різниця в інтенсивності другої гармоніки для різних зразків виготовлених із однакового матеріалу таких як SiC №1, SiC №2, та AlN №1, AlN №2 пояснюється різницею лінійних оптичних властивостей (показників заломлення та поглинання на частоті накачки та ДГ).

Література

1. B. Dick, A. Gierulski, G. Marovski, G.A. Reider. Determination of the nonlinear optical susceptibility $\chi^{(2)}$ of surface layers by sum and difference frequency generation in reflection and transmission. // Appl. Phys. B – 1985 – v. 38, 2, pp 107-116.
2. R. W. J. Hollering and M. Barmentlo Symmetry analysis of vicinal (111) surfaces by optical second-harmonic generation. // Optics Communications – 1992 - Volume 88, Issues 2-3, pp. 141-145.
3. Paul M. Lundquist, Weiping Lin, George K. Wong, Manijeh Razeghi, John B. Ketterson. Second harmonic generation in hexagonal SiC // Solid State Lasers and Nonlinear Crystals, Proc. SPIE - 1995 -Vol. 2379, p. 407-414.
4. И.М.Баранова, К.Н.Евтюхов. Генерация второй гармоники и нелинейное электроотражение от поверхности centrosимметричных полупроводников. // Квантовая электроника – 1995 – т. 22, №12, ст. 1235-1240.
5. G. Lupke, D.J. Bottomley, H.M. van Driel. Second- and third-harmonic generation from cubic centrosymmetric crystals with vicinal faces: phenomenological theory and experiment // J. Opt. Soc. Am. B – 1994 – v.11, 1 pp 33-45.
6. A. Liebsch W. L. Schaich Second-harmonic generation at simple metal surfaces. // Phys. Rev. B – 2002 – v.66. pp. 195329-1 – 195329-5.
7. Белий М.У. Робур Л.И. Храпко А.В. Шайкевич И.А. установка для исследования линейных и нелинейных оптических свойств полупроводников и металлов // Квантовая электроника – 1986 – Вып. 31, ст.100-102.
8. Справочник по лазерам том 2. Под редакцией А.М. Прохорова в 2-х томах. М. Сов. Радио, 1978, 400 ст.
9. N. Blombergen, R.K Chang, S.S. Jha and C.H. Lee optical second harmonic generation in reflection from media with inversion Symmetry. Phys. Rev. 174, - 1968, p 813.

10. V. Prokopets. The second order nonlinear optical effects on the ceramic materials surface // Book of abstracts International scientific and practical conference Spectroscopy in special application 18-21, June 2003, Kyiv.
11. N. Bloembergen, R. K. Chang, S. S. Jha, and C. H. Lee. Optical Second-Harmonic Generation in Reflection from Media with Inversion Symmetry. // Phys. Rev. – 1968 – v. 174, 3, pp. 813–822.
12. Н. Бломберген. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966, 424 с.
13. Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979 г. 640 ст.
14. . Singh, J. R. Potopowicz, L. G. Van Uitert, and S. H. Wemple Nonlinear Optical Properties of Hexagonal Silicon Carbide //Applied Physics Letters, 1971 -- Volume 19, Issue 3, pp. 53-56
15. Y. Fujii, S. Yoshida, S. Misawa, S. Maekawa, and T. Sakudo. Nonlinear optical susceptibilities of AlN film. // Applied Physics Letters -- 1977 -- Volume 31, Issue 12, pp. 815-816.
16. Белый М.У., Робур Л.И., Шайкевич И.А., Угловые зависимости генерации второй гармоники в металлах. // Доклады НАН УССР. Сер. А. – 1987, №4, ст. 53-56.

Надійшла до редакції 17.12.2004

УДК 535.372

Вадим П.Сакун

Vadim P.Sakun

Кінетика люмінесценції домішкових аніонів NO_2^- в лужно-галогідних кристалах

Luminescence kinetics of the NO_2^- impurity anions in the alkali halide crystals

Обговорюються результати дослідження кінетики загасання фотолюмінесценції ${}^1B_1 \rightarrow {}^1A_1$ домішко-аніонів NO_2^- в лужно-галогідних кристалах.
Ключові слова: люмінесценція, спектр, кінетика загасання, аніон

The investigation results of the ${}^1B_1 \rightarrow {}^1A_1$ luminescence kinetics decay of the NO_2^- impurity anions in the alkali-halide single crystals are discussed.
Key Words: luminescence, spectrum, decay kinetics, anion

Вступ

Молекулярні аніони (МА) NO_2^- утворюють в лужно-галогідних кристалах (ЛГК) домішкові центри з характерними спектроскопічними властивостями. При 4,2 К в спектрах люмінесценції ${}^1B_1 \rightarrow {}^1A_1$ таких МА реєструється тонка вібронна структура у вигляді вузьких безфононних ліній (БФЛ) з півширинами $\gamma_{\text{БФЛ}} \sim 2-10 \text{ см}^{-1}$, які супроводжуються структурними фононними крилами (ФК) - серія БФЛ+ФК [1-4]. Тонка структура обумовлена народженням декількох квантів внутрішньомолекулярного деформаційного коливання ν_2 домішкового МА, а також коливальних мод матриці при електронному переході. В матрицях LiCl і NaCl такий спектр є досить складний і являє собою суперпозицію спектрів щонайменше трьох різних типів центрів люмінесценції (ЦЛ) [3, 4]. Це серія БФЛ+ФК (ЦЛ типу I), серія дифузних смуг з півширинами $\gamma \sim 40-60 \text{ см}^{-1}$ (ЦЛ типу II) і суцільна активаторна смуга (ЦЛ типу III). Важливу інформацію про такі ЦЛ можна отримати при вивченні часових характеристик люмінес-

© В.П.Сакун 2005

ценції. Метою роботи є дослідження кінетики загасання люмінесценції ${}^1B_1 \rightarrow {}^1A_1$ домішкових МА NO_2^- в ряді ЛГК.

Методика експерименту

Досліджувані монокристали LiCl, NaCl, KCl, KBr і CsCl вирощувалися за методом Стокбаргера. Концентрація домішок, що вводилися в шихту у вигляді солей MNO_2 ($M = Na, K, Cs$) змінювалася у межах 0,2-0,5 мол. дол. %. Вимірювання проведені при 4,2 К. Люмінесценція збуджувалася за допомогою N_2 -лазеру ($\lambda_{36} = 337$ нм, півширина імпульсу фотозбудження $\gamma_{0,5} = 10$ нс, середня потужність $W \sim 3$ мВт) і реєструвалася на спектрометрі ДФС-12. Часові вимірювання спектрів люмінесценції проводилися по стробоскопічній методиці [5]. Форма імпульсу люмінесценції реєструвалася фотопомножувачем 14ЭЛУ-ФТ.

Середній час загасання люмінесценції (τ) розраховувався чисельним інтегруванням за формулою

$$\tau = \int_0^{\infty} I(t) dt \cdot \left[\int_0^{\infty} I(t) dt \right]^{-1} \quad (1)$$

де $I(t)$ -інтенсивність люмінесценції для часу t , що пройшов після закінчення імпульсу фотозбудження.

Результати експерименту і їх обговорення

Проведені кінетичні вимірювання показали, що швидкості загасання серії БФЛ+ФК (ЦЛ типу I), дифузної структури (ЦЛ типу II) і суцільної активаторної смуги (ЦЛ типу III) помітно відрізняються. Співставлення часових констант τ_i виділених різних типів ЦЛ з їх спектроскопічними параметрами (отриманими при вимірюванні інтегральних за часом спектрів люмінесценції) дано в табл. Вперше розглянуто часову поведінку миттєвих спектрів люмінесценції (на прикладі кристалу LiCl- NO_2). Спектральні і часові характеристики ЦЛ III в матрицях KCl, KBr і CsCl приводяться також вперше.

ЦЛ типу I. При 4,2 К тонка структура у вигляді серії БФЛ+ФК спостерігається у всіх розглянутих кристалах. Положення максимумів БФЛ у такій серії копій 00-лінії по коливанню ν_2 добре описуються наближеною формулою для ангармонічного осцилятора

$$\nu_{\text{БФЛ}}(n_2) = \nu_{00} - (n_2 \nu_2^0 + n_2^2 \chi_{22}), \quad (2)$$

де $\nu_{\text{БФЛ}}$ і ν_{00} є хвильові числа, що визначають положення максимуму вібронної копії БФЛ та чисто електронної лінії; ν_2^0 - гармонічна частота деформаційного коливання (в см^{-1}); n_2 - квантове число цього

коливання; χ_{22} - відповідний коефіцієнт ангармонізму. Величина $\chi_{22} \leq 1 \text{ см}^{-1}$, що вказує на практичну гармонічність деформаційного коливання МА в основному електронному стані 1A_1 . Закон загасання інтенсивності БФЛ близький до експоненційного (з часовою сталою τ_1), що відповідає випадку локалізованого збудження і достатньо високому ступеню упорядкування структури ближнього оточення домішкового МА. Порівняння параметру τ_1 в розглянутих матрицях показує, що найбільше значення він має у випадку кристала LiCl. При цьому максимальне значення має і частота 00-переходу $^1B_1 \rightarrow ^1A_1$ (ν_{00} , табл.).

Таблиця. Спектральні і часові параметри центрів люмінесценції NO_2^- в лужно-галоїдних кристалах при 4,2 К

Матриця	Активатор C_0 , мол.дол.%	Тип ЦЛ	τ , нс	ν_{00} , см^{-1}	ν_2^0 , см^{-1}	ν_{max} , см^{-1}
LiCl	NaNO_2 0,2	I	900 ± 80	26892 ± 3	821 ± 2	22700 ± 100
		II	~ 950	26990 ± 5	830 ± 6	
		III	1200 ± 100			
NaCl	NaNO_2 0,4	I	10 ± 3	25975 ± 4	830 ± 4	22000 ± 100
		II	~ 30	26180 ± 10	810 ± 10	
			~ 30	26010 ± 10	800 ± 10	
			~ 30	25950 ± 10	805 ± 10	
			~ 30	25950 ± 10	790 ± 10	
		III	400 ± 50			
KCl	KNO_2 , 0,4	I	24 ± 5	25037 ± 3	802 ± 3	21700 ± 150
		III	~ 40			
KBr	KNO_2 , 0,5	I	25 ± 5	24932 ± 4	795 ± 4	21200 ± 100
		III	~ 30			
CsCl	CsNO_2 , 0,4	I	17 ± 5	24700 ± 2 [2]	$799,9$ [2]	20800 ± 150
		III	~ 30			

Встановлено, що зростання часу t супроводжується деяким низькочастотним зсувом БФЛ. Величина цього зсуву залежить від квантового

числа p_2 і відповідає закономірному часовому зменшенню значень ν_{00} і ν_2^0 . Так, в матриці LiCl при $t=30$ нс вони складають відповідно 26902 ± 4 і 823 ± 3 см^{-1} , а при $t=2500$ нс - 26888 ± 4 і 819 ± 4 см^{-1} . Такі особливості є проявами неоднорідного розширення (НР) тонкої структури. Зазначимо, що співвідношення між інтегральними інтенсивностями БФЛ і ФК (що визначає стоксові втрати на фонони в розглянутих ЦЛ) практично не залежать від t у миттєвих спектрах люмінесценції. Вказані ЦЛ типу I пов'язують з аніонами NO_2^- , які заміщують регулярні аніони галоїду в кристалічній основі [1].

ЦЛ типу II. Дифузна вібронна структура у вигляді серії розширених вібронних смуг - копій 00-смуги по коливанню ν_2 , спостерігається в активаторних спектрах люмінесценції в матрицях LiCl (одна така серія) і NaCl (чотири серії) і відповідає більш значному НР спектру ніж для вищерозглянутого. У зв'язку з малою інтенсивністю таких смуг [4] визначення їх часу загасання (τ_2) носить оціночний характер. В миттєвих спектрах також спостерігається червоний зсув максимуму дифузних смуг при зростанні t , який пов'язаний зі зменшенням частот ν_{00} і ν_2^0 . В кристалі LiCl для вказаного вище часового інтервалу $\Delta t = 30\text{-}2500$ нс величина цього зменшення $\Delta \nu_{00} = 21$ см^{-1} і $\Delta \nu_2^0 = 6$ см^{-1} (більш значна ніж для ЦЛ I).

ЦЛ типу III. Аналіз даних кінетичних вимірювань показав, що в спектрах випромінювання усіх розглянутих кристалів спостерігається суцільна активаторна смуга, час життя якої перевищує такий центрів I і II (табл.). Встановлено, що крива загасання післясвічення такої суцільної смуги помітно відхиляються від експоненціальної залежності. В миттєвих спектрах люмінесценції спостерігається значне червоне зміщення максимуму ν_{max} цієї смуги зі зростанням величини t . Так в матриці LiCl при $t=300$ і 4000 нс величина ν_{max} дорівнює 22600 ± 100 і 21050 ± 100 см^{-1} відповідно. Такі особливості вказують на більш значне НР спектру ЦЛ III у порівнянні з вищерозглянутими. Останнє можна пов'язувати з різними варіантами випадкової вбудови домішкових МА поблизу власних дефектів основи або у міжвузля кристалічної решітки. Доцільно допускати аналогічну природу ЦЛ типу II. Такій вбудові домішкових МА повинно відповідати більш значне НР у порівнянні з заміщенням останніми регулярних аніонів галоїду матриці.

Висновки

Співставлення даних табл. показує, що спектроскопічні і часові параметри виділених ЦЛ помітно відрізняються між собою. Зменшення радіусу регулярного катіону M^+ кристалічної основи в послідовності $\text{Cs}^+ - \text{K}^+ - \text{Na}^+ - \text{Li}^+$ супроводжується зростанням відносної енергетичної відстані між

комбінуючими 1A_1 і 1B_1 електронними станами, а також частоти коливання ν_2 . Останню тенденцію можна пов'язувати зі зменшенням ефективного розміру домішкового МА [6]. В цілому не спостерігається кореляція між величинами τ_i і ν_{00} , а виконується загальна нерівність $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$ при всіх інших рівних умовах. Таким чином, зростанню середнього часу життя τ_i ЦЛ, що утворює домішковий МА NO_2^- , відповідає зростання величини НР його спектру. Можна допустити, що зростанню НР спектру відповідає зниження симетрії локального оточення домішкового МА NO_2^- .

Література

1. Rebane K.K., Rebane L.A. Small molecular ions as impurity centres in crystals // Pure and applied chemistry. - 1974. - V.37, '37. - P. 161-181.
2. Freiberg A., Kukk P. Vibronic and resonance Raman spectra of NO_2^- in body-centered alkali halide crystals // Chem. Phys. - 1979. - V.40, '3. -P. 405-412.
3. Білий М.У., Гайдідей Г.І., Охріменко Б.А., Сакун В.П. Спектрально-люмінесцентні закономірності та локальне оточення домішкового іона NO_2^- у кристалах LiCl і NaCl // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фізика. - 2001. - Вип. 3. - С. 16-20.
4. Bilyi M.U., Gaididei G.I., Okhrimenko B.A., Sakun V.P. Structure of luminescence spectrum and conformation of NO_2^- molecular anion in crystal matrices // Funct. Mat. - 2002. - V.9, №2. - P. 336-340.
5. Кушніренко И.Я., Сакун В.П. Исследование структуры спектров люминесценции раствора CsCl-NO_2^- методом стробирования // Вестн. Киев. ун-та. Сер. физика. - 1981. - Вып. 22. - С. 24-27.
6. Bilyi M.U., Gaididei G.I., Sakun V.P. Spectroscopy of interionic interactions in nitrite aqueous solutions // Funct. Mat.-2000. - V.7, №3. -P. 540-542.

Надійшла до редакції 13.01.2005

УДК 621.378.335.8

Стукаленко В.В.,
Конончук Г.Л.

V.V. Stukalenko*,
G.L. Kononchuk,

Стабілізація частоти випромінювання газового лазера з використанням зовнішнього еталону

The frequency stabilization of the gas laser radiation using the external etalon

В системах стабілізації випромінювання газових лазерів доцільніше використовувати зовнішні еталони. При застосуванні інтерферометра Фабрі-Перо чутливість системи стабілізації, яка базується на стробовому методі утворення сигналу від'ємного зворотного зв'язку, можна покращити в декілька раз раціональним вибором параметрів стробів.

Ключові слова: стабілізація частоти, строб, інтерферометр Фабрі-Перо.

It is expedient to apply an external etalon within a stabilization system of the gas laser radiation. It is possible to improve the sensitivity of the stabilization system, that is using the Fabry-Perot interferometer and that is grounded on the strobe method forming of a negative feedback signal, if the characteristic of the strobes is rationally selected.

Key Words: frequency stabilization, strobe, Fabry-Perot interferometer.

*E-mail: stvik@ukr.net

При реалізації методів стабілізації з використанням внутрішніх параметрів лазера апріорі вважається, що існує однозначний зв'язок між характеристиками випромінювання (інтенсивністю, частотою міжмодового биття) і частотою генерації лазера. Зокрема, вважалась дуже перспективною ідея керування частотою лазера з квазіізотропним резонатором на основі аналізу інтенсивностей ортогональних мод [1–4]; перевірка її в умовах застосування в серійній апаратурі не виправдала цих сподівань [5], хоча з огляду на простоту виконання все ще продовжують публікуватися роботи, в яких автори намагаються використати цю ідею [6].

Як показали наші дослідження [7–8], незначна зміна температури, зовнішнього магнітного поля ведуть до порушення вищевказаного зв'язку. Тому в системах стабілізації випромінювання лазера доцільно використовувати зовнішні еталони: інтерферометр, поглинальну комірку тощо [9–11]. Одним із способів стабілізації частоти є прив'язка частоти лазера до смуги пропускання зовнішнього інтерферометра, що дозволяє звести температурний дрейф частоти лазера до дрейфу інтерферометра. В роботах [10,11] в якості зовнішнього еталону застосовано скануючий інтерферометр Фабрі-Перо (ІФП) і організована система від'ємного зворотного зв'язку (ВЗЗ) з використанням стробового методу. Сигнал відмінності частот лазера і моди ІФП змінює оптичну довжину резонатора

шляхом тепловиділення в елементах конструкції резонатора. Така система дозволяє досить просто керувати частотою в межах контуру підсилення, інерційність зворотного зв'язку, зумовлену низькою швидкістю теплопередачі від нагрівача до елементів резонатора, можна подолати, якщо зв'язок між тепловиділяючими елементами і конструктивними елементами резонатора відбувається через радіаційний контакт. В якості тепловиділяючого елементу ВЗЗ служили лампи розжарення в спеціально підібраному режимі роботи [11].

Для стабілізації довжини резонатора та положення моди в контурі підсилення за рахунок зовнішнього підігріву корпусу лазера був використаний пристрій термостабілізації [10]. Пристрій термостабілізації складається з двох основних частин. Перша частина пристрою служить для отримання двох сталих напруг, які характеризують положення лінії на контурі підсилення. Інша частина пристрою призначена для терморегулювання системи. На вході знаходиться компаратор для порівняння значення напруги в двох каналах. Пилкоподібна напруга подається одночасно на скануючий ІФП і на блок компараторів, який в заданій фазі розгортки формує два щільних послідовних строб-імпульси (рис. 1). В залежності від співвідношення сигналів на своїх входах компаратор-2 запускає (або не запускає) одновібратор, імпульс якого через потужний підсилювач керує тепловиділенням у корпусі резонатора. Теплове видовження резонатора призводить до зміни частоти генерації, тому положення лінії генерації перестає співпадати з жодним із стробів, на входах компаратора-2 відсутні будь-які сигнали, при цьому схема тепло-

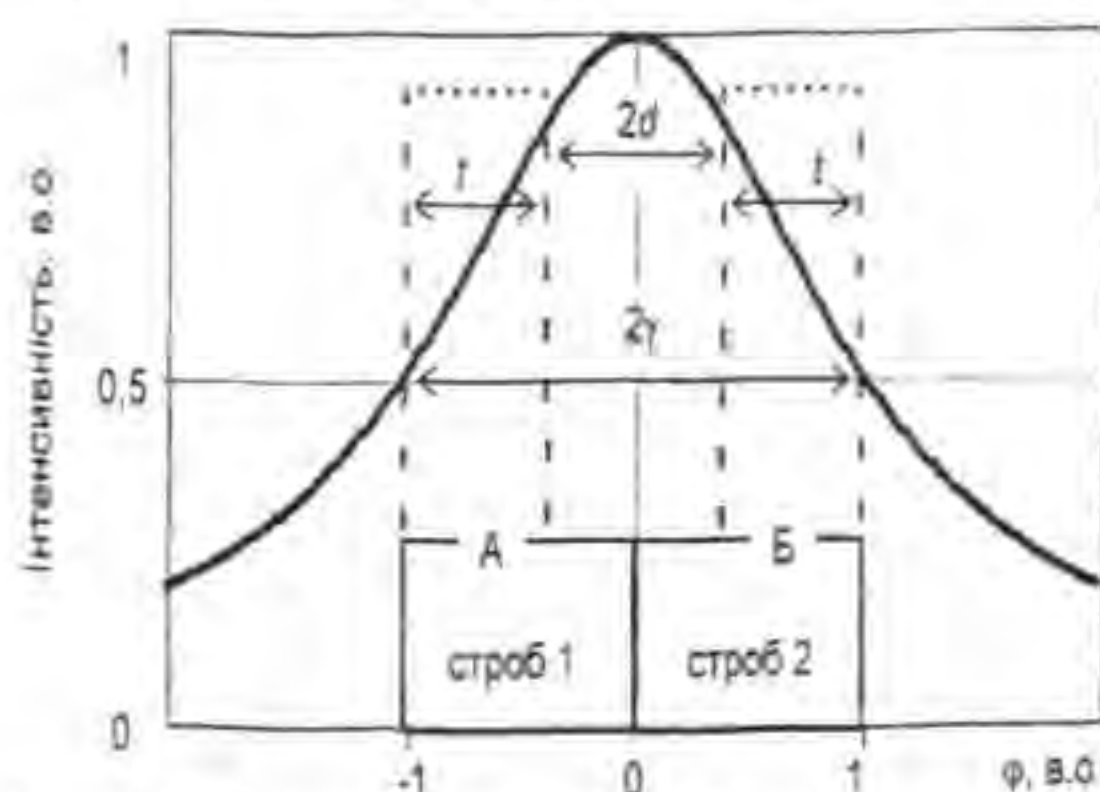


Рис. 1. Функція розподілу інтенсивності випромінювання, яке пройшло через ІФП (суцільна крива); строби, відстань між якими $2d$ (штрих), при $d=0$ – (суцільна лінія); t – ширина строба; 2γ – напівширина лінії.

натора починається скорочення його завдяки охолодженню, результатом цього є рух моди в спектрі на екрані в зворотному напрямку – аж до моменту, коли положення моди та стробів знову співпадуть. Коли строби розташовані симетрично відносно спектральної лінії, напруги в каналах А і Б рівні, при зміщенні лінії відбувається і зміна напруг А та Б, і система стабілізації намагається повернути лінію назад в симетричне положення відносно стробів. Як тільки мода перетне середню лінію, спрацює компаратор-2 і процес повторюється як описано вище. Амплітуда розхитування частоти

визначається інтенсивністю теплообміну та величиною перегріву корпусу резонатора відносно рівноважного стану. Саме ж положення стробів можна змінювати вздовж осі частот (або фази пилкоподібної напруги) і тим самим через систему зворотного зв'язку примусити генерувати лазер на будь якій з дозволених частот в межах контуру підсилення.

На наш погляд, в зв'язку з тим, що контур лінії інтенсивності, зформованої ІФП, має майже плоску вершину, не раціонально конструювати строби впритул один до одного, як це запропоновано в роботі [10]. Дійсно, в цьому випадку при зміщенні частоти генерації різницевого сигнал в каналах мало змінюється, оскільки лінія розділу стробів рухається в області майже незмінної амплітуди. Сигнал керування формується як різниця двох великих сигналів, кожен з яких має деяку неінформативну добавку. В результаті при однаковому різницевому сигналі збільшуються шуми мультиплікативного характеру, які підвищують поріг чутливості системи автоматичної підстройки частоти. Мультиплікативний шум визначається дробовими шумами (шуми Шоткі), в залежності від типу приймача може змінюватися в широких межах і значно перевищувати адитивний шум, який в цьому випадку можна не враховувати. Для оптимізації відношення сигнал/шум варто було б в кожному стробі (рис. 1) вирізати область сплющеної вершини лінії, тобто, утворити щпарину між стробами. Розмір щпарини $2d$ як і величина самих стробів t може бути розрахована для конкретного інтерферометра з врахуванням його апаратної функції.

Вважаємо, що розподіл інтенсивності в інтерференційній картині, утвореній ІФП, описується формулою Ейрі [12]:

$$I(\varphi) = \frac{I_0(1-r)^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (1)$$

де $I(\varphi)$, I_0 – інтенсивності світла, що пройшло через ІФП, та падаючого світла відповідно, r – коефіцієнт відбивання дзеркал, φ – різниця фаз сусідніх інтерферуючих променів, $\varphi = 4\pi n h \nu / c$, n – показник заломлення, h – товщина ІФП, ν – частота випромінювання (на рис. 1 наведено лише один k -й максимум). Повна ширина лінії на половині висоти визначається з очевидного рівняння, позначимо її 2γ . Надалі використовуємо безрозмірні частотні інтервали, нормуючим множником для яких служить γ .

Величина сигналу в кожному з каналів реєстрації визначається інтегралом від інтенсивності світла в межах відповідного строба, тобто, положенням стробів А та Б відносно лінії розподілу інтенсивності в інтерференційній картині, утвореній ІФП. Строби мають однакову ширину t ; при нульовому різницевому сигналі вони розміщуються симетрично відносно центру лінії; розмір щпарини між стробами позначимо $2d$.

Зміщення стробів τ відносно їхнього симетричного положення відбувається внаслідок зміни частоти генерації лазера під впливом зовнішніх чи внутрішніх чинників. Сумарну інтенсивність в межах кожного строба $F_1(\tau, d, t)$, $F_2(\tau, d, t)$ визначаємо як інтеграл:

$$F_1(\tau, d, t) = \int_{(d+\tau)\gamma}^{(d+\tau+t)\gamma} I(\varphi) d\varphi, \quad F_2(\tau, d, t) = \int_{(-d-t+\tau)\gamma}^{(-d+\tau)\gamma} I(\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Вхідним сигналом керування для системи ВЗЗ є різниця між сигналами стробів

$$F(\tau, d, t) = F_1(\tau, d, t) - F_2(\tau, d, t). \quad (3)$$

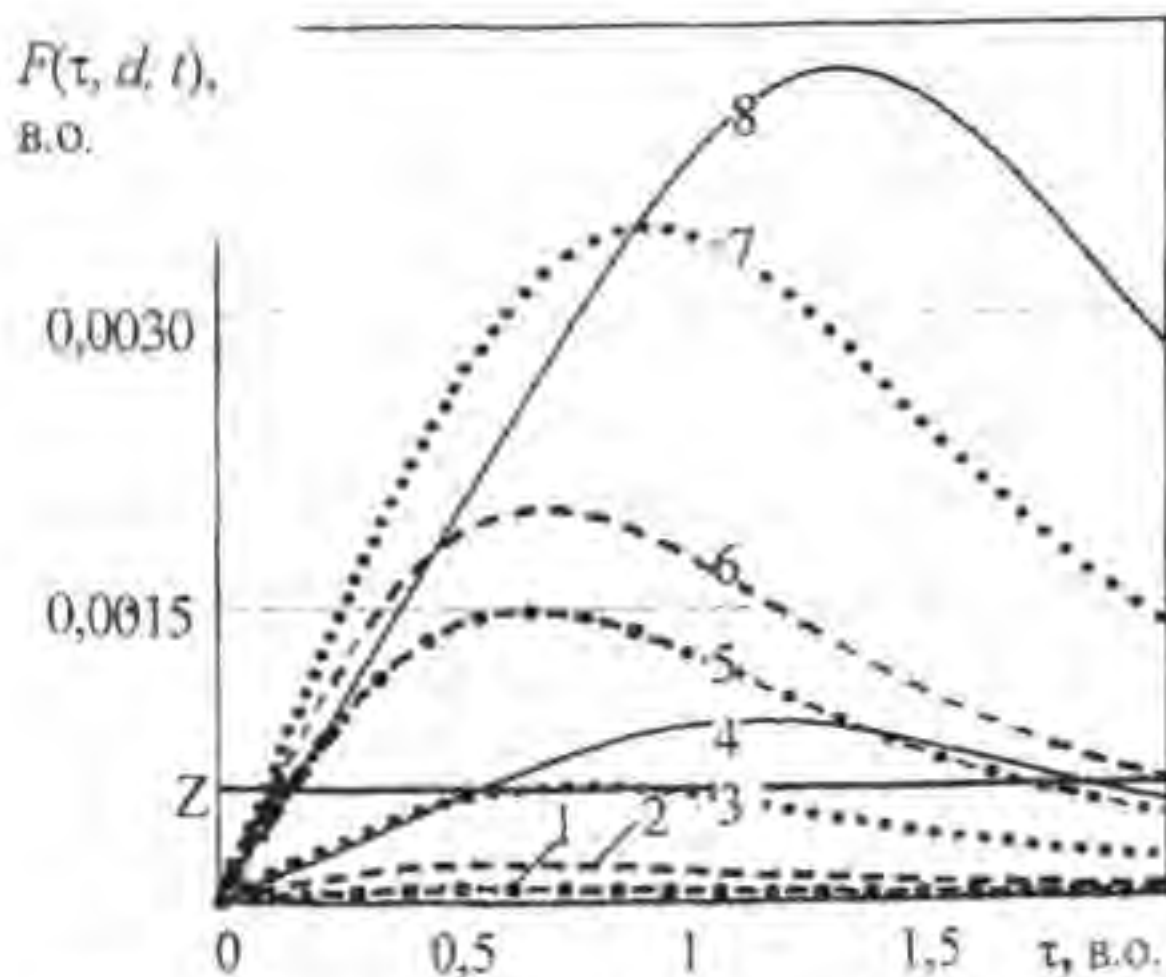


Рис. 2. Залежність різницевого сигналу (3) від зміщення τ частоти генерації відносно стробів для різних значень ширини стробів t і величин шпарини $2d$:

$t=0,1\gamma$, $d=0$ (кр.1); $0,1\gamma$ (2); $0,5\gamma$ (3); 1γ (4);
 $t=0,5\gamma$, $d=0$ (5); $0,1\gamma$ (6); $0,5\gamma$ (7); 1γ (8);
лінія Z – порогове значення вхідного сигналу ВЗЗ.

При різних ширинах стробів t та різних шпаринах між ними $2d$ залежність різницевого сигналу $F(\tau, d, t)$ від величини зміщення τ має специфічний хід та максимум, положення якого залежить від величин t та d (рис. 2). Як видно з рисунку, існує оптимальне співвідношення між шириною строба t і його розташуванням відносно центру лінії інтенсивності d , при якому забезпечується максимальна чутливість системи ВЗЗ. Тому має сенс розглянути залежність різницевого сигналу в каналах від величини шпарини d (рис. 3). Виберемо зміщення між центром лінії розподілу інтенсивності і стробами, яке виникає в результаті зміни частоти випромінювання лазера, рівним, наприклад, $\tau = 0,03 \gamma$; для ІФП з коефі-

цієнтом відбивання дзеркал 0,99, областю вільної дисперсії 6 ГГц, цьому τ відповідає значення приблизно 0,3 МГц. Як видно з рис. 3, всі криві $F(\tau, d, t)$ мають максимум. Якщо нормувати ці залежності на величину сигналу при $d = 0$, то виявляється, що існує критичне значення $d_{кр}$, при перевищенні якого співвідношення між вказаними сигналами стає меншим

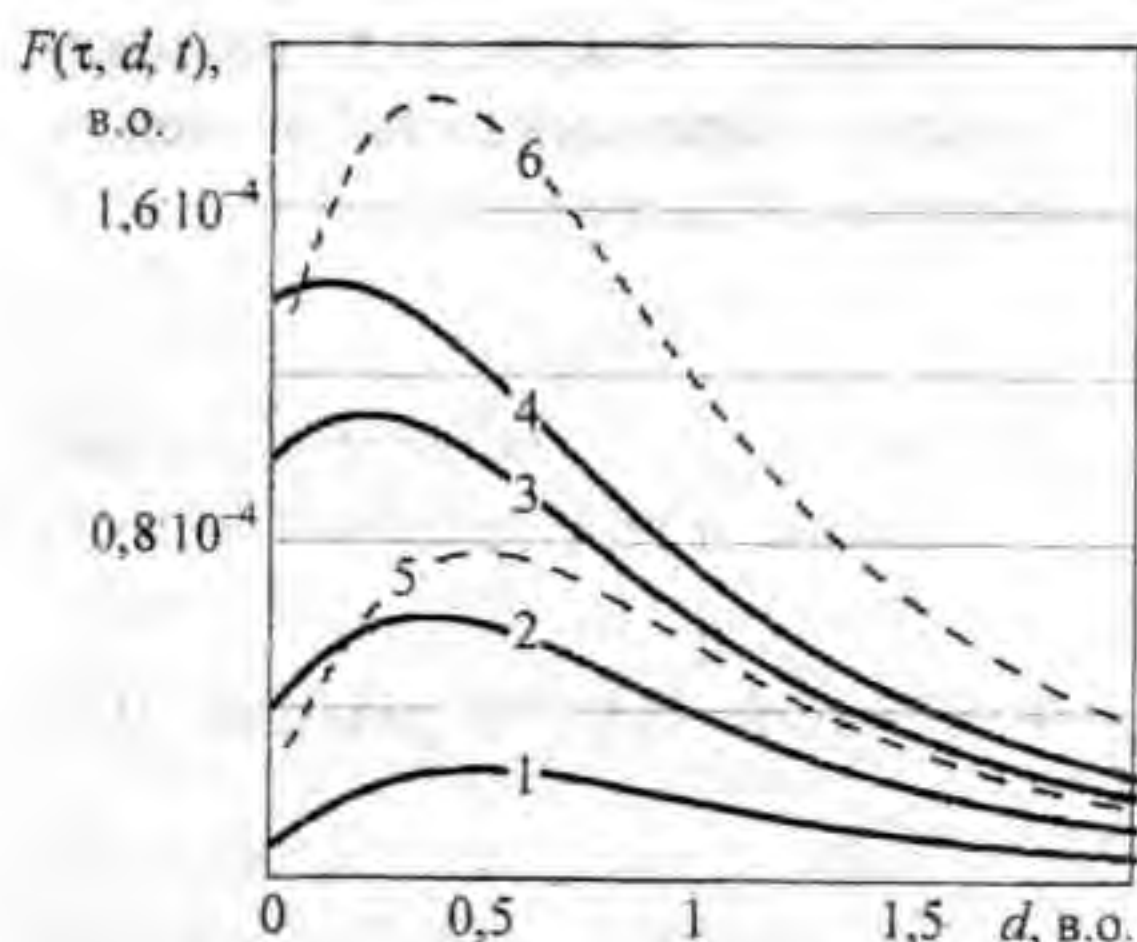


Рис. 3. Залежність різницевого сигналу (3) від величин шпарини між стробами $2d$ при заданому зміщенні: $\tau = 0,01\gamma$ (суцільні криві) при $t = 0,2\gamma$ (кр. 1); $0,5\gamma$ (2); 1γ (3); $1,5\gamma$ (4).
 $\tau = 0,03\gamma$ (штрих. кр.) $t = 0,1\gamma$ (5); $0,5\gamma$ (6).

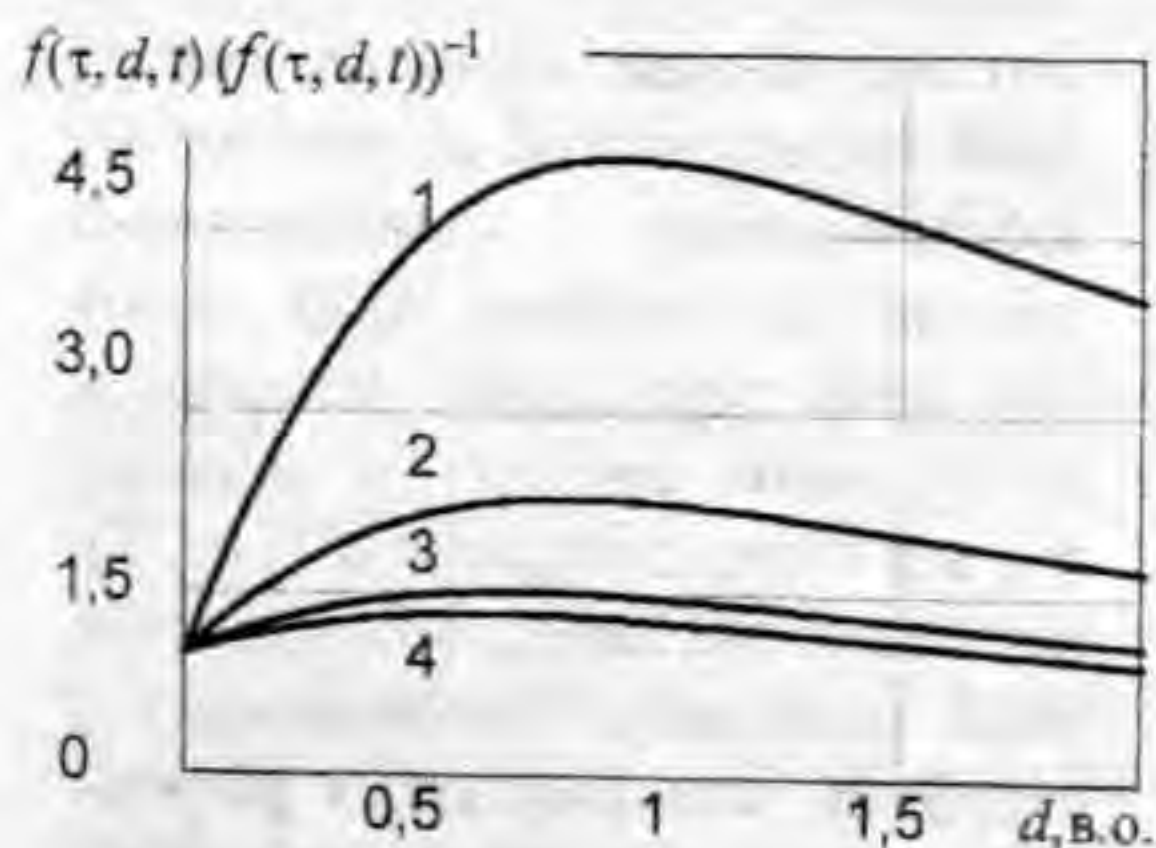


Рис. 4. Залежність відношення величини сигналів при певному d до величини сигналу при $d=0$ від величини шпарини при $\tau = 0,01\gamma$ та різних ширинах стробів t : $t = 0,2\gamma$ (кр.1); $0,5\gamma$ (2); 1γ (3); $1,5\gamma$ (4).

за 1, а тому використовувати значення $d > d_{кр}$ є недоцільним. Разом з тим чутливість системи зростає, якщо вибрати розмір шпарини в межах $d_{кр} > d > 0$.

Величина різницевого сигналу $f(\tau, d, t)$ нормована на величину мультиплікативного шуму. Останній ми визначаємо за формулою $F_{ш} = \varepsilon (F_1(\tau, d, t) + F_2(\tau, d, t))$, тобто, фактично це є відношення сигнал/шум:

$$f(\tau, d, t) = F(\tau, d, t) / F_{ш}, \quad (4)$$

коефіцієнт ε в залежності від вибору приймача може змінюватися в широкому діапазоні, приймемо його рівним 10^{-3} . Розрахунки показали, що починаючи з певних значень d , відгук системи ВЗЗ більший для менших ширин строба (а значить, для меншого значення мультиплікативного шуму). Залежність величини сигналів $f(\tau, d, t)$ нормованої на величину сигналів $f(\tau, 0, t)$ має максимум, що спостерігається при розташуванні центрів стробів в області максимальної крутизни лінії (рис. 4), причому, „сплюснена” вершина лінії повинна бути виключена. Зрозуміло, що при цьому величина зміщення краю строба відносно центру лінії залежить від ширини строба (див. максимуми на відповідних кривих рис. 4, де наведено розрахунок для $\tau = 0,01\gamma$). Аналогічні залежності для зміщень $\tau = 0,03\gamma$ та $\tau = 0,1\gamma$ при рівних ширинах стробів практично збігаються з такими для $\tau = 0,01\gamma$.

Отже, використовуючи запропонований алгоритм розрахунку, можна, враховуючи параметри конкретної установки, розрахувати оптимальну ширину стробів та розміщення їх відносно центра лінії з метою поліпшення співвідношення сигнал/шум та досягнення максимальної чутливості системи, а отже і точності встановлення частоти генерації лазера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Власов А.Н., Перебякин В.А., Поляков С.Ю., Привалов В.Е. Долговременная стабильность и воспроизводимость частоты He-Ne лазера с внутренними зеркалами // Квантовая электроника. – 1986. – 13, №2. – с.320–325
2. Ciddor C, Duffy K.M. Two-mode frequency-stabilised He-Ne (633 nm) lasers: studies of short- and long-term stability // *J.Phys.E, Sci. Instrum.* – 1983. – 16, №12. – p.1223–1227
3. Yokoyama Shuko, Araki Tsutomu, Suzuki Norichito. Intermode beat stabilized laser with frequency pulling // *Appl.Opt.* – 1994. – 33, №3. – p.358–363
4. Yoshiko T. Frequency Stabilization of Internal-Mirror He-Ne ($\lambda = 633$ nm) Lasers Using the Polarization properties // *Japanese Journal of Applied Physics.* – 1980. – 19, N 11. – p.2181–2185
5. Власов А.Н., Привалов В.Е. Воспроизводимость частоты терморегулированного He-Ne-лазера при различных критериях начального прогрева // Приборы и системы управления. – 1999. – №10. – с.40–42.
6. Wysocki G., Abramski K. M. Frequency stabilisation of twin orthogonal mode He-Ne laser // *Optica Applicata.* – 2002. – 32, N 1–2. – p.207–213
7. Конончук Г.Л., Стукаленко В.В. Вплив температури активного середовища на міжмодові інтервали газового лазера // Наукові записки НаУКМА, фізико-математичні науки. – 2002, №1. – с. 83–90
8. Kononchuk G.L., Stukalenko V.V. Destabilizing factors in operation of short-cavity He-Ne laser // *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics.* – 2003. – 6, № 3. – p. 365–369
9. Гольдорт В.Г., Гончаров А.Н., Ом А.Э., Скворцов М.Н. Система стабилизации частоты лазера по склону полосы пропускания внешнего интерферометра // *ПТЭ.* – 1989. – № 1. – с.187–191
10. Конончук Г.Л., Хоменко І.Є, Фари́на Д.С. Свіп-лазер // Вісник Київського університету, Серія фіз.-мат. науки. – 1998, №2. – с. 408–411
11. Конончук Г.Л., Стукаленко В.В., Фари́на Д.С., Шинкар В.В. Стабілізація частоти випромінювання лазера зовнішнім ІФП // Вісник Київського університету, Серія фіз.-мат. науки. – 1998, №4. – с.268–272
12. Королев Ф.А. Теоретическая оптика. – Москва: Высшая школа, 1966. – с.415

Надійшла до редколегії 05-11-2004

УДК 520.17

Євген П. Удалов¹, Юрій А.
Хомич²

**Рефракція лазерного
випромінювання у
високоградієнтних полях
фотопружних матеріалів**

У роботі подано новий підхід щодо проходження електромагнітного випромінювання у фотопружних середовищах, що включають в себе градієнтні поля напружень. Підхід заснований на розгляді взаємозв'язку тензора діелектричної проникності і тензора напружень у досліджуваній точці середовища. Отримано дозвільні рівняння для нормальних напружень та їх суми в областях із градієнтними полями напружень на основі рефракційних вимірів лазерного світла.

Ключові слова: тензор діелектричної проникності, градієнтне поле напружень, рефракція, нормальні напруження.

¹ E-mail: udalov@univ.kiev.ua

² E-mail: homich@rada.gov.ua

Evgen P. Udalov¹, Yuri A.
Khomich²

**Laser Radiation Refraction
in Photoelastic Material's Area
with High Gradients of
Stresses**

In the work the now approach to passing electromagnetic radiation in photoelastic media on containing gradient stresses of fields, is stated. The approach is based on consideration of permittivity tensor and stress tensor correlation in tested point of medium. The resolving equations for normal stresses and their sum in areas with gradient fields of stresses on the base of laser light refraction measurements are obtained.

Key Words: laser beam propagation, gradient stress of fields, refraction, normal stresses.

Уведення

Підвищення якості, надійності і довговічності сучасних машин і конструкцій, що працюють у великих діапазонах навантажень, висуває в якості однієї з найважливіших проблем критерій їхньої міцності. Експериментальні методи механіки і фізики деформованого середовища широко використовуються для оцінки міцності виробів при статичних, динамічних і теплових режимах навантаження. Вони мають переважające значення в тих випадках, коли аналітичні чи чисельні підходи до рішення задачі малоефективні чи відсутні.

Одним з найбільш розвинутих експериментальних методів дослідження напружено-деформованого стану (НДС) конструкцій і їхніх елементів є метод фотопружності.

З огляду на існуючі тенденції оптимального проектування відповідальних деталей машин, зниження матеріалоємності за рахунок композитних матеріалів, розвиток методу фотопружності в дослідженні локальних деформацій з великими градієнтами напружень стає особливо актуальним. Важливого значення набуває розвиток нових фізичних підходів до оптичних ефектів у фотопружних тілах.

I. Рефракція світлового випромінювання в ізотропних середовищах

Розглядаючи закони поширення світлового випромінювання в середовищі будемо ґрунтуватися на Максвелівських рівняннях хвильової теорії світла для випадку нескінченних-малих довжин хвиль $\lambda \rightarrow 0$. Фізична модель поширення світла в цьому випадку являє собою тривимірне векторне поле, лініями струму якого є світлові промені [1].

Розглянемо гармонічно змінне з часом електромагнітне поле загального вигляду на значній відстані від джерела випромінювання:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\mathbf{r}, t) &= \bar{e}(\bar{\mathbf{r}}) \exp[ik_0 L(\bar{\mathbf{r}})], \\ \bar{H}(\mathbf{r}, t) &= \bar{h}(\bar{\mathbf{r}}) \exp[ik_0 L(\bar{\mathbf{r}})].\end{aligned}\quad (1.1)$$

де $\bar{e}(\bar{\mathbf{r}})$ і $\bar{h}(\bar{\mathbf{r}})$ - векторні функції положення електричного і магнітного поля, відповідно;

$L(\bar{\mathbf{r}})$ - "оптичний шлях" - дійсна скалярна функція положення; $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ - хвильове число.

Підставляючи (1.1) у рівняння Максвела і з урахуванням того, що розглянута область вільна від струмів і зарядів, а комплексні вектори $\bar{E}$ і $\bar{H}$ задовольняють цим рівнянням у формі, що не залежить від часу, після ряду перетворень одержимо рівняння ейконалу [1]:

$$(\text{grad} L)^2 = n^2 \quad (1.2)$$

Фізичне трактування сімейства непересічних поверхонь $L(\bar{\mathbf{r}}) = \text{const}$ являє собою геометричні хвильові фронти чи хвильові поверхні.

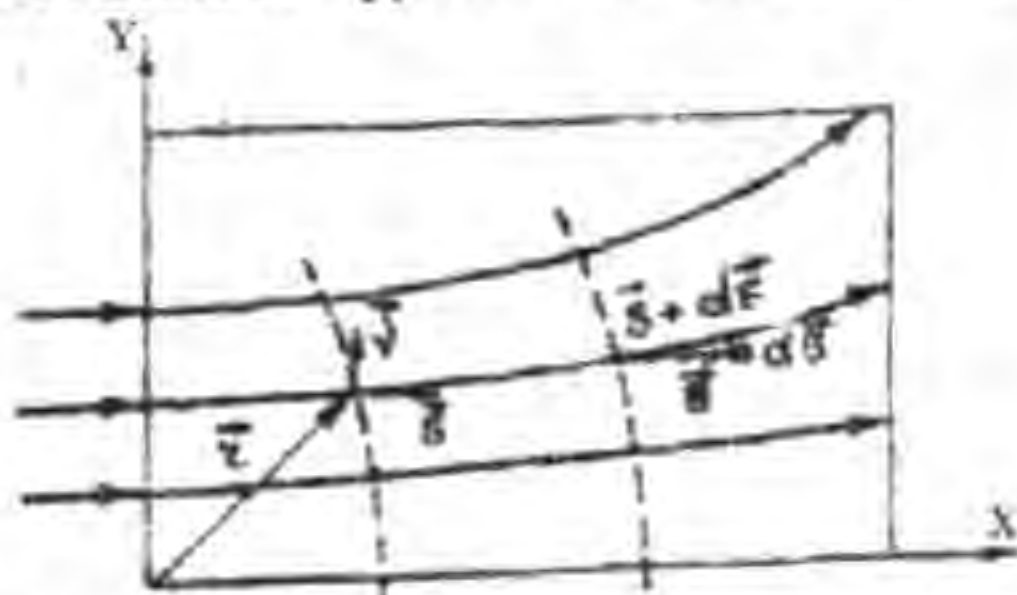


Рис.1.1. Хвильові фронти і скривлення світлових променів у неоднорідному середовищі.

Геометричні світлові промені можуть бути визначені як траєкторії поширення енергії, ортогональні до геометричних хвильових фронтів $L(\vec{r}) \equiv \text{const}$ [1]. Введемо поняття вектора $\vec{s}$, визначеного на підставі рівняння ейконалу (1.2) як одиничний нормальний вектор:

$$\vec{s} = \frac{\text{grad} L}{|\text{grad} L|} = \frac{\text{grad} L}{n} \quad (1.3)$$

а також виражаючи $\vec{s}$ через радіус-вектор $\vec{r}$ довільної точки лучачи:

$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (1.4)$$

Комбінуючи (1.3) і (1.4), одержуємо диференціальне рівняння для світлових променів у вигляді

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = \text{grad} L \quad (1.5)$$

Зв'язуючи траєкторію променів з розподілом показника заломлення в середовищі $n(\vec{r})$, опишемо поведінку променів (тут і надалі під світловими променями мається на увазі монохроматичне випромінювання $\lambda \equiv \text{const}$) не за допомогою функції L , а безпосередньо показником заломлення. Для цього диференціюємо по S рівняння (1.3) і, використовуючи відомі векторні тотожності, одержуємо векторну форму диференціальних рівнянь для світлових променів у вигляді [2]:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \text{grad} n \quad (1.6)$$

Для однорідного середовища, де $n(x, y, z, \lambda) = \text{const}$, рівняння (1.6) приводиться до вигляду - $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} = 0$, відкіля $\vec{r} = s\vec{a} + \vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ суть постійні вектори.

Неоднорідні середовища, де $n \neq \text{const}$, можуть бути підрозділені на два класи. До одного з них відносяться середовища, де є порушення безперервності чи стрибок показника заломлення, до другого класу, де $\vec{r}, \vec{j}, \vec{\zeta}, \frac{dn}{dr}$ змінюється безперервно, це плазма, аеродинамічні поля, фотопружні середовища які знаходяться під навантаженням.

Введемо вектор кривизни світлового променя $\vec{k}$, напрямок якого відповідає зміні напрямку світлового променя ds :

$$\vec{k} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{\nu} \quad (1.7)$$

де $\vec{\nu}$ - одиничний вектор головної нормалі лучачи; ρ - довжина вектора кривизни.

З огляду на вигляд рівняння (1.6) і рівняння (1.7), можна одержати загальне диференціальне рівняння поширення світла в середовищі з показником заломлення n [1-3]:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} = \frac{1}{n} \text{grad} - \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (1.8)$$

Визначаючи вектор $\vec{r}(s)$ у вигляді: $\vec{r}(s) = u(z)\vec{i} + v(z)\vec{j} + z\vec{z}$; де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{z}$ - права трійка одиничних векторів, напрямок яких зв'язаний з головними напрямками тензора показника заломлення фотопружного (анізотропного під навантаженням і однорідно-ізотропного без нього) тіла; u, v, z - це дійсні скалярні функції напрямків.

Введемо обмеження на фотопружне середовище, що розглядається.

$$A \quad \frac{\partial n}{\partial u} \neq 0; \quad \frac{d^2 u_i}{dz^2} = \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial u}; \quad \frac{\partial n}{\partial z} = 0$$

$$B \quad |u| \gg |z|, \quad |v| \gg |z|.$$

C - світло поширюється в напрямку z і проходять крізь градієнтне поле показника заломлення товщиною L .

Тоді рівняння поширення світлових променів, представлені по компонентах i і j , будуть мати вигляд:

$$n \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial n}{\partial u}, \quad n \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial n}{\partial v} \quad (1.9)$$

Введемо у розгляд поляризацію світлового випромінювання, що падає на фотопружне середовище, будемо мати чотири рівняння вигляду (1.9) з індексами i і j (напрямки i і j поляризації збігаються з головними напрямками тензора напружень, про що буде сказано нижче).

Тоді для одного з напрямків i справедливі співвідношення:

$$\frac{d^2 u_i}{dz^2} = \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial u}, \quad \frac{d^2 u_j}{dz^2} = \frac{1}{n_j} \frac{\partial n_j}{\partial u} \quad (1.10)$$

де n_1 і n_2 - компоненти тензора показника заломлення по головних напрямках.

Інтегруючи (1.10) по напрямку z , з урахуванням, що $n_{1,2}$ і $\frac{\partial n_{1,2}}{\partial u}$ постійні уздовж траєкторії променя,

$$\text{tg} \gamma_i = \left(\frac{du_i}{dz} \right) = \frac{1}{n} \frac{\partial n_i}{\partial u} L, \quad \left(\frac{d^2 u_i}{dz^2} \right) = \int_{z=0}^L \frac{\partial n_i}{\partial u} dz \quad (1.11)$$

Отримані інтеграли розглядаються як лінійні інтеграли по траєкторії світлового променя. Якщо відхилення від прямолінійності за рахунок рефракції малі, як при великих градієнтах показника заломлення і малій товщині моделі чи при малих градієнтах показника заломлення і великій товщині моделі, то інтегрування уздовж траєкторії світлового променя від 0 до L можна замінити інтегруванням у напрямку z [2]. З огляду на це,

$$\operatorname{tg} \gamma_i = \left(\frac{du_i}{dz} \right)_L = \frac{1}{n} \frac{\partial n_i}{\partial u} L, \operatorname{tg} \gamma_j = \left(\frac{du_j}{dz} \right)_L = \frac{1}{n} \frac{\partial n_j}{\partial u} L \quad (1.12)$$

Аналогічними міркуваннями можна одержати залежності для кутів рефракції в напрямку v , якщо в цьому напрямку також присутній градієнт показника заломлення. Тоді загальний кут відхилення для відповідних компонентів поляризованого світла визначиться векторною сумою двох відхилень. За умови, що кути рефракції дуже малі,

$$\xi_i = (\gamma_i^2 + \theta_i^2)^{1/2}; \xi_j = (\gamma_j^2 + \theta_j^2)^{1/2} \quad (1.13)$$

де γ_{ij} - кути рефракції в напрямку u , θ_{ij} - кути рефракції в напрямку v .

З огляду на те, що світло виходячи з моделі вже не падає нормально на границю розділу (мається на увазі границя розділу матеріал моделі – інше середовище), на підставі закону Снеліуса запишемо

$$\gamma'_{ij} = n_{1,2} \gamma_{i,j}; \quad \theta'_{ij} = n_{1,2} \theta_{i,j}, \quad (1.14)$$

і введемо нормалізовані величини, кутів рефракції:

$$\gamma^*_{ij} = \gamma'_{ij} / L = \frac{\partial n_{1,2}}{\partial u}; \quad \theta^*_{ij} = \theta'_{ij} / L = \frac{\partial n_{1,2}}{\partial v} \quad (1.15)$$

Вирази (1.15) показують, що кути рефракції в напрямках u і v , отримані при розгляді загальних законів електродинаміки, лінійно залежать від градієнтів відповідних компонент тензора показника заломлення по головних напрямках.

II. Взаємозв'язок механічного стану прозорих середовищ з явищем рефракції світла

Розглядаючи тверде, прозоре, ізотропне, однорідне середовище як фотопружне, прийнято вважати, що воно здобуває оптичну анізотропію при дії на нього механічних навантажень [4].

У локальних точках фотопружних моделей, що містять великі градієнти напружень, положення про однорідність середовища не буде справедливим. У таких областях, природно, існують великі градієнти показника заломлення і при їхньому розгляді необхідно використовувати Борновські підходи до поширення світлового випромінювання в оптично неоднорідному, ізотропному в механічному розумінні середовищі, разом з поняттями анізотропії, прийнятими у фотопружності.

За умови, що в розглянутій точці моделі тензор діелектричної проникності, а відповідно, і тензор показника заломлення збігаються з тензором напружень по головних напрямках, цей зв'язок має вираз лінійної комбінації у вигляді закону Вертгейма, й може бути записаний як [5]:

$$n_i = n_0 + (c_1 - c_2) \delta_i I_\sigma \quad i=1,2,3; \quad (2.1)$$

$c_{1,2}$ – абсолютні коефіцієнти фотопружності; $I_\sigma = \sum_{i=1}^3 \sigma_i$; σ_i – напруження для головних осей. Диференціюючи (2.1) по напрямках u і v , що є головними напрямками тензора напружень і використовуючи (1.15), можна представити кути рефракції як

$$\gamma_{i,j}^* = \frac{\partial n_{i,2}}{\partial u} = c_1 \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial u} + c_2 \frac{\partial \sigma_{2,1}}{\partial u} ; \theta_{i,j}^* = \frac{\partial n_{i,2}}{\partial v} = c_1 \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial v} + c_2 \frac{\partial \sigma_{2,1}}{\partial v} \quad (2.2)$$

Рівняння (2.2) встановлюють взаємозв'язок між кутами рефракції поляризованого (індекси i, j) монохроматичного випромінювання, що падає на фотопружне середовище, із градієнтами напружень по головних напрямках [6]. Розглядаючи рівняння (2.2) як узагальнені, необхідно пам'ятати, що напрямки u і v – це локальні напрямки в розглянутій точці, зв'язані з головними напрямками тензорних величин ϵ, n, δ . Опускаючи докладний розгляд впливу лінзового ефекту й ефекту каустик, що виникає у випадку великих деформацій поверхні досліджуваної моделі і великих внутрішніх напружень, на основоположні рівняння рефракції, відзначимо, що ці ефекти вносять вклад у величину коефіцієнтів c_1 і c_2 , що входять у рівняння (2.2). І в першому наближенні, при збереженні лінійності рівнянь вигляду (2.2), можуть бути представлені [8,9] як

$$c_{1,2}^* = c_{1,2} \pm \frac{\nu}{E} (n_0 - 1) \quad (2.3)$$

де: $c_1^* = a_{11} n_0^3 / 2$; $c_2^* = a_{22} n_0^3 / 2$, ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга, n_0 – показник заломлення ненапруженого середовища для фіксованої довжини хвилі λ , a_{11}, a_{22} – абсолютні пьезооптичні сталі досліджуваного матеріалу.

Коефіцієнти (2.3) раціонально назвати пьезооптичними коефіцієнтами градієнтної фотопружності.

Виходячи з рівнянь (2.2), можна одержати загальні рівняння для градієнтів нормальних напружень на основі рефракції монохроматичного світлового випромінювання, при його поширенні у фотопружних матеріалах:

$$\frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial u} = \frac{c_1^* \gamma_{1,2}^* - c_2^* \gamma_{2,1}^*}{c_1^{*2} - c_2^{*2}} ; \quad \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial v} = \frac{c_1^* \theta_{1,2}^* - c_2^* \theta_{2,1}^*}{c_1^{*2} - c_2^{*2}} \quad (2.4)$$

Здійснимо перехід від головних напружень до нормальних [5] за допомогою формул

$$\begin{aligned} 2\sigma_x &= \sigma_1 + \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha; \\ 2\delta_y &= \sigma_1 + \sigma_2 - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha; \\ 2\tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.5)$$

α у виразах (2.5) є кутом ізокліни, рівним куту повороту локальної системи координат u і v у розглянутій точці щодо загальної системи координат x , y (у фотопружності прийнято вважати його кутом нахилу головних площадок відносно осі x Декартові системи координат).

Робимо поворот локальної системи координат u і v на кут α і відраховуємо його проти напрямку повороту годинної стрілки з позитивним знаком, а по напрямку повороту годинної стрілки - з негативним знаком, за допомогою наступних виразів

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial y} &= \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial v} \cos 2\alpha \pm \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial u} \sin 2\alpha \\ \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial u} \cos 2\alpha \pm \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial v} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (2.6)$$

В подальшому, проводимо диференціювання рівнянь (2.6) по dx і dy використовуємо (2.6), (2.4), групуємо вирази із огляду на те, що повний диференціал функції повинен бути визначений як $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, після чого одержуємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x_0, y_0) + \frac{1}{2c_s} \int_{x_0}^x (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx + \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_R \cos \alpha \mp \theta_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dx + \\ &+ \frac{1}{2c_s} \int_{y_0}^y (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy + \frac{1}{2c_R} \int_{y_0}^y (\theta_R \cos \alpha \pm \gamma_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dy - 2(H + T),\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2c_s} \int_{x_0}^x (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx - \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_R \cos \alpha \mp \theta_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dx + \\ &+ \frac{1}{2c_s} \int_{y_0}^y (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy - \frac{1}{2c_R} \int_{y_0}^y (\theta_R \cos \alpha \pm \gamma_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dy + 2(H + T),\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{xy}(x_0, y_0) + \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_R \cos \alpha \mp \theta_R \sin \alpha) \sin 2\alpha dx + \int_{x_0}^x (\delta_1 - \delta_2) \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \\ &+ \frac{1}{2c_R} \int_{y_0}^y (\theta_R \cos \alpha \pm \gamma_R \sin \alpha) \sin 2\alpha dy + \int_{y_0}^y (\delta_1 - \delta_2) \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy.\end{aligned}\quad (2.9)$$

де

$$\begin{aligned}\gamma_R &= \gamma_i - \gamma_j; \theta_R = \theta_i - \theta_j; c_R = c_1 - c_2; \gamma_i^* = \gamma_i / L; \gamma_j^* = \gamma_j / L; \\ \gamma_s &= \gamma_i + \gamma_j; \theta_s = \theta_i + \theta_j; c_s = c_1 + c_2; \theta_i^* = \theta_i / L; \theta_j^* = \theta_j / L;\end{aligned}\quad (2.10)$$

θ_i, θ_j - кути рефракції в досліджуваній точці при проходженні крізь модель товщиною L світлових потоків i і j поляризації.

Таким чином, вирази (2.7), (2.8), (2.9) є основоположними рівняннями, що дозволяють провести розрахунки нормальних напружень на основі рефракційних вимірів, проведених в оптично прозорих матеріалах в областях з великими градієнтами напружень. Крапка (x_0, y_0) є початковою крапкою вимірів і так само, як у фотопружності, напруження в ній потрібно знати, чи апіорі вибирати саму крапку так, щоб їх легко було розрахувати з умов постановки експерименту.

Цікавою є лінія рефракційних вимірів, при русі по якій похідні по куту дуже малі чи звертаються в нуль (лінії ізокліни, лінії симетрії моделі чи зрізу замороженої фотопружної моделі). Випишемо вирази для суми нормальних напружень за умови, що

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0; H = \int_{x_0}^x \tau_{xy} \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = 0; T = \int_{y_0}^y \tau_{xy} \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy = 0;$$

Тоді

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_0 + \frac{1}{c_x} \int_{x_0}^x (\gamma_x \cos \alpha \mp \theta_x \sin \alpha) dx + \frac{1}{c_y} \int_{y_0}^y (\theta_y \cos \alpha \pm \gamma_y \sin \alpha) dy, \quad (2.11)$$

де

$$\sigma_0 = \sigma_x(x_0, y_0) + \sigma_y(x_0, y_0).$$

Висновки

Головним висновком вищевикладеного, можна вважати, що рефрактометричні виміри дозволяють роздільно одержувати значення напружень σ_x і σ_y , що неможливо для поляризаційно-оптичного методу.

Обмеження методу полягає в необхідності проводити дослідження на плоских моделях чи „зрізах” моделей, але в ряді випадків цю вимогу можна виключити використовуючи спеціальні прийоми.

Література

1. M. Born, E. Wolf. Principles of optics. Moscow, Science, 1973, 720 s.
2. Hauff B., Grigul U. Optical methods in heat transfer. Moscow, World, 1973, 240 s.
3. Hecher F.W., Kepich T.Y., Pindera J.T. Non-rectilinear optical effete in mechanics of Solid optical method in mechanics // Ed. A. Lagarde Sijthoff Noordhoff alphen, an den Rijn, 1981, p.123.
4. Coker E., Filon L. An optical research technique of pressure stresses. Leningrad, OHTI, 1936, 633 s.

5. Photoelastic analysis. /under edition N. A. Strelchuks, G.L. Hesins. Moscow, Building publishing, 1975, 317 s.
6. Udalov E.P., Kepich T.Y. Influence of a refraction of light to accuracy of photoelastic measurements in models imitating composite materials. The theses of the reports I of an All-Union symposium "Mechanics and physics of destruction of composite materials and designs", Ujgorod, 1988, т. 1, s. 31.
7. Udalov E.P., Kepich T.Y. Separation of stresses with usage of a refraction of light. The theses of the reports I of an All-Union symposium "Mechanics and physics of destruction of composite materials and designs ", Ujgorod, 1988, т.1, s. 32-33.
8. Євген Удалов. Рефракція лазерного випромінювання в області високих градієнтів напружень анізотропних середовищ. Голографические методы в науке и технике. Л. РТІ ЛІЯФ, 1990, 1-33с.
9. E. Udalov, Oliynik. Determination of all stress tensor components on the object surfaces using holographic interferometer. The volume "Current Research on Holography and interferometric methods for object properties measurements" is received by SPIE. 2003, N 5134.

Надійшла до редакції 14.02.2005

УДК 520.17

Юрій А. Хомич¹, Євген П. Удалов²

**Про можливість створення
планарного магнітооптичного
спектроаналізатора із
зчитуванням інформації на
 $\lambda = 0,63\text{мкм}$**

На базі експериментальної реалізації розглядається можливість створення магнітооптичного спектроаналізатора планарної конфігурації для аналізу магнітних сигналів, які копіюються на вісмутвмістні епітаксціальні плівки ферит – гранатів. Аналізу піддаються дифракційні спектри, які виникають при взаємодії сигналів і лазерного випромінювання.

Ключові слова: планарний, спектроаналізатор, магнітооптичний.

¹E-mail: grachev@rada.gov.ua

²E-mail: udalov@univ.kiev.ua

Yuriy A. Khomich¹, Evgen P. Udalov²

**To the possibility of planar
magneto-optical spectroanalyzer
construction with information
reading at $\lambda = 0,63\mu\text{m}$**

On the base of experimental realization the possibility of planar magneto-optical spectroanalyzer configuration construction for investigation of magnet signal recordings, copied at Bi-epitaxial ferrite-garnet films, is regarded. Diffraction spectra, appeared during signal and laser light interaction, are analyzed.

Key Words: planar, spectroanalyzer, magneto-optic.

Вступ

Значний науковий та практичний інтерес становлять розробки інтегрально-оптичних аналізаторів спектрів широкопasmових радіосигналів, магнітних сигналів і т.п. Раніше найбільші успіхи у цій галузі були досягнуті при дослідженнях та дослідно-конструкторській реалізації акустооптичних (АО) пристроїв[1]. У наш час значну увагу привертають магнітооптичні явища (МО), пов'язані з дифракцією світла на магнітних неоднорідностях в ЕПФГ з рідкоземельним легуванням [2]. Це зумовлено тією обставиною, що швидкодія інтегрально оптичних пристроїв спектрального аналізу, які базуються на подібних ефектах, при дифракції світла на магнітних неоднорідностях типу магнітостатичних хвиль (МСХ), на 1-2 порядки вища, ніж у АО - пристроїв (групова швидкість МСХ та звуку відповідно $v_{\text{МСХ}} \approx 10^7 \div 10^8 \text{ см/с}$ і $v_{\text{зв}} \approx 10^5 \div 10^6 \text{ см/с}$). Окремий інтерес становлять дослідження по копіюванню та візуалізації в структурах Bi-ЕПФГ широкопasmових сигналів, зареєстрованих на магнітних носіях, що дозволяє виконувати інформаційний аналіз таких сигналів у стаціонарному і нестационарному

режимах реєстрації та обробки на основі принципів, апробованих в АО, але у більш широкому динамічному діапазоні частот, що реєструються.

В експериментальних інтегральних МО-пристроях на основі ЕПФГ [6] в якості інформаційного носія використовується лазерне випромінювання ближнього ІЧ-діапазону, оскільки власне поглинання ЕПФГ в області $\lambda = 1,3 \div 5,5$ мкм дуже мале ($\leq 0,1 \text{ см}^{-1}$) [7,8]. Це викликає значні труднощі при юстуванні і експериментальних дослідженнях лабораторних макетів і дослідних зразків згаданих пристроїв. Разом з цим, пропускання на рівні 0,8 для $\lambda = 0,6$ мкм матеріалів підкладок $Gd_3Ga_5O_{12}$ (ГГГ) та $Ca_3[Nb,Gd]_2Ga_3O_{12}$ (КНГГ) для вирощування *Bi*-ЕПФГ дозволяє здійснити на основі деяких МО-ефектів (зокрема, ефектів Керра) спробу створення інтегрально-оптичних пристроїв обробки інформації, що функціонують у видимому оптичному діапазоні.

Схема і опис експерименту

У даній роботі *Bi*-ЕПФГ складу $(Bi,Tm)_3(Fe,Ga)_5O_{12}$ на підкладці ГГГ використовувались для копіювання сигналограм, записаних на магнітних стрічках ORWO-640, на основі розроблених в [3-5] методик. Для запису сигналограм тест-сигналів на дискретних частотах в діапазоні 20 – 100 кГц використовувалась стандартна магнітофонна система з швидкістю протяжки стрічки (МС) 6 см/с. При безпосередньому контакті ЕПФГ з поверхнею МС, на якій записаний фрагмент тест-сигналу, в об'ємі ЕПФГ з власною плоско-паралельною смуговою доменною структурою (ПСДС) відбувалась перебудова цієї структури у відповідності з розподілом намагніченості на поверхні МС (копіювання), яку, при необхідності, можна спостерігати в поляризованому світлі (візуалізація). Скопійована структура магнітних неоднорідностей формує в об'ємі *Bi*-ЕПФГ фазову дифракційну ґратку, при проходженні чи відбиванні від якої світловий пучок формує дифракційні картини відповідної конфігурації, параметри якої безпосередньо пов'язані із спектральним складом зареєстрованої сигналограми.

Схема експерименту наведена на Рис. 1. Поверхня *Bi*-ЕПФГ 1 під дією зусиль 6, що притискають, входить у контакт з МС 3 з записаними фрагментами сигналограм 4. Випромінювання He-Ne лазера 8 з допомогою 100 %-го поворотного дзеркала 9 спрямовувалось на поверхню підкладки ГГГ 2 і, послідовно, проходячи через об'єм ГГГ та відбиваючись від меж розділу ГГГ-ЕПФГ і ГГГ-повітря, доходить до торця підкладки, який слугує своєрідним оптичним екраном, через який виводиться в оточуючий простір. При взаємодії з межею розділу ГГГ-ЕПФГ світловий потік дифрагує на магнітних неоднорідностях

скопійованої сигналограми та формує дифракційний спектр, 0-й та ± 1 -й порядки якого у вигляді окремих світлових пучків формують просторову структуру розподілу інтенсивностей дифракційних максимумів (їх переріз в площині спостереження 10) поза пристроєм для її наступної реєстрації та аналізу.

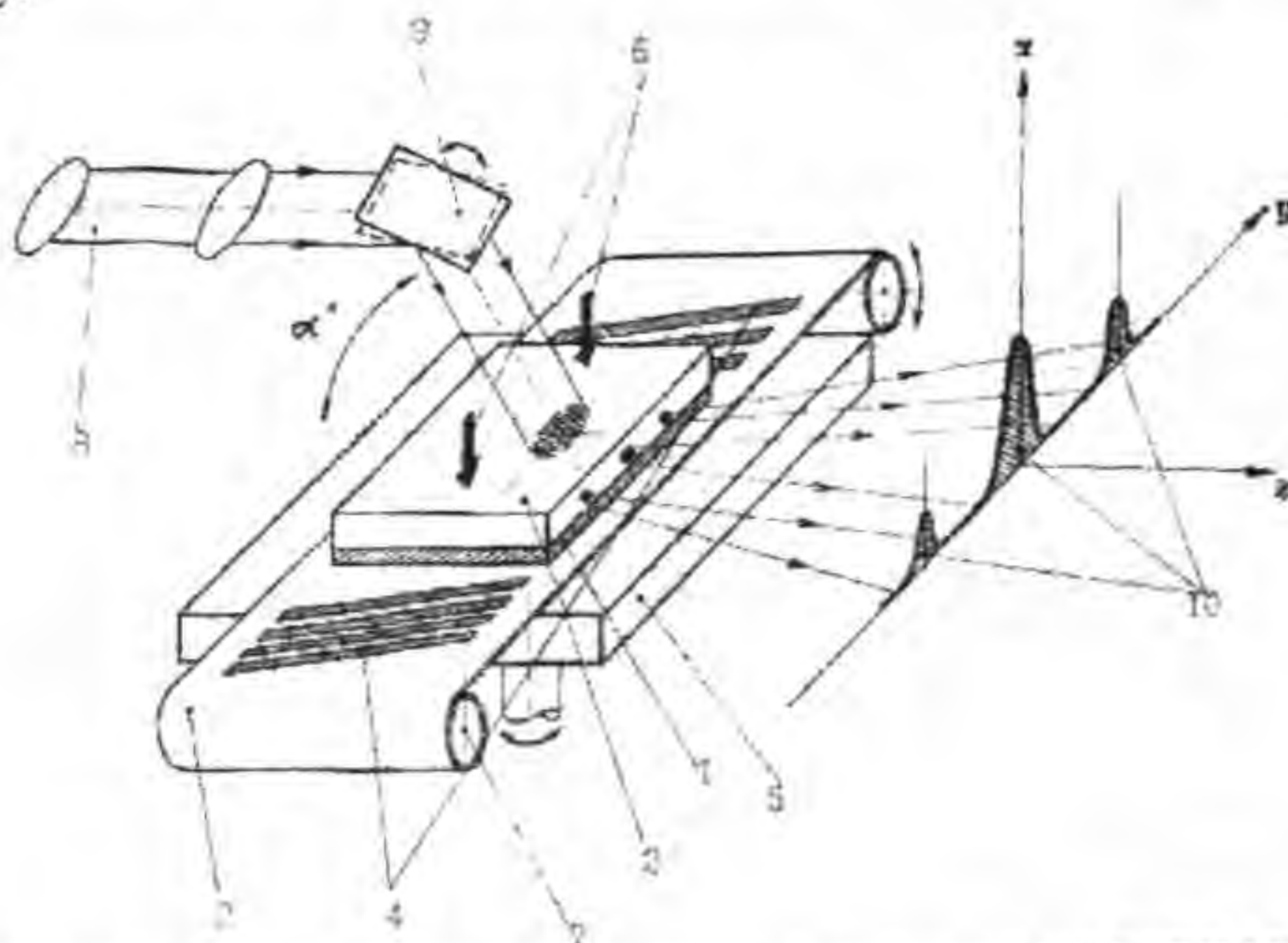


Рис 1. Схема проведення МО експерименту на плівці *Bi-EПФГ*.

Пристрій змонтований на основі 5 з можливістю повороту по вертикальній осі для узгодження напрямку розповсюдження падаючого світлового пучка і орієнтації фрагментів скопійованої сигналограми. Умови експерименту передбачали можливість поступально - зворотньої протяжки МС за допомогою пристрою 7 для підведення під зразок ЕПФГ відповідної ділянки сигналограми і здійснення циклу копіювання сигналограми – зчитування її лазерним пучком – формування дифракційного спектру – реєстрація та аналіз просторового розподілу інтенсивностей картини дифракції (за допомогою відикону ЛІ-423 і TV монітору).

Розглянемо більш детально конфігурацію експерименту (Рис. 2а). Лазерний промінь 5 на $\lambda = 0,63$ мкм, що падає на поверхню розділу підкладки з ГГГ 2 і повітря під кутом α° , заломлюється в об'ємі ГГГ (промінь 7) і частково відбивається від межі розділу повітря - ГГГ (промінь 6). Заломлений промінь 7 далі на межі розділу ГГГ - *Bi-EПФГ* 1 частково відбивається (при цьому він не взаємодіє з наведеними в 1 об'ємними магнітними неоднорідностями від сигналограми 4, і тому в подальшому не розглядається), частково заломлюється у середовище 1, здійснює дифракцію з відбиттям від наведеної фазової дифракційної ґратки 3, відбивається назад у середовище 2, на межі розподілу ГГГ - повітря знову

частково заломлюється та частково відбивається назад до межі розділу ГГГ-ЕПФГ. Тут частина променя знову заломлюється у середовище 1, але внаслідок значного поглинання (на $\lambda = 0,63$ мкм для *Bi*-ЕПФГ коефіцієнт оптичного поглинання $\alpha \approx 10^3 \text{ см}^{-1}$) вже на цьому етапі співвідношення інтенсивностей променів (відбитого і заломленого на межі розділу ГГГ-*Bi*-ЕПФГ) складе $\approx 10^3$ (без урахування реального коефіцієнту відбиття R на межі розділу, який залежить від чистоти обробки поверхні підкладки, на якій вирощена плівка *Bi*-ЕПФГ). Таким чином, променями, що заломились у середовище 1, можна буде знехтувати при подальшому розгляді. Наприкінці цього процесу частина променя 7, яка взаємодіяла із структурами 3, здійснює відбиття від меж розділу повітря - ГГГ і ГГГ -*Bi*-ЕПФГ. Надалі, внаслідок значних втрат на заломлення на вказаних межах розділу він значно затухає і формує вихідний пучок 8, що підлягає реєстрації. Змінюючи кут α^0 падіння первинного променя 5 на поверхню підкладки ГГГ 2, можна змінювати кількість його відбиттів на межах розділу середовищ: повітря - ГГГ і ГГГ - *Bi*-ЕПФГ до виходу через торець підкладки, а значить, і його затухання внаслідок цих відбиттів (як підкреслено вище, поглинання в ГГГ на $\lambda = 0,63$ мкм незначне). Виходячи із закону заломлення світла на межі розділу двох середовищ, покладаючи у даній конфігурації, що d – товщина підкладки ГГГ, L – відстань від початкової точки падіння променя 5 до вихідного торця підкладки 2, $2x$ – відстань між сусідніми точками відбиття променя на межі розділу повітря - ГГГ, легко можна показати, що

$$2x = \frac{2d \cdot \cos \alpha^0}{\sqrt{n_2^2 - \cos^2 \alpha^0}} \quad (1),$$

тоді загальне число відбиттів на межі розділу, що розглядається:

$$N = \frac{L}{2x} = \frac{L(\sqrt{n_2^2 - \cos^2 \alpha^0})}{2d \cdot \cos \alpha^0} \quad (2).$$

У даному експерименті $\alpha^0 = 40^\circ$, $L = 5$ мм, $d = 300$ мкм, $n_2 = 1,95$, тоді $N \approx 19$ (для геометричного променя 5 без урахування реальної товщини пучка), що, незважаючи на втрати за рахунок заломлення у повітря компонентів 6 первинного променя 5, дозволило спостерігати на виході з торця підкладки картину 0-го та ± 1 -х дифракційних порядків (1, 2 та 3 на Рис.3) за допомогою оптичної приймальної системи виконаної на базі відикона ЛІ-423 і TV монітора. Картина дифракційних порядків, що спостерігалась, з урахуванням оптичного підсилення приймальної системи, на екрані відеомонітора відзначалась достатньо високим співвідношенням сигнал/шум, щоб, застосувавши відпрацьовану методику оптичного порогового обмеження [9], виключити растровий фон екрану монітора для наступного фотометрирування розподілу інтенсивностей фрагментів зображення. При $\alpha^0 = 0^\circ$ і заданих значеннях L, d, n_2 отримуємо $N \approx 14$. Крім того, N можна зменшити при заданому α^0 , зменшуючи L . Таким

чином, зменшуючи α^0 та L , можна добитись збільшення інтенсивності дифракційної картини на виході внаслідок зменшення втрат на відбиття на межі розділу ГГГ-ЕПФГ, на відбиття та заломлення на межі розділу ГГГ-повітря.

Слід відзначити, що відповідне нанесення відбиваючого діелектричного покриття на межу розділу ГГГ-повітря дозволяє виключити втрати на заломлення у повітря (промені 6) в $N-1$ точках (за виключенням первинної точки падіння променя 5), що додатково підвищить інтенсивність дифракційної картини. Однак при цьому вже не можна буде нехтувати вкладом у зображення, що формується, від дифракційних картин при взаємодії променів 7 з наступними фрагментами магнітної сигналограми на межі розділу ГГГ-ЕПФГ і в об'ємі ЕПФГ. Це приведе до суттєвого ускладнення (збільшення інформативності) вихідної дифракційної картини, що особливо важливо у випадку, коли скопійована магнітна сигналограма на межі розділу ГГГ-ЕПФГ описується деякою функцією $Af(z) = M(z)$, тобто є фазовою дифракційною ґраткою складного широкосмугового сигналу, при детермінованому інформаційному аналізі (класифікації і розпізнаванні) якого важлива додаткова інформаційна надмірність (див., наприклад, [10]).

Конфігурація експерименту і МО-структура, що використовувалась, свідчать про те, що на межі розділу ГГГ-ЕПФГ мають місце ефекти Керра [11], оскільки відбувається відбиття світлового променя від поверхні МО-середовища 3. У даній структурі вектор намагнічення $\vec{M}$ лежить у площині плівки 3, а його орієнтація (яка визначається магнітною сигналограмою, що підлягає копіюванню) відносно площини падіння світлового променя 7 на межу розділу ГГГ-ЕПФГ може змінюватись при повороті основи 5 пристрою (Рис. 1) по вертикальній осі. При цьому можуть бути реалізовані меридіональний, екваторіальний і орієнтаційний ефекти Керра. У другому випадку (коли $\vec{M} \perp$ площині падіння світлового променя 7 і знаходиться у площині ЕПФГ), на відміну від першого та третього, повороту площини поляризації відбитого світла не відбувається. Крім того, відомо, що при дифракції світла на смугастій доменній структурі у 0-му порядку дифракції світло поляризоване таким же чином, як і у падаючому промені, а в інших – ортогонально [2 с.122], що і спостерігалось експериментально при розміщенні поляризатора, що обертається, перед апертурою оптичного приймача. Таким чином, деполаризація при відбиттях на межах розділу середовищ повітря - ГГГ і ГГГ-ЕПФГ впливає на промені дифракційних порядків в однаковій мірі, і на виході переважна ортогональність поляризації 0-го та вищих порядків дифракції зберігається, що дозволяє розділити їх при реєстрації та аналізі.

Важливою, є можливість реалізації падіння світлового пучка 7 (Рис. 2а) на межі розділу середовищ 1 та 2 під кутом Брюстера, тому що при

цьому відбитий промінь буде повністю поляризований (без урахування деполяризуючого впливу неоднорідностей на межі розділу).

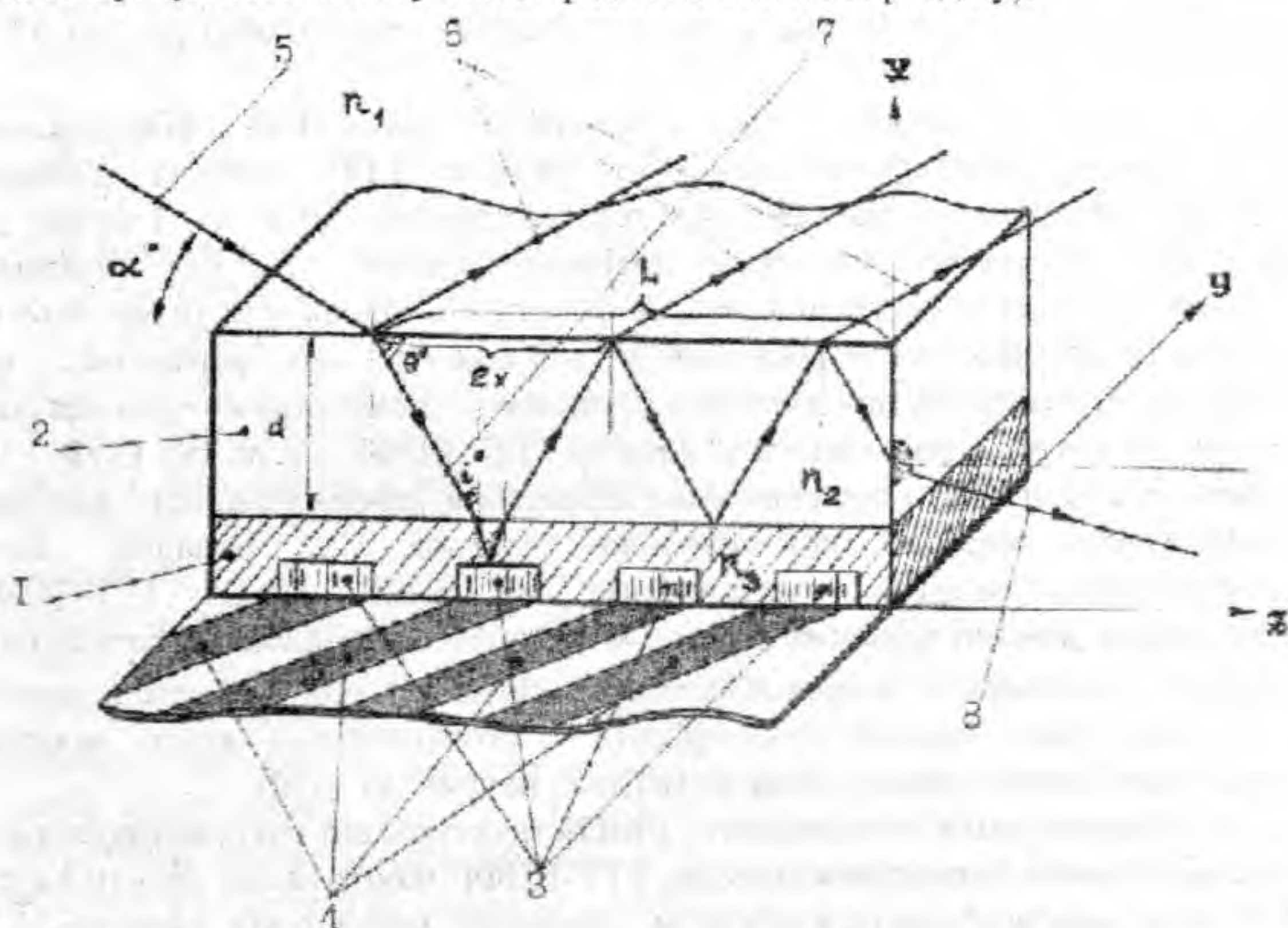


Рис 2а. Падіння світла на межу розділу середовищ під кутом Брюстера.

Для кута Брюстера i^0 виконується співвідношення:

$$\operatorname{tg} i^0 = \frac{n_3}{n_2} = \operatorname{ctg} \theta^0 \quad (3).$$

Оскільки $\frac{\cos \alpha^0}{\cos \theta^0} = n_2$ ($n_1 = 1$), то $\operatorname{ctg} \theta^0 = \frac{\cos \alpha^0}{\sqrt{n_2^2 - \cos^2 \alpha^0}} = \frac{n_3}{n_2}$ (4),

і для забезпечення значення i^0 у відповідності до (3) необхідне значення

$$\alpha^0 = \arccos \left(\frac{n_2 n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \right) \quad (5).$$

З (5) можна побачити, що оскільки для наших умов $n_2, n_3 > 1$, то введення випромінювання під будь-яким кутом α^0 у конфігурації Рис. 2а для забезпечення співвідношення (3) неможливе ($\cos \alpha^0 > 1$).

Розв'язання проблеми існує при видозміні конфігурації експерименту (Рис. 2б), тобто введення випромінювання здійснюється через скос переднього торця підкладки ГТГ 2 під кутом γ^0 до межі розділу ГТГ - ЕПФГ. У цьому випадку $\theta^0 = 90^\circ + \gamma^0 - i^0$, а $\alpha^0 = \arccos(n_2 \cos \theta^0)$. При $n_2 = 1,95$, $n_3 = 2,2$, $\gamma^0 = 30^\circ$ маємо $i^0 = 48,45^\circ$, $\alpha^0 = 51,9^\circ$. Довжина скошу торця

$l = \frac{d}{\sin \gamma^0}$ при $d = 3 \cdot 10^{-4}$ м дорівнюватиме $l = 6 \cdot 10^{-4}$ м, що цілком реально виконати при відповідній шліфовці і наступній хімічній поліровці поверхні скошу у відповідності, наприклад, до [15].

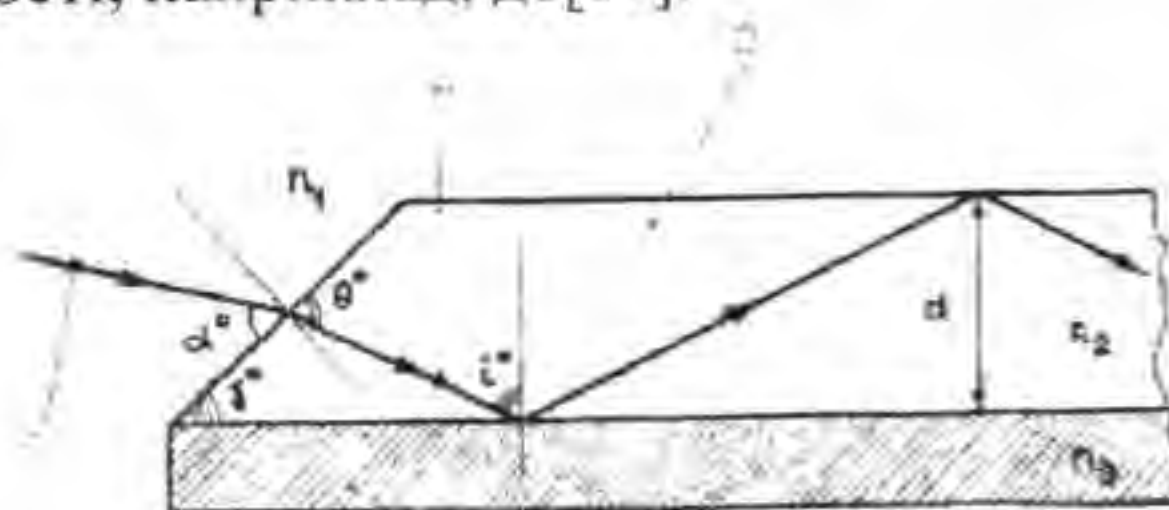


Рис 2б. Введення випромінювання здійснюється через скос переднього торця підкладки ГТГ 2 під кутом γ^0 до межі розділу ГТГ - ЕПФГ

При діаметрі пучка випромінювання $S = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м лазера ЛГ-126 така величина l дає можливість при юстуванні використати центральну, найбільш однорідну частину пучка. Крім того, така величина i^0 приводить до суттєвого зменшення кількості N відбиттів від межі розділу повітря - ГТГ (а значить, і відповідної деполаризації, і затухання): при $L = 5 \cdot 10^{-3}$ м і $d = 3 \cdot 10^{-4}$ м маємо (Рис. 2а) $2x = 2d \cdot \operatorname{tg} i^0$ і $N = \frac{L}{2x} \approx 7$.

Використання торцевого (під кутом γ^0) введення променя 5 у ГТГ адекватне призмовому введенню, однак виготовлення, встановлення та юстування призми відповідних розмірів і якості без порушення планарності конфігурації експерименту здійснити практично неможливо. Таким шляхом можна здійснити практичну оптимізацію пристрою за параметрами поляризації, затухання та введення лазерного випромінювання.

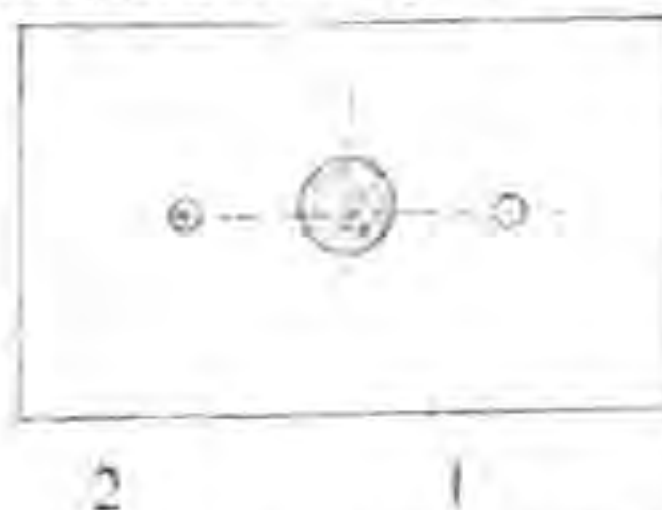


Рис 3. Інтерпретація нульового та симетричних непарних дифрагованих порядків

Картина наявності нульового та симетричних ненульових непарних порядків дифракції (Рис. 3) спостерігається при колінеарній геометрії взаємодії світлового пучка і несиметричної смугової доменної структури у вигляді фазової дифракційної ґратки [12]. При цьому співвідношення, що визначає кути дифракції світла θ^0 на смуговій доменній структурі:

$$d \times \sin \theta = n \lambda \quad (6),$$

де $A = d_1 + d_2$ - період доменної структури, d_1 та d_2 - ширини сусідніх доменних смуг з протилежними орієнтаціями векторів намагніченості, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - порядки дифракції, λ - довжина хвилі світла.

Так, для Bi -ЕПФГ складу $(BiNdYb)_3Fe_5O_{12}$ з системою сформованих смугових доменів шириною $d = 0,65$ мкм при відсутності поля зміщення і $\lambda = 0,63$ мкм кут θ^0 у 1-му порядку дифракції склав $\approx 30^\circ$ [13].

Для симетричної фазової дифракційної ґратки ($d_1 = d_2$) інтенсивності дифракційних максимумів при $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ (парні порядки дифракції) дорівнюють нулю. Інтенсивність світла у ± 1 -х порядках дифракції [12] дорівнює:

$$I_{\pm} = I_0 \pi^{-2} 4 \sin^2 \left\{ \arctg \frac{2\Phi_F}{\alpha} \exp \left[- \left(\frac{2\Phi_F}{\alpha} \right)^{-1} 2 \arctg \frac{2\Phi_F}{\alpha} \right] \right\} \quad (7),$$

де I_0 - інтенсивність падаючого випромінювання;

$F_1 = \frac{2\Phi_F}{\alpha}$ - магнітна добротність МО - матеріалу;

$\Phi_F = c^{-1} \omega (n_+ - n_-)$ - питома Фарадеївське обертання;

$n_{\pm}$ - показники заломлення мод з право - та лівосторонньою круговою поляризацією;

c - швидкість світла;

α - питома поглинання світла МО-матеріалом.

Згідно [14], гранична роздільна здатність оптичного мікроскопу по ширині смугового домену d для косих пучків світла складає

$$d \approx [2(B_1 + B_2)]^{-1} \lambda \quad (8),$$

де B_1, B_2 - апертури конденсора і об'єктива мікроскопу відповідно. У випадку використання імерсії $B_2 = 1,5$, і при $B_1 = 1,0$ отримуємо $d \approx \frac{\lambda}{5}$, тобто для $\lambda = 0,63$ мкм, $d \approx 0,13$ мкм.

Вважаючи $d = \Lambda$ - просторовій довжині хвилі запису широкосмугового сигналу 4 на магнітній стрічці (МС) 3 (Рис. 1), отримуємо при заданій швидкості протягування МС при запису сигналу $v = 6$ см/с значення найвищої частоти у спектрі зареєстрованого при магнітному запису сигналу

$$2\pi F = \frac{2\pi v}{\Lambda} = 1,45 \text{ МГц. В умовах нашого експерименту } \Lambda \approx 10 \text{ мкм і}$$

$2\pi F = 38$ кГц (при тому ж значенні v). При цьому на підставі (3) для ± 1 -го дифракційного порядку, $\theta^0 = \arcsin \frac{\lambda}{4} = 1,8^\circ$, що дозволяло спостерігати

просторовий розподіл інтенсивностей дифракційних максимумів (10 на Рис.1), яке відповідає картині (схема якої представлена на Рис. 3) на екрані відеомонітора, зафіксованої з відстані $x = b \cotg \theta^0 \approx 190$ мм, де $2b = 12$ мм - діаметр мішені відикона ЛІ-423, при використанні об'єктива Геліос 44 -2. В процесі експерименту фрагменти запису сигналів 4 на МС 3 при

копіюванні з МС на *Bi*-ЕПФГ 1 (Рис.1) та відображенні відповідної картини дифракції на екрані відео монітора (Рис.3) залишались нерухомими відносно площини ЕПФГ 1, що притискалась до МС, і тому зображення на TVмоніторі залишалось стаціонарним. Протягування МС 3 за допомогою стрічкопротягуючого механізму 7 здійснювалось у старт –стопному режимі між окремими циклами копіювання і фіксації дифракційних картин.

Безпосередня інформація про спектральний склад широкосмугових сигналів, що досліджуються, присутня у картині дифракції світла на магнітних неоднорідностях скопійованої магнітної сигналограми у *Bi*-ЕПФГ. Згідно [2 с.53-56], при брегівській дифракції світла скрізь фазову ґратку (напрямок розповсюдження світла співпадає з напрямком намагніченості у плівці, тобто $\vec{k} \parallel \vec{M}(\vec{r}, t)$) у тонкій плівці з координатною системою у відповідності до Рис. 2а розподіл світлового поля для дифракції Фраунгофера представляється у вигляді:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{t}(y', z') E_0 \exp[i(k_y y + k_z z)] dy' dz' \quad (9),$$

де $k_y = (cx)^{-1} \cdot \omega y$; $k_z = (cz)^{-1} \cdot \omega z$; $a = -(bx)^{-1} \cdot i \exp\left\{c^{-1} \cdot i\omega \left[x + (2x)^{-1} (y^2 + z^2)\right]\right\}$;

$\hat{t}(y', z') = \hat{T}(y', z', h) G(y', z')$, $\hat{T}$ - матриця Джонса середовища, h - товщина *Bi*-ЕПФГ,

$$G = \begin{cases} 1 & \text{- у середині області засвічування плівки,} \\ 0 & \text{- по за зоною засвічування.} \end{cases}$$

Таким чином, компоненти поля $\vec{E}$ у площині спостереження з точністю до множника a дорівнюють фур'є - образам поля у вихідній площині плівки (з координатами x', y, z') та, відповідно, фур'є - образам розподілу намагніченості $\vec{M}(\vec{r}, t)$ всередині *Bi*-ЕПФГ. Для нашого випадку дифракції при відбитті світла від межі ГГГ-ЕПФГ у (9) необхідно замінити x на $-x$.

Зміна спектрального складу широкосмугового сигналу, що аналізується, приводить до змін періоду зареєстрованих на МС сигналограм 4 (Рис. 2а) та періоду фазової дифракційної ґратки $\vec{M}(z, t)$ в 1, що у підсумку приводить до відповідного зміщення та зміні інтенсивностей вищих дифракційних порядків відносно нульового (Рис. 3). Реєстрація цього процесу за допомогою лінійки фотоприймачів у зоні спостереження 10 (Рис. 1) для наступної обробки дозволяє розв'язати поставлене завдання спектрального аналізу.

Особливу увагу привертає можливість спектрального аналізу нестационарних широкосмугових сигналів. Не аналізуючи у цій роботі динамічні характеристики відповідних фотоприймальних пристроїв, треба

відзначити, що питання полягає у можливості синхронного слідкування фазовою дифракційною ґраткою, що формується, змін намагніченості $\bar{M}(z, t)$ магнітної сигналограми, що копіюється (Рис. 2а). Швидкодія такого процесу визначається швидкістю зміни періоду смугової доменної структури при взаємодії доменів з полем розсіювання магнітної сигналограми. Найбільша зміна спостерігається у магнітоодновісних Ві-ЕПФГ з низьким значенням коерцитивної сили (≈ 1 Е) та високою магнітооптичною добротністю

$$F_1 = \frac{2\Phi_F}{\alpha}, \text{ де } \Phi_F \text{ і } \alpha - \text{відповідно питоме Фарадеївське обертання та}$$

поглинання матеріалу плівки[16]. У таких плівках вісь анізотропії нахилена відносно нормалі до площини плівки, і в них формується власна смугова доменна структура[17]. При взаємодії такої структури з магнітним полем розсіювання сигналограми, зареєстрованої на МС, відбувається зміна періоду доменної структури і її поворот у площині плівки, тобто фазова дифракційна ґратка, що формується, "відслідковує" площинно-часовий розподіл поля розсіювання магнітної сигналограми в МС. У [18] описана магнітооптична головка для відтворення магнітного запису відеосигналів з просторовими довжинами хвиль запису $3 \div 250$ мкм у реальному масштабі часу із співвідношенням сигнал/шум 45 дБ.

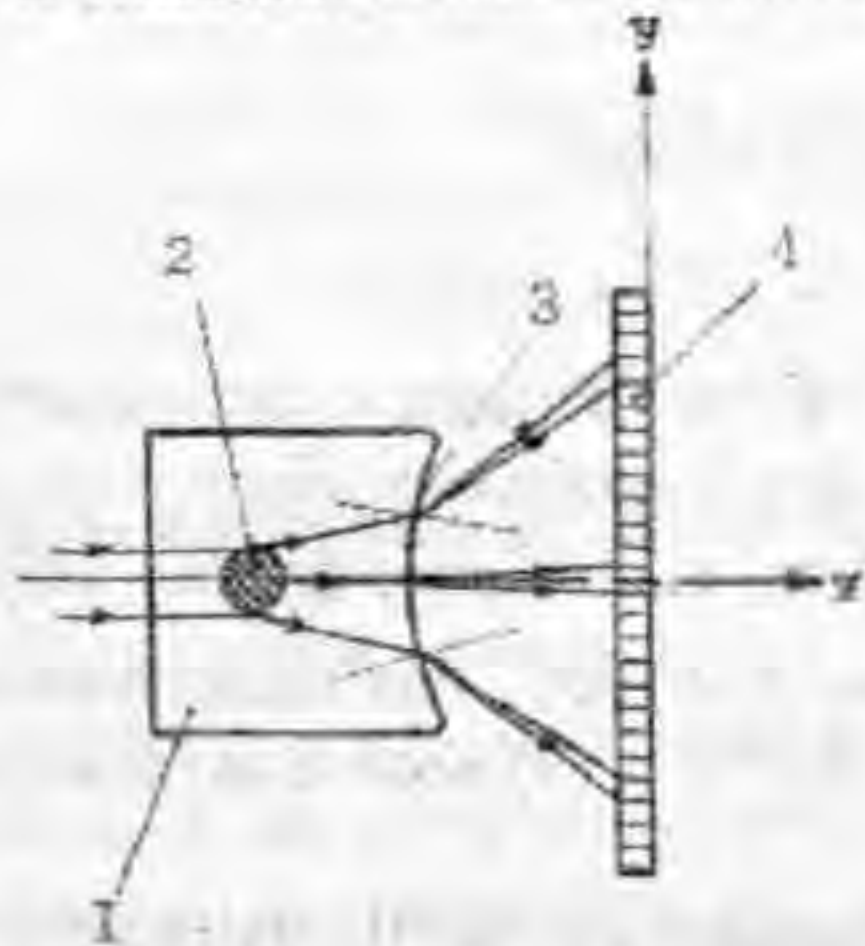


Рис.4а

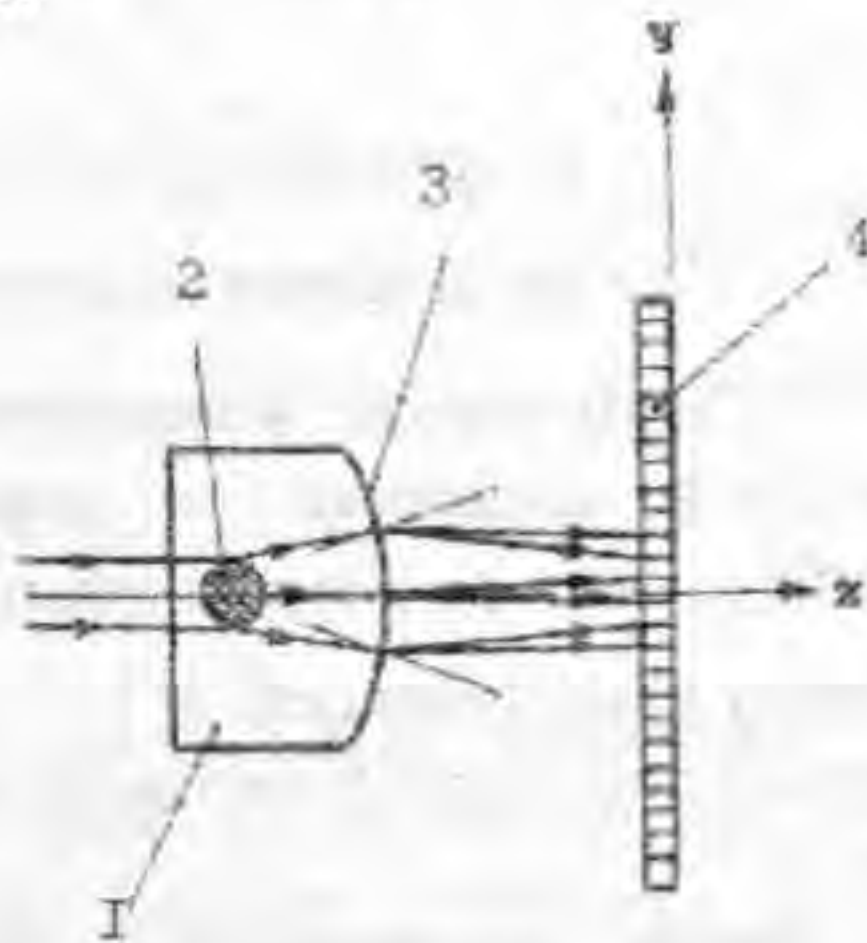


Рис.4б.

Значну практичну зацікавленість становить можливість використання відповідної конфігурації вихідного торця підкладки ГТГ для геометричного узгодження дифракційної картини на виході пристрою з фотоприймачами. На Рис. 4а, б показано, що при падінні на поверхню плівки 1 світлового пучка 2 конфігурація вихідного торця 3 (з урахуванням різниці показників заломлення плівки і повітря) після відповідної обробки може виконувати роль планарного лінзового елементу (по аналогії з лінзами Люнеберга у планарних АО-спектроаналізаторах).

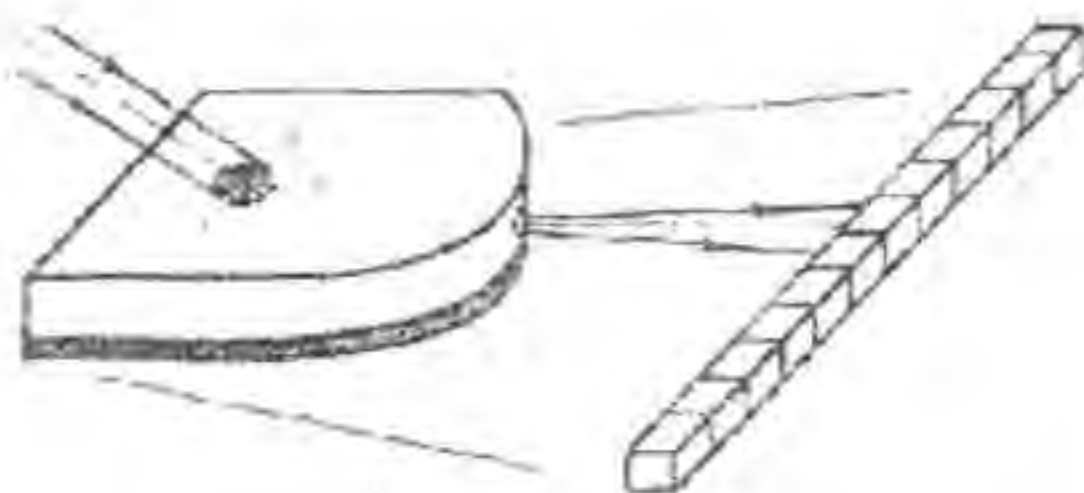


Рис.4в.

Така відповідна двовимірною лінза (від'ємна або додатна) забезпечує оптимальне узгодження апертур окремих фотоприймачів лінійки 4 з характерними діаметрами дифракційних максимумів лінійного дифракційного спектру, що формується. Таким чином можна створити реальну планарно-інтегральну конфігурацію МО-спектроаналізатора (Рис. 4в).

Висновки

1. Запропонована і експериментально продемонстрована можливість створення МО - спектроаналізатора широкосмугових сигналів магнітного запису при копіюванні їх з МС на Ві-ЕПФГ із зчитуванням інформації лазерним випромінюванням на $\lambda = 0,63$ м км. Використання світлового випромінювання у видимому діапазоні довжин хвиль суттєво полегшує (у порівнянні з використанням інфрачервоного діапазону) юстування та лабораторні дослідження подібних пристроїв.
2. Розглянуті магнітооптичні і оптичні ефекти, що мають місце у запропонованій конструкції спектроаналізатора, можуть бути використані для оптимізації функціональних і конструктивних параметрів даного пристрою.
3. На підставі виконаного у даній роботі розгляду можна зробити висновки про доцільність подальших експериментальних досліджень фізичних процесів у запропонованому пристрої, у тому числі при спектральному аналізі нестационарних широкосмугових сигналів.

Література

1. Белошицкий А.П., Комаров В.М., Кречетень Б.П., Сапожников Б.Т. // Зарубежная радио-электроника. 1981. № 3. С. 51 – 70.
2. Звездин А.К., Котов В.А. Магнитооптика тонких пленок // М.: Физмат «Наука». 1988.
3. Введенский Б.С., Лисовский Ф.Б., Червоненкис А.Я. Магнитооптическая визуализация магнитной записи // Техника кино и телевидения. 1978. № 6. С. 11 – 16.

4. Червоненкис А.Я., Кубраков Н.Ф. Магнитооптическая визуализация и топографирование магнитных полей // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 11. С. 696 – 699.
5. Давиденко И.И., Дидык Э.П., Калюжный А.Д., Коваленко В.Ф., Тычко А.В. Воспроизведение высокоплотной термоостаточной записи на магнитном носителе информации // Техника кино и телевидения. 1993. № 2. С. 34 – 39.
6. Tsai C.S., Young D., Adkins L. e.a. Planar guided-wave magneto-optical diffraction by magnetostatic surface waves in *YIG* *GGG* Waveguides // 7th Top. Meet. Integr. and Guided Wave Opt. 1984. Kessimle, Florida. P. TuB3/1 – TuB3/4.
7. Hibiya T., Nakayama J. Optical absorption of liquid phase epitaxial garnet films at $1,3 \mu\text{m}$ wavelength for magneto-optical application // J. Appl. Phys. 1983. V. 54. № 12. P. 7110 – 7113.
8. Scott G.B., Lacklison D.E., Page J.L. Absorption spectra of $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ (*YIG*) and $\text{Y}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}:\text{Fe}^{3+}$ // Phys. Rev. 1967. V. 10. № 3. P. 971- 985.
9. Хомич Ю.А., Марченко С.Н., Попов Ю.П. Возможность выявления замаскированных знаков документов с помощью пространственного модулятора света “ПРИЗ” // Сб. “Криминалистика и судебная экспертиза” // К.: Изд-во при КГУ “Вища школа”. 1984. Вип. 28. С. 77 – 81.
10. Обработка изображений и цифровая фильтрация (под ред. Т. Хуанга) // М.: Мир. 1979.
11. Кринчик Г.С. Физика магнитных явлений // М.: МГУ. 1985. С. 294 – 301.
12. Haskai H.M. // IEEE Trans. Magn. 1970. V. 6. P. 542.
13. Numata T. e.a. // Ibid. 1980. V. 16. P. 1197.
14. Ландсберг Г.С. Оптика // М.: Наука. 1976. С. 928.
15. Basterfield I. // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. № 12. P. 5521.
16. Балбашов А.М., Червоненкис А.Я. Магнитные материалы для микроэлектроники // Л.: Энергия. 1980.
17. Maziewski A. The Magnetic Domain Structure in Low Anizotropy Epitaxial Garnet Films // Thin Solid Films. 1981. V. 81. P. 187 – 193.
18. Tokumary H., Nomura T.A. Magneto-optic Readout Head Using a High Permeability Flux Carrier // IEEE Trans. Magn. 1985. V. MAG.-21. № 5.

Надійшла до редакції 14.02.2005

